

2123

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MEHANIKU

DRAGAN I. MILOSAVLJEVIĆ

PROSTIRANJE TALASA U ELASTIČNIM PLOČAMA
OJAČANIM SA DVE FAMILIJE VLAKANA

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

Mentor

DR. W.A. GREEN

Beograd, 1986.

Z A H V A L N O S T I

Sa zadovoljstvom koristim priliku da se zahvalim mentoru ove disertacije Dr. W.A. Green-u za izuzetnu pomoć i neprekidni podsticaj pri izradi ovog rada. Njegovi saveti, sugestije i primedbe su uvek predstavljali korak napred u podizanju nivoa ovog rada.

Naviku da duboko ulazim u srž problema koji su predamnom posebno dugujem Dr W.A. Green-u i Dr Milanu Mićunoviću na čemu im se i ovom prilikom zahvaljujem. Svoju zahvalnost dugujem i svim članovima odeljenja za teorijsku mehaniku na Nottingham-skom univerzitetu, kao i članovima grupe za Reologiju Jugoslovenskog društva za mehaniku, koji su imali veliki uticaj na podizanje opšteg nivoa mojih istraživanja.

Veoma sam zahvalan organizaciji Science and Engineering Research Council (Velika Britanija) na finansinskoj pomoći za jednogodišnje istraživanje u okviru projekta (GR/C 39552) kada je uradjen deo ove disertacije.

Takodje se zahvaljujem organizaciji The British Council čija finansijska pomoć mi je omogućila da u dva navrata boravim na Nottingham-skom univerzitetu u Engleskoj i u neposrednom kontaktu sa mentorom ove disertacije prevaziđjem odredjene teškoće u toku izrade ovog rada.

Daktilografu Dušanki Žugić se zahvaljujem na strpljenju i pažnji prilikom kucanja ovog teškog teksta, a mašinskom tehničaru Milojević Miro-ljubu na pomoći oko tehničke obrade disertacije.

Najzad, ali ne i po značaju, moja velika zahvalnost je upućena mojoj porodici i roditeljima, jer mi je njihovo odricanje, podrška i strpljenje mnogo pomoglo da istrajem i u situacijama koje su mi se ponekad činile nepremostivim.

A U T O R

A C K N O W L E D G E M E N T S

I would like to express my thanks and gratitude to my supervisor Dr. W.A. Green for his invaluable guidance and encouragement during work on this thesis. His advice, suggestions and comments were always step forward in raising the level of this thesis.

Practice to come deep in the core of the problems I owe to Dr. W.A. Green and Dr Milan Mićunović and I am grateful to them. I am grateful to all members of the Department of Theoretical Mechanics at Nottingham University who have aided me in any way during my research there, and also to the members of Group for Rheology of Yugoslav society for Mechanics.

I am indebted to the Science and Engineering Research Council for their financial support in the form of one Year Research Grant (GR/C 39552) when parts of this thesis have been carried out.

I also extend my thanks to the British Council for Travel Grant and Academic Travel Grant (ATG/ALIS 984/125: Kragujevac / Nottingham) which enables me to overcome certain difficulties, during my work on this thesis, in direct contact with my supervisor.

My appreciation also goes to Misis Dušanka Žugić for her immaculate work and patience in typing this thesis, and to Mr Mirosljub Milojević for help during elaboration of the diagrams.

Finally, and by no means least, I wish to thank to my family and my parents because their endurance, support and patience help me to be strong and in situations which sometimes looked to me like impassable.

S A D R Ž A J

Strana

	U V O D	1
I	VLAKNIMA OJAČANI MATERIJALI I OSNOVNE JEDNAČINE...	7
	1.1. Uvod	7
	1.2. Linearizovane jednačine kretanja	9
	1.3. Linearna elastičnost - jedna familija vlakana	15
	1.4. Linearna elastičnost - dve familije vlakana..	17
	1.5. Osnovne napomene o prostiranju elastičnih talasa u čvrstim telima	23
II	PROSTIRANJE ELASTIČNIH TALASA U PLOČI OJAČANOJ SA DVE FAMILIJE NEEKSTENZIBILNIH VLAKANA,	29
	2.1. Uvod	29
	2.2. Osnovne jednačine	29
	2.3. Proizvoljan ugao prostiranja	31
	2.3.1. Antisimetrični deo rešenja	32
	2.3.2. Simetrični deo rešenja	33
	2.4. Pravac prostiranja normalan na jedan od familija vlakana	35
	2.4.1. Antisimetrični deo rešenja	39
	2.4.2. Simetrični deo rešenja	42
III	PROSTIRANJE ELASTIČNIH TALASA U PLOČI OJAČANOJ DVEMA FAMILIJAMA JAKIH VLAKANA	46
	3.1. Uvod	46
	3.2. Ekstenzibilna vlakna	47
	3.2.1. Antisimetrični mod propagacije	56
	3.2.2. Simetrični modovi propagacije	58
	3.3. Jaka anizotropija i neekstenzibilnost	61
	3.4. Proizvoljni pravac prostiranja	64
	3.4.1. Antisimetrični mod propagacije	65
	3.4.2. Simetrični modovi propagacije	71
	3.5. Pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana	76
	3.5.1. Antisimetrični modovi propagacije	78
	3.5.2. Simetrični modovi propagacije	82

	3.6. Talasi u beskonačnom kontinuumu	83
IV	APROKSIMATIVNA REŠENJA FAZNE BRZINE	85
	4.1. Uvod	85
	4.2. Osnovne jednačine	87
	4.3. Kratki talasi	90
	4.4. Dugi talasi	93
	4.4.1. Antisimetrični mod	97
	4.4.2. Simetrični modovi	98
	4.5. Uskladjena (matched) aproksimativna rešenja - - antisimetrični mod propagacije	100
	4.6. Aproksimativna rešenja - simetrični modovi propagacije	109
V	NUMERIČKI REZULTATI	114
	5.1. Uvod	114
	5.2. Antisimetrični modovi propagacije	120
	5.3. Simetrični modovi propagacije	132
VI	ZAKLJUČNA RAZMATRANJA.....	143
	L I T E R A T U R A	153

U V O D

U stalnom istraživanju materijala koji bi bili laki a velike otpornosti i modula elastičnosti zadnjih godina su učinjeni veliki naponi koji vode ka tehnološkom razvoju vlaknima ojačanih materijala. Takvi kompoziti se sastoje iz jakih vlakana koja su spojena zajedno sa slabijom i lakšom matricom od drugog materijala. Takvi materijali imaju izuzetno dobre mehaničke osobine duž vlakana dok su u poprečnom pravcu relativno slabi. Međutim, pošto je orijentacija vlakana pod kontrolom konstruktora, mi možemo da iskoristimo prednosti osobina kako vlakana tako i matrice pogodnim izborom orijentacije vlakana. Da bi kompoziti mogli da se koriste što efikasnije neophodno je razraditi što pogodniji matematički model za njihov opis. Ova teza je zasnovana na teoriji kontinuuma vlaknima ojačanih materijala. U takvom modelu vlaknima ojačanog materijala ignoše se diskretnost strukture rešetke i telo se posmatra kao kontinuum. Ovakav model veoma dobro reprezentuje čvrsto telo i posebno je koristan za one inženjerske primene kod kojih se ne zahteva detaljno poznavanje strukture čvrstog tela.

Problemi u kojima se razmatra materijal ojačan jakim vlaknima mogu znatno da se uproste uvodjenjem aproksimacije da su vlakna neekstenzibilna. Ovo matematički vodi do nekih iznenađujućih rezultata koji se ponekad čine nekorektnim, ali dublje izučavanje pokazuje jasno da je to moćna reprezentacija realnih fenomena koji su karakteristika jako anizotropnih materijala i razlikuju se od onih u izotropnom slučaju. Kinematičke pretpostavke neekstenzibilnosti u pravcima ojačanja su korisne matematičke idealizacije ponašanja jako anizotropnih materijala, ali analiza napona u takvim materijalima pokazuje da takva unutrašnja ograničenja kao posledicu imaju napone reakcije koji nisu diktirani poljem relativne deformacije već moraju biti određeni iz jednačina ravnoteže, u statičkim problemima, odnosno jednačina kretanja, u dinamičkim problemima. Idealizovana teorija je detaljno diskutovana od strane Spencer-a (1972) uz

primere velikih i malih deformacija kako za elastično tako i za plastično ponašanje. Naravno nema kompozita koji je egzaktno neekstenzibilan u pravcima vlakana. Uprkos tome predviđanja takve idealizovane teorije su dobra aproksimacija onoga što se stvarno događa u praksi kada koristimo jako anizotropne materijale. Čak i u situacijama kada idealizovana teorija nije adekvatna ona može da ukaže na alternativne metode prilaza. Istraživanja u novije vreme, zasnovana na idealizovanim vlaknima ojačanim materijalima, su pokazala da naponi reakcije ne samo da su nezavisni od relativne deformacije već su vrlo često singularni. Takvi singularni naponi mogu da se jave na površima kako kontura tako i unutar tela. U praksi takve površi se najčešće nalaze na konturama koje se poklapaju sa slojevima koji sadrže vlakna. Objašnjenje takvih singularnih površi, za realne materijale, je da one ustvari odgovaraju tankim slojevima materijala kroz koje smicajni naponi imaju veoma naglu promenu pri čemu su normalni naponi poprečnog preseka sloja veoma veliki.

U novije vreme bilo je dosta pokušaja da se prouči prostiranje talasa u vlaknima ojačanim materijalima. Čeh i Gurtin (1974) su izveli, koristeći standardne metode analize, eksplisitne izraze za amplitude pri prostiranju ravnih talasa ubrzanja u elastičnom telu ojačanom neekstenzibilnim vlaknima koje je pri rasterećenju u homogenoj konfiguraciji. Oni su zaključili da talas koji putuje u pravcu neekstenzibilnosti mora nužno biti transverzalan i da, ukoliko je napon reakcije pritiskujući i dovoljno veliki, odgovarajuća brzina prostiranja postaje nerealna tako da čak i transverzalni talas ne egzistira. Oni su našli da je uslov prostiranja infinitezimalnih progresivnih talasa isti kao kod talasa ubrzanja. Na bazi Trusdell i Noll-ove (1965) diskusije oni su zaključili da u slučaju transverzalnih progresivnih talasa nerealne brzine impliciraju eksponencijalni rast talasa bez granice što fizički znači prisustvo lokalnog izvijanja. Scott (1975) je dokazao da talasi ubrzanja ne mogu da se prostiru u materijalima koji imaju tri ili više ograničenja. On je pokazao da materijal ojačan jednom familijom neekstenzibilnih vlakana ima samo dve konačne talasne brzine ukoliko orijentacija talasa nije normalna na vlakna. Scott je zaključio da,

u slučaju kada pravac talasa nije normalan na vlakna, fazna brzina, koja odgovara vektoru pomeranja paralelnom sa vlaknima, postaje jednaka nuli. Green (1978) je skrenuo pažnju na singularno ponašanje kada se talas prostire sa normalom u okolini normale na vlakna. Njegova analiza je zasnovana na poredjenju ponašanja rešenja za jako anizotropne materijale sa neekstenzibilnim materijalima. On je zaključio da gore pomenuta fazna brzina nije jednaka nuli već da je beksonačna. To je takodje istaknuto od strane Parker-a (1981) koji je ovo objasnio analizom grupne brzine.

Prostiranje talasa u tankom sloju ojačanom jednom familijom neekstenzibilnih vlakana je proučavano od strane Milosavljevića (1980) pri čemu je takodje primenjena aproksimativna procedura sa razvijanjem pomeranja u beskonačne Legendre-ove polinome po osi poprečnoj na sloj slično kao što je to učinjeno od strane Mindlin-a i Medick-a (1959) u slučaju izotropnih ploča. Mićunović i Milosavljević (1983) su analizirali moguće modove propagacije u elastičnij ploči ojačanoj jednom familijom neekstenzibilnih vlakana. Green (1982) je dao teorijski disperzione relacije za ravne savojne talase u jako anizotropnim pločama ojačanih jednom familijom vlakana koristeći ekstenzibilnu teoriju. On je pokazao da neekstenzibilna teorija predstavlja graničnu vrednost ekstenzibilne teorije i, takodje, kako objasniti diskontinuitete fazne brzine koje neekstenzibilna teorija predviđa. Sličan prilaz su koristili Green i Milosavljević (1985) u proučavanju ekstenzionih talasa u jako anizotropnim pločama ojačanim jednom familijom vlakana. Oni su poredili neekstenzibilnu teoriju sa slučajem jake anizotropije u čitavoj oblasti talasnih dužina. Jedna aproksimativna procedura za savojne vibracije jako anizotropnih greda je data od strane Sayir-a (1980). Aproksimativna procedura za proučavanje savojnih talasa u pločama i cilindrima ojačanim jednom familijom vlakana je predložena od strane Green-a i Milosavljevića (1984). Ona je zasnovana na perturbacionom prilazu pri čemu su poredjeni materijalni i geometrijski parametri problema.

Cilj ove teze je proučavanje prostiranja talasa u beskonačnoj ploči ojačanoj dvema familijama pravih vlakana, koje leže u ravni ploče, korišćenjem teorije elastičnosti za male

relativne deformacije za slučaj neekstenzibilnih i ekstenzibilnih vlakana i da se predloži aproksimativna procedura za dobijanje talasnih brzina, polja pomeranja i napona uz moguća objašnjenja singulariteta koja predviđa neekstenzibilna teorija.

U prvoj glavi se ukratko diskutuju linearizovane jednačine kretanja i konstitutivne jednačine materijala ojačanog sa jednom ili više familijama vlakana. Prikazane su konstitutivne jednačine za materijale ojačane sa jednom i dve familije vlakana. Materijal ojačan sa dve familije pravnih mehanički ekvivalentnih vlakana reprezentuje ustvari ortotropne materijale. Konstitutivne jednačine za realni i idealizovani materijal ojačan jednom i dvema familijama ekstenzibilnih ili neekstenzibilnih vlakana su izvedene eksplicitno u većem delu sledeći izvođenje Spencer-a (1981). Zadnji odeljak je posvećen osnovnim napomenama vezanim za prostiranje elastičnih talasa u čvrstim telima.

U drugoj glavi diskutuje se prostiranje talasa u ploči ojačanoj dvema familijama neekstenzibilnih vlakana. Pokazano je da mogu odvojeno da se razmatraju simetrični i antisimetrični delovi rešenja. Da bi se kompletirala teorija bilo je neophodno postulirati egzistenciju singularnih smičućih napona na konturama. Posmatrani su talasi koji se prostiru paralelno sa stranama ploče sa proizvoljnim pravcem u ravni u kojoj leže vlakna. Dobijaju se potpuno različiti oblici rešenja u zavisnosti od toga da li je pravac prostiranja normalan na jednu od familija vlakana ili ne. Takvo ponašanje rešenja je i očekivano jer kinematski dopustive deformacije diktiraju, kao uslov postojanja netrivialnih rešenja za komponente pomeranja unutar ravni, da talasna normala mora da bude normalna na jednu od familija vlakana. Međutim, za objašnjenje takvog ponašanja neophodno je uporediti ova rešenja sa egzaktnim rešenjima jako anizotropnog materijala. Pošto takva rešenja dosad nisu izvedena bilo je neophodno izvesti ih za slučaj kada su vlakna ekstenzibilna.

U trećoj glavi se proučava prostiranje talasa u ploči ojačanoj dvema familijama ekstenzibilnih vlakana. Da bi se analizirala granična ponašanja rešenja a naročito disperzione re-

lacije bilo je potrebno dobiti pogodne oblike ovih. To je postignuto uz veoma velika algebarska transformisanja. Oblici rešenja su isti za proizvoljan ugao prostiranja i ponovo su razdvojeni antisimetrični od simetričnih modova propagacije. Disperzione relacije se lekao rešavaju matematički ali oblici u kojima su napisane su veoma pogodni za diskusiju ponašanja u graničnim slučajevima. Za kratke talase i antisimetrični i simetrični modovi daju isti izraz za talasnu brzinu koja ustvari predstavlja Rayleigh-evu talasnu brzinu. U slučaju dugih talasa antisimetrični mod daje faznu brzinu jednaku nuli dok simetrični deo rešenja vodi do kvadratne jednačine za kvadrat fazne brzine što pokazuje da za fundamentalne modove imamo dva rešenja pri čemu jedno odgovara kvazilongitudinalnim talasima a drugo kvazitransverzalnim talasima. Svi ovi zaključci nisu bili u saglasnosti sa rezultatima dobijenim u neekstenzibilnoj teoriji. Dakle, bilo je neophodno analizirati slučaj jake anizotropije i granični slučaj neekstenzibilnosti. To je učinjeno na taj način što su određene elastične konstante smatrane velikim tj. uvođenjem malog materijalnog parametra koji predstavlja odnos između odgovarajućih materijalnih konstanta. U graničnom slučaju kada mali materijalni parametar teži nuli dobija se neekstenzibilna teorija. Granične vrednosti ekstenzibilnih rešenja kada materijalni parametar teži nuli pokazuju da neekstenzibilna teorija ne može da reprodukuje ponašanje rešenja ni u slučaju vrlo dugih ni u slučaju vrlo kratkih talasa. Prema tome, bilo je neophodno primeniti perturbacioni prilaz.

U četvrtoj glavi se diskutuju razne mogućnosti za dobijanje prostijih aproksimativnih rešenja za fazne brzine fundamentalnih modova. Da bi se dobile aproksimativne disperzione relacije mora da se propiše odgovarajuća perturbaciona šema za pomeranja a , kao posledicu, možemo da dobijemo i aproksimativne napone. U ovoj glavi, prema tome, mi koncentrišemo našu pažnju uglavnom na fazne brzine i polja pomeranja iz kojih je veoma jednostavno dobiti aproksimativne napone. U slučaju jake anizotropije postoje dva parametra koji mogu da igraju ulogu perturbacionog parametra. Jedan od njih je materijalni parametar a drugi geometrijski parametar koji predstavlja odnos debljine ploče i talasne dužine. Pokazuje se da, u slučaju kratkih i

drugih talasa, geometrijski parametar može da se koristi kao parametar u perturbacionoj šemi. U slučaju srednjih talasa materijalni parametar mora da se koristi u perturbacionoj šemi. U toj oblasti talasnih dužina imamo singularni perturbacioni problem koji vodi ka analizi graničnog ili konturnog sloja. Dokazano je da neekstenzibilna rešenja iz druge glave moraju da se smatraju samo kao spoljašnja rešenja u prvoj aproksimaciji. Umesto da koristimo klasičan prilaz, zasnovan na jednom malom parametru, za unutrašnje rešenje uveli smo treći parametar koji predstavlja odnos između geometrijskog i materijalnog parametra, kao što je to činjeno od strane Green-a i Milosavljevića (1984), i uspešno konstruisali unutrašnja rešenja uporediva sa spoljašnjim rešenjima. To je dovelo do uskladjenih (eng. matched) kompozitnih rešenja za antisimetrični mod propagacije koja važe u čitavoj oblasti talasnih dužina. Slaganje sa egzaktnim rešenjem je izuzetno dobro što je i demonstrirano u petoj glavi gde su prezentirani neki od numeričkih rezultata. Za simetrične mode propagacije, međjutim, propisano aproksimativno rešenje koje važi u čitavom opsegu talasnih dužina ima singularnost reda jedan pri prelomnim (engl. cut-off) frekvencijama spoljašnjeg rešenja. Da bi se dobila uniformna aproksimativna rešenja kod simetričnih modova propagacije potrebno je detaljno ispitati ponašanje rešenja u blizini prelomnih frekvencija. Ovo proučavanje još nije kompletirano i predmet je trenutnih istraživanja.

U petoj glavi su prezentirani neki od numeričkih rezultata za ugljeno vlakno-epoksi smola kompozite da bi se ilustrovala razmatranja iz prethodnih glava. Kompjuterski programi, korišćeni za dobijanje krivih egzaktnog rešenja, mogu da se primene i na druge geometrije i daju tačnost onoliko koliko propuštamo. Korišćeni su za bilo koji ugao između dve familije vlakana i proizvoljan ugao prostiranja.

Zadnja glava je posvećena zaključnim razmatranjima.

I. VLAKNIMA OJAČANI MATERIJALI I OSNOVNE JEDNAČINE

1.1. U V O D

Od preistorijskih dana pa sve do današnjih uvek je bila velika potražnja za jakim materijalima koji kombinuju visoku otpornost sa malom gustinom odnosno težinom. Sa aspekta primenljivosti idealni materijal bi trebalo da bude jak, žilav i lak. Neki metali i njihove legure su blizu zadovoljavanja ovih zahteva. Oni su jaki i žilavi ali ne i zadovoljavajuće laki. Otpornost i žilavost su dve različite osobine čvrstih tela. Otpornost čvrstog tela se meri maksimalnim naponom koji ovo može da podnese bez sloma. Žilavost čvrstog tela može biti opisana kao njegova otpornost prostiranju prslina. Materijal može biti slab ali žilav ili jak ali krt.

Razvoj tehnike legirnaja je uvek bio usmeren ka ispunjenju ovih suprotnih zahteva, ali čak i kada su oni ispunjeni to nije dovoljno jer materijali za konstrukcije treba takodje i da su što lakši. Plastike su najčešće lake ali slabije jačine, otpornosti i žilavosti.

Očigledan prilaz postizanju "idealnog" materijala bi, prema tome, bio da se kombinuju dva materijala sa komplementarnim osobinama. Takav kompozitni materijal bi trebalo da ima kombinovane prednosti materijala od kojih je sastavljen. Ideja o kompozitnim materijalima nije uopšte nova. Veštački materijali, kao što je armirani beton, i prirodni materijali, kao što je kost ili bambus, su u suštini tog karaktera i poznati su veoma dugo. U novije vreme su razvijene plastike ojačane staklenim vlaknima. Velika prednost u korišćenju staklenih vlakana je u tome da se duga i jaka vlakna mogu napraviti vrlo jevtino i lako. Ispostavilo se da su matrice od platike veoma dobar izbor za kompozite zbog njihove male težine i veoma dobrih adhezionih svojstava u odnosu na staklo.

Plastike ojačane staklenim vlaknima su bile veoma mnogo korišćene u proizvodnji karoserije motornih vozila, bazena za plivanje, elemenata kupatila pa čak i aviona. Najveća mana plastike ojačane staklenim vlaknima je, međjutim, činjenica da ovi

kompoziti gube otpornost na visokim temperaturama.

Pronalazak kompozita sa ugljenim vlaknima je veliki korak napred u traženju jakih materijala. U tim kompozitima se koriste ugljena vlakna veoma velike otpornosti za ojačanje plastika - najčešće epoksi smole. Ovakvi materijali su veoma jaki, a takodje i veoma laki. Ono što čini kompozite sa ugljenim vlaknima veoma korisnim za primene u konstrukcijama je njihova velika otpornost na istezanje u pravcu vlakana. Ova prednost je donekle pomućena njihovom malom žilavošću i velikom anizotropijom koja stvara dodatne konstruktivne poteškoće. U ovom trenutku dodatna mana ovih kompozita je veoma visoka cena ugljenih vlakana. Postoji veliki broj tipova materijala koji mogu da se koriste kao matrice u kompozitima ojačanim ugljenim vlaknima kao što su metali, staklo, polimeri ili plastike itd. Od svih polimera, kao što su poliester, fenol, poliamid, termoplast i epoksi smola, epoksi smole su najčešće korišćene za kompozite ojačane ugljenim vlaknima. Više detalja i informacija o korišćenju i proizvodnji vlaknima ojačanih kompozita može da se nadje u mnogim knjigama a vrlo detaljno tretiranje ove problematike je dato u knjizi Tewary-ja (1978).

U ovoj tezi mi ćemo uglavnom da se zadržavamo na mehaničkim osobinama vlaknima ojačanih kompozita. Da bismo istražili ove osobine neophodno je razviti odgovarajuću matematičku teoriju. Tome može da se pridje na dva načina - na mikroskopskom ili makroskopskom nivou.

Na mikroskopskom nivou oblik i položaj vlakana i matrice je vrlo važan. Mehanički odgovor materijala može biti analiziran na osnovu teorije u kojoj se izračunava ukupno mehaničko ponašanje kompozita analizom vlakana i matrice koja je poznata kao "teorija efektivnih modula". "Efektivni moduli" su određeni na osnovu elastičnih modula matrice i vlakana kao i parametara koji opisuju geometrijski raspored u kompozitu. Detaljno tretiranje teorije efektivnih modula za vlaknima ojačane materijale dato je u knjigama napisanim od strane Hashin-a (1972) i Achembach-a (1975).

U fizici čvrstog stanja karakteristične osobine čvrstog tela su određene strukturom rešetke i medjuatomske silama. Mnoge statičke i dinamičke osobine čvrstog tela mogu dobro da se

opišu sa Born-von Kármán-ovim modelom rešetke. Detalji ove teorije mogu da se nadju u knjizi Kittel-a (1976.).

Na makroskopskom nivou materijal se posmatra kao anizotropni kontinuum. U modelu kontinuuma različitost strukture rešetke se ignoriše i čvrsto telo se posmatra kao kontinuum. Imajući u vidu njegovu relativnu matematičku jednostavnost, u odnosu na Born-von Kármán-ov model rešetke, ovakav model veoma dobro reprezentuje čvrsto telo, a posebno je pogodan za one inženjerske primene kod kojih nije neophodno detaljno poznavanje mikrostrukture. To je dovelo do razvitka dobro poznate teorije anizotropnih elastičnih materijala koja je detaljno analizirana od strane Hearmon-a (1961) ili Leknitskii-og (1963).

Ideja o razvijanju kontinuum modela za opis vlaknima ojačanih materijala je potekla iz teorije velikih elastičnih deformacija materijala ojačanog neekstenzibilnom armaturom koja je opisana u knjizi Green-a i Adkins-a (1960). Moduli ekstenzije vlakana mogu biti nekoliko redova veličine veći od odgovarajućih modula matrice. U takvoj situaciji kažemo da je materijal jako anizotropan. Ukoliko su vlakna neekstenzibilna za kompozit se kaže da je idealan vlaknima ojačan materijal.

U sledećem odeljku daćemo sažet prikaz linearizovanih jednačina kretanja. Konstitutivne relacije u linearnoj elastičnosti za jednu i dve familije vlakana biće date u odeljcima 1.3 i 1.4. Izvodjenje konstitutivnih jednačina je u osnovi vezano za izvodjenja Spencer-a (1981 a,b). Osnovne napomene o prostiranju elastičnih talasa u čvrstim telima su date u zadnjem odeljku.

1.2. LINEARIZOVANE JEDNAČINE KRETANJA

Jednačine kretanja i ravnoteže elastičnog materijala podvrgnutog malim relativnim deformacijama su izvedene početkom devetnaestog veka. Ako su relativne deformacije dovoljno male jednačine su linearne i relacije koje povezuju napon i relativnu deformaciju predstavljaju generalizovani Hooke-ov zakon. Mi ćemo koristiti idealni kontinuum kao matematički model čvrstog tela.

To znači da je diskretna priroda materije ignorisana i gustina može da se definiše kao odnos mase i zapremine kada se zapremina smanjuje tako da u graničnom slučaju teži nuli, a materijalna čestica se smatra geometrijskom tačkom. Linearizovana teorija elastičnosti je razmatrana u mnogim knjigama. Detaljno razmatranje je dato u knjizi Sokolnikoff-a (1956). Ovde ćemo dati u kratkim crtama osnovne pretpostavke za izvodjenje linearizovanih jednačina kretanja.

Pretpostavimo da se materijalna čestica pomera od tačke \underline{X} do tačke \underline{x} u trenutku t , gde su \underline{X} i \underline{x} definisani u odnosu na nepomični Dekartov koordinatni sistem kao $\underline{X} \equiv (X_1, X_2, X_3)$ i $\underline{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$. Promena materijalne konfiguracije usled deformacije može biti tretirana kao jednoznačno preslikavanje reprezentovano funkcionalnim relacijama

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t) \quad \text{i} \quad \underline{X} = \underline{X}(\underline{x}, t). \quad (1.1)$$

Pretpostavićemo da su $\underline{x}(\underline{X}, t)$ i $\underline{X}(\underline{x}, t)$ kontinualne i diferencijabilne funkcije svojih argumenata. Infinitesimalno rastojanje između dve bliske materijalne tačke je

$$dS = (dx_i dx_i)^{1/2} \quad (1.2)$$

u referentnoj konfiguraciji , i

$$ds = (dx_i dx_i)^{1/2} \quad (1.3)$$

u deformisanom stanju, pri čemu se podrazumeva konvencija o sabiranju tj. ponovljeni indeksi znače sumiranje po njima. Konvencija o sabiranju biće korišćena i ubuduće ukoliko se drugačije ne naglasi. Lokalna distorzija u okolini materijalne tačke je okarakterisana promenom

$$ds^2 - dS^2 = dx_i dx_i - dX_i dX_i = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j, \quad (1.4)$$

gde je δ_{ij} Kronecker-ova delta, dobro poznati tenzor drugog reda, pa je lokalna distorzija, ili relativna deformacija, potpuno opisana tenzorom

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right), \quad (1.5)$$

koji je poznat kao Almansi-jev tenzor relativne deformacije koji je veoma pogodan za Euler-ovu formulaciju u kojoj se x_i uzimaju kao nezavisne koordinate koje definišu prostornu tačku polja.

Možemo takodje da pišemo

$$ds^2 - dS^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dx_i dx_j, \quad (1.6)$$

gde je relativna deformacija opisana tenzorom

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right), \quad (1.7)$$

koji je poznat kao Green-ov tenzor relativne deformacije i pogodan je za Lagrange-ovu formulaciju u kojoj su X_i nezavisne koordinate koje definišu materijanu tačku.

Pomeranje materijalne čestice iz njenog originalnog položaja je dato kao

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{X},$$

pa Almansi-jev tenzor može da se izrazi na sledeći način

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (1.8)$$

Ukoliko su deformacioni gradienti $\partial u_i / \partial x_j$ znatno manji od jedinice tada možemo da pišemo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \left(\delta_{ik} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial X_k} \approx \frac{\partial}{\partial X_j}, \quad (1.9)$$

u prvoj aproksimaciji pa je irelevantno da li izvode računamo u odnosu na X_i ili x_i . Lagrange-ova i Euler-ova formulacija su pri takvim okolnostima iste pa do prvog reda u $\partial u_i / \partial x_j$ Almansi-jev i Green-ov tenzor relativne deformacije mogu da se izraze kao

$$E_{ij} = \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \equiv e_{ij}. \quad (1.10)$$

Tenzor e_{ij} je poznat kao Cauchy-jev tenzor relativne deformacije.

Ako je pomeranje tačke $\underline{u}(\underline{x}, t)$ njena brzina $\underline{v}(\underline{x}, t)$ je data sa



$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1.11)$$

tako da je

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \equiv \dot{u}_i, \quad (1.12)$$

ako zanemarimo veličine višeg reda od prvog. Ubrzanje se definiše kao

$$\underline{a}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}, \quad (1.13)$$

pa ako je $\underline{v} = \partial \underline{u} / \partial t$ takodje malo u poredjenju sa nekom karakterističnom brzinom imamo

$$\underline{a} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \equiv \ddot{\underline{u}}, \quad (1.14)$$

do veličina prvog reda.

Prema principu balansa količine kretanja promena količine kretanja u nekom trenutku je jednaka rezultujućoj spoljašnjoj sili koja deluje na telo u tom trenutku vremena. To je Euler-ova hipoteza koja može da se izrazi jednačinom

$$\int_S \underline{t}(\underline{n}, \underline{x}, t) dS + \int_V \underline{f}(\underline{x}, t) \rho dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV \quad (1.15)$$

gde su \underline{t} napon na površi a \underline{f} zapreminska sila po jediničnoj masi. Lako je pokazati, prema principu "tetraedrona" naprimer, da ova jednačina vodi do tenzora napona $\underline{\sigma}$, sa komponentama σ_{ij} , u obliku

$$t_\ell = \sigma_{k\ell} n_k, \quad (1.16)$$

što predstavlja Cauchy-jevu formulu za napon. Fizički $\sigma_{k\ell}$ je komponenta u pravcu x_ℓ napona na površi čija je jedinična normala duž x_k .

Zamena (1.16) u (1.15) vodi do jednačine napisane u indeksnoj notaciji u obliku

$$\int_S \sigma_{ij} n_i dS + \int_V f_j \rho dV = \int_V \rho \ddot{u}_j dV. \quad (1.17)$$

Površinski integral može da se transformiše u zapreminski integral Gauss-ovom teoremom što vodi do jednačine

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i - \rho \ddot{u}_i \right) dV = 0. \quad (1.18)$$

Pošto zapremina V može da bude proizvoljan deo tela sledi da, kadgod je integrant neprekidan, možemo da pišemo

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1.19)$$

što predstavlja prvi Cauchy-jev zakon kretanja.

Princip momenta količine kretanja kaže da je moment svih sila jednak promeni momenta količine kretanja tj.

$$\int_V \underline{x} \wedge \underline{f} \rho dV + \int_V \underline{M} \rho dV + \int_S \underline{x} \wedge \underline{t} dS = \frac{d}{dt} \int_V \underline{x} \wedge \underline{v} \rho dV, \quad (1.20)$$

gde je \underline{M} mogući moment po jediničnoj masi (naprimer usled magnetnih sila), pa korišćenjem (1.16), (1.19) i teoreme o divergenciji dolazimo do izraza

$$\int_V \{ \epsilon_{ijk} [-x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \sigma_{kl})] + \rho M_i \} dV = 0, \quad (1.21)$$

gde je ϵ_{ijk} tenzor čije su komponente definisane kao

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ako } ijk \text{ predstavljaju parnu permutaciju od } 123 \\ 0 & \text{ako su bilo koja dva indeksa jednaka} \\ -1 & \text{ako } ijk \text{ predstavljaju neparnu permutaciju od } 123. \end{cases} \quad (1.22)$$

Pošto je zapremina V proizvoljna dobijamo

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{kj} = -\rho M_i \quad (1.23)$$

pod uslovom da su $\underline{\sigma}$ i $\rho \underline{M}$ neprekidne funkcije. Uбудuće nećemo da razmatramo mogućnost postojanja spregova ($\underline{M} \neq 0$) tako da (1.23) daje

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj}. \quad (1.24)$$

Dakle, u odsustvu spregova tenzor napona $\underline{\sigma}$ je simetričan kao što je i tenzor relativne deformacije.

Godine 1676 Robert Hooke je publikovao rad u kome je pokazao da je u elastičnoj gredi sila proporcionalna ekstenziji. U jednodimenzionom prostoru u testu istezanja on je utvrdio linearnu zavisnost između napona σ i elongacije po jedinici dužine e i dao je u obliku poznatom kao Hooke-ov zakon

$$\sigma = E e \quad (1.25)$$

gde je E poznato kao Young-ov modul ili modul elastičnosti.

Ovaj zakon važi do tačke poznate kao granica proporcionalnosti.

Posle te tačke relacija je nelinearna. Prirodna generalizacija Hooke-ovog zakona je da se pretpostavi funkcionalna relacija između σ_{ij} i e_{ij} u medijumu uz pretpostavku da je temperatura fiksirana i da je σ_{ij} nula kada je e_{ij} nula, što znači da je ne-deformisano telo nenapregnuto. Ako razvijemo σ_{ij} u stepeni red po e_{ij} i zadržimo se samo na linearnim članovima dobijamo generalizovani Hooke-ov zakon u obliku

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (1.26)$$

koji je dat od strane Cauchy-ja. Ovaj zakon je osnova u linearnoj teoriji elastičnosti. Koeficijenti c_{ijkl} se nazivaju elastičnim koeficijentima. Iz izraza (1.26) je jasno da je to tenzor četvrtog reda koji se u opštem slučaju menja od tačke do tačke elastičnog tela. Ukoliko su oni nezavisni od položaja za telo se kaže da je elastično homogeno. Broj koeficijenata c_{ijkl} je 81 ali pošto je $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ i $e_{kl} = e_{lk}$ očigledno važe relacije $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}$ pa se broj koeficijenata smanjuje na 36. Kod hiperelastičnih materijala elastični koeficijenti zadovoljavaju dodatnu relaciju simetrije $c_{ijkl} = c_{klij}$ što smanjuje broj nezavisnih koeficijenata na 21. Tada funkcija energije relativne deformacije W može da se definiše kao kvadratna funkcija po e_{ij} tako da možemo da pišemo

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} e_{ij} e_{kl}, \quad (1.27)$$

pri čemu je

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij}. \quad (1.28)$$

Funkcija energije relativne deformacije W je energija relativne deformacije po jedinici zapremine ili funkcija gustine energije relativne deformacije. Po pretpostavci to je pozitivno definitna funkcija. Elastične konstante c_{ijkl} , od kojih je 21 nezavisna, definišu telo sa opštom anizotropijom tj. telo kod koga su elastične osobine u nekoj tački različite u različitim pravcima.

Uslovi koji treba da budu zadovoljeni na spoljašnjoj konturi elastičnog materijala u elastodinamici su analogni onima u elastostatici. Najčešće se konturni uslovi definišu na jedan

od sledećih načina:

- Konturni uslovi za pomeranje, pri čemu se na konturi propišu tri komponente pomeranja u_i ,

- Konturni uslovi za napone, pri čemu se na konturi čija je jedinična normala \underline{n} propišu tri komponente vektora napona t_i koje pomoću Cauchy-jeve formule (1.16) vode do uslova za tri komponente tenzora napona,

- Mešoviti konturni uslov ima propisana pomeranja na delu konture i napone na preostalom delu konture.

Ako je spoljašnja kontura slobodna onda je $\sigma_{ij}n_j = 0$ na konturi, gde je \underline{n} normala na spoljašnju površ.

Ovde nećemo da razmatramo egzistenciju i jedinstvenost rešenja. Više detalja može da se nadje u mnogim knjigama i udžbenicima kao što su naprimer Gurtin (1981), Adkin i Fox (1980), Spencer (1980) itd.

1.3. LINEARNA ELASTIČNOST - JEDNA FAMILIJA VLAKANA

Kompozitni materijal koji se sastoji od osnovnog materijala - matrice i jakih vlakana koja su sistematski raspoređena u matrici naziva se vlaknima ojačani materijal.

Ukoliko je materijal ojačan jednom familijom vlakana tada kompozitni materijal ima jedan privilegovan pravac tako da je transverzalno izotropan u odnosu na taj pravac. Pravac vlakna možemo da definišemo pomoću jediničnog vektora \underline{a} koji može da se menja od tačke do tačke. Trajektorije vektora \underline{a} su tada vlakna i materijal može da se smatra lokalno transverzalno izotropnim u odnosu na lokalni pravac vlakna. Uobičajeni metod za izvodjenje konstitutivnih jednačina transverzalno izotropnog linearno elastičnog tela je da se izabere koordinatni sistem takav da se jedna od koordinatnih osa poklapa sa osom transverzalne izotropije i prouče ograničenja na funkciju relativne deformacije koja proizilaze iz zahteva invarijantnosti pri rotacijama oko te ose. Pošto, uopšte, pravac vlakna zavisi od položaja mi ćemo imati formulaciju konstitutivnih jednačina nezavisnih od koordinatnog sistema prema Spencer-u (1981.).

Za datu deformaciju funkcija energije relativne deforma-

cije W zavisi od tenzora relativne deformacije \underline{e} i pravca vlakna \underline{a} tj.

$$W = W(\underline{e}, \underline{a}). \quad (1.29)$$

Ukoliko anizotropne osobine materijala nastaju samo zbog prisustva vlakana onda funkcija W mora ostati nepromenjena kada i deformaciono polje i vlakna podvrgnemo rotaciji koja je opisana svojstvenim ortogonalnim tenzorom \underline{Q} . Dakle,

$$W(\underline{e}, \underline{a}) = W(\underline{Q} \underline{e} \underline{Q}^T, \underline{Q} \underline{a}), \quad (1.30)$$

za sve tenzore koji imaju osobine $\underline{Q} \underline{Q}^T = \underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{I}$, $\det \underline{Q} = 1$, gde je \underline{I} jedinični tenzor. To znači da je funkcija W izotropna invarijanta od \underline{e} i \underline{a} . Obzirom da smer vektora \underline{a} nije važan, W mora biti parna funkcija od \underline{a} , tako da može da bude izražena kao izotropna invarijanta od \underline{e} i $\underline{a} \otimes \underline{a}$. Diada $\underline{a} \otimes \underline{a}$ je tenzor drugog reda čije su Dekartove komponente $a_i a_j$. Lista matričnih proizvođa čiji tragovi čine bazu za svojstvenu ortogonalnu grupu data je od strane Spencer-a (1971, str. 288) u obliku

$$\begin{aligned} &\underline{e}, \underline{e}^2, \underline{e}^3, \underline{a} \otimes \underline{a}, (\underline{a} \otimes \underline{a})^2, (\underline{a} \otimes \underline{a})^3, \underline{e} \cdot (\underline{a} \otimes \underline{a}), \\ &\underline{e} \cdot (\underline{a} \otimes \underline{a})^2, \underline{e}^2 \cdot (\underline{a} \otimes \underline{a}), \underline{e}^2 \cdot (\underline{a} \otimes \underline{a})^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Medjutim, pošto je \underline{a} jedinični vektor imamo

$$\underline{a} \otimes \underline{a} = (\underline{a} \otimes \underline{a})^2 = (\underline{a} \otimes \underline{a})^3 = \dots, \quad (1.32)$$

kao i

$$\text{tr}(\underline{a} \otimes \underline{a}) = 1, \text{tr} \underline{e} \cdot (\underline{a} \otimes \underline{a}) = \underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a}, \text{tr} \underline{e}^2 \cdot (\underline{a} \otimes \underline{a}) = \underline{a} \cdot \underline{e}^2 \underline{a} \quad (1.33)$$

što svodi skup invarijanata na

$$\text{tr} \underline{e}, \text{tr} \underline{e}^2, \text{tr} \underline{e}^3, \underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a}, \underline{a} \cdot \underline{e}^2 \underline{a} \quad (1.34)$$

Najopštija kvadratna funkcija po \underline{e} koja može da se formira iz skupa (1.34) je

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \underline{e})^2 + \mu_T \text{tr} \underline{e}^2 + \alpha (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a}) \text{tr} \underline{e} + 2(\mu_L - \mu_T) \underline{a} \cdot \underline{e}^2 \underline{a} + \\ & + \frac{1}{2} \beta (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a})^2, \end{aligned} \quad (1.35)$$

gde su $\lambda, \mu_T, \mu_L, \alpha$ i β elastične konstante, tako da veza napona i relativne deformacije može da se da u obliku

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = & \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_T e_{ij} + 2(\mu_L - \mu_T) (a_i e_{jn} a_n + a_l e_{li} a_j) + \\ & + \alpha (e_{kk} a_i a_j + a_m e_{ml} a_l \delta_{ij}) + \beta (a_l e_{lm} a_m) a_i a_j. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ovo se slaže sa dobro poznatim izrazima za napon u transverzno izotropnom linearno elastičnom materijalu. Elastične konstante mogu da se izraze i preko drugih modula koji su mnogo pogodniji za direktno merenje. Materijalna konstanta μ_L reprezentuje modul smicanja duž privilegovanog pravca \underline{a} dok μ_T reprezentuje modul smicanja normalan za privilegovani pravac \underline{a} . Ostale konstante λ , α i β mogu da se povežu sa ostalim modulima kao što je modul ekstenzije ili Young-ov modul i Poisson-ov broj. Relacije napon-relativna deformacija za izotropno ponašanje dobili bismo iz (1.36) ako uzmemo $\mu_L = \mu_T$ i $\alpha = \beta = 0$.

Materijali koje razmatramo imaju velike module ekstenzije u pravcu vlakana. Ova osobina se idealizuje pretpostavkom da je materijal neekstenzibilan u pravcu vlakna tako da je

$$\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a} = 0. \quad (1.37)$$

U tom slučaju kažemo da je materijal podvrgnut kinematskom ograničenju i (1.37) predstavlja ograničenje neekstenzibilnosti u pravcu vlakna. Tada (1.35) predstavljamo u obliku

$$W = \lambda \frac{1}{2} (\text{tr} \underline{e})^2 + \mu_T \text{tr} \underline{e}^2 + 2(\mu_L - \mu_T) \underline{a} \underline{e}^2 \underline{a} + T \underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a} \quad (1.38)$$

gde je T Lagrange-ov množilac tako da se broj nezavisnih elastičnih konstanta smanjuje na tri. Dakle, relacija napon-relativna deformacija sada može da se predstavi u obliku

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_T e_{ij} + 2(\mu_L - \mu_T) (a_i e_{jn} a_n + a_m e_{mi} a_j) + T a_i a_j, \quad (1.39)$$

gde je napon $T a_i a_j$, proizvoljan u pravcu vlakna i predstavlja reakciju na ograničenje neekstenzibilnosti. Lako je uočiti da neekstenzibilni materija može da se posmatra kao granični slučaj istegljivog materijala kada $\beta \rightarrow \infty$ a $a_k a_m e_{km} \rightarrow 0$ na takav način da $\beta a_k a_m e_{km} + \alpha e_{kk} \rightarrow T$.

1.4. LINEARNA ELASTIČNOST - DVE FAMILIJE VLAKANA

U ovom odeljku razvićemo relacije napon-relativna deformacija za materijal koji ima linearan elastični odgovor a ojačan je sa dve familije vlakana. Neka su pravci vlakana opisani jediničnim vektorima \underline{a} i \underline{b} . U ovoj tezi mi ćemo uglavnom da

razmatramo materijale ojačane sa dve familije pravih vlakana koja su mehanički ekvivalentna ali konstitutivne relacije ćemo razviti za opšti slučaj ojačanja sa dve familije vlakana pri čemu ćemo uglavnom da sledimo izvodjenje Spencer-a (1981).

Pretpostavimo da su jedine anizotropne osobine materijala posledica prisustva vlakana, tako da imamo dva privilegovana pravca \underline{a} i \underline{b} u svakoj tački materijala. Sa argumentima sličnim onima u odeluku 1.3. funkcija energije relativne deformacije je kvadratna po \underline{e} i parna po \underline{a} i \underline{b} . Dakle,

$$W(\underline{Q} \cdot \underline{e} \cdot \underline{Q}^T, \underline{Q} \cdot \underline{a}, \underline{Q} \cdot \underline{b}) = W(\underline{e}, \underline{a}, \underline{b}), \quad (1.40)$$

gde je opet \underline{Q} bilo koji svojstveni ortogonalni tenzor. Ponovo obzirom da smerovi vektora \underline{a} i \underline{b} nisu značajni, W mora biti parna funkcija od \underline{a} i \underline{b} i može biti izražena kao izotropna invarijanta od \underline{e} , $\underline{a} \otimes \underline{a}$ i $\underline{b} \otimes \underline{b}$. Lista matričnih proizvoda čiji tragovi formiraju bazu za svojstvenu ortogonalnu grupu je data kod Spencer-a (1971) odakle sledi da je W funkcija od

$$\begin{aligned} & \text{tr } \underline{e}, \text{tr } \underline{e}^2, \text{tr } \underline{e}^3, \underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a}, \underline{a} \cdot \underline{e}^2 \underline{a}, \underline{b} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b}, \underline{b} \cdot \underline{e}^2 \underline{b}, \\ & (\underline{a} \cdot \underline{b})^2 = \cos^2 2\phi, \cos 2\phi (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b}), \cos 2\phi (\underline{a} \cdot \underline{e}^2 \underline{b}), \end{aligned} \quad (1.41)$$

gde je 2ϕ ugao između dveju familija vlakana. Iz identičnosti izvedene od strane Spencer-a (1981) u obliku

$$\begin{aligned} & \sin^2 2\phi \{ (\text{tr } \underline{e})^2 - \text{tr } \underline{e}^2 \} + 2 \cos 2\phi \{ (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b}) \text{tr } \underline{e} - \underline{a} \cdot \underline{e}^2 \underline{b} \} - (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a} + \underline{b} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b}) \text{tr } \underline{e} + \\ & + (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a}) (\underline{b} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b}) - (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b})^2 + \underline{a} \cdot \underline{e}^2 \underline{a} + \underline{b} \cdot \underline{e}^2 \underline{b} = 0, \end{aligned} \quad (1.42)$$

sledi da jedna invarijanta, naprimer $\cos 2\phi (\underline{a} \cdot \underline{e}^2 \underline{b})$, može da se odbaci sa liste (1.41). Najopštija kvadratna funkcija po \underline{e} koja može da se formira iz skupa (1.41), kada izostavimo $\cos 2\phi (\underline{a} \cdot \underline{e}^2 \underline{b})$, koja predstavlja funkciju energije relativne deformacije data je u obliku

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \lambda (\text{tr } \underline{e})^2 + \mu \text{tr } \underline{e}^2 + \alpha_1 \underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a} \text{tr } \underline{e} + \alpha_2 \underline{b} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b} \text{tr } \underline{e} + \alpha_3 (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a})^2 \\ & + \alpha_4 (\underline{b} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b})^2 + \alpha_5 (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a}) (\underline{b} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b}) + \alpha_6 \underline{a} \cdot \underline{e}^2 \underline{a} + \alpha_7 \underline{b} \cdot \underline{e}^2 \underline{b} \\ & + \alpha_8 \cos 2\phi (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b}) \text{tr } \underline{e} + \alpha_9 \cos 2\phi (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{a}) (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b}) + \alpha_{10} \cos 2\phi (\underline{b} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b}) (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b}) \\ & + \alpha_{11} \cos^2 2\phi (\underline{a} \cdot \underline{e} \cdot \underline{b})^2 \end{aligned} \quad (1.43)$$

gde su $\lambda, \mu, \alpha_1, \dots, \alpha_{11}$ parne funkcije od $\cos 2\phi$. Konstitutivna jednačina sada ima sledeći oblik

$$\begin{aligned}
r_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = & (\lambda e_{kk} + \alpha_1 a_k a_l e_{kl} + \alpha_2 b_k b_l e_{kl} + \alpha_8 \cos 2\phi a_k b_l e_{kl}) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \\
& + (\alpha_1 e_{kk} + 2\alpha_3 a_k a_l e_{kl} + \alpha_5 b_k b_l e_{kl} + \alpha_9 \cos 2\phi a_k b_l e_{kl}) a_i a_j \\
& + (\alpha_2 e_{kk} + 2\alpha_4 b_k b_l e_{kl} + \alpha_5 a_k a_l e_{kl} + \alpha_{10} \cos 2\phi a_k b_l e_{kl}) b_i b_j \quad (1.44) \\
& + \alpha_6 (a_i e_{jk} + a_j e_{ik}) a_k + \alpha_7 (b_i e_{jk} + b_j e_{ik}) b_k \\
& + \cos 2\phi (\alpha_8 e_{kk} + \alpha_9 a_k a_l e_{kl} + \alpha_{10} b_k b_l e_{kl} + 2\alpha_{11} \cos 2\phi a_k b_l e_{kl}) a_i b_j.
\end{aligned}$$

Dakle, jednačina (1.44) ima trinaest nezavisnih konstanata što u anizotropnoj teoriji i odgovara materijalu koji ima jednu ravan simetrije. Ta ravan simetrije je lokalno tangencijalna ravan na površ u kojoj dve familije vlakana leže.

U slučaju kada su dve familije vlakana međusobno normalne tada lokalno materijal poseduje materijalnu simetriju u odnosu na refleksije u ravnima koje su normalne na vlakna i površi u kojima leže vlakna što za posledicu ima da je materijal ortotropan u odnosu na te ravni. U tom slučaju ispunjeno je $a_i b_i = \cos 2\phi = 0$, tako da je zadnji red u izrazu (1.44) jednak nuli, pa u konstitutivnoj jednačini ostaje devet nezavisnih materijalnih konstanata što je u saglasnosti sa dobro poznatim rezultatima za ortotropne materijale.

Ako su dve familije vlakana mehanički ekvivalentne tj. ako su pravci vlakana jedina osobina pomoću koje možemo da razlikujemo dve familije vlakana, opet imamo ortotropan materijal s tim što sada materijal poseduje materijalne simetrije u odnosu na ravni čije se normale po pravcu poklapaju sa simetralama povučeni između vlakana i ravan u kojoj leže vlakna. Funkcija energije relativne deformacije W tada mora biti simetrična u odnosu na međusobnu zamenu jediničnih vektora \underline{a} i \underline{b} tako da je mnogo zgodnije drugačije izabrati skup invarijanata (1.41), od kojih W zavisi, koji ima sledeći ekvivalentni oblik

$$\begin{aligned}
& \text{tr} \underline{\underline{e}}, \text{tr} \underline{\underline{e}}^2, \text{tr} \underline{\underline{e}}^3, \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{b}}, (\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{a}}) (\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{b}}), \\
& \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{e}}^2 \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{e}}^2 \underline{\underline{b}}, (\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{e}}^2 \underline{\underline{a}}) (\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{e}}^2 \underline{\underline{b}}), \cos 2\phi (\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{b}}), \cos^2 2\phi. \quad (1.45)
\end{aligned}$$

Ovde je opet kao posledica identičnosti (1.42) invarijanta $\cos 2\phi (\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{b}})$ odbačena. Najopštiji izraz za koji je funkcija energije relativne deformacije W kvadratna po $\underline{\underline{e}}$ u slučaju ojačanja sa dve mehanički ekvivalentne familije vlakana dat je u obliku

$$\begin{aligned}
r = & \frac{1}{2}\lambda(\underline{t}r\underline{e})^2 + \mu\underline{t}r\underline{e}^2 + \gamma_1\{(\underline{a}\cdot\underline{e}\cdot\underline{a})^2 + (\underline{b}\cdot\underline{e}\cdot\underline{b})^2\} + \gamma_2(\underline{a}\cdot\underline{e}\cdot\underline{b})^2 \\
& + \gamma_3(\underline{a}\cdot\underline{e}\cdot\underline{a} + \underline{b}\cdot\underline{e}\cdot\underline{b})\underline{t}r\underline{e} + \gamma_4\cos 2\phi(\underline{a}\cdot\underline{e}\cdot\underline{b})\underline{t}r\underline{e} + \gamma_5\cos 2\phi(\underline{a}\cdot\underline{e}\cdot\underline{a} + \underline{b}\cdot\underline{e}\cdot\underline{b})(\underline{a}\cdot\underline{e}\cdot\underline{a}) \\
& + \gamma_6(\underline{a}\cdot\underline{e}\cdot\underline{a})(\underline{b}\cdot\underline{e}\cdot\underline{b}) + \gamma_7(\underline{a}\cdot\underline{e}^2\underline{a} + \underline{b}\cdot\underline{e}^2\underline{b}), \quad (1.46)
\end{aligned}$$

de su $\lambda, \mu, \gamma_1, \dots, \gamma_7$ parne funkcije od $\cos 2\phi$. Ovo vodi do konstitutivne jednačine sledećeg oblika

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} = & \{\lambda e_{rr} + \gamma_3(a_r a_s e_{rs} + b_r b_s e_{rs}) + \gamma_4 a_r b_s e_{rs} \cos 2\phi\} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \\
& + \{\gamma_3 e_{rr} + 2\gamma_1 a_r a_s e_{rs} + \gamma_6 b_r b_s e_{rs} + \gamma_5 a_r b_s e_{rs} \cos 2\phi\} a_i a_j \\
& + \{\gamma_3 e_{rr} + \gamma_6 a_r a_s e_{rs} + 2\gamma_1 b_r b_s e_{rs} + \gamma_5 a_r b_s e_{rs} \cos 2\phi\} b_i b_j \\
& + \frac{1}{2}\{\gamma_4 e_{rr} \cos 2\phi + \gamma_5(a_r a_s e_{rs} + b_r b_s e_{rs}) \cos 2\phi + \\
& + 2\gamma_2 a_r b_s e_{rs}\} (a_i b_j + a_j b_i) + \gamma_7\{a_r(e_{ri} a_j + e_{rj} a_i) \\
& + b_r(e_{ri} b_j + e_{rj} b_i)\}. \quad (1.47)
\end{aligned}$$

Dakle, broj konstanata se sada redukovao na devet što je kvivalentno broju konstanata bilo kog materijala koji poseduje ri ravni elastične simetrije. Prednost izraza (1.47) je da su ravci vlakana uključeni u relaciju napon-relativna deformacija ako da je lako analizirati slučaj kada su vlakna veoma jaka i graničnom slučaju neekstenzibilna.

Ako sada uvedemo pretpostavku o neekstenzibilnosti u ravnima vlakana \underline{a} i \underline{b} onda imamo materijal sa dva kinematska graničenja. Ako je materijal neekstenzibilan u pravcu \underline{a} tada mammo ograničenje

$$\underline{a}\cdot\underline{e}\cdot\underline{a} = 0, \quad (1.48)$$

ako je materijal neekstenzibilan u pravcu \underline{b} tada je ograničenje oblika

$$\underline{b}\cdot\underline{e}\cdot\underline{b} = 0. \quad (1.49)$$

bog ovih ograničenja mogu da se uvedu Lagrange-ovi množiocci

T_a i T_b za odgovarajuće pravce vlakana \underline{a} i \underline{b} . Dakle ograničenja neekstenzibilnosti imaju za posledicu napone reakcije na ograničenje T_a i T_b čije su Dekartove komponente $T_a a_i a_j$ i $T_b b_i b_j$

respektivno. Sada se funkcija energije relativne deformacije (1.46) svodi na

$$W = \frac{1}{2}\lambda (\text{tr}\underline{\underline{e}})^2 + \mu \text{tr}\underline{\underline{e}}^2 + \gamma_2 (\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{b}})^2 + \gamma_4 \cos 2\phi (\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{b}}) \text{tr}\underline{\underline{e}} \quad (1.50)$$

$$+ \gamma_7 (\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{e}}^2 \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{e}}^2 \underline{\underline{b}}) + T_a \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{a}} + T_b \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{b}},$$

dok se konstitutivna jednačina svodi na oblik

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & (\lambda e_{rr} + \gamma_4 a_r b_s e_{rs} \cos 2\phi) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \frac{1}{2} (\gamma_4 e_{rr} \cos 2\phi + 2\gamma_2 a_r b_s e_{rs}) \cdot \\ & \cdot (a_i b_j + a_j b_i) + \gamma_7 \{ a_r (e_{ri} a_j + e_{rj} a_i) + b_r (e_{ri} b_j + e_{rj} b_i) \} + \\ & + T_a a_i a_j + T_b b_i b_j. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Prema tome materijal ojačan sa dve familije neekstenzibilnih vlakana može da se tretira kao granični slučaj materijala ojačanog sa dve familije ekstenzibilnih vlakana kada $\gamma_1 \rightarrow \infty$ i $\gamma_6 \rightarrow \infty$ pri $a_i a_j e_{ij} \rightarrow 0$ i $b_i b_j e_{ij} \rightarrow 0$ na takav način da je ispunjeno

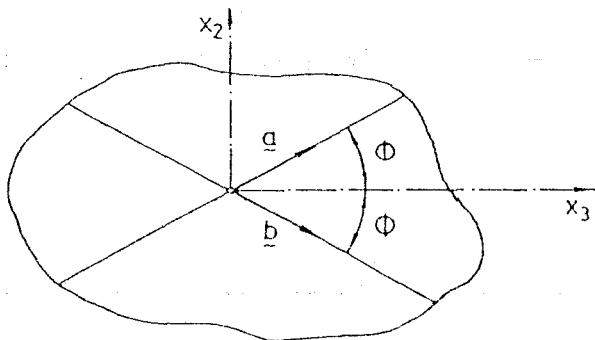
$$2\gamma_1 a_r a_s e_{rs} + \gamma_6 b_r b_s e_{rs} + T_a - \gamma_3 e_{rr} - \gamma_5 a_r b_s e_{rs} \cos 2\phi, \quad (1.52)$$

i

$$\gamma_6 a_r a_s e_{rs} + 2\gamma_1 b_r b_s e_{rs} + T_b - \gamma_3 e_{rr} - \gamma_5 a_r a_s e_{rs} \cos 2\phi. \quad (1.53)$$

U ovoj tezi mi ćemo se uglavnom baviti problemima u kojima ćemo koordinatni sistem da vezujemo tako da dve ose uvek budu duž simetrala povučenih između dveju familija vlakana. U Dekartovom sistemu izabranom na takav način da je osa x_1 normalna na ravan koja sadrži vlakna a x_2 i x_3 duž simetrala između vlakana (videti sl. 1.1), jedinični vektori $\underline{\underline{a}}$ i $\underline{\underline{b}}$ imaju komponente

$$\begin{aligned} a_i &= (0, \sin\phi, \cos\phi), \\ b_i &= (0, -\sin\phi, \cos\phi). \end{aligned} \quad (1.54)$$



Slika 1.1. Geometrija vlakana

komponente napona ekstenzibilnog materijala su

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= c_{11}u_{1,1} + c_{12}u_{2,2} + c_{13}u_{3,3}, \\
 \sigma_{22} &= c_{21}u_{1,1} + c_{22}u_{2,2} + c_{23}u_{3,3}, \\
 \sigma_{33} &= c_{31}u_{1,1} + c_{32}u_{2,2} + c_{33}u_{3,3}, \\
 \sigma_{23} &= c_{44}(u_{2,3} + u_{3,2}), \\
 \sigma_{13} &= c_{55}(u_{1,3} + u_{3,1}), \\
 \sigma_{12} &= c_{66}(u_{1,2} + u_{2,1}),
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

gde su

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \lambda + 2\mu, \\
 c_{12} &= \lambda + \sin^2\phi(2\gamma_3 - \gamma_4 \cos 2\phi) = c_{21}, \\
 c_{13} &= \lambda + \cos^2\phi(2\gamma_3 + \gamma_4 \cos 2\phi) = c_{31}, \\
 c_{22} &= \lambda + 2\mu + 2\sin^2\phi\{2\gamma_3 - \gamma_4 \cos 2\phi + 2\gamma_7 + \sin^2\phi(2\gamma_1 + \gamma_6 + \gamma_2 - 2\gamma_5 \cos 2\phi)\}, \\
 c_{23} &= \lambda + \cos^2\phi\{2\sin^2\phi(2\gamma_1 + \gamma_6 - \gamma_2) + 2\gamma_3 + \gamma_4 \cos 2\phi\} + \sin^2\phi(2\gamma_3 - \gamma_4 \cos 2\phi) = c_{32}, \\
 c_{33} &= \lambda + 2\mu + 2\cos^2\phi\{2\gamma_3 + \gamma_4 \cos 2\phi + 2\gamma_7 + \cos^2\phi(2\gamma_1 + \gamma_6 + \gamma_2 + 2\gamma_5 \cos 2\phi)\}, \\
 c_{44} &= \mu + \gamma_7 + 2\sin^2\phi \cos^2\phi(2\gamma_1 - \gamma_6), \\
 c_{55} &= \mu + \gamma_7 \cos^2\phi, \\
 c_{66} &= \mu + \gamma_7 \sin^2\phi.
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

komponente napona neekstenzibilnog materijala su

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= a_{11}u_{1,1} + a_{12}u_{2,2} + a_{13}u_{3,3}, \\
 \sigma_{22} &= a_{21}u_{1,1} + a_{22}u_{2,2} + a_{23}u_{3,3} + (T_a + T_b) \sin^2\phi, \\
 \sigma_{33} &= a_{31}u_{1,1} + a_{32}u_{2,2} + a_{33}u_{3,3} + (T_a + T_b) \cos^2\phi, \\
 \sigma_{23} &= a_{44}(u_{2,3} + u_{3,2}) + (T_a - T_b) \sin\phi \cos\phi, \\
 \sigma_{13} &= a_{55}(u_{1,3} + u_{3,1}), \\
 \sigma_{12} &= a_{66}(u_{1,2} + u_{2,1}),
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

pri čemu su

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \lambda + 2\mu, \\
a_{12} &= \lambda - \gamma_4 \cos 2\phi \sin^2 \phi = a_{21}, \\
a_{13} &= \lambda + \gamma_4 \cos 2\phi \cos^2 \phi = a_{31}, \\
a_{22} &= \lambda + 2\mu - 2\gamma_4 \cos 2\phi \sin^2 \phi + 2\gamma_2 \sin^4 \phi + 4\gamma_7 \sin^2 \phi, \\
a_{23} &= \lambda + \gamma_4 \cos^2 2\phi - \frac{1}{2}\gamma_2 \sin^2 2\phi = a_{32}, \\
a_{33} &= \lambda + 2\mu + 2\gamma_4 \cos 2\phi \cos^2 \phi + 2\gamma_2 \cos^4 \phi + 4\gamma_7 \cos^2 \phi, \\
a_{44} &= \mu + \gamma_7, \\
a_{55} &= \mu + \gamma_7 \cos^2 \phi, \\
a_{66} &= \mu + \gamma_7 \sin^2 \phi.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Ograničenje (1.48) sada je u obliku

$$\sin^2 \phi u_{2,2} + \sin \phi \cos \phi (u_{2,3} + u_{3,2}) + \cos^2 \phi u_{3,3} = 0 \tag{1.59}$$

dok je ograničenje (1.49) u obliku

$$\sin^2 \phi u_{2,2} - \sin \phi \cos \phi (u_{2,3} + u_{3,2}) + \cos^2 \phi u_{3,3} = 0. \tag{1.60}$$

Konsturni uslovi beskonačne ploče slobodne od napona na stranicama čije su normale duž ose x_1 su oblika

$$\sigma_{1i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{za } x_1 = \pm h, \tag{1.61}$$

gde je $2h$ rastojanje medju slobodnim stranicama.

1.5. OSNOVNE NAPOMENE O PROSTIRANJU ELASTIČNIH TALASA U ČVRSTIM TELIMA

Zakoni prostiranja elastičnih talasa u čvrstim telima slede iz Cauchy-jevog prvog zakona kretanja (1.19) za elastično deformisan medijum. Ako zanemarimo zapreminske sile jednačine kretanja se svode na

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \ddot{u}_i. \tag{1.62}$$

Korišćenjem izraza (1.26) i (1.10) možemo da izrazimo jednačine kretanja preko komponentata vektora pomeranja u obliku

$$\frac{1}{2} c_{ijkl} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \right) = \rho \ddot{u}_i. \quad (1.63)$$

Simetrija tenzora c_{ijkl} u odnosu na drugi par indeksa znači da su dva sabirka u zagradi na levoj strani jednačine jednaka tako da jednačine kretanja postaju

$$c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} = \rho \ddot{u}_i, \quad (1.64)$$

što predstavlja sistem homogenih linearnih jednačina drugog reda po komponentama vektora pomeranja. Mi ćemo da se ograničimo samo na ravanske elastične talase za koje vektor pomeranja može da se izrazi u obliku

$$u_j = A u_{0j} \exp\{i\omega(s_r x_r - t)\} = A u_{0j} \exp\{i(k_r x_r - \omega t)\} = A u_{0j} e^{i\varphi}, \quad (1.65)$$

gde su

- A skalarna amplituda,
- u_{0j} jedinični vektor pomeranja,
- ω kružna frekvencija talasa,
- x_r prostorni vektor položaja
- s_r vektor sporosti (slowness)
- k_r vektor talasnog broja
- φ fazna promenljiva
- $i = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica.

Osnovni parametar talasa je kružna frekvencija $\omega = 2\pi f$ gde je f frekvencija tj. broj potpunih oscilacija vektora pomeranja u sekundi. Osnovni period oscilovanja T je u odnosu na frekvenciju f dat relacijom $T = 1/f$.

Talas (1.65) je ravan jer φ linearno zavisi od koordinata. Uopšteno oblik talasa je odredjen površima jednakih faza. Ekvifazne površi su date jednačinom

$$\varphi = k_r x_r - \omega t = C = \text{const.} \quad (1.66)$$

Vektor talasnog broja može da se piše u obliku

$$\underline{k} = k \underline{n}, \quad |\underline{n}| = 1, \quad |\underline{k}| = k, \quad (1.67)$$

tako da iz (1.66) dobijamo

$$n_i x_i = (c + \omega t) / k = \xi \quad (1.68)$$

što pokazuje da je površ konstantne faze u svakom trenutku ravan normalna na jedinični vektor \underline{n} , pri čemu ξ predstavlja rastojanje te ravni od koordinatnog početka \overline{OA} (videti sliku 1.2.). Fazna ravan π se kreće paralelno samoj sebi, pošto ξ raste linearno sa vremenom. Brzina v ove ravni se naziva fazna brzina talasa i data je izrazom

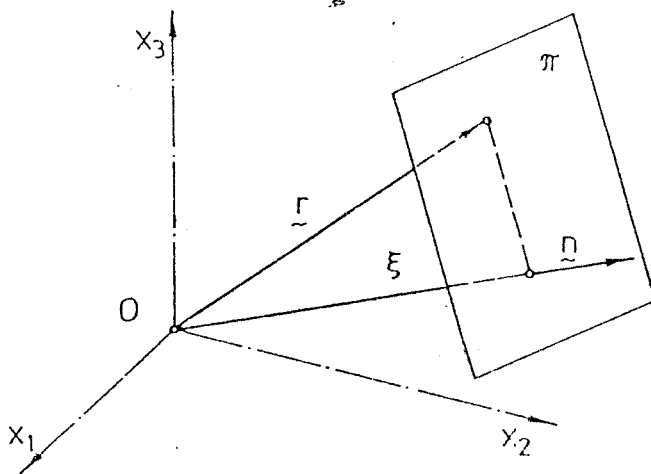
$$v = d\xi/dt = \omega/k. \quad (1.69)$$

Jedinični vektor \underline{n} se naziva talasna ili fazna normala dok se vektor \underline{k} naziva talasni vektor ili vektor talasnog broja jer je njegov intenzitet jednak talasnom broju i dat je izrazom

$$k = \omega/v. \quad (1.70)$$

Rastojanje koje fazna ravan prevali za jedan osnovni period je talasna dužina λ koja je data kao proizvod fazne brzine i perioda u obliku

$$\lambda = vT = v/f = 2\pi v/\omega = 2\pi/k. \quad (1.71)$$



Slika 1.2. Uniformni ravanski talas

Izraz (1.65) daje kompleksno pomeranje, iako stvarno pomeranje mora biti predstavljeno realnom veličinom. Vektor (1.65) će zadovoljiti sistem linearnih homogenih diferencijalnih jednačina (1.64) samo ako i njegov realni deo i imaginarni deo odvojeno zadovoljavaju (1.64). Zamenom izraza (1.65) u (1.64), imajući u vidu da je $\partial u_j / \partial x_\ell = i k_\ell u_j$, dobijamo

$$(c_{ijkl} n_j n_l - \rho v^2 \delta_{ik}) u_k = 0. \quad (1.72)$$

Netrivijalna rešenja za pomeranja u_k se dobijaju kao karakteristični (glavni) vektori koji odgovaraju karakterističnim (glavnim) vrednostima koje su rešenja jednačine

$$\det(c_{ijkl} n_j n_l - \rho v^2 \delta_{ik}) = 0, \quad (1.73)$$

koja predstavlja površ brzine beskonačnog ravanskog talasa. Jednačina (1.72) je prvo data od strane Christoffel-a u obliku

$$(\Gamma_{ik} - \rho v^2 \delta_{ik}) u_k = 0, \quad (1.74)$$

i od strane Kelvin-a u obliku

$$\begin{bmatrix} A_1 - \rho v^2 & \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 & A_2 - \rho v^2 & \alpha_2 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_3 & \alpha_2 \alpha_3 & A_3 - \rho v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0, \quad (1.75)$$

gde su Γ_{ij} kvadratne funkcije kosinusa pravca n_j i date su sa

$$\Gamma_{ik} = c_{ijkl} n_j n_l, \quad (1.76)$$

$$A_1 = \Gamma_{11}, \quad A_2 = \Gamma_{22}, \quad A_3 = \Gamma_{33}, \quad \alpha_2 \alpha_3 = \Gamma_{23}, \quad \alpha_1 \alpha_2 = \Gamma_{13}, \quad \alpha_1 \alpha_3 = \Gamma_{12}, \quad (1.77)$$

Iz jednačine (1.73) je očigledno da je jednačina za faznu brzinu u suštini dvanaestog stepena, pošto svaki izraz drugog reda talasne normale može da se izrazi u sledećem obliku

$$n_i n_j = \frac{v_i v_j}{v_k v_k}. \quad (1.78)$$

Medjutim, za bilo koji propisani pravac normale na talas n_j jednačina (1.73) predstavlja kubnu jednačinu po ρv^2 . Problem se dakle svodi na rešavanje glavnih vektora $u_k^{(M)}$ i glavnih vrednosti $v^{(M)}$ tenzora Γ_{ij} . Treba uvek imati na umu da iz (1.76) sledi da za različite pravce normala na talas imamo različite komponente tenzora Γ_{ij} . Iz jednačine (1.75) formalno dobijamo vektor pomeranja koji odgovara brzini $v^{(M)}$ kao

$$u_{ok}^{(M)} = \frac{\alpha_k N}{\rho [v^{(M)}]^2 - A_k + \alpha_k^2}, \quad (1.79)$$

gde je $N = \alpha_k p_k$ normalizaciona konstanta. Množenjem (1.79) sa α_k

dobijamo drugi oblik površi brzine, prema Kelvin-u, kao

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\alpha_k^2}{\rho [v^{(M)}]^2 - A_k + \alpha_k^2} = 1. \quad (1.80)$$

Iz simetrije jednačine (1.74) sledi da su vektori $u_{ok}^{(M)}$ ($M = 1, 2, 3$) međusobno ortogonalni, ali u opštem slučaju nije dan od njih nije paralelan sa normalom na talas n_j . Ako se, u nekom pravcu n_j , neki od vektora pomeranja, recimo $u_{ok}^{(1)}$, poklapa sa talasnom normalom za njega kažemo da je longitudinalan (L), a iz međusobne ortogonalnosti glavnih vektora pomeranja sledi da su preostala dva transverzalna (T). U anizotropnim materijalima, ako se izuzmu specijalni pravci, prostiranje talasa niti je potpuno longitudinalno niti potpuno transverzalno. Uobičajeno je da se kaže da su pomeranja kvazi-longitudinalna ili kvazi-transverzalna u zavisnosti od međusobnog položaja vektora pomeranja i talasne normale.

Više detalja o prostiranju talasa u elastičnim telima može da se nadje u mnogim standardnim knjigama kao što su one čiji su autori A.E.H. Love (1927), W.Nowacki (1963), J.D.Achenbach (1973), K.F.Graff (1975) itd. Prostiranje talasa u anizotropnim elastičnim telima je dato u knjigama napisanim od strane F.I.Fedorov-a (1968), M.J.P. Musgrave-a (1970) itd. Naučna dostignuća u teoriji i analizi elastodinamike su data u revijalnim radovima napisanim od strane J.Miklowitz-a (1966) i Yih-Hsing Pao-a (1983).

U ovoj tezi mi ćemo pretežno da se bavimo prostiranjem talasa u talasovodima. Talasovod može biti oblika konačne ili beskonačne ploče ili cilindrične površi. U izotropnom materijalu Cauchy i Poisson (1928) su podelili prostiranje talasa na dva glavna tipa koji se obično zovu P-talasi (primarni, pritiskujući, dilatacioni, irotacionalni, longitudinalni) i S - talasi (sekundarni, smičući, rotacionalni, transverzalni). U anizotropnom medijumu oni su istakli postojanje tri tipa elastičnih talasa, jedan kvazi - longitudinalni i dva kvazi - transverzalna. Površinski talasi u izotropnom poluprostoru su prvo analizirani od strane Lord Rayleigh-a (1887), a problem refleksije i refrakcije elastičnih talasa pri ravanskoj granici od strane C.G. Knött-a (1899). Slobodni talasi u ploči su istraženi od strane

Lord Rayleigh-a (1888) i H. Lamb-a (1917) a u kružnoj gredi od L. Pochhammer-a (1876) i C. Chree-a (1889).

U talasovodima se P i S talasi višestruko reflektuju i prostirući talasni mod je rezultat interferencije reflektovanih talasa koji napreduju duž ploče. Ustvari kad se radi o harmonijskim talasima sistem incidentnih i reflektovanih talasa obrazuje stojeći talas po debljini sloja tako da je prostiranje u suštini duž sloja. To je motivacija za naziv talasovod kad je u pitanju sloj ili bilo koje veoma dugo telo čiji je poprečni presek konačnih dimenzija. Susedne paralelne površi daju efekat provodjenja talasa duž ploče. Ideja o reflektovanju talasa se, prema tome, obično podrazumeva tako da se analiza vrši na taj način što se talasno kretanje a priori predstavlja u obliku

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{U}(x_1) \exp\{ik(n_2x_2 + n_3x_3 - vt)\}, \quad (1.81)$$

ako pretpostavimo da je talasna normala $\underline{n}(0, n_2, n_3)$ paralelna površima ploče. Jednačina (1.81) reprezentuje stojeći talas unutar preseka i putujući talas u pravcu talasovoda. Fazna brzina v koja zavisi od odnosa debljine ploče i talasne dužine nije konstantna. Ona je funkcija talasne dužine, tako da je talas disperzivan, pa se funkcionalna relacija

$$f(v, kh) = 0 \quad \text{ili} \quad F(\omega, kh) = 0 \quad (1.82)$$

naziva disperziona relacija ili frekvencijska jednačina. U relaciji (1.82) h predstavlja polovinu debljine ploče.

Disperziona relacija za talase u izotropnoj ploči ograničenoj dvema paralelnim ravnima je izvedena od strane Rayleigh-ja i Lamb-a ali detaljna analiza ovih relacija i koreni transcendentne jednačine (1.82) su dati tek pedesetih godina ovog veka. U elastičnom medijumu frekvencija ω je uvek realna, ali imaginarni i kompleksni talasni brojevi k su razmatrani šezdesetih godina ovog veka, sa jasnim fizičkim tumačenjima, i za ploče i za grede. Ove analize su date u mnogim knjigama a mi se ovde pozivamo na M. Redwood-a (1960) i J. Miklowitz-a (1978).

II PROSTIRANJE ELASTIČNIH TALASA U PLOČI OJAČANOJ SA DVE FAMILIJE NEEKSTENZIBILNIH VLAKANA

2.1. U V O D

U ovoj glavi se razmatra prostiranje elastičnih talasa u ploči ojačanoj sa dve familije neekstenzibilnih vlakana. Već smo videli da ograničenje neekstenzibilnosti ima za posledicu napone reakcije koji nisu određeni poljem relativne deformacije. Ova ograničenja, s druge strane, ograničavaju polje deformacije na kinematski dopustive deformacije. U odeljku 2.2. date su osnovne jednačine. Iz uslova ograničenja lako je videti da komponente pomeranja u ravni ploče mogu da postoje samo ako se talas prostire u pravcu normalnom na jednu od familija vlakana. Prema tome, odvojeno se razmatraju proizvoljni pravac prostiranja, u odeljku 2.3, i pravac prostiranja normalan na jednu od familija vlakana, u odeljku 2.4. Pokazuje se, u oba slučaja, da ukoliko želimo da zadovoljimo uslov da konture budu slobodne od napona moramo da postuliramo postojanje singularnih vlakana na gornjoj i donjoj površi ploče u kojima naponi reakcije teže beskonačnosti na takav način da daju konačno opterećenje u vlaknima. Kao posledicu imamo i za simetrične i antisimetrične modove delta singularnosti kod napona u poprečnim presecima i diskontinualne smičuće napone na konturi ploče. Za antisimetrični deo rešenja fazna brzina je konstantna za sve talasne dužine za proizvoljni pravac prostiranja i disperzivnog karaktera za pravac prostiranja normalan na jednu od familija vlakana. Za simetrični deo rešenja, fundamentalni mod ima prelomnu (eng. cut-off) frekvenciju za sve pravce prostiranja sem kada je pravac prostiranja normalan na jednu od familija vlakana.

2.2. OSNOVNE JEDNAČINE

Ograničićemo našu pažnju na rešenje sistema jednačina za talase koji se prostiru u ravni ploče sa konturama, slobodnim od napona, koje su date jednačinama $x_1 = -h$ i $x_1 = h$ i vlaknima rasporedjenim u ravni x_2x_3 prema slici 1.1. Pretposta-

vimo da se talas prostire brzinom v u pravcu koji pravi ugao α sa x_3 osom. Pretpostavimo pomeranja i napone reakcije u obliku

$$u_1 = U(x_1) \cos \psi, \quad u_2 = V(x_1) \sin \psi, \quad u_3 = W(x_1) \sin \psi, \quad (2.1)$$

i

$$T_a = T_A(x_1) \cos \psi, \quad T_b = T_B(x_1) \cos \psi, \quad (2.2)$$

respektivno, gde su

$$\psi = k(sx_2 + cx_3 - vt), \quad (2.3)$$

a $s \equiv \sin \alpha$, $c \equiv \cos \alpha$ i k talasni broj.

Zamena (2.1) i (2.2) u (1.57) daje napone u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \{a_{11}u' + a_{12}ksV + a_{13}kcW\} \cos \psi, \\ \sigma_{22} &= \{a_{21}U' + a_{22}ksV + a_{23}kcW + (T_A + T_B) \sin^2 \phi\} \cos \psi, \\ \sigma_{33} &= \{a_{31}U' + a_{32}ksV + a_{33}kcW + (T_A + T_B) \cos^2 \phi\} \cos \psi, \\ \sigma_{23} &= \{a_{44}(kcV + ksW) + (T_A - T_B) \sin \phi \cos \phi\} \cos \psi, \\ \sigma_{13} &= a_{55}(W' - kcU) \sin \psi, \\ \sigma_{12} &= a_{66}(V' - ksU) \sin \psi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

pri čemu prim označava diferenciranje po x_1 .

Uslovi ograničenja (1.59) i (1.60) mogu da se izraze u obliku

$$k(Vs \sin^2 \phi + Wc \cos^2 \phi) = 0 \quad (2.5)$$

i

$$k(cV + sW) = 0. \quad (2.6)$$

Jednačine kretanja (1.19) kada se zanemare zapreminske sile postaju

$$\begin{aligned} a_{11}U'' + ks(a_{12} + a_{66})V' + kc(a_{13} + a_{55})W' + k^2[\rho v^2 - (s^2 a_{66} + c^2 a_{55})]U &= 0, \\ a_{66}V'' - ks(a_{12} + a_{66})U' + k^2[\rho v^2 - (s^2 a_{22} + c^2 a_{44})]V - k^2 sc(a_{23} + a_{44})W \\ - k \sin \phi \{(s \sin \phi + c \cos \phi)T_A + (s \sin \phi - c \cos \phi)T_B\} &= 0, \\ a_{55}W'' - kc(a_{13} + a_{55})U' - k^2 sc(a_{23} + a_{44})V + k^2[\rho v^2 - (s^2 a_{44} + c^2 a_{33})]W \\ - k \cos \phi \{(s \sin \phi + c \cos \phi)T_A - (s \sin \phi - c \cos \phi)T_B\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ove jednačine treba da budu rešene zajedno sa uslovima ograničenja (2.5) i (2.6) kao i konturnim uslovima (1.61) koji

moгу da se izraze u obliku

$$\begin{aligned} a_{11}U' + ksa_{12}V + kca_{13}W &= 0, \\ W' - kcU &= 0, \\ V' - ksU &= 0, \quad \text{za } x_1 = \pm h. \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.3. PROIZVOLJAN UGAO PROSTIRANJA

Uslovi oĝraniĉenja (2.5) i (2.6) su predstavljени sistemom od dve homogēne jednaĉine za V i W i pri proizvoljnom uglu prostiranja imamo trivijalna rešenja tj. $V=W=0$. Jednaĉine kretanja (2.7) sada postaju

$$\begin{aligned} a_{11}U'' + k^2\{\rho v^2 - (s^2 a_{66} + c^2 a_{55})\}U &= 0, \\ -ks(a_{12} + a_{66})U' - k \sin\phi\{(s \sin\phi + c \cos\phi)T_A + (s \sin\phi - c \cos\phi)T_B\} &= 0, \\ -kc(a_{13} + a_{55})U' - k \cos\phi\{(s \sin\phi + c \cos\phi)T_A - (s \sin\phi - c \cos\phi)T_B\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Jednaĉina (2.9)₁ ima opšte rešenje

$$U = A \cosh kp_1 x_1 + B \sinh kp_1 x_1, \quad (2.10)$$

gde su

$$p_1^2 = (s^2 a_{66} + c^2 a_{55} - \rho v^2) / a_{11}, \quad (2.11)$$

a A i B proizvoljne konstante. Konturni uslovi (2.8) postaju

$$U' = 0, \quad sU = 0, \quad cU = 0, \quad \text{za } x_1 = \pm h \quad (2.12)$$

i vode do jednaĉina

$$\begin{aligned} kp_1(+A \sinh khp_1 + B \cosh khp_1) &= 0, \\ A \cosh khp_1 \pm B \sinh khp_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

koje daju dva uslova za konstantu A u obliku

$$\begin{aligned} kp_1 A \sinh khp_1 &= 0, \\ A \cosh khp_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

i dva uslova za konstantu B u obliku

$$\begin{aligned} kp_1 B \cosh khp_1 &= 0, \\ B \sinh khp_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dakle, moĝemo da razmatramo ili simetriĉni deo rešenja, kada je $A=0$, ili antisimetriĉni deo rešenja kada je $B=0$.

2.3.1. ANTISIMETRIČNI DEO REŠENJA

Uslovi (2.14) koje imamo za konstantu A ne mogu biti zadovoljeni istovremeno osim za $A=0$ što daje trivijalno rešenje tako da nema prostiranja talasa. Da bi se zadovoljili konturni uslovi, da su smičući naponi na konturi jednaki nuli, potrebno je postulirati postojanje singularnih vlakana na gornjoj i donjoj površi ploče (videti Green (1982) i Green i Milosavljević (1985)). Pretpostavljamo da u vlaknima na gornjoj i donjoj površi ploče naponi reakcije T_A i T_B teže beskonačnosti na takav način da je opterećenje u vlaknima konačno. Ako se vratimo jednačinama kretanja (1.19)_{2,3} i integralimo ih od $x_1=h(1-\sigma)$ do $x_1=h$ koristeći antisimetrični deo rešenja (2.10) i konturne uslove $\sigma_{21}=0$ i $\sigma_{31}=0$ za $x_1=h$ dobićemo

$$L_A = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{h(1-\sigma)}^h T_A dx_1 = \frac{\sin\phi \cos\phi (s^2 a_{66} - c^2 a_{55}) - sc (\cos^2\phi a_{66} - \sin^2\phi a_{55})}{2 \sin\phi \cos\phi (s^2 \sin^2\phi - c^2 \cos^2\phi)} A \cos kh p_1 \quad (2.16)$$

$$L_B = \lim_{\phi \rightarrow \infty} \int_{h(1-\sigma)}^h T_B dx_1 = \frac{\sin\phi \cos\phi (s^2 a_{66} - c^2 a_{55}) + sc (\cos^2\phi a_{66} - \sin^2\phi a_{55})}{2 \sin\phi \cos\phi (s^2 \sin^2\phi - c^2 \cos^2\phi)} A \cos kh p_1.$$

Može lako da se pokaže da singularna vlakna pri $x_1=-h$ nose opterećenja $-L_A$ i $-L_B$. Preostali konturni uslov $\sigma_{11}=0$ za $x_1=\pm h$ je zadovoljen ako je

$$k p_1 A \sinh kh p_1 = 0, \quad (2.17)$$

što ima rešenje

$$p_1 = 0, \quad (2.18)$$

koje reprezentuje savojne talase koji se prostiru konstantnom brzinom

$$\rho v^2 = c^2 a_{55} + s^2 a_{66} \equiv d. \quad (2.19)$$

Odgovarajuća pomeranja su

$$u_1 = A \cos\psi, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad (2.20)$$

dok su odgovarajući naponi dati izrazima

$$\sigma_{11} = 0,$$

$$\sigma_{22} = \{\delta(h-x_1) - \delta(h+x_1)\} \sin^2 \phi \frac{s^2 a_{66} - c^2 a_{55}}{s^2 \sin^2 \phi - c^2 \cos^2 \phi} A \cos \psi,$$

$$\sigma_{13} = \{\delta(h-x_1) - \delta(h+x_1)\} \cos^2 \phi \frac{s^2 a_{66} - c^2 a_{55}}{s^2 \sin^2 \phi - c^2 \cos^2 \phi} A \cos \psi,$$

$$\sigma_{23} = -\{\delta(h-x_1) - \delta(h+x_1)\} \frac{sc(a_{66} \cos^2 \phi - a_{55} \sin^2 \phi)}{s^2 \sin^2 \phi - c^2 \cos^2 \phi} A \cos \psi, \quad (2.21)$$

$$\sigma_{13} = kc a_{55} \{H(x_1-h) - H(x_1+h)\} A \sin \psi$$

$$\sigma_{12} = ks a_{66} \{H(x_1-h) - H(x_1+h)\} A \sin \psi$$

pri čemu su $\delta(x)$ i $H(x)$ impulsne delta funkcije i Hevisajdove skok funkcije respektivno.

2.3.2. SIMETRIČNI DEO REŠENJA

Ako uzmemo da je A jednako nuli konturni uslovi (2.15) ne mogu da budu zadovoljeni istovremeno sem za $B=0$, što daje trivijalno rešenje tako da nema prostiranja talasa. Dakle, opet, da bi zadovoljili konturne uslove, da su smičući naponi jednaki nuli na konturi, potrebno je postulirati postojanje singularnih vlakana na gornjoj i donjoj površi ploče. Istim postupkom koji je doveo do (2.16) dobijamo

$$L_A^+ = \frac{a_{66} s \cos \phi + a_{55} c \sin \phi}{2 \sin \phi \cos \phi (s \sin \phi + c \cos \phi)} A \sinh kh p_1, \quad (2.22)$$

$$L_B^+ = \frac{a_{66} s \cos \phi - a_{55} c \sin \phi}{2 \sin \phi \cos \phi (s \sin \phi - c \cos \phi)} A \sinh kh p_1.$$

Ponavljjanje ovog postupka od $x_1=h$ do $x_1=-h(1-\sigma)$ daje da su

$$L_A^- = L_A^+ \text{ i } L_B^- = L_B^+ \text{ na donjoj površi ploče. Preostali granični uslovi } \sigma_{11}=0 \text{ za } x_1=\pm h \text{ su zadovoljeni ako je zadovoljeno}$$

$$B \cdot k p_1 \cosh kh p_1 = 0, \quad (2.23)$$

što daje kao rešenje

$$k h p_1 = i \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \equiv i k h q_1, \quad (2.24)$$

gde je i imaginarna jedinica a n prirodan broj. Rešenje (2.24) odgovara ekstenzionim talasima koji putuju brzinom v_n datom sa

$$v_n^2 = \frac{d}{\rho} + \frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 a_{11}}{\rho k^2 h^2} \quad (2.25)$$

Odgovarajuća pomeranja su

$$u_{1n} = B_n \sin(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x_1}{h} \cos \psi, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad (2.26)$$

dok su odgovarajući naponi dati izrazima:

$$\begin{aligned} \sigma_{11n} &= a_{11} B_n \frac{(n + \frac{1}{2}) \pi}{h} \cos(n + \frac{1}{2}) \pi \frac{x_1}{h} \cos \psi, \\ \sigma_{22n} &= \{ a_{21} \frac{(n + \frac{1}{2}) \pi}{h} \cos(n + \frac{1}{2}) \pi \frac{x_1}{h} + \\ &+ (-1)^n [\delta(h - x_1) + \delta(h + x_1)] \sin^2 \phi \frac{a_{66} s^2 - a_{55} c^2}{s^2 \sin^2 \phi - c^2 \cos^2 \phi} \} B_n \cos \psi, \\ \sigma_{33n} &= \{ a_{31} \frac{(n + \frac{1}{2}) \pi}{h} \cos(n + \frac{1}{2}) \pi \frac{x_1}{h} + \\ &+ (-1)^n [\delta(h - x_1) + \delta(h + x_1)] \cos^2 \phi \frac{a_{66} s^2 - a_{55} c^2}{s^2 \sin^2 \phi - c^2 \cos^2 \phi} \} B_n \cos \psi, \\ \sigma_{23n} &= (-1)^{n+1} \{ \delta(h - x_1) + \delta(h + x_1) \} B_n \frac{sc(a_{66} \cos^2 \phi - a_{55} \sin^2 \phi)}{s^2 \sin^2 \phi - c^2 \cos^2 \phi} \cos \psi, \\ \sigma_{13n} &= ca_{55} \frac{(n + \frac{1}{2})}{q_1 h} (-1)^{n+1} \{ H(x - h) - H(x_1 + h) \} B_n \sin(n + \frac{1}{2}) \pi \frac{x_1}{h} \sin \psi, \\ \sigma_{12n} &= sa_{66} \frac{(n + \frac{1}{2})}{q_1 h} (-1)^{n+1} \{ H(x_1 - h) - H(x_1 + h) \} B_n \sin(n + \frac{1}{2}) \pi \frac{x_1}{h} \sin \psi. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Prvi prostirući mod je dat sa $n=0$. Iz izraza (2.25) može da se vidi da fazna brzina varira od asimptotske vrednosti $\sqrt{d/\rho}$ kada $kh \rightarrow \infty$ i raste, kada kh opada, do beskonačne vrednosti kada $kh \rightarrow 0$. Ako uvedemo u izraz kružnu frekvenciju ω pomoću relacije $\omega = kv$ jednačina (2.25) može da se napiše u obliku

$$v_n^2 = \frac{d/\rho}{1 - \{ (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 a_{11} \} / \rho h^2 \omega_n^2} \quad (2.28)$$

odakle vidimo da fazna brzina v_n ima kritičnu frekvenciju datu sa

$$\omega_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{a_{11}}{\rho}}, \quad (2.29)$$

dok prvi prostirući mod ima kritičnu frekvenciju pri $\omega_0 = (\pi/2h)\sqrt{a_{11}/\rho}$. Teorija dakle predviđa da ekstenzioni talasi sa frekvencijom nižom od ω_0 neće da se prostiru u neekstenzibilnoj ploči.

2.4. PRAVAC PROSTIRANJA NORMALAN NA JEDNU OD FAMILIJA VLAKANA

Rešenja (2.19) do (2.21) i (2.25) do (2.27) važe za bilo koji ugao prostiranja u ravni paralelnim sa konturama slobodnim od napona sem kada je jednakost

$$s^2 \sin^2 \phi - c^2 \cos^2 \phi = 0, \quad (2.30)$$

zadovoljena to jest kada je pravac prostiranja normalan na jednu od familija vlakana. Ako pri tom uglu prostiranja uzmemo $u_2 = u_3 = 0$, onda mora biti ili $u_1 = 0$, pri čemu nema prostiranja talasa, ili

$$s^2 a_{66} - c^2 a_{55} = \cos^2 \phi a_{66} - \sin^2 \phi a_{55} = 0, \quad (2.31)$$

što znači da je $\mu \cos 2\phi = 0$ a to može biti ispunjeno samo pri specijalnom rasporedu vlakana kada su ona međusobno normalna tj. $2\phi = \pi/2$. Uslovi ograničenja (2.5) i (2.6), s druge strane, kao uslov postojanja netrivialnih rešenja za V i W imaju takodje oblik (2.30). Ikoliko je (2.30) zadovoljeno postoje dva moguća pravca prostiranja i to

$$\alpha_1 = \pi/2 - \phi, \quad (2.32)$$

ili

$$\alpha_2 = \pi/2 + \phi. \quad (2.33)$$

Proučićemo sada pravac prostiranja (2.32) za koji je

$$s \equiv \sin \alpha_1 = \cos \phi, \quad (2.34)$$

$$c \equiv \cos \alpha_1 = \sin \phi. \quad (2.35)$$

Uslovi ograničenja (2.5) i (2.6) tada dopuštaju netrivialna rešenja za V i W što znači da su kinematski dopustive deformacije one kod kojih je zadovoljena relacija

$$V = - \tan \alpha_1 \cdot W. \quad (2.36)$$

Jednačine kretanja (2.7) tada postaju

$$\begin{aligned} ca_{11}U'' + k(c^2b_2 - s^2b_3)W' - ck^2(d - \rho v^2)U &= 0, \\ -a_{66}W'' - kcb_3U' + k^2(s^2a_{22} + c^2a_{44} - c^2\hat{b}_1 - \rho v^2)W - 2kc^3T_A &= 0, \\ a_{55}W'' - kcb_2U' - k^2(s^2a_{44} + c^2a_{33} - s^2\hat{b}_1 - \rho v^2)W - 2kcs^2T_A &= 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

gde su

$$\hat{b}_1 = a_{23} + a_{44}, \quad b_2 = a_{13} + a_{55}, \quad b_3 = a_{12} + a_{66}, \quad (2.38)$$

dok konturni uslovi (2.8) postaju

$$\begin{aligned} ca_{11}U' + k(c^2a_{13} - s^2a_{12})W &= 0, \\ U &= 0, \\ W' &= 0, \quad \text{za } x_1 = \pm h. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Jednačine (2.37)_{2,3} kombinovanjem mogu da se napišu u obliku

$$\begin{aligned} dW'' - kc(c^2b_2 - s^2b_3)U' - k^2\{s^4a_{22} + c^4a_{33} - 2s^2c^2a_{23} - \rho v^2\}W &= 0, \\ 2kcT_A = (a_{55} - a_{66})W'' - kc(b_2 + b_3)U' + k^2\{s^2(a_{22} - a_{23}) - c^2(a_{33} - a_{23})\}W. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dakle pomeranja mogu biti rešena korišćenjem (2.40)₁ i (2.37)₁ a napon reakcije T_A korišćenjem (2.40)₂ pri čemu T_B ostaje proizvoljna veličina. Ako pretpostavimo pomeranja u obliku

$$U = A \cosh kpx_1 + B \sinh kpx_1 \quad (2.41)$$

$$W = D \sinh kpx_1 + E \cosh kpx_1$$

onda iz jednačina (2.37)₁ i (2.40)₁ dobijamo

$$\begin{aligned} \{ca_{11}(p^2 - \hat{a}_1)A + p(c^2b_2 - s^2b_3)D\} \cosh kpx_1 + \{ca_{11}(p^2 - \hat{a}_1)B + \\ + p(c^2b_2 - s^2b_3)E\} \sinh kpx_1 &= 0, \\ \{-cp(c^2b_2 - s^2b_3)A + (dp^2 - s^2a_{66}\hat{a}_2 - c^2a_{55}a + 2s^2c^2\hat{b}_1)D\} \sinh kpx_1 + \\ \{-cp(c^2b_2 - s^2b_3)B + (dp^2 - s^2a_{66}\hat{a}_2 - c^2a_{55}\hat{a}_3 + 2s^2c^2\hat{b}_1)E\} \cosh kpx_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

gde su

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1 &= (d - \rho v^2) / a_{11}, \\
\hat{a}_2 &= (s^2 a_{22} + c^2 a_{44} - \rho v^2) / a_{66}, \\
\hat{a}_3 &= (s^2 a_{44} + c^2 a_{33} - \rho v^2) / a_{55}.
\end{aligned}
\tag{2.43}$$

Jednačine kretanja (2.42) uslovljavaju odnose između konstanta A, B, D i E date jednačinama

$$\begin{aligned}
ca_{11}(p^2 - \hat{a}_1)A + p(c^2 b_2 - s^2 b_3)D &= 0, \\
ca_{11}(p^2 - \hat{a}_1)B + p(c^2 b_2 - s^2 b_3)E &= 0, \\
-cp(c^2 b_2 - s^2 b_3)A + (dp^2 - s^2 a_{66} \hat{a}_2 - c^2 a_{55} \hat{a}_3 + 2s^2 c^2 \hat{b}_1)D &= 0, \\
-cp(c^2 b_2 - s^2 b_3)B + (dp^2 - s^2 a_{66} \hat{a}_2 - c^2 a_{55} \hat{a}_3 + 2s^2 c^2 \hat{b}_1)E &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.44}$$

koje imaju netrivialna rešenja pod uslovom da p^2 zadovoljava jednačinu

$$\begin{aligned}
ip^4 - \{d\hat{a}_1 + s^2 a_{66} \hat{a}_2 + c^2 a_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1 - (c^2 b_2 - s^2 b_3)^2 / a_{11}\} p^2 + \\
+ \hat{a}_1 (s^2 a_{66} \hat{a}_2 + c^2 a_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.45}$$

Pretpostavimo da su p_1^2 i p_2^2 rešenja jednačine (2.45) i da je $p_1^2 < p_2^2$. Konstante moraju da zadovolje sledeće relacije

$$(D/A)_\alpha = (E/B)_\alpha = -ca_{11}(p_\alpha^2 - \hat{a}_1) / (c^2 b_2 - s^2 b_3) p_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,
\tag{2.46}$$

koje su posledica jednačina (2.44). Dakle opšta rešenja (2.41) su sada u sledećem obliku

$$\begin{aligned}
U &= A_1 \cosh kp_1 x_1 + B_1 \sinh kp_1 x_1 + A_2 \cosh kp_2 x_1 + B_2 \sinh kp_2 x_1, \\
W &= - \frac{ca_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} \left\{ (p_1^2 - \hat{a}_1) A_1 \frac{\sinh kp_1 x_1}{p_1} + (p_1^2 - \hat{a}_1) B_1 \frac{\cosh kp_1 x_1}{p_1} + \right. \\
&\quad \left. (p_2^2 - \hat{a}_1) A_2 \frac{\sinh kp_2 x_1}{p_2} + (p_2^2 - \hat{a}_1) B_2 \frac{\cosh kp_2 x_1}{p_2} \right\}.
\end{aligned}
\tag{2.47}$$

Konturni uslovi (2.39) nameću šest uslova na četiri konstante A_1, A_2, B_1 i B_2 koji ne mogu u opštem slučaju da budu zadovoljeni pa smo prinudjeni da pretpostavimo postojanje singularnih vlakana na gornjoj i donjoj površi ploče. Koristeći istu proceduru kao onu koja dovodi do (2.16) može da se pokaže da jednačine kretanja (1.19)_{2,3} i konturni uslovi, $\sigma_{21} = 0$ i $\sigma_{31} = 0$, na gornjoj konturi daju

$$2c^3 \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{h(1-\sigma)}^h T_A^+ dx_1 = a_{66} (W' + kcU) (h) ,$$

$$2s^2 c \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{h(1-\sigma)}^h T_A^+ dx_1 = -a_{55} (W' - kcU) (h) , \quad (2.48)$$

a na donjoj konturi daju

$$2c^3 \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-h}^{-h(1-\sigma)} T_A^- dx_1 = a_{66} (W' + kcU) (-h) , \quad (2.49)$$

$$2s^2 c \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-h}^{-h(1-\sigma)} T_A^- dx_1 = -a_{55} (W' - kcU) (-h) ,$$

što može da bude saglasno samo ako su zadovoljeni uslovi

$$-ekcU + dW' = 0, \quad \text{za } x_1 = \pm h, \quad (2.50)$$

gde je $e \equiv c^2 a_{55} - s^2 a_{66}$.

Uslovi (2.50) zajedno sa konturnim uslovima (2.39)₁ daju četiri jednačine, koje četiri konstante A_1, A_2, B_1 i B_2 moraju da zadovolje, u sledećem obliku

$$\frac{kca_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} \left\{ \left[ep_1^2 + (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) \hat{a}_1 \right] \left[\pm \frac{A_1 \sinh khp_1}{p_1} + \frac{B_1 \cosh khp_1}{p_1} \right] + \right. \\ \left. + \left[ep_2^2 + (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) \hat{a}_1 \right] \left[\pm \frac{A_2 \sinh khp_2}{p_2} + \frac{B_2 \cosh khp_2}{p_2} \right] \right\} = 0, \quad (2.51)$$

$$\frac{kca_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} \left\{ \left[dp_1^2 - d\hat{a}_1 + \frac{e(c^2 b_2 - s^2 b_3)}{a_{11}} \right] [A_1 \cosh khp_1 + B_1 \sinh khp_1] + \right. \\ \left. + \left[dp_2^2 - d\hat{a}_1 + \frac{e(c^2 b_2 - s^2 b_3)}{a_{11}} \right] [A_2 \cosh khp_2 + B_2 \sinh khp_2] \right\} = 0.$$

Jednačine (2.51) imaju netrivialna rešenja ili kada je $B_1 = B_2 = 0$ i

$$\left\{ dep_1^2 p_2^2 + e \left[\frac{e(c^2 b_2 - s^2 b_3)}{a_{11}} - d\hat{a}_1 \right] p_1^2 + d\hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) p_2^2 + \right. \\ \left. + \hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) \left[\frac{e(c^2 b_2 - s^2 b_3)}{a_{11}} - d\hat{a}_1 \right] \right\} \frac{\tanh khp_1}{p_1} - \\ - \left\{ dep_1^2 p_2^2 + e \left[\frac{e(c^2 b_2 - s^2 b_3)}{a_{11}} - d\hat{a}_1 \right] p_2^2 + d\hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) p_1^2 + \right. \\ \left. + \hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) \left[\frac{e(c^2 b_2 - s^2 b_3)}{a_{11}} - d\hat{a}_1 \right] \right\} \frac{\tanh khp_2}{p_2} = 0, \quad (2.52)$$

ili kada je $A_1 = A_2 = 0$ i

$$\{de p_1^2 p_2^2 + e[e(c^2 b_2 - s^2 b_3)/a_{11} - d\hat{a}_1] p_1^2 + d\hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) p_2^2 + \hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) [e(c^2 b_2 - s^2 b_3)/a_{11} - d\hat{a}_1]\} \frac{\coth kh p_1}{p_1} - \quad (2.53)$$

$$\{de p_1^2 p_2^2 + e[e(c^2 b_2 - s^2 b_3)/a_{11} - d\hat{a}_1] p_2^2 + d\hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) p_1^2 + \hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) [e(c^2 b_2 - s^2 b_3)/a_{11} - d\hat{a}_1]\} \frac{\coth kh p_2}{p_2} = 0 .$$

zadovoljeno. Dakle, konturni uslovi razdvajaju rešenja na antisimetrični deo, čija je disperziona jednačina (2.52), i simetrični deo, čija je disperziona jednačina (2.53). Jednačine (2.52) i (2.53) daju promenu fazne brzine v sa promenom veličine kh za simetrične i antisimetrične modove respektivno. Sada ćemo da ispitamo granične slučajeve disperzionih jednačina za duge talase, kada je $kh \rightarrow 0$, i kratke talase, kada je $kh \rightarrow \infty$.

2.4.1. ANTISIMETRIČNI DEO REŠENJA

Granična vrednost za duge talase, kada je $kh \rightarrow 0$, može da se dobije tako što se hiperbolički tangens zameni svojim argumentom tako da iz jednačine (2.52) dobijamo

$$\rho v^2 = d - e^2/d. \quad (2.54)$$

U slučaju kratkih talasa, kada $kh \rightarrow \infty$, hiperbolički tangens može da se zameni sa ± 1 u zavisnosti od znaka p_1 i p_2 tako da se jednačina (2.52) svodi na sledeći oblik

$$(p_2 - p_1) \{de p_1^2 p_2^2 + d\hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) (p_1^2 + p_2^2) - (c^2 b_2 - s^2 b_3) (e^2/a_{11} - d\hat{a}_1) |p_1 p_2| + \hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) [e(c^2 b_2 - s^2 b_3)/a_{11} - d\hat{a}_1]\} = 0 . \quad (2.55)$$

Jednačina (2.45) može da se iskoristi za odredjivanje izraza $p_1^2 p_2^2$ i $p_1^2 + p_2^2$ tako da jednačina (2.55) može da se napiše u sledećem obliku

$$\hat{a}_1 (p_2 - p_1) (c^2 b_2 - s^2 b_3) \sqrt{\frac{s^2 a_{66} \hat{a}_2 + c^2 a_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1}{d \hat{a}_1}} - \frac{(c^2 a_{13} - s^2 a_{12})^2}{a_{11}} \left[\sqrt{\frac{s^2 a_{66} \hat{a}_2 + c^2 a_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1}{d \hat{a}_1}} - \left(\frac{e^2}{a_{11}} - d\hat{a}_1 \right) \right] = 0. \quad (2.56)$$

Ukoliko je $\hat{a}_1 = 0$ tj. $\rho v^2 = d$ onda je $p_1^2 = 0$ tako da disperziona jednačina (2.52) ne može da bude zadovoljena za opšti raspored vlakana. U slučaju da je $p_1 = p_2$ rešenja (2.47), koja predstavljaju pomranja, više ne važe jer opšte rešenje mora ponovo da se napiše u obliku koji odgovara rešenjima kada su dva korena karakteristične jednačine (2.45) međusobno jednaka. Dakle, ako odbacimo mogućnost trivijalnih rešenja ili specijalnog rasporeda vlakana, velika zagrada u izrazu (2.56) mora da bude jednaka nuli tako da dobijamo

$$\left[s^4 a_{22} + c^4 a_{33} - 2s^2 c^2 a_{23} - \frac{(c^2 a_{13} - s^2 a_{12})^2}{a_{11}} - \rho v^2 \right] \sqrt{\frac{d - \rho v^2}{s^4 a_{22} + c^4 a_{33} - 2s^2 c^2 a_{23} - \rho v^2}} - \sqrt{\frac{d}{a_{11}}} \left(\frac{e^2}{d} - d + \rho v^2 \right) = 0, \quad (2.57)$$

što nam daje jednačinu iz koje može da se izračuna brzina za slučaj kratkih talasa. Dobro je poznato da je Rayleigh (1885) postavio i rešio problem istraživanja ponašanja talasa, na ravnoj slobodnoj površi homogenog izotropnog elastičnog poluprostora, čiji je karakter takav da se poremećaj uglavnom odvija blizu slobodne površi na debljini uporedivoj sa talasnom dužinom. Od tada se ovakvi talasi zovu Rayleigh-evi talasi. Osnove teorije površinskih talasa u anizotropnim elastičnim materijalima su date u radu Chadwick-a i Smith-a (1977) i on je preporučljiv za detaljniji tretman ovakve problematike.

Lako je pokazati da fazna brzina određena jednačinom (2.57) odgovara Rayleigh-evoj talasnoj brzini za anizotropne materijale koje mi ovde razmatramo. Rayleigh-eva talasna brzina se pojavljuje ovde jer se, za tako male talasne dužine, ploča konačne debljine ponaša kao polubeskonačni prostor. Dakle, vibraciona energija se prenosi uglavnom u okolini spoljnih površi ploče.

Kao što vidimo neekstenzibilna teorija predviđa, za antisimetrični deo rešenja koji odgovara savojnim talasima, da fazna brzina dugih talasa, kada kh teži nuli, startuje sa vrednošću datom sa (2.54) i raste sa porastom kh do Rayleigh-eve talasne brzine, koja predstavlja graničnu vrednost kratkih talasa, kada kh teži beskonačnosti, i koja je niža od talasne brzine smicanja date sa $\sqrt{d/\rho}$. Kada je ugao između dve familije vlakana jednak nuli materijal se ponaša kao materijal ojačan jednom familijom vlakana i rezultat (2.57) postaje isti kao rezultati dobijeni od strane

Green-a (1982) i Green-a i Milosavljevića (1985) pri proučavanju talasa u materijalima ojačanim jednom familijom vlakana.

Pomeranja mogu da se izraze, pomoću jedne proizvoljne konstante, korišćenjem $(2.51)_2$ na sledeći način

$$\begin{aligned}
 &= A \left\{ \frac{\cosh kp_1 x_1}{\cosh khp_1} - Z \frac{\cosh kp_2 x_1}{\cosh khp_2} \right\}, \\
 &= - \frac{ca_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} A \left\{ (p_1^2 - \hat{a}_1) \frac{\sinh kp_1 x_1}{p_1 \cosh khp_1} - Z (p_2^2 - \hat{a}_1) \frac{\sinh kp_2 x_1}{p_2 \cosh khp_2} \right\}, \\
 &= -(s/c) W, \tag{2.58}
 \end{aligned}$$

de je

$$Z = \frac{p_1^2 - \hat{a}_1 + e(c^2 b_2 - s^2 b_3)/a_{11} d}{p_2^2 - \hat{a}_1 + e(c^2 b_2 - s^2 b_3)/a_{11} d}. \tag{2.59}$$

Umetnjenjem (2.58) u (2.48) i (2.49) dovodi do izraza za opterećenja A^+ , na gornjoj konturi, i A^- , na donjoj konturi, u obliku

$$\begin{aligned}
 A^+ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{h}{h(1-\sigma)} \int T_A dx_1 = -L_A^- = - \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{-h(1-\sigma)}{-h} \int T_A^- dx_1 \\
 &= - \frac{ka_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} \frac{a_{66}}{2c^2} A \left\{ p_1^2 - \hat{a}_1 - \frac{c^2 b_2 - s^2 b_3}{a_{11}} - Z \left(p_2^2 - \hat{a}_1 - \frac{c^2 b_2 - s^2 b_3}{a_{11}} \right) \right\} \tag{2.60} \\
 &= \frac{ka_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} \frac{a_{55}}{2s^2} A \left\{ p_1^2 - \hat{a}_1 + \frac{c^2 b_2 - s^2 b_3}{a_{11}} - Z \left(p_2^2 - \hat{a}_1 + \frac{c^2 b_2 - s^2 b_3}{a_{11}} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Iz ove analize se vidi da napon reakcije T_B ostaje proizvoljan jer nije ni sadržan u jednačinama kretanja za pravac prostiranja koji razmatramo u ovom odeljku. Ovo je tako jer smo analizirali slučaj kada se talas prostire normalno na familiju vlakana b tako da su ova vlakna sve vreme u faznoj ravni što znači da nismo u stanju da prepoznamo, u matematičkom smislu, taj deo ograničenja. Iako opterećenje L_B takodje ostaje proizvoljno, a napone možemo izraziti na sledeći način

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{ka_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} A \left\{ \left[ep_1^2 + \hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) \right] \frac{\sinh kp_1 x_1}{p_1 \cosh khp_1} - \right. \\
 &= Z \left[ep_2^2 + \hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12}) \right] \frac{\sinh kp_2 x_1}{p_2 \cosh khp_2} \left. \right\} \cos \psi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22} = & ka_{21}A \left\{ \left[p_1^2 - \frac{a_{11}(c^2 a_{23} - s^2 a_{22})}{a_{21}(c^2 b_2 - s^2 b_3)} (p_1^2 - \hat{a}_1) \right] \frac{\sinh kp_1 x_1}{p_1 \cosh khp_1} - \right. \\
& - Z \left[p_2^2 - \frac{a_{11}(c^2 a_{23} - s^2 a_{22})}{a_{21}(c^2 b_2 - s^2 b_3)} (p_2^2 - \hat{a}_1) \right] \frac{\sinh kp_2 x_1}{p_2 \cosh khp_2} \left. \right\} \cos \psi \\
& + (L_A + L_B) \{ \delta(h - x_1) - \delta(h + x_1) \} \cos \psi, \\
\sigma_{33} = & ka_{31}A \left\{ \left[p_1^2 - \frac{a_{11}(c^2 a_{33} - s^2 a_{32})}{a_{31}(c^2 b_2 - s^2 b_3)} (p_1^2 - \hat{a}_1) \right] \frac{\sinh kp_1 x_1}{p_1 \cosh khp_1} - \right. \\
& - Z \left[p_2^2 - \frac{a_{11}(c^2 a_{33} - s^2 a_{32})}{a_{31}(c^2 b_2 - s^2 b_3)} (p_2^2 - \hat{a}_1) \right] \frac{\sinh kp_2 x_1}{p_2 \cosh khp_2} \left. \right\} \cos \psi \\
& + (L_A + L_B) \{ \delta(h - x_1) - \delta(h + x_1) \} \cos \psi, \tag{2.61} \\
\sigma_{23} = & (L_A - L_B) \{ \delta(h - x_1) - \delta(h + x_1) \} \cos \psi, \\
\sigma_{13} = & - \frac{kca_{11}a_{55}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} A \left\{ p_1^2 - \hat{a}_1 + \frac{c^2 b_2 - s^2 b_3}{a_{11}} \right\} \frac{\cosh kp_1 x_1}{\cosh khp_1} - \\
& - Z \left\{ p_2^2 - \hat{a}_1 + \frac{c^2 b_2 - s^2 b_3}{a_{11}} \right\} \frac{\cosh kp_2 x_1}{\cosh khp_2} \left. \right\} \sin \psi, \quad \begin{array}{l} \text{za } |x_1| < h \\ \text{za } |x_1| = h, \end{array} \\
\sigma_{13} = & 0, \\
\sigma_{12} = & \frac{k a_{11} a_{66}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} A \left\{ p_1^2 - \hat{a}_1 - \frac{c^2 b_2 - s^2 b_3}{a_{11}} \right\} \frac{\cosh kp_1 x_1}{\cosh khp_1} - \\
& - Z \left\{ p_2^2 - \hat{a}_1 - \frac{c^2 b_2 - s^2 b_3}{a_{11}} \right\} \frac{\cosh kp_2 x_1}{\cosh khp_2} \left. \right\} \sin \psi, \quad \begin{array}{l} \text{za } |x_1| < h \\ \text{za } |x_1| = h. \end{array} \\
\sigma_{12} = & 0
\end{aligned}$$

2.4.2. SIMETRIČNI DEO REŠENJA

Disperziona relacija za simetrični deo rešenja je data relacijom (2.53). Za duge talase, kada $kh \rightarrow 0$, hiperbolički kotanges može da se zameni recipročnom vrednošću argumenta tj.

$$\coth khp_1 \approx 1/khp_1, \quad \coth khp_2 \approx 1/khp_2, \tag{2.62}$$

tako da iz disperzione relacije (2.53) dobijamo

$$\hat{a}_1 (c^2 b_2 - s^2 b_3) \{ s^2 a_{66} \hat{a}_2 + c^2 a_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1 - \frac{(c^2 a_{13} - s^2 a_{12})^2}{a_{11}} \} = 0. \tag{2.63}$$

Za rešenje $\hat{a}_1 = 0$, iz koga sledi $\rho v^2 = d$, može da se pokaže da je

degenerativno tako da granična brzina dugih talasa za fundamentalni mod simetričnog dela rešenja prema (2.63) ima sledeću vrednost

$$\rho v^2 = s^4 a_{22} + c^4 a_{33} - 2s^2 c^2 a_{23} - \frac{(c^2 a_{13} - s^2 a_{12})^2}{a_{11}} \quad (2.64)$$

Kada zamenimo vrednosti iz (1.58) u (2.64) dobijamo

$$\rho v^2 = d + 3\mu \cos^2 2\phi + \frac{1}{2} \gamma_2 \sin^4 2\phi + \frac{1}{2} \gamma_7 \sin^2 2\phi - \frac{4}{\lambda + 2\mu} \cos^2 2\phi \left(\mu + \frac{1}{4} \gamma_4 \sin^2 2\phi \right)^2, \quad (2.65)$$

gde je

$$d = c^2 a_{55} + s^2 a_{66} = \mu + \frac{1}{2} \gamma_7 \sin^2 2\phi. \quad (2.66)$$

U realnim materijalima očekujemo da je talasna brzina (2.65) veća od smičuće brzine d/ρ . U tom slučaju iz (2.45) je očigledno da manji koren p_1^2 ima negativnu vrednost dok je p_2^2 pozitivno tj.

$$\begin{aligned} dp_1^2 p_2^2 &= \frac{d - \rho v^2}{a_{11}} (s^2 a_{66} \hat{a}_2 + c^2 a_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1) \\ &= \frac{d - \rho v^2}{a_{11}} \frac{(c^2 a_{13} - s^2 a_{12})^2}{a_{11}} < 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Sa porastom kh v^2 opada i mi ćemo sada da ispitamo da li v^2 opada ispod vrednosti d/ρ to jest da li postoji presek između disperzione krive (2.53), za fundamentalni mod, i linije $v^2 = d/\rho$. Pretpostavimo da postoji talasna brzina

$$\rho v^2 = d - \delta^2, \quad (2.68)$$

gde je δ^2 infinitezimalna veličina. Tada je

$$\hat{a}_1 = \delta^2 / a_{11}, \quad (2.69)$$

tako da iz (2.45) dobijamo

$$p_1^2 = \frac{\delta^2}{a_{11}} \left[1 + \frac{(c^2 b_2 - s^2 b_3)^2}{a_{11} dp_2^2} \right] + O(\delta^4) \quad (2.70)$$

$$dp_2^2 = s^2 a_{66} \hat{a}_2 + c^2 a_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1 - \frac{(c^2 b_2 - s^2 b_3)^2}{a_{11}} + O(\delta^2).$$

Iz disperzione jednačine (2.53) jednostavnim izračunavanjem se dobija

$$\frac{\tanh kh p_2}{kh p_2} = \frac{e^2}{a_{11}} \frac{dp_2^2 + \frac{(c^2 b_2 - s^2 b_3)^2}{a_{11}}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} + O(\delta^2). \quad (2.71)$$

$$\left[dp_2^2 + e \frac{(c^2 b_2 - s^2 b_3)^2}{a_{11}} \right]^2$$

Jednačina (2.71) daje kh pri kome disperziona kriva seče liniju v^2/d . Za kh veće od ove vrednosti, dobijene iz (2.71), očigledno je, iz (2.45), da su i p_1^2 i p_2^2 pozitivne veličine tako da u slučaju kratkih talasa, kada $kh \rightarrow \infty$, hiperbolički kotanges može da se zameni sa jedinicom što znači da (2.53) daje istu graničnu vrednost talasne brzine kao što smo imali za antisimetrični deo rešenja (2.57). Već smo videli da je to Rayleigh-eva talasna brzina za anizotropni materijal i da se ona pojavljuje zato što se konačna ploča pri ovim talasnim dužinama ponaša kao polubeskonačni medijum.

Pomeranja mogu da se izraze, pomoću jedne proizvoljne konstante, korišćenjem izraza (2.51)₂ u sledećem obliku

$$u = B \left\{ \frac{\sinh kp_1 x_1}{\sinh kh p_1} - Z \frac{\sinh kp_2 x_1}{\sinh kh p_2} \right\},$$

$$v = - \frac{ca_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} B \left\{ (p_1^2 - \hat{a}_1) \frac{\cosh kp_1 x_1}{p_1 \sinh kh p_1} - Z (p_2^2 - \hat{a}_1) \frac{\cosh kp_2 x_1}{p_2 \sinh kh p_2} \right\}, \quad (2.72)$$

$$w = - \frac{s}{c} W,$$

gde je Z dato izrazom (2.59). Opterećenje L_A^+ na gornjoj konturi je dato sa (2.60) dok L_A^- na donjoj konturi ima istu vrednost. Opterećenje L_B opet ostaje neodređeno dok naponi mogu da se izraze na sledeći način

$$\sigma_{11} = \frac{ka_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} B \left\{ [ep_1^2 + \hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12})] \frac{\cosh kp_1 x_1}{p_1 \sinh kh p_1} - Z [ep_2^2 + \hat{a}_1 (c^2 a_{13} - s^2 a_{12})] \frac{\cosh kp_2 x_1}{p_2 \sinh kh p_2} \right\} \cos \psi,$$

$$\sigma_{22} = ka_{21} B \left\{ [p_1^2 - \frac{a_{11}(c^2 a_{23} - s^2 a_{22})}{a_{21}(c^2 b_2 - s^2 b_3)}] (p_1^2 - \hat{a}_1) \frac{\cosh kp_1 x_1}{p_1 \sinh kh p_1} - Z [p_2^2 - \frac{a_{11}(c^2 a_{23} - s^2 a_{22})}{a_{21}(c^2 b_2 - s^2 b_3)}] (p_2^2 - \hat{a}_1) \frac{\cosh kp_2 x_1}{p_2 \sinh kh p_2} \right\} \cos \psi$$

$$+ (L_A + L_B) \{ \delta(h - x_1) + \delta(h + x_1) \} \cos \psi,$$

$$\sigma_{33} = ka_{31} B \left\{ [p_1^2 - \frac{a_{11}(c^2 a_{33} - s^2 \hat{a}_{32})}{a_{31}(c^2 b_2 - s^2 b_3)}] (p_1^2 - \hat{a}_1) \frac{\cosh kp_1 x_1}{p_1 \sinh kh p_1} - Z [p_2^2 - \frac{a_{11}(c^2 a_{33} - s^2 \hat{a}_{32})}{a_{31}(c^2 b_2 - s^2 b_3)}] (p_2^2 - \hat{a}_1) \frac{\cosh kp_2 x_1}{p_2 \sinh kh p_2} \right\} \cos \psi +$$

$$+ (L_A + L_B) \{ \delta(h-x_1) + \delta(h+x_1) \} \cos \psi, \quad (2.73)$$

$$\sigma_{23} = (L_A - L_B) \{ \delta(h-x_1) + \delta(h+x_1) \} \cos \psi,$$

$$\sigma_{13} = - \frac{kc a_{11} a_{55}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} B \left\{ \left(p_1^2 - \hat{a}_1 + \frac{c^2 b_2 - s^2 b_3}{a_{11}} \right) \frac{\sinh kp_1 x_1}{\sinh khp_1} - \right. \\ \left. - Z \left(p_2^2 - \hat{a}_1 + \frac{c^2 b_2 - s^2 b_3}{a_{11}} \right) \frac{\sinh kp_2 x_1}{\sinh khp_2} \right\} \sin \psi, \text{ za } |x_1| < h$$

$$\sigma_{13} = 0, \quad \text{za } |x_1| = h,$$

$$\sigma_{12} = \frac{ks a_{11} a_{66}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} B \left\{ \left(p_1^2 - \hat{a}_1 - \frac{c^2 b_2 - s^2 b_3}{a_{11}} \right) \frac{\sinh kp_1 x_1}{\sinh khp_1} - \right. \\ \left. - Z \left(p_2^2 - \hat{a}_1 - \frac{c^2 b_2 - s^2 b_3}{a_{11}} \right) \frac{\sinh kp_2 x_1}{\sinh khp_2} \right\} \sin \psi, \text{ za } |x_1| < h$$

$$\sigma_{12} = 0, \quad \text{za } |x_1| = h.$$

III. PROSTIRANJE ELASTIČNIH TALASA U PLOČI OJAČANOJ DVEMA FAMILIJAMA JAKIH VLAKANA

3.1. U V O D

U drugoj glavi izvedena su rešenja korišćenjem neekstenzibilne teorije pri čemu je pokazano da je ponašanje rešenja za kinematski dopustive deformacije, koje nastaju kada je pravac prostiranja normalan na jednu od familija vlakana, drugačije nego kada je pravac prostiranja proizvoljan. Da bi smo dobili rešenja za bilo koji pravac prostiranja, uključujući i taj specijalni ugao prostiranja, bili smo prinudjeni da postuliramo postojanje singularnih napona na konturama. Da bi se objasnile ove singularnosti potrebno je izvesti rešenja korišćenjem ekstenzibilne teorije pa, u slučaju jake anizotropije, uporediti ova sa rezultatima koje predviđa neekstenzibilna teorija. Rešenja dobijena korišćenjem teorije sa ekstenzibilnim vlaknima ubuduće ćemo zvati egzaktnim rešenjima.

U odeljku 3.2. su izvedena rešenja korišćenjem teorije sa ekstenzibilnim vlaknima. Dobijeni su izrazi za pomeranja i napone, koji sadrže samo jednu proizvoljnu konstantu, kako za simetrične tako i za antisimetrične modove propagacije, koji su bili razdvojeni disperzionim relacijama. Disperzione relacije su napisane u pogodnim oblicima za analizu iz kojih je veoma lako naći granične vrednosti fazne brzine za duge i kratke talase. Disperziona relacija za antisimetrični mod propagacije pokazuje da se fazna brzina menja kontinualno od nule, za beskonačno duge talase, do Rayleigh-eve talasne brzine, za beskonačno kratke talase. Disperziona relacija za simetrične deformacije pokazuje da, za beskonačno duge talase, fazna brzina fundamentalnog moda ima dva rešenja od kojih jedno odgovara kvazilongitudinalnim talasima a drugo kvazitransverzalnim talasima. Za slučaj beskonačno kratkih talasa obe talasne brzine teže Rayleigh-evoj brzini.

U prvoj glavi smo videli da u slučaju jake anizotropije odredjene elastične konstante postaju veoma velike i da u graničnom slučaju, kada vlakna postanu neekstenzibilna, postaju beskonačne. To nam omogućuje da uvedemo mali materijalni para-

metar u jednačine i da diskutujemo granična ponašanja rešenja. Analiza dominantnih delova pokazuje da treba odvojeno posmatrati proizvoljan ugao prostiranja (odjeljak 3.4) od pravca prostiranja normalnog na jednu od familija vlakana (odjeljak 3.5). Pokazano je, analizom graničnog ponašanja rešenja, da se singulariteti koji nastaju u rešenjima neekstenzibilne teorije pojavljuju zato što ova nije u stanju da reprodukuje ponašanje rešenja za beskonačno duge i beskonačno kratke talase. Delovi rešenja u tim oblastima talasnih dužina se gube u graničnom procesu koji jako anizotropni materijal prevodi u neekstenzibilni materijal. Ovi zaključci sugeriraju perturbacioni prilaz za dobijanje aproksimativnih rešenja, koja bi važila u celom opsegu talasnih dužina, koji će biti razmatran u sledećoj glavi.

Zbog mogućnosti poredjenja, u sledećoj glavi, odeljak 3.6. je posvećen kratkom razmatranju talasa u beskonačnom prostoru čija je normala u ravni paralelnoj ravnima u kojima vlakna leže. Pokazano je da u tom slučaju možemo da dobijemo rešenja koja odgovaraju čisto transverzalnim (upravnim na obe familije vlakana), kvazilongitudinalnim i kvazitransverzalnim talasima.

3.2. EKSTENZIBILNA VLAKNA

Kao što smo videli u prethodnoj glavi smo razmatrali prostiranje talasa u materijalima koji su bili neekstenzibilni u pravcima vlakana. Materijal je bio podvrgnut ograničenju neekstenzibilnosti koje predstavlja idealizaciju osobine da su ekstenzioni moduli kompozita u pravcima vlakana mnogo veći od smičućih modula merenih normalno na te pravce. Kompozit sa veoma jakim ali ekstenzibilnim vlaknima se obično zove jako anizotropni kompozit ili materijal ojačan jakim vlaknima.

Za materijal ojačan dvema familijama mehanički ekvivalentnih ekstenzibilnih vlakana, čija su pomeranja oblika (2.1) iz jednačina (1.55) dobijamo napone u obliku

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (c_{11}U' + ksc_{12}V + kcc_{13}W) \cos \psi, \\
\sigma_{22} &= (c_{21}U' + ksc_{22}V + kcc_{23}W) \cos \psi, \\
\sigma_{33} &= (c_{31}U' + ksc_{32}V + kcc_{33}W) \cos \psi, \\
\sigma_{23} &= kc_{44}(cV + sW) \cos \psi, \\
\sigma_{13} &= c_{55}(-kcV + W') \sin \psi, \\
\sigma_{12} &= c_{66}(-ksU + V') \sin \psi,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

gde prim označava diferenciranje po x_1 a koeficijenti $c_{ij} = c_{ji}$ su dati sa (1.56).

Jednačine kretanja (1.19) u odsustvu zapreminskih sila sada imaju sledeći oblik

$$\begin{aligned}
c_{11}U'' + k^2[\rho v^2 - (s^2c_{66} + c^2c_{55})]U + ks(c_{12} + c_{66})V' + kc(c_{13} + c_{55})W' &= 0, \\
-ks(c_{12} + c_{66})U' + c_{66}V'' + k^2[\rho v^2 - (s^2c_{22} + c^2c_{44})]V - k^2sc(c_{23} + c_{44})W &= 0, \\
-kc(c_{13} + c_{55})U' - k^2sc(c_{23} + c_{44})V + c_{55}W'' + k^2[\rho v^2 - (s^2c_{44} + c^2c_{33})]W &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Konturni uslovi (1.61) za beskonačnu ploču sa stranama, slobodnim od napona, čije su normale duž ose x_1 mogu da se izraze na sledeći način

$$\begin{aligned}
c_{11}U' + ksc_{12}V + kcc_{13}W &= 0, \\
-kcU + W' &= 0, \\
-ksU + V' &= 0, \quad \text{za } x_1 = \pm h.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Jednačine kretanja (3.2) predstavljaju sistem diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Potražićemo rešenja u obliku

$$\begin{aligned}
U &= A_a \cosh kpx_1 + A_s \sinh kpx_1, \\
V &= B_a \sinh kpx_1 + B_s \cosh kpx_1, \\
W &= D_a \sinh kpx_1 + D_s \cosh kpx_1,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

gde proizvoljne konstante sa indeksima a odgovaraju antisimetričnom delu rešenja, koje reprezentuje talase savijanja, dok one sa indeksima b odgovaraju simetričnom delu rešenja, koje reprezentuje ekstenzione talase. Zamena izaza (3.4) u jednačinama kretanja (3.2) daje uslove koje moraju da zadovolje konstante u obliku

$$\begin{aligned}
c_{11}(p^2 - a_1)A_a + spb_3B_a + cpb_2D_a &= 0, \\
spb_3A_a + c_{66}(p^2 - a_2)B_a - scb_1D_a &= 0, \\
spb_2A_a - scb_1B_a + c_{55}(p^2 - a_3)D_a &= 0,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
c_{11}(p^2 - a_1)A_s + spb_3B_s + cpb_2D_s &= 0, \\
spb_3A_s + c_{66}(p^2 - a_2)B_s - scb_1D_s &= 0, \\
spb_2A_s - scb_1B_s + c_{55}(p^2 - a_3)D_s &= 0,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

le su

$$\begin{aligned}
a_1 &= (s^2c_{66} + c^2c_{55} - \rho v^2) / c_{11} = (s^2a_{66} + c^2a_{55} - \rho v^2) / a_{11} = (d - \rho v^2) / a_{11} = \hat{a}_1, \\
a_2 &= (s^2c_{22} + c^2c_{44} - \rho v^2) / c_{66} \equiv (g_2 - \rho v^2) / c_{66} \\
a_3 &= (s^2c_{44} + c^2c_{33} - \rho v^2) / c_{55} \equiv (g_3 - \rho v^2) / c_{55} \\
b_1 &= c_{23} + c_{44}, \quad b_2 = c_{13} + c_{55}, \quad b_3 = c_{12} + c_{66}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Systemi homogenih algebarskih jednačina (3.5) kao i (3.6) imaju isti uslov za egzistenciju netrivialnih rešenja oblika

$$\begin{vmatrix}
c_{11}(p^2 - a_1) & spb_3 & cpb_2 \\
-spb_3 & c_{66}(p^2 - a_2) & -scb_1 \\
-cpb_2 & -scb_1 & c_{55}(p^2 - a_3)
\end{vmatrix} = 0, \tag{3.8}$$

ko predstavlja kubnu jednačinu po p^2 oblika

$$\begin{aligned}
p^6 + p^4 \left(s^2 \frac{b_3^2}{c_{11}c_{66}} + c^2 \frac{b_2^2}{c_{11}c_{55}} - a_1 - a_2 - a_3 \right) + p^2 \left(a_1a_2 + a_1a_3 + 2s^2c^2 \frac{b_1b_2b_3}{c_{11}c_{55}c_{66}} \right) \\
- s^2 \left(\frac{b_3^2}{c_{11}c_{66}} a_3 - c^2 \frac{b_2^2}{c_{11}c_{55}} a_2 + \frac{a}{c_{55}c_{66}} \right) - a_1 \frac{a}{c_{55}c_{66}} = 0,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

de je

$$= c_{55}c_{66}a_2a_3 - s^2c^2b_1^2 = (s^2c_{22} + c^2c_{44} - \rho v^2)(s^2c_{44} + c^2c_{33} - \rho v^2) - s^2c^2(c_{23} + c_{44})^2. \tag{3.10}$$

Pretpostavimo da su rešenja kubne jednačine (3.9) (3.10)

p_1^2 ($\alpha=1,2,3$) poredjana tako da je p_1^2 najmanje rešenje a p_3^2 najveće.

Rešenja možemo da iskoristimo za konstrukciju opšteg rešenja

rešenja a pomeranja U, V i W. Konstante A, B i D i za simetrični i anti-simetrični deo rešenja su u medjusobnom odnosu datom sa

$$B_{\alpha} = -\frac{s}{p_{\alpha}} \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} A_{\alpha} , \quad D_{\alpha} = -\frac{c}{p_{\alpha}} \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}} A_{\alpha} , \quad (\text{ne sumirati po } \alpha)^* \quad (3.11)$$

gde su

$$\begin{aligned} M_{\alpha} &= c_{11} (p_{\alpha}^2 - a_1) b_1 - p_{\alpha}^2 b_2 b_3, \\ N_{\alpha} &= c_{66} (p_{\alpha}^2 - a_2) b_2 + s^2 b_1 b_3, \\ L_{\alpha} &= c_{55} (p_{\alpha}^2 - a_3) b_3 + c^2 b_1 b_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Opšta rešenja za pomeranja sada mogu da se pišu u sledećem obliku

$$\begin{aligned} U &= \sum_{\alpha=1}^3 (A_{\alpha a} \cosh kp_{\alpha} x_1 + A_{\alpha s} \sinh kp_{\alpha} x_1), \\ V &= -s \sum_{\alpha=1}^3 \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} \frac{1}{p_{\alpha}} (A_{\alpha a} \sinh kp_{\alpha} x_1 + A_{\alpha s} \cosh kp_{\alpha} x_1), \\ W &= -c \sum_{\alpha=1}^3 \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}} \frac{1}{p_{\alpha}} (A_{\alpha a} \sinh kp_{\alpha} x_1 + A_{\alpha s} \cosh kp_{\alpha} x_1). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dakle opšta rešenja (3.13) sadrže šest proizvoljnih konstanti $A_{\alpha a}$, $A_{\alpha s}$, ($\alpha=1,2,3$) koje moraju da zadovolje šest konturnih uslova (3.4) koji sada mogu da se izraze u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^3 (c_{11} p_{\alpha}^2 - c_{12} s^2 \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} - c_{13} c^2 \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}) \frac{1}{p_{\alpha}} (A_{\alpha a} \sinh kp_{\alpha} h + A_{\alpha s} \cosh kp_{\alpha} h) &= 0, \\ \sum_{\alpha=1}^3 (c_{11} p_{\alpha}^2 - c_{12} s^2 \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} - c_{13} c^2 \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}) \frac{1}{p_{\alpha}} (-A_{\alpha a} \sinh kp_{\alpha} h + A_{\alpha s} \cosh kp_{\alpha} h) &= 0, \\ -s \sum_{\alpha=1}^3 (1 + \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}}) (A_{\alpha a} \cosh kp_{\alpha} h + A_{\alpha s} \sinh kp_{\alpha} h) &= 0, \\ -s \sum_{\alpha=1}^3 (1 + \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}}) (A_{\alpha a} \cosh kp_{\alpha} h - A_{\alpha s} \sinh kp_{\alpha} h) &= 0, \\ -c \sum_{\alpha=1}^3 (1 + \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}) (A_{\alpha a} \cosh kp_{\alpha} h + A_{\alpha s} \sinh kp_{\alpha} h) &= 0, \\ -c \sum_{\alpha=1}^3 (1 + \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}) (A_{\alpha a} \cosh kp_{\alpha} h - A_{\alpha s} \sinh kp_{\alpha} h) &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ako pretpostavimo da ni s ni c nisu jednaki nuli onda gornji sistem jednačina ima netrivialna rešenja pod uslovom da je ili

$$A_{\alpha s} = 0, \quad (\alpha=1,2,3) \quad (3.15)$$

* U ovoj tezi za ponovljene grčke indekse neće se podrazumevati konvencija o sabiranju.

uz zadovoljenu jednačinu

$$\begin{vmatrix} d_{11} \frac{\tanh khp_1}{p_1} & d_{12} \frac{\tanh khp_2}{p_2} & d_{13} \frac{\tanh khp_3}{p_3} \\ 1 + M_1/N_1 & 1 + M_2/N_2 & 1 + M_3/N_3 \\ 1 + M_1/L_1 & 1 + M_2/L_2 & 1 + M_3/L_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.16)$$

ili

$$A_{\alpha a} = 0, \quad (\alpha=1,2,3), \quad (3.17)$$

uz zadovoljenu jednačinu

$$\begin{vmatrix} d_{11} \frac{\coth khp_1}{p_1} & d_{12} \frac{\coth khp_2}{p_2} & d_{13} \frac{\coth khp_3}{p_3} \\ 1 + M_1/N_1 & 1 + M_2/N_2 & 1 + M_3/N_3 \\ 1 + M_1/L_1 & 1 + M_2/L_2 & 1 + M_3/L_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.18)$$

pri čemu je korišćena oznaka

$$d_{1\alpha} = c_{11} p_{\alpha}^2 - s^2 c_{12} M_{\alpha} / N_{\alpha} - c^2 c_{13} M_{\alpha} / L_{\alpha}, \quad (\alpha=1,2,3). \quad (3.18)'$$

Dakle, konturni uslovi (3.14) razdvajaju opšta rešenja (3.13) na simetrični deo i antisimetrični deo. Jednačina (3.16) je disperziona jednačina za antisimetrični mod dok je jednačina (3.18) disperziona jednačina za simetrični mod.

Iz (3.5)₁ koristeći relaciju (3.11) možemo da pišemo izraz ekvivalentan izrazu (3.18)' u obliku

$$d_{1\alpha} = c_{11} a_1 + s^2 c_{66} M_{\alpha} / N_{\alpha} + c^2 c_{55} M_{\alpha} / L_{\alpha}, \quad (\alpha=1,2,3), \quad (3.19)$$

tako da disperziona relacija za antisimetrični mod može da se napiše u obliku

$$\sum_{\alpha=1}^3 (c_{11} a_1 + s^2 c_{66} \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} + c^2 c_{55} \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}) Z_{\alpha} \frac{\tanh khp_{\alpha}}{p_{\alpha}} = 0, \quad (3.20)$$

a disperziona relacija za simetrični mod u obliku

$$\sum_{\alpha=1}^3 (c_{11} a_1 + s^2 c_{66} \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} + c^2 c_{55} \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}) Z_{\alpha} \frac{\coth khp_{\alpha}}{p_{\alpha}} = 0, \quad (3.21)$$

gde su

$$Z_1 = \begin{vmatrix} 1 + \frac{M_2}{N_2} & 1 + \frac{M_3}{N_3} \\ 1 + \frac{M_2}{L_2} & 1 + \frac{M_3}{L_3} \end{vmatrix} = \frac{M_2}{N_2} - \frac{M_2}{L_2} + \frac{M_3}{L_3} - \frac{M_3}{N_3} + \frac{M_2 M_3}{N_2 L_3} - \frac{M_2 M_3}{L_2 N_3},$$

$$Z_2 = - \begin{vmatrix} 1 + \frac{M_1}{N_1} & 1 + \frac{M_3}{N_3} \\ 1 + \frac{M_1}{L_1} & 1 + \frac{M_3}{N_3} \end{vmatrix} = \frac{M_1}{L_1} - \frac{M_1}{N_1} + \frac{M_3}{N_3} - \frac{M_3}{L_3} + \frac{M_1 M_3}{L_1 N_3} - \frac{M_1 M_3}{N_1 L_3}, \quad (3.22)$$

$$Z_3 = \begin{vmatrix} 1 + \frac{M_1}{N_1} & 1 + \frac{M_2}{N_2} \\ 1 + \frac{M_1}{L_1} & 1 + \frac{M_2}{L_2} \end{vmatrix} = \frac{M_1}{N_1} - \frac{M_1}{L_1} + \frac{M_2}{L_2} - \frac{M_2}{N_2} + \frac{M_1 M_2}{N_1 L_2} - \frac{M_1 M_2}{L_1 N_2}.$$

kofaktori prve vrste determinante (3.16) odnosno (3.18).

Iz jednačina (3.14) imamo

$$\frac{A_{1a} \cosh khp_1}{Z_1} = \frac{A_{2a} \cosh khp_2}{Z_2} = \frac{A_{3a} \cosh khp_3}{Z_3} \equiv A_a, \quad (3.23)$$

kada se razmatra antisimetrični mod, i

$$\frac{A_{1s} \sinh khp_1}{Z_1} = \frac{A_{2s} \sinh khp_2}{Z_2} = \frac{A_{3s} \sinh khp_3}{Z_3} \equiv A_s, \quad (3.24)$$

kada se razmatra simetrični mod. Raspored pomeranja po debljini ploče može da se izrazi u obliku

$$U = A \sum_{\alpha=1}^3 Z_{\alpha} G_{\alpha}(x_1),$$

$$V = -sA \sum_{\alpha=1}^3 \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} Z_{\alpha} \frac{F_{\alpha}(x_1)}{P_{\alpha}}, \quad (3.25)$$

$$W = -cA \sum_{\alpha=1}^3 \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}} Z_{\alpha} \frac{F_{\alpha}(x_1)}{P_{\alpha}},$$

gde A predstavlja A_a i

$$F_{\alpha}(x_1) = \frac{\sinh kp_{\alpha} x_1}{\cosh khp_{\alpha}}, \quad G_{\alpha}(x_1) = \frac{\cosh kp_{\alpha} x_1}{\cosh khp_{\alpha}}, \quad (3.26)$$

kada razmatramo antisimetrični mod, dok A predstavlja A_s i

$$F_{\alpha}(x_1) = \frac{\cosh kp_{\alpha} x_1}{\sinh khp_{\alpha}}, \quad G_{\alpha}(x_1) = \frac{\sinh kp_{\alpha} x_1}{\sinh khp_{\alpha}} \quad (3.27)$$

kada razmatramo simetrični mod. Zamena (3.11) u (3.5) ili (3.6) daje sledeće relacije

$$c_{11} p_{\alpha}^2 - s^2 c_{12} \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} - c^2 c_{13} \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}} = s^2 c_{66} \left(1 + \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}}\right) + c^2 c_{55} \left(1 + \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}\right) - \rho v^2,$$

$$c_{21}p_{\alpha}^2 - s^2 c_{22} \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} - c^2 c_{23} \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}} = -(c_{66}p_{\alpha}^2 + \rho v^2) \left(1 + \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}}\right) + c^2 c_{44} \left(\frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} + \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}\right) + \rho v^2, \quad (3.28)$$

$$c_{31}p_{\alpha}^2 - s^2 c_{23} \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} - c^2 c_{33} \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}} = -(c_{55}p_{\alpha}^2 + \rho v^2) \left(1 + \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}\right) + s^2 c_{44} \left(\frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} + \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}\right) + \rho v^2,$$

koje zajedno sa (3.25) daju napone u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= kA \cos \psi \sum_{\alpha=1}^3 \left(c_{11} p_{\alpha}^2 - s^2 c_{12} \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} - c^2 c_{13} \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}} \right) Z_{\alpha} \frac{F_{\alpha}(x_1)}{P_{\alpha}} \\ &= kA \cos \psi \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ s^2 c_{66} \left(1 + \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}}\right) + c^2 c_{55} \left(1 + \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}\right) - \rho v^2 \right\} Z_{\alpha} \frac{F_{\alpha}(x_1)}{P_{\alpha}}, \\ \sigma_{22} &= kA \cos \psi \sum_{\alpha=1}^3 \left(c_{21} p_{\alpha}^2 - s^2 c_{22} \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} - c^2 c_{23} \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}} \right) Z_{\alpha} \frac{F_{\alpha}(x_1)}{P_{\alpha}} \\ &= kA \cos \psi \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ c^2 c_{44} \left(\frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} + \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}\right) - (c_{66} p_{\alpha}^2 + \rho v^2) \left(1 + \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}}\right) + \rho v^2 \right\} Z_{\alpha} \frac{F_{\alpha}(x_1)}{P_{\alpha}}, \\ \sigma_{33} &= kA \cos \psi \sum_{\alpha=1}^3 \left(c_{31} p_{\alpha}^2 - s^2 c_{32} \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} - c^2 c_{33} \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}} \right) Z_{\alpha} \frac{F_{\alpha}(x_1)}{P_{\alpha}} \quad (3.29) \\ &= kA \cos \psi \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ s^2 c_{44} \left(\frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} + \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}\right) - (c_{55} p_{\alpha}^2 + \rho v^2) \left(1 + \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}\right) + \rho v^2 \right\} Z_{\alpha} \frac{F_{\alpha}(x_1)}{P_{\alpha}}, \\ \tau_{23} &= -k s c c_{44} A \cos \psi \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} + \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}\right) Z_{\alpha} \frac{F_{\alpha}(x_1)}{P_{\alpha}}, \\ \tau_{13} &= -k c c_{55} A \sin \psi \sum_{\alpha=1}^3 \left(1 + \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}\right) Z_{\alpha} G_{\alpha}(x_1), \\ \tau_{12} &= -k s c c_{66} A \sin \psi \sum_{\alpha=1}^3 \left(1 + \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}}\right) Z_{\alpha} G_{\alpha}(x_1), \end{aligned}$$

le su $F_{\alpha}(x_1)$ i $G_{\alpha}(x_1)$ dati izrazom (3.26) za antisimetrični mod, izrazom (3.27) za simetrični mod.

Sada ćemo da izvršimo neka opšta razmatranja jednačina (3.20) ili (3.21) da bismo našli što pogodnije oblike za analizu. Zbog toga, ako posmatramo izraz oblika

$$f_1 Z_1 + f_2 Z_2 + f_3 Z_3 = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ 1 + M_1/N_1 & 1 + M_2/N_2 & 1 + M_3/N_3 \\ 1 + M_1/L_1 & 1 + M_2/L_2 & 1 + M_3/L_3 \end{vmatrix}, \quad (3.30)$$

de su f_α ($\alpha=1,2,3$) bilo koje funkcije, ona korišćenjem osobina eterminanata možemo da ga razbijemo na sledeći oblik

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{M_1}{L_1} & \frac{M_2}{L_2} & \frac{M_3}{L_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{M_1}{N_1} & \frac{M_2}{N_2} & \frac{M_3}{N_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{M_1}{N_1} & \frac{M_2}{N_2} & \frac{M_3}{N_3} \\ \frac{M_1}{L_1} & \frac{M_2}{L_2} & \frac{M_3}{L_3} \end{vmatrix} \quad (3.31)$$

koristeći (3.12)_{2,3} možemo da pišemo

$$N_\alpha = c_{66} b_2 p_\alpha^2 + R, \quad (3.32)$$

$$L_\alpha = c_{55} b_3 p_\alpha^2 + Q,$$

de su

$$R = -c_{66} b_2 a_2 + s^2 b_1 b_3, \quad (3.33)$$

$$Q = -c_{55} b_3 a_3 + c^2 b_1 b_2.$$

ada je lako pokazati da važe relacije

$$\begin{aligned} \frac{M_\alpha}{L_\alpha} - \frac{M_\beta}{L_\beta} &= \frac{D_1}{L_\alpha L_\beta} (p_\alpha^2 - p_\beta^2), \\ \frac{M_\alpha}{N_\alpha} - \frac{M_\beta}{N_\beta} &= \frac{D_2}{N_\alpha N_\beta} (p_\alpha^2 - p_\beta^2), \\ \frac{M_\alpha M_\beta}{N_\alpha L_\beta} - \frac{M_\alpha M_\beta}{L_\alpha N_\beta} &= \frac{D_3 M_\alpha M_\beta}{N_\alpha N_\beta L_\alpha L_\beta} (p_\alpha^2 - p_\beta^2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

ri čemu su

$$D_1 = Q(c_{11} b_1 - b_2 b_3) + c_{11} c_{55} b_1 b_3 a_1,$$

$$D_2 = R(c_{11} b_1 - b_2 b_3) + c_{11} c_{66} b_1 b_2 a_1, \quad (3.35)$$

$$D_3 = c_{55} b_3 R - c_{66} b_2 Q,$$

ako da sada možemo da pišemo

$$\begin{aligned} &= \frac{M_1 M_2 M_3}{N_1 N_2 N_3 L_1 L_2 L_3} \left\{ -D_1 \frac{N_1 N_2 N_3}{M_1 M_2 M_3} \begin{vmatrix} L_1 f_1 & L_2 f_2 & L_3 f_3 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + D_2 \frac{L_1 L_2 L_3}{M_1 M_2 M_3} \begin{vmatrix} N_1 f_1 & N_2 f_2 & N_3 f_3 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. + D_3 \begin{vmatrix} \frac{N_1 L_1}{M_1} f_1 & \frac{N_2 L_2}{M_2} f_2 & \frac{N_3 L_3}{M_3} f_3 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\}. \quad (3.36) \end{aligned}$$

Ako primenimo Viete-ove formule u jednačini (3.9) dobijamo

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= a_1 + a_2 + a_3 - s^2 b_3^2 / c_{11} c_{66} - c^2 b_2^2 / c_{11} c_{55}, \\ p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2 &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 - s^2 c^2 b_1^2 / c_{55} c_{66} + 2s^2 c^2 b_1 b_2 b_3 / c_{11} c_{55} c_{66} \\ &\quad - s^2 b_3^2 a_3 / c_{11} c_{66} - c^2 b_2^2 a_2 / c_{11} c_{55}, \\ p_1^2 p_2^2 p_3^2 &= a_1 (a_2 a_3 - s^2 c^2 b_1^2 / c_{55} c_{66}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Korišćenjem ovih relacija i konturnih uslova (3.14)_{3,4,5,6} zajedno za (3.36) može da se pokaže da su zadovoljene sledeće relacije

$$\begin{aligned} \frac{N_1 N_2 N_3}{M_1 M_2 M_3} D_1 &= - \frac{s^2 c_{66}}{c_{11} a_1} D_3, \\ \frac{L_1 L_2 L_3}{M_1 M_2 M_3} D_2 &= \frac{c^2 c_{55}}{c_{11} a_1} D_3. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Korišćenjem ovih relacija u (3.36) dobijamo

$$D = \frac{M_1 M_2 M_3}{N_1 N_2 N_3 L_1 L_2 L_3} \frac{D_3}{c_{11} a_1} \begin{vmatrix} d_{21} f_1 & d_{22} f_2 & d_{23} f_3 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.39)$$

gde su sa $d_{2\alpha}$ ($\alpha=1,2,3$) označene relacije oblika

$$d_{2\alpha} = s^2 c_{66} L_\alpha + c^2 c_{55} N_\alpha + c_{11} a_1 N_\alpha L_\alpha / M_\alpha. \quad (3.39)'$$

Iz (3.11) i (3.5) je lako pokazati da, ukoliko je $s \neq 0$ i $c \neq 0$, važe relacije

$$1_\alpha / (N_\alpha L_\alpha) = -p_\alpha^2 / \{c_{55} c_{66} (p_\alpha^2 - a_2) (p_\alpha^2 - a_3) - s^2 c^2 b_1^2\}, \quad (3.40)$$

pa korišćenjem relacije (3.37) dolazimo do relacije

$$\frac{M_1 M_2 M_3}{N_1 N_2 N_3 L_1 L_2 L_3} \frac{D_3}{c_{11} a_1} = \frac{c_{11}}{s^2 c^2 (c_{55} b_3 R - c_{66} b_2 Q)} = \frac{c_{11}}{s^2 c^2 D_3}, \quad (3.41)$$

tako da konačno dobijamo

$$D = f_1 Z_1 + f_2 Z_2 + f_3 Z_3 = \frac{c_{11}}{s^2 c^2 D_3} \begin{vmatrix} d_{21} f_1 & d_{22} f_1 & d_{23} f_3 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.42)$$

Ako stavimo $f_1 = f_2 = f_3 = 1$ onda iz (3.42) možemo lako da dobijemo zbir kofaktora datih u (3.22) u sledećem obliku

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = \frac{c_{11}^2 c_{55} c_{66}}{s^2 c^2 (c_{55} b_3 R - c_{66} b_2 Q)} (p_2^2 - p_1^2) (p_3^2 - p_1^2) (p_3^2 - p_2^2) \quad (3.43)$$

$$= \frac{c_{11}^2 (p_2^2 - p_1^2) (p_3^2 - p_1^2) (p_3^2 - p_2^2)}{s^2 c^2 b_2 b_3 (a_3 - a_2 + s^2 b_1 b_3 / c_{66} b_2 - c^2 b_1 b_2 / c_{55} b_3)}$$

U slučaju kada je ili $s=0$ ili $c=0$ analiza diferencijalnih jednačina (3.2) i konturnih uslova (3.3) se znatno uprošćava i ista je kao kada se talas prostire duž privilegovanog pravca u ploči ojačanoj jednom familijom vlakana. Takva analiza je činjena u radovima Green-a (1982), za talase savijanja, i Green-a i Milosavljevića (1985), za ekstenzione talase. Jednačine i rešenja postaju formalno isti kao u pomenutim radovima ako stavimo

$$c_{11} = \rho c_1^2, \quad c_{66} = \rho c_2^2, \quad c_{55} = \rho c_3^2, \quad c_{13} = \rho c_4^2, \quad c_{33} = \rho c_5^2 \quad (3.44)$$

kada je $s = 0$ odnosno $c = 1$, ili

$$c_{11} = \rho c_1^2, \quad c_{55} = \rho c_2^2, \quad c_{66} = \rho c_3^2, \quad c_{12} = \rho c_4^2, \quad c_{22} = \rho c_5^2 \quad (3.45)$$

kada je $s=1$ odnosno $c=0$. Jedini izuzetak je da se transverzalni talasi prostiru brzinom $\sqrt{c_{44}/\rho}$ dok je ova u pomenutim radovima c_3 , ali to nije esencijalno jer se ti talasi prostiru nezavisno od talasa savijanja ili ekstenzionih talasa.

3.2.1. ANTISIMETRIČNI MOD PROPAGACIJE

Disperziona relacija (3.20) za antisimetrični mod propagacije može da se napiše na sledeći način

$$\sum_{\alpha=1}^3 f_{\alpha} Z_{\alpha} = 0 \quad (3.46)$$

gde je

$$f_{\alpha} = (c_{11} a_1 + s^2 c_{66} \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha}} + c^2 c_{55} \frac{M_{\alpha}}{L_{\alpha}}) \frac{\tanh kh p_{\alpha}}{p_{\alpha}} \quad (3.47)$$

Kada se (3.47) uvrsti u (3.42) očigledno je da prva vrsta determinante (3.42) ima oblik

$$r_{\alpha} = (s^2 c_{66} L_{\alpha} + c^2 c_{55} N_{\alpha} + c_{11} a_1 \frac{N_{\alpha} L_{\alpha}}{M_{\alpha}}) f_{\alpha} = (s^2 c_{66} L_{\alpha} + c^2 c_{55} N_{\alpha} + c_{11} a_1 \frac{N_{\alpha} L_{\alpha}}{M_{\alpha}})^2 \frac{M_{\alpha}}{N_{\alpha} L_{\alpha}} \frac{\tanh kh p_{\alpha}}{p_{\alpha}}. \quad (3.48)$$

Korišćenjem (3.5), (3.11) i (3.37) u (3.48) dobijamo

$$r_{\alpha} = c_{11} c_{55} c_{66} \{ +\rho v^2 p_{\alpha}^4 - [s^2 c_{66} a_3 + c^2 c_{55} a_2 - c_{11} a_1 (a_2 + a_3 - s^2 c_{12}^2 / c_{11} c_{66} - c^2 c_{13}^2 / c_{11} c_{55}) - 2s^2 c^2 b_1 - s^2 c^2 (c_{12} b_2 - c_{13} b_3)^2 / c_{11} c_{55} c_{66}] p_{\alpha}^2 + a_1 (s^2 c_{12}^2 a_3 / c_{66} + c^2 c_{13}^2 a_2 / c_{55} - 2s^2 c^2 c_{12} c_{13} b_1 / c_{55} c_{66} - c_{11} a_2 a_3 + s^2 c^2 c_{11} b_1^2 / c_{55} c_{66}) \} \frac{\tanh kh p_{\alpha}}{p_{\alpha}}. \quad (3.49)$$

Dakle sekularna jednačina koja određuje brzinu propagacije v kao funkciju bezdimenzionog talasnog broja kh može da se izrazi kao

$$\frac{c_{11}}{s^2 c^2 D_3} \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.50)$$

tako da je relativno jednostavno rešiti je u graničnim slojevima beskonačno dugih talasa ($kh \rightarrow 0$) i infinitezimalno kratkih talasa ($kh \rightarrow \infty$).

U slučaju beskonačno dugih talasa, kada $kh \rightarrow 0$, funkcije hiperboličnog tangensa u (3.49) mogu da se zamene svojim argumentima tako da se jednačina (3.50) redukuje na sledeći oblik

$$\frac{c_{11}^2 c_{55} c_{66}}{s^2 c^2 D_3} (p_3^2 - p_1^2) (p_2^2 - p_1^2) (p_3^2 - p_2^2) \rho v^2 = 0, \quad (3.51)$$

što uz korišćenje (3.43) može da se napiše kao

$$(Z_1 + Z_2 + Z_3) \rho v^2 = 0. \quad (3.52)$$

Pretpostavićemo da je $p_1^2 \neq p_2^2 \neq p_3^2$. Ukoliko to nije ispunjeno rešenje (3.25) postaje degenerativno pa je, prema tome, neophodno da se ponovo vratimo rešavanju jednačina kretanja (3.2) sa konturnim uslovima (3.3) za slučaj kada imamo višestruke korene karakteristične jednačine (3.9). Dakle, uz gornju pretpostavku, iz (3.52) sledi da je granična vrednost fazne brzine dugih talasa

$$v = 0. \quad (3.53)$$

Jednačina (3.52) može odmah da se napiše i iz (3.16) imajući u vidu (3.28)₁. Pomeranja (3.25) se u prvoj aproksimaciji ponašaju na sledeći način

$$\begin{aligned} U &\approx A(Z_1+Z_2+Z_3), \\ V &\approx khsA(Z_1+Z_2+Z_3) \frac{x_1}{h}, \\ W &\approx khcA(Z_1+Z_2+Z_3) \frac{x_1}{h}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

pa je očigledno da su V i W male veličine u poredjenju sa U ali u ravni ploče vektor pomeranja je duž talasne normale.

Za graničnu vrednost kratkih talasa, kada $kh \rightarrow \infty$, funkcije hiperboličkog tangesa mogu da se zamene jedinicom tako da jednačina (3.50), uz eliminaciju činioca različitih od nule, vodi do jednačine

$$\begin{aligned} -\rho v^2 (|p_2 p_3| + |p_1 p_2| + |p_1 p_3|) - [s^2 c_{66} a_3 + c^2 c_{55} a_2 - c_{11} a_1 (a_2 + a_3) \\ - s^2 c_{12}^2 / c_{11} c_{66} - c^2 c_{13}^2 / c_{11} c_{55}] - 2s^2 c^2 b_1 - s^2 c^2 (c_{12} b_2 - c_{13} b_3)^2 / c_{11} c_{55} c_{66} \\ - a_1 (s^2 c_{12}^2 a_3 / c_{66} + c^2 c_{13}^2 a_2 / c_{55} - 2s^2 c^2 c_{12} c_{13} b_1 / c_{55} c_{66} - c_{11} a_2 a_3 \\ + s^2 c^2 c_{11} b_1^2 / c_{55} c_{66}) \frac{|p_1| + |p_2| + |p_3|}{|p_1 p_2 p_3|} = 0, \end{aligned} \quad (3.55)$$

ili uz korišćenje (3.37)₁ do jednačine

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (d - c_{11} a_1) (|p_1| + |p_2| + |p_3|)^2 + \frac{1}{2} \{ (s^2 c_{66} - c^2 c_{55}) (a_2 - a_3) - \\ - 4s^2 c^2 b_1 - s^2 c^2 (c_{12} c_{55} - c_{13} c_{66})^2 / c_{11} c_{55} c_{66} + (c^2 b_2 + s^2 b_3)^2 / c_{11} - \\ - a_1 [d - c_{11} a_1 + a_2 + a_3 + s^2 c_{12} (2 - c_{12} / c_{66}) + c^2 c_{13} (2 - c_{13} / c_{66})] \} \\ + a_1 (s^2 c_{12}^2 a_3 / c_{66} + c^2 c_{13}^2 a_2 / c_{55} - 2s^2 c^2 c_{12} c_{13} b_1 / c_{55} c_{66} - \\ - c_{11} a_2 a_3 + s^2 c^2 c_{11} b_1^2 / c_{55} c_{66}) \frac{|p_1| + |p_2| + |p_3|}{|p_1 p_2 p_3|} = 0, \end{aligned} \quad (3.56)$$

čije rešenje treba da da Rayleigh-ovu talasnu brzinu anizotropnog materijala koji se ovde razmatra. Jednačine (3.55) i (3.56) imaju mnogo jednostavniji oblik u slučaju jake anizotropije što će biti detaljnije razmatrano u sledećem odeljku.

3.2.2. SIMETRIČNI MODOVI PROPAGACIJE

Disperziona relacija za simetrične modove propagacije ima oblik (3.50) pri čemu r_α može da se dobije iz (3.49) ako hiperboličke tangense zamenimo hiperboličkim kontangensima.

a beskonačno duge talase, kada $kh \rightarrow 0$, možemo da pišemo

$$\coth hkp_\alpha = 1/khp_\alpha, \quad (3.57)$$

a za kh malo ali konačno možemo, iz jednačine (3.50), da do-
ljemo

$$\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{(a_2 a_3 - s^2 c^2 b_1^2 / c_{55} c_{66})} (s^2 c_{12}^2 a_3 / c_{66} + c^2 c_{13}^2 a_2 / c_{55} - 2s^2 c^2 c_{12} c_{13} b_1 / c_{55} c_{66} - c_{11} a_2 a_3 + s^2 c^2 c_{11} b_1^2 / c_{55} c_{66}) = 0 \quad (3.58)$$

akle je očigledno da fazna brzina mora da zadovolji sledeću
jednačinu

$$c_{12}^2 a_3 / c_{66} + c^2 c_{13}^2 a_2 / c_{55} - 2s^2 c^2 c_{12} c_{13} b_1 / c_{55} c_{66} - c_{11} a_2 a_3 + s^2 c^2 c_{11} b_1^2 / c_{55} c_{66} = 0. \quad (3.59)$$

z korišćenje (3.7)_{2,3} ova jednačina može da se napiše u obliku

$$\rho v^2 - (g_2 - s^2 c_{12}^2 / c_{11}) \{ \rho v^2 - (g_3 - c^2 c_{13}^2 / c_{11}) \} = s^2 c^2 (b_1 - c_{12} c_{13} / c_{11})^2, \quad (3.60)$$

ozi jasno pokazuje da postoje dva rešenja za ρv^2 , jedno kada su
činioća sa leve strane jednačine (3.60) pozitivna i drugo
kada su oba pomenuta činioća negativna. Ako gornji izraz, za od-
redjenu vrednost ugla ϕ , napišemo u obliku

$$\rho v^2 - h_2 (s^2) \{ \rho v^2 - h_3 (s^2) \} = s^2 c^2 h_1^2, \quad (3.61)$$

le su

$$\begin{aligned} h_2 &= g_2 - s^2 c_{12}^2 / c_{11} = s^2 (c_{22} - c_{12}^2 / c_{11}) + c^2 c_{44} = c_{44} + s^2 (c_{22} - c_{44} - c_{12}^2 / c_{11}), \\ h_3 &= g_3 - c^2 c_{13}^2 / c_{11} = c^2 (c_{33} - c_{13}^2 / c_{11}) + s^2 c_{44} = c_{33} - c_{13}^2 / c_{11} - s^2 (c_{33} - c_{44} - c_{13}^2 / c_{11}), \\ h_1 &= b_1 - c_{12} c_{13} / c_{11} = c_{23} + c_{44} - c_{12} c_{13} / c_{11}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

ada je lako pokazati da su rešenja

$$\rho v_1^2 = \frac{1}{2} \{ h_2 + h_3 - \sqrt{(h_3 - h_2)^2 + 4s^2 c^2 h_1^2} \}, \quad (3.63)$$

$$\rho v_2^2 = \frac{1}{2} \{ h_2 + h_3 + \sqrt{(h_3 - h_2)^2 + 4s^2 c^2 h_1^2} \},$$

ozi čemu jedno odgovara kvazilongitudinalnim talasima a drugo
kvazitransverzalnim talasima.

Pomeranja (3.25), imajući u vidu (3.27), u prvoj ap-
ksimaciji mogu da se predstave izrazima

$$U \approx A(Z_1+Z_2+Z_3) \frac{x_1}{h} ,$$

$$V \approx - \frac{s}{kh} A(Z_1+Z_2+Z_3) \frac{c_{12}c_{55}a_3 - c^2c_{13}b_1}{c_{55}c_{66}(a_2a_3 - s^2c^2b_1^2/c_{55}c_{66})} , \quad (3.64)$$

$$W \approx - \frac{c}{kh} A(Z_1+Z_2+Z_3) \frac{c_{13}c_{66}a_2 - s^2c_{12}b_1}{c_{55}c_{66}(a_2a_3 - s^2c^2b_1^2/c_{55}c_{66})} ,$$

tako da možemo da zaključimo da je U vrlo malo u poredjenju sa V i W a takodje i da, u ravni ploče, vektor pomeranja gradi sa x_3 osom ugao dat jednačinom

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{V}{W} = \frac{s}{c} \frac{c_{12}c_{55}a_3 - c^2c_{13}b_1}{c_{13}c_{66}a_2 - s^2c_{12}b_1} . \quad (3.65)$$

Zamena (3.63) u (3.65) dovodi do

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = - \frac{s}{c} \frac{c_{12}(h_3-h_2+\delta) - 2c^2c_{13}h_1}{c_{13}(h_3-h_2-\delta) + 2s^2c_{12}h_1} , \quad (3.66)$$

gde je

$$\delta = \{(h_3-h_2)^2 + 4s^2c^2h_1^2\}^{\frac{1}{2}} . \quad (3.66)'$$

za manju faznu brzinu v_1 , odnosno

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = - \frac{s}{c} \frac{c_{12}(h_3-h_2-\delta) - 2c^2c_{13}h_1}{c_{13}(h_3-h_2+\delta) + 2s^2c_{12}h_1} , \quad (3.67)$$

za veću faznu brzinu v_2 . Množenjem (3.66) sa (3.67) možemo da proverimo dobro poznatu činjenicu da je $\operatorname{tg} \gamma_1 \cdot \operatorname{tg} \gamma_2 = -1$ to jest da su vektori pomeranja koji odgovaraju brzinama v_1 i v_2 međusobno normalni. Koji će od njih da odgovara kvazilongitudinalnom talasu a koji kvazitranverzalnem zavisi kako od ugla između vlakana 2ϕ tako i od ugla koji talasna normala gradi sa osom x_3 . Iz (3.66) dobijamo

$$\operatorname{tg}(\alpha - \gamma_1) = sc \frac{c_{13}(h_3-h_2-\delta) + 2s^2c_{12}h_1 + c_{12}(h_3-h_2+\delta) - 2c^2c_{13}h_1}{c^2\{c_{13}(h_3-h_2-\delta) + 2s^2c_{12}h_1\} - s^2\{c_{12}(h_3-h_2+\delta) - 2c^2c_{13}h_1\}} , \quad (3.68)$$

a iz (3.67) dobijamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \gamma_2) &= sc \frac{c_{13}(h_3-h_2+\delta) + 2s^2c_{12}h_1 + c_{12}(h_3-h_2-\delta) - 2c^2c_{13}h_1}{c^2\{c_{13}(h_3-h_2+\delta) + 2s^2c_{12}h_1\} - s^2\{c_{12}(h_3-h_2-\delta) - 2c^2c_{13}h_1\}} = \\ &= -1/\operatorname{tg}(\alpha - \gamma_1) , \end{aligned} \quad (3.69)$$

gde je α ugao koji talasna normala zaklapa sa x_3 osom.

U slučaju granične vrednosti dugih talasa, kada $kh \rightarrow \infty$, funkcije hiperboličkih katangensa mogu da se zamene jedinicom i disperizona jednačina (3.50) daje isti izraz, (3.55) ili (3.56), kao u slučaju antisimetričnog moda što daje Rayleigh-eovu talasnu brzinu za slučaj anizotropnog materijala koji se razmatra.

3.3. JAKA ANIZOTROPIJA I NEEKSTENZIBILNOST

U prvoj glavi istaknuto je da materijal ojačan dvema familijama neekstenzibilnih vlakana, može da se posmatra kao granični slučaj materijala ojačanog dvema familijama ekstenzibilnih vlakana kada $\gamma_1 \rightarrow \infty$ i $\gamma_6 \rightarrow \infty$ uz $a_i a_j e_{ij} \rightarrow 0$ i $b_i b_j e_{ij} \rightarrow 0$ na takav način da (1.52) i (1.53) budu zadovoljeni. Iz tih izraza možemo da zaključimo da, u graničnom procesu, materijalne konstante γ_3 i γ_5 mogu da budu sažete sa naponima reakcije T_a i T_b . Materijalna konstanta γ_2 je uvek zajedno sa dominantnim izrazom $2\gamma_1 + \gamma_6$ koji je u slučaju jako anizotropnog materijala znatno veći od jedinice. Dakle, možemo da zaključimo da ukoliko usvojimo $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_5 = 0$ nećemo da izgubimo značajne informacije u graničnom procesu. Materijal koji ima dve familije jakih, skoro neistegljivih, vlakana zvaćemo jako anizotropan materijal.

Ako sada uporedimo materijalne konstante (1.56) za anizotropni materijal i (1.58) za neekstenzibilni materijal dobićemo

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= a_{11}, & c_{12} &= a_{12}, & c_{13} &= a_{13}, \\
 c_{22} &= a_{22} + 2 \sin^4 \phi (2\gamma_1 + \gamma_6), \\
 c_{23} &= a_{23} + 2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi (2\gamma_1 + \gamma_6), & & & & (3.70) \\
 c_{33} &= a_{33} + 2 \cos^4 \phi (2\gamma_1 + \gamma_6), \\
 c_{44} &= a_{44} + 2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi (2\gamma_1 - \gamma_6), \\
 c_{55} &= a_{55}, & c_{66} &= a_{66},
 \end{aligned}$$

a konstante (3.7), u poredjenju sa (2.38) i (2.43), postaju

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \hat{a}_2 + 2\sin^2\phi [2\gamma_1 (s^2\sin^2\phi + c^2\cos^2\phi) + \gamma_6 (s^2\sin^2\phi - c^2\cos^2\phi)] / a_{66}, \\
 a_3 &= \hat{a}_3 + 2\cos^2\phi [2\gamma_1 (s^2\sin^2\phi + c^2\cos^2\phi) - \gamma_6 (s^2\sin^2\phi - c^2\cos^2\phi)] / a_{55}, \\
 b_1 &= \hat{b}_1 + 8\gamma_1\sin^2\phi\cos^2\phi.
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

[zraz za a, dat sa (3.10), sada postaje

$$\begin{aligned}
 a &= c_{55}c_{66}a_2a_3 - s^2c^2b_1^2 \\
 &= a_{55}a_{66}\hat{a}_2\hat{a}_3 - s^2c^2\hat{b}_1^2 - 16\hat{b}_1\gamma_1s^2c^2\sin^2\phi\cos^2\phi \\
 &\quad + 4\gamma_1(a_{66}\hat{a}_2\cos^2\phi + a_{55}\hat{a}_3\sin^2\phi)(s^2\sin^2\phi + c^2\cos^2\phi) \\
 &\quad + 2\gamma_6(a_{66}\hat{a}_2\cos^2\phi - a_{55}\hat{a}_3\sin^2\phi)(s^2\sin^2\phi - c^2\cos^2\phi) \\
 &\quad + 4\sin^2\phi\cos^2\phi(4\gamma_1^2 - \gamma_6^2)(s^2\sin^2\phi - c^2\cos^2\phi)^2 \\
 &= \rho^2v^4 - \rho v^2 [s^2a_{22} + a_{44} + c^2a_{33} + 2(2\gamma_1 - \gamma_6\cos 2\phi)(s^2\sin^2\phi - c^2\cos^2\phi) + 8\gamma_1c^2\cos^2\phi] \\
 &\quad + (s^2a_{22} + c^2a_{44})(s^2a_{44} + c^2a_{33}) - s^2c^2(a_{23} + a_{44})^2 \\
 &\quad + 8\gamma_1c^2\cos^2\phi [(s^2a_{22} + c^2a_{44})\cos^2\phi + (s^2a_{44} + c^2a_{33})\sin^2\phi - 2(a_{23} + a_{44})s^2\sin^2\phi] \\
 &\quad + 2[(s^2a_{22} + c^2a_{44})(2\gamma_1 - \gamma_6)\cos^2\phi + (s^2a_{44} + c^2a_{33})(2\gamma_1 + \gamma_6)\sin^2\phi](s^2\sin^2\phi - c^2\cos^2\phi) \\
 &\quad + 4\sin^2\phi\cos^2\phi(4\gamma_1^2 - \gamma_6^2)(s^2\sin^2\phi - c^2\cos^2\phi)^2.
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

ja jako anizotropan materijal $\gamma_1 \gg 1$ a γ_6 može da bude veliko ali ne može da raste brže $2\gamma_1$ jer iz fizičkih razloga c_{44} u (3.70) ne može da bude negativno čak ni za neekstenzibilne materijale. Iz tih razloga možemo da zaključimo da γ_1 može da reprezentuje jaku anizotropiju samostalno tako da u graničnom procesu, kada jako anizotropni materijal transformišemo u neekstenzibilni, nećemo da izgubimo značajne informacije ako usvojimo $\gamma_6 = 0$.

Da bismo analizirali ponašanje jako anizotropnog materijala i poredili ga sa rezultatima dobijenim u drugoj glavi za neekstenzibilni materijal uvešćemo mali materijalni parametar $\ll 1$ da bismo opisali veliku konstantu γ_1 na sledeći način

$$\gamma_1 = d/\epsilon^2. \tag{3.73}$$

z (3.70) i (3.71) sada možemo da zaključimo da su c_{22} , c_{23} , c_{33} , c_{44} i b_1 reda $1/\epsilon^2$ tj. $O(1/\epsilon^2)$.

Sada ćemo da definišemo simbole reda veličine zbog njihovog posebnog značaja u preostalim glavama ove disertacije. Rešenja u problemima mehanike čvrstog tela mogu da zavise od koordinata, recimo x_1 , x_2 , x_3 , t i takodje od različitih parametara. Jedan ili više parametara mogu pogodnim definisanjem, da se sma-

traju zanemarljivo malim u perturbacionim rešenjima. Ponašanje rešenja razmatramo kao zavisnost od takve perturbacione veličine pri čemu koordinate i druge parametre smatramo fiksnim. Dakle, težnja nam je da opišemo na koji način se ponaša funkcija $f(\epsilon)$ kada ϵ teži nuli. Postoji više mogućih opisa sa različitim stepenom preciznosti. Najčešće korišćen je onaj u kome se opisuje kvalitativno brzina kojom granična vrednost teži u poredjenju sa nekim skupom uporednih funkcija. To su funkcije koje su toliko poznate da njihovo granično ponašanje može da se smatra poznatim intuitivno. Simbol O ("veliko O ") se koristi ako poredjenje funkcije $f(\epsilon)$ sa nekom uporednom funkcijom $g(\epsilon)$ pokazuje da odnos $f(\epsilon)/g(\epsilon)$ ostaje ograničen ako $\epsilon \rightarrow 0$. Možemo da pišemo

$$f(\epsilon) = O[g(\epsilon)] \text{ kad } \epsilon \rightarrow 0 \text{ ako je } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} = A < \infty. \quad (3.74)$$

Simbol o ("malo o ") se koristi ako taj odnos teži nuli to jest

$$f(\epsilon) = o[g(\epsilon)] \text{ kad } \epsilon \rightarrow 0 \text{ ako je } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} = 0. \quad (3.75)$$

U našoj diskusiji ćemo da naglasimo korišćenje O simbola. Funkcija $f(x)$, koja zavisi od parametra ϵ , ima asimptotski (stepeni) red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \epsilon^n, \quad (3.76)$$

koji važi kada $\epsilon \rightarrow 0$, ako za svako N imamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x) \epsilon^n + O(\epsilon^N), \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.77)$$

Pretpostavljamo da ovaj rezultat važi uniformno za svako x u nekoj oblasti. Osnovna osobina asimptotskih redova je da je ostatak nižeg reda od zadnjeg upotrebljenog člana. Druge osobine simbola reda veličine i asimptotskih redova mogu da se nadju u knjigama Van Dyke-a (1975) i Erdélyi-a (1956).

Već je pokazano, u izrazu (3.42), da možemo da pišemo:

$$D = f_1 Z_1 + f_2 Z_2 + f_3 Z_3 = \frac{c_{11}}{s^2 c^2 D_3} \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (3.78)$$

gde je

$$r_{\alpha} = (s^2 c_{66} L_{\alpha} + c^2 c_{55} N_{\alpha} + c_{11} a_1 N_{\alpha} L_{\alpha} / M_{\alpha}) f_{\alpha}. \quad (3.79)$$

Ovaj oblik je veoma pogodan za analizu ne samo disperzije relacije već i pomeranja (3.25) i napona (3.29). Da bimo analizirali pomeranja i napone potrebno je da znamo kako možemo da izrazimo r_{α} za različito f_{α} kao funkcije od p_{α}^2 . Korišćenjem (3.5) i (3.11) lako je pokazati da, kada je $f_{\alpha} = 1$ tada je

$$r_{\alpha} = c_{55} c_{66} (s^2 c_{12} + c^2 c_{13} - \rho v^2) p_{\alpha}^2 + [-c_{55} c_{66} (s^2 b_3 a_3 + c^2 b_2 a_2) + c_{11} c_{55} c_{66} a_1 (a_2 + a_3) + s^2 c^2 b_1 (c_{66} b_2 + c_{55} b_3)] - c_{11} a_1 a / p_{\alpha}^2, \quad (3.80)$$

kada je $f_{\alpha} = M_{\alpha} / N_{\alpha}$ tada je

$$r_{\alpha} = c_{11} c_{55} c_{66} p_{\alpha}^4 + \{c_{11} c_{12} c_{55} a_1 - c_{11} c_{55} c_{66} a_3 + c^2 c_{11} c_{55} b_1 - c^2 b_2 (c_{55} b_3 - c_{66} b_2)\} p_{\alpha}^2 + c_{11} a_1 (c^2 c_{13} b_1 - c_{12} c_{55} a_3), \quad (3.81)$$

i, kada je $f_{\alpha} = M_{\alpha} / L_{\alpha}$ tada je

$$r_{\alpha} = c_{11} c_{55} c_{66} p_{\alpha}^4 + \{c_{11} c_{13} c_{66} a_1 - c_{11} c_{55} c_{66} a_2 + s^2 c_{11} c_{66} b_1 + s^2 b_3 (c_{55} b_3 - c_{66} b_2)\} p_{\alpha}^2 + c_{11} a_1 (s^2 c_{12} b_1 - c_{13} c_{66} a_2). \quad (3.82)$$

3.4. PROIZVOLJNI PRAVAC PROSTIRANJA

Kod jako anizotropnog materijala zadovoljen je izraz (3.73) pa su, pod pretpostavkom da je fazna brzina $O(1)$, izrazi a_2 i a_3 $O(1/\epsilon^2)$ dok su izrazi a_1 , b_2 i b_3 $O(1)$. Iz (3.72) je lako zaključiti da je izraz za a $O(1/\epsilon^4)$ za bilo koji pravac prostiranja sem u slučaju kada $s^2 \sin^2 \phi - c^2 \cos^2 \phi \rightarrow 0$, to jest kada je pravac prostiranja u okolini normale na jednu od familija vlakana. Taj poseban slučaj ćemo razmatrati u sledećem odeljku, a pod proizvoljnim pravcem prostiranja ćemo podrazumevati bilo koji pravac koji nije normalan na jednu od familija vlakana. Sa gornjim pretpostavkama iz (3.9) možemo da zaključimo da je jedno rešenje za p^2 reda jedan ($O(1)$), kada zadnja dva sabirka postaju dominantna tako da oni treba da se slože uporedjivanjem, dok su preostala dva rešenja za p^2 reda $1/\epsilon^2$, kada prva tri sabirka u (3.9) postaju dominantna tako da oni treba da se slože uporedjivanjem. Prema tome rešenja za p^2 mogu da se pišu u sledećem obliku

$$\begin{aligned}
p_1^2 &= a_1 \{1 + O(\epsilon^2)\}, \\
p_{2/3}^2 &= \frac{1}{2} \{a_2 + a_3 \mp \sqrt{(a_2 + a_3)^2 - 4a/c_{55}c_{66}}\} + O(1) = \\
&= \frac{1}{2} \{a_2 + a_3 \mp \sqrt{(a_3 - a_2)^2 + 4s^2c^2b_1^2/c_{55}c_{66}}\} + O(1).
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Ovi izrazi jasno pokazuju da su p_1^2 , p_2^2 i p_3^2 realni i da p_2^2 ne može da se izrazi u obliku (3.83)₂ kada se talasna normala približi normalni na jednu od familija vlakana jer je tada $a=O(1/\epsilon^2)$ tako da izazvu velikoj zagradi za p_2^2 postaje $O(1)$.

Dakle, ako isključimo gore pomenuti izuzetak, iz (3.80) dobijamo

$$\begin{aligned}
r_1 &= -c_{11}a + O(1/\epsilon^2) \\
r_2 &= c_{55}c_{66} \{ (s^2c_{12} + c^2c_{13} - \rho v^2) p_2^2 + [-s^2b_3a_3 - c^2b_2a_2 + c_{11}a_1(a_2 + a_3) + \\
&\quad + s^2c^2b_1(b_2/c_{55} + b_3/c_{66})] - c_{11}a_1a/c_{55}c_{66}p_2^2 \} + O(1), \\
r_3 &= c_{55}c_{66} \{ (s^2c_{12} + c^2c_{13} - \rho v^2) p_3^2 + [-s^2b_3a_3 - c^2b_2a_2 + c_{11}a_1(a_2 + a_3) + \\
&\quad + s^2c^2b_1(b_2/c_{55} + b_3/c_{66})] - c_{11}a_1a/c_{55}c_{66}p_3^2 \} + O(1),
\end{aligned} \tag{3.84}$$

iz (3.81) dobijamo

$$\begin{aligned}
r_1 &= c_{11}a_1 \{-c_{55}b_3a_3 + c^2b_2b_1 + O(1)\}, \\
r_2 &= c_{11}c_{55}c_{66}p_2^2 (p_2^2 - a_3 + c^2b_1/c_{66}) + O(1/\epsilon^2), \\
r_3 &= c_{11}c_{55}c_{66}p_3^2 (p_3^2 - a_3 + c^2b_1/c_{66}) + O(1/\epsilon^2),
\end{aligned} \tag{3.85}$$

i iz (3.82) dobijamo

$$\begin{aligned}
r_1 &= c_{11}a_1 \{-c_{66}b_2a_2 + s^2b_3b_1 + O(1)\}, \\
r_2 &= c_{11}c_{55}c_{66}p_2^2 (p_2^2 - a_2 + s^2b_1/c_{55}) + O(1/\epsilon^2), \\
r_3 &= c_{11}c_{55}c_{66}p_3^2 (p_3^2 - a_2 + s^2b_1/c_{55}) + O(1/\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{3.86}$$

3.4.1. ANTISIMETRIČNI MOD PROPAGACIJE

Kada posmatramo antisimetrični mod propagacije disperziona relacija (3.50) mora da bude zadovoljena. Elementi prve vrste u determinanti (3.50) imaju, prema (3.49), aproksimativne izraze u sledećem obliku

$$p_1 = -c_{11}^2 a_1 (a + O(1/\epsilon^2)) \tanh khp_1/p_1, \quad (3.87)$$

$$p_2 = -c_{11} c_{55} c_{66} \{ p_2^2 (-\rho v^2 p_2^2 + s^2 c_{66} a_3 + c^2 c_{55} a_2 - c_{11} a_1 a_2 - c_{11} a_1 a_3 - 2s^2 c^2 b_1) + c_{11} a_1 a / c_{55} c_{66} + O(1/\epsilon^2) \} \tanh khp_2/p_2,$$

$$p_3 = -c_{11} c_{55} c_{66} \{ p_3^2 (-\rho v^2 p_3^2 + s^2 c_{66} a_3 + c^2 c_{55} a_2 - c_{11} a_1 a_2 - c_{11} a_1 a_3 - 2s^2 c^2 b_1) + c_{11} a_1 a / c_{55} c_{66} + O(1/\epsilon^2) \} \tanh khp_3/p_3.$$

Prilikom korišćenjem izraza (3.37) dolazimo do disperzione relacije u sledećem aproksimativnom obliku

$$c_{11} a_1 \frac{\tanh khp_1}{p_1} = \frac{1}{p_3^2 - p_2^2} \left\{ [dp_3^2 - s^2 c_{66} a_3 - c^2 c_{55} a_2 + 2s^2 c^2 b_1 + O(1)] \frac{\tanh khp_3}{p_3} - [dp_2^2 - s^2 c_{66} a_2 - c^2 c_{65} a_2 + 2s^2 c^2 b_1 + O(1)] \frac{\tanh khp_2}{p_2} \right\}. \quad (3.88)$$

Ovde treba naglasiti da su pravila za proste operacije sa simbolima reda veličine evidentna i iz fizičkih razmatranja. Na primer red veličine proizvoda (ili količnika) je proizvod (ili količnik) redova veličina, red veličine sume ili razlike je reda dominantnog sabirka, itd.

Aproksimativna disperziona relacija (3.88) za antisimetrični mod, koji reprezentuje talase savijanja, daje informaciju o faznoj brzini u širokoj oblasti talasnih dužina.

Iz (3.71) je očigledno da možemo da pišemo

$$a_2 = \frac{1}{\epsilon^2} \bar{a}_2 + \hat{a}_2, \quad a_3 = \frac{1}{\epsilon^2} \bar{a}_3 + \hat{a}_3, \quad b_1 = \frac{1}{\epsilon^2} \bar{b}_1 + \hat{b}_1, \quad (3.89)$$

gde su veličine koje iznad oznake imaju crtu i simbol "hat" reda edan. Takodje možemo, prema (3.83), da pišemo

$$p_2^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \bar{p}_2^2 + \hat{p}_2^2, \quad p_3^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \bar{p}_3^2 + \hat{p}_3^2, \quad (3.90)$$

gde su opet veličine sa crtom i "hat" iznad oznake veličine reda edan. Prema tome, možemo da izrazimo eksplicitnu zavisnost aproksimativne disperzione relacije (3.88) od parametra ϵ u obliku

$$c_{11} a_1 \frac{\tanh khp_1}{p_1} = \frac{\epsilon}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left\{ [d\bar{p}_3^2 - s^2 c_{66} \bar{a}_3 - c^2 c_{55} \bar{a}_2 + 2s^2 c^2 \bar{b}_1 + O(\epsilon^2)] \frac{\tanh \frac{kh\bar{p}_3}{\epsilon}}{\bar{p}_3} - [d\bar{p}_2^2 - s^2 c_{66} \bar{a}_2 - c^2 c_{55} \bar{a}_2 + 2s^2 c^2 \bar{b}_1 + O(\epsilon^2)] \frac{\tanh \frac{kh\bar{p}_2}{\epsilon}}{\bar{p}_2} \right\}, \quad (3.91)$$

z koje je lako zaključiti da, ukoliko je materijal idealno ne-
kstenzibilan, desna strana jednačine (3.91) teži nuli tako da ova
ostaje ista kao (2.17), koja je dobijena u neekstenzibilnoj teo-
riji, za koju je fazna brzina $\rho v^2 = d$ kao i u (2.19). Za jako anizo-
ropne materijale, međjutim, kod kojih je ϵ mala veličina, ali
azličita od nule, desna strana jednačine (3.91) mora da se uzme
obzir što daje disperzioni karakter prostiranja talasa.

Dakle, za duge talase, za koje je $kh \ll \epsilon$, hiperbolički
angens može biti zamenjen svojim argumentom tako da iz (3.91) do-
ijamo

$$c_{11}a_1 = d + O(\epsilon^2), \quad (3.92)$$

to vodi do zaključka da je $\rho v^2 = O(\epsilon^2)$.

ada je $kh = O(\epsilon) = m\epsilon$ iz (3.91) dobijamo

$${}_{11}a_1 = \left\{ \left[d\bar{p}_3^2 - s^2 c_{66} \bar{a}_3 - c^2 c_{55} \bar{a}_2 + 2s^2 c^2 \bar{b}_1 + O(\epsilon^2) \right] \tanh m\bar{p}_3 / m\bar{p}_3 \right. \\ \left. - \left[d\bar{p}_2^2 - s^2 c_{66} \bar{a}_3 - c^2 c_{55} \bar{a}_2 - 2s^2 c^2 \bar{b}_1 + O(\epsilon^2) \right] \tanh m\bar{p}_2 / m\bar{p}_2 \right\} / (\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2), \quad (3.93)$$

dakle ρv^2 možemo da izrazimo na sledeći način

$$v^2 = \left\{ \left(d\bar{p}_3^2 - s^2 c_{66} \bar{a}_3 - c^2 c_{55} \bar{a}_2 + 2s^2 c^2 \bar{b}_1 \right) (1 - \tanh m\bar{p}_3 / m\bar{p}_3) \right. \\ \left. - \left(d\bar{p}_2^2 - s^2 c_{66} \bar{a}_3 - c^2 c_{55} \bar{a}_2 + 2s^2 c^2 \bar{b}_1 \right) (1 - \tanh m\bar{p}_2 / m\bar{p}_2) \right\} / (\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2) + O(\epsilon^2). \quad (3.94)$$

ada je $kh = O(1)$ dobijamo

$${}_{11}a_1 \frac{\tanh kh p_1}{p_1} = \frac{\epsilon}{|\bar{p}_3| + |\bar{p}_2|} \left\{ d + (s^2 c_{66} \bar{a}_3 + c^2 c_{55} \bar{a}_2 - 2s^2 c^2 \bar{b}_1) / |\bar{p}_2 \bar{p}_3| \right\} + O(\epsilon^3), \quad (3.95)$$

konačno za beskonačno kratke talase, kada $kh \rightarrow \infty$, dobijamo

$${}_{11}a_1 = \frac{\epsilon^2}{c_{11} (|\bar{p}_3| + |\bar{p}_2|)^2} \left\{ d + (s^2 c_{66} \bar{a}_3 + c^2 c_{55} \bar{a}_2 - 2s^2 c^2 \bar{b}_1) / |\bar{p}_2 \bar{p}_3| \right\} + O(\epsilon^4), \quad (3.96)$$

ako da aproksimativni izraz za Rayleigh-evu talasnu brzinu postaje

$$v^2 = d - \frac{\epsilon^2}{c_{11} (|\bar{p}_3| + |\bar{p}_2|)^2} \left\{ d + (s^2 c_{66} \bar{a}_3 + c^2 c_{55} \bar{a}_2 - 2s^2 c^2 \bar{b}_1) / |\bar{p}_2 \bar{p}_3| \right\} + O(\epsilon^4). \quad (3.97)$$

ako je pokazati da možemo da dobijemo aproksimativno rešenje Ray-
eigh-eve talasne brzine iz egzaktnog rešenja (3.55) imajući u
idu redove veličina. Naime iz (3.55) dobijamo

$$-(d-c_{11}a_1)|p_2p_3| - (s^2c_{66}a_3 + c^2c_{55}a_2 - 2s^2c^2b_1) + c_{11}\sqrt{a_1}|p_2p_3|(|p_2| + |p_3|) + o(1) = 0, \quad (3.98)$$

tako da je izraz za faznu brzinu sledećeg oblika

$$\rho v^2 = d - \frac{1}{c_{11}(|p_3| + |p_2|)^2} \left\{ d + \frac{s^2c_{66}a_3 + c^2c_{55}a_2 - 2s^2c^2b_1}{|p_2p_3|} \right\} + o(\varepsilon^4), \quad (3.99)$$

što je isto kao (3.97) imajući u vidu (3.89) i (3.90).

Pomeranja (3.25) u aproksimativnom obliku za jako anizotropni materijal mogu da se izraze, korišćenjem (3.84)-(3.86), (3.89) i (3.90), na sledeći način

$$U = \bar{A} \left\{ G_1(x_1) + \frac{\varepsilon^2}{c_{11}(\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2)} \left[s^2c_{12} + c^2c_{13} - \rho v^2 - (s^2b_3\bar{a}_3 + c^2b_2\bar{a}_2 - c_{11}a_1\bar{a}_2 - c_{11}a_1\bar{a}_3 - s^2c^2\bar{b}_1b_2/c_{55} - s^2c^2\bar{b}_1b_3/c_{66})/\bar{p}_2^2 - c_{11}a_1\bar{p}_3^2/\bar{p}_2^2 + o(\varepsilon^2) \right] G_2(x_1) - \frac{\varepsilon^2}{c_{11}(\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2)} \left[s^2c_{12} + c^2c_{13} - \rho v^2 - (s^2b_3\bar{a}_3 + c^2b_2\bar{a}_2 - c_{11}a_1\bar{a}_2 - c_{11}a_1\bar{a}_3 - s^2c^2\bar{b}_1b_2/c_{55} - s^2c^2\bar{b}_1b_3/c_{66})/\bar{p}_3^2 - c_{11}a_1\bar{p}_2^2/\bar{p}_3^2 + o(\varepsilon^2) \right] G_3(x_1) \right\}, \quad (3.100)$$

$$V = s\bar{A} \left\{ \varepsilon^2 a_1 \frac{c^2b_2\bar{b}_1 - c_{55}b_3\bar{a}_3}{c_{55}c_{66}\bar{a}_2\bar{a}_3 - s^2c^2\bar{b}_1^2} \frac{F_1(x_1)}{\bar{p}_1} + \frac{\varepsilon}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left[(\bar{p}_3^2 - \bar{a}_3 + c^2\bar{b}_1/c_{66} + o(\varepsilon^2)) \frac{F_3(x_1)}{\bar{p}_3} - (\bar{p}_2^2 - \bar{a}_3 + c^2\bar{b}_1/c_{66} + o(\varepsilon^2)) \frac{F_2(x_1)}{\bar{p}_2} \right] \right\},$$

$$W = c\bar{A} \left\{ \varepsilon^2 a_1 \frac{s^2b_3\bar{b}_1 - c_{66}b_2\bar{a}_2}{c_{55}c_{66}\bar{a}_2\bar{a}_3 - s^2c^2\bar{b}_1^2} \frac{F_1(x)}{\bar{p}_1} + \frac{\varepsilon}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left[(\bar{p}_3^2 - \bar{a}_2 + s^2\bar{b}_1/c_{55} + o(\varepsilon^2)) \frac{F_3(x_1)}{\bar{p}_3} - (\bar{p}_2^2 - \bar{a}_2 + s^2\bar{b}_1/c_{55} + o(\varepsilon^2)) \frac{F_2(x_1)}{\bar{p}_2} \right] \right\},$$

gde su $G_\alpha(x_1)$ i $F_\alpha(x_1)$ dati u (3.26). Ovi izrazi pokazuju da se pomeranje U ponaša uglavnom kao $G_1(x_1)$ a da su pomeranja V i W mala u odnosu na U . U graničnoj vrednosti neekstenzibilnosti, kada $\varepsilon \rightarrow 0$, dobijamo rešenja ista kao u odlejkju 2.2. Za jako anizotropni materijal iz (3.100) je očigledno da je za ponašanje rešenja U dominantno ponašanje funkcije G_1 , dok je za ponašanje rešenja

V i W dominantno ponašanje funkcije F_2 i F_3 . Možemo zaključiti je neekstenzibilno rešenje tačno do reda ϵ za sve talasne žine. Pri veoma velikim talasnim dužinama, kada je $kh \ll \epsilon$, pomeranja mogu da se izraze kao

$$U = \bar{A}, \quad V = \bar{A} khx_1/h, \quad W = \bar{A} kh cx_1/h, \quad (3.101)$$

koje je takodje bilo dobijeno u (3.54) iz egzaktnih jednačina.

Da bismo analizirali aproksimativna rešenja za napone

(29) treba dodati da saglasno sa (3.70) možemo da pišemo da

$$c_{44} = a_{44} + \frac{1}{\epsilon^2} \bar{c}_{44}, \quad (3.102)$$

gde su a_{44} i \bar{c}_{44} veličine $O(1)$. Dakle koristeći (3.84)–(3.86), (3.89), (3.90) i (3.102) naponi mogu da se izraze na sledeći način

$$\begin{aligned} &= \bar{A} k \cos \psi \left\{ c_{11} a_1 \frac{F_1}{p_1} - \frac{\epsilon}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left[(d\bar{p}_3^2 - s^2 c_{66} \bar{a}_3 - c^2 c_{55} \bar{a}_2 + 2s^2 c^2 \bar{b}_1) \frac{F_3}{\bar{p}_3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (d\bar{p}_2^2 - s^2 c_{66} \bar{a}_3 - c^2 c_{55} \bar{a}_2 + 2s^2 c^2 \bar{b}_1) \frac{F_2}{\bar{p}_2} \right] + O(\epsilon^2) \right\}, \\ &= \bar{A} k \cos \psi \left\{ a_1 \left[c^2 \bar{c}_{44} (c_{55} b_3 \bar{a}_3 + c_{66} b_2 \bar{a}_2 - c^2 b_2 \bar{b}_1 - s^2 b_3 \bar{b}_1) / (c_{55} c_{66} \bar{a}_2 \bar{a}_3 - s^2 c^2 \bar{b}_1^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c_{66} \right] \frac{F_1}{p_1} - \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left[c^2 \bar{c}_{44} (\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2 + d\bar{b}_1 / c_{55} c_{66}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_{66} \bar{p}_3^2 (-\bar{p}_2^2 + \bar{a}_2 + c^2 \bar{b}_1 / c_{66}) \right] \frac{F_3}{\bar{p}_3} + \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left[c^2 \bar{c}_{44} (-\bar{p}_3^2 + \bar{p}_2^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + d\bar{b}_1 / c_{55} c_{66}) + c_{66} \bar{p}_2^2 (-\bar{p}_3^2 + \bar{a}_2 + c^2 \bar{b}_1 / c_{66}) \right] \frac{F_2}{\bar{p}_2} + O(\epsilon) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \bar{A} k \cos \psi \left\{ a_1 \left[s^2 \bar{c}_{44} (c_{55} b_3 \bar{a}_3 + c_{66} b_2 \bar{a}_2 - c^2 b_2 \bar{b}_1 - s^2 b_3 \bar{b}_1) / (c_{55} c_{66} \bar{a}_2 \bar{a}_3 - s^2 c^2 \bar{b}_1^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c_{55} \right] \frac{F_1}{p_1} - \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left[s^2 \bar{c}_{44} (-\bar{p}_3^2 + \bar{p}_2^2 + d\bar{b}_1 / c_{55} c_{66}) + c_{55} \bar{p}_2^2 (-\bar{p}_3^2 + \bar{a}_3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + s^2 \bar{b}_1 / c_{55}) \right] \frac{F_3}{\bar{p}_3} + \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left[s^2 \bar{c}_{44} (\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2 + d\bar{b}_1 / c_{55} c_{66}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_{55} \bar{p}_3^2 (-\bar{p}_2^2 + \bar{a}_3 + s^2 \bar{b}_1 / c_{55}) \right] \frac{F_2}{\bar{p}_2} + O(\epsilon) \right\}, \quad (3.103) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\bar{A} k s c \bar{c}_{44} \cos \psi \left\{ a_1 (c_{55} b_3 \bar{a}_3 + c_{66} b_2 \bar{a}_2 - c^2 b_2 \bar{b}_1 - s^2 b_3 \bar{b}_1) / (c_{55} c_{66} \bar{a}_2 \bar{a}_3 - \right. \\ &\quad \left. - s^2 c^2 \bar{b}_1^2) \frac{F_1}{p_1} - \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left[(\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2 + d\bar{b}_1 / c_{55} c_{66}) \frac{F_3}{\bar{p}_3} - (-\bar{p}_3^2 + \bar{p}_2^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + d\bar{b}_1 / c_{55} c_{66}) \frac{F_2}{\bar{p}_2} \right] + O(\epsilon) \right\}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{13} = -\bar{A}k c_{55} \sin \psi \left\{ G_1 - \frac{1}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left[(\bar{p}_3^2 - \bar{a}_3 + c^2 \bar{b}_1 / c_{66}) G_3 - (\bar{p}_2^2 - \bar{a}_3 + c^2 \bar{b}_1 / c_{66}) G_2 \right] + O(\epsilon^2) \right\},$$

$$\sigma_{12} = -\bar{A}k c_{66} \sin \psi \left\{ G_1 - \frac{1}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left[(\bar{p}_3^2 - \bar{a}_2 + s^2 \bar{b}_1 / c_{55}) G_3 - (\bar{p}_2^2 - \bar{a}_2 + s^2 \bar{b}_1 / c_{55}) G_2 \right] + O(\epsilon^2) \right\}.$$

Ponašanje napona (3.103) je sada lako analizirati imajući u vidu ponašanje funkcije $G_\alpha(x_1)$ i $F_\alpha(x_1)$. Kada je $kh p_\alpha = O(1/\epsilon)$, to je tačno za $\alpha=2,3$ i $kh=O(1)$, tada je

$$\sigma_\alpha = \frac{\sinh kh p_\alpha \frac{x_1}{h}}{\cosh kh p_\alpha} \approx e^{-kh p_\alpha (1 - \frac{x_1}{h})} - e^{-kh p_\alpha (1 + \frac{x_1}{h})}, \quad (3.104)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\cosh kh p_\alpha \frac{x_1}{h}}{\cosh kh p_\alpha} \approx e^{-kh p_\alpha (1 - \frac{x_1}{h})} + e^{-kh p_\alpha (1 + \frac{x_1}{h})},$$

u graničnoj vrednosti neekstenzibilnosti, kada $\epsilon \rightarrow 0$, imamo

$$\sigma_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{za } |x_1| < h, \\ 1 & \text{za } x_1 = h, \\ -1 & \text{za } x_1 = -h, \end{cases} \quad (3.105)$$

$$\sigma_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{za } |x_1| < h \\ 1 & \text{za } x_1 = \pm h. \end{cases} \quad (3.106)$$

eć smo videli da kada je $kh=O(1)$, ili veće, tada je $c_{11} a_1 = O(\epsilon^2)$ ako da je

$$F_1 \approx kh p_1 x_1 / h \quad \text{i} \quad G_1 \approx 1. \quad (3.107).$$

ada je očigledno da aproksimativna rešenja (3.103) u graničnoj rednosti neekstenzibilnosti daju neekstenzibilna rešenja koja su sta kao što smo dobili ranije u drugoj glavi odeljak 2.3. jedna-ine (2.21).

Kada razmatramo jako anizotropni materijal, medjutim, z (3.103) je lako zaključiti da neekstenzibilna rešenja (2.21) ne ogu da reprodukuju ponašanje napona za beskonačno duge talase, ada je $kh \ll \epsilon$, i beskonačno kratke talase, kada je $kh \gg 1/\epsilon$, jer se i delovi rešenja gube u graničnom procesu koji jako anizotropni

materijal transformiše u neekstenzibilni materija. Štaviše za $kh \ll \epsilon$ naponi σ_{22}, σ_{33} i σ_{23} nemaju singularnosti oblika δ funkcija bližu konture a naponi σ_{12} i σ_{13} su mali po celoj debljini ploče i, prema tome, nema diskontinuiteta koje smo imali u neekstenzibilnoj teoriji.

3.4.2. SIMETRIČNI MODOVI PROPAGACIJE

Kada posmatramo simetrične modove propagacije ista procedura i iste pretpostavke kao one koje vode do aproksimativne disperzione jednačine (3.91), za antisimetrične modove propagacije, daju aproksimativnu disperzionu relaciju u sledećem obliku

$$c_{11} a_1 \frac{\coth kh p_1}{p_1} = \frac{\epsilon}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left\{ \left[d \bar{p}_3^2 - s^2 c_{66} \bar{a}_3 - c^2 c_{55} \bar{a}_2 + 2s^2 c^2 \bar{b}_1 + O(\epsilon^2) \right] \frac{\coth \frac{kh \bar{p}_3}{\epsilon}}{\bar{p}_3} - \left[d \bar{p}_2^2 - s^2 c_{66} \bar{a}_3 - c^2 c_{55} \bar{a}_2 + 2s^2 c^2 \bar{b}_1 + O(\epsilon^2) \right] \frac{\coth \frac{kh \bar{p}_2}{\epsilon}}{\bar{p}_2} \right\}. \quad (3.108)$$

Ako je materijal idealno neekstenzibilan onda desna strana jednačine (3.108) teži nuli tako da jednačina postaje ista kao (2.23) koja daje faznu brzinu u obliku (2.25). Može da se pokaže da odgovarajuća pomeranja za jako anizotropne materijale imaju oblike (3.100) a naponi oblike (3.103) gde su $F_\alpha(x_1)$ i $G_\alpha(x_1)$ dati sa (3.27). Kao i u slučaju antisimetričnih modova propagacije lako je dokazati da za graničnu vrednost neekstenzibilnosti, kada $\epsilon \rightarrow 0$, pomeranja teže izrazima (2.26) a naponi izrazima (2.27).

Za jako anizotropne materijale kada je ϵ mala ali konačna veličina desna strana jednačine (3.108) mora da se uzme u razmatranje. Za razne talasne dužine imamo razne uticaje desne strane jednačine (3.108).

Za veoma duge talase, kada je $kh \ll \epsilon$, funkcije $\coth kh p_\alpha$ mogu da se zamene sa $1/kh p_\alpha$ tako da jednačina (3.108) dovodi do jednačine

$$c_{11} = [s^2 c_{66} a_3 + c^2 c_{55} a_2 - 2s^2 c^2 b_1 + O(1)] / p_2^2 p_3^2 \quad (3.109)$$

koja je, uz korišćenje (3.37)₃, u nesaglasnosti sa egzaktnim rešenjem (3.59). Objašnjenje ove nesaglasnosti je vrlo jednostavno.

Kada $kh \rightarrow 0$ tada ρv^2 postaje veliko što je u nesaglasnosti sa pretpostavkama koje vode do aproksimativnog izraza (3.108). Dakle aproksimativni izraz (3.108) ne važi za slučaj veoma dugih talasa. Kada je ρv^2 veliko tada $c_{11}a_1$ postaje velika negativna veličina pa iz (3.9) sledi da su svi p_1^2 , p_2^2 i p_3^2 veliki po apsolutnoj vrednosti. Štaviše sledi da u disperzionoj jednačini oblika (3.50) svi članovi moraju da se uzmu u obzir što vodi do iste analize kao u odeljku 3.2.2. Dakle, egzaktna disperziona relacija je data izrazom

$$\frac{c_{11}^2 c_{55} c_{66}}{s^2 c^2 D_3} \left\{ \bar{r}_1 (p_3^2 - p_2^2) \frac{\coth kh p_1}{p_1} - \bar{r}_2 (p_3^2 - p_1^2) \frac{\coth kh p_2}{p_2} + \bar{r}_3 (p_2^2 - p_1^2) \frac{\coth kh p_3}{p_3} \right\} = 0, \quad (3.110)$$

gde su

$$\begin{aligned} \bar{r}_\alpha = & -\rho v^2 p_\alpha^4 + [s^2 c_{66} a_2 + c^2 c_{55} a_3 - c_{11} a_1 (a_2 + a_3 - s^2 c_{12}^2 / c_{11} c_{66} - c^2 c_{13}^2 / c_{11} c_{55}) \\ & - 2s^2 c^2 b_1 - s^2 c^2 (c_{12} b_2 - c_{13} b_3)^2 / c_{11} c_{55} c_{66}] p_\alpha^2 \\ & - a_1 (s^2 c_{12}^2 a_3 / c_{66} + c^2 c_{13}^2 a_2 / c_{55} - 2s^2 c^2 c_{12} c_{13} b_1 / c_{55} c_{66} - \\ & - c_{11} a_2 a_3 + s^2 c^2 c_{11} b_1^2 / c_{55} c_{66}). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Kada je $kh \ll \epsilon$ disperziona relacija (3.110) se, kao i ranije, svodi na (3.59) dajući rešenja za ρv^2 u obliku (3.63) od kojih jedno odgovara kvazilongitudinalnim a drugo kvazitransverzalnim talasima. Pomeranja su data sa (3.64) i mogu biti izražena kao

$$\begin{aligned} U &= kh A_1 \frac{x_1}{h}, \\ V &= -s A_1 \frac{c_{12} c_{55} a_3 - c^2 c_{13} b_1}{c_{55} c_{66} a_2 a_3 - s^2 c^2 b_1^2}, \\ W &= -c A_1 \frac{c_{13} c_{55} a_2 - s^2 c_{12} b_1}{c_{55} c_{66} a_2 a_3 - s^2 c^2 b_1^2}, \end{aligned} \quad (3.112)$$

gde smo stavili $A(Z_1 + Z_2 + Z_3) / kh \equiv A_1$. Iz (3.112) možemo da zaključimo da je $U = O(kh)$ a prema (3.59), uz pretpostavku o jakoj anizotropiji, imenioci izraza (3.112)_{2,3} nisu sada $O(1/\epsilon^4)$ već $O(1/\epsilon^2)$ što pokazuje da su V i W veličine reda jedan. Dakle, vektori pome-

ranja za ova dva moda su skoro paralelni sa konturama ploče. Pomeranja su bila dobijena pod pretpostavkom da je $|khp_1| \ll 1$. Sledeći mod koji se dobija kada $khp_1 \rightarrow i \frac{\pi}{2}$ reprezentuje po debljini smičući mod i to je prvi mod koji smo u stanju da dobijemo u graničnoj vrednosti neekstenzibilnosti. Kada kh raste do $O(1)$, međjutim, ove tri disperzione krive mogu da se prate iz izraza (3.108) što pokazuje da fazna brzina sva tri moda naglo opada na $O(1)$, što vodi do zaključka da je tada $c_{11}a_1 = O(1)$, tako da važi aproksimativna disperziona relacija (3.108) što ima za posledicu da je

$$c_{11}a_1 \frac{\cot khq_1}{q_1} = O(\epsilon), \quad (3.113)$$

gde je

$$q_1^2 = -p_1^2, \quad (3.114)$$

za kvazilongitudinalni i kvazitransverzalni mod, dok je

$$c_{11}a_1 \frac{\cot khq_1}{q_1} = 0, \quad (3.115)$$

za po debljini smičući mod. Prema tome u granici neekstenzibilnosti, kada $\epsilon \rightarrow 0$, jednačine (3.113) i (3.115) postaju iste i mi ismo u stanju da napravimo razliku između ova tri moda. Rešenje jednačine (3.115) je dato izrazom (2.24) sa faznom brzinom datom sa (2.25). Iz (3.113) je očigledno da za $kh = O(1)$ dva fundamentalna moda mogu aproksimativno da se predstave sa (3.115) jer je desna strana jednačine (3.113) reda ϵ . Videli smo u (3.100) da se U ponaša kao $G_1(x)$ i da su V i W male veličine u poredjenju sa U .

Za jako anizotropne materijale kada je ϵ mala ali konačna veličina i $kh = O(1)$ iz egzaktnih jednačina (3.110) ili (3.108) možemo da dobijemo aproksimativne izraze za faznu brzinu u obliku

$$v^2 = d + \frac{c_{11}\pi^2}{4k^2h^2} - 2 \frac{\epsilon}{kh} \frac{1}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \left\{ [s^2 c_{66} \bar{a}_3 + c^2 c_{55} \bar{a}_2 - 2s^2 c^2 \bar{b}_1 - d\bar{p}_3^2] \frac{\coth \frac{kh\bar{p}_3}{\epsilon}}{\bar{p}_3} - [s^2 c_{66} \bar{a}_3 + c^2 c_{55} \bar{a}_2 - 2s^2 c^2 \bar{b}_1 - d\bar{p}_2^2] \frac{\coth \frac{kh\bar{p}_2}{\epsilon}}{\bar{p}_2} \right\}, \quad (3.116)$$

koja se u graničnoj vrednosti, kada $\epsilon \rightarrow 0$, slaže sa rešenjem (2.25) za $n=0$. Rešenje (3.116) ne važi kada $kh \rightarrow 0$ pošto bi to imalo za

posledicu da je $\rho v^2 \rightarrow \infty$ što je u suprotnosti sa pretpostavkama koje su dovele do (3.108). Rešenje takodje ne važi kada $kh \rightarrow \infty$ jer bi to vodilo do vrednosti $\rho v^2 < d$ što bi opet bilo u suprotnosti sa pretpostavkama koje su dovele do aproksimativnog izraza (3.116).

U slučaju kratkih talasa, kada je $kh \gg 1/\epsilon$, sve pretpostavke koje vode do aproksimativne disperzione relacije (3.108) su ispunjene. Za neekstenzibilni materijal smo videli da, za beskonačno kratke talase, ρv^2 teži asimptotski vrednosti d . Kada je u pitanju anizotropni materijal, medjutim, postoji presek disperzione relacije sa $\rho v^2 = d$ što ima za posledicu da sa porastom kh veličina p_1^2 ostaje pozitivna. Da bismo pokazali ovo pretpostavićemo da postoji neka brzina manja od $\sqrt{d/\rho}$. U okolini presečne tačke možemo da pišemo

$$\rho v^2 = d - \delta \quad (3.116)$$

gde je δ mala veličina. U tom slučaju je $c_{11}a_1 = \delta$ pa ako (3.9) napišemo u obliku

$$\{(p^2 - a_2 + s^2 b_3 / c_{11} c_{66}) (p^2 - a_3 + c^2 b_2^2 / c_{11} c_{55}) - s^2 c^2 (b_1 - b_2 b_3 / c_{11})^2 / c_{55} c_{66} + a_1 (a_2 + a_3 - p^2)\} - a_1 (a_2 a_3 - s^2 c^2 b_1^2 / c_{55} c_{66}) = 0, \quad (3.117)$$

ko možemo da pokažemo da je

$$= \frac{\delta}{c_{11} (a_2 - s^2 b_3 / c_{11} c_{66}) (a_3 - c^2 b_2^2 / c_{11} c_{55}) - s^2 c^2 (b_1 - b_2 b_3 / c_{11})^2} + O(\delta^2), \quad (3.118)$$

gde su p_2^2 i p_3^2 rešenja jednačine

$$(p^2 - a_2 + s^2 b_3^2 / c_{11} c_{66}) (p^2 - a_3 + c^2 b_2^2 / c_{11} c_{55}) = s^2 c^2 (b_1 - b_2 b_3 / c_{11})^2 / c_{55} c_{66} + O(\delta^2) \quad (3.119)$$

Ukoliko, kao i ranije, pretpostavimo da je $a_3 > a_2 = O(1/\epsilon^2)$ onda možemo da zaključimo da su p_2^2 i p_3^2 pozitivne veličine i da je

$$p_2^2 < a_2 - s^2 b_3^2 / c_{11} c_{66}, \quad (3.120)$$

$$p_3^2 > a_3 - c^2 b_2^2 / c_{11} c_{55}.$$

Za jako anizotropne materijale za koje je ϵ mala ali značajna veličina, uzimajući da $\delta \rightarrow 0$, iz (3.108) lako dobijamo presečnu tačku između fundamentalnog moda i $\rho v^2 = d$, recimo kh_1 , u obliku

$$kh_i = \frac{1}{\varepsilon} \frac{c_{11} (|\bar{p}_3| + |\bar{p}_2|)}{(s^2 c_{66} \bar{a}_3 + c^2 c_{55} \bar{a}_2 - 2s^2 c^2 \bar{b}_1) / |\bar{p}_2 \bar{p}_3| + d} + O(1), \quad (3.121)$$

odakle je očigledno da postoji samo jedna presečna tačka za $kh_i = O(1/\varepsilon)$. Prema tome neekstenzibilna teorija ne može da predvidi ovaj presek, jer kada $\varepsilon \rightarrow 0$ tada $kh_i \rightarrow \infty$. Za vrednosti $kh > kh_i$ fazna brzina $v^2 < d$ pa su sve p_α^2 ($\alpha=1,2,3$) pozitivne veličine i u graničnoj vrednosti kada $kh \rightarrow \infty$ fazna brzina teži istoj veličini kao za simetrični mod (3.97) koja je Rayleigh-eva talasna brzina za anizotropni materijal.

Aproksimativni izrazi za pomeranja i napone su dati sa (3.100) i (3.103) respektivno gde su $F_\alpha(x_1)$ i $G_\alpha(x_1)$ dati sa (3.27). Ponašanje pomeranja i napona jako zavisi od ponašanja funkcija F_α i G_α . Za $kh = O(1)$ p_2^2 i p_3^2 su $O(1/\varepsilon^2)$ tako da možemo da pišemo

$$F_\alpha = \frac{\cosh kh p_\alpha \frac{x_1}{h}}{\sinh kh p_\alpha} \approx e^{-khp_\alpha(1 - \frac{x_1}{h})} + e^{-khp_\alpha(1 + \frac{x_1}{h})}, \quad (3.122)$$

$$G_\alpha = \frac{\sinh kh p_\alpha \frac{x_1}{h}}{\sinh kh p_\alpha} \approx e^{-khp_\alpha(1 - \frac{x_1}{h})} - e^{-khp_\alpha(1 + \frac{x_1}{h})} \quad (\alpha=2,3)$$

pa u granici neekstenzibilnosti, za $\varepsilon \rightarrow 0$, imamo

$$F_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{za } |x_1| < h, \\ 1 & \text{za } x_1 = \pm h, \end{cases} \quad (3.123)$$

$$G_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{za } |x_1| < h, \\ 1 & \text{za } x_1 = h, \\ -1 & \text{za } x_1 = -h. \end{cases} \quad (3.124)$$

U toj oblasti talasnih dužina p_1^2 je negativno pa je

$$F_1/p_1 = - \frac{\cos kh q_1 \frac{x_1}{h}}{q_1 \sin kh q_1} \quad (3.125)$$

$$G_1 = \frac{\sin kh q_1 \frac{x_1}{h}}{\sin kh q_1}$$

odakle, kada $kh q_1 \rightarrow \pi/2$ što odgovara po debljini smičućem modu, u granici neekstenzibilnosti, za $kh = O(1)$, iz (3.100) i (3.103) dobijamo ista rešenja kao i u neekstenzibilnoj teoriji, koja su data sa (2.26) i (2.27), kako je i ranije napomenuto. Za dva fundamentalna moda, koji odgovaraju slučaju kada je $kh q_1 \ll 1$, izrazi (3.125) mogu da se napišu u obliku

$$F_1/p_1 \approx -1/khq_1^2 + khx_1^2/2h^2 - kh/6, \quad G_1 \approx x_1/h \quad (3.126)$$

Da iz (3.103)₁ možemo da zaključimo da na konturama $x_1 = \pm h$, za $\phi \rightarrow 0, \sigma_{11}$ ostaje konačno osim za $\bar{A} = 0$, što daje trivijalna rešenja, ali za $p_2^2 p_3^2 = O(1/\epsilon^2)$, što je zadovoljeno samo za specijalne pravce prostiranja tj. kada je talasna normala normalna na jednu od familija vlakana.

3.5. PRAVAC PROPAGACIJE NORMALAN NA JEDNU OD FAMILIJA VLAKANA

U prethodnom odeljku smo videli da je, za $v^2 = O(1)$, izraz za a u (3.72) $O(1/\epsilon^4)$ za bilo koji ugao propagacije sem kada se pravac propagacije blizu normale na jednu od familija vlakana. Naime kada je $s^2 \sin^2 \phi - c^2 \cos^2 \phi = O(\epsilon)$, ili manje, zadnji sabirak u (3.72) postaje $O(1/\epsilon^2)$, ili manji, što ima za posledicu da je $a = O(1/\epsilon^2)$. Druga mogućnost da izraz za a postane $O(1/\epsilon^2)$ je kada ugao između vlakana teži vrednostima $2\phi \rightarrow 0$ ili $2\phi \rightarrow \pi$, ali to bi značilo da se materijal ponaša kao materijal ojačan jednom familijom vlakana što bi vodilo sličnim rezultatima onima koji su dobijeni od strane Green-a (1982) i Green-a i Milosavljević-a (1985). Mi ćemo ovde da održimo našu pažnju na prvoj mogućnosti. Dakle kada se pravac propagacije približava normali na jednu od familija vlakana kao posledicu imamo da su dva od rešenja za p^2 u (3.9) reda jedan, kada poslednja tri sabirka postaju dominantna i međusobno uporediva, dok je preostalo rešenje za p^2 reda $1/\epsilon^2$, kada prva dva sabirka postaju dominantna i međusobno uporediva. Pretpostavimo da je relacija

$$s^2 \sin^2 \phi - c^2 \cos^2 \phi = 0, \quad (3.127)$$

zadovoljena. Tada zamena (3.73) u (3.71) vodi do izraza

$$\begin{aligned} a_2 &= 8d s^2 c^4 / c_{66} \epsilon^2 + \hat{a}_2 \\ a_3 &= 8d s^4 c^2 / c_{55} \epsilon^2 + \hat{a}_3, \\ b_1 &= 8d s^2 c^2 / \epsilon^2 + \hat{b}_1. \end{aligned} \quad (3.128)$$

iz (3.72) dobijamo

$$a = 8ds^2 c^2 (s^2 c_{66} \hat{a}_2 + c^2 c_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1) / \epsilon^2 + c_{55} c_{66} \hat{a}_2 \hat{a}_3 - s^2 c^2 \hat{b}_1^2, \quad (3.129)$$

tako da se izraz (3.9) svodi na prostiji oblik dat jednačinom

$$\frac{ds^2 c^2}{c_{55} c_{66}} \left\{ - \frac{\epsilon^2 c_{55} c_{66}}{8 ds^2 c^2} p^6 + dp^4 - p^2 [da_1 + s^2 c_{66} \hat{a}_2 + c^2 c_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1 - (c^2 b_2 - s^2 b_3)^2 / c_{11} + O(\epsilon^2)] + a_1 [s^2 c_{66} \hat{a}_2 + c^2 c_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1 + O(\epsilon^2)] \right\} = 0. \quad (3.130)$$

ova rešenja za p^2 su $O(1)$ i predstavljaju rešenja jednačine

$$dp^4 - p^2 [da_1 + s^2 c_{66} \hat{a}_2 + c^2 c_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1 - (c^2 b_2 - s^2 b_3)^2 / c_{11}] + a_1 (s^2 c_{66} \hat{a}_2 + c^2 c_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1) = O(\epsilon^2), \quad (3.131)$$

iji koreni zadovoljavaju relacije

$$(p_1^2 + p_2^2) = da_1 + s^2 c_{66} \hat{a}_2 + c^2 c_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1 - (c^2 b_2 - s^2 b_3)^2 / c_{11} + O(\epsilon^2), \\ p_1^2 p_2^2 = a_1 \{s^2 c_{66} \hat{a}_2 + c^2 c_{55} \hat{a}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1 + O(\epsilon^2)\}, \quad (3.132)$$

ok je treće rešenje dato sa

$$p_3^2 = 8s^2 c^2 d^2 / c_{55} c_{66} \epsilon^2 + O(1) = \bar{p}_3^2 / \epsilon^2 + O(1). \quad (3.133)$$

čigledno je da u granici neekstenzibilnosti, kada $\epsilon \rightarrow 0$, (3.131) ostaje isto što i (2.45) dajući iste vrednosti za p_1^2 i p_2^2 dok e treće rešenje $p_3^2 \rightarrow \infty$. Sada je lako dobiti aproksimativne izraze a (3.80)-(3.82). Dakle iz (3.80) dobijamo

$$\alpha = c_{11} \frac{8 ds^2 c^2}{\epsilon^2} \left\{ \epsilon^2 \frac{c_{55} c_{66}}{8 dc_{11} s^2 c^2} (s^2 c_{12} + c^2 c_{13} - \rho v^2) p_\alpha^2 - e (c^2 b_2 - s^2 b_3) / c_{11} + a_1 d - dp_1^2 p_2^2 / p_\alpha^2 + O(\epsilon^2) \right\}, \quad (3.134)$$

z (3.81) dobijamo

$$\alpha = c_{11} \frac{8 ds^2 c^2}{\epsilon^2} \left\{ \epsilon^2 \frac{c_{55} c_{66}}{8 ds^2 c^2} p_\alpha^4 + ep_\alpha^2 + a_1 (c^2 c_{13} - s^2 c_{12}) + O(\epsilon^2) \right\}, \quad (3.135)$$

ok iz (3.82) dobijamo

$$\alpha = c_{11} \frac{8 ds^2 c^2}{\epsilon^2} \left\{ \epsilon^2 \frac{c_{55} c_{66}}{8 ds^2 c^2} p_\alpha^4 - ep_\alpha^2 - a_1 (c^2 c_{13} - s^2 c_{12}) + O(\epsilon^2) \right\}. \quad (3.136)$$

zraz (3.49) ima sledeći aproksimativni oblik

$$\alpha = c_{11} \frac{8 ds^2 c^2}{\epsilon^2} \left\{ + \epsilon^2 \frac{c_{55} c_{66}}{8 dc_{11} s^2 c^2} \rho v^2 p_\alpha^4 - (e^2 / c_{11} - da_1) p_\alpha^2 - da_1 (p_1^2 + p_2^2 - a_1) - \frac{ea_1}{c_{11}} [c^2 (b_2 + c_{13}) - s^2 (b_3 + c_{12})] + O(\epsilon^2) \right\} \frac{\tanh k h p_\alpha}{p_\alpha} \quad (3.137)$$

predstavlja koeficijente prve vrste u determinanti (3.50) za antisimetrični mod propagacije, dok su odgovarajući koeficijenti prvoj vrsti determinante (3.50) za simetrični mod dati izrazom

$$x = c_{11}^2 \frac{8ds^2c^2}{\epsilon^2} \left\{ +\epsilon^2 \frac{c_{55}c_{66}}{8dc_{11}s^2c^2} \rho v^2 p_\alpha^4 - (e^2/c_{11} - da_1) p_\alpha^2 - da_1 (p_1^2 + p_2^2 - a_1) - \frac{ea_1}{c_{11}} [c^2 (b_2 + c_{13}) - s^2 (b_3 + c_{12})] + O(\epsilon^2) \right\} \frac{\coth kh p_\alpha}{p_\alpha}. \quad (3.138)$$

5.1. ANTISIMETRICNI MODOVI PROPAGACIJE

Antisimetrični modovi propagacije imaju disperzionu relaciju oblika (3.50) pri čemu su r_α dati u aproksimativnom obliku atom sa (3.137). Dakle, uz korišćenje (3.133), disperziona relacija ima sledeći aproksimativni oblik

$$\frac{c_{11}^3 c_{55} c_{66} \bar{p}_3^4}{s^2 c^2 D_3 d \epsilon^4} \left\{ [da_1^2 - ea_1 c^2 (b_2 + c_{13}) / c_{11} + ea_1 s^2 (b_3 + c_{12}) / c_{11} - e^2 p_2^2 / c_{11} - da_1 p_1^2 + O(\epsilon^2)] \frac{\tanh kh p_2}{p_2} - [da_1^2 - ea_1 c^2 (b_2 + c_{13}) / c_{11} + ea_1 s^2 (b_3 + c_{12}) / c_{11} - e^2 p_1^2 / c_{11} - da_1 p_2^2 + O(\epsilon^2)] \frac{\tanh kh p_1}{p_1} - \epsilon (p_2^2 - p_1^2) [d\rho v^2 / c_{11} - e^2 / c_{11} + da_1 + O(\epsilon^2)] \frac{\tanh \frac{kh \bar{p}_3}{\epsilon}}{\bar{p}_3} \right\} = 0. \quad (3.139)$$

koliko je materijal neekstenzibilan, tj. $\epsilon \rightarrow 0$, onda zadnji sabirak velikoj zagradi disperzione relacije (3.139) postaje nula tako da ova, imajući na umu (3.122), postaje ista kao (2.52) koju smo dobili u neekstenzibilnoj teoriji. Kod jako anizotropnih materijala, međutim, kod kojih je ϵ mala ali konačna veličina moramo da razmatramo i pomenuti sabirak u (3.139) posebno za veoma duge talase za koje je $kh \ll \epsilon$ jer tada ovaj sabirak postaje veličina istog reda kao prva dva.

Prema tome u slučaju veoma dugih talasa, kada je $kh \ll \epsilon$, hiperbolički tangens može da se zameni svojim argumentom pa iz (3.139) dobijamo

$$\frac{c_{11}^3 c_{55} c_{66} \bar{p}_3^4}{s^2 c^2 D_3 d \epsilon^4} (p_2^2 - p_1^2) kh \{-d\rho v^2 / c_{11} + O(\epsilon^2)\} = 0, \quad (3.140)$$

što pokazuje da je $\rho v^2 = O(\epsilon^2)$.

Kada je $kh=O(\epsilon)=m\epsilon$ iz (3.139) dobijamo

$$e^2/c_{11}+da_1=(d\rho v^2/c_{11}-e^2/c_{11}+da_1)\tanh m\bar{p}_3/\bar{m}\bar{p}_3+O(\epsilon^2), \quad (3.141)$$

ako da fazna brzina može da se izrazi u sledećem obliku

$$\rho v^2=(d-e^2/d)(1-\tanh k\bar{m}\bar{p}_3/\bar{m}\bar{p}_3)+O(\epsilon^2)=4s^2c^2c_{55}c_{66}(1-\tanh m\bar{p}_3/\bar{m}\bar{p}_3)/d+O(\epsilon^2). \quad (3.142)$$

ednačina (3.142) važi od $kh \rightarrow 0$ do $kh=O(\epsilon)$ i pokazuje da u toj oblasti talasna brzina raste od nule pri $kh=0$ do vrednosti

$$\rho v^2 = d - e^2/d, \quad (3.142)'$$

a $kh = O(1)$ pri čemu $m \rightarrow \infty$. Ovaj deo disperzione krive je bio izgubljen u neekstenzibilnoj teoriji i bio je transformisan u diskontinualni skok od $\rho v^2 = 0$ do vrednosti date sa (3.142)' koja je ista kao ona koju neekstenzibilna teorija predviđa za $kh \rightarrow 0$ (videti ednačinu (2.54)).

Kada je $kh = O(1)$ iz (3.139) dobijamo jednačinu

$$\begin{aligned} & \{dc_{11}a_1^2 - ea_1c^2(b_2+c_{13}) + ea_1s^2(b_3+c_{12}) - e^2p_2^2 - dc_{11}a_1p_1^2 + O(\epsilon^2)\} \frac{\tanh khp_2}{p_2} \\ & \{dc_{11}a_1^2 - ea_1c^2(b_2+c_{13}) + ea_1s^2(b_3+c_{12}) - e^2p_1^2 - dc_{11}a_1p_2^2 + O(\epsilon^2)\} \frac{\tanh khp_1}{p_1} \\ & \epsilon(p_2^2 - p_1^2)\{d^2 - e^2 + O(\epsilon^2)\}/|\bar{p}_3|, \end{aligned} \quad (3.143)$$

oja u poredjenju sa disperzionom jednačinom dobijenom u neekstenzibilnoj teoriji ima korekciju reda ϵ .

Za veoma duge talase, kada je $kh \gg 1/\epsilon$, $\tanh khp_1$ i $\tanh khp_2$ mogu da se zamene jedinicom tako da (3.143) daje isto rešenje kao neekstenzibilnoj teoriji (2.57) čija je tačnost do $O(\epsilon^2)$. Egzaktno rešenje za Rayleigh-evu talasnu brzinu može da se nadje iz jednačina (3.55) ili (3.56).

Pomeranja (3.25) u aproksimativnom obliku za jako anisotropne materijale, uz korišćenje (3.132)-(3.136) i (3.128) mogu da se dobiju u sledećem obliku

$$\begin{aligned} & = \bar{A}\{G_1 - \left[\frac{p_1^2 - a_1 + e(c^2b_2 - s^2b_3)/c_{11}d}{p_2^2 - a_1 + e(c^2b_2 - s^2b_3)/c_{11}d} + O(\epsilon^2) \right] G_2 \\ & + 2(p_2^2 - p_1^2) \frac{\epsilon^2}{\bar{p}_3^2} \left[\frac{(d\rho v^2 + c^2eb_2 - s^2eb_3)/c_{11}d + O(\epsilon^2)}{p_2^2 - a_1 + e(c^2b_2 - s^2b_3)/c_{11}d} \right] G_3\}, \end{aligned}$$

$$\frac{sc_{11}}{c^2b_2-s^2b_3} \left\{ (p_1^2-a_1) \frac{F_1}{P_1} - \left[\frac{p_1^2-a_1+e(c^2b_2-s^2b_3)/c_{11}d}{p_2^2-a_1+e(c^2b_2-s^2b_3)/c_{11}d} + O(\epsilon^2) \right] (p_2^2-a_1) \frac{F_2}{P_2} \right. \\ \left. + \epsilon \left[\frac{2c^2c_{55}(c^2b_2-s^2b_3)/c_{11}d}{p_2^2-a_1+e(c^2b_2-s^2b_3)/c_{11}d} + O(\epsilon^2) \right] (p_2^2-p_1^2) \frac{F_3}{P_3} \right\}, \quad (3.144)$$

$$-\bar{A} \frac{cc_{11}}{c^2b_2-s^2b_3} \left\{ (p_1^2-a_1) \frac{F_1}{P_1} - \left[\frac{p_1^2-a_1+e(c^2b_2-s^2b_3)/c_{11}d}{p_2^2-a_1+e(c^2b_2-s^2b_3)/c_{11}d} + O(\epsilon^2) \right] (p_2^2-a_1) \frac{F_2}{P_2} \right. \\ \left. + \epsilon \left[\frac{2s^2c_{66}(c^2b_2-s^2b_3)/c_{11}d}{p_2^2-a_1+e(c^2b_2-s^2b_3)/c_{11}d} + O(\epsilon^2) \right] (p_2^2-p_1^2) \frac{F_3}{P_3} \right\},$$

e su G_α i F_α funkcije date u (3.26). U graničnoj vrednosti nestenzibilnosti rešenja (3.144) daju rešenja (2.58) odakle možemo zaključimo da je neekstenzibilna teorija tačna do $O(\epsilon)$ za širok seg talasnih dužina. Za beskonačno duge talase, medjutim, F_3/p_3 stoje $O(kh)$ a ne $O(\epsilon)$ tako da u izrazima za V i W (3.144)_{2,3} lovi koji sadrže F_3/p_3 postaju istog reda kao i ostali tako treba da se uzmu u obzir pri izračunavanju pomeranja.

Naponi (3.29) u aproksimativnom obliku, za jako anizotropni materijal, mogu da se izraze na sledeći način

$$\sigma_{11} = \bar{A}k \cos \psi \frac{c_{11}}{c^2b_2-s^2b_3} \left\{ [ep_1^2+a_1(c^2c_{13}-s^2c_{12})] \frac{F_1}{P_1} - \right. \\ \left. - Z [ep_2^2+a_1(c^2c_{13}-s^2c_{12})] \frac{F_2}{P_2} + \epsilon \frac{2(c^2b_2-s^2b_3)(\rho v^2-2s^2c^2c_{55}c_{66}/d)(p_2^2-p_1^2)}{c_{11}[p_2^2-a_1+e(c^2b_2-s^2b_3)/dc_{11}]} \frac{F_3}{P_3} \right. \\ \left. + O(\epsilon^2) \right\},$$

$$\sigma_{22} = \bar{A}k \cos \psi c_{21} \left\{ \left[p_1^2 - \frac{c_{11}(c^2c_{23}-s^2c_{22})}{c_{21}(c^2b_2-s^2b_3)} (p_1^2-a_1) \right] \frac{F_1}{P_1} - \right. \\ \left. - Z \left[p_2^2 - \frac{c_{11}(c^2c_{23}-s^2c_{22})}{c_{21}(c^2b_2-s^2b_3)} (p_2^2-a_1) \right] \frac{F_2}{P_2} + \frac{1}{\epsilon} \bar{p}_3^2 \frac{c^2c_{55}c_{66}(p_2^2-p_1^2)/dc_{21}}{p_2^2-a_1+e(c^2b_2-s^2b_3)/dc_{11}} \frac{F_3}{P_3} + O(\epsilon) \right\},$$

$$\sigma_{33} = \bar{A}k \cos \psi c_{31} \left\{ \left[p_1^2 - \frac{c_{11}(c^2c_{33}-s^2c_{23})}{c_{31}(c^2b_2-s^2b_3)} (p_1^2-a_1) \right] \frac{F_1}{P_1} - \right. \\ \left. - Z \left[p_2^2 - \frac{c_{11}(c^2c_{33}-s^2c_{23})}{c_{31}(c^2b_2-s^2b_3)} (p_2^2-a_1) \right] \frac{F_2}{P_2} + \frac{1}{\epsilon} \bar{p}_3^2 \frac{s^2c_{55}c_{66}(p_2^2-p_1^2)/dc_{31}}{p_2^2-a_1+e(c^2b_2-s^2b_3)/dc_{11}} \frac{F_3}{P_3} + O(\epsilon) \right\},$$

$$\sigma_{23} = \bar{A}k \cos \psi \left\{ s c \frac{1}{\epsilon} \bar{p}_3^2 \frac{c_{55}c_{66}(p_2^2-p_1^2)/d}{p_2^2-a_1+e(c^2b_2-s^2b_3)/dc_{11}} \frac{F_3}{P_3} + O(\epsilon) \right\}, \quad (3.145)$$

$$\tau_{13} = -\bar{A} c_{55} \sin \psi \left\{ \left[1 - \frac{c_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} (p_1^2 - a_1) \right] G_1 - Z \left[1 - \frac{c_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} (p_2^2 - a_1) \right] G_2 \right. \\ \left. - \frac{2c^2 c_{55} (p_2^2 - p_1^2) / d}{p_2^2 - a_1 + e(c^2 b_2 - s^2 b_3) / c_{11} d} G_3 + O(\varepsilon^2) \right\},$$

$$\tau_{12} = -\bar{A} s c_{66} \sin \psi \left\{ \left[1 + \frac{c_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} (p_1^2 - a_1) \right] G_1 - Z \left[1 + \frac{c_{11}}{c^2 b_2 - s^2 b_3} (p_2^2 - a_1) \right] G_2 \right. \\ \left. - \frac{2s^2 c_{66} (p_2^2 - p_1^2) / d}{p_2^2 - a_1 + e(c^2 b_2 - s^2 b_3) / c_{11} d} G_3 + O(\varepsilon^2) \right\},$$

gde je Z dato sa (2.60) i, uprkos tome što su c_{33} , c_{22} i c_{23} svi $O(1/\varepsilon^2)$, za pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana, tj. kada je (3.127) zadovoljeno, u saglasnosti sa (3.70) dobijamo

$$\begin{aligned} c^2 c_{23} - s^2 c_{22} &= c^2 a_{23} - s^2 a_{22} + O(\varepsilon^2) \\ c^2 c_{33} - s^2 c_{23} &= c^2 a_{33} - s^2 a_{23} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.146)$$

Funkcije $F_\alpha(x_1)$ i $G_\alpha(x_1)$ su date sa (3.26) kao i ranije. U granici neekstenzibilnosti ponašanje funkcija $F_3(x_1)$ i $G_3(x_1)$ je dato sa (3.105) i (3.106) respektivno a aproksimativna rešenja (3.145) postaju ista kao (2.61) za neekstenzibilni materijal. Kada uporedimo (3.145) sa (2.4) možemo da zaključimo da je $T_B = 0$ dok se F_A ponaša prema sledećoj relaciji

$$T_A = \frac{1}{\varepsilon} \bar{p}_3^2 \frac{c_{55} c_{66} (p_2^2 - p_1^2) / d}{p_2^2 - a_1 + e(c^2 b_2 - s^2 b_3) / c_{11} d} \frac{F_3}{\bar{p}_3} + O(\varepsilon) \quad (3.147)$$

što u granici neekstenzibilnosti prelazi u singularnost oblika Dirac-ove δ funkcije. Integracijom po gornjoj polovini debljine ploče dolazimo do izraza

$$\int_0^h T_A dx_1 = \frac{c_{55} c_{66} (p_2^2 - p_1^2) / d}{p_2^2 - a_1 + e(c^2 b_2 - s^2 b_3) / c_{11} d} G_3 \Big|_0^h \quad (3.148)$$

koji, uz korišćenje (3.104), pokazuje da opterećenje L_A nastaje u konturnom sloju debljine $O(\varepsilon)$. Za beskonačno duge talase, međutim, kada je $kh \ll \varepsilon$ izraz (3.147) daje

$$T_A = kh \frac{8s^2 c^2 d (p_2^2 - p_1^2)}{p_2^2 - a_1 + e(c^2 b_2 - s^2 b_3) / c_{11} d} \quad (3.149)$$

što pokazuje da tada singularnost oblika δ funkcije u konturnom

sloju ne postoji a to neekstenzibilna teorija ne može da predvidi. Ovo je u saglasnosti sa ranijim zaključkom da u graničnom procesu gubimo sve informacije o ponašanju rešenja pri veoma dugim talasima, kada je $kh \ll \epsilon$, kao i pri veoma kratkim talasima kada je $kh \gg 1/\epsilon$. Kada je $kh = O(1)$ i $\epsilon \rightarrow 0$ lako je dokazati da su (3.148) i (2.59) ekvivalentni izrazi.

Dakle, opet je očigledno da rešenja za neekstenzibilni materijal mogu uspešno da reprezentuju ponašanje jako anizotropnog materijala samo za $kh=O(1)$. Za kratke i duge talase mora da se koristi teorija graničnog sloja da bi se dobilo ponašanje fazne brzine, pomeranja i napona.

3.5.2. SIMETRIČNI MODOVI PROPAGACIJE

Za simetrične modove propagacije ista procedura i iste pretpostavke kao one koje vode do (3.139), za antisimetrične modove propagacije, će dati aproksimativnu disperzionu relaciju sledećeg oblika

$$\begin{aligned} & \left[da_1^2 - ea_1 c^2 (b_2 + c_{13}) / c_{11} + ea_1 s^2 (b_3 + c_{12}) / c_{11} - e^2 p_2^2 / c_{11} - da_1 p_1^2 + O(\epsilon^2) \right] \frac{\coth kh p_2}{p_2} \\ & - \left[da_1^2 - ea_1 c^2 (b_3 + c_{13}) / c_{11} + ea_1 s^2 (b_2 + c_{12}) / c_{11} - e^2 p_1^2 / c_{11} - da_1 p_2^2 + O(\epsilon^2) \right] \frac{\coth kh p_1}{p_1} = \\ & = -\epsilon (p_2^2 - p_1^2) \left[dpv^2 / c_{11} - e^2 / c_{11} + da_1 + O(\epsilon^2) \right] \frac{\coth \frac{kh \bar{p}_3}{\epsilon}}{\bar{p}_3}. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Ukoliko je materijal idealno neekstenzibilan desna strana jednačine (3.150) teži nuli tako da ova jednačina postaje ista kao i jednačina (2.53) dajući faznu brzinu kao funkciju od kh . Može se pokazati da odgovarajuća pomeranja za jako anizotropne materijale imaju oblike (3.144) a naponi oblike (3.145) pri čemu su $F_\alpha(x_1)$ i $G_\alpha(x_1)$ dati izrazom (3.27). Kao i u slučaju antisimetričnih modova propagacije lako je dokazati da u graničnom slučaju neekstenzibilnosti, kada $\epsilon \rightarrow 0$, pomeranja teže ka (2.72) a naponi ka (2.73).

Za jako anizotropne materijale, kada je ϵ mala ali konačna veličina, iz (3.150) možemo da zaključimo da desna strana ne prelazi $O(\epsilon)$. Dakle do $O(\epsilon)$ disperziona jednačina (3.150) je ista kao (2.53) koja je bila dobijena za neekstenzibilne materijale. To je

ako pokazati korišćenjem (3.132). Prema tome do $O(\epsilon)$ disperziona elacija (3.150) vodi do fazne brzine (2.64) za beskonačno duge talase i do Rayleigh-eve talasne brzine, date sa (2.57), za beskonačno kratke talase. Fazna brzina (2.64), koja može da se do-
 ije iz aproksimativne disperziona jednačine (3.150) u graničnoj rednosti dugih talasa, odgovara manjoj faznoj brzini ρv_1^2 u (3.63) oja je dobijena iz egzaktnih jednačina. Za veću faznu brzinu ρv_2^2 , z (3.63), ne možemo da koristimo (3.150) jer tada brzina postaje $(1/\epsilon^2)$ što bi bilo u suprotnosti sa pretpostavkama koje su dovele o aproksimativne disperziona jednačine (3.150). Dakle da bismo obili faznu brzinu za drugi fundamentalni mod prinudjeni smo da azmatramo egzaktnu jednačinu oblika (3.110). Za $\rho v^2 = O(1/\epsilon^2)$ iz 3.7)₁ zaključujemo da je $a_1 = O(1/\epsilon^2)$ a iz (3.72) da je $a = O(1/\epsilon^4)$ to saglasno jednačini (3.9) daje $p_\alpha^2 = O(1/\epsilon^2)$. Prema tome svi čl-
 ovi jednačine (3.110) moraju da se razmatraju što vodi do istih aključaka o faznoj brzini kao što smo imali u odeljku 3.4.2. za roizvoljni ugao propagacije.

6. TALASI U BESKONAČNOM KONTINUUMU

U ovom odeljku ćemo da razmatramo beskonačnu oblast aterijala ojačanog dvema familijama mehanički ekvivalentnih vlakana i talase koji se prostiru u pravcu koji je paralelan ravnima oje sadrže obe familije vlakana. Dakle ako pretpostavimo pomeranja obliku

$$u_m = A_m \exp\{ik(sx_2 + cx_3 - vt)\}, \quad (3.151)$$

de su A_m proizvoljne konstante, tada jednačine kretanja (1.19) u dsustvu zapreminskih sila postaju

$$\begin{aligned} (d - \rho v^2) u_1 &= 0, \\ (g_2 - \rho v^2) u_2 + s c b_1 u_3 &= 0, \\ s c b_1 u_2 + (g_3 - \rho v^2) u_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.152)$$

de su konstante d , b_1 , g_2 i g_3 definisane sa (3.7). Sistem jedna-
 ina (3.152) ima netrivialna rešenja po u_m ako je determinanta istema jednaka nuli, to jest ako je

$$(d - \rho v^2) [(g_2 - \rho v^2)(g_3 - \rho v^2) - s^2 c^2 b_1^2] = 0. \quad (3.153)$$

Ova jednačina daje tri rešenja za kvadrat fazne brzine i sledećem obliku

$$\begin{aligned} \rho v_1^2 &= d, \\ \rho v_2^2 &= \frac{1}{2} (g_2 + g_3) - \sqrt{\frac{1}{4} (g_2 + g_3)^2 - g_2 g_3 + s^2 c^2 b_1^2}, \\ \rho v_3^2 &= \frac{1}{2} (g_2 + g_3) + \sqrt{\frac{1}{4} (g_2 + g_3)^2 - g_2 g_3 + s^2 c^2 b_1^2}. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Prema tome, u beskonačnoj oblasti dobijamo čisto transverzalni talas koji se prostire faznom brzinom v_1 pri čemu su pomeranja

$$u_1 \neq 0, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad (3.155)$$

kvazitransverzalne i kvazilongitudinalne talase koji se prostiru faznim brzinama v_2 i v_3 pri čemu su pomeranja

$$u_1 = 0, \quad u_3/u_2 = -(g_2 - \rho v^2)/s c b_1 = -s c b_1 / (g_3 - \rho v^2). \quad (3.156)$$

Pravac vektora pomeranja (3.156) zavisi i od ugla prostiranja i od ugla između dveju familija vlakana. Dakle za dati materijal kvazilongitudinalni talasi se prostiru ili brzinom v_2 ili brzinom v_3 što zavisi od pravca propagacije.

U slučaju jako anizotropnih materijala, sa istim pretpostavkama kao u odeljku 3.3, lako je zaključiti iz (3.154)_{2,3} da su ba izraza ρv_2^2 i ρv_3^2 reda $1/\epsilon^2$ za bilo koji pravac propagacije α kada je ovaj pravac normalan na jednu od familija vlakana, recimo \underline{a} , jer je tada $g_2 g_3 - s^2 c^2 b_1^2 = O(1)$ što ima za posledicu da je $\rho v_2^2 = O(1)$. U tom slučaju je

$$(u_3 + u_2)_2 = -c/s + O(\epsilon^2), \quad (u_3/u_2)_3 = s/c + O(\epsilon^2) \quad (3.157)$$

de se $(*)_\alpha$ odnosi na faznu brzinu v_α . Iz (3.157) je očigledno da kada je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana, recimo \underline{a} , tada je vektor pomeranja koji odgovara brzini v_2 skoro (do $O(\epsilon^2)$) normalan na pravac druge familije vlakana (\underline{b}) dok je vektor pomeranja koji odgovara brzini v_3 skoro (do $O(\epsilon^2)$) pravcu druge familije vlakana \underline{b} .

/ APROKSIMATIVNA REŠENJA FAZNE BRZINE

.1. U V O D

U prethodnim glavama smo videli da neekstenzibilna teorija ne može da reprodukuje faznu brzinu veoma dugih talasa kada $\epsilon \ll 1$ ni veoma kratkih talasa kada je $\epsilon \ll 1$. Da bismo dobili aproksimativna rešenja za ekstenzibilne materijale primenićemo perturbacione metode. Uopšteno govoreći perturbacioni metodi se koriste kada se u datim jednačinama ili podacima problema pojavi mali (ili veliki) parametar. Tada se pretpostavljena rešenja razvijaju u redove po stepenima parametara (ili recipročnim vrednostima) pa se unose u jednačine i podatke datog problema. Ukoliko se razvojem rešenja konvergira, ili se konvergencija očekuje, tada kažemo da imamo perturbacioni metod. Ukoliko je red divergentan ali asimptotski, tako da prvih nekoliko članova daju dobru aproksimaciju kada razmatramo ekstremne vrednosti parametara, tada se gornja tehnika naziva asimptotski metod. Terminologija, međutim, nije jednoznačna u literaturi tako da ono što se naziva perturbacionim redom može ustvari da bude asimptotski i obrnuto. Uopšte, veoma je teško specificirati sve članove perturbacionih ili asimptotskih redova za probleme koji se rešavaju diferencijalnim jednačinama. Dakle, najčešće se određuje samo prvih nekoliko članova reda tako da razlika između konvergentnih ili asimptotskih redova često postaje irelevantna. Dobro je poznato da je često potrebno više od jednog tipa razvoja da bi se potpuno opisalo perturbaciono ili asimptotsko rešenje datog problema. Naprimera, neki razvoj može biti neadekvatan u nekoj oblasti ili nedovoljan da zadovolji sve polazne podatke problema. Ove teškoće su znak da dati razvoj nije uniformno važeći u celoj oblasti za koju smo zainteresovani. To znači da smo suočeni sa singularnim perturbacionim problemom. Kada mali parametar množi najviši izvod u diferencijalnoj jednačini to uvek vodi ka singularnom perturbacionom problemu. Ovo iz razloga što, kada perturbacioni parametar teži nuli, red diferencijalne jednačine postaje niži tako da nismo u stanju da zadovoljimo sve konturne uslove regularnom perturbacionom tehnikom. Najelementarniji od perturbacionih metoda za rešavanje diferencijalne jednačine čiji se najviši izvod množi perturbacionim

parametrom se naziva teorija graničnog sloja.

Granični sloj je uzana oblast u kojoj se rešenje diferencijalne jednačine menja rapidno. Po diferenciji debljina graničnog sloja mora da teži nuli kada mali parametar ϵ teži nuli, to est debljina graničnog sloja je proporcionalna sa ϵ kada $\epsilon \rightarrow 0$. Oblast sporih promena zavisno promenljive, recimo $y(x)$, se zove spoljašnja oblast dok se oblast graničnog sloja zove unutrašnja oblast. Postoje dve standardne aproksimacije koje mogu da se na-rave u teoriji graničnog sloja. U spoljašnjoj oblasti (dalje od graničnog sloja) $y(x)$ se polako menja tako da možemo da zanemarimo ili koji izvod funkcije $y(x)$ koji je pomnožen sa ϵ . Unutar graničnog sloja izvodi od $y(x)$ su veliki ali je granični sloj tako uzan ta-o da možemo da aproksimiramo promenljive koeficijente diferencijalne jednačine konstantama. Dakle jednu diferencijalnu jednačinu ožemo da predstavimo sekvencom mnogo prostijih aproksimativnih jednačina u svakoj od više spoljašnjih i unutrašnjih oblasti. U svakoj oblasti rešenje aproksimativne jednačine će sadržati jednu ili više nepoznatih konstanta integracije. Ove konstante se odre-juju iz konturnih uslova korišćenjem tehnike asimptotskog uskla-đivanja ili navodjenja krivih (eng. matching).

Princip asimptotskog uskladjivanja je veoma prost. Inter-
al na kome je problem konturnih vrednosti definisan se razvija u ekvencu od dva ili više preklapajućih subintervala. Tada se, na vakom subintervalu, koristi perturbaciona teorija da bi se obila asimptotska aproksimacija rešenja diferencijalne jednačine oja važi na tom intervalu. Konačno, uskladjivanje se čini kroz ahteve da asimptotske aproksimacije imaju isti funkcionalni oblik a preklopu svakog para intervala. Dakle krajnji rezultat je aprok-
imativno rešenje problema konturnih vrednosti koje važi u čita-
om intervalu. Asimptotsko uskladjivanje se razlikuje od elementar-
e tehnike za rešavanje problema konturnih vrednosti koja obezbe-
juje kontinualnost aproksimativnog rešenja u odredjenoj tački
(engl. patching). U prvom slučaju se uskladjuju asimptotske aprok-
imacije rešenja diferencijalne jednačine dok se u drugom slučaju
skladjuju tačna rešenja u odredjenoj tački. Štaviše u prvom slu-
aju se uporedjuju funkcije na intervalu dok se u drugom slučaju
poredjuju funkcije i njihovi izvodi u tački. Uopšte dužina inter-
ala uskladjivanja teži beskonačnosti kada ϵ , perturbacioni

parametar, teži nuli.

Osnovne jednačine relevantne za ovu glavu su date u odeljku 4.2. dok su kratki i dugi talasi razmatrani u odeljcima 4.3. i 4.4. respektivno. U graničnoj vrednosti dugih talasa odvojeno se razmatraju antisimetrični od simetričnih modova.

Uskladjena aproksimativna rešenja za antisimetrični mod propagacije se razmatraju u odeljku 4.5. Dokazano je da neekstenzibilna rešenja mogu da se posmatraju kao spoljašnja rešenja dok smo za unutrašnja rešenja uveli novi parametar koji daje odnos zmedju geometrijskog i materijalnog parametra problema. To nam je omogućilo da konstruišemo uskladjeno aproksimativno rešenje koje važi u čitavoj oblasti talasnih dužina.

Aproksimativna rešenja za simetrične modove propagacije su razmatrana u odeljku 4.6. Predložena aproksimativna rešenja imaju singularnosti reda jedan pri prelomnim (engl. cut-off) frekvencijama spoljašnjih rešenja. Jedan od ciljeva budućeg rada je da se dobiju uniformna aproksimativna rešenja istraživanjem ponašanja rešenja u blizini prelomnih frekvencija spoljašnjih rešenja.

2. OSNOVNE JEDNAČINE

Za materijal ojačan dvema familijama ekstenzibilnih vlakana jednačine kretanja su date u (3.2) a konturni uslovi u (3.3). Ako uvedemo bezdimenzionu koordinatu $x=x_1/h$ onda imamo

$$\frac{d}{dx_1} = \frac{1}{h} \frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{dx_1^2} = \frac{1}{h^2} \frac{d^2}{dx^2} \quad (4.1)$$

Ako da jednačine kretanja (3.2) postaju

$$\begin{aligned} c_{11}U'' - k^2h^2(d - \rho v^2)U + khsc_3V' + khcb_2W' &= 0, \\ khsc_3U' + c_{66}V'' - k^2h^2(g_2 - \rho v^2)V - k^2h^2scb_1W &= 0, \\ khcb_2U' - k^2h^2scb_1V + c_{55}W'' - k^2h^2(g_3 - \rho v^2)W &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

gde sada prim označava diferenciranje u odnosu na x . Konturni uslovi (3.3) postaju

$$\begin{aligned} c_{11}U' + khsc_{12}V + khcc_{13}W &= 0, \\ -khcU + W' &= 0, \\ -khsU + V' &= 0 \quad \text{za } x = \end{aligned} \quad (4.3)$$

pa bismo analizirali ponašanje jako anizotropnog materijala i poredili ga sa rezultatima dobijenim u prethodnim glavama korišćićemo izraz (3.73) za opis jake anizotropije malim parametrom $\ll 1$. Kao posledicu toga možemo da pišemo

$$g_2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \bar{g}_2 + \hat{g}_2, \quad g_3 = \frac{1}{\varepsilon^2} \bar{g}_3 + \hat{g}_3, \quad b_1 = \frac{1}{\varepsilon^2} \bar{b}_1 + \hat{b}_1 \quad (4.4)$$

de su veličine sa oznakama iznad slova $O(1)$. Jednačine kretanja (4.2), sa eksplicitnom zavisnošću od malog parametra, mogu biti napisane u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \rho_{11} U'' - k^2 h^2 (d - \rho v^2) U + k h s b_3 V' + k h c b_2 W' &= 0, \\ k h s b_3 U' + c_{66} V'' - k^2 h^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \bar{g}_2 + \hat{g}_2 - \rho v^2 \right) V - k^2 h^2 s c \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \bar{b}_1 + \hat{b}_1 \right) W &= 0, \\ k h c b_2 U' - k^2 h^2 s c \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \bar{b}_1 + \hat{b}_1 \right) V + c_{55} W'' - k^2 h^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \bar{g}_3 + \hat{g}_3 - \rho v^2 \right) W &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pre nego što počnemo sa perturbacionom analizom jednačina kretanja (4.5) zajedno sa konturnim uslovima (4.3) moramo da se držimo na nekim opštim razmatranjima. Da bi ovo izlaganje bilo to jasnije objasniće se neki matematički detalji uskladjenog kompozitnog razvoja kao i terminologija. U teoriji graničnog sloja posmatramo rešenje y diferencijalne jednačine kao funkciju dve nezavisno promenljive, x i perturbacionog parametra ε . Dakle, namo da je $y = y(x, \varepsilon)$. U oblasti graničnog sloja uvodimo novu promenljivu $X = x/\varepsilon$ umesto x . X se zove unutrašnja promenljiva. Unutrašnja promenljiva X je bolja promenljiva nego x za opisivanje y u graničnom sloju zbog toga što se, kada $\varepsilon \rightarrow 0$, y menja rapidno kao funkcija od x ali polako kao funkcija od X . Spoljašnje rešenje diferencijalne jednačine u stvari predstavlja graničnu vrednost egzaktnog rešenja kada perturbacioni parametar $\varepsilon \rightarrow 0$, to jest $y_{sp} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x)$, dok unutrašnje rešenje predstavlja graničnu vrednost egzaktnog rešenja kada promenljivu x zamenimo unutrašnjom promenljivom X i pustimo da $\varepsilon \rightarrow 0$, to jest $y_{un} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(\varepsilon X)$. Analiza području graničnog sloja je izuzetno korisna jer omogućuje da se konstruiše aproksimativno rešenje diferencijalne jednačine čak i kada je nemoguće doći do tačnog rešenja. Ovo zbog toga što su unutrašnja i spoljašnja granična vrednost neke nerešive diferencijalne jednačine često rešive. Jednom kada su funkcije y_{un} i y_{sp} određene

e mogu biti asimptotski uskladjene. Ovo asimptotsko uskladjivanje se odvija u preklopnoj oblasti koja je definisana srednjom aničnom vrednošću $x \rightarrow 0$, $X = x/\epsilon \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0+$, kada se granični sloj ja- ja pri $x \rightarrow 0$, to jest $\lim_{x \rightarrow 0} y_{sp}(x) = \lim_{X \rightarrow \infty} Y_{un}(x) = y_m(x)$. Ova zajed- čka granična vrednost $y_m(x)$ omogućuje konstrukciju uniformnog šenja na sledeći način

$$u_{unif}(x) = Y_{un}(x) + Y_{sp}(x) - y_m(x). \quad (4.6)$$

Tačnost aproksimacije zavisi od reda n do koga su raz- jena spoljašnja i unutrašnja rešenja. Lako je pokazati da važi

$$|y(x) - Y_{unif}(x)| = O(\epsilon^{n+1}) \quad (4.7)$$

e su ϵ mali parametar a n red do koga su rešenja računata. eba zapaziti da i spoljašnji i unutrašnji razvoj imaju singular- prirodu. Spoljašnji razvoj je singularan jer postoji skokovita omena reda diferencijalne jednačine kada je $\epsilon=0$. Nasuprot tome utrašnji razvoj je regularan perturbacioni razvoj za konačno X . ljutim, pošto se asimptotsko uskladjivanje vrši u granicama kada $x \rightarrow 0$, unutrašnji razvoj je takodje singularan.

U ovoj tezi ćemo tražiti aproksimativna rešenja sistema ferencijalnih jednačina (4.5) uz konturne uslove (4.3). Da bismo cili odgovarajuće aproksimativno rešenje moramo da vodimo računa tome da se u jednačinama pojavljuje i geometrijski parametar kh i može da se menja od nule do beskonačnosti tako da u ekstremnim učajevima može da igra ulogu perturbacionog parametra isto kao i terijalni parametar ϵ koji je u slučaju jake anizotropije znatno nji od jedinice. Dakle za srednje talase, kada je $kh=O(1)$, iz .5) lako zaključujemo da zadnje dve jednačine imaju singularni rakter kada je materijalni parametar $\epsilon \ll 1$ jer su tada najviši vodi po V i W pomnoženi sa ϵ^2 . Prema tome za $kh=O(1)$ postoji nični sloj, kada je $\epsilon \ll 1$, u kome rešenja imaju rapidne promene. smo posebno zainteresovani da proučimo fazne brzine fundamenta- ih modova koji odgovaraju savijanju, ekstenziji i smicanju, to st da proučimo promenu fazne brzine koja je funkcija jedino od . Ova analiza neće biti jednostavna zbog toga što kada geomet- jski parametar postane mali tada najviši izvodi u jednačinama

4.5) postaju značajni tako da, kada je $kh=O(\epsilon)$ ili manje, perturbacioni problem postaje regularan. Za veoma kratke talase, kada je $kh \gg 1$, možemo da uzmemo $1/kh$ kao perturbacioni parametar i iz jednačina kretanja (4.2) ili (4.5) i konturnih uslova (4.3) uključujemo da perturbacioni problem ponovo postaje singularan. Singularna priroda je u vezi sa geometrijskim parametrom kh i ostaje singularna sa sve materijale čak i kada je $\epsilon \ll 1$.

3. KRATKI TALASI

U odeljku 4.2. smo videli da u slučaju kratkih talasa, kada je $kh \gg 1$, imamo singularni perturbacioni problem jer mali parametar $1/kh$ množi najviše izvode. Singularna priroda ostaje za sve materijale čak i kada je $\epsilon \ll 1$ tako da u ovom stepenu razmatranja nećemo da variramo materijalne konstante, to jest koristimo jednačine kretanja (4.2) i konturne uslove (4.3) bez ograničenja da materijal mora da bude jako anizotropan. Dakle iz jednačina kretanja (4.2) dobijamo da spoljašnja rešenja nultog reda moraju da zadovolje sledeće jednačine

$$\begin{aligned} (d-\rho v^2)U_0 &= O(1/kh), \\ (g_2-\rho v^2)V_0 + scb_1W_0 &= O(1/kh), \\ scb_1V_0 + (g_3-\rho v^2)W_0 &= O(1/kh). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Prema tome nijedan konturni uslov ne može da bude zadovoljen spoljašnjim rešenjima tako da ostaje da moraju da budu zadovoljni preko unutrašnjih rešenja. Lako je uočiti da spoljašnji razvoj reda nula reprodukuje jednačine (3.152) koje smo imali za prostiranje talasa u beskonačnom kontinuumu i jedini način da dobijemo netrivialna rešenja je da fazna brzina ima jednu od vrednosti (3.154) što su brzine prostiranja talasa u prostoru bez granica. Ova rešenja, medjutim, treba da se uskladjuju sa unutrašnjim rešenjima koja zadovoljavaju konturne uslove pa, prema tome, spoljašnja rešenja moraju da budu trivialna $U_0=V_0=W_0=0$. Istim argumentima dolazimo do zaključka da spoljašnja rešenja bilo kog reda $O(1/kh)$ moraju da budu trivialna.

Za unutrašnji razvoj je neophodno da se promeni razmera

ordinate x u oblasti koja je blizu konture tako da ako uzmemo $x = kh(1-x)$ diferencijalne jednačine (4.2) i konturni uslovi (4.3) a unutrašnja rešenja postaju

$$\begin{aligned} c_{11}\ddot{U}_u - (d-\rho v^2)U_u - sb_3\dot{V}_u - cb_2\dot{W}_u &= 0, \\ sb_3\dot{U}_u + c_{66}\ddot{V}_u - (g_2-\rho v^2)V_u - scb_1W_u &= 0, \\ cb_2\dot{U}_u - scb_1V_u + c_{55}\ddot{W}_u - (g_3-\rho v^2)W_u &= 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} -c_{11}\dot{U}_u + sc_{12}V_u + cc_{13}W_u &= 0, \\ cU_u + \dot{W}_u &= 0, \\ sU_u + \dot{V}_u &= 0, \quad \text{za } y = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

respektivno, gde tačka iznad označava izvod u odnosu na y . Jednačine (4.9) i (4.10) se odnose na gornju konturu $x=1$. Očigledno je da uvođenjem nove promenljive y kada $kh \rightarrow \infty$ reprodukujemo originalne jednačine (4.2) i (4.3) pri čemu su svi članovi zastupljeni. Ovde još imamo i dodatnu restrikciju da unutrašnja rešenja moraju da se usklade sa trivijalnim spoljašnjim rešenjima, to jest U_u, V_u i W_u teže nuli dalje od konture odnosno kada je $y=0(kh)$. Nema tome unutrašnja rešenja reprezentuju Rayleigh-ove površinske talase. Currie (1974) i Chadwick i Smith (1977) su dokazali da kularna jednačina Rayleigh-evih površinskih talasa u anizotropnom materijalu može uvek da se svede na jednu čisto realnu jednačinu. Oni su zaključili da u tom smislu nema razlike između izotropnih i anizotropnih materijala, to jest da Rayleigh-evi talasi mogu da putuju u bilo kom datom pravcu pod uslovom da jedna realna kularna jednačina ima realno rešenje koje odgovara površinskim talasima. Više detalja o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja za obodne površinske talase mogu da se nađu u gornjim radovima neće biti prezentirani ovde.

Pretpostavimo unutrašnja rešenja nultog reda jednačina (4.9) sa konturnim uslovima (4.10), koja opadaju na nulu kada $y \rightarrow \infty$, u obliku

$$U_{uo} = Ae^{-py}, \quad V_{uo} = Be^{-py}, \quad W_{uo} = De^{-py}, \quad (4.11)$$

gde je p pozitivna konstanta. Zamena (4.11) u (4.9) vodi do kubne jednačine po p^2 u obliku (3.9) dajući rešenje p_α^2 ($\alpha=1,2,3$) koja

u u međusobnom odnosu datom sa (3.37). Da bi p_α bile pozitivne realne veličine neophodno je da p_α^2 budu pozitivne veličine. Iz (3.37), uz pretpostavku da su vlakna jača od materijala matrice, je lako zaključiti da je uslov da p_α^2 ($\alpha=1,2,3$) budu pozitivne veličine da veličina a_1 bude pozitivna veličina što ima za posledicu da je $\rho v^2 < d$. Dakle, Rayleigh-eva talasna brzina, kao i za izotropne materijale, mora da bude manja od talasne brzine čistih tranverzalnih talasa beskonačnog prostora. Ako su $0 < p_1^2 < p_2^2 < p_3^2$ rešenja jednačine (3.9) onda ćemo za konstrukciju opštih rešenja da koristimo $p_\alpha = \sqrt{p_\alpha^2}$ ($\alpha=1,2,3$) što daje pomeranja oblika

$$u_o = \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha e^{-p_\alpha y}, \quad v_{uo} = -s \sum_{\alpha=1}^3 \frac{A_\alpha M_\alpha}{N_\alpha p_\alpha} e^{-p_\alpha y},$$

$$w_{io} = -c \sum_{\alpha=1}^3 \frac{A_\alpha M_\alpha}{L_\alpha p_\alpha} e^{-p_\alpha y}, \quad (4.12)$$

ri čemu su M_α , N_α i L_α dati izrazima (3.12). Ako zamenimo (4.12) konturne uslove (4.10) uslov da dobijemo netrivialna rešenja a konstante A_α je oblika

$$\sum_{\alpha=1}^3 (c_{11} a_1 + s^2 c_{66} M_\alpha / N_\alpha + c^2 c_{55} M_\alpha / L_\alpha) Z_\alpha / p_\alpha = 0, \quad (4.13)$$

to, ako je ispunjeno, dovodi do pomeranja oblika

$$u_o = A \sum_{\alpha=1}^3 Z_\alpha e^{-p_\alpha y}, \quad v_{uo} = -sA \sum_{\alpha=1}^3 \frac{M_\alpha Z_\alpha}{N_\alpha p_\alpha} e^{-p_\alpha y},$$

$$w_{uo} = -cA \sum_{\alpha=1}^3 \frac{M_\alpha Z_\alpha}{L_\alpha p_\alpha} e^{-p_\alpha y}, \quad (4.14)$$

le su Z_α dati sa (3.22) a A proizvoljna konstanta. Jednačina (4.13) može da se iskoristi za određivanje Rayleigh-eve talasne brzine i može da se napiše u prostijim oblicima (3.55) ili (3.56). Za jako anizotropni materijal, kada je $\epsilon \ll 1$, dobijamo Rayleigh-evu talasnu brzinu u aproksimativnom obliku (3.97), za proizvoljni pravac propagacije, i u obliku (2.57) za pravac prostiranja normalan na jednu od familija vlakana. Može se lako pokazati da jednačina (4.13) takodje reprezentuje jednačinu za faznu brzinu, kada $kh \rightarrow \infty$, na donjoj konturi $x=-1$ ali detalji neće biti reprezentirani ovde.

Treba zapaziti da su rešenja koja su ovde dobijena kao

utrašnja rešenja reda nula kada $kh \rightarrow \infty$, ustvari ista kao egzaktna rešenja u toj oblasti talasnih dužina ako od početka pretpostavimo, u jednačinama kretanja (4.2) i konturnim uslovima (4.3), meranja u obliku (4.11).

4. DUGI TALASI

U slučaju veoma dugih talasa geometrijski parametar kh staje mali i u graničnom slučaju kada talasna dužina teži beskonačnosti tada kh teži nuli. Dakle možemo da konstruišemo perturbacionu šemu zasnovanu na kh kao malom parametru zadržavajući ϵ malo ali konačnu veličinu. Prema tome ako pretpostavimo da je malo u poredjenju sa ϵ onda možemo da dobijemo aproksimativna rešenja preko kh čak i u slučaju veoma jako anizotropnih materijala.

Ako napišemo formalno rešenje po stepenima kh u obliku

$$u = \sum_{\alpha=0}^{\infty} U_{\alpha}(kh)^{\alpha}, \quad v = \sum_{\alpha=0}^{\infty} V_{\alpha}(kh)^{\alpha}, \quad w = \sum_{\alpha=0}^{\infty} W_{\alpha}(kh)^{\alpha}, \quad \alpha=0,1,2,\dots, \quad (4.15)$$

faznu brzinu u obliku

$$\rho v^2 = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \rho v_{\alpha}^2(kh)^{\alpha}, \quad \alpha=0,1,2,\dots, \quad (4.15)'$$

da, iz jednačina kretanja (4.2) i konturnih uslova (4.3), možemo da zaključimo da je to regularan perturbacioni problem.

Jednačine kretanja sada postaju

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=0}^{\infty} U_{\alpha}''(kh)^{\alpha} \left[d - \rho \sum_{\beta=0}^{\infty} v_{\beta}^2(kh)^{\beta} \right] \sum_{\alpha=0}^{\infty} U_{\alpha}(kh)^{\alpha+2} + \\ & + \sum_{\alpha=0}^{\infty} (sb_3 V_{\alpha}' + cb_2 W_{\alpha}') (kh)^{\alpha+1} = 0, \\ & sb_3 \sum_{\alpha=0}^{\infty} U_{\alpha}'(kh)^{\alpha+1} + c_{56} \sum_{\alpha=0}^{\infty} v_{\alpha}''(kh)^{\alpha} - \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left\{ [g_2 - \rho \sum_{\beta=0}^{\infty} v_{\beta}^2(kh)^{\beta}] V_{\alpha} + \right. \\ & \left. + scb_1 W_{\alpha} \right\} (kh)^{\alpha+2} = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} & sb_2 \sum_{\alpha=0}^{\infty} U_{\alpha}'(kh)^{\alpha+1} + c_{55} \sum_{\alpha=0}^{\infty} W_{\alpha}''(kh)^{\alpha} - \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left\{ scb_1 V_{\alpha} + \right. \\ & \left. + [g_3 - \rho \sum_{\beta=0}^{\infty} v_{\beta}^2(kh)^{\beta}] W_{\alpha} \right\} (kh)^{\alpha+2} = 0, \end{aligned}$$

dok konturni uslovi (4.3) imaju oblike

$$\begin{aligned}
 c_{11} \sum_{\alpha=0}^{\infty} U'_{\alpha} (kh)^{\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} (sc_{12} V_{\alpha} + cc_{13} W_{\alpha}) (kh)^{\alpha+1} &= 0, \\
 -c \sum_{\alpha=0}^{\infty} U_{\alpha} (kh)^{\alpha+1} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} W'_{\alpha} (kh)^{\alpha} &= 0, \\
 -s \sum_{\alpha=0}^{\infty} U_{\alpha} (kh)^{\alpha+1} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} V'_{\alpha} (kh)^{\alpha} &= 0, \quad \text{za } x = \pm 1.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Kada uporedimo članove uz iste stepene po kh dobijamo jednačine kretanja

$$U''_0 = 0, \quad V''_0 = 0, \quad W''_0 = 0, \tag{4.18}$$

za članove uz stepene $(kh)^0$,

$$\begin{aligned}
 c_{11} U''_1 + sb_3 V'_0 + cb_2 W'_0 &= 0, \\
 -sb_3 U'_0 + c_{66} V''_1 &= 0, \\
 -cb_2 U'_0 + c_{55} W''_1 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

za članove uz stepene kh, i

$$\begin{aligned}
 c_{11} U''_{\alpha} - d U_{\alpha-2} + \rho \sum_{\beta=0}^{\alpha-2} v_{\beta}^2 U_{\alpha-\beta-2} + sb_3 V'_{\alpha-1} + cb_2 W'_{\alpha-1} &= 0, \\
 -sb_3 U'_{\alpha-1} + c_{66} V''_{\alpha} - (g_2 V_{\alpha-2} + scb_1 W_{\alpha-2}) + \rho \sum_{\beta=0}^{\alpha-2} v_{\beta}^2 V_{\alpha-\beta-2} &= 0, \\
 -cb_2 U'_{\alpha-1} + c_{55} W''_{\alpha} - (scb_1 V_{\alpha-2} + g_3 W_{\alpha-2}) + \rho \sum_{\beta=0}^{\alpha-2} v_{\beta}^2 W_{\alpha-\beta-2} &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

za članove uz stepene $(kh)^{\alpha}$ i $\alpha \geq 2$, dok su odgovarajući konturni uslovi

$$U'_0 = 0, \quad W'_0 = 0, \quad V'_0 = 0,$$

i

$$\begin{aligned}
 c_{11} U'_{\gamma} + sc_{12} V_{\gamma-1} + cc_{12} W_{\gamma-1} &= 0, \\
 -c U_{\gamma-1} + W'_{\gamma} &= 0, \\
 -s U_{\gamma-1} + V'_{\gamma} &= 0, \quad \text{za } x = \pm 1
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

za $\gamma \geq 1$. Opšta rešenja reda nula koja zadovoljavaju konturne

uslove su

$$U_0 = A_0, V_0 = B_0, W_0 = D_0, \quad (4.22)$$

gde su A_0 , B_0 i D_0 proizvoljne konstante. Rešenja koja predstavljaju članove uz kh posle primene konturnih uslova su oblika

$$U_1 = A_{11} + A_1 x, \quad V_1 = B_{11} + sA_0 x, \quad W_1 = D_{11} + cA_0 x, \quad (4.23)$$

pri čemu mora da bude zadovoljena jednačina

$$c_{11}A_1 + sc_{12}B_0 + cc_{13}D_0 = 0. \quad (4.24)$$

Opšta rešenja jednačina kretanja uz stepen $(kh)^2$ imaju oblike

$$U_2 = \frac{-\rho v_0^2 + s^2 c_{12} + c^2 c_{13}}{c_{11}} \frac{1}{2} A_0 x^2 + A_{21} x + A_{22},$$

$$V_2 = \frac{1}{c_{66}} \{ sb_3 A_1 + (g_2 - \rho v_0^2) B_0 + scb_1 D_0 \} \frac{1}{2} x^2 + B_{21} x + B_{22}, \quad (4.25)$$

$$W_2 = \frac{1}{c_{55}} \{ cb_2 A_1 + scb_1 B_0 + (g_3 - \rho v_0^2) D_0 \} \frac{1}{2} x^2 + D_{21} x + D_{22},$$

koji moraju da zadovolje konturne uslove (4.21) za $\gamma=2$ što dovodi do sledećih uslova

$$c_{11}A_{21} + sc_{12}B_{11} + cc_{13}D_{11} = 0,$$

$$\rho v_0^2 A_0 = 0,$$

$$B_{21} - sA_{11} = 0, \quad (4.26)$$

$$sc_{12}A_1 + (g_2 - \rho v_0^2) B_0 + scb_1 D_0 = 0,$$

$$D_{21} - cA_{11} = 0,$$

$$cc_{13}A_1 + scb_1 B_0 + (g_3 - \rho v_0^2) D_0 = 0.$$

Uslov (4.26)₂ može da bude zadovoljen ako je ili $v_0=0$, uz A_0 proizvoljno, ili $A_0=0$. U prvom slučaju iz (4.24) i (4.26)_{4,6} možemo da zaključimo da je uopšte $A_1=B_0=D_0=0$ jer je u tom sistemu homogenih algebarskih jednačina determinanta sistema, u opštem slučaju, različita od nule. Može da se pokaže da je, iz istih razloga, $A_{21}=B_{11}=D_{11}=0$ što jasno pokazuje da kada je $v_0=0$, imajući u vidu činjenicu da A_{11} može da se sažme u A_0 to jest bez gubljenja opštosti možemo da stavimo $A_{11}=0$, tada dobijamo

$$U_0 = A_0, \quad V_0 = 0, \quad W_0 = 0, \quad (4.27)$$

$$U_1 = 0, \quad V_1 = sA_0 x, \quad W_1 = cA_0 x,$$

što je isto kao što smo dobili iz egzaktnih rešenja (3.54), kada stavimo da je $A(Z_1+Z_2+Z_3) \equiv A_0$, za antisimetrični mod propagacije kod koga je U parna funkcija od x dok su V i W neparne funkcije od x .

Ukoliko je u (4.26)₂ $A_0=0$ onda, da bi postojala netrivialna rešenja za A_1 , B_0 i D_0 u (4.24) i (4.26)_{4,6}, determinanta sistema mora da bude jednaka nuli to jest

$$\begin{vmatrix} c_{11} & sc_{12} & cc_{13} \\ sc_{12} & g_2 - \rho v_0^2 & scb_1 \\ cc_{13} & scb_1 & g_3 - \rho v_0^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.28)$$

što vodi do jednačine

$$\{\rho v_0^2 - (g_2 - s^2 c_{12}^2 / c_{11})\} \{\rho v_0^2 - (g_3 - c^2 c_{13}^2 / c_{11})\} - s^2 c^2 (b_1 - c_{12} c_{13} / c_{11})^2 = 0, \quad (4.29)$$

koja je ista kao jednačina (3.60) koju smo dobili iz egzaktnog rešenja u prvoj aproksimaciji za simetrične modove. Dakle, imamo dva rešenja za ρv_0^2 u obliku (3.63) koja odgovaraju kvazilongitudinalnom i kvazitransverzalnemu modu, za koje je U neparna funkcija od x a V i W su parne funkcije od x . Konstante B_{11} i D_{11} opet mogu da se sažmu sa konstantama B_0 i D_0 respektivno i, pošto A_{11} može da bude proizvoljno, ako stavimo $A_{11} = 0$ da bismo imali U kao neparnu funkciju dobijamo

$$U_0 = 0, \quad V_0 = B_0 = - \frac{s [c_{12} (g_3 - \rho v_0^2) - c^2 c_{13} b_1]}{(g_2 - \rho v_0^2) (g_3 - \rho v_0^2) - s^2 c^2 b_1^2} A_1, \\ W_0 = D_0 = - \frac{c [c_{13} (g_2 - \rho v_0^2) - s^2 c_{12} b_1]}{(g_2 - \rho v_0^2) (g_3 - \rho v_0^2) - s^2 c^2 b_1^2} A_1, \quad (4.30)$$

$$U_1 = A_1 x, \quad V_1 = 0, \quad W_1 = 0,$$

što pokazuje da su pomeranja ista kao ona koja su dobijena iz egzaktnih rešenja (3.64) ako stavimo $A(Z_1+Z_2+Z_3)/kh \equiv A_1$.

Treba zapaziti da jednačine (4.30) predstavljaju dva različita rešenja koja odgovaraju dvema različitim faznim brzinama datim sa (3.63).

Dakle, do sada smo dobili tri različite fazne brzine, koje odgovaraju različitim fundamentalnim modovima, koje su potpuno iste kao one koje smo dobili iz egzaktnih rešenja u slučaju

veoma dugih talasa sa istim izrazima za pomeranja do reda kh . Ove fazne brzine su $O(1)$ (nezavisne od kh) i ustvari predstavljaju konture disperzionih krivih u slučaju kada kh teži nuli. Da bismo dobili promenu faznih brzina pri malom kh moramo da nadujemo članove višeg reda kako fazne brzine tako i pomeranja. Razmatraćemo odvojeno antisimetrični mod od simetričnih modova zbog različitih oblika rešenja.

4.4.1. ANTISIMETRIČNI MOD

Videli smo da su, za $\rho v_0^2 = 0$, pomeranja oblika (4.27) i da uz korišćenje (4.26) možemo da pišemo

$$U_2 = -\frac{1}{2} \frac{s^2 c_{12} + c^2 c_{13}}{c_{11}} A_0 x^2, \quad V_2 = 0, \quad W_2 = 0. \quad (4.31)$$

Koristeći jednačine kretanja (4.20) za $\alpha=3$ i konturne uslove (4.21) za $\gamma=3$ lako je zaključiti da moraju biti zadovoljene sledeće relacije

$$\rho v_1^2 = 0, \quad U_3 = 0 \quad (4.32)$$

$$c_{66} V_3 = s A_0 \left\{ [g_2 + c^2 b_1 - b_3 (s^2 c_{12} + c^2 c_{13}) / c_{11}] x^3 / 3! - [g_2 + c^2 b_1 - c_{12} (c^2 c_{12} + s^2 c_{13}) / c_{11}] x / 2 \right\}, \quad (4.32)$$

$$c_{55} W_3 = c A_0 \left\{ [g_3 + s^2 b_1 - b_2 (s^2 c_{12} + c^2 c_{13}) / c_{11}] x^3 / 3! - [g_3 + s^2 b_1 - c_{13} (s^2 c_{12} + c^2 c_{13}) / c_{11}] x / 2 \right\}.$$

Slično kada rešimo jednačinu kretanja (4.20)₁ za $\alpha=4$ dobijamo opšte rešenja za U_4 koje mora da zadovolji konturni uslov (4.21)₁ za $\gamma=4$ što dovodi do uslova koji ρv_2^2 mora da zadovolji u obliku

$$\rho v_2^2 = \frac{1}{3} \left\{ s^2 (g_2 + c^2 b_1) + c^2 (g_3 + s^2 b_1) - (s^2 c_{12} + c^2 c_{13})^2 / c_{11} \right\}. \quad (4.33)$$

Dakle fazna brzina antisimetričnog moda za malo kh može da se piše u obliku

$$\begin{aligned} \rho v^2 &= \rho v_0^2 + \rho v_1^2 kh + \rho v_2^2 (kh)^2 + O[(kh)^3] = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ s^2 (g_2 + c^2 b_1) + c^2 (g_3 + s^2 b_1) - (s^2 c_{12} + c^2 c_{13})^2 / c_{11} \right\} (kh)^2 + O[(kh)^3], \end{aligned} \quad (4.34)$$

odakle je lako zaključiti da je u slučaju jako anizotropnog

materijala, kod koga su g_2 , g_3 i b_1 veličine $O(1/\epsilon^2)$, fazna brzina $O[(kh/\epsilon)^2]$.

4.4.2. SIMETRIČNI MODOVI

Kod simetričnih modova pomeranje U je neparna funkcija od x dok su V i W parne funkcije od x a fazne brzine nultog reda imaju rešenja koja se dobijaju iz jednačine (4.29) i data su sa (3.63). Dakle imamo dva fundamentalna moda koji odgovaraju dvema talasnim brzinama pri čemu su pomeranja data sa (4.30) a iz (4.25), korišćenjem (4.26), dolazimo do izraza

$$U_2 = 0, \quad V_2 = \frac{1}{2} sA_1 x^2 + B_{22}, \quad W_2 = \frac{1}{2} cA_1 x^2 + D_{22}. \quad (4.35)$$

Koristeći jednačine kretanja (4.20) za $\alpha=3$ i konturne uslove (4.21) za $\gamma=3$ dobijamo

$$\rho v_1^2 = 0, \quad U_3 = -\frac{1}{3!} \frac{\rho v_0^2 + s^2 c_{12}^2 + c^2 c_{13}^2}{c_{11}} A_1 x^3 + A_{31} x, \quad V_3 = 0, \quad W_3 = 0, \quad (4.36)$$

uz dodatno ograničenje za konstante u obliku

$$c_{11} A_{31} + s c_{12} B_{22} + c c_{13} D_{22} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 A_1. \quad (4.37)$$

Iz jednačina kretanja (4.20) za $\alpha=4$ lako je dobiti

$$U_4 = A_4 x, \\ c_{66} V_4 = s A_1 \frac{x^4}{4!} \{g_2 - \rho v_0^2 + c^2 b_1 - b_3 (\rho v_0^2 + s^2 c_{12} + c^2 c_{13}) / c_{11}\} + \\ + \frac{x^2}{2} \{s b_3 A_{31} + (g_2 - \rho v_0^2) B_{22} + s c b_1 D_{22} - \rho v_0^2 B_0\} + B_4, \quad (4.38)$$

$$c_{55} W_4 = c A_1 \frac{x^4}{4!} \{s^2 b_1 + g_3 - \rho v_0^2 - b_2 (\rho v_0^2 + s^2 c_{12} + c^2 c_{13}) / c_{11}\} + \\ + \frac{x^2}{2} \{c b_2 A_{31} + s c b_1 B_{22} + (g_3 - \rho v_0^2) D_{22} - \rho v_0^2 D_0\} + D_4,$$

dok primenom konturnih uslova (4.21) za $\gamma=4$ dolazimo do jednačina

$$A_4 = 0, \\ s c_{12} A_{31} + (g_2 - \rho v_0^2) B_{22} + s c b_1 D_{22} = -\frac{s A_1}{3!} \{g_2 - \rho v_0^2 + c^2 b_1 - \\ c_{12} (\rho v_0^2 + s^2 c_{12} + c^2 c_{13}) / c_{11}\} + \rho v_0^2 B_0, \quad (4.39)$$

$$c_{13}A_{31} + scb_1B_{22} + (g_3 - \rho v_0^2)D_{22} = -\frac{cA_1}{3!} \{s^2b_1 + g_3 - \rho v_0^2 - \\ - c_{13}(\rho v_0^2 + s^2c_{12} + c^2c_{13})/c_{11}\} + \rho v_0^2 D_0,$$

ri čemu konstante B_0 i D_0 mogu da se izraze kao funkcije od A_1 ao što je dato u izrazima (4.30)_{2,3}. Jednačine (4.37) i (4.39)_{2,3} u tri nehomogene jednačine po nepoznatim konstantama A_{31} , B_{22} D_{22} . Determinanta ovog sistema je simetrična i ima oblik (4.28) a je, prema tome, jedanka nuli za oba moda. Dobro je poznato iz inearne algebre da takav sistem nehomogenih jednačina ima rešenja nda i samo onda ako vektor čije su komponente nehomogeni koefici- enti i bilo koji vektor koji reprezentuje netrivialna rešenja omogenog sistema zadovoljavaju uslov ortogonalnosti to jest ako e njihov skalarni proizvod jednak nuli. Ovaj uslov u ovom našem roblemu posle malo izračunavanja dovodi do jednačine

$$v^2 = -\frac{1}{3}\rho v_0^2 \frac{\{(g_2 - \rho v_0^2)(g_3 - \rho v_0^2) - s^2c^2b_1^2\}^2}{s^2\{c_{12}(g_3 - \rho v_0^2) - c^2c_{13}b_1\}^2 + c^2\{c_{13}(g_2 - \rho v_0^2) - s^2c_{12}b_1\}^2} \quad (4.40)$$

oja opet predstavlja dva rešenja koja odgovaraju dvema brzinama v_0^2 datim u (3.63) od kojih je jedna za kvazilongitudinalni mod druga za kvazitransverzalni mod. Dakle fazne brzine za dva imetrična moda, za malo kh , mogu da se pišu u obliku

$$v^2 = \rho v_0^2 + \rho v_0^2 kh + \rho v_0^2 (kh)^2 + O[(kh)^3] \quad (4.41) \\ = \rho v_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{3}(kh)^2 \frac{[g_2 - \rho v_0^2](g_3 - \rho v_0^2) - s^2c^2b_1^2}{s^2[c_{12}(g_3 - \rho v_0^2) - c^2c_{13}b_1]^2 + c^2[c_{13}(g_2 - \rho v_0^2) - s^2c_{12}b_1]^2} \right\} + O[(kh)^3],$$

ri čemu treba uzeti odgovarajuće ρv_0^2 iz (3.63). Iz (4.41) je čigledno da se fazne brzine za oba simetrična moda, kada je kh ali parametar, ponašaju do $O[(kh)^2]$ kao ρv_0^2 . Za jako anizotropne aterijale sa istim pretpostavkama kao u odeljku 3.2 lako je za- ljučiti da, uz korišćenje izraza (4.4), (3.71) i (3.73), veličine a crtom iznad slova iz (4.4) mogu da se izraze na sledeći način

$$g_2 = 4d \sin^2 \phi (s^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi), \quad g_3 = 4d \cos^2 \phi (s^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi), \\ c_{11} = 8d \sin^2 \phi \cos^2 \phi. \quad (4.42)$$

rema tome $\rho v_0^2 = O(1/\epsilon^2)$ za oba moda sa izuzetkom kada je pravac rostiranja normalan na jednu od familija vlakana kada niža fazna

brzina postaje veličina $O(1)$. Uporedjivanje dominantnih delova faznih brzina (3.63) sa dominantnim delovima odgovarajućih faznih brzina talasa u beskonačnom prostoru (3.154)_{2,3} pokazuje da su oni isti što dovodi do zaključka da se u ravni jako izotropne ploče dugi talasi prostiru brzinama veoma blizu (do $O(\epsilon^2)$) brzina zapreminskih talasa. Analiza pravaca vektora pomeranja pokazuje da se dominantni delovi pomeranja ponašaju kao dominantni delovi pomeranja dobijeni u odeljku 3.6 za talase u beskonačnom kontinuumu.

4.5. USKLADJENA (MATCHED) APROKSIMATIVNA REŠENJA - ANTISIMETRIČNI MOD PROPAGACIJE

U odeljku 4.2. smo videli da za srednje talase, kada je $kh = O(1)$, jednačine kretanja (4.5) postaju singularne, ako razmatramo jako anizotropne materijale, jer se najviše izvodi pomeranja V i W množe sa kvadratom malog parametra ϵ . Dakle, za $kh=O(1)$, kada je $\epsilon \ll 1$, postoji granični sloj u kome rešenja imaju rapidne promene. Posledica toga je da moramo da razvijemo perturbacionu šemu zasnovanu na unutrašnjem i spoljašnjem razvoju a zatim da izvršimo uskladjivanje rešenja u preklopnoj oblasti. Posebno smo zainteresovani da istražimo disperzionu relaciju fundamentalnog moda to jest da nađemo faznu brzinu kao funkciju od kh koja će važiti u čitavoj oblasti promena kh . Jednačine kretanja (4.5) mogu da se iskoriste za konstrukciju spoljašnjih rešenja za pomeranja pri čemu je očigledno da nismo u mogućnosti da zadovoljimo sve konturne uslove jer se smanjuju redovi diferencijalnih jednačina (4.5)_{2,3}. Da bismo zadovoljili sve konturne uslove moramo da konstruišemo i unutrašnja rešenja za pomeranja. Dakle moraćemo da uvedemo unutrašnju promenljivu u oblasti graničnog sloja. U tom slučaju, međjutim, ograničeni smo na oblast $kh=O(1)$ jer ukoliko kh postane uporedivo sa ϵ diferencijalne jednačine (4.5) opet postaju regularne. Da bismo prevazišli ovu teškoću uvešćemo novi parametar m koji predstavlja odnos geometrijskog parametra kh i materijalnog parametra ϵ . Dakle ako u oblasti graničnog sloja pretpostavimo

$$kh = m\epsilon, \quad (4.43)$$

tada će perturbaciona rešenja jednačina kretanja (4.5) i konturnih

uslova (4.3) zasnovana na parametru ϵ sadržati i m kao parametar i reprezentovaće unutrašnja rešenja problema. U narednoj analizi ćemo da dokažemo opravdanost ovakvog prilaza. Ako pomeranja predstavimo kao

$$V = kh\bar{V} = m\epsilon\bar{V}, \quad W = kh\bar{W} = m\epsilon\bar{W} \quad (4.44)$$

onda jednačine kretanja (4.5) postaju

$$\begin{aligned} c_{11}u'' &= m^2\epsilon^2 \{ (d-\rho v^2)U - sb_3\bar{V}' - cb_2\bar{W}' \}, \\ c_{66}\bar{V}'' - m^2\bar{g}_2\bar{V} - m^2sc\bar{b}_1W &= sb_3U' + m^2\epsilon^2 \{ (\hat{g}_2 - \rho v^2)\bar{V} + sc\hat{b}_1\bar{W} \}, \\ c_{55}W'' - m^2sc\bar{b}_1\bar{V} - m^2\bar{g}_3\bar{W} &= cb_2U' + m^2\epsilon^2 \{ sc\hat{b}_1\bar{V} + (\hat{g}_3 - \rho v^2)\bar{W} \}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

dok iz konturnih uslova (4.3) dobijamo

$$\begin{aligned} c_{11}U' + m^2\epsilon^2 (sc_{12}\bar{V} + cc_{13}\bar{W}) &= 0, \\ -cU + \bar{W}' &= 0, \\ -sU + \bar{V}' &= 0, \quad \text{za } x = \pm 1. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ukoliko unutrašnja rešenja pretpostavimo formalno u obliku redova po stepenima ϵ na sledeći način

$$U_u = \sum_{\beta=0}^{\infty} U_{2\beta} \epsilon^{2\beta}, \quad \bar{V}_u = \sum_{\beta=0}^{\infty} V_{2\beta} \epsilon^{2\beta}, \quad \bar{W}_u = \sum_{\beta=0}^{\infty} W_{2\beta} \epsilon^{2\beta}, \quad \rho v^2_u = \sum_{\beta=0}^{\infty} \rho v^2_{2\beta} \epsilon^{2\beta}, \quad (4.47)$$

tada u jednačinama (4.45) i (4.46) možemo da poredimo članove istih stepena od ϵ^2 što će dati, za članove uz stepene $\epsilon^{2\alpha}$, jednačine kretanja

$$\begin{aligned} c_{11}u''_{2\alpha} &= m^2 \{ dU_{2\alpha-2} - sb_1V'_{2\alpha-2} - cb_2W'_{2\alpha-2} - \rho \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} v^2_{2\beta} U_{2\alpha-2\beta-2} \}, \\ c_{66}V''_{2\alpha} - m^2\bar{g}_2V_{2\alpha} - m^2sc\bar{b}_1W_{2\alpha} &= sb_3U'_{2\alpha} + m^2 \{ \hat{g}_2V_{2\alpha-2} + sc\hat{b}_1W_{2\alpha-2} - \rho \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} v^2_{2\beta} V_{2\alpha-2\beta-2} \}, \\ c_{55}W''_{2\alpha} - m^2sc\bar{b}_1V_{2\alpha} - m^2\bar{g}_3W_{2\alpha} &= cb_2U'_{2\alpha} + m^2 \{ sc\hat{b}_1V_{2\alpha-2} + \hat{g}_3W_{2\alpha-2} - \rho \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} v^2_{2\beta} W_{2\alpha-2\beta-2} \}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

i konturne uslove

$$\begin{aligned} c_{11}U'_{2\alpha} + m^2 (sc_{12}V_{2\alpha-2} + cc_{13}W_{2\alpha-2}) &= 0, \\ -cU_{2\alpha} + W'_{2\alpha} &= 0, \\ -sU_{2\alpha} + V'_{2\alpha} &= 0, \quad \text{za } x = \pm 1. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Za antisimetrične modove deformacije U mora da bude parna funkcija od x dok V i W moraju da budu neparne funkcije od x . Dakle, za $\alpha=0$ iz (4.48)₁ i (4.49)₁ je lako zaključiti da je $U_0=A_0$ gde je A_0 proizvoljna konstanta. Iz jednačina (4.48)_{2,3} i (4.49)_{2,3} slede dva skupa rešenja za V_0 i W_0 u zavisnosti od pravca propagacije. Naime za proizvoljan pravac propagacije, sem kada je relacija

$$\bar{g}_2\bar{g}_3-s^2c^2\bar{b}_1^2 = 16d^2\sin^2\phi\cos^2\phi(s^2\sin^2\phi-c^2\cos^2\phi)^2 = 0, \quad (4.50)$$

zadovoljena, dobijamo

$$V_0 = \frac{sA_0}{\bar{p}_3^2-\bar{p}_2^2} \left\{ \left(\bar{p}_3^2 - \frac{\bar{g}_2+c^2\bar{b}_1}{c_{66}} \right) \frac{\sinh\bar{m}\bar{p}_2x}{\bar{m}\bar{p}_2\cosh\bar{m}\bar{p}_2} - \left(\bar{p}_2^2 - \frac{\bar{g}_2+c^2\bar{b}_1}{c_{66}} \right) \frac{\sinh\bar{m}\bar{p}_3x}{\bar{m}\bar{p}_3\cosh\bar{m}\bar{p}_3} \right\}, \quad (4.51)$$

$$W_0 = \frac{sA_0}{\bar{p}_3^2-\bar{p}_2^2} \left\{ \frac{c_{55}\bar{p}_2^2-\bar{g}_2}{sc\bar{b}_1} \left(\bar{p}_3^2 - \frac{\bar{g}_2+c^2\bar{b}_1}{c_{66}} \right) \frac{\sinh\bar{m}\bar{p}_2x}{\bar{m}\bar{p}_2\cosh\bar{m}\bar{p}_2} - \frac{c_{55}\bar{p}_3^2-\bar{g}_2}{sc\bar{b}_1} \left(\bar{p}_2^2 - \frac{\bar{g}_2+c^2\bar{b}_1}{c_{66}} \right) \frac{\sinh\bar{m}\bar{p}_3x}{\bar{m}\bar{p}_3\cosh\bar{m}\bar{p}_3} \right\},$$

gde su \bar{p}_2^2 i \bar{p}_3^2 rešenja jednačine

$$c_{55}c_{66}\bar{p}^4 - (c_{55}\bar{g}_2+c_{66}\bar{g}_3)\bar{p}^2 + \bar{g}_2\bar{g}_3 - s^2c^2\bar{b}_1^2 = 0. \quad (4.52)$$

Jednačina (4.50) je zadovoljena kada je $\phi=0$ ili $\phi=\pi/2$ ili $s^2\sin^2\phi - c^2\cos^2\phi=0$. U prva dva slučaja imamo da se obe familije vlakana medjusobno poklapaju tako da se materijal ponaša kao materijal ojačan jednom familijom vlakana što je bilo proučavano od strane Green-a (1982, 1984) i Green-a i Milosavljevića (1984). Zadnja mogućnost znači da je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana tako da iz (4.52) dobijamo

$$\bar{p}_2^2 = 0, \quad \bar{p}_3^2 = \bar{g}_2/c_{66} + \bar{g}_3/c_{55}, \quad (4.53)$$

pa pomeranja V_0 i W_0 mogu da se napišu u oblicima

$$V_0 = \frac{sA_0}{\bar{p}_3^2} \left\{ (\bar{g}_3/c_{55} - c^2\bar{b}_1/c_{66})x + \frac{\bar{g}_2+c^2\bar{b}_1}{c_{66}} \frac{\sinh\bar{m}\bar{p}_3x}{\bar{m}\bar{p}_3\cosh\bar{m}\bar{p}_3} \right\}, \quad (4.54)$$

$$W_0 = \frac{sA_0}{\bar{p}_3^2} \left\{ -\frac{\bar{g}_2}{sc\bar{b}_1} (\bar{g}_3/c_{55} - c^2\bar{b}_1/c_{66})x + \frac{\bar{g}_3(\bar{g}_2+c^2\bar{b}_1)}{sc c_{55}\bar{b}_1} \frac{\sinh\bar{m}\bar{p}_3x}{\bar{m}\bar{p}_3\cosh\bar{m}\bar{p}_3} \right\},$$

koji takodje mogu da se dobiju i iz (4.51) nalaženjem granične vrednosti kada $\bar{p}_2 \rightarrow 0$. Kada jednom integralimo jednačinu kretanja (4.48)₁ za $\alpha=1$ dobijamo

$$c_{11}U_2' = m^2 \{ (d - \rho v_0^2) A_0 x - s b_3 V_0 - c b_2 W_0 \}, \quad (4.55)$$

pri čemu je integraciona konstanta izjednačena sa nulom jer U_2 mora biti parna funkcija od x . Ukoliko (4.55), uz korišćenje (4.52) da izrazimo $\bar{p}_2^2 \bar{p}_3^2$ i $\bar{p}_2^2 + \bar{p}_3^2$, primenimo u (4.49)₁ dobićemo

$$\rho v_0^2 = \frac{1}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \{ (d \bar{p}_3^2 - s^2 c_{66} \bar{g}_3 / c_{55} - c^2 c_{55} \bar{g}_2 / c_{66} + 2s^2 c^2 \bar{b}_1) (1 - \frac{\tanh m \bar{p}_3}{m \bar{p}_3}) - (d \bar{p}_2^2 - s^2 c_{66} \bar{g}_3 / c_{55} - c^2 c_{55} \bar{g}_2 / c_{66} + 2s^2 c^2 \bar{b}_1) (1 - \frac{\tanh m \bar{p}_2}{m \bar{p}_2}) \}, \quad (4.56)$$

ako koristimo (4.51) za V_0 i W_0 , kao i

$$\rho v_0^2 = \frac{s^2 \bar{g}_2 + c^2 \bar{g}_3 + 2s^2 c^2 \bar{b}_1}{\bar{p}_3^2} (1 - \frac{\tanh m \bar{p}_3}{m \bar{p}_3}) = \frac{4s^2 c^2 c_{55} c_{66}}{d} (1 - \frac{\tanh m \bar{p}_3}{m \bar{p}_3}), \quad (4.57)$$

ako koristimo (4.54) za V_0 i W_0 . Lako je pokazati da (4.57) takođe može da se dobije kao granična vrednost izraza (4.56) kada $\bar{p}_2 \rightarrow 0$. Dakle, imajući u vidu (4.44) i (4.47), možemo da pišemo unutrašnja rešenja za pomeranja na sledeći način

$$U_u = A_0 + O(\epsilon^2), \quad V_u = m \epsilon \{ V_0 + O(\epsilon^2) \}, \quad W_u = m \epsilon \{ W_0 + O(\epsilon^2) \} \quad (4.58)$$

gde su V_0 i W_0 dati izrazima (4.51), za proizvoljan ugao propagacije, i izrazima (4.54), za pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana, koji mogu da se dobiju, kao što smo videli, iz (4.51) graničnom vrednošću kada $\bar{p}_2 \rightarrow 0$. Unutrašnje rešenje za faznu brzinu može da se dobije u sledećem obliku

$$\rho v_u^2 = \rho v_0^2 + O(\epsilon^2) = \frac{1}{\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2} \{ (d \bar{p}_3^2 - s^2 c_{66} \bar{g}_3 / c_{55} - c^2 c_{55} \bar{g}_2 / c_{66} + 2s^2 c^2 \bar{b}_1) (1 - \frac{\tanh m \bar{p}_3}{m \bar{p}_3}) - (d \bar{p}_2^2 - s^2 c_{66} \bar{g}_3 / c_{55} - c^2 c_{55} \bar{g}_2 / c_{66} + 2s^2 c^2 \bar{b}_1) (1 - \frac{\tanh m \bar{p}_2}{m \bar{p}_2}) \} + O(\epsilon^2), \quad (4.59)$$

za proizvoljan pravac propagacije što za pravac propagacije koji je upravan na jednu od familija vlakana može da se uprosti do sledećeg oblika

$$\rho v_u^2 = \frac{4s^2 c^2 c_{55} c_{66}}{d} (1 - \frac{\tanh m \bar{p}_3}{m \bar{p}_3}) + O(\epsilon^2). \quad (4.60)$$

Izraz (4.59) za unutrašnje rešenje fazne brzine je potpuno isti

kao onaj koji je dobijen iz egzaktnih jednačina i koji je dat izrazom (3.94). Imajući u vidu da je za $kh = O(1)$ odnosno $m \rightarrow \infty$ fazna brzina veoma blizu, do $O(\varepsilon^2)$, vrednosti $\sqrt{d/\rho}$, što ima za posledicu da je $c_{11}a_1 = d - \rho v^2 = O(\varepsilon^2)$ i shodno tome $p_1^2 = O(\varepsilon^2)$ u izrazu (3.83)₁, lako možemo da zaključimo da je gornji izraz adekvatan i za $kh = O(1)$ na isti način kao i u (3.95). Dakle izraz (4.59) važi za vrednosti parametra m od nule do beskonačnosti odnosno za vrednosti kh koje se kreću od nule do $kh = O(1)$.

Već smo videli da granični sloj nastaje pri $kh = O(1)$ i da bismo dobili spoljšanje rešenje iz diferencijalnih jednačina (4.5) i konturnih uslova (4.3) pretpostavićemo pomeranja i faznu brzinu u sledećem obliku

$$U_s = \sum_{\beta=0}^{\infty} U_{2\beta} \varepsilon^{2\beta}, \quad V_s = \sum_{\beta=0}^{\infty} V_{2\beta} \varepsilon^{2\beta}, \quad W_s = \sum_{\beta=0}^{\infty} W_{2\beta} \varepsilon^{2\beta}, \quad \rho v_s^2 = \rho \sum_{\beta=0}^{\infty} v_{2\beta}^2 \varepsilon^{2\beta}. \quad (4.61)$$

Upoređivanje članova istih stepena od ε^2 će dati za članove uz stepene ε^0 , jednačine kretanja kao

$$c_{11} U_0'' - k^2 h^2 (d - \rho v_0^2) U_0 + k h s b_3 V_0' + k h c b_2 W_0' = 0, \quad (4.62)$$

$$\bar{g}_2 V_0 + s c \bar{b}_1 W_0 = 0,$$

$$s c \bar{b}_1 V_0 + \bar{g}_3 W_0 = 0,$$

uz konturne uslove

$$c_{11} U_0' + k h s c_{12} V_0 + k h c c_{13} W_0' = 0, \quad (4.63)$$

$$-k h c U_0 + W_0' = 0,$$

$$-k h c U_0 + V_0' = 0, \quad \text{za } x = \pm 1,$$

za članove uz stepene ε^2 , jednačine kretanja kao

$$c_{11} U_2'' - k^2 h^2 (d - \rho v_0^2) U_2 + k^2 h^2 \rho v_2^2 U_0 + k h s b_3 V_2' + k h c b_2 W_2' = 0,$$

$$k^2 h^2 (\bar{g}_2 V_2 + s c \bar{b}_1 W_2) = -k h s b_3 U_0' + c_{66} V_0'' - k^2 h^2 (\hat{g}_2 - \rho v_0^2) V_0 - k^2 h^2 s \hat{c} b_1 W_0, \quad (4.64)$$

$$k^2 h^2 (s c \bar{b}_1 V_2 + \bar{g}_3 W_2) = -k h c b_2 U_0' - k^2 h^2 s \hat{c} b_1 V_0 + c_{55} W_0'' - k^2 h^2 (\hat{g}_3 - \rho v_0^2) W_0,$$

uz konturne uslove

$$\begin{aligned}
c_{11}U_2' + khsc_{12}V_2 + khcc_{13}W_2 &= 0, \\
-khcU_2 + W_2' &= 0, \\
-khsU_2 + V_2' &= 0, \quad \text{za } x = \pm 1,
\end{aligned} \tag{4.65}$$

i tako dalje. Iz (4.62)_{2,3} je očigledno da V_0 i W_0 imaju netrivialna rešenja onda i samo onda ako je ispunjeno $\bar{g}_2\bar{g}_3 - s^2c^2\bar{b}_1^2 = 0$ odnosno kada je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana. Prema tome za bilo koji pravac propagacije, sem kada je ovaj normalan na jednu od familija vlakana, dobijamo trivijalna rešenja za pomeranja u ravni ploče $V_0 = W_0 = 0$. Iz (4.62)₁ i (4.63)₁ dobijamo

$$\rho v_0^2 = d, \quad U_0 = \bar{A}_0, \tag{4.66}$$

dok konturni uslovi (4.63)_{2,3} ostaju nezadovoljeni. Prema tome ovi konturni uslovi treba da se usklade sa unutrašnjim rešenjima. Istim argumentima iz (4.64)_{2,3} dobijamo $V_2 = W_2 = 0$, a iz (4.64)₁ i (4.65)₁ dobijamo $\rho v_2^2 = 0$ i $U_2 = \bar{A}_2$, imajući u vidu da, za antisimetrični mod, U treba da bude parna funkcija od x . Lako je pokazati da za članove višeg reda imamo $V_{2\beta} = W_{2\beta} = 0$, $\rho v_{2\beta}^2 = 0$ i $U_{2\beta} = \bar{A}_{2\beta}$. Prema tome potpuna spoljašnja rešenja za proizvoljni ugao propagacije mogu da se napišu u sledećem obliku

$$U_1 = \bar{A}_0 + \epsilon^2 \bar{A}_2 + \dots \equiv \bar{A}, \quad V_S = 0, \quad W_S = 0, \quad \rho v_S^2 = d, \tag{4.67}$$

tako da dolazimo do zaključka da su spoljašnja rešenja ista kao ona koja su data izrazima (2.19) i (2.20) u neekstenzibilnoj teoriji. Uskladjivanje unutrašnjih i spoljašnjih rešenja, za $\epsilon \rightarrow 0$, se vrši pri $kh = O(1)$ pa, prema tome, imamo da $m \rightarrow \infty$ na takav način da je $m\epsilon = kh$. Lako je pokazati da za $m \rightarrow \infty$ mora biti $A_0 = \bar{A}$ tako da unutrašnja rešenja (4.58) i (4.56) imaju iste vrednosti kao spoljašnja rešenja (4.67) u preklopnoj oblasti. Dakle prema principu uskladjivanja (4.6) sledi da su uniformna kompozitna rešenja ekvivalentna unutrašnjim rešenjima. Prema tome, rešenja dobijena sa $kh = m\epsilon$ važe u celoj oblasti talasnih dužina u prvoj aproksimaciji i nikad ne prevazilaze grešku $O(\epsilon^2)$.

Ukoliko je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana tada je $\bar{g}_2\bar{g}_3 - s^2c^2\bar{b}_1^2 = 0$ tako da (4.62)_{2,3} imaju netri-

rijalna rešenja za V_0 i W_0 u obliku

$$W_0 = - \frac{\bar{g}_2}{s c b_1} V_0 = - \frac{c}{s} V_0, \quad (4.68)$$

pri čemu, za antisimetrični mod propagacije, V_0 , a samim tim i W_0 , može biti proizvoljna neparna funkcija od x . Očigledno je da konturni uslovi (4.63)_{2,3} ne mogu da se primene na (4.68), jer (4.62)_{2,3} nisu diferencijalne već algebarske jednačine, pa ovi moraju prema tome da budu zadovoljeni uskladjivanjem sa unutrašnjim rešenjima. Korišćenjem (4.68) jednačine (4.62)₁ i (4.63)₁ možemo, respektivno, da napišemo u oblicima

$$c_{11} U_0'' - k^2 h^2 (d - \rho v_0^2) U_0 + \frac{kh}{c} (c^2 b_2 - s^2 b_3) W_0' = 0 \quad (4.69)$$

$$i \quad c_{11} U_0' + \frac{kh}{c} (c^2 c_{13} - s^2 c_{12}) W_0 = 0, \quad \text{za } x = \pm 1. \quad (4.70)$$

Kada je pravac prostiranja normalan na jednu od familija vlakana tada je $\sin^2 \phi = c^2$ i $\cos^2 \phi = s^2$ pa prema (4.42) možemo da pišemo

$$\bar{g}_2 = 8s^2 c^4 d, \quad \bar{g}_3 = 8s^4 c^2 d, \quad \bar{b}_1 = 8s^2 c^2 d, \quad \bar{p}_3 = 8s^2 c^2 d^2 / c_{55} c_{66}, \quad (4.71)$$

tako da jednačine (4.64)_{2,3} sada postaju oblika

$$3s^2 c^3 d k^2 h^2 (cV_2 + sW_2) = -khs b_3 U_0' - \frac{s}{c} \{c_{66} W_0'' - k^2 h^2 (\hat{g}_2 - \rho v_0^2 - c^2 \hat{b}_1) W_0\}, \quad (4.72)$$

$$8s^3 c^2 d k^2 h^2 (cV_2 + sW_2) = -khc b_2 U_0' + \{c_{55} W_0'' - k^2 h^2 (\hat{g}_3 - \rho v_0^2 - s^2 \hat{b}_1) W_0\},$$

i mogu biti saglasne samo ako je zadovoljena sledeća diferencijalna jednačina

$$-khc (c^2 b_2 - s^2 b_3) U_0' + d W_0'' - k^2 h^2 (c^2 \hat{g}_3 + s^2 \hat{g}_2 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1 - \rho v_0^2) W_0 = 0. \quad (4.73)$$

Prema tome U_0 i W_0 mogu da se odrede iz dve diferencijalne jednačine drugog reda (4.69) i (4.73) čija opšta rešenja, za antisimetrični mod propagacije, imaju dve proizvoljne konstante koje treba da zadovolje konturne uslove (4.70) koji ustvari predstavljaju samo jednu jednačinu jer je (4.70) za $x=-1$ isto kao i za $x=1$. Preostali konturni uslovi (4.63)_{2,3}, koji ne mogu da budu zadovoljeni direktno, moraju da se usklade sa unutrašnjim rešenjima u oblasti graničnog sloja gde je $kh=O(1)$. U toj oblasti kada $\epsilon \rightarrow 0$ parametar

$m \rightarrow \infty$ na takav način da je $mc=O(1)$. Iz (4.58)_{2,3} i (4.54) je lako dobiti medjugraničnu vrednost koja je ustvari unutrašnja granična vrednost spoljašnjih rešenja ili spoljašnja granična vrednost unutrašnjih rešenja. Prema tome, pošto smo kompletirali unutrašnja rešenja (4.58), možemo da nadujemo spoljašnje granične vrednosti unutrašnjih rešenja na sledeći način

$$\begin{aligned}
 U_m &= U_u = A_0 \\
 V_m &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty \\ mc \rightarrow kh}} V_u = \frac{skhA_0}{\bar{p}_3^2} \left(\frac{\bar{g}_3}{c_{55}} - \frac{c^2 \bar{b}_1}{c_{66}} \right) x = -skhA_0 \frac{e}{d} x, \\
 W_m &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty \\ mc \rightarrow kh}} W_u = -\frac{khA_0 \bar{g}_2}{c \bar{b}_1 \bar{p}_3^2} \left(\frac{\bar{g}_3}{c_{55}} - c^2 \frac{\bar{b}_1}{c_{66}} \right) x = ckhA_0 \frac{e}{d} x,
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

pri čemu je (4.54) korišćeno u (4.58) i gde je, kao i ranije, $e=c^2 c_{55} - s^2 c_{66}$. Dakle umesto konturnih uslova (4.63)_{2,3}, saglasno principu uskladjivanja, koristićemo uslove uskladjivanja u obliku

$$\begin{aligned}
 -khcU_0 + W'_0 &= -khcU_m + W'_m = -khcA_0(d-e)/d, \\
 -khsU_0 + V'_0 &= -khsU_m + V'_m = -khsA_0(d+e)/d, \text{ za } x = \pm 1
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

gde su U_0 i $V_0 = -sW_0/c$ opšta rešenja spoljašnjih diferencijalnih jednačina (4.69) i (4.73). Iz (4.75), eliminisanjem proizvoljne konstante A_0 , dobijamo dodatne uslove koje moraju da zadovolje spoljašnja rešenja u obliku

$$-khceU_0 + dW'_0 = 0, \quad \text{za } x = \pm 1, \tag{4.76}$$

koji su, za antisimetrični mod, isti za $x=1$ kao i za $x=-1$. Dakle da bismo dobili spoljašnja rešenja V_0 i W_0 možemo da koristimo diferencijalne jednačine (4.69) i (4.73) i konturne uslove (4.70) i (4.76) a to je isto kao jednačine (2.37)₁, (2.40)₁, (2.39)₁ i (2.50), respektivno, koje smo imali u drugoj glavi u neekstenzibilnoj teoriji kada smo pretpostavili egzistenciju singularnih vlakana. Prema tome, ovo vodi do zaključka da pomeranja (2.58), koja su dobijena u neekstenzibilnoj teoriji, mogu da se posmatraju samo kao spoljašnja rešenja ekstenzibilne teorije i nisu uopšte adekvatna za $kh \ll 1$ gde unutrašnja rešenja postaju veoma značajna. To je bio

razlog što smo bili prinudjeni da pretpostavimo egzistenciju singularnih vlakana u neekstenzibilnoj teoriji. Ukoliko pomeranja (2.58), koja su dobijena u neekstenzibilnoj teoriji, označimo sa J_s , V_s i W_s onda uskladjena aproksimativna rešenja, koja važe u šitavoj oblasti talasnih dužina, mogu da se napišu na sledeći način

$$\begin{aligned} J &= U_u + U_s - U_m + O(\epsilon^2), \\ V &= V_u + V_s - V_m + O(\epsilon^2), \\ W &= W_u + W_s - W_m + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (4.77)$$

i slični izrazi mogu da se napišu i za napone koji su funkcija pomeranja i fazne brzine. Lako može da se pokaže da unutrašnja, spoljašnja i uskladjena rešenja mogu da se dobiju iz tačnih rešenja (3.25) traženjem odgovarajućih graničnih vrednosti ali detalji ovde neće biti prikazivani.

Uskladjeno aproksimativno rešenje fazne brzine može da se dobije na osnovu sledeće relacije

$$\rho v^2 = \rho v_u^2 + \rho v_s^2 - \rho v_m^2 + O(\epsilon^2) \quad (4.78)$$

gde je, za pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana, unutrašnja fazna brzina v_u data izrazom (4.60), spoljašnja fazna brzina v_s rešenje disperzione jednačine neekstenzibilnog materijala (2.52) dok je uskladjena fazna brzina v_m unutrašnja granična vrednost spoljašnjeg rešenja koja je, prema (2.54), data izrazom

$$\rho v_m^2 = \lim_{kh \rightarrow 0} \rho v_s^2 = d - e^2/d = 4s^2 c^2 c_{55} c_{66} / d, \quad (4.79)$$

odnosno spoljašnja granična vrednost unutrašnjeg rešenja (4.60) data izrazom

$$v_m = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty \\ m\epsilon \rightarrow kh}} \rho v_u^2 = 4s^2 c^2 c_{55} c_{66} / d. \quad (4.80)$$

Prema tome, saglasno gornjim jednačinama, možemo da pišemo

$$\rho v^2 = \rho v_s^2 - (d - e^2/d) \tanh m\bar{p}_3 / m \cdot \bar{p}_3 + O(\epsilon^2). \quad (4.81)$$

Na isti način, za proizvoljni pravac propagacije, u izrazu (4.78) imamo $\rho v_s^2 = d$, saglasno jednačini (2.19), i $\rho v_m^2 = d$ tako da dobijamo

$$\rho v^2 = \rho v_u^2 + O(\epsilon^2) \quad (4.82)$$

pri čemu je ρv_u^2 dato jednačinom (4.59).

Poredjenja (4.81) i (4.82) sa rešenjima aproksimativne disperzione jednačine (3.91), datih izrazima (3.92) i (3.99), koja je dobijena iz egzaktne disperzione jednačine jasno pokazuje da izrazi (4.81) i (4.82) važe, do reda ϵ^2 , u čitavoj oblasti talasnih dužina to jest za kh koje može da se kreće od nule do beskonačnosti. Ovo opravdava zaključak da i u mnogo komplikovanijim problemima možemo da rešimo jednačine neekstenzibilnog materijala i jednačine odgovarajućeg ekstenzibilnog materijala u aproksimativnom obliku, sa $kh = m\epsilon$, što će da nam da spoljašnja i unutrašnja rešenja, respektivno, tako da procedurom uskladjivanja možemo da dodjemo do aproksimativnih rešenja koja će važiti u čitavoj oblasti talasnih dužina.

4.6. APROKSIMATIVNA REŠENJA - SIMETRIČNI MODOVI PROPAGACIJE

U prethodnom odeljku smo videli da neekstenzibilna rešenja, dobijena u drugoj glavi, mogu da se koriste kao spoljašnja rešenja u teoriji graničnog sloja. Ista procedura kao u odeljku 4.5 može da se primeni za opravdavanje takvog prilaza i za simetrične modove propagacije. Izrazi za faznu brzinu neekstenzibilnog materijala (2.25) pokazuju da ova postaje beskonačna kada kh teži nuli što dovodi do zaključka da fazna brzina ima prelom (engl. cut-off) pri frekvenciji datoj izrazom (2.29) ispod koje talasi neće da se proširu u neekstenzibilnoj ploči. Ovo nam sugerira oprez pri razmatranju simetričnih modova propagacije. Iz jednačina kretanja ekstenzibilnog materijala (4.2)_{2,3} je očigledno da kada ρv^2 postane uporedivo sa g_2 i g_3 onda izrazi $(g_2 - \rho v^2)$ i $(g_3 - \rho v^2)$ postaju mali čak i kada razmatramo jako anizotropne materijale za koje važi relacija (4.4). Ispitivanje dugih talasa, za koje je kh veoma malo, u odeljku 4.4. a posebno u odlejku 4.4.2. je pokazalo da, u toj oblasti talasnih dužina, fazna brzina (4.41), imajući u vidu (4.29), postaje $O(1/\epsilon^2)$ i za ϵ malo ali konačno ima konačnu vrednost. U graničnoj vrednosti neekstenzibilnosti, kada $\epsilon \rightarrow 0$, fazna brzina, međjutim, teži beskonačnosti. Ovo nam sugerira da

ne možemo da koristimo uskladjeni asimptotski razvoj za dobijanje rešenja koja bi važila u čitavoj oblasti talasnih dužina jer bi nedjugranična vrednost fazne brzine v_m bila beskonačna. Dakle moramo da uporedimo rešenja za duge talase, kada je $kh \ll 1$, i srednje talase, kada je $kh = O(1)$, u blizini prelomnih frekvencija i konstruišemo rešenja komponovana od unutrašnjih rešenja, koja važe do prelomne frekvencije, i spoljašnjih rešenja, koja važe od prelomne frekvencije. Unutrašnja rešenja koja važe pri frekvencijama nižim od prelomne frekvencije spoljašnjih rešenja ćemo opet pretpostaviti uz korišćenje relacije (4.43) to jest uz $kh = m\varepsilon$. U odeljku 4.4. smo videli da je, u ovoj oblasti talasnih dužina, fazna brzina čeda $1/\varepsilon^2$. Dakle ako uzmemo da je

$$J = kh\bar{U} = m\varepsilon\bar{U}, \quad \rho v^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \rho \bar{v}^2 + \rho \hat{v}^2 + O(\varepsilon^2), \quad (4.83)$$

tada jednačine kretanja (4.5) postaju

$$\begin{aligned} c_{11}\bar{U}'' + m^2\rho\bar{v}^2\bar{U} + sb_3V' + cb_2W' &= m^2\varepsilon^2(d - \rho\hat{v}^2)\bar{U}, \\ c_{66}V'' - m^2(\bar{g}_2 - \rho\bar{v}^2)V - m^2sc\bar{b}_1W &= m^2\varepsilon^2\{sb_3\bar{U}' + (\hat{g}_2 - \rho\hat{v}^2)V + sc\hat{b}_1W\}, \\ -m^2sc\bar{b}_1V + c_{55}W'' - m^2(\bar{g}_3 - \rho\bar{v}^2)W &= m^2\varepsilon^2\{cb_2\bar{U}' + sc\hat{b}_1V + (\hat{g}_3 - \rho\hat{v}^2)W\}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

dok konturni uslovi (4.3) imaju oblike

$$\begin{aligned} c_{11}\bar{U}' + sc_{12}V + cc_{13}W &= 0, \\ -m^2\varepsilon^2c\bar{U} + W' &= 0, \\ -m^2\varepsilon^2s\bar{U} + V' &= 0, \quad \text{za } x = \pm 1. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Ako formalno napišemo rešenja po stepenima ε u obliku

$$\bar{U}_u = \sum_{\beta=0}^{\infty} U_{2\beta} \varepsilon^{2\beta}, \quad V_u = \sum_{\beta=0}^{\infty} V_{2\beta} \varepsilon^{2\beta}, \quad W_u = \sum_{\beta=0}^{\infty} W_{2\beta} \varepsilon^{2\beta} \quad (4.86)$$

onda u (4.84) i (4.85) možemo da upoređujemo članove uz iste stepene od ε^2 što daje, za članove uz ε^0 , jednačine kretanja

$$\begin{aligned} c_{11}U_0'' + m^2\rho\bar{v}^2U_0 + sb_3V_0' + cb_2W_0' &= 0, \\ c_{66}V_0'' - m^2(\bar{g}_2 - \rho\bar{v}^2)V_0 - m^2sc\bar{b}_1W_0 &= 0, \\ -m^2sc\bar{b}_1V_0 + c_{55}W_0'' - m^2(\bar{g}_3 - \rho\bar{v}^2)W_0 &= 0, \end{aligned} \quad (4.87)$$

i konturne uslove

$$c_{11}U_0' + sc_{12}V_0 + cc_{13}W_0 = 0, \quad W_0' = 0, \quad V_0' = 0, \quad \text{za } x = \pm 1. \quad (4.88)$$

Jednačine kretanja (4.87)_{2,3} daju opšta rešenja oblika

$$V_0 = B_{02} \cosh m \bar{p}_2 x + B_{03} \cosh m \bar{p}_3 x, \quad (4.89)$$

$$W_0 = \frac{c_{66} \bar{p}_2^2 - (\bar{g}_2 - \rho \bar{v}^2)}{s c \bar{b}_1} B_{02} \cosh m \bar{p}_2 x + \frac{c_{66} \bar{p}_3^2 - (\bar{g}_2 - \rho \bar{v}^2)}{s c \bar{b}_1} B_{03} \cosh m \bar{p}_3 x$$

gde su \bar{p}_2^2 i \bar{p}_3^2 rešenja jednačine

$$[c_{66} \bar{p}^2 - (\bar{g}_2 - \rho \bar{v}^2)] [c_{55} \bar{p}^2 - (\bar{g}_3 - \rho \bar{v}^2)] - s^2 c^2 \bar{b}_1^2 = 0. \quad (4.90)$$

Kada primenimo konturne uslove (4.88)_{2,3} dobijamo jednačine

$$m \bar{p}_2 B_{02} \sinh m \bar{p}_2 + m \bar{p}_3 B_{03} \cosh m \bar{p}_3 = 0, \quad (4.91)$$

$$\frac{c_{66} \bar{p}_2^2 - (\bar{g}_2 - \rho \bar{v}^2)}{s c \bar{b}_1} m \bar{p}_2 B_{02} \sinh m \bar{p}_2 + \frac{c_{66} \bar{p}_3^2 - (\bar{g}_2 - \rho \bar{v}^2)}{s c \bar{b}_1} m \bar{p}_3 B_{03} \sinh m \bar{p}_3 = 0,$$

koje imaju netrivialna rešenja za B_{02} i B_{03} ako je zadovoljena jednačina

$$\frac{c_{66} (\bar{p}_3^2 - \bar{p}_2^2)}{s c \bar{b}_1} m^2 \bar{p}_2 \bar{p}_3 \sinh m \bar{p}_2 \sinh m \bar{p}_3 = 0. \quad (4.92)$$

Iz (4.90) je lako pokazati da je $\bar{p}_2^2 \neq \bar{p}_3^2$ pa, prema tome, postoje samo dve mogućnosti za dobijanje netrivialnih rešenja jednačina (4.91) i to $\bar{p}_2^2 = 0$ uz $B_{03} = 0$ ili $\bar{p}_3^2 = 0$ uz $B_{02} = 0$. Dakle postoje dve grane koje odgovaraju simetričnim modovima sa V_0 i W_0 u obliku

$$V_0 = B_{02}, \quad W_{02} = -(\bar{g}_2 - \rho \bar{v}_2^2) B_{02} / s c \bar{b}_1, \quad (4.93)$$

i

$$V_{03} = B_{03}, \quad W_{03} = -(\bar{g}_2 - \rho \bar{v}_3^2) B_{03} / s c \bar{b}_1, \quad (4.94)$$

gde su $\rho \bar{v}_2^2$ i $\rho \bar{v}_3^2$ rešenja jednačine

$$(\bar{g}_2 - \rho \bar{v}^2) (\bar{g}_3 - \rho \bar{v}^2) - s^2 c^2 \bar{b}_1^2 = 0, \quad (4.95)$$

ili eksplicitno

$$\rho \bar{v}_{2,3}^2 = \frac{1}{2} \{ \bar{g}_2 + \bar{g}_3 + \sqrt{(\bar{g}_3 - \bar{g}_2)^2 + 4 s^2 c^2 \bar{b}_1^2} \}. \quad (4.96)$$

Iz jednačina kretanja (4.87)₁ i konturnih uslova (4.88)₁ dobijamo

$$U_{0\alpha} = A_{0\alpha} \frac{\sin m \bar{q}_{1\alpha} x}{m \bar{q}_{1\alpha}},$$

$$V_{0\alpha} = \frac{c_{11} \bar{b}_1}{c_{13} (\bar{g}_2 - \rho \bar{v}_\alpha^2) - s^2 c_{12} \bar{b}_1} s A_{0\alpha} \cos m \bar{q}_{1\alpha}, \quad (4.97)$$

$$W_{0\alpha} = \frac{-c_{11} (\bar{g}_2 - \rho \bar{v}_\alpha^2)}{c_{13} (\bar{g}_2 - \rho \bar{v}_\alpha^2) - s^2 c_{12} \bar{b}_1} \frac{1}{c} A_{0\alpha} \cos m \bar{q}_{1\alpha},$$

gde su $\bar{q}_{1\alpha}^2 = \rho v_\alpha^2 / c_{11}$ a $\alpha=2,3$ odgovara rešenjima fazne brzine (4.96). Rešenja (4.96) su ista kao dominantni delovi izraza (4.29), koji su dobijeni za fazne brzine dugih talasa, ako primenimo (4.4). Analiza članova višeg reda u (4.84) i (4.85) će da proizvede članove višeg reda faznih brzina (4.29) ili tačnije (4.41), ali detalji neće biti dati ovde zbog veoma dugih izraza. Prema tome, ako u izrazu (4.97) umesto nadvučenih veličina upotrebimo realne veličine i fazne brzine date izrazima (4.29) ili (4.41) možemo da pišemo

$$U_{u\alpha} = kh[U_{o\alpha} + O(\epsilon^2)] = kh[A_{o\alpha} \frac{\sin kh q_{1\alpha} x}{kh q_{1\alpha}} + O(\epsilon^2)] , \quad (4.98)$$

$$V_{u\alpha} = \frac{c_{11} b_1}{c_{13} (g_2 - \rho v_\alpha^2) - s^2 c_{12} b_1} s A_{o\alpha} \cos kh q_{1\alpha} + O(\epsilon^2) ,$$

$$W_u = - \frac{c_{11} (g_2 - \rho v_\alpha^2)}{c_{13} (g_2 - \rho v_\alpha^2) - s^2 c_{12} b_1} \frac{1}{c} A_{o\alpha} \cos kh q_{1\alpha} + O(\epsilon^2) ,$$

gde su $q_{1\alpha}^2 = \rho v_\alpha^2 / c_{11}$. Rešenja (4.97) ili (4.98) važe do prelomne frekvencije spoljašnjih (neekstenzibilnih) rešenja kada $kh q_{1\alpha}$ postaje jednako $\pi/2$ odakle sledi da je $V_{i\alpha} = 0$ i $W_{i\alpha} = 0$ i u toj tački unutrašnja rešenja prelaze u spoljašnja rešenja. Ovaj prelaz se dešava pri talasnim dužinama pri kojima imamo preseke disperzionih krivih spoljašnjih i unutrašnjih rešenja to jest u presečnim tačkama krivih (4.29) ili (4.41) sa (2.28). Da bismo uskladili pomeranja (4.98) sa (2.26) moramo da stavimo $A_{o\alpha} / q_{1\alpha} = B_o$ u presečnim tačkama disperzionih krivih koje se javljaju pri talasnim dužinama pri kojima spoljašnja rešenja imaju prelomne frekvencije, rećimo $kh_{c\alpha}$. Dakle aproksimativno rešenje fazne brzine, za simetrične modove propagacije, može da se piše u obliku

$$\rho v_\alpha^2 = \begin{cases} \rho v_{o\alpha}^2 \left\{ 1 - \frac{1}{3} k^2 h^2 \frac{[(g_2 - \rho v_{o\alpha}^2)(g_3 - \rho v_{o\alpha}^2) - s^2 c^2 b_1^2]^2}{s^2 [c_{12} (g_3 - \rho v_{o\alpha}^2) - c^2 c_{13} b_1]^2 + c^2 [c_{13} (g_2 - \rho v_{o\alpha}^2) - s^2 c_{12} b_1]^2} \right\} , & kh < kh_{c\alpha} \\ d + \frac{c_{11} \pi^2}{4k^2 h^2} , & kh > kh_{c\alpha} \end{cases} \quad (4.99)$$

gde su $\rho v_{o\alpha}^2$ rešenja jednačine (4.29). Pomeranja su data izrazima (4.98) za $kh < kh_{c\alpha}$ i izrazima (2.26) za $kh > kh_{c\alpha}$.

Kada je pravac propagacije normalan na jednoj od familija vlakana tada je niža fazna brzina $O(1)$ odakle sledi da je

$\rho \bar{v}_2^2 = 0$ pa iz (4.29) uz korišćenje (4.4) i (4.71) dobijamo

$$\rho \hat{v}_2^2 = s^2 \hat{g}_2 + c^2 \hat{g}_3 - 2s^2 c^2 \hat{b}_1 - (c^2 c_{13} - s^2 c_{12})^2 / c_{11}, \quad (4.100)$$

što je isti izraz kao što je dobijen u neekstenzibilnoj teoriji za $kh \rightarrow 0$ koji je dat jednačinom (2.64). Dakle disperziona relacija (2.53) važi u čitavoj oblasti talasnih dužina za mod koji odgovara manjoj faznoj brzini sa pomeranjima datim sa (2.72) i naponima datim sa (2.73). Vektor pomeranja je normalan na drugu familiju vlakana. Veća fazna brzina ρv_3^2 je i u ovom slučaju $O(1/\varepsilon^2)$ i njen aproksimativni izraz je dat sa (4.99).

. NUMERIČKI REZULTATI

.1. U V O D

Materijal ojačan dvema familijama vlakana može da se zamisli kao materijal napravljen od proizvoljnog broja slojeva ojačanih jednom familijom vlakana, zaokrenutih naizmenično za uglove $+\phi$ i $-\phi$ u odnosu na linije simetrije, koji su perfektno spojeni međusobno. Prema tome ukoliko ugao između dve familije teži nuli elastične osobine materijala bi trebalo da budu iste kao za materijale ojačane jednom familijom vlakana. Elastične konstante za ugljena vlakna - epoksi smola kompozite, koji su modelirani kao kontinuum ojačan jednom familijom vlakana, su merene od strane Markham-a (1970) i prema tim podacima konstante date u (1.36) imaju sledeće vrednosti

$$\begin{aligned} \lambda &= 5,65 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}, \quad \mu_T = 2,46 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}, \quad \mu_L = 5,66 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2} \\ \gamma &= -1,28 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}, \quad \beta = 220,9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Za materijal ojačan dvema familijama vlakana konstitutivna jednačina je data izrazom (1.47). Ako se obe familije vlakana poklapaju, to jest ako je $a_i = b_i$, onda iz jednačine (1.47) dobijamo

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \{ \lambda e_{rr} + (2\gamma_3 + \gamma_4) a_r a_s e_{rs} \} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \{ (2\gamma_3 + \gamma_4) e_{rr} + \\ &+ 2(2\gamma_1 + \gamma_6 + 2\gamma_5 + \gamma_2) a_r a_s e_{rs} \} a_i a_j + 2\gamma_7 a_r (e_{ri} a_j + e_{rj} a_i). \end{aligned} \quad (5.2)$$

U odeljku 3.3. smo videli da za jako anizotropne materijale možemo da usvojimo $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0$ bez gubljenja važnih informacija u graničnom procesu. Dakle poredjenje (5.2) sa (1,36) uz korišćenje (5.1) i gornjih pretpostavi može da nas dovede do elastičnih konstanti, koje mogu da se koriste za materijale u kojima je epoksi smola ojačana dvema familijama ugljenih vlakana, sa sledećim vrednostima

$$\begin{aligned} \lambda &= 5,65 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}, \quad \mu = 2,46 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}, \quad \gamma_4 = -1,28 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}, \\ \gamma_7 &= 3,20 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}, \quad 2\gamma_1 = 110,45 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ove konstante su korišćene u (1.56) za izračunavanje c_{ij} za ekstenzibilne materijale pri čemu je očigledno da konstanta γ_1 može da se smatra velikom u odnosu na ostale. Ako bi vlakna postala jača onda bi i konstanta γ_1 postala veća tako da bi za neekstenzibilni materijal težila beskonačnosti pri čemu bi ostale konstante ostale nepromenjene. Prema tome ove konstante takodje možemo da koristimo za modeliranje idealnog vlaknima ojačanog materijala kod koga su obe familije vlakana neekstenzibilne. Dakle, ako uvrstimo (5.3) u (1.58) dobićemo konstante a_{ij} za materijal sa neekstenzibilnim vlaknima. Korišćenjem vrednosti (5.3) u (1.56) i (1.58) dolazimo do sledećih izraza

$$c_{11} = a_{11} = 10,57,$$

$$c_{12} = a_{12} = 5,65 + 1,28 \cos 2\phi \sin^2 \phi,$$

$$c_{13} = a_{13} = 5,65 - 1,28 \cos 2\phi \cos^2 \phi,$$

$$a_{22} = 10,57 + 4(0,64 \cos 2\phi + 3,2) \sin^2 \phi,$$

$$c_{22} = a_{22} + 220,9 \sin^4 \phi,$$

$$a_{23} = 5,65 - 1,28 \cos^2 2\phi,$$

(5.4)

$$c_{23} = a_{23} + 220,9 \sin^2 \phi \cos^2 \phi,$$

$$a_{33} = 10,57 + 4(-0,64 \cos 2\phi + 3,2) \cos^2 \phi,$$

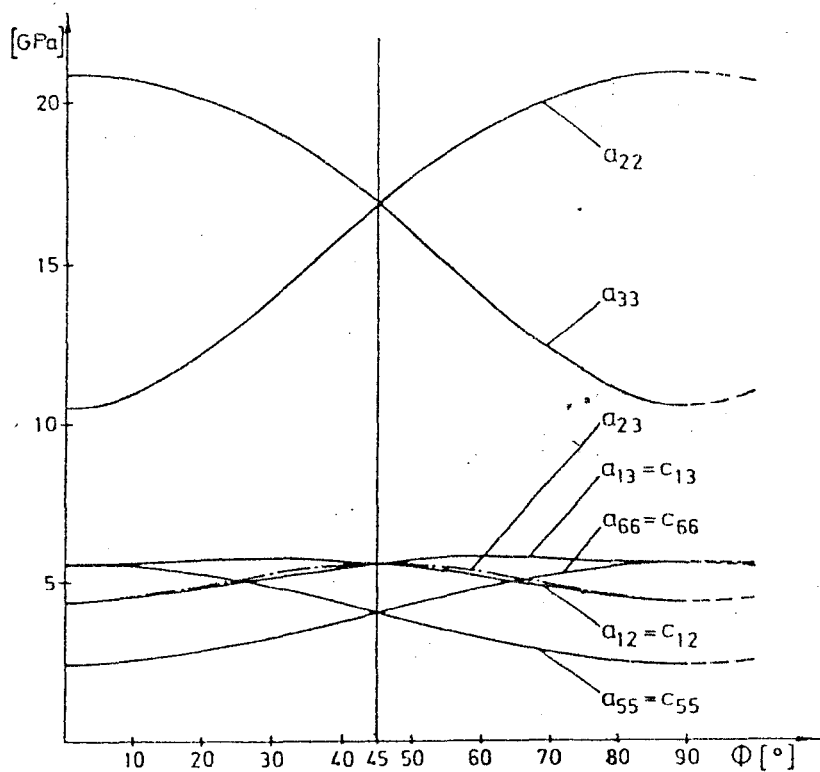
$$c_{33} = a_{33} + 220,9 \cos^4 \phi,$$

$$a_{44} = 5,66, \quad c_{44} = 5,66 + 220,9 \sin^2 \phi \cos^2 \phi,$$

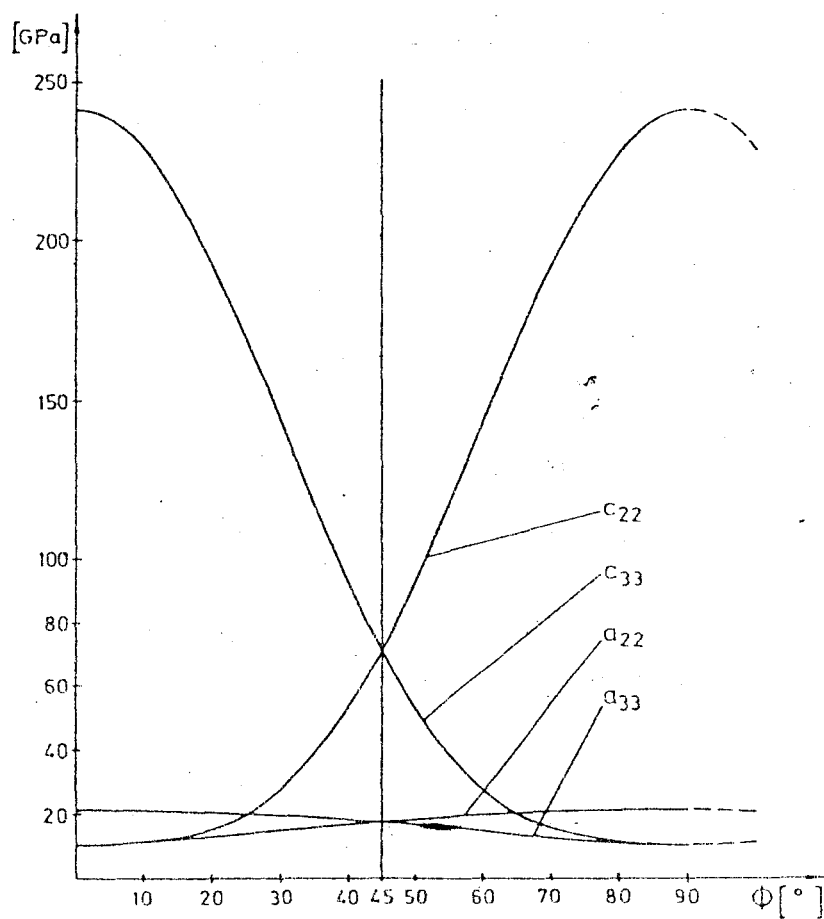
$$c_{55} = a_{55} = 2,46 + 3,2 \cos^2 \phi,$$

$$c_{66} = a_{66} = 2,46 + 3,2 \sin^2 \phi,$$

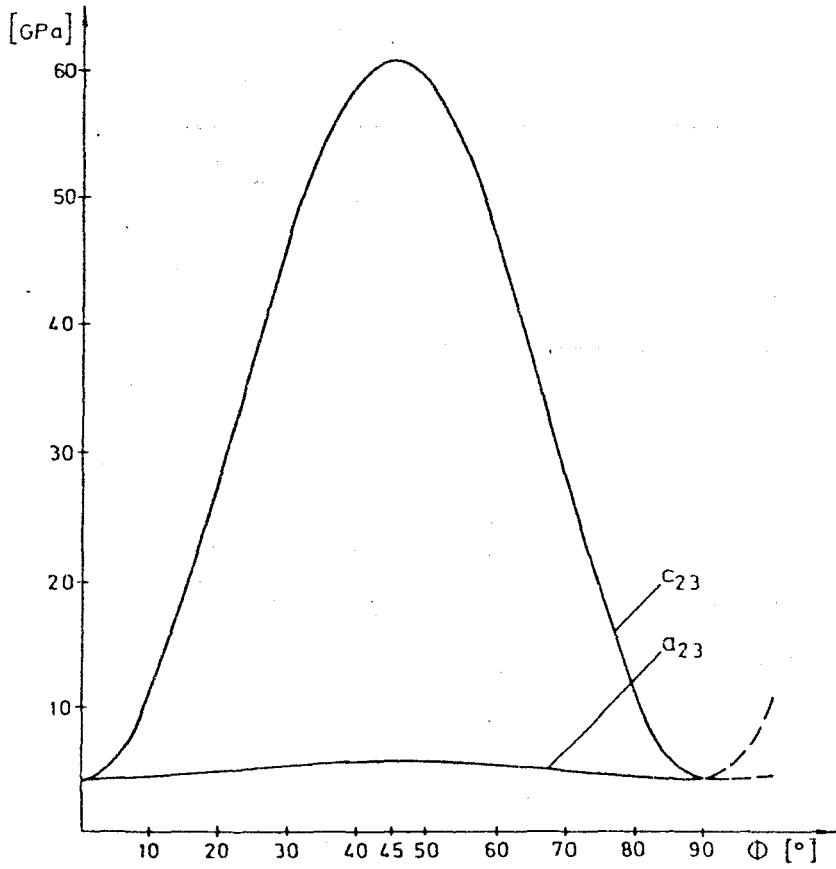
pri čemu su sve konstante date u jedinicama $\text{GPa} \equiv 10^9 \text{ Nm}^{-2}$. Na slici 5.1 je prikazana promena veličina a_{ij} sa promenom poluugla između dveju familija vlakana ϕ u granicama od 0° do 90° .



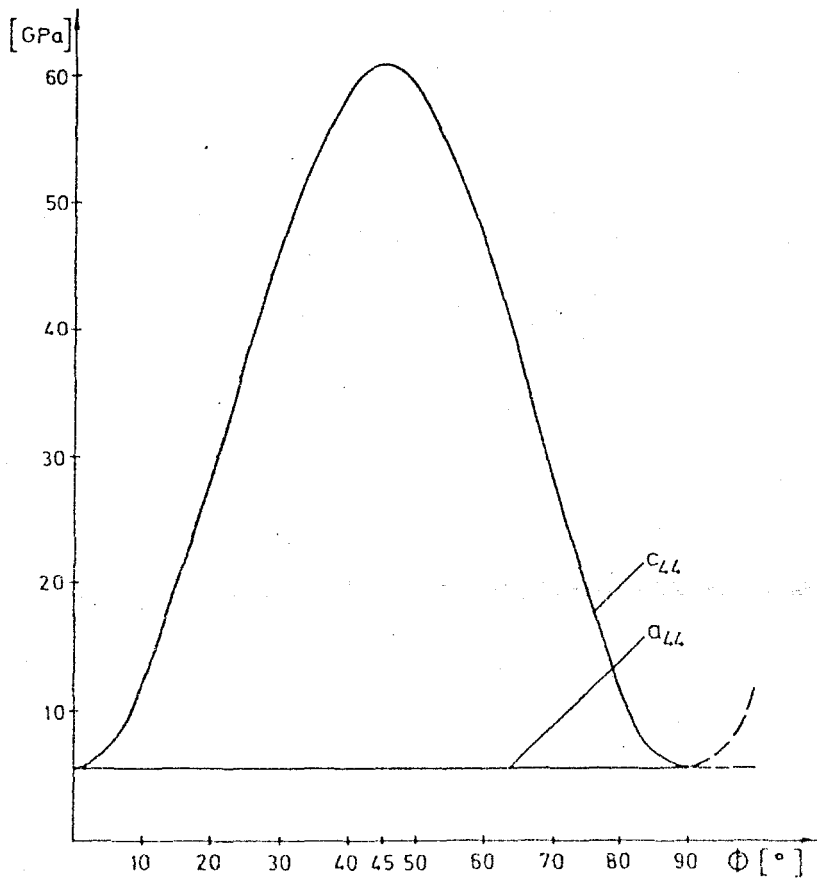
Sl.5.1. Promena konstanta a_{ij} pri promeni ugla izmedju dveju familija vlakana



Sl.5.2. Poredjenje konstanta c_{22} i c_{33} sa a_{22} i a_{33} pri promeni ugla ϕ



Sl.5.3. Poredjenje konstante c_{23} sa a_{23} pri promeni ugla ϕ



Sl.5.4. Poredjenje konstante c_{44} sa a_{44} pri promeni ugla ϕ

Poredjenja konstanta c_{22} i c_{33} sa a_{22} i a_{33} , respektivno, su data na slici 5.2.. Slika 5.3. prikazuje poredjenje konstante c_{33} sa a_{33} pri promeni ugla ϕ , dok slika 5.4. prikazuje poredjenje konstante c_{44} sa a_{44} pri promeni ugla ϕ . Možemo da zapišemo jaku zavisnost elastičnih konstanta c_{22} , c_{23} , c_{33} i c_{44} od dominante konstante γ_1 kao i od ugla između dveju familija vlakana.

Da bismo dobili rešenja iz jednačina kretanja (3.2) i konturnih uslova (3.3) za različite uglove propagacije i različite uglove između vlakana bilo je neophodno rešiti ih numerički. Numerički rezultati su dobijeni na dva različita načina.

Prvi način bio je da za dati ugao između dveju familija vlakana izračunamo elastične konstante iz (5.4) pa onda da za specificirani pravac propagacije i specificiranu faznu brzinu izračunamo vrednosti iz izraza (3.7) i koeficijente kubne jednačine po p^2 date sa (3.9). Potom smo koristili NAG podprogram na Nottingham-skom univerzitetu za nalaženje nula polinomijalnih jednačina što nam je omogućilo da nadujemo vrednosti p_α^2 ($\alpha=1,2,3$). Kada su vrednosti p_α^2 određene lako je računati M_α , N_α i L_α iz izraza (3.12) tako da u disperzionim jednačinama (3.16), za antisimetrični mod, i (3.17), za simetrične modove, ostaje samo kh kao promenljiva. Prema tome da bi se našla vrednost kh za fundamentalne modove bilo je potrebno naći najmanje vrednosti kh koje zadovoljavaju disperzione jednačine. Na taj način smo napravili tabelu parova vrednosti kh i v iz koje smo mogli da nacrtamo disperzione krive fundamentalnih modova. Sada smo u stanju da za svaku vrednost kh računamo raspored pomeranja po debljini ploče, koristeći jednačine (3.25), i raspored napona, koristeći jednačine (3.29). Drugi opštiji način bio je da rešimo sistem diferencijalnih jednačina (3.2) podvrgnut konturnim uslovima (3.3) numeričkom integracijom. Da bismo to učinili opet smo koristili NAG podprogram na Nottingham-skom računskom centru koji je imao mogućnost da vrši numeričku integraciju sistema od n diferencijalnih jednačina prvog reda korišćenjem Runge-Kutta-Merson-ove metode. Prema tome, trebalo je adaptirati sistem diferencijalnih jednačina (3.2) uvodje-

njem novih funkcija R, S i T koje su predstavljale prve izvode funkcija U, V i W , po novoj promenljivoj $\bar{x} = kx_1$, respektivno. Dakle sistem diferencijalnih jednačina (3.2) sada je napisan na sledeći način

$$\begin{aligned} U' &= R, & V' &= S, & W' &= T, \\ R' &= -\{(\rho v^2 - d)U + sb_3 S + cb_2 T\}/c_{11}, \\ S' &= \{sb_3 R - (\rho v^2 - g_2) V + scb_1 W\}/c_{66}, \\ T' &= \{cb_2 R + scb_1 V - (\rho v^2 - g_3) W\}/c_{55}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

pri čemu prim označava izvod po \bar{x} . Problem je u suštini problem sopstvenih vrednosti u smislu da je potrebno da se odredi ona fazna brzina v , koja odgovara zadatoj vrednosti kh , za koju će naponi da iščeznu na konturama. Opet smo ovaj problem rešili poluinverznom metodom. Dakle za određeni ugao između dveju familija vlakana i određeni pravac propagacije specifikovali smo vrednost fazne brzine v i integralili sistem diferencijalnih jednačina (5.5) za tri linearno nezavisna početna uslova. Pri tome smo na svakom koraku integracije testirali napone σ_{11} , σ_{13} i σ_{12} dok nismo našli vrednost $\bar{x}_g = kh$ za koju su konturni uslovi zadovoljeni. Ovo testiranje je sprovedjeno na sledeći način. Pri svakom koraku integracije možemo da pišemo

$$\sigma_{11} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \sigma_{11}^{(\alpha)}, \quad \sigma_{13} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \sigma_{13}^{(\alpha)}, \quad \sigma_{12} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \sigma_{12}^{(\alpha)} \quad (5.6)$$

pri čemu $\alpha=1, 2, 3$ odgovaraju naponima dobijenim iz tri linearno nezavisna startna uslova, koji mogu da se biraju tako da dobijemo simetrične ili antisimetrične modove dok su λ_{α} neodređeni koeficijenti. Za konture slobodne od napona, iz (5.6) je očigledno da za postojanje netrivialnih rešenja za λ_{α} , na konturi $\bar{x}_g = kh$ mora da bude zadovoljena sledeća jednačina

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}^{(1)} & \sigma_{13}^{(1)} & \sigma_{12}^{(1)} \\ \sigma_{11}^{(2)} & \sigma_{13}^{(2)} & \sigma_{12}^{(2)} \\ \sigma_{11}^{(3)} & \sigma_{13}^{(3)} & \sigma_{12}^{(3)} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.7)$$

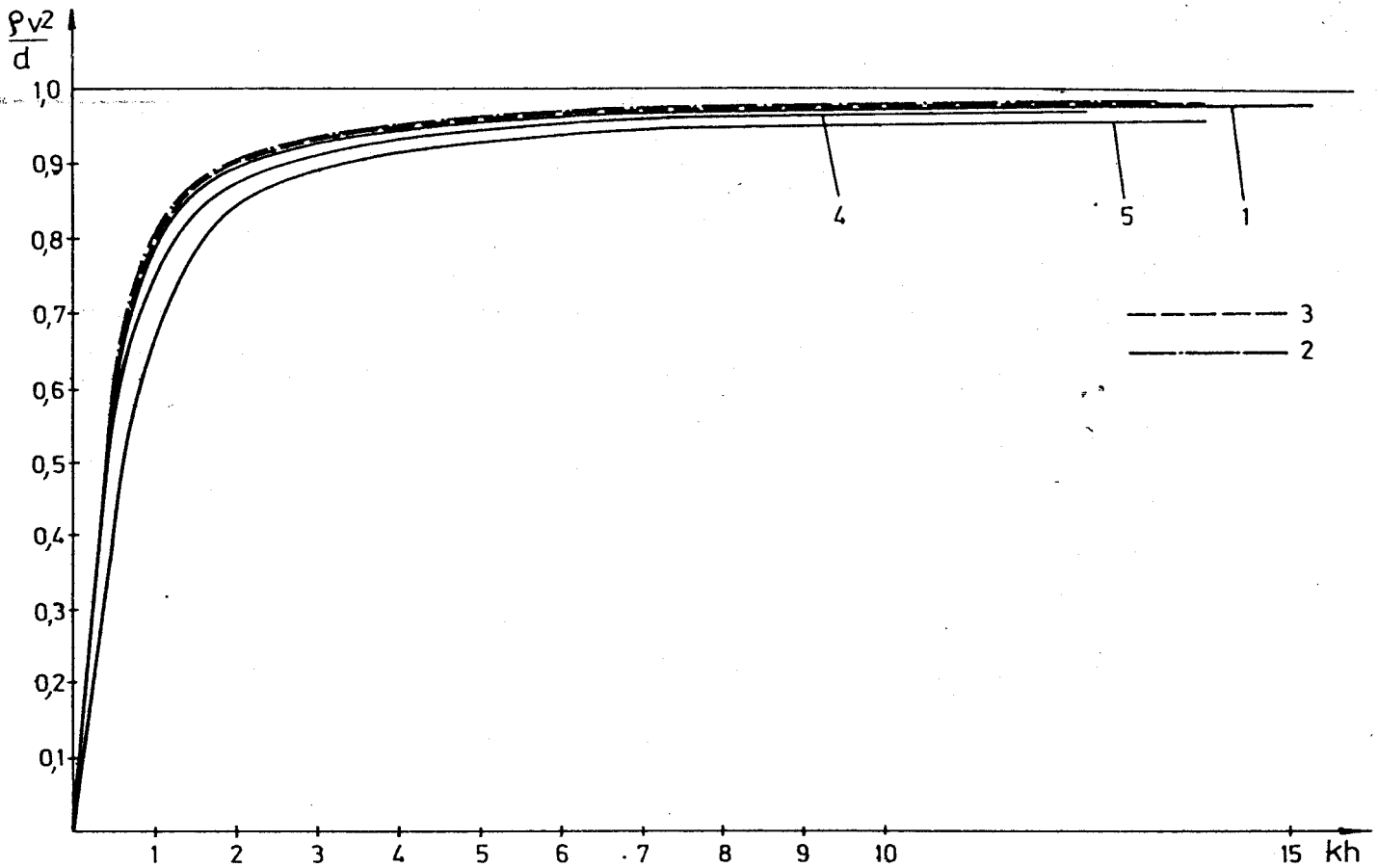
rema tome, kada je jednačina (5.7) zadovoljena dobijamo vrednost h koja odgovara specificiranoj vrednosti fazne brzine v . Na taj način smo u mogućnosti da napravimo tabelu parova vrednosti faznih brzina v i vrednosti kh i da nacrtamo disperzione krive. Za bilo koji par vrednosti v i kh možemo da odredimo vrednosti α do na jednu proizvoljnu konstantu i onda da izračunamo vrednosti pomeranja i napona na svakom koraku integracije to jest romene ovih po debljini ploče.

Ukratko smo dali rezime osnovnih koraka numeričke procedure dok su listinzi programa sistematizovani i lako prilagodjivi i za drugačiju geometriju. Poredjenje rezultata dobijenih prišćenjem ova dva različita programa daje odlično slaganje i rezultati se mogu dobiti sa tačnošću koju mi propišemo.

Nadjen je veliki broj disperzionih krivih kako za simetrične tako i za antisimetrične modove propagacije za različite glove između familija vlakana i različite pravce propagacije. Takođe su dobijena pomeranja i naponi kao funkcije položaja po debljini ploče za veliki broj različitih talasnih dužina. Svi rezultati su prikupljeni za analizu a neki od njih će biti prikazani u sledećim odeljcima i biti upoređivani sa predloženim aproksimativnim rešenjima.

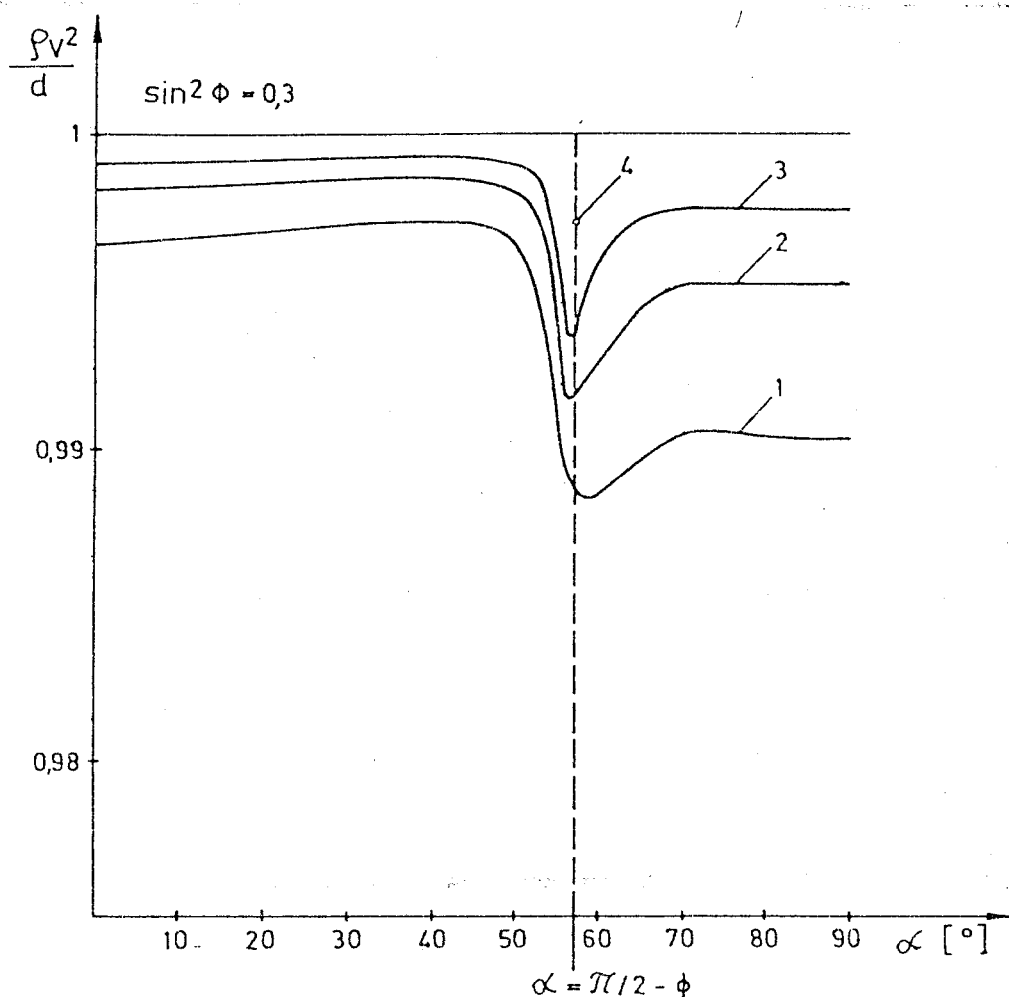
2. ANTISIMETRIČNI MODOVI PROPAGACIJE

Da bismo prikazali rezultate egzaktnih rešenja izabrali smo tipičan ugao između dveju familija vlakana 2ϕ da bude odredjen sa $\sin^2\phi = 0,3$ to jest izabrali smo $\phi = 33^{\circ}12'39''$. Disperzione krive za različite pravce propagacije su prikazane na slici 5.5. Ovde treba zapaziti da je na ordinati dat odnos kvadrata fazne brzine i kvadrata talasne brzine smicanja d/ρ . Pogledno za bilo koji pravac propagacije fazna brzina ima vrednost jednaku nuli kada $kh \rightarrow 0$ i onda veoma brzo raste sa porastom kh dok ne dostigne odredjene vrednosti kada se taj porast znatno



Sl.5.5. Disperzione krive antisimetričnih modova propagacije pri $\sin^2\phi=0,3$ i uglovima propagacije datih kao:
 (1) $\sin^2\alpha=0,1$; (2) $\sin^2\alpha=0,3$; (3) $\sin^2\alpha=0,5$;
 (4) $\sin^2\alpha=0,7$; (5) $\sin^2\alpha=0,9$.

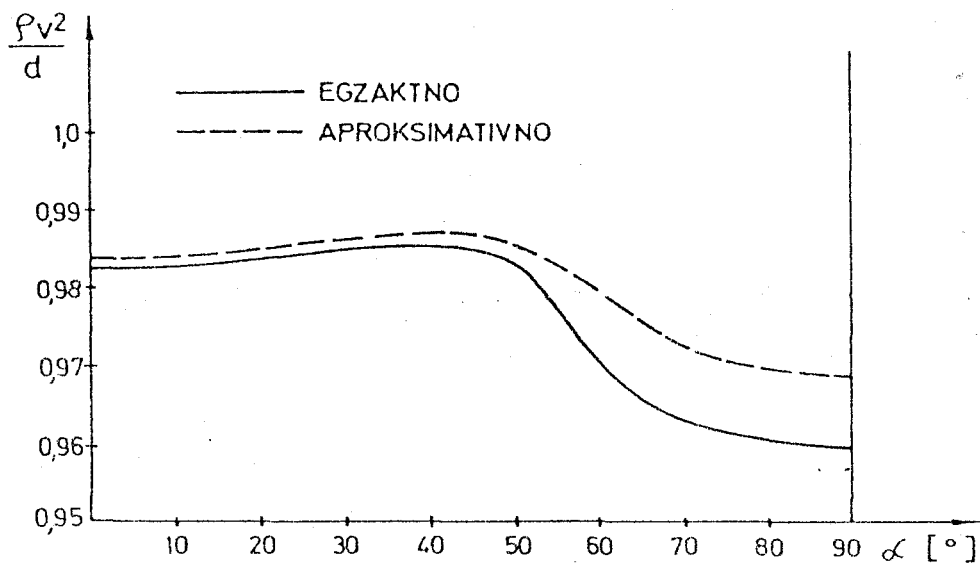
usporava težeći asimptotski graničnoj vrednosti kada $kh \rightarrow \infty$. Već smo videli da je granična vrednost kratkih talasa, kada $kh \rightarrow \infty$, Rayleigh-eva talasna brzina. Rayleigh-eva talasna brzina je data jednačinom (3.55) ili (3.56) a u slučaju jako anizotropnih materijala jednačinama (3.97) ili (3.99) koje jasno pokazuju da je ona veoma blizu talasne brzine smicanja $\sqrt{d/\rho}$, koja je ista kao i brzina propagacije čisto transverzalnih talasa u beskonačnom prostoru data jednačinom (3.154)₁. Dakle do reda ϵ^2 nismo u stanju da razlikujemo ove dve brzine sem u slučaju kada je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana jer su tada dominantne konstante u takvim odnosima da p_2^2 u (3.83) postaje veličina $O(1)$ umesto $O(1/\epsilon^2)$ što, u graničnom slučaju, vodi do zaključka da desna strana aproksimativne disperzione jednačine (3.91) nije veličina $O(\epsilon)$ već $O(1)$. Ovo je razlog zašto neekstenzibilna teorija predviđa Rayleigh-evu talasnu brzinu samo za taj poseban pravac datu jednačinom (2.57). Na slici 5.6. je prikazan odnos kvadrata Rayleigh-eve talasne brzine i brzine talasa smicanja za



Sl.5.6. Rayleigh-eva talasna brzina za različito ϵ^2 : (1) $\epsilon^2=0,0128$; (2) $\epsilon^2=0,0063$; (3) $\epsilon^2=0,0032$; (4) $\epsilon^2 \rightarrow \infty$

različite uglove propagacije α i različite materijale koji su veštački napravljeni od ugljena vlakna - epoksi smola kompozita sa pretpostavkom da vlakna postaju sve jača i jača. Treba napomenuti da se mali materijalni parametar blago razlikuje pri različitim pravcima propagacije čak i za isti materijal. Ovo je tako zbog načina definisanja malog parametra (3.73) jer veličina d se menja sa uglom propagacije. Na slici 5.6. Rayleigh-eva talasna brzina je računata iz egzaktno jednačine (3.55) za ugao između dveju familija vlakana 2ϕ datim sa $\sin^2 \phi = 0,3$ pri čemu se ϵ^2 odnosi na pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana. Da bi smo prikazali promenu Rayleigh-eve talasne brzine pri promeni pravca propagacije α i ponašanje rešenja kada materijal

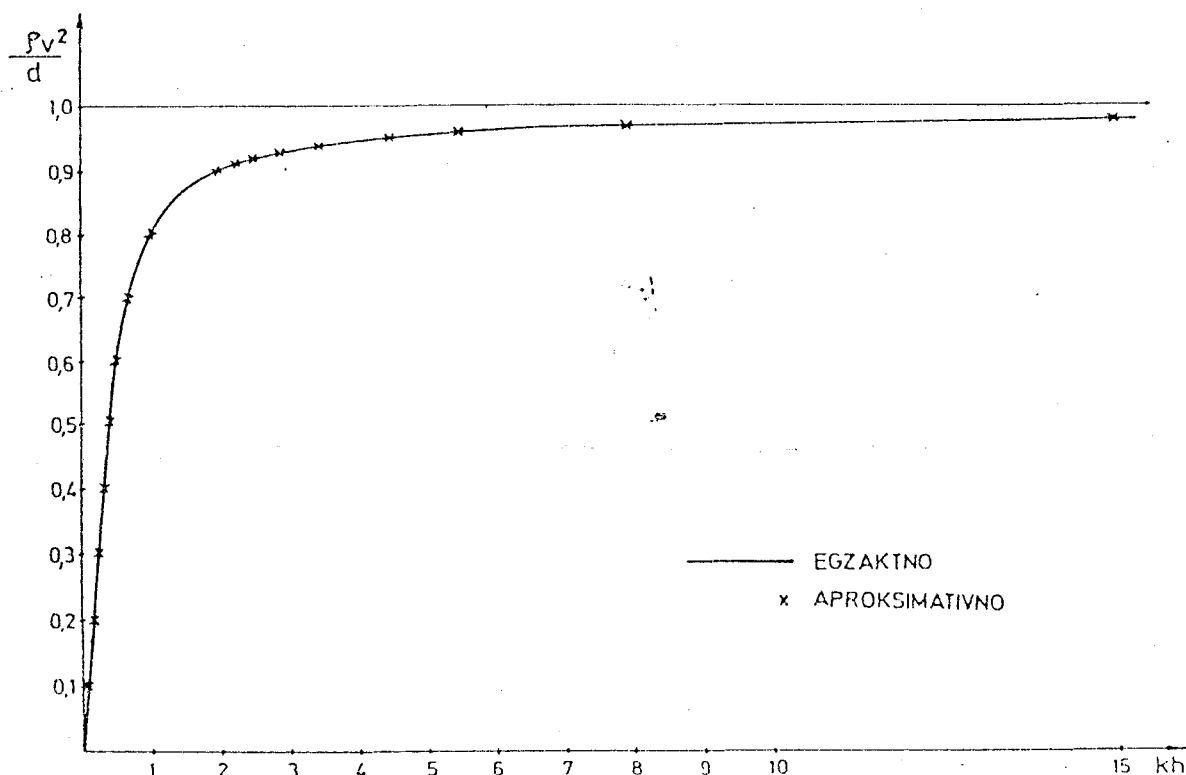
vlakana postaje jači na slici 5.6. smo nacrtali krive (1), (2) i (3) koje odgovaraju materijalima sa pet, deset i dvadeset puta jačim vlaknima u odnosu na originalni materijal, čije su elastične konstante date sa (5.3), tako da ε^2 ima vrednost 0,0128, 0,0063 i 0,0032 respektivno. Tačka označena sa (4) odgovara Rayleigh-ovoj talasnoj brzini koja može da se dobije neekstenzibilnom teorijom i ima vrednost $\rho v^2/d = 0,9969$ u pravcu propagacije koji je normalan na jednu od familija vlakana. Očigledno odsupanja kvadrata Rayleigh-evih talasnih brzina od kvadrata talasnih brzina smicanja d/ρ su reda ε^2 za bilo koji pravac propagacije sem kada je ovaj u okolini ugla $\alpha = \pi/2 - \phi$ tako da možemo da zaključimo da je rešenje pri jakoj anizotropiji do reda ε^2 neprepoznatljivo u odnosu na d/ρ za bilo koji pravac propagacije sem kada je ovaj u okolini normale na jednu od familija vlakana kada vrednost naglo pada naniže tako da se u graničnoj vrednosti neekstenzibilnosti ponaša kao diskontinualni skok. Slika 5.7. pokazuje promenu odnosa kvadrata Rayleigh-eve talasne brzine i d/ρ , za



Sl.5.7 Rayleigh-eva talasna brzina pri $\phi = 33^{\circ} 12' 39''$

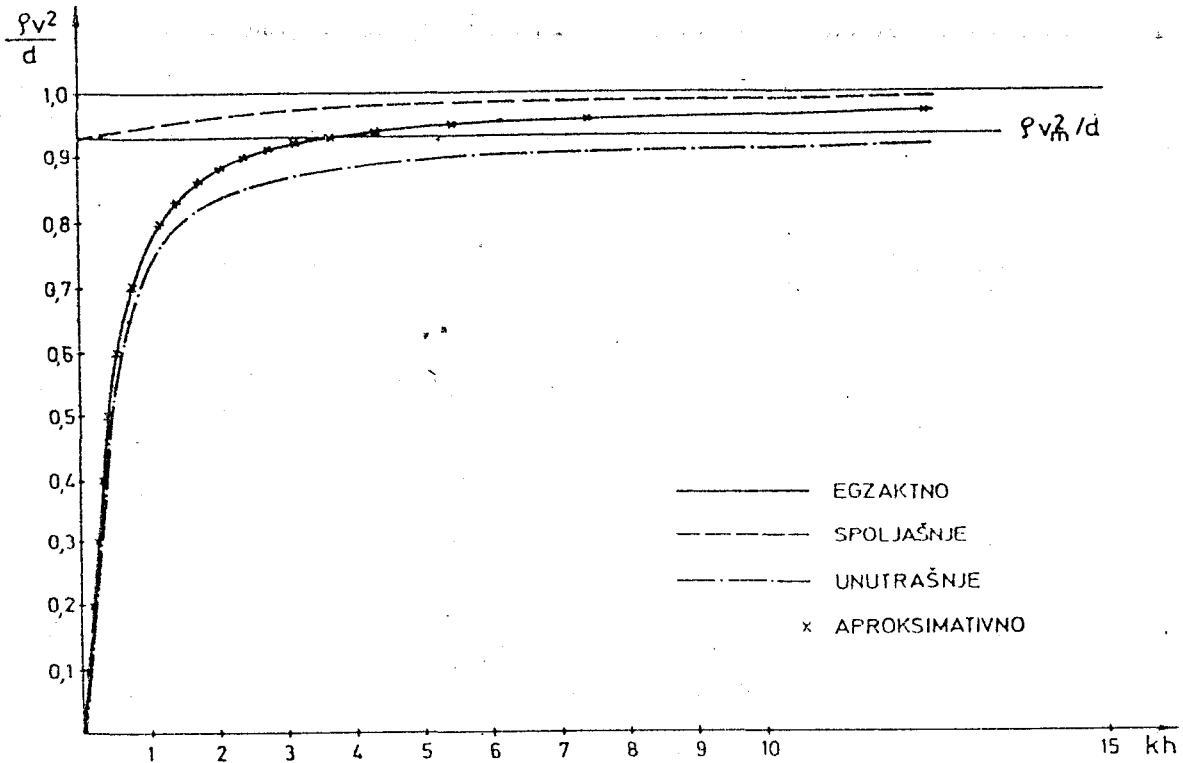
ugljena vlakna - epoksi smola kompozit čije su elastične konstante date u (5.3) a ugao između vlakana sa $\sin^2 \phi = 0,3$, pri promeni pravca propagacije. Pune linije se odnose na egzaktno rešenje, jednačina (3.55), dok se isprekidane linije odnose na aproksimativno rešenje dato sa (3.99).

U četvrtoj glavi, odeljak 4.5, su predložena usklađena aproksimativna rešenja za fazne brzine i data su izrazom (4.78). Pokazano je da je za proizvoljni pravac propagacije aproksimativno rešenje fazne brzine ekvivalentno unutrašnjem rešenju, dok je za pravac propagacije koji je normalan na jednu od familija vlakana aproksimativno rešenje kombinacija unutrašnjeg i spoljašnjeg (neekstenzibilnog) rešenja. Na slici 5.8 je prikazano poredjenje aproksimativnog rešenja (4.82), koje je ustvari dato izrazom (4.59), sa egzaktnim rešenjem da bi se ilustrovalo koliko je slaganje dobro. Ova slika se odnosi na $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2\equiv\sin^2\alpha=0,1$



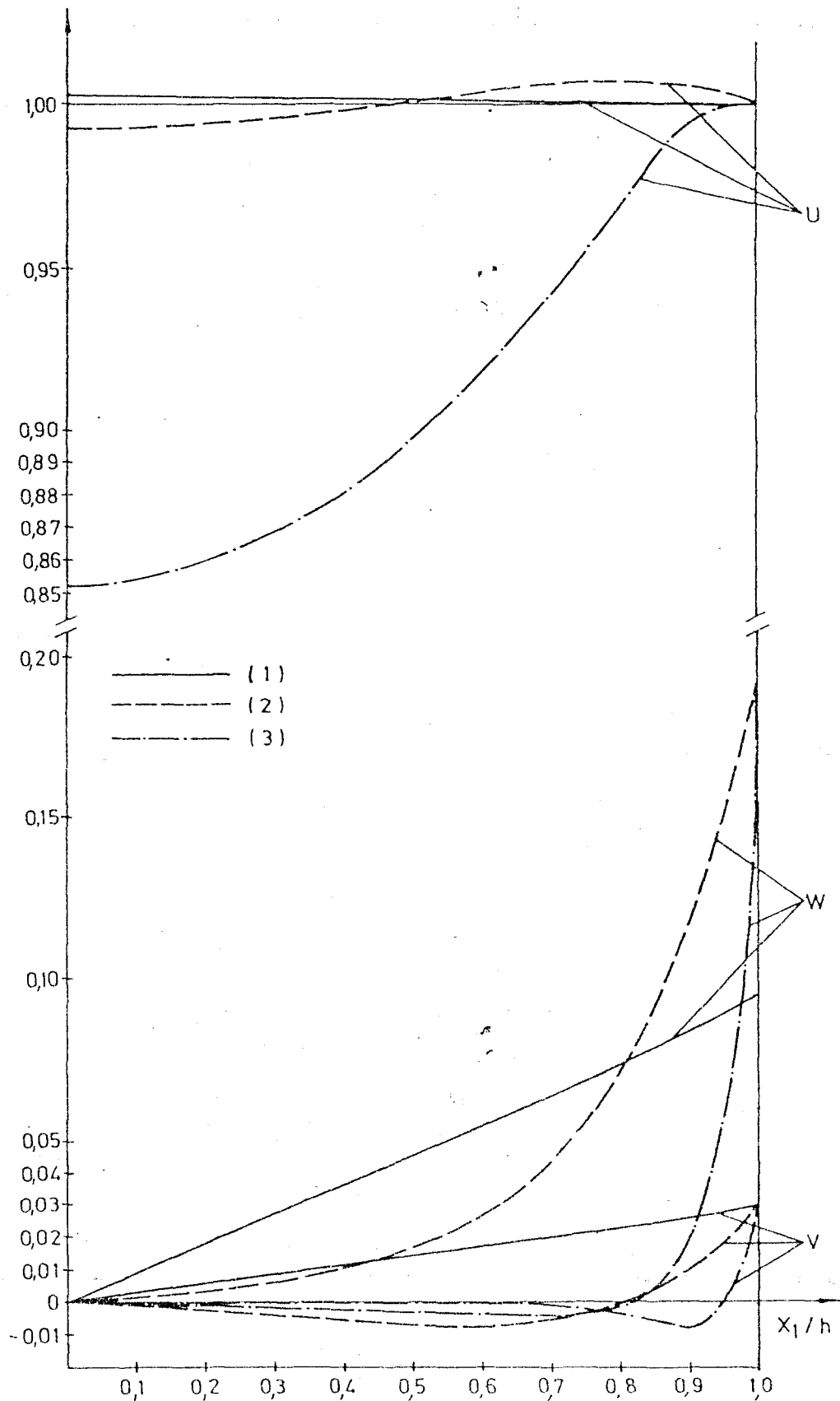
Sl.5.8 Disperzione krive za $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2=0,1$

i pokazuje koliko je aproksimativno rešenje dobro u širokom opsegu talasnih dužina. Ovakva preciznost aproksimativnog rešenja može da se pokaže za bilo koji drugi pravac propagacije. Da bismo prikazali proceduru uskladjivanja kada i spoljašnje i unutrašnje rešenje imaju disperzioni karakter prikazali smo na slici 5.9 slučaj kada je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana to jest slučaj kada je $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2\equiv\sin^2\alpha=0,7$. Opet je slaganje aproksimativnog rešenja sa egzaktnim tako dobro da se disperzione krive praktično medjusobno poklapaju.



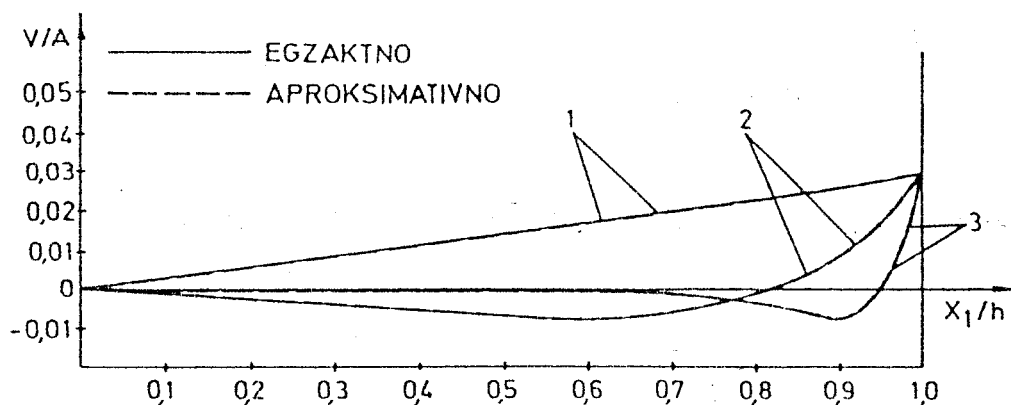
Sl.5.9. Procedura uskladjivanja disperzionih krivih za $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2=0,7$

Kada se dobiju disperzione krive, za zadati ugao između dveju familija vlakana i zadati ugao propagacije, onda je vrlo lako dobiti distribuciju pomeranja (3.25), ili u aproksimativnom obliku (4.77), i napona (3.29) po debljini ploče gde figuriše samo jedna proizvoljna konstanta. Na slici 5.10 je prikazana distribucija pomeranja po debljini ploče za specificirani poluugao između dveju familija vlakana $\phi=33^{\circ}12'39''$ ($\sin^2\phi=0,3$) i specificirani ugao propagacije $\alpha=18^{\circ}26'6''$ ($s^2=\sin^2\alpha=0,1$). Numerički rezultati egzaktnih rešenja za pomeranja su prikazani na slici 5.10 za tri različite talasne dužine. Sva pomeranja su data u takvoj razmeri da je zadovoljena relacija $U=1$ na konturi ploče. Treba zapaziti da je za male vrednosti kh (krive (1)) pomeranje U skoro konstantno, dok su pomeranja V i W skoro linearno zavisna od koordinate x_1 koja ide po debljini ploče. Za male talasne dužine (krive (3)) vidi se da ponašanje rešenja pokazuje osobine površinskih talasa odnosno pomeranja su konačna blizu konture.



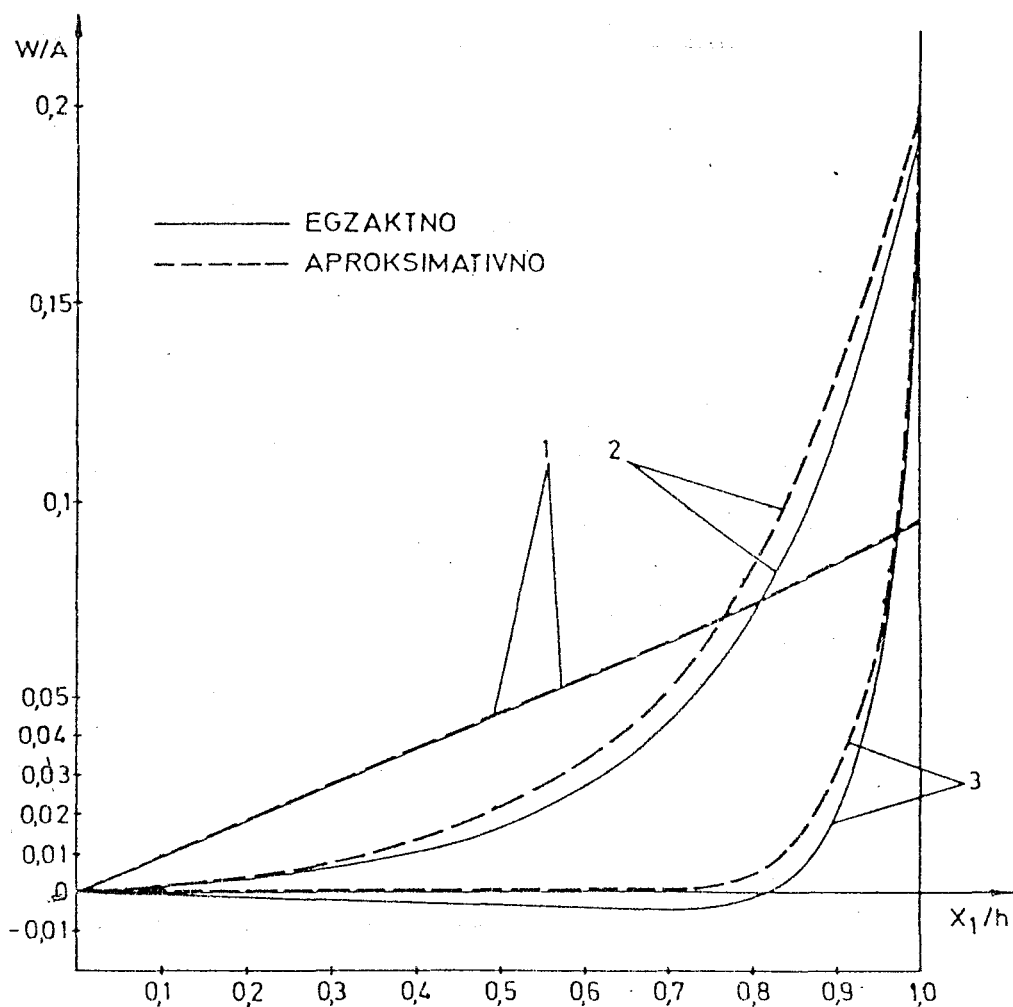
Sl.5.10. Distribucija pomeranja na jednoj polovini debljine ploče za različite talasne dužine za $\sin^2 \phi = 0,3$ i $\sin^2 \alpha = 0,1$. (1) $kh = 0,11034$, $\rho v^2/d = 0,1$; (2) $kh = 0,96858$, $\rho v^2/d = 0,8$; (3) $kh = 4,24404$, $\rho v^2/d = 0,95$.

onda naglo opadaju na vrlo male vrednosti dalje od konture slobodne od napona. Za ovaj pravac propagacije neekstenzibilna teorija predvidja $U=A$, $V=W=0$ za sve talasne dužine. Videli smo, međjutim, da neekstenzibilna rešenja predstavljaju samo spoljašnja rešenja u kompozitnim rešenjima (4.77) tako da moramo da uzememo u obzir i unutrašnja rešenja koja su data sa (4.58) i (4.51). U ovom slučaju je $\epsilon^2=0,08279$, što je relativno veliko, ali je slaganje aproksimativnih rešenja (4.77) za pomeranja sa egzaktnim rešenjima izuzetno dobro. Poredjenje aproksimativnih rešenja (4.77) sa egzaktnim rešenjima (3.25) za pomeranja V i W , prikazanih slikom 5.10, je dato na slikama 5.11 i 5.12. Slika 5.11 prikazuje distribuciju pomeranja V/A po debljini ploče dok slika



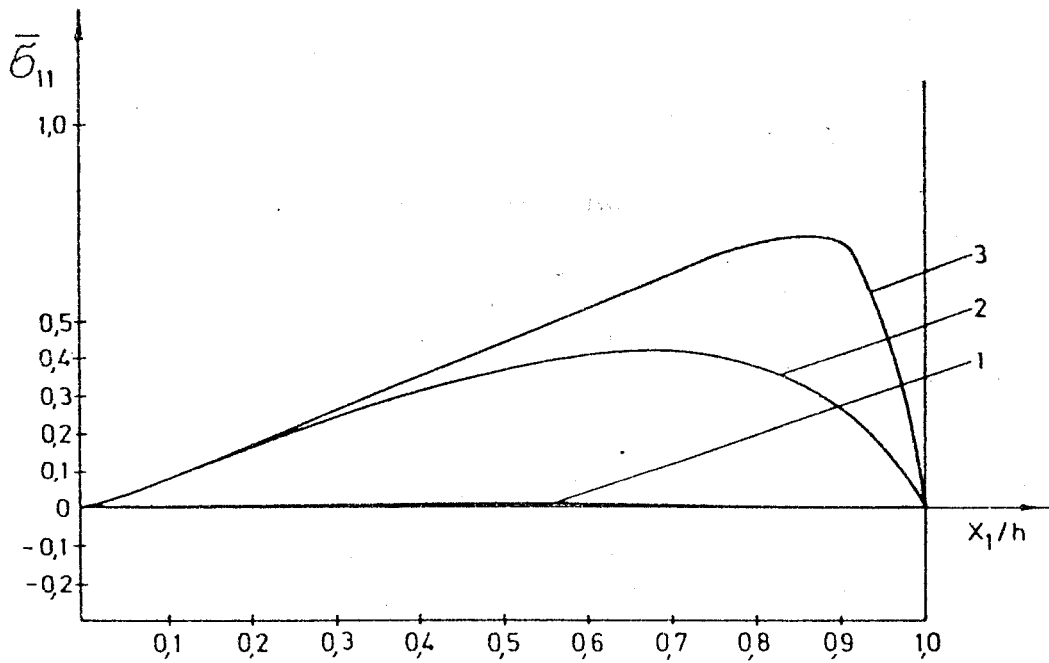
Sl.5.11 Distribucija pomeranja V/A za $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2=0,1$ pri raznim talasnim dužinama:
 (1) $kh=0,011034$; (2) $kh=0,96858$;
 (3) $kh=4,24404$.

Sl.5.12 prikazuje distribuciju pomeranja W/A po debljini ploče za $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2=0,1$ i vrednosti kh koje iznose $0,11034$, $0,96858$ i $4,24404$. U svim ovim slučajevima proizvoljna konstanta je izabrana da ispunjava uslov $U=A=1$. Punim linijama su predstavljena egzaktna rešenja dok su aproksimativna rešenja, računata prema jednačinama (4.77), data isprekidanim linijama. Ovakvo slaganje između pomeranja dobijenih egzaktno i aproksimativno mogu da se pokažu i za druge uglove između dveju familija vlakana i druge pravce propagacije ali zbog delokruga poglavlja to neće biti prikazano ovde.



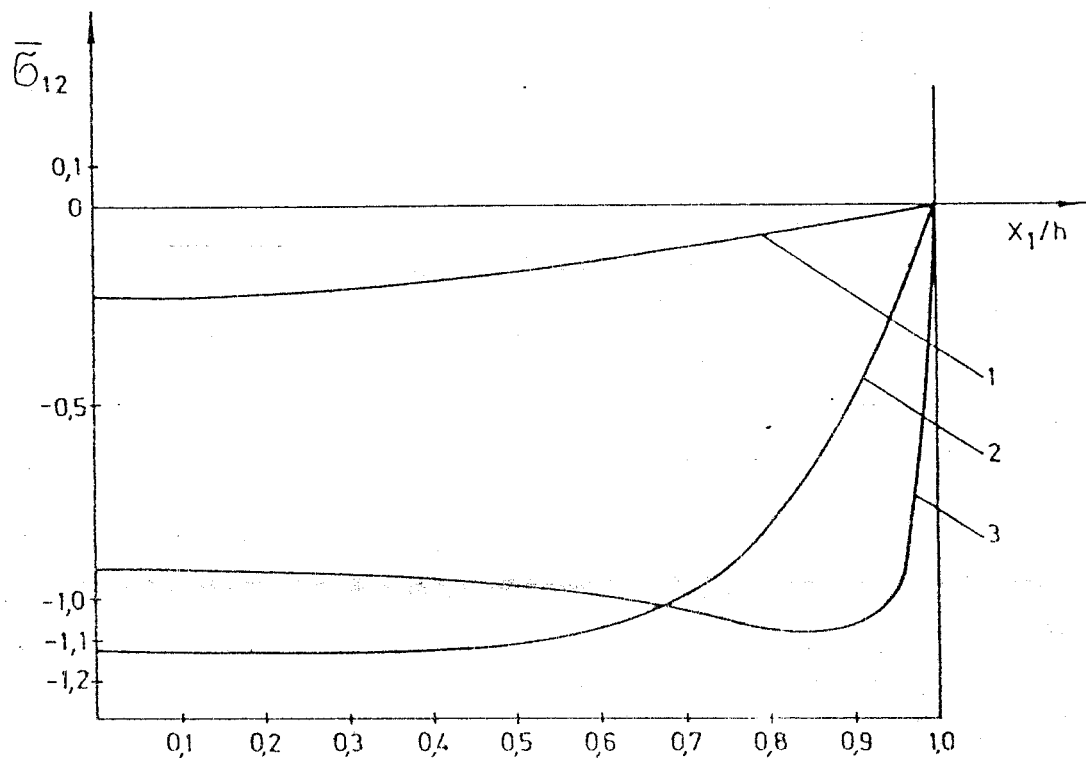
Sl.5.12 Distribucija pomeranja W/A za $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2=0,1$ pri raznim talasnim dužinama:
 (1) $kh=0,011034$; (2) $kh=0,96858$;
 (3) $kh=4,24404$.

Distribucija napona po debljini ploče, čija su egzakt-
 na rešenja data jednačinama (3.29), je data na slikama 5.13 do
 5.18 pri čemu smo opet izabrali tipičan ugao između dveju fami-
 lija vlakana dat izrazom $\sin^2\phi=0,3$ i tipičan ugao propagacije
 dat izrazom $s^2=0,1$. Zbog uporedjenja izabrali smo iste talasne
 dužine kao što smo izabrali za pomeranja na slici 5.10. Naponi
 su označeni sa crtom iznad oznake ($\bar{\sigma}_{ij}$) jer su na slikama 5.13 do
 5.18 prikazane zavisnosti napona od koordinate x_1 , što znači da
 su stvarni naponi (3.29)_{1,2,3,4} podeljeni sa $kA \cos\psi$ dok su
 naponi (3.29)_{5,6} podeljeni sa $kA \sin\psi$. Naponi na drugoj polovini



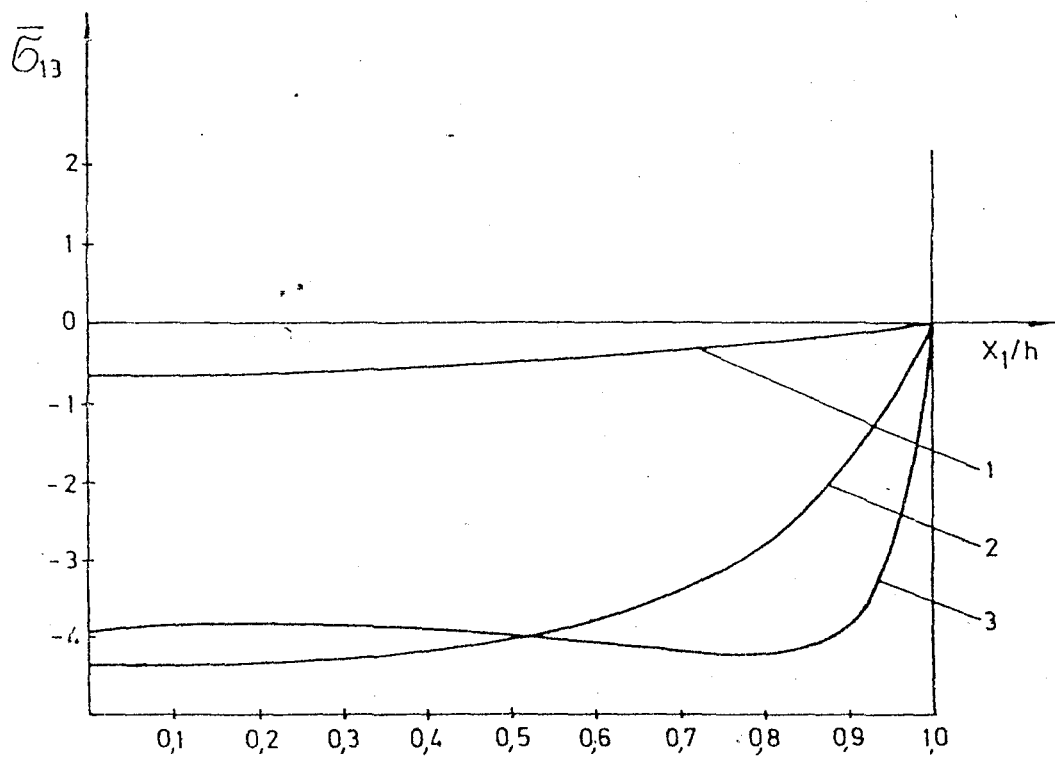
Sl.5.13 Naponi $\bar{\sigma}_{11}$ za različite talasne dužine:

(1) $kh=0,11034$; (2) $kh=0,96858$; (3) $kh=4,24404$

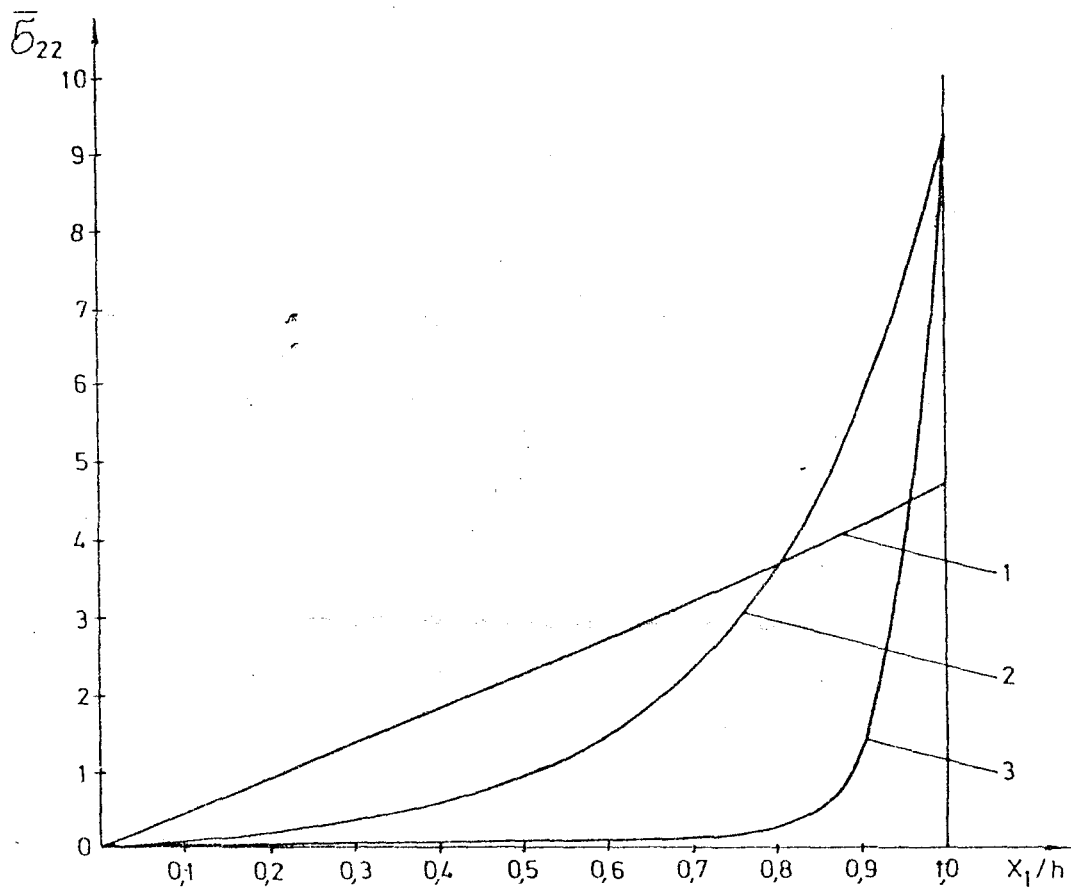


Sl.5.14 Naponi $\bar{\sigma}_{12}$ za različite talasne dužine:

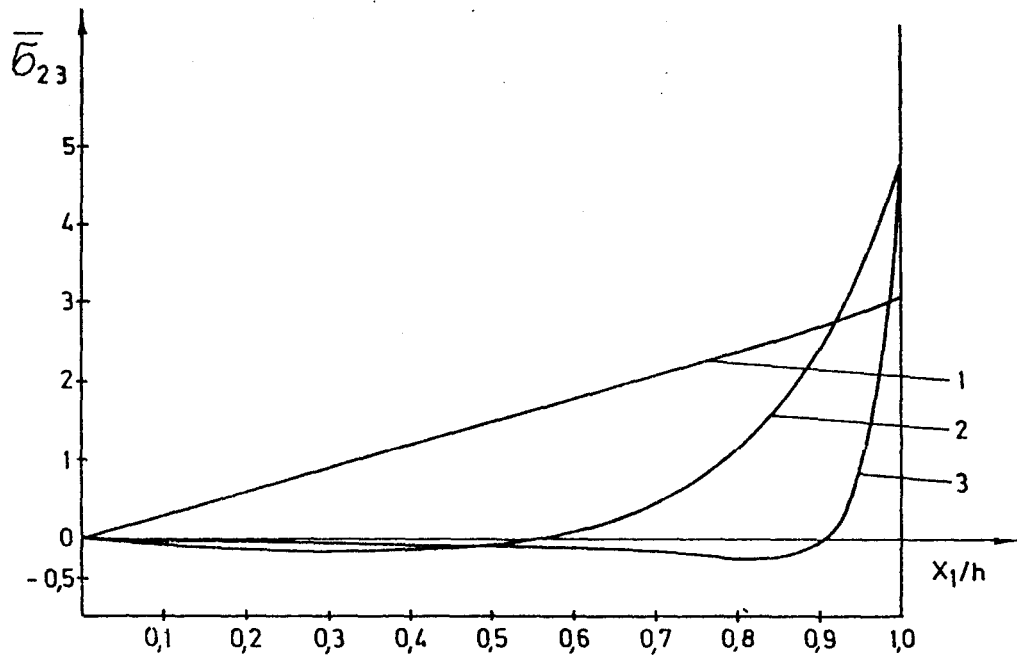
(1) $kh=0,11034$; (2) $kh=0,96858$; (3) $kh=4,24404$



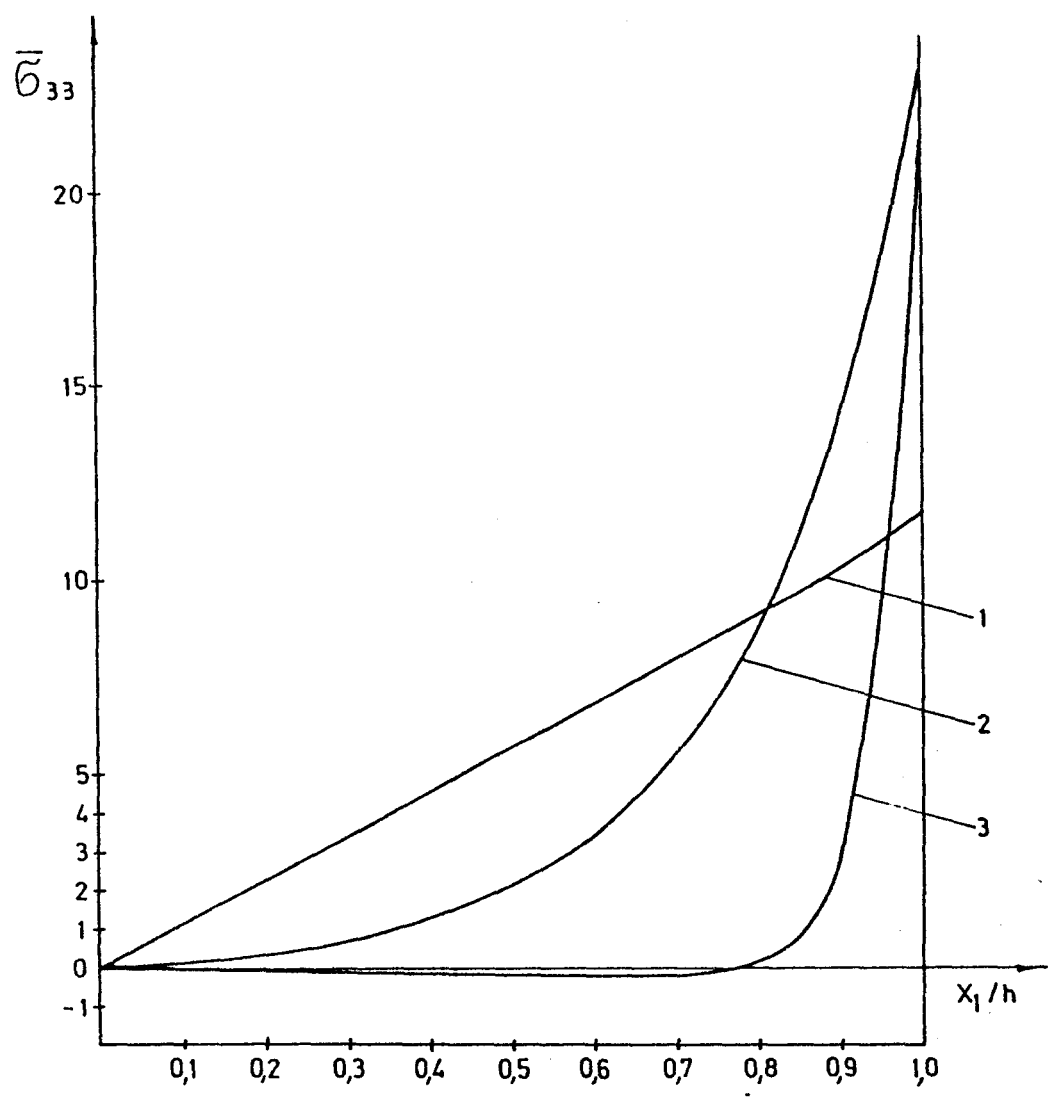
Sl.5.15 Naponi $\bar{\sigma}_{13}$ za različite talasne dužine:
 (1) $kh=0,11034$; (2) $kh=0,96858$; (3) $kh=4,24404$



Sl.5.16. Naponi $\bar{\sigma}_{22}$ za različite talasne dužine:
 (1) $kh=0,11034$; (2) $kh=0,96858$; (3) $kh=4,24404$



Sl.5.17 Naponi $\bar{\sigma}_{23}$ za različite talasne dužine:
 (1) $kh=0,11034$; (2) $kh=0,96858$; (3) $kh=4,24404$



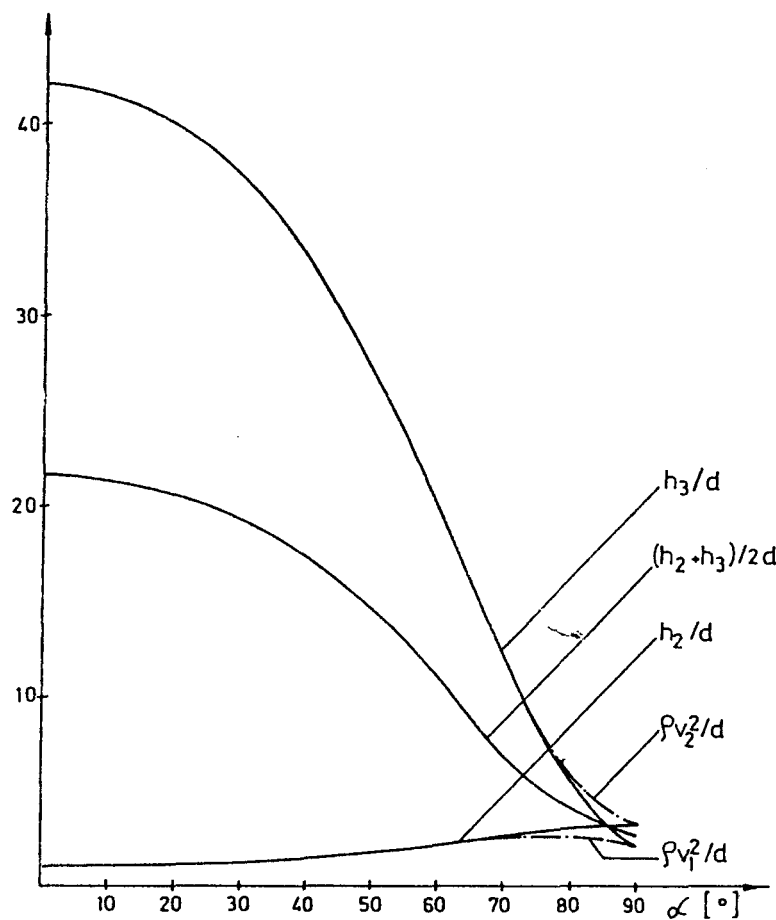
Sl.5.18 Naponi $\bar{\sigma}_{33}$ za različite talasne dužine:
 (1) $kh=0,11034$; (2) $kh=0,96858$; (3) $kh=4,24404$

ploče nisu prikazani jer lako mogu da se izvedu sa slika 5.13 do 5.18 korišćenjem činjenice da su σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} i σ_{23} neparne funkcije od x_1 dok su σ_{13} i σ_{12} parne funkcije od x_1 za anti-simetrične deformacije.

5.3. SIMETRIČNI MODOVI PROPAGACIJE

Pri razmatranju simetričnih modova propagacije smo videli da pri graničnoj vrednosti dugih talasa, kada $kh \rightarrow 0$, mogu jasno da se uoče dve različite talasne brzine saglasno jednačini (3.58) koja može pogodnije da se napiše u obliku (3.61). Rešenja jednačine (3.61) su data sa (3.63) od kojih jedno odgovara kvazilongitudinalnim talasima a drugo kvazitransverzalnim talasima. Ekvivalentni izrazi su dobijeni u četvrtoj glavi, odeljak 4.4, kao rešenja najnižeg reda za fazne brzine gde je od početka pretpostavljeno da se radi o veoma dugim talasima. Rešenja (3.63), za zadati ugao između dveju familija vlakana, su jako zavisna od pravca propagacije. Crtanjem funkcija $h_2(s^2)$ i $h_3(s^2)$ možemo vrlo lako da konstruišemo krive koje reprezentuju fazne brzine za oba fundamentalna moda za veoma duge talase. Dakle ako nacrtamo h_2 i h_3 možemo lako da nacrtamo srednju liniju između njih pa ovoj da dodamo i oduzmemo istu vrednost, pri specificiranom pravcu propagacije, koja predstavlja polovinu vrednosti δ date sa (3.67). Na taj način dobijamo linije koje predstavljaju veću i manju brzinu beskonačno dugih talasa. Na slici 5.19 je prikazana takva konstrukcija za materijal ojačan jednom familijom vlakana to jest kada je ugao između dveju familija vlakana jednak nuli. Ove krive na slici 5.19 su nacrtane kao funkcije ugla α i predstavljaju konture faznih brzina kada $kh \rightarrow 0$ odakle se jasno vidi da je maksimalno odstupanje faznih brzina od srednje linije kada se talas prostire duž vlakana a minimalno kada se talas prostire normalno na vlakna. Drugim rečima uticaj jakih vlakana je, naravno, najveći pri propagaciji duž vlakana, dok se u slučaju kada se talas prostire normalno na vlakna materijal ponaša kao izotropni kontinuum. Ovo je saglasno sa zaključcima koje su imali Green i Milosavljević (1985) pri istraživanju ekstenzionih talasa u pločama ojačanim

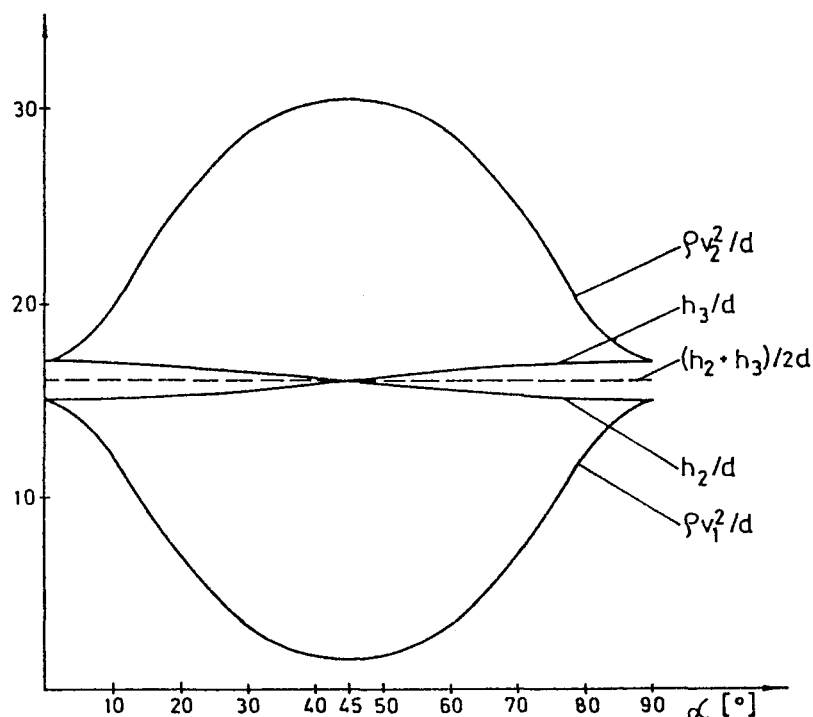
jednom familijom jakih vlakana. Za uglove propagacije manje od nule i veće od 90° veoma je lako izvesti krive sa slike 5.19



Sl. 5.19. Konstrukcija kontura odnosa kvadrata faznih brzina i d/ρ pri $\phi=0$ i $kh \rightarrow 0$ kao funkcije ugla propagacije α

korišćenjem simetrija koje slede iz analitičkih izraza za ove veličine. Sasvim drugačije oblike kontura faznih brzina beskonačno dugih talasa dobijamo kada posmatramo materijal kod koga su dve familije vlakana međusobno normalne to jest kada je $\phi=45^\circ$. Kada je pravac propagacije dat uglom $\alpha=45^\circ$ tada se talas prostire duž jedne od familija vlakana dok je druga familija normalna na pravac talasa tako da dobijamo čisto longitudinalne i čisto transverzalne modove. Slična situacija nastaje i za $\alpha = 0^\circ$ i $\alpha=90^\circ$ jer se tada talas prostire duž simetrane između vlakana a osobine kompozita su iste duž obe simetrane. Dakle zbog višeg oblika simetrije dovoljno je konstruisati krive od $\alpha=0$ do $\alpha=45^\circ$ a potom za bilo

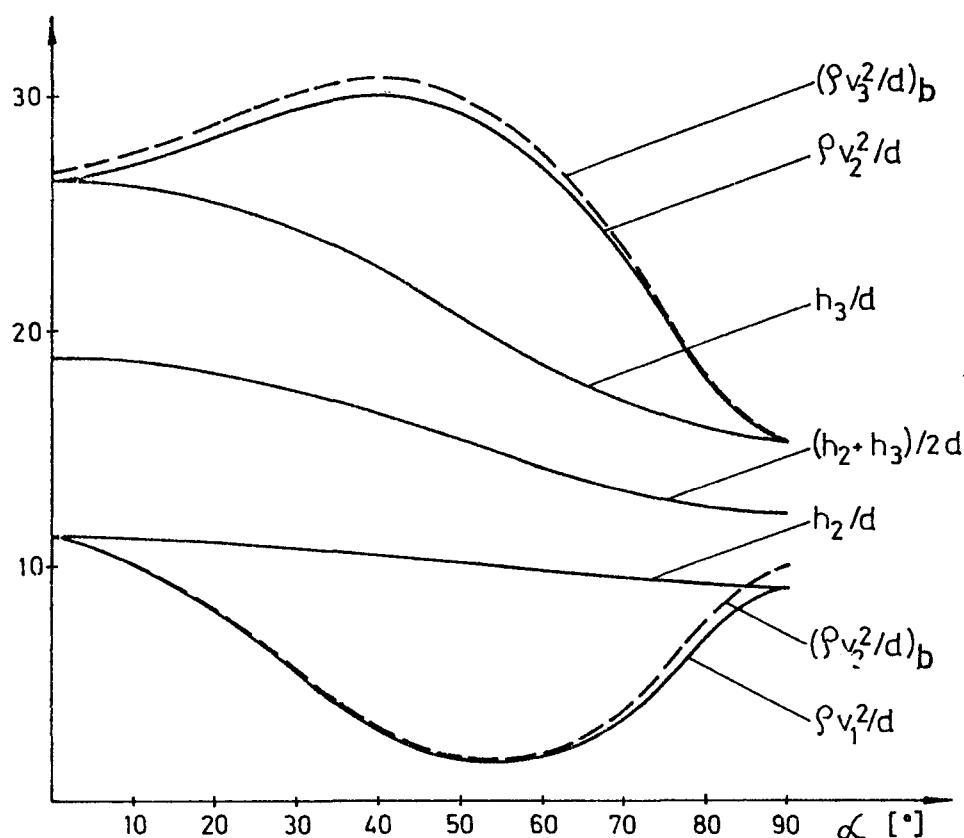
koji ugao propagacije možemo da izvedemo kako veću tako i manju faznu brzinu. Da bismo ovo pokazali na slici 5.20 smo dali konstrukciju kontura faznih brzina za oba moda kada je $\phi=45^\circ$ a ugao propagacije se menja od $\alpha=0$ do $\alpha=90^\circ$. Očigledno je da je maksimalna



Sl.5.20 Konstrukcija kontura odnosa kvadrata faznih brzina i d/ρ pri $\phi=45^\circ$ i $kh \rightarrow 0$ kao funkcija ugla propagacije α

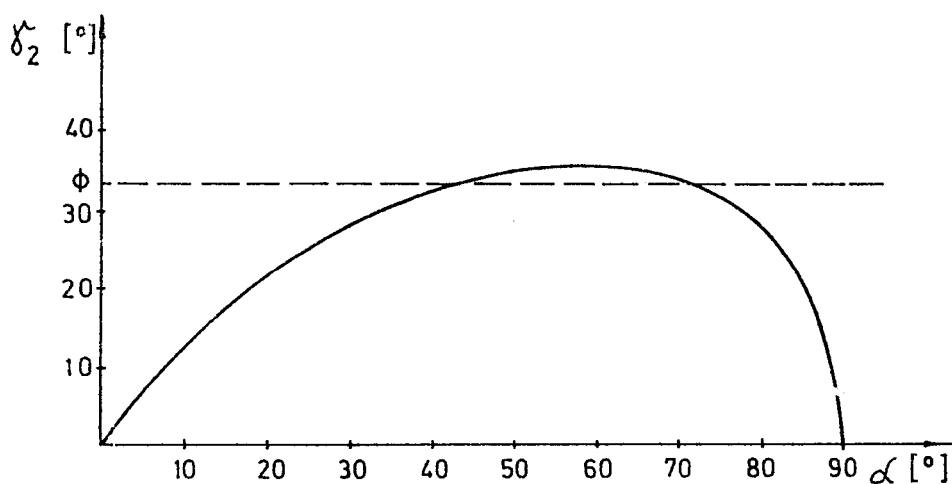
razlika između veće i manje faze brzine kada je pravac propagacije duž jedne od familija vlakana dok je minimalna razlika kada je pravac propagacije duž simetrala između dveju familija vlakana.

Da bismo predstavili proizvoljni ugao između dveju familija vlakana opet smo izabrali da, i za simetrične modove, reprezentativni poluugao među vlaknima bude $\phi=33^\circ 12' 39''$ odnosno $\sin^2 \phi=0,3$. Na slici 5.21 je prikazana konstrukcija kontrura odnosa kvadrata faznih brzina i d/ρ , za gore pomenuti ugao ϕ , u funkciji ugla propagacije α . Isprekidanim linijama su prikazane odgovarajuće faze brzine u beskonačnom kontinuumu, prema



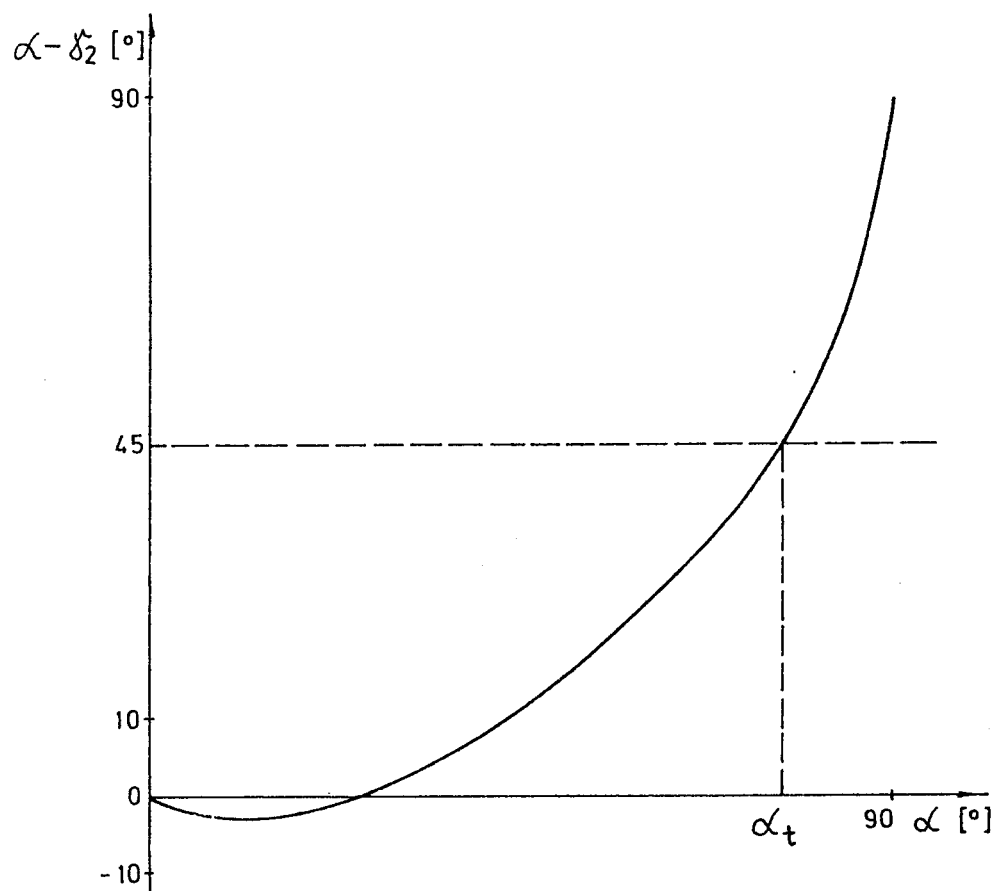
Sl.5.21. Konstrukcija kontura odnosa kvadrata faznih brzina i d/ρ pri $\sin^2\phi=0,3$ i $kh\rightarrow 0$ kao funkcije ugla propagacije α . Isprekidane linije se odnose na odgovarajuće brzine u beskonačnom kontinuumu prema jednačinama (3.154).

jednačinama (3.154), da bi se pokazalo koliko su vrednosti ovih blizu vrednostima faznih brzina beskonačne ploče pri $kh\rightarrow 0$. Koja fazna brzina odgovara kvazilongitudinalnom modu a koja kvazitransverzalnog modu zavisi kako od ugla medju vlaknima 2ϕ tako i od ugla propagacije α što može da se odredi na osnovu jednačine (3.68) ili (3.69). Na slici 5.22 je prikazan ugao vektora pomeranja u ravni ploče γ_2 , koji odgovara modu sa većom faznom brzinom v_2 , za različite uglove propagacije prema jednačini (3.68). Vrednosti za γ_2 za $s\rightarrow 0$ i $c\rightarrow 0$ su dobijene graničnom vrednošću izraza (3.68). Sa slike može da se uoči da je u velikom opsegu ugla propagacije α pravac vektora pomeranja veoma blizu pravca vlakana. Da bismo videli kada viša talasna brzina odgovara kvazilongitudinalnim talasima i kada kvazitransverzalnim možemo da koristimo



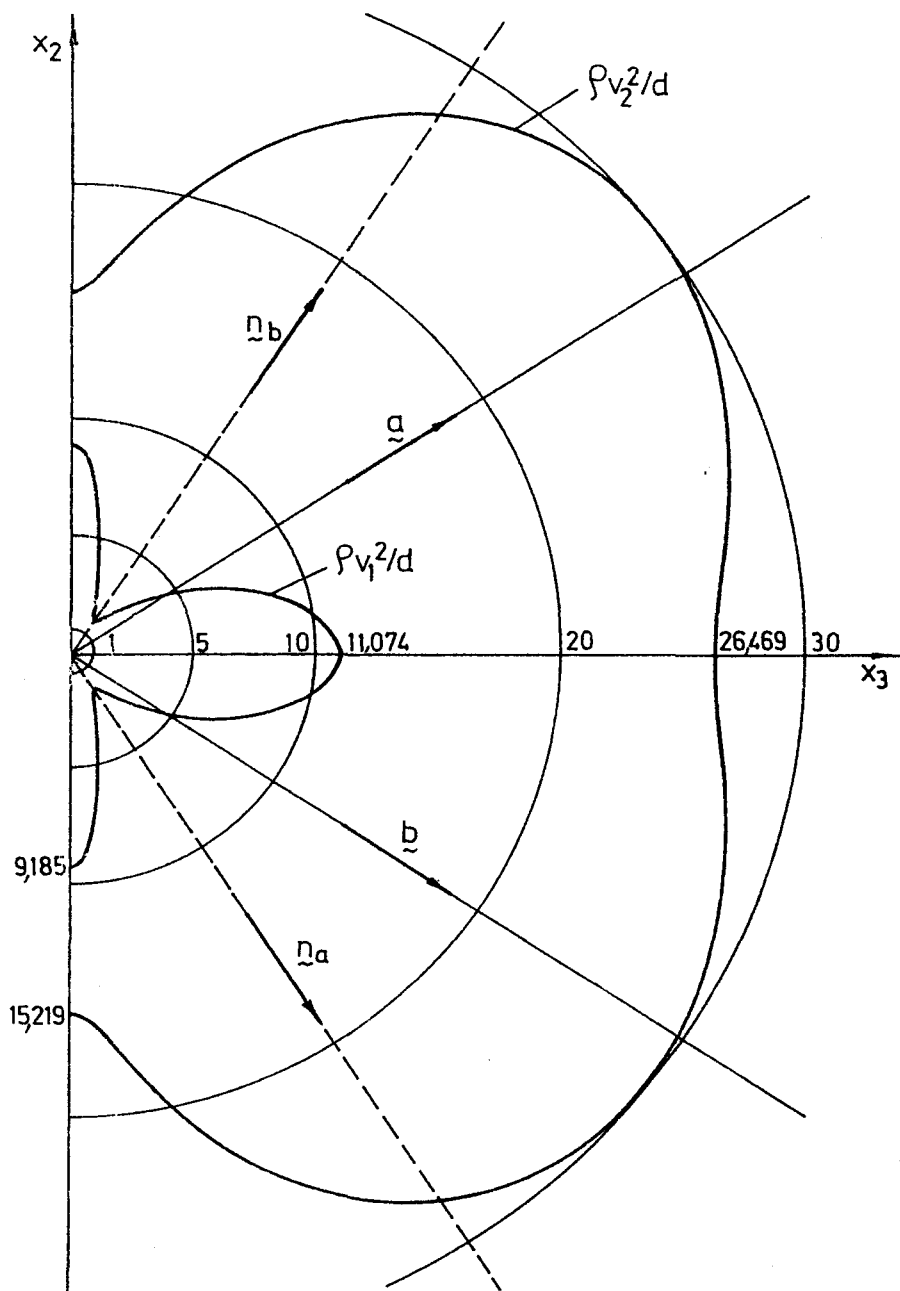
Sl.5.22 Ugao vektora pomeranja u ravni ploče γ_2 za $\sin^2\phi=0,3$

jednačinu (3.69) pri čemu opet vrednosti za $s \rightarrow 0$ i $c \rightarrow 0$ moraju da se dobiju graničnom vrednošću. Na slici 5.23. je prikazana razlika $\alpha - \gamma_2$ u zavisnosti od α za materijal kod koga je $\sin^2\phi = 0,3$. Kada je ova razlika manja od 45° većom talasnom brzinom se prostire kvazilongitudinalni talas dok za $\alpha - \gamma_2 > 45^\circ$



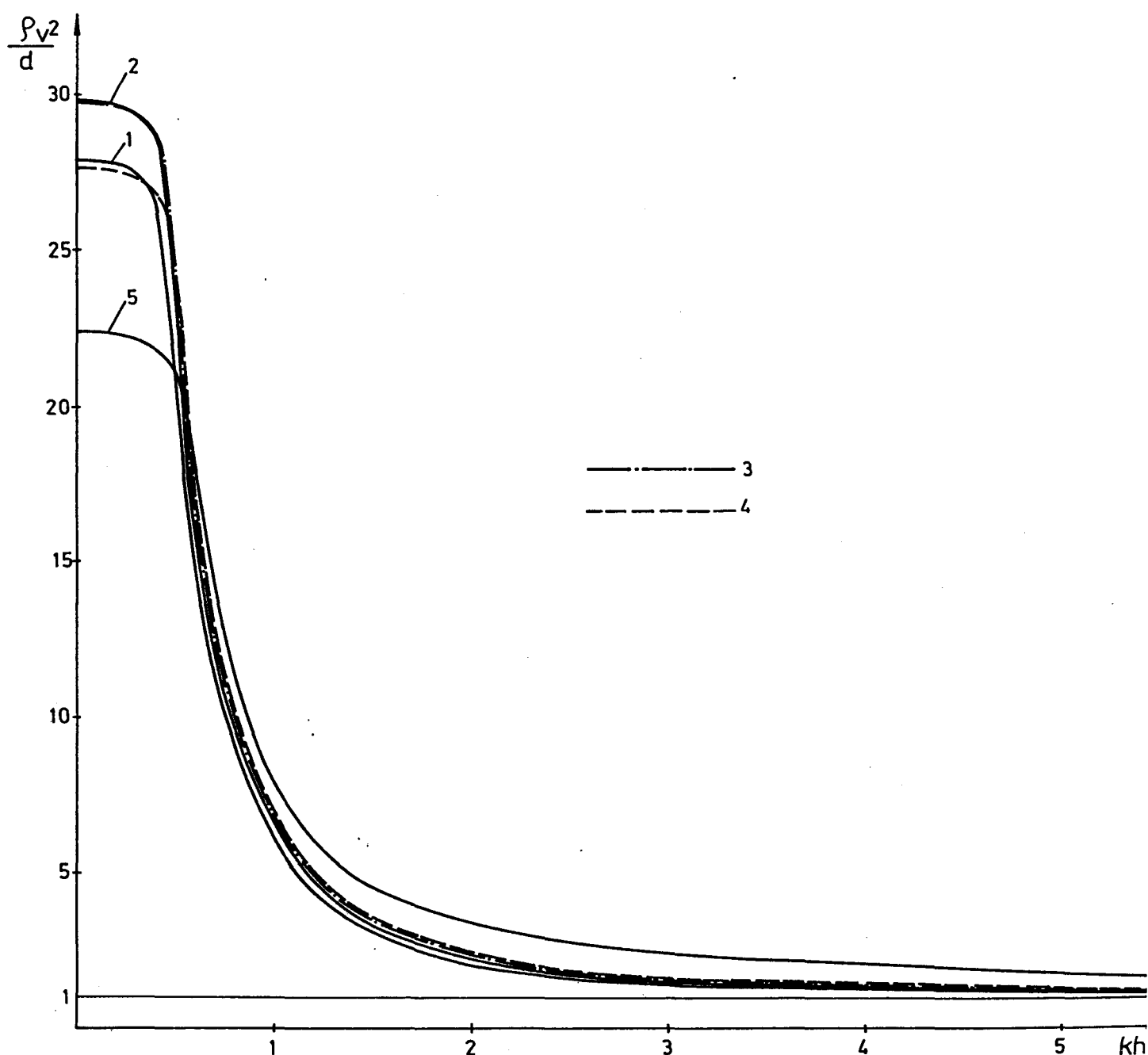
Slika 5.23 Ugao izmedju vektora propagacije talasa i vektora pomeranja koji odgovara većoj talasnoj brzini za $\sin^2\phi=0,3$.

većom talasnom brzinom se prostire kvazitransverzalni talas. Na slici 5.23 smo sa α_t označili ugao propagacije pri kome imamo, za veću talasnu brzinu, prelaz sa kvazilongitudinalnih talasa na kvazitransverzalne. Lako je zaključiti da za manju talasnu brzinu važi obrnuto. Drugačiji prikaz kontura faznih brzina, pri $kh \rightarrow 0$ i $\sin^2 \phi = 0,3$, može da se da ako ih nacrtamo u ravni ploče kao na slici 5.24. Na ovoj slici sa \underline{a} i \underline{b} su označeni pravci vlakana dok su sa \underline{n}_a i \underline{n}_b označene normale na odgovarajuća vlakna. Konture faznih brzina za negativne vrednosti x_3 se lako



Sl.5.24 Konture faznih brzina pri $\sin^2 \phi = 0,3$ za različite pravce propagacije

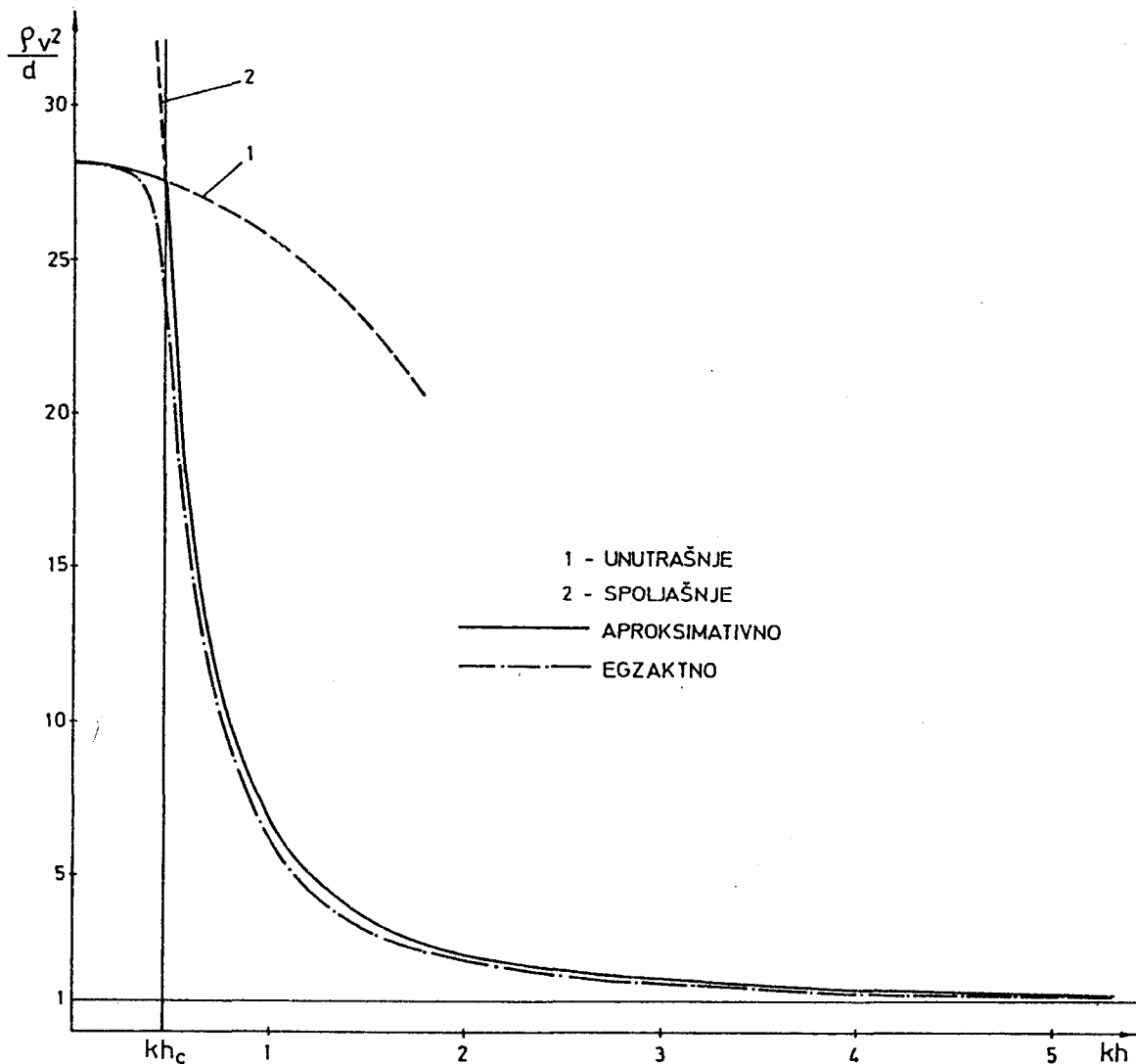
izvode iz činjenice da su ove simetrične kako u odnosu na osu x_2 tako i u odnosu na osu x_3 . Treba zapaziti da manja fazna brzina v_1 dostiže najniže vrednosti kada je pravac talasa u okolini normale na jednu od familija vlakana. Ova osobina može da se uoči za bilo koji ugao između vlakana. Ako bismo učinili vlakna jačim dobili bismo iste oblike kontura faznih brzina samo što bi kvadrati faznih brzina prilično bili onoliko puta veći koliko su puta vlakna jača. Prema tome kada vlakna postanu neekstenzibilna i kvazilongitudinalni i kvazitransverzalni talasi se pros-



Sl. 5.25. Disperzione krive za $\sin^2 \phi = 0,3$ i razne pravce propagacije: (1) $s^2 = 0,1$; (2) $s^2 = 0,3$; (3) $s^2 = 0,5$; (4) $s^2 = 0,7$; (5) $s^2 = 0,9$.

tiru beskonačnim brzinama sem kada je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana kada manja fazna brzina, koja u ovom slučaju odgovara kvazitransverzalnim talasima, ima konačnu vrednost jer je vezana za kinematski dopustive deformacije za tako ograničene (engl. constrained) materijale. Veća talasna brzina je beskonačna za neekstenzibilne materijale za bilo koji pravac propagacije.

Propagacija većom faznom brzinom je uvek praćena jakom disperzijom. Da bismo ovo pokazali na slici 5.25 smo dali promenu odnosa kvadrata veće fazne brzine i d/ρ sa promenom kh za $\sin^2\phi = 0,3$ i razne pravce propagacije. Prema slici 5.23 sve ove

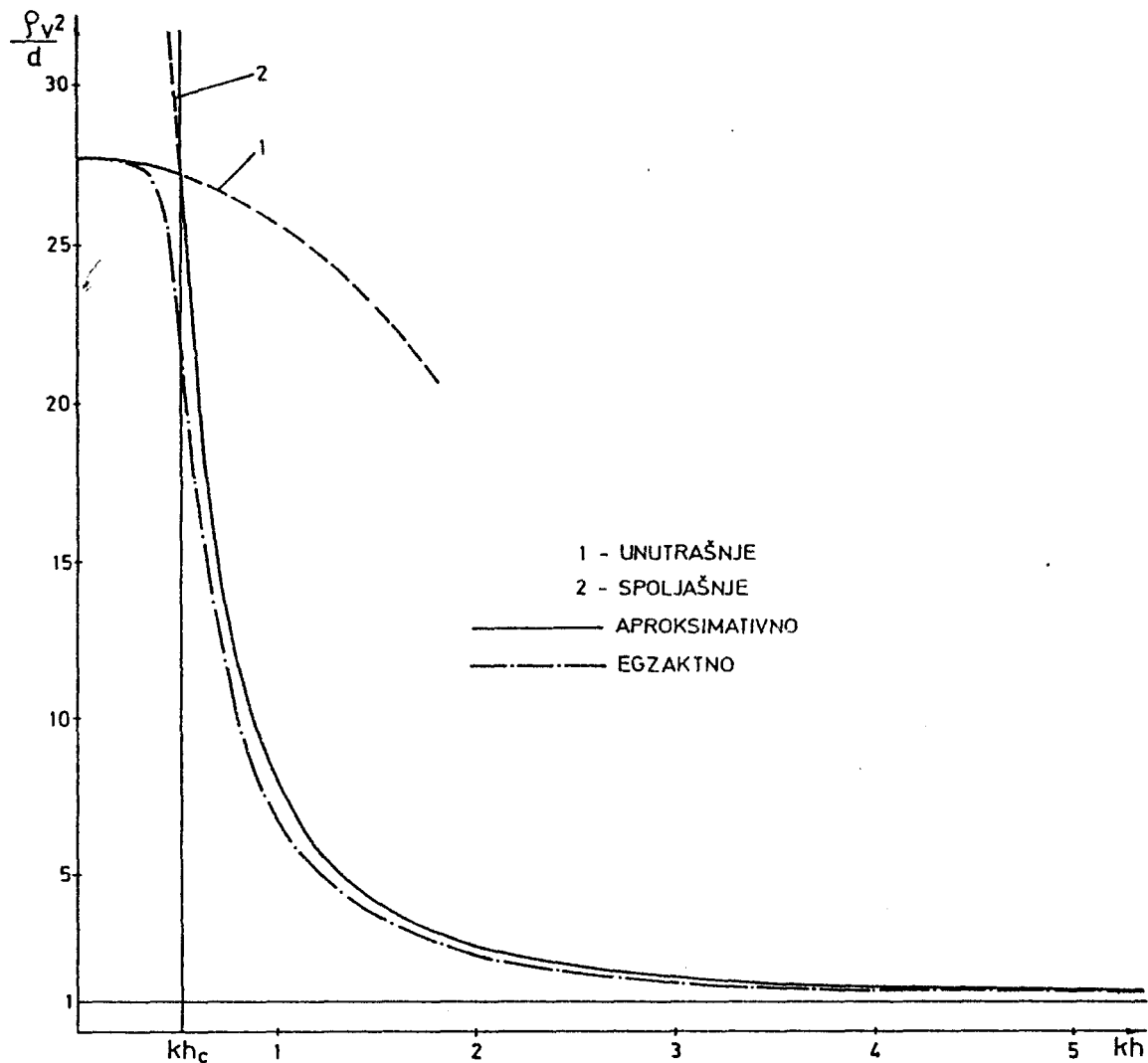


Sl.5.26 Konstrukcija aproksimativne disperzione krive, za $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2=0,1$, kvazilongitudinalnog moda prema jednačini (4.99)

disperzione krive se odnose na kvazilongitudinalne talase a dobijene su iz egzaktnih jednačina.

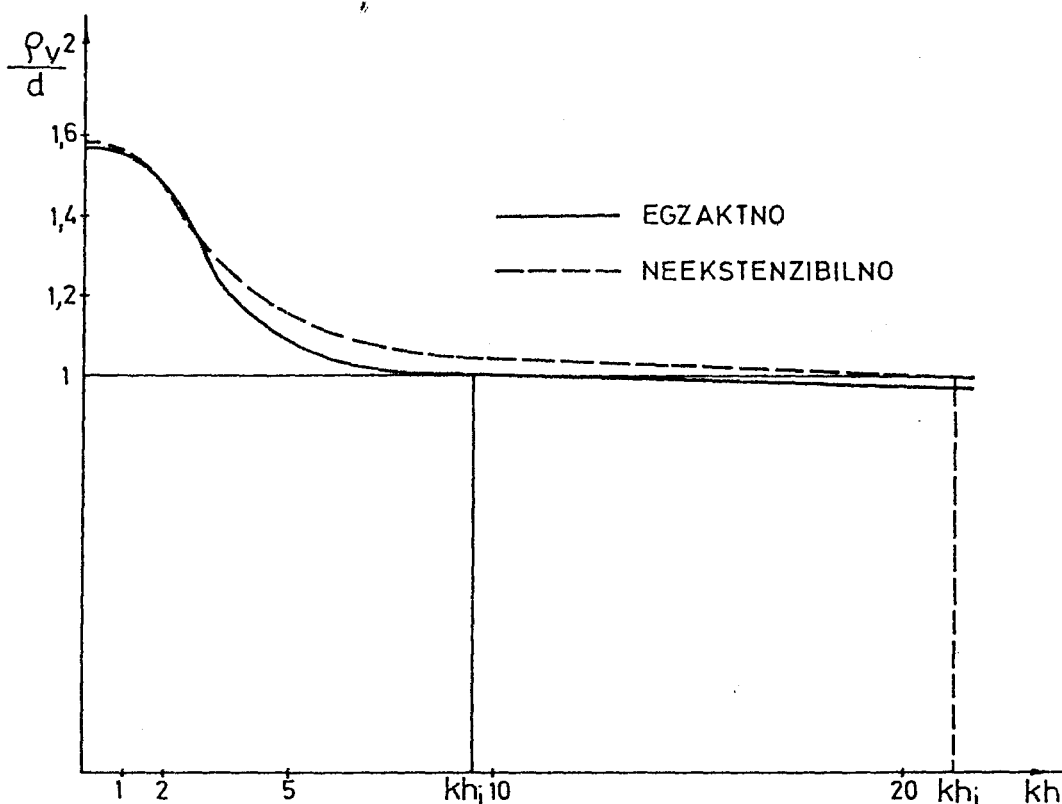
Konstrukcija aproksimativne disperzione krive kvazilongitudinalnog moda prema jednačini (4.99) za $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2=0,1$ je data na slici 5.26. Kao što smo ranije napomenuli singularnost reda jedan aproksimativnog rešenja, datog punom linijom, se pojavljuje pri prelomnoj frekvenciji koja se približno javlja pri vrednosti koja je označena sa kh_c na slici 5.26. Da bismo dobili uniformno aproksimativno rešenje trebalo bi da istražimo ponašanje rešenja u okolini prelomne frekvencije spoljašnjeg rešenja što se trenutno intenzivno razmatra.

Kada je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana, naprimer $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2=0,7$, talas koji propagira većom faznom brzinom ima vektor pomeranja u ravni ploče koji je u okolini pravca druge familije vlakana dok talas koji propagira manjom faznom brzinom ima vektor pomeranja u ravni ploče koji je u okolini pravca normale na drugu familiju vlakana. Za graničnu vrednost neekstenzibilnosti, kada je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana, talas koji odgovara većoj talasnoj brzini, koja u tom slučaju teži beskonačnosti, ima vektor pomeranja u ravni ploče duž druge familije vlakana, a talas koji odgovara manjoj faznoj brzini, koja je konačna, ima vektor pomeranja u ravni ploče duž normale na drugu familiju vlakana. Prema tome, koja fazna brzina odgovara kvazilongitudinalnom talasu zavisi od ugla između vlakana a ne od toga koja fazna brzina je veća. Dakle, ako je ugao između dveju familija vlakana u oblasti između 0° i 45° veća fazna brzina odgovara kvazitranverzalnim talasima, a ukoliko je u oblasti između 45° i 90° veća fazna brzina odgovara kvazilongitudinalnim talasima. Situacija je približno ista, do reda ϵ^2 , za jako anizotropne materijale. Dakle za veću faznu brzinu nema ničeg posebnog u vezi sa tim uglom propagacije (koji je normalan na jednu od familija vlakana). Konstrukcija aproksimativne disperzione krive, prema jednačini (4.99), za $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2=0,7$ je data na slici 5.27 i odgovara većoj faznoj brzini koja, za ovako izabran ugao između dveju familija vlakana, reprezentuje kvazilongitudinalne talase.



Sl. 5.27 Konstrukcija aproksimativne disperzione krive, za $\sin^2 \phi = 0,3$ i $s^2 = 0,7$, kvazilongitudinalnog moda prema jednačini (4.99)

Konstrukcija aproksimativnih disperzionih krivih za manje fazne brzine je ista kao i za veće fazne brzine osim kada je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana. Kao što je rečeno u četvrtoj glavi tada neekstenzibilno rešenje može aproksimativno da reprezentuje rešenje jako anizotropnog materijala. Na slici 5.28 je prikazano egzaktno i neekstenzibilno rešenje fazne brzine, za $\sin^2 \phi = 0,3$ i $s^2 = 0,7$, kvazitranverzalnog talasa odnosno talasa koji propagira manjom faznom brzinom. Sa kh_1 su označene presečne tačke kvadrata fazne brzine i veličine d/ρ . Za neekstenzibilno rešenje ova vrednost je



Sl.5.28 Disperzione krive kvazitranverzalnog talasa za $\sin^2 \phi = 0,3$ i $s^2 \equiv \sin^2 \alpha = 0,7$

data izrazom (2.71) i za ovaj slučaj ima vrednost $kh_1 = 21,33418$. U slučaju jake anizotropije aproksimativna presečna tačka je data izrazom (3.121). Ako u tom izrazu umesto nadvučenih veličina koristimo sve članove dobićemo vrednost $kh_1 = 9,46188$.

Za infinitezimalno kratke talase, kada $kh \rightarrow \infty$, i kvazilongitudinalni i kvazitranverzalni talas imaju fazne brzine koje teže Rayleigh-evim talasnim brzinama, koje su za $\sin^2 \phi = 0,3$ i razne pravce propagacije date na slici 5.7 za materijal koji smo ovde razmatrali i na slici 5.6 kada pretpostavimo da vlakna postaju jača.

Numerički rezultati za distribuciju pomeranja i napona po debljini ploče su prikupljeni za analizu za razne talasne dužine ali neće biti prikazani ovde zbog delokruga poglavlja.

VI ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

U ovoj tezi je analizirano prostiranje talasa u beskonačnoj ploči ojačanoj dvema familijama pravih mehanički ekvivalentnih vlakana koja leže u ravnima paralelnim sa slobodnim konturama ploče. Da bi se opisale mehaničke osobine čvrstog tela korišćen je kontinuum model sa ekstenzibilnim i neekstenzibilnim vlaknima. Kao što je napomenuto ranije kontinuum model veoma dobro reprezentuje čvrsto telo pri razmatranju njegovog dinamičkog ponašanja. Propagacija dugih elastičnih talasa, koji imaju talasne dužine mnogo veće nego što su međuatomska rastojanja, se posebno dobro opisuje kontinuum modelom. Ovo je očigledno fizički jer ako su talasne dužine mnogo veće od međuatomskih rastojanja pri prolazu talasa nije neophodno uočavati detalje atomskog rasporeda. Njegova propagacija, prema tome, zavisi od nekih prosečnih osobina šire oblasti tako da se uticaj atoma odražava kroz model kontinuuma. U slučaju opšte anizotropije kontinuuma brzina talasa zavisi od pravca njegove propagacije. Osim toga tri grane talasa u tom slučaju nemaju niti čisto longitudinalni niti čisto transverzalne karaktere sem kada se talas prostire u pravcima više simetrije. Uobičajeno je, međjutim, da se talasi nazivaju kvazilongitudinalnim i kvazitransverzalnim prema tome da li su većim delom longitudinalno ili transverzalno polarizovani. Problem propagacije talasa u anizotropnim talasovodima nije, do skoro, zaokupljao veću pažnju ali postaje sve više i više važan zato što su mnoge novije konstrukcije bazirane na materijalima sa privilegovanim pravcima. Najveća teškoća nastaje zbog računanja sa toliko mnogo elastičnih konstanti. Ispitivanje disperzionih jednačina pokazuje izvesne sličnosti sa izotropnim slučajevima ali dodatne elastične konstante znatno komplikuju izraze. Postupak izvlačenja bilo kakvih informacija iz algebarskih rezultata postaje mukotrpan tako da pokušaj dobijanja rešenja za materijale ojačane dvema familijama vlakana dosad nije činjen sem za vrlo ograničene oblasti talasnih dužina.

Cilj ove teze je bio da se istraže fundamentalni modovi pri propagaciji talasa u beskonačnoj ploči, debljine $2h$,

ojačanoj dvema familijama pravih vlakana korišćenjem linearne teorije elastičnosti sa neekstenzibilnim i ekstenzibilnim vlaknima. Da bi se predložila aproksimativna rešenja bilo je neophodno istražiti izraze za fazne brzine, pomeranja i napone korišćenjem kako neekstenzibilne tako i ekstenzibilne teorije i onda ispitati ponašanje rešenja ekstenzibilne teorije u graničnom slučaju kada ekstenzibilnost dveju familija vlakana teži nuli da bi se videlo u kojim oblastima su rezultati jednostavnije neekstenzibilne teorije adekvatni. Ovo istraživanje je bilo osnova na kojoj smo gradili perturbacione šeme za dobijanje aproksimativnih rešenja za jako anizotropne materijale. Gornji rezime programa pokazuje da je bilo neophodno da se istraživanje vrši u više paralelnih oblasti. Ove oblasti su u tezi podeljene kao poglavlja tako da su osnovne jednačine date u prvoj glavi, prostiranje talasa korišćenjem neekstenzibilne teorije je istraženo u drugoj glavi, a korišćenjem ekstenzibilne teorije u trećoj glavi koja uključuje i istraživanje jake anizotropije i granične vrednosti neekstenzibilnosti. Aproksimativna rešenja su predložena u četvrtoj glavi a numerički rezultati za ugljena vlakna - epoksi smola kompozite su dati u petoj glavi. U svim gore pomenutim glavama smo odvojeno razmatrali antisimetrične deformacije od simetričnih deformacija. Antisimetrične deformacije su u vezi sa savojnim talasima a simetrične deformacije su u vezi sa ekstenzionim i smičućim talasima.

Za antisimetrične deformacije smo, u drugoj glavi za neekstenzibilne materijale, videli da za proizvoljni ugao propagacije rešenja nisu disperziona odnosno da se za sve talasne dužine talasi prostiru istom faznom brzinom $\sqrt{d/\rho}$ koja je data izrazom (2.19). Ovo rešenje je bilo dobijeno sa pretpostavkom o postojanju singularnih vlakana na gornjoj i donjoj konturi ploče. Dakle pretpostavili smo da u singularnim vlaknima naponi reakcije teže beskonačnosti na takav način da daju konačna opterećenja u vlaknima. Jedina mogućnost, ako isključimo kinematski dopustive deformacije, za rešenja pomeranja i napona su data izrazima (2.20) i (2.21) respektivno. Naponi (2.21) imaju na konturama singularnosti oblika δ funkcija za σ_{22}, σ_{33} i σ_{23} i diskontinuitete za σ_{13} i σ_{12} . Da bismo ove singularnosti i diskontinui-

tete objasnili bili smo prinudjeni da nadjemo egzaktne rešenja zasnovana na ekstenzibilnoj teoriji pa u graničnom procesu da ispitamo pri kojim uslovima su rezultati neekstenzibilne teorije primenljivi. Egzaktna disperziona jednačina (3.20) je pokazala da je antisimetrični mod u realnom materijalu disperzivan i da pomeranja (3.25) i naponi (3.29) takodje zavise od talasne dužine a , naravno, i od koordinate po debljini ploče x_1 . Ovi oblici egzaktnih rešenja nisu bili pogodni za dalju analizu tako da smo izvršili određene algebarske transformacije da bismo došli do disperziona jednačine oblika (3.50) koja je bila relativno jednostavna za analizu fazne brzine naročito za beskonačno duge i infinitezimalno kratke talase. Ovo razmatranje je pokazalo da se fazna brzina menja od nule (3.52), za beskonačno duge talase, do Rayleigh-ove talasne brzine (3.56) za infinitezimalno kratke talase. Da bismo uporedili egzaktne rešenja sa neekstenzibilnim rešenjima pretpostavili smo da je materijal jako anizotropan tako što smo pretpostavili da je određena materijalna konstanta mnogo veća od drugih pri čemu smo uveli mali materijalni parametar ϵ za opis ove konstante. Aproksimativni oblik egzaktne disperziona relacije u slučaju jake anizotropije je dat jednačinom (3.80) a sa eksplicitnom zavisnošću od ϵ jednačinom (3.91). Aproksimativna rešenja za pomeranja su data sa (3.100) a za napone sa (3.103). Ovi izrazi jasno pokazuju da u graničnom procesu, kada $\epsilon \rightarrow 0$, možemo da reprodukujemo sve singularnosti i diskontinuitete u naponima koje smo imali u neekstenzibilnoj teoriji pod uslovom da kh ostane reda jedan odnosno samo kada su talasi srednji. Ponašanje rešenja za druge talase, $kh \ll 1$, i kratke talase, $kh \gg 1$, je sasvim drugačije za jako anizotropni materijal od onog koje predviđa neekstenzibilna teorija. Ovo je lako objasniti jer za jako anizotropni materijal ma koliko da je veličina ϵ mala veličina kh može biti još manja tako da se delovi rešenja za $kh < \epsilon$ i $kh > 1/\epsilon$ gube u graničnom procesu koji jako anizotropni materijal prevodi u neekstenzibilni.

Naš primer jako anizotropnog materijala bio je ugljena vlakna-epoksi smola kompozit sa elastičnim konstantama datim u (5.3). Za tipičan ugao između dveju familija dat sa $\sin^2 \phi = 0,3$

na slici 5.5 smo nacrtali pet disperzionih krivih za pet različitih pravaca propagacije za slučaj antisimetričnih deformacija. Ove disperzione krive su dobijene iz egzaktnih jednačina i njihovi oblici su slični dobro poznatim oblicima za izotropni materijal s tim što fazna brzina anizotropnog materijala, u oblasti dugih talasa, raste mnogo brže sa porastom kh nego fazna brzina izotropnog materijala. Da smo izabrali materijal sa jačim vlaknima ovo bi bilo još izraženije tako da možemo da zaključimo da neekstenzibilno rešenje fazne brzine treba da se posmatra kao rešenje koje ima diskontinualni skok od nule do $\sqrt{d/\rho}$ u slučaju beskonačno dugih talasa kada $kh \rightarrow 0$. Za infinitezimalno kratke talase, kada $kh \rightarrow \infty$, sve krive teže Rayleigh-evim talasnim brzinama koje su date na slici 5.7.

Egzaktna rešenja za raspored pomeranja po debljini ploče, za antisimetrične deformacije, pri specificiranom poluuglu između dveju familija vlakana $\phi = 33^{\circ}12'39''$ ($\sin^2 \phi = 0,3$) i specificiranom uglu propagacije $\alpha = 18^{\circ}26'6''$ ($\sin^2 \alpha = 0,1$) za tri različite talasne dužine je dat na slici 5.10. Za ovaj primer, prema jednačini (3.73), imamo da je $\epsilon^2 = 0,08279$ i sa slike 5.10 je očigledno da su sve promene pomeranja reda ϵ tako da se u granici neekstenzibilnosti gube što je jasno demonstrirano u izrazima (3.100) koji predstavljaju perturbaciona rešenja egzaktnih jednačina za pomeranja kada pretpostavimo da je materijal jako anizotropan. Egzaktna rešenja za pomeranja pokazuju, što je demonstrirano na slici 5.10, da je za duge talase (krive 1) u skoro konstantno dok V i W imaju skoro linearnu promenu po debljini ploče. Za kratke talase (krive 3), međjutim, pomeranja su svuda mala sem u uskoj oblasti blizu slobodne konture ploče u kojoj imaju konačne vrednosti. Ovo je u vezi sa efektima površinskih talasa a prelazna rešenja između dugih i kratkih talasa su demonstrirana srednjim talasima (krive 2). Isti podaci su korišćeni na slikama 5.13 do 5.18 da bi se prikazala promena napona po debljini ploče. Za druge talase (krive 1) naponi $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{12}$ i $\bar{\sigma}_{13}$ su svuda mali dok se naponi $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{33}$ i $\bar{\sigma}_{23}$ menjaju skoro linearno po debljini pokazujući osobine klasičnih rešenja savijanja. Za kratke talase (krive 3), međjutim, normalni napon $\bar{\sigma}_{11}$ je još uvek mali a smicajni naponi $\bar{\sigma}_{13}$ i $\bar{\sigma}_{12}$ su skoro konstantni po debljini da bi u blizini konture naglo pali na nulu. Normalni

naponi $\bar{\sigma}_{22}$ i $\bar{\sigma}_{33}$ i smicajni napon $\bar{\sigma}_{23}$ imaju svi sličan, po obliku krivih, raspored po debljini ploče to jest svuda su mali sem u uskoj oblasti blizu konture ploče gde dostižu velike vrednosti. Ovi oblici krivih su u vezi sa efektima površinskih talasa ali su visoke vrednosti napona na konturi posledica jake anizotropije a u granici neekstenzibilnosti bi se transformisale u singularitete oblika δ funkcije kako i neekstenzibilna teorija predvidja. Prelazno ponašanje rešenja izmedju dugih i kratkih talasa je dato srednjim talasima (krive 2). Sve ove osobine jasno proizilaze i iz perturbacionog rešenja egzaktnih jednačina za napone (3.103) za slučaj jako anizotropnog materijala.

Perturbaciona rešenja, dobijena iz egzaktnih rešenja za slučaj jake anizotropije, za disperzionu relaciju (3.91), pomeranja (3.100) i napone (3.103) veoma dobro reprezentuju egzaktna rešenja za antisimetrični mod ali da bi se dobila trebalo je naći egzaktna rešenja posle veoma mukotrpnog izračunavanja. Zbog toga smo četvrtu glavu posvetili nalaženju prostijih aproksimativnih rešenja za jako anizotropne materijale koja bi korektno reprezentovala egzaktna rešenja u čitavoj oblasti talasnih dužina.

Za kratke talase, kada je $kh \gg 1$, imali smo singularni perturbacioni problem kao što je pokazano u odlejkju 4.3. Kao rezultat razvoja fazne brzine dobili smo Rayleigh-eve površinske talase polubeskonačnog prostora i za simetrične i za antisimetrične deformacije što može da se objasni time da pri tako malim talasnim dužinama ploča konačne debljine deluje kao polubeskonačna oblast. Promene Rayleigh-eve talasne brzine, za naš primer kompozita sa poluuglom izmedju dveju familija vlakana datim sa $\sin^2 \phi = 0,3$, je data na slici 5.7 pri čemu smo koristili egzaktnu jednačinu (3.55) i aproksimativnu jednačinu (3.99). Razlog zbog koga neekstenzibilna teorija predvidja Rayleigh-eve talase samo kada je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana je objašnjen uz sliku 5.6 kada smo originalna vlakna veštački napravili jačim.

Za duge talase, $kh \ll 1$, iz osnovnih jednačina smo zaključili da se radi o regularnom perturbacionom problemu u kome smo pomeranja i faznu brzinu razvili u redove po stepenima kh kao što je pokazano u odeljku 4.4. Kada smo ove redove ubacili

u osnovne jednačine dobili smo beskonačni sistem jednačina koji može sukcesivno da se rešava počevši od članova najnižeg reda. Rešenja za fazne brzine do $O(k^3h^3)$ su data jednačinama (4.34), za antisimetrične deformacije, i (4.41) za simetrične deformacije. Ova aproksimativna rešenja nisu bila zadovoljavajuća jer su važila samo u ograničenoj oblasti talasnih dužina to jest nisu davala informacije o rešenjima za kh reda 1 a i jaka anizotropija nije bila eksplicitno uključena u razmatranje.

Za $kh = O(1)$ osnovne jednačine sadrže samo mali materijalni parametar ϵ a u graničnoj vrednosti, kada $\epsilon \rightarrow 0$, smo reprodukovali jednačine idealizovanog materijala koji je neekstenzibilan u pravcu vlakana. U odeljku 4.5 je dokazano da rešenja za neekstenzibilni materijal mogu da se posmatraju samo kao prvi članovi spoljašnjih rešenja koja je trebalo uskladiti sa unutrašnjim rešenjima koja su morala da zadovolje konturne uslove. Dokazano je da je najbolji način za konstrukciju unutrašnjih rešenja bio da se u razmatranje uključe dva mala parametra to jest geometrijski parametar kh uz materijalni parametar ϵ . Ovo je postignuto uvodjenjem novog parametra $m=kh/\epsilon$ kao što je u proučavanju transverzalno izotropnih materijala činjeno od strane Green-a (1984) i Green-a i Milosavljevića (1984). Prvi članovi tako dobijenih unutrašnjih rešenja su bili uskladjivani sa prvim članovima spoljašnjih rešenja koja su, kako je i ranije rečeno, bila reprezentovana neekstenzibilnim rešenjima. Na ovaj način smo, za antisimetrične deformacije, dobili izuzetno slaganje sa egzaktnim rešenjima. Ovo slaganje je demonstrirano, za kompozitni materijal kod koga je $\sin^2\phi = 0,3$ i pravac propagacije $s^2 = \sin^2\alpha = 0,1$, za disperzione krive na slici 5.8 a za raspored pomeranja V i W po debljini ploče za tri različite talasne dužine na slikama 5.11 i 5.12 respektivno. Štaviše dokazano je da čak i za kinematski dopustive deformacije kod neekstenzibilnog materijala (kada je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana), kada je i spoljašnje rešenje disperzivno možemo da primenimo istu proceduru uskladjenog kompozitnog razvoja za dobijanje aproksimativnih rešenja koja se isto tako dobro slažu sa egzaktnim. Ovo je za disperzionu krivu, za $\sin^2\phi = 0,3$ i $\sin^2\alpha = 0,7$, pokazano na slici 5.9. Uskladjivanje kvadrata fazne brzine na slici 5.9 je učinjeno u skladu sa jednačinama (4.78) i (4.81). Tako dobro

slaganje može da se prikaže za bilo koji ugao između vlakana i bilo koji pravac propagacije.

Predloženo aproksimativno rešenje za antisimetrične deformacije, koje izazivaju savijanje, iz odeljka 4.5 je po svoj prilici najznačajniji doprinos ove disertacije i može da posluži i za drugačiju geometriju problema a takodje i za dobijanje napona.

Za simetrične deformacije smo videli, u drugoj glavi za neekstenzibilne materijale, da smo za proizvoljni ugao propagacije opet morali da pretpostavimo postojanje singularnih vlakana na gornjoj i donjoj konturi ploče i kao posledice toga singularnosti oblika δ funkcije za napone σ_{22} , σ_{33} i σ_{23} i diskontinuitete za napone σ_{13} i σ_{12} na konturama ploče. Pomeranja u ravnima paralelnim konturama ploče su imala vrednosti $u_2 = u_3 = 0$ za bilo koji pravac propagacije sem u slučaju kinematski dopustivih deformacija to jest kada je pravac propagacije bio normalan na jednu od familija vlakana kada smo imali i netrijvalna rešenja za u_2 i u_3 koja su dala vektor pomeranja normalan na drugu familiju vlakana. Fazna brzina, pomeranja i naponi za proizvoljni pravac propagacije su dati izrazima (2.25), (2.26) i (2.27) respektivno. Za kinematski dopustive deformacije disperziona relacija je data sa (2.53) dok su pomeranja i naponi dati sa (2.72) i (2.73) respektivno. Izraz (2.25) za faznu brzinu je pokazao da za graničnu vrednost, kada $kh \rightarrow 0$, fazna brzina teži beskonačnosti što znači da postoji prelomna frekvencija koja je data jednačinom (2.29). Egzaktna rešenja, data u trećoj glavi, za ekstenzibilna vlakna su imala slične matematičke oblike onima koje smo imali pri antisimetričnim deformacijama. Disperziona relacija je data u (3.21), pomeranja u (3.25) a naponi u izrazima (3.29). Da bismo ih analizirali napravili smo iste transformacije kao i pre pa je bilo relativno lako naći fazne brzine beskonačno dugih i infinitezimalno kratkih talasa. Jednačina (3.61), za faznu brzinu beskonačno dugih talasa, je jasno pokazala da imamo dva rešenja (3.63) za kvadrat fazne brzine od kojih je jedno odgovaralo kvazilongitudinalnim talasima a drugo kvazitranverzalnim talasima. Koje rešenja fazne brzine odgovara kvazilongitudinalnim a koje kvazitranverzalnim talasima može da se zaključi samo analizom izraza (3.68) ili (3.69) koji daju tangense uglova između talasnog vektora i vektora pomeranja. Jednačina (3.61) je

napisana u veoma pogodnom obliku za konstrukciju kontura faznih brzina beskonačno dugih talasa, kada $kh \rightarrow 0$, kao funkcije ugla propagacije. Konstrukcija ovih krivih je prikazana na slikama 5.19 i 5.20 za $\phi=0$ i $\phi=45^\circ$ respektivno. Ovo su specifični slučajevi jer za $\phi=0$ materijal postaje transverzalno izotropan (ojačan jednom familijom vlakana) a za $\phi=45^\circ$ imamo dve dodatne ravni simetrije koje su obe normalne na ravni ploče i seku je duž vlakana. Za tipičan ugao između dveju familija vlakana, dat sa $\sin^2\phi=0,3$, na slici 5.21 su konstruisane konture odnosa kvadrata faznih brzina sa d/ρ . Dakle pošto su nacrtane krive h_2/d i h_3/d konstruisali smo srednju liniju $(h_2+h_3)/2d$ i onda je za svaki ugao propagacije α na njih trebalo dodati i oduzeti vrednosti $\delta/2d$ datih sa (3.67). Na toj slici su isprekidanim linijama predstavljene fazne brzine kvazilongitudinalnih i kvazitransverzalnih talasa datih sa (3.154)_{2,3}. Sa slika je lako uočiti da u slučaju beskonačno dugih talasa fazne brzine imaju vrednosti koje su veoma bliske odgovarajućim brzinama talasa u beskonačnom medijumu. Ugao vektora pomeranja u ravni ploče γ_2 , za $\sin^2\phi=0,3$, sa promenom pravca propagacije je prikazan na slici 5.22 a razlika $\alpha-\gamma_2$ na slici 5.23. Ovi uglovi se odnose na veću faznu brzinu v_2 . Sa slike 5.23. je lako zaključiti da je propagacija većom brzinom kvazilongitudinalna za uglove propagacije između nule i α_t i kvazitransverzalna za uglove propagacije između α_t i 90° . Manjom faznom brzinom, naravno, talas propagira kao kvazitransverzalan za $\alpha \in (0, \alpha_t)$ i kao kvazilongitudinalan za $\alpha \in (\alpha_t, 90^\circ)$. Drugačiji ali i realniji pogled na konture faznih brzina je dat na slici 5.24, za $\sin^2\phi=0,3$, gde je promena faznih brzina prikazana u ravni ploče. Sa slike je jasno da manja fazna brzina dostiže najniže vrednosti kada je pravac propagacije u blizini normale na jednu od familije vlakana. Ovo može biti pokazano za bilo koji drugi ugao između vlakana što je jasno i sa slika 5.19 i 5.20. Slično razmatranje korišćenjem teorije mešavina za propagaciju talasa u anizotropnim laminatima sa dve familije vlakana je dato u radu Murakami-a i Hegemier-a (1980). Ovo razmatranje je bilo ograničeno na ravansko kretanje za različite materijale i oni su prikazali samo rezultate numeričkih izračunavanja kontura faznih brzina bez analitičkih iz-

raza. Oni nisu zapazili vezu između minimuma manje fazne brzine i normala na vlakna, koja može da se zaključi i iz njihovih numeričkih rezultata, koja je važna za objašnjenje modova koji u neekstenzibilnoj teoriji nastaju pri kinematski dopustivim deformacijama.

Egzaktna disperziona jednačina ekstenzibilnog materijala za simetrične deformacije je data u (3.21) i za naš primer materijala, sa $\sin^2\phi=0,3$, disperzione krive za pet različitih pravaca propagacije i veće fazne brzine, koje za $kh \rightarrow 0$ odgovaraju kvazilongitudinalnim talasima, su date na slici 5.25. Sa ove slike može da se zapazi da se za bilo koji pravac propagacije beskonačno dugi talasi prostiru veoma velikim faznim brzinama koje kada kh postane veličina reda jedan naglo padaju naniže do vrednosti koje su blizu vrednostima talasnih brzina smicanja $\sqrt{d/\rho}$. Aproksimativne presečne tačke sa smičućim brzinama su date u (3.21) i zatim, kada $kh \rightarrow \infty$, ove krive asimptotski teže Rayleigh-evim talasnim brzinama datim na slici 5.7. ali ove nisu prikazane ovde jer smo mi uglavnom bili zaokupljeni jakom disperzijom koja se javlja pri srednjim i velikim talasnim dužinama.

Osnovna teškoća u konstrukciji aproksimativnih rešenja simetričnih modova nastaje zbog činjenica da za duge talase fazne brzine postaju veoma velike tako da ne možemo da koristimo uskladjeni asimptotski razvoj jer bi uporedne fazne brzine težile beskonačnosti. Predloženo aproksimativno rešenja za fazne brzine, dato u odeljku 4.6, ima diskontinualnosti reda jedan pri prelomnim frekvencijama spoljašnjih rešenja što je demonstrirano na slikama 5.26 i 5.27 za $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2=0,1$ i $s^2=0,7$ respektivno. Ove krive odgovaraju većim faznim brzinama ali konstrukcije rešenja za manje fazne brzine su veoma slične naročito za materijale sa veoma jakom anizotropijom. Jedini izuzetak je kada je pravac propagacije normalan na jednu od familija vlakana kada egzaktno rešenje za manje fazne brzine može da se aproksimativno izrazi neekstenzibilnim rešenjima kao što je pokazano na slici 5.28 za $\sin^2\phi=0,3$ i $s^2=0,7$.

Aproksimativna rešenja (4.99), kao što je i ranije napomenuto, mogu da se posmatraju samo kao prva aproksimacija a da bismo ih popravili neophodno je ispitati ponašanje i fазне brzine i pomeranja i napona u blizini prelomnih frekvencija spoljašnjih rešenja i to će biti jedan od ciljeva daljih istraživanja.

Rad prezentiran na XVII Jugoslovenskom kongresu teorijske i primenjene mehanike, Milosavljević (1986), je baziran na istraživanjima Rayleigh-evih talasa vršenih u okviru ove teze, a deo vezan za uskladjena aproksimativna rešenja biće prezentiran na Euromech-u 214.

L I I E R A T U R A

- Achembach, J.D., (1973), Wave Propagation in Elastic Solids, North Holland, Amsterdam.
- Achembach, J.D., (1975), A Theory of Elasticity with Microstructure for directionally Reinforced Composites, CISM, Udine.
- Atkin, R.J., Fox, N., (1980), An introduction to the theory of Elasticity, Longman, London.
- Bender, C.M., Orszag, S.A., (1978), Advanced methods for scientist and Engineers, Mc Graw-Hill.
- Chadwick, P., Smith, G. D., (1977), Foundations of the Theory of surface Waves in Anisotropic Elastic Materials, in Advances in Applied Mechanics, Vol. 17, Academic Press, New York.
- Chen, P.J., Gurtin, M.E., (1974), On wave propagation in inextensible elastic bodies, Int. J. Solids Structures.
- Currie, P.K., (1974), Rayleigh waves on elastic crystals, QJMAM, 27.
- Erdélyi, A., (1956), Asymptotic expansions, Dover.
- Graff, K.F., (1975), Wave Motion in Elastic Solids, Ohio State University Press, Columbus.
- Fedorov, F.I., (1968), Theory of Elastic Waves in Crystals, Plenum Press, New York.
- Green, A.E., Adkins, J.E., (1960), Large elastic deformations, Clarendon Press, Oxford.
- Green, W.A., (1978), Wave propagation in strongly anisotropic materials, Archiv of Mechanics.
- Green, W.A., (1982), Bending Waves in strongly anisotropic elastic plates, QJMAM, 35.

- Green, W.A., (1984), Report on Research Grant GR/C 39552, Nottingham.
- Green, W.A., Milosavljević, D., (1984), Talasi savijanja u jako anizotropnim pločama i cilindrima, XVI Jugoslovenski Kongres Teorijske i primenjene mehanike, Bečići.
- Green, W.A., Milosavljević, D., (1985), Extensional Waves in strongly Anisotropic elastic Plates, Int. J. Solids Structures, Vol 21, No.4.
- Gurtin, M.E., (1981), An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, New York.
- Hashin, Z., (1972), Theory of Fiber Reinforced Materials, NASA Contractor Report No.1974.
- Hearmon, R.F.S., (1961), An introduction to applied anisotropic elasticity, University Press, Oxford.
- Kittel, C., (1976), Introduction to Solid State Physics, John Wiley, New York.
- Lekhnitskii, S.G., (1963), Theory of elasticity of an anisotropic body, Holden Day, San Francisco.
- Love, A.E.H., (1944), A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (reprint of the 4th ed. 1927), Dover, New York.
- Markham, M. F., (1970), Measurement of the elastic constants of fibre composites by ultrasonics, Composites, 1.
- Mićunović, M., Milosavljević, D., (1983), Rayleigh-Lamb waves in an infinite fibre - reinforced elastic plate, Theoretical and Applied Mechanics, Beograd.
- Miklowitz, J., (1966), Elastic Waves Propagation, in Appl. Mech. Surveys, eds. N.H. Abramson et al., Spartan Books, Washington.

- Miklowitz, J., (1978), *The Theory of Elastic Waves and Wave Guides*, North Holland, Amsterdam.
- Milosavljević, D., (1980), *Prostiranje talasa u vlaknima ojačanom elastičnom sloju*, Magistarski rad, Kragujevac.
- Milosavljević, D., (1986), *Površinski talasi u ortotropnim elastičnim materijalima*, XVII Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Zadar.
- Mindlin, R.D., Medick, M.A., (1959), *Extensional vibrations of elastic plates*, *Journal of Appl. Mechanics*, 26.
- Murakami, H., Hegemier, G.A., (1980), in *Mechanics Today*, Vol. 5, ed. by s. Nemat-Nasser, Perg. Press.
- Musgrave, M.J.P., (1970), *Crystal Acoustics*, Holden-Day, San Francisco.
- Hayfeh, A.H., (1973) *Perturbation Methods*, Wiley-Interscience, New York.
- Nowacki, W., (1963), *Dynamics of Elastic System*, Wiley, New York.
- O'Malley, R.E., (1974), *Introduction to Singular Perturbations*, Academic, Press, New York.
- Pao, Y.H., (1983), *Elastic Waves in Solids*, *Trans. of the ASME*, Vol. 50.
- Parker, D.F., (1981), *Elastic wave propagation in strongly anisotropic solids*, *Lectures in F.R.M.*, Udine.
- Redwood, M., (1960), *Mechanical Waveguides*, Pergamon Press, New York.
- Sayir, M., (1980), *Flexural Vibrations of Strongly Anisotropic Beams*, *Ingenier Archiv*.
- Scott, N., (1975), *Acceleration waves in constrained elastic materials*, *Arch. Rat. Mech. Anal*.

- Socolnikoff, I.S., (1956), Mathematical theory of elasticity, Mc Graw Hill, New York.
- Spencer, A.J.M., (1971), "Theory of invariants", Continuum Physics, Vol. 1, Academic Press.
- Spencer, A.H.M., (1972), Deformations of fibre - reinforced materials, Clarendon Press, Oxford.
- Spencer, A.J.M., (1980), Continuum Mechanics, Longman, London.
- Spencer, A.J.M., (1981a), From "Mechanics of Structured Media", ed by Selvadurai, A.P.S., Elsevier, Amsterdam.
- Spencer, A.J.M., (1981b), Constitutive theory for strongly anisotropic Solids, Lectures in F.R.M., Udine.
- Tewary, V.K., (1978), Mechanics of fibre composite, John Wiley, New York.
- Truesdell, C., Noll, W. (1965), The non-linear field theories of mechanics, Handbuch der Physik III/3, Springer.
- Van Dyke, M., (1975), Perturbation methods in fluid mechanics, The Parabolic Press, Stanford.
- Cauchy, A.L., (1828), Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide, Exercices de mathématique, Vol.3.,
- Chree, C., (1889), The equations of an isotropic elastic solid in polar and cyl. co-ords., Trans. Cambridge Phil. Soc., 14.
- Knott, C.G., (1889), Reflection and refraction of elastic waves with seismological applications, Phil. Mag., 48.
- Lamb, H., (1917), On waves in an elastic plate, Proc. Roy. Soc. Lond. (A), 93.

- Pochhammer, L., (1876), *Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder*, *J. für Math.*, Vol. 81.
- Poisson, S.D., (1828), *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*, *Mem. Acad. Sci. Paris*, t.8.
- Rayleigh, Lord, (1887), *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid*, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 17.
- Rayleigh, Lord, (1888), *On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter*, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 20.

