UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

O KRETANJU REONOMNIH SISTEMA

- doktorska disertacija -

Mila Kažić

Beograd, 1987. god.

S a d r ž a j

str.

PREDGOVOR

U toku izrade magistarske teze "Stabilnost ravnotežnog stanja reonomnih neholonomnih sistema" naišla sam na mnoga pitanja vezana za reonomne probleme na koja u literaturi nijesam mogla naći odgovarajući odgovor, niti sam bila u stanju sama da ga dam.

Nakon dubljeg uvida u literaturu, koja se bavi analitičkom mehanikom uopšte, može se reći da reonomni problemi nijesu dovoljno zastupljeni. U većini djela definišu se reonomne veze, daju primjeri tih veza, odnosno sistema potčinjenih tim vezama, u raznim koordinatnim sistemima, nakon čega se prelazi na detaljno proučavanje skleronomnih sistema.

Postoje dva razloga koja objašnjavaju ovaj postupak. Prvi je da su skleronomni sistemi, u principu, jednostavniji za proučavanje i da su široko zastupljeni. Drugi, možda jači razlog, je da je klasifikacija mehaničkih sistema uslovna, tj. da zavisi od subjektivnih faktora i objektivnog poznavanja nekog mehaničkog problema. Objasnićemo to na primjeru.

Materijalna tačka se nalazi na glatkoj horizontalnoj ravni. Za nju je privezan konac koji ulazi u otvor na stolu konstantnom brzinom a. Treba odrediti silu S u koncu i konačne jednačine kretanja, ako su zadati početni uslovi $r_o = R$, $V_{\varphi o} = V_o$, $V_{ro} = -a$

Ovo je jednostavan zadatak koji se efikasno rješava u polarnim koordinatama. Klasifikujemo ga u grupu problema sa dva stepena slobode. Kod njega je jedna jednačina kretanja implicitno zadata ($r = R - at$) tako da se iz dveju diferencijalnih jednačina kretanja odredjuje druga konačna jednačina kretanja

$$\left(\varphi = \frac{RV_o}{a(R-at)}\right) \text{ i sila S u koncu } \left(S = \frac{mR^2V_o^2}{(R-at)^3}\right)$$

Ovim je zadatak u potpunosti riješen. Jedina veza je uslov da je kretanje u ravni ($z = 0$).

Medjutim, rješavanju ovog zadatka mogli smo pristupiti na drugi način. Na kretanje materijalne tačke djeluju dvije veze

$$f_1 = z = 0, \qquad f_2 = r - R + at = 0,$$

od kojih je druga reonomna, pa i problem svrstavamo u klasu holonomnih reonomnih problema. Smatramo da se tačka kreće po krugu čiji se poluprečnik r mijenja po zakonu $r=R-at$. Treba odrediti konačne jednačine kretanja i reakcije veze. U ovako formulisanom problemu ne pojavljuju se konac i ravan kao veze, tj. veze nijesu zadate opisno, već je ograničenje slobode kretanja zadato matematičkim relacijama.

Zadatak se može riješiti na primjer Hamiltonovim kanonskim jednačinama u proširenom faznom prostoru V_{2n+2} (što će na odgovarajućem mjestu u radu i biti učinjeno) ili u neproširenom prostoru V_{2n}.

Istovjetno rješenje, što se tiče konačnih jednačina kretanja, imao bi i ovako formulisan problem: Tačka se kreće u ravni i na nju djeluje privlačna centralna sila $S = -m\dfrac{R^2V_o^2}{(R-at)^3}$. Odrediti konačne jednačine kretanja ako je tački saopštena početna brzina V_o upravno na pravac dejstva sile.

U ovom slučaju sila S je unaprijed zadata i to je aktivna sila koja djeluje na posmatranu tačku. Ako je kretanje tačke ostvareno uvlačenjem konca, sila se pojavljuje kao reakcija veze, no, "presjecanjem" konca tačka postaje slobodna i prema sili u koncu se odnosimo kao prema aktivnoj sili.

Ako problem tretiramo kao reonoman, postojanje reakcije veze nije tako očigledno. Rješavanjem zadatka pomoću Lagranževih jednačina prve vrste, sila u koncu je sadržana u "potencijalu" $\lambda_2 f_2$, ako se zadatak rješava pomoću Lagranžovih jednačina druge vrste, "izgubiće" se sila reakcije veze.

Proučavanjem ovog jednostavnog primjera bliže smo objasnili što podrazumijevamo pod pojmom "uslovna klasifikacija".

Time ne samo da je objašnjena i opravdana nedovoljna proučenost reonomnih sistema u literaturi, već se sugeriše da se i dalje ispituje mogućnost da se osobini reonomnosti problema daju neka druga svojstva.

U ovom radu ta ideja je iskorišćena tako da se reonoman problem tretira kao složeno kretanje. Kretanje tačke po vezi smatra se za relativno kretanje, a kretanje tačke zajedno sa reonomnom vezom smatra se za prenosno kretanje. Na taj način ukupno ubrzanje, pored relativne i prenosne komponente, sadrži i takozvano "dopunsko" ubrzanje. Ono se sastoji od simetričnog i antisimetričnog dijela, gdje je ovaj drugi dio, u stvari, Koriolisovo ubrzanje.

Doprinos ovog rada je i u tome da je proučena mehanička energija reonomnog sistema i dat je zakon o održanju mehaničke energije za ove sisteme. Ovo pitanje je prilično proučavano u poslednje vrijeme. Pojavili su se i sukobi mišljenja o smislu postojanja tog zakona kada se radi o reonomnim problemima.

Odgovor dat na to pitanje u ovom radu je potvrdan. Ne samo da ima smisla postavljati pitanje o postojanju integrala energije reonomnog sistema, već je dat i uslov koji posmatrani reonomni sistem mora da ispunjava da bi postojao prvi integral. U ovom zadatku je važno da se unaprijed jasno definiše pojam mehaničke energije reonomnog sistema, jer to u literaturi nije jednoznačno učinjeno.

Nepostojanje jednoznačnosti u proučavanju reonomnih problema pojavljuje se i pri njihovom proučavanju u proširenom faznom prostoru V_{2n+2}. Naime, pokazuje se ne samo na reonomne probleme, da je nekad pogodno kretanje sistema proučavati u faznom prostoru, koji je proširen promjenljivim $q^o=t$ i p_o. U literaturi su poznata dva načina na koja se uvodi generalisani impuls p_o. U disertaciji su oba metoda navedena, analizirana i uporedjena.

Osim toga, ne pledirajući da to nigdje ranije nije učinjeno, samostlano su izvedene diferencijalne jednačine kretanja neholonomnih reonomnih sistema i dati uslovi kojima se odredjuju položaji i stanja ravnoteže ovih sistema.

Sa nešto širim uvodom ovi prilozi proučavanju reonomnih problema čine cjelinu i sadržaj ove disertacije.

Daleko od pomisli da sam ovim radom zatvorila krug oko teme koja je obradjivana, svjesna da sam problem teze tek "načela" i da mom radu mnogo što ima da se doda i pojasni,

ja se najtoplije zahvaljujem svom mentoru Prof. Dr Veljku Vujičiću, koji je imao razumijevanja za moje zastoje i lutanja u radu. Uz njegovu veliku pomoć ovaj rad je i okončan.

Svome kolegi Ranislavu Bulatoviću, zahvaljujem se na mnogim korisnim razgovorima i sugestijama.

U V O D

Proučavajući razvoj mehanike kao nauke, od njenih početaka vezanih za antičko doba do današnjeg doba, primjećujemo da je njen razvoj tekao skokovito - mirni periodi smjenjivali su se sa periodima izuzetne aktivnosti.

Na primjer, važna otkrića odigrala su se u doba Aristotela i Arhimeda (II i III v.p.n.e), zatim Keplera i Galileja (XVII v.) da bi Njutnovim (Newton) "Philosophiae naturalis principia mathematica" (1687.g.) bila stvorena Njutnova mehanika. U njoj je osnovni problem dinamike sistema formulisan pomoću Njutnovih zakona, tj. pomoću Njutnovih jednačina kretanja.

Naredna epoha važnih otkrića vezana je za imena Bernulija (Bernoulli), Ojlera (Euler), Dalambera (D'Alembert) i Lagranža (Lagrange). Što godina nakon Njutnovih "Principa" Langranževom "Mechanique analitique" (1788.g.) otvara se nova oblast mehanike - Lagranževa mehanika, u kojoj, da bi se formulisao osnovni problem mehanike sistema, treba uvesti pojam virtualnog pomjeranja.

Sledeća grupa naučnika Pauson (Poisson), Hamilton (Hamilton), Jakobi (Jacobi) i Gaus (Gauss)postavljaju temelje grani mehanike koja je poznata kao Hamiltonova mehanika.

U toku poslednjih stopedeset godina u razvoju analitičke mehanike nije bilo (ako se ne uzme u obzir Ljapunovljeva teorija o stabilnosti kretanja) ostvarenja čiji bi se značaj mogao porediti sa dostignućima slavnih prethodnika. To ipak ne znači da se u razvoju teorije nije napredovalo.

Posledica svega navedenog je da danas imamo takvu teorijsku mehaniku da ona na izuzetno zadovoljavajući način modelira realan svijet.

I DIO

KLASIČNA MEHANIKA REONOMNIH SISTEMA

1. Reonomne veze

Dinamika je nauka koja proučava kretanje, a kretanje se može predstaviti na razne načine. Može se proučavati u opažajnom prostoru (Njutnova mehanika), konfiguracionom prostoru (Lagranžova mehanika), faznom prostoru (Hamiltonova mehanika).

Važnu ulogu u proučavanju kretanja u ovim prostorima imaju "veze". Kretanje mehaničkih sistema je uvijek ograničeno, ima smisla govoriti o slobodnom kretanju samo pri posmatranju jedne materijalne tačke. Već pri kretanju dvije tačke ili bilo koja dva mehanička objekta ne možemo govoriti o slobodnom kretanju, jer je njihovo kretanje ograničeno bar uslovom da se ta dva objekta ne mogu u istom trenutku naći na istom mjestu.

Proučavnaje "veza" tj. ograničenja na kretanje mehaničkih sistema započinjemo njihovom klasifikacijom. U tom cilju posmatramo neki mehanički sistem. Neka se sistem sastoji od N materijalnih tačaka M_i $(i=1,\dots,N)$ čije su odgovarajuće mase m_i. Vektori položaja pojedinih tačaka u odnosu na neki izabrani Dekartov koordinatni sistem neka su $\vec{r}_i$, a prvi, drugi itd., izvod ovih vektora po vremenu označen je jednom, dvjema itd. tačkama iznad oznake vektora. Svaki od ovih vektora $\vec{r}_i$ ima svoje tri koordinate x_i, y_i, z_i. Umjesto 3N Dekartovih koordinata x_1, y_1, $z_1,\dots,$ z_N možemo uzeti bilo koji sistem koordinata u_j:

$$u_j = u_j(x_1, y_1, z_1, \dots, z_N, t) \qquad (j=1,\dots,3N)$$

Ove relacije moraju biti nezavisne i moraju dopuštati inverziju što je obezbijedjeno ispunjenjem uslova:

$$\frac{\partial(u_1,\dots,u_{3N})}{\partial(x_1,\dots,z_N)} \neq 0$$

Ograničenje kretanju sistema, bilo da ograničava samo položaje članova sistema ili samo brzine ili oboje, analitički se izražava na taj način što izmedju vektora položaja članova sistema, njihovih brzina i vremena postoje veze u obliku:

$$f_\alpha(t, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) \geq 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, K,\ i = 1, \ldots, 3N) \tag{1'}$$

a u skalarnom obliku u Dekartovim koordinatama dato je izrazom:

$$f_\alpha(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) \geq 0 \tag{1''}$$

dok se u generalisanim koordinatama zapisuje u obliku:

$$f_\alpha(t, u_i, \dot{u}_i) \geq 0 \tag{1'''}$$

Ovo su najopštiji mogući oblici veza. Na osnovu raznih njihovih osobina mogu se klasifikovati na razne načine:

- zadržavajuće (bilateralne) i nezadržavajuće (unilateralne veze),
- holonomne i neholonomne veze [1)]
- skleronomne i reonomne veze [2)]

---

1) Naziv potiče od Herca

2) Od grčkih složenica koje označavaju nepromjenljiv zakon i zakon koji se mijenja, teče

Zadržavajuće veze date su u obliku:

$$f_\alpha(t, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) = 0$$

i one bliže odredjuju moguće položaje i brzine sistema nego što to čine nezadržavajuće veze:

$$f_\alpha(t, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) > 0$$

koje daju samo oblasti u kojima su brzine i položaji mogući.

Holonomne veze (nazivaju se još i konačnim ili geometrijskim) ograničavaju moguće položaje sistema:

$$f_\alpha(t, \vec{r}_i) \geqslant 0 \tag{2'}$$

ili

$$f_\alpha(t, x_i, y_i, z_i) \geqslant 0 \qquad \alpha = 1, .., d, \; i = 1, ..., 3N) \tag{2''}$$

ili

$$f_\alpha(t, u_i) \geqslant 0 \tag{2'''}$$

One za sobom povlače i odgovarajuće diferencijalne relacije

$$\sum_i^N \operatorname{grad} f_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \geqslant 0 \tag{3'}$$

ili

$$\sum_i^N \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\dot{z}_i\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \geqslant 0 \tag{3''}$$

ili

$$\sum_i^{3N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_i}\dot{u}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \geqslant 0 \qquad (\alpha = 1, \dots, d) \tag{3'''}$$

ali samo u onim položajima u kojima je $f_\alpha = 0$.

Ako se veze zadate u obliku (3'), (3") ili (3''') ne mogu dobiti diferenciranjem nekog sistema oblika (2'), (2"), odnosno (2'''), one su neholonomne (nazivaju se još i diferencijalnim ili kinematičkim).

Napomenimo da neholonomne veze mogu na razne načine da zavise od brzina. Medjutim, najviše se proučavaju veze u kojima su brzine zadate linearno:

$$\sum_i^N \vec{l}_{\beta i} \cdot \vec{V}_i + D_\beta \geqslant 0$$

ili

$$\sum_i^N (A_{i\beta}\dot{x}_i + B_{i\beta}\dot{y}_i + C_{i\beta}\dot{z}_i) + D_\beta \geqslant 0$$

ili

$$\sum_i^{3N} D_{i\beta}\dot{u}_i + D_\beta \geqslant 0 \qquad (\beta = 1, \dots, g).$$

gdje su $\vec{l}_{i\beta}$, $A_{i\beta}$, $B_{i\beta}$, $C_{i\beta}$, $D_{i\beta}$ i D_β funkcije od koordinata i vremena. Ako je $D_\beta = 0$ veze se nazivaju katastatičkim [1]. Ako veze ne sadrže vrijeme eksplicitno:

$$f_\alpha(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) \geqslant 0$$

ili

$$f_\alpha(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) \geqslant 0$$

ili

$$f_\alpha(u_i, \dot{u}_i) \geqslant 0$$

nazivamo ih skleronomnim.

Reonomne veze se mijenjaju sa vremenom i zadate su u obliku (1'), (1") ili (1''') u slučaju da su neholonomne, odnosno u obliku (2'), (2") ili (2''') ako su holonomne.

Postoji još jedna podjela veza na idealne i neidealne. Da bismo je objasnili moramo prethodno uvesti pojam virtualnog pomjeranja [2].

---

1) Od grčke riječi koja znači uredjeno.

2) Johan Bernuli (Johann Bernoulli) je 1717.g. uveo pojam virtualnog pomjeranja u slučaju holonomnih veza, a Furije (Gabriel Fourier) je 1798.g. te pojmove proširio i na druge oblike veza.

U relacijama (3'), (3") i (3''') vektor $\dot{\vec{r}}_i$, odnosno njegove koordinate $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$, ili koordinate $\dot{u}_i$ predstavljaju brzine dopuštene vezama. Nazivamo ih mogućim brzinama.

Sistem beskonačno malih pomjeranja

$$d\vec{r}_i = \dot{\vec{r}}_i \, dt$$

gdje su $\dot{\vec{r}}_i$ moguće brzine nazivamo mogućim pomjeranjima. Moguća pomjeranja se razlikuju od stvarnih u tome što prva ne moraju da zadovoljavaju i jednačine kretanja. Moguća pomjeranja karakterišu veze a ne i sam sistem. Drugim riječima stvarna pomjeranja su i moguća, ali obrnuto ne važi. Svaki beskonačno mali vektor koji leži u tangentnoj ravni definisanoj jednačinama veza je vektor mogućeg pomjeranja ako su veze holonomne i skleronomne.

Vektor virtualnog pomjeranja koji ima veoma važnu ulogu u Lagranževoj mehanici definišemo kao razliku dva vektora mogućih pomjeranja:

$$\delta\vec{r}_i = d_1\vec{r}_i - d_2\vec{r}_i$$

Ako su veze holonomne virtualna pomjeranja $\delta\vec{r}_i$, odnosno njegove koordinate δx_i, δy_i, δz_i, odnosno δu_i zadovoljavaju sledeće relacije:

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

odnosno

$$\sum_i^N \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0$$

odnosno

$$\sum_i^{3N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_i}\delta u_i = 0$$

dok u slučaju neholonomnih veza virtualna pomjeranja zadovoljavaju sledeće relacije:

$$\sum_i^N \vec{e}_{\beta i} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

odnosno

$$\sum_i^N (A_{i\beta}\delta x_i + B_{i\beta}\delta y_i + C_{i\beta}\delta z_i) = 0$$

odnosno

$$\sum_i^{3N} D_{i\beta}\delta u_i = 0$$

To znači da je svaki beskonačno mali vektor koji leži u tangentnoj ravni definisanoj jednom od prethodnih relacija vektor virtualnog pomjeranja. U slučaju skleronomnih holonomnih veza i katastatičkih neholonomnih veza virtualna pomjeranja su isto što i moguća pomjeranja. Sada smo u stanju da damo još jednu podjelu veza. To je podjela na idealne veze i one koje to nijesu. Pod idealnim vezama podrazumijevamo one kod kojih je rad reakcija veza na virtualnim pomjeranjima jednak nuli.

Mi ćemo se baviti idealnim, zadržavajućim reonomnim vezama, ograničavajući se ponekad samo na holonomnim vezama. Akcenat će uvijek biti na osobini reonomnosti veze, odnosno sistema na koji veza djeluje.

Navedimo nekoliko primjera reonomnih veza, odnosno sistema:

1. Materijalna tačka se kreće po sfernoj površi čiji se radijus mijenja sa vremenom. Ovo je primjer holonomne reonomne zadržavajuće veze. Jednačina veze biće zadata relacijom

$$f = |\vec{r}| - r(t) = 0$$

gdje su $|\vec{r}|$, $r(t)$ intenziteti radijus vektora, u Dekartovim koordinatama jednačina veze je

$$f \quad x^2 + y^2 + z^2 - r^2(t) = 0$$

a u sfernim koordinatama

$$f \quad \rho^2 - r^2(t) = 0$$

2. Dvije materijalne tačke M_1 (x_1, y_1, z_1) i M_2 (x_2, y_2, z_2), pričvršćene su štapom bez težine čija se dužina 1 mijenja sa vremenom. Jednačina veze u vektorskom obliku je:

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - \ell(t) = 0$$

a u Dekartovim koordinatama:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-\ell^2(t)=0$$

3. Ako je sistemu iz predhodnog zadatka nametnut još i uslov da je brzina središta štapa usmjerena duž štapa jednačine veza će u Dekartovim koordinatama u ravni biti

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-\ell^2(t)=0$$

$$\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_1-x_2}-\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_1-y_2}=0$$

$$z=0$$

Ovo je neholonomni reonomni sistem.

Postojanje veza (bilo reonomnih, bilo skleronomnih) otežava rešavanje mehaničkih problema na dva načina:

Prvo - koordinate x_i (odnosno u_i, odnosno vektori $\vec{r}_i$) nijesu nezavisne već su medjusobno povezane jednačinama veza, samim tim ni diferencijalne jednačine kretanja nijesu nezavisne;

Drugo - sile reakcija veza nijesu zadate unaprijed, one su medju nepoznatima sistema i moraju se izračunati da bi kretanje sistema u potpunosti bilo odredjeno. Postojanje veza koje ograničavaju kretanje sistema je implicitan način da se pretpostavi djelovanje sila koje nijesu direktno zadate.

Prvi problem se može riješiti uvodjenjem nezavisnih generalisanih koordinata a drugi formulisanjem problema, tako da se nepoznate reakcije veza ne pojave u matematičkim relacijama koje opisuju dato kretanje.

2. Diferencijalne jednačine kretanja (Njutnova, Lagranževa i Hamiltonova mehanika)

Posmatramo mehanički sistem koji se sastoji od N materijalnih tačaka na koji djeluje k=d+g reonomnih neholonomnih veza datih u obliku $f_\alpha(t, \vec{r_i}, \dot{\vec{r_i}})$. Pokazaćemo kako se problem kretanja ovog sistema rešava aparatom Njutnove, Lagranžove i Hamiltonove mehanike.

Neka na tačke M_i sistema djeluju sile $\vec{F_i}$ (i=1,...N). Ubrzanje i-te tačke koje bi na osnovu drugog Njutnovog zakona bilo izraženo relacijom $\vec{a_i} = \vec{F_i}/m_i$ neće biti saglasno sa vezama. Medjutim, uticaj veza na kretanje svake tačke sistema može se predstaviti silom $\vec{R_i}$ tako da drugi Njutnov zakon i dalje važi:

$$m_i \vec{a_i} = \vec{F_i} + \vec{R_i} \qquad \text{t.j.} \tag{4}$$

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + R_{ix} \qquad m_i \ddot{y}_i = Y_i + R_{iy} \qquad m_i \ddot{z}_i = Z_i + R_{iz} \tag{5}$$

O reakcijama veza $\vec{R_i}$ unaprijed znamo jedino to da diferencijalne jednačine kretanja moraju biti saglasne sa vezama. (Napomenimo da u slučaju trivijalne veze reakcije veze ne postoje).

Na taj način zadatak je nemoguće riješiti u potpunosti, jer je broj nepoznatih $x_1 y_1 z_1, \ldots z_N$, R_{1x}, $R_{1y}, \ldots R_{Nz}$ koje treba odrediti, za 6N-3N-d-g veći od broja skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja (5) i zadatih jednačina veza. Da bi ovaj zadatak postao rešiv treba postaviti još 3N-d-g relacija. Te relacije dobijamo ako se u našem posmatranju ograničimo na važnu klasu tzv. idealnih veza - tj. takvih veza čije reakcije na virtualnim pomjeranjima ne vrše nikakav rad:

Uvodjenjem pojma virtualnog pomjeranja ulazimo u oblast Lagranževe mehanike. Dok se u Njutnovoj mehanici sile dijele na unutrašnje i spoljašnje, dotle se u Lagranževoj mehanici dijele na aktivne (tj. date) sile u reakcije veza tako da uočavamo da klasifikacija sila u Njutnovoj i Lagranževoj mehanici nije ekvivalentna.

Prije nego pristupimo izvodjenju jednačina kretanja u Lagranževoj mehanici razložićemo date reonomne veze na holonomne i neholonomne gdje se na samom početku ograničavamo na važnu klasu neholonomnih zadržavajućih veza koje su linearne po brzinama:

$$f_\alpha = f_\alpha(t, \vec{r}_i) = 0 \qquad (\alpha = 1,\ldots, d) \tag{6}$$

$$\varphi_\beta = \sum_i^N \vec{l}_{\beta i} \cdot \vec{V}_i + D_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,\ldots, g) \tag{7}$$

Dobro poznatim postupkom iz uslova idealnosti veza i drugog Njutnovog zakona, dobijamo osnovne vektorske jednačine kretanja neslobodnog sistema sa množiocima veza:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_\alpha^d \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha + \sum_\beta^g \mu_\beta \operatorname{grad}_{\vec{V}_i} \varphi_\beta \tag{8}$$

koje su poznate i pod imenom Lagranževe diferencijalne jednačine prve vrste. Sam dvojni naziv ovih jednačina nagovještava prelazak iz Njutnove u oblast Lagranževe mehanike.

Uvodjenjem koordinata $(u_1, \ldots u_{3N}) \rightarrow \vec{r}_i = \vec{r}_i\,(u_1 \ldots u_{3N})$ prethodne jednačine se mogu napisati u koordinatnom obliku:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_m} - \frac{\partial T}{\partial u_m} = Q_m + \sum_\alpha^d \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_m} + \sum_\beta^g \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{u}_m} \qquad (m = 1, \ldots 3N) \tag{9}$$

gdje je T - kinetička energija a Q_m - generalisana sila.

Na taj način reakcije veza $\vec{R}_i = \sum_\alpha \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha + \sum_\beta \mu_\beta \operatorname{grad}_{\vec{V}_i} \varphi_\beta$ iz (8) imaju svoje odgovarajuće koordinate

$$Q'_m = \sum_\alpha^d \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_m} + \sum_\beta^g \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{u}_m} \qquad (m = 1, \ldots, 3N)$$

Diferencijalne jednačine kretanja neslobodnog materijalnog sistema u obliku (9) nazivaju se Lagranževe jednačine prve vrste, tj. Lagranževe jednačine sa množiocima veza. One se mogu interpretirati kao diferencijalne jednačine kretanja reprezentativne tačke u konfiguracionom prostoru V_{3N}. Nedovoljne su da u potpunosti riješe problem kretanja odgovarajuće reprezentativne tačke. Tek kad im dodamo d+g jednačina veza (6) i (7), sistem postaje potpun tako da možemo odrediti 3N+d+g nepoznatih funkcija $u_i, \lambda_\alpha, \mu_\beta$.

Uvodeći nezavisne generalisane koordinate $q^1 \dots q^n$ (čiji broj $n=3N-d$)

$$u_i = u_i(f_1, \dots, f_d, q^1_\alpha, \dots, q^n_\alpha, t) \quad (i=1,\dots,3N)$$

diferencijalne jednačine kretanja (9) svode se na oblik:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^i_\alpha} = Q_i + \sum_\beta^g \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}^i_\alpha} \quad (i=1,\dots,n) \tag{10}$$

čiji je broj za d manji nego jednačina (9).

Ove jednačine poznate su pod imenom Lagranževe jednačine druge vrste.[1] Uočavamo da neholonomne veze iako utiču na broj stepeni slobode, ne utiču na broj nezavisnih generalisanih koordinata, jer one ne odredjuju konstante integracije.

U slučaju holonomnih sistema sa potencijalnim silama $Q_i = \frac{\partial V}{\partial q^i_\alpha}$ jednačine (10) se svode na oblik

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^i_\alpha} = 0 \quad (i=1,\dots,n) \tag{11}$$

gdje je $L = T+V$ i naziva se Lagranževa funkcija.

U relaciji (8) - posmatramo kretanje tačaka u trodimenzionom prostoru i očekujemo u opštem slučaju da brzina, ubrzanje, aktivna sila i reakcija veze, imaju komponente u pravcu svih triju osa. Na taj način posmatrač je u stanju da registruje i komponente ovih veličina u tangentnoj ravni na pokretnu površinu i upravno na njih. To kretanje je zapisano sledećim diferencijalnim jednačinama:

$$(m_i\vec{a}_i - \vec{F}_i)_{norm.} + (m_i\vec{a}_i + \vec{F}_i)_{tan} = \vec{R}_{i\,norm.} + \vec{R}_{i\,tan.} \quad (i=1,\dots,n)$$

Kako se kretanje odvija u tangentnoj ravni i kako su veze idealne, slijedi da je $\vec{R}_{i\,tan} = 0$ i svaka od prethodnih jednačina se može razložiti na dvije:

$$(m_i\vec{a}_i - \vec{F}_i)_{norm.} = \vec{R}_{i\,norm}$$

1) U literaturi su poznate i kao Feresove (Ferres), jer ih je on (1871.g.), uopštio za neholonomne sisteme.

$$(m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i)_{tan} = 0$$

U slučaju (10) kretanje je opisano nezavisnim koordinatama, tj. sistem referencije je u samoj pokretnoj površi odnosno njenoj tangentnoj ravni i sve što se dogadja izvan te površi, ne može se datim aparatom registrovati. Dakle, mi samo možemo registrovati tangentne komponente brzine, date sile, ubrzanja i reakcije veze. No, kako je reakcija veze upravna na površinu ($R_{i\,tan}=0$) na ovaj način ne možemo o njoj ništa bliže reći.

Napomenimo da se pravac tangente pri reonomnim vezama u datoj tački na vezi mijenja sa vremenom, dok se u slučaju skleronomnih veza mijenja samo od tačke do tačke.

Uvodeći generalisane impulse $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ i Hamiltonovu funkciju $H = p_i \dot{q}^i - L = H(t, q^i, p_i)$ ulazimo u oblast Hamiltonove mehanike, gdje je kretanje holonomnog potencijalnog sistema opisano sistemom od 2n diferencijalnih jednačina prvog reda

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad (i=1,\dots,n) \tag{12}$$

Nastanak i razvoj Hamiltonove mehanike vezuje se za 30. godina XIX vijeka, kada je Hamilton postavio svoj opšti metod dinamike na osnovu optičko-mehaničkih analogija. Dva rada koja je u tom periodu objavio čine osnovu na kojoj se razvija analitička mehanika XIX vijeka.[1)]

Izlaganje svoga metoda integracije jednačina dinamike sistema Hamilton započinje razmatranjem kretanja nekoliko slobodnih materijalnih tačaka koje se nalaze pod dejstvom uzajamnog privlačenja i odbijanja.

U svom drugom radu Hamilton daje novu formu jednačina kretanja slobodnog sistema tačaka u proizvoljnom krivolinijskom sistemu koordinate $q^1, \dots, q^{3N}$. Polazeći od D' Alamberovog principa on izvodi Lagranževe jednačine u kojima umjesto izvoda

1)-On a general method in dynamics, by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function. - Philos. Trans. Roy.Soc.London,1834.pt II,p.247 - 308.
- Second essay on a general method in dynamics.-Philos.Trans.Roy.Soc.London, 1835, pt I.p. 95-144.

$\dot{q}^1 \ldots \dot{q}^{3N}$ uvodi nove promjenljive, dobivši na taj način svoj poznati sistem kanonskih jednačina (12), s tim da je $n=3N$ za slobodan sistem.

Hamiltonovi radovi inspirasili su mnoge naučnike tokom XIX vijeka. Medju tim radovima važno mjesto zauzimaju radovi Jakobija (Jacobi) koji se neposredno nastavljaju na Hamiltonove rezultate dajući im opštost. Jakobi iz Lagranževih jednačina druge vrste izvodi kanonske jednačine ne samo za slobodan sistem, već i za sistem podčinjen holonomnim vezama.

Napomenućemo da su još 1809. Lagranž i Puason nezavisno jedan od drugog izveli jednačine slične Hamiltonovim kanonskim, ali ni jedan od njih nije ih uočio kao osnovu jednačine kretanja (to je učinio tek Koši - 1831). Hamilton ih je, kao što smo pokazali, izveo 1834. iz osnovnog varijacionog principa i postavio ih u temelje dinamičke teorije, tako da one zaista zaslužuju da nose njegovo ime.

Sledeći korak je bio da se pokuša sa primjenom ove teorije i na neholonomne sisteme što je, na primjer, učinjeno u [19] a takodje i na reonomne sisteme vidjeti [17] i [25]. Usložnjavanje problema nametanjem neholonomnih i reonomnih veza ima za posledicu da se kretanje sistema ne može zapisati kanonskim jednačinama (u smislu da se mogu zapisati u obliku (12)) ali imaju sličnosti sa njima. Zato ih nazivamo diferencijalnim jednačinama u faznim promjenljivim i one će detaljnije bite izvedene u drugom dijelu ovog rada.

Dok nam se činilo pogodnim da uvedemo odredjenu geometriju u konfiguracioni prostor i pokazalo se da je to Rimanova geometrija, situacija je sada drugačija. Fazni prostor nema odredjenu metričku strukturu i radi pogodnosti možemo pretpostaviti da su q^i i p_i postavljeni kao pravougaone koordinate 2n dimenzionog Euklidskog prostora. Euklidska geometrija je dobra kao i bilo koja druga, jer ne postoji odredjeni razlog za uvodjenje metrike u fazni prostor.

Udvostručavanje dimenzija faznog prostora ima velike pogodnosti. Jedna od njih se uočava ako razmatramo geometrijsku interpretaciju ukupnosti svih puteva prvo u Lagranževom konfiguracionom prostoru, a zatim u Hamiltonovom faznom prostoru.x)

x) Ovaj naziv potiče od Gibsa (Gibbs).

Reprezentativna tačka u oba slučaja opisuje krivu. Medjutim, mnoga teorijska istraživanja ne bi se mogla obaviti ako izdvojimo samo jedno, partikularno rješenje (koje odgovara specijalnom izboru početnih uslova). Kretanje može početi iz svake tačke konfiguracionog prostora u svakom pravcu proizvoljnom početnom brzinom. Nemoguće je dobiti uredjenu reprezentaciju svih tih puteva. U faznom prostoru kretanje je predstavljeno jednačinama prvog reda. One odredjuju brzinu tačke ako je zadat njen položaj. Kretanje može početi iz bilo koje tačke faznog prostora, ali nakon zadavanja jedne tačke kretanje je jednoznačno odredjeno.

Kompletno rješenje kanonskih jednačina (12) je poznato ako su zadati q^i i p_i kao funkcije vremena i 2n konstanti integracije, koje mogu biti predstavljene kao 2n koordinata u trenutku t=0.

$$q^i = f^i\,(q_o^1, \ldots, q_o^n, p_{1o}, \ldots, p_{no}, t)$$

$$p_i = g_i\,(q_o^1, \ldots, q_o^n, p_{1o}, \ldots, p_{no}, t)$$

Ovo rješenje se može predstaviti na uredjen način bez ikakvog preklapanja ako 2n koordinata q^i i p_i smatramo različitim dimenzijama faznog prostora. Slika je još preglednija kad faznom prostoru dodamo još jednu dimenziju uvodjenjem koordinate $q^o=t$. (Kartan taj prostor naziva prostorom stanja). U tom slučaju dobijamo mnogostrukost krivih koje se nikad ne presijecaju. Ako bi se presijecale značilo bi da su moguće dvije tangente u jednoj tački faznog prostora, a to bi protivrječilo principu determinizma.

Hamiltonova mehanika nema prednosti što se tiče integracije diferencijalnih jednačina, ali nudi druge prednosti: dublji pogled na proučavanje dinamičkih sistema; isti status q i p (što nije slučaj sa q i $\dot{q}$)[x)]; omogućava veći nivo apstrakcije. Takodje je superniornija u pogledu indirektne integracije pogodnom transformacijom promjenljivih. Kako cikličke koordinate vode integralima kretanja, indirektan metod integracije se sastoji u transformaciji koordinata na taj način da se dobije što više cikličkih koordinata.

---

x) q i $\dot{q}$ su povezani nezavisno od načina na koji se sistem kreće, a q i p su povezani preko samih jednačina kretanja.

Vratimo se poznatom zadatku i riješimo ga na navedene načine. Posmatramo kuglicu zanemarljivih dimenzija koja se nalazi na glatkom horizontalnom stolu. Za kuglicu je privezan konac koji se brzinom a uvlači u otvor na stolu. U početnom trenutku kuglica ima brzinu v_o upravnu na konac, a dužina konca u tom trenutku je R.

Zadatak tretiramo kao reonoman problem i veze u polarno-cilindarskim koordinatama su:

$$f_1 \equiv z = 0$$
$$f_2 \equiv r - (R - at)$$

Lagranževe jednačine prve vrste su:

$$m\vec{a} = \lambda_1 \operatorname{grad}_{\vec{r}} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad}_{\vec{r}} f_2 - G$$

gdje su

$$\operatorname{grad} f_1 = \{0,0,1\} \quad \operatorname{grad} f_2 = \{1,0,0\} \quad G = \{0,0,-mg\}$$

Potpuni sistem od 5 jednačina sa 5 nepoznatih je:

$$m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda_2 \quad , \quad m a_\varphi = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0$$
$$m a_z = m\ddot{z} = \lambda_1 - mg \quad , \quad z = 0 \quad , \quad r - R + at = 0 \quad .$$

a rješenje ovog sistema je

$$r = R - at \, , \quad \varphi = \frac{Rv_o}{a(R-at)} \, , \quad z = 0 \, , \quad \lambda_1 = mg \, , \quad \lambda_2 = \frac{m(Rv_o)}{(R-at)}$$

tako da je sila u koncu $R_2 = m\frac{(Rv_o)^2}{(R-at)^3}$ a reakcija podloge je $R_1 = mg$

Pomoću Lagranževih jednačina druge vrste u nezavisnim generalisanim koordinatama zadatak rješavamo na sledeći način:

Odredjujemo broj stepeni slobode n=3-2=1 i za nezavisnu generalisanu koordinatu uzimamo polarni ugao φ . Kinetička energija, potencijalna funkcija, Lagranževa funkcija i generalisana sila su:

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}\left[a^2+(R-at)^2\dot{\varphi}^2\right] \quad , \quad V=0$$

$$L=T+V=\frac{m}{2}\left[a^2+(R-at)^2\dot{\varphi}^2\right], \quad Q=mg\vec{k}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=0$$

Jednačina kretanja je

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q \rightarrow \frac{d}{dt}\left[m(R-at)^2\dot{\varphi}\right]=0 \rightarrow m(R-at)^2\dot{\varphi}=mv_0R$$

tako da je rješenje $\varphi=\frac{Rv_0}{a(R-at)}$

Preostale dvije jednačine kretanja z=0 i r=R-at dobijaju se direrektno iz jednačina veza, a sila u koncu i reakcija podloge ne mogu se na ovaj način odrediti. Za to je potrebno postaviti dodatne jednačine. U ovom slučaju mogu se napisati diferencijalne jednačine kretanja u polarnim koordinatama koje, pošto su konačne jednačine kretanja poznate, neposredno daju rješenja za reakcije veza:

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=R_r \quad \rightarrow \quad R_r=-\frac{m(Rv_0)^2}{(R-at)^3}$$

$$m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})=0$$

$$m\ddot{z}=-mg+R_z \quad \rightarrow \quad R_z=mg$$

Primjenom Hamiltonovih kanonskih jednačina postupak je sledeći: Nezavisnoj generalisanoj koordinati φ (koja je kao i Lagranževa funkcija L, odredjena u prethodnom zadatku), odgovara generalisani impuls p

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\left\{\frac{m}{2}\left[a^2+(R-at)^2\dot{\varphi}^2\right\}=m(R-at)^2\dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi}=\frac{p}{m(R-at)^2}\right.$$

i Hamiltonova funkcija H

$$H = p\dot{\varphi} - L = \frac{p^2}{2m(R-at)^2} - \frac{ma^2}{2}$$

Odgovarajuće kanonske jednačine su

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{m(R-at)^2} \qquad \dot{p} = 0$$

tako da su njihova rješenja

$$\varphi = \frac{Rv_0}{a(R-at)} \qquad p = mRv_0 .$$

Kompletno rješenje (još dvije konačne jednačine kretanja i reakcije veza) posebno odredjujemo kao što smo to na primjer pokazali u prethodnom slučaju.

3. Integrali diferencijalnih jednačina kretanja

Zbog izuzetne važnosti koju imaju prvi integrali na proučavanje kretanja mehaničkih sistema, nastojimo da ih odredimo i u slučaju reonomnih sistema.

Za razliku od skleronomnih sistema sa konzervativnim silama za reonomne sisteme ne važi zakon o održanju energije u smislu njene definicije u Lagranžovoj mehanici. Medjutim, u literaturi je uobičajeno da se i prvi integrali jednačina kretanja koji imaju dimenziju energije nazivaju integralima energije. Poznati su

- Jakobijev integral $T_2-T_o=K(g,t)+h$ i
- Penleveov(Painleve) integral $T_2-T_o=K_1(q)+K_2(t)+h$,

gdje je T_2 - kvadratni član u odnosu na brzine u izrazu za kinetičku energiju, T_0 - slobodni član u istom izrazu, K, K_2 i K_3 - funkcije odredjenih osobina. Pokažimo pod kojim uslovima ovi integrali važe.

S tim ciljem polazimo od zakona o promjeni kinetičke energije koji glasi: Promjena kinetičke energije nekog sistema na elementarnom pomjeranju jednaka je radu aktivnih sila i reakcije veza na tom pomjeranju:

$$dT=dA$$

$$dT=\sum_m(\vec{F}_m+\vec{R}_m)\cdot d\vec{r}_m=\sum_m(\vec{F}_m+\vec{R}_m)\left(\frac{\partial\vec{r}_m}{\partial q^i}dq^i+\frac{\partial\vec{r}_m}{\partial t}dt\right)$$

Zbog idealnosti veza slijedi $\vec{R}_m\cdot\frac{\partial\vec{r}_m}{\partial q^i}=0$, pa je ,

$dT=Q_i dq^i+(Q_o+Q_o')dt$ gdje je

$$Q_i=\sum_m\vec{F}_m\frac{\partial\vec{r}_m}{\partial q^i}\ ,\quad Q_o=\sum_m\vec{F}_m\cdot\frac{\partial\vec{r}_m}{\partial t}\ ,\quad Q_o'=\sum_m\vec{R}_m\frac{\partial\vec{r}_m}{\partial t}\ i$$

Sada je:

$$\frac{\partial T}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i}\ddot{q}^i+\frac{\partial T}{\partial t}=Q_i\dot{q}^i+Q_o+Q_o'\ ,\quad \text{odnosno}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i}\dot{q}^i\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i}\right)\dot{q}^i=Q_i\dot{q}^i+Q_o+Q_o'-\frac{\partial T}{\partial t}$$

Grupisanjem sabiraka dobijamo

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}-Q_i\right)\cdot \dot{q}^i=+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)-Q_0-Q_0'+\frac{\partial T}{\partial t}$$

a daljim sredjivanjem

$$2Q_i\dot{q}^i=\frac{d}{dt}\left(2T_2+T_1\right)-Q_0-Q_0'+\frac{\partial T}{\partial t}$$

Kinetička energija T je

$$T=T_2+T_1+T_0$$

tako da dobijamo

$$2Q_i\dot{q}^i=\frac{d}{dt}\left(2T_2+T-T_2-T_0\right)-Q_0-Q_0'+\frac{\partial T}{\partial t}$$

Kako je $\frac{d}{dt}T=Q_i\dot{q}^i+Q_0+Q_0'$

slijedi

$$Q_i\dot{q}^i=\frac{d}{dt}\left(T_2-T_0\right)+\frac{\partial T}{\partial t}$$

odakle je

$$\frac{d}{dt}\left(T_2-T_0\right)=Q_i\dot{q}^i-\frac{\partial T}{\partial t}$$

Ako postoji takva funkcija K(q,t) da je

$$\frac{dK}{dt}=Q_i\dot{q}^i-\frac{\partial T}{\partial t}$$

slijediće Jakobijev integral

$$T_2-T_0=K+h$$

Specijalan slučaj Jakobijevog integrala je Penlevęov integral

$$T_2-T_0=K_1(q)+K_2(t)+h$$

gdje je

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{dK_2}{dt}\qquad Q_i\dot{q}^i=\frac{dK_1}{dt}$$

II DIO

1. Osnovne karakteristike novog pristupa rješavanju mehanike reonomnih sistema

Tri osnovne karakteristike novog pristupa rješavanju mehanike reonomnih sistema su sledeće:

a) Njutnov pristup u formiranju mehaničke (tačnije potencijalne) energije. Ovaj se pristup razlikuje od Lagranževog u tome što se u izrazu za rad, pa na taj način i za potencijalnu funkciju, odnosno potencijalnu energiju pojavljuju osim aktivnih sila i sile reakcije veze. Naravno zbog idealnosti veza

$$\sum \vec{R_i} \cdot \delta \vec{r_i} = 0$$

slijedi da je

$$\sum \vec{R_i} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q^\mu} = Q'_\mu = 0$$

Zbog ova dva različita pristupa u formiranju potencijalne energije pojaviće se i razlika u formiranju Hamiltonove funkcije H.[1)]

b) Kretanje se posmatra u proširenom konfiguracionom prostoru V_{n+1} koordinata $q^1 \dots q^n \dots q^o = t$. Na taj način vrijeme t dobija isti status kao i bilo koja koordinata q. Ideja da se konfiguracioni prostor proširi koordinatom t je veoma stara i susrijećemo je još u Lagranževoj "Mechanique Analitique" iz 1788. godine. Čak i kada vrijeme t ne ulazi eksplicitno u Lagranževu funkciju pokazuje se da upotreba proširenog prostora ima svojih pogodnosti (npr. veća sloboda transformacija). Napomenućemo da u V_n prostoru posmatramo kretanje tačke po krivoj i da u tom prostoru definišemo metriku uz pomoć kinetičke energije. V_{n+1} je geometrijski prostor u smislu da ne posmatramo kretanje tačke po krivoj, već samu krivu u prostoru i u njemu u opštem slučaju metrika nije definisana.

Prelaskom na prošireni fazni prostor V_{2n+2} postavlja se pitanje koji je to generalisani impuls p_o koji odgovara generalisanoj koordinati $q^o = t$.

1) Oznake H^*, L^*, V^* odnose se na Njutnov pristup, a H, L, V na Lagranžov.

Imamo dva različita odgovora na ovo pitanje.

Metod (1)

U ukupnoj dosadašnjoj literaturi koja tretira ovu problematiku generalisani impuls p_o postulira se na sledeći način

$$p_o^{(1)} = -H \tag{1.1}$$

pod uslovom da postoji Hamiltonova funkcija, tako da su dvije jednačine koje treba dodati postojećim kanonskim jednačinama (12) sledeće:

$$\frac{dq^0}{dt} = 1 \qquad \frac{dp_o^{(1)}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.2}$$

Ako uvedemo funkciju

$$H^* = p_o^{(1)} + H = 0 \tag{1.3}$$

prethodne jednačine zajedno sa 2n jednačina (12) zapisujemo

$$\frac{dq^{\bar{\mu}}}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_{\bar{\mu}}} \qquad \frac{dp_{\bar{\mu}}}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q^{\bar{\mu}}} \qquad (\bar{\mu}=0,1,..,n) \tag{1.4}$$

Ovako je radjeno u djelima Vitekera, Jakobija i Gantmahera.

Metod (2)

U [17] generalisani impuls p_o uvodi se kao

$$p_o^{(2)} = \sum_i m_i \vec{V_i} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t} \tag{1.5}$$

dakle na isti način kao i svi ostali generalisani impulsi p_μ ($\mu=1,...,n$). U ovom slučaju Hamiltonovu funkciju H^* formiramo na sledeći način:

$$H^* = p_{\bar{\mu}} \dot{q}^{\bar{\mu}} - L^* \qquad (\bar{\mu}=0,1,...,n) \tag{1.6}$$

U čemu je razlika izmedju Hamiltonovih funkcija u ova dva slučaja:

U Metodi (1) Hamiltonova funkcija je jednaka nuli. Formirali smo je koristeći Lagranžov pristup, tj. u njoj nijesu sadržani „potencijali reakcija veza". Izlazi da je ona jednaka nuli bez obzira kakva je sveukupnost sila koje djeluju na posmatranu reprezentativnu tačku. Na taj način jednačine (1.2) nam ne govore ništa novo o sistemu, već nam samo pomažu da prelaskom na prošireni fazni prostor možemo zadržati kanonski oblik jednačina (1.4).

U Metodu (2) koristimo Njutnov pristup tako da H^* sadrži i „potencijal reakcije veza". Pokazuje se da je ovako definisana Hamiltonova funkcija H^* jednaka totalnoj mehaničkoj energiji u Njutnovom pristupu

$$H^* = p_{\bar\mu}\dot q^{\bar\mu} - L^* = p_{\bar\mu}\dot q^{\bar\mu} - T + E_p^* = E^*_{meh.}$$

što je vrlo važan zaključak.

Dvije dodatne jednačine dobijene primjenom Metoda (2) su

$$dq^0/dt = \partial H^*/\partial p_0 \quad \text{jer je} \quad \dot q^0 = 1$$
$$dp_0/dt = -\partial H^*/\partial q^0$$

Kako je kinetička energija $T=\frac{1}{2}\sum_i m_i V_i^2$, prethodna relacija se, uzevši u obzir drugi Njutnov zakon, dobija sledećim izvodjenjem

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec V_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial t}\right) = \sum_i \left(m_i \vec V_i \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec r_i}{\partial t} + m_i \vec a_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec F_i + \vec R_i)\cdot\frac{\partial \vec r_i}{\partial t}$$

odnosno

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + Q_0 + Q_0' = \frac{\partial}{\partial t}(T + V^*)$$

Kako je $T + V^* = L^* = p_{\bar\mu}\dot q^{\bar\mu} - H^*$, dobijamo

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{\partial L^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(p_{\bar\mu}\dot q^{\bar\mu} - H^*) = -\frac{\partial H^*}{\partial t} = -\frac{\partial H^*}{\partial q^0}$$

Primjenom Metoda (2) kretanje reprezentativne tačke se opisuje u proširenom faznom prostoru jednačinama (1.4).

Veza izmedju Hamiltonovih funkcija H^* u proširenom prostoru i H u neproširenom prostoru je sledeća

$$H^* = p_{\bar\mu}\dot q^{\bar\mu} - L^* = p_0 + p_\mu \dot q^\mu - L - F(t) = p_0 + H - F(t)$$

gdje je

$$F(t) = T_1 + 2T_0 - \int\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt$$

kao što ćemo kasnije pokazati.

Poredeći ova dva metoda, zaključujemo da imaju sledeće zajedničke osobine:

U slučaju skleronomnih sistema ova se dva metoda svode na isto.

Generalisani impuls p_o je konstantan kad je njemu odgovarajuća koordinata $q^o=t$ ciklička, tj. kad je sistem skleronoman (šta više p_o je u tom slučaju jednako nuli).

Razlike su sledeće:

U Metodu (2) p_o je definisana kao i svi ostali p_μ, a Hamiltonova funkcija H^* ima isti oblik u V_{2n+2} kao što je imala u V_{2n}. Za tako definisane p_o i H^* moguće je da prelaskom na prošireni prostor jednačine zadrže kanonski oblik, dok u Metodu (1) unaprijed postavljamo taj uslov i on uslovljava definiciju p_o i H^*.

Pokazuje se da je primjenom Metoda (2) Hamiltonova funkcija H^* jednaka totalnoj mehaničkoj energiji E^* definisanoj Njutnovim pristupom, što je još jedna analogija sa skleronomnim sistemima. Čak se pokazuje da je ona konstantna jer su sve sile potencijalne.*)

Metod (2) se ne može primijeniti na svaki sistem kanonskih jednačina, tj. funkcija H^* mora da ima odredjene osobine da bi se ovaj metod primijenio.

Na osnovu navedenih zaključaka u poredjenju ovih dveju metoda za proširenje faznog prostora dajemo prednost drugoj metodi i odlučujemo se za nju u daljem radu ne samo iz razloga što smo prihvatili Njutnov metod u formiranju energije već i zbog njenih navedenih osobina.

c) Reonomni problem tretiramo kao složeno kretanje tako da kretanje tačke, odnosno tačaka po vezama uzimamo kao relativno kretanje, a kretanje tačaka zajedno sa vezama kao prenosno kretanje. Ideja da se kretanje tačaka po pokretnim vezama interpretira kao složeno kretanje je veoma stara. U svojim radovima su je koristili Johan i Danijel Bernuli, Ojler, Klero i drugi. No oni su se ograničavali samo na jednostavne slučajeve reonomnih veza (nagnuta strma ravan koja se translatorno kreće

---

*) vidi [17]

ili obrće oko neke svoje ose). Koliko je nama poznato ideja da se reonomni problemi tretiraju kao složeno kretanje, ne ograničavajući se ni na kakve specijalne slučajeve (Dakle i kada se veza deformiše, a ne samo pomjera u prostoru) se prvi put susreće u [25] a razvija se na kinematičke probleme u [29].

2. O kretanju reonomnih neholonomnih sistema

Posmatraćemo mehanički sistem koji sačinjavaju materijalne tačke M_i $(i=1\ldots,N)$, mase m_i, čiji su vektori položaja $\vec{r}_i$. Položaj svih tačaka sistema nazivamo konfiguracijom $\sum$.

Kada se tačke kreću vektori položaja su funkcije vremena i relacije

$$\vec{r}_i=\vec{r}_i(t)$$

predstavljaju konačne jednačine kretanja sistema u vektorskom obliku.

Ako kretanje posmatramo u odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata odgovarajuće skalarne konačne jednačine kretanja će biti

$$x_i=x_i(t) \qquad y_i=y_i(t) \qquad z_i=z_i(t)$$

Uvedimo koordinate u_i na sljedeći način

$$u_i=u_i(x_i,\ldots,z_N,t) \qquad (i=1,\ldots,3N)$$

Na taj način sistem skalarnih jednačina možemo jednostavnije zapisati:

$$u_i=u_i(t)$$

Odmah možemo reći da umjesto da posmatramo sistem od N tačaka u trodimenzionom opažajnom prostoru, možemo govoriti o kretanju jedne (reprezentativne) tačke u 3N dimenzionom euklidskom prostoru E_{3N} koji čini skup od N tripleta E_3 euklidskog prostora.

Ako na posmatrani mehanički sistem djeluje d holonomnih reonomnih zadržavjaućih veza

$$f_\alpha(t,\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N)=0 \qquad (2.1)$$

biće

$$\frac{df_\alpha}{dt}=0 \qquad (2.2)$$

Relacija (1.2) se može napisati na sledeći način:

$$\frac{df_\alpha}{dt}=\sum_i \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt}+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=0$$

gdje je

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\vec{V}_i$$

Tako se relacija (1.2) može predstaviti u sledećem obliku:

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha\cdot\vec{v}_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=0 \qquad (i=1,\dots,N;\ \alpha=1,\dots,d) \qquad (2.3')$$

Da su veze skleronomne, relacija (2.3) bi se svela na

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha\cdot\vec{v}_i=0 \qquad (2.4)$$

pa vidimo da su u tom slučaju gradijenti veza upravni na brzinama tačaka mehaničkog sistema.

Brzinu $\vec{V}_i$ svake tačke možemo razložiti na dvije komponente:

- prenosnu, jer se tačka nalazi na vezama koje se kreću, i
- relativnu, jer se tačka kreće po vezama.

Ako na taj način posmatramo kretanje sistema, relaciju (2.3) napisaćemo u obliku

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha\left(\vec{v}_{pi}+\vec{v}_{ri}\right)+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=0 \qquad (2.5)$$

Kako je relativno kretanje tačaka kretanja po vezama relativna brzina svake tačke biće upravna na gradijentima veza, tj.

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha\cdot\vec{v}_{ri}=0 \qquad (2.6)$$

Na osnovu (1.6) relacija (1.5) se svodi na

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha\cdot\vec{v}_{pi}+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=0 \qquad (2.7)$$

Ako koordinatama $u_i(i=1.\dots,3N)$ dodamo koordinatu $u_o=t$, smatraćemo da se kretanje reprezentativne tačke vrši u 3N+1 dimenzionom konfiguracionom prostoru V_{3N+1}. Jednačine veza (2.1) u tom slučaju napisaćemo u obliku:

$$f_\alpha(u_o, \vec{r}_1, \dots \vec{r}_N) = f_\alpha(u_o, u_1, \dots, u_{3N}) = 0 \qquad (2.8)$$

Iz ovih jednačina vidimo da svih 3N+1 promjenljivih u_i $(i=0,1\dots,3N)$ nijesu nezavisne, već medju njima postoji d veza, tako da su $n+1=3N+1-d$ nezavisne. Sada bismo mogli preko n+1 nezavisnih promjenljivih $u_o,\dots,u_n$ izraziti preostalih d promjenljivih $u_{n+1},\dots,u_{3N}$. No, možemo uvesti i nove nezavisne generalisane koordinate $q^o=t$, $q^1,\dots,q^n$, pa svih 3N+1 promjenljivih u_i izraziti kao funkciju od q^μ $(\mu=0,1,..,n)$

$$u_i = u_i(q^o, \dots, q^n) \qquad (i=0,1,..,n) \qquad (2.9)$$

Jednačinama (2.8) odredjen je dio prostora V_{3N+1} i nazvaćemo ga potprostorom V_{n+1} prostora V_{3N+1}.

Skalarnim jednačinama (2.9) u vektorskom obliku će odgovarati jednačine:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q^o, q^1, \dots, q^n) \qquad (2.10)$$

Jednačine veza (2.8). kada su u njima stare promjenljive u_i izraze pomoću novih q^μ, prelaze u identičnosti

$$f_\alpha(q^o, q^1, \dots, q^n) \equiv 0 \qquad (2.11)$$

Kako će izgledati jednačine (2.3) i (2.5) u prostoru V_{n+1}, odnosno u novim koordinatama q ?

Zbog (2.10) vektor brzine i-te tačke je

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\dot{q}^\mu = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\dot{q}^\mu + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Na osnovu toga je:

$$0 = \frac{df}{dt} = \sum_i^N \operatorname{grad} f_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\dot{q}^\mu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \sum_i^N \operatorname{grad} f_\alpha \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\dot{q}^\mu + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \qquad (2.12)$$

Kada bi veze bile skleronomne vektor položaja i-te tačke ne bi eksplicitno zavisio od koordinate q^o. Tada je, naime,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q^1, \ldots, q^n)$$

a brzina i-te tačke je

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu$$

U tom slučaju postojalo bi samo relativno kretanje tačke po vezi, odakle zaključujemo da je u relaciji (2.12)

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu = \vec{v}_{r_i} \tag{2.13}$$

gdje je $\vec{v}_{ri}$ - relativna brzina i-te tačke i ona je data kao zbir komponenata u pravcu koordinatnih osa, jer je $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}$ - bazni vektor prostora V_n u kome bi se tačka kretala da ga nijesmo proširili koordinatom $q^o=t$.

Uporedjujući (2.12) sa (2.5) zaključujemo da je

$$\vec{v}_{p_i} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \tag{2.14}$$

Na osnovu ovih razmatranja relacija (2.7) se može napisati u obliku

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d) \tag{2.15}$$

Napominjemo i to da relaciju (2.2) u odnosu na nove koordinate $q^o, \ldots, q^n$, možemo napisati u obliku

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^{\bar{\mu}}} \cdot \dot{q}^{\bar{\mu}} = 0 \tag{2.16}$$

koju možemo protumačiti na sledeći način:

$\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^{\bar{\mu}}}$ - koordinata gradijenta skalarne funkcije f_α

$\dot{q}^{\bar{\mu}}$ - kontravarijantne koordinate brzine reprezentativne tačke na ose koordinatnog sistema u prostoru V_{n+1}, tako da se (2.16) može predstaviti i u obliku

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \underset{\vec{r}_i}{\operatorname{grad}} f_\alpha \cdot \vec{v} = 0 \tag{2.17}$$

Relacija (2.17) je istog oblika kao (2.4) pa zaključujemo da uvodjenjem koordinate $u_0=t$, odnosno kasnije $q^0=t$, razlika izmedju skleronomnih i reonomnih sistema u zapisivanju nekih relacija stoji samo u broju dimenzija; umjesto n za skleronomni, imamo n+1 za reonomni sistem.

Neka na posmatrani mehanički sistem, osim holonomnih veza djeluju neholonomne koje su takodje reonomne i zadržavajuće i neka su one linearne po brzinama. Dakle,

$$\varphi_\beta = \sum_i^N \vec{\ell}_{\beta i} \cdot \vec{v}_i + \ell_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,..,g) \tag{2.18}$$

gdje su

$$\vec{\ell}_{\beta i} = \vec{\ell}_{\beta i}(t, \vec{r}_1,..,\vec{r}_N) = \vec{\ell}_{\beta i}(t, u_1,..,u_{3N})$$

$$\ell_\beta = \ell_\beta(t, \vec{r}_1,..,\vec{r}_N) = \ell_\beta(t, u_1,..,u_{3N})$$

U proširenom prostoru V_{3N+1} biće

$$\vec{\ell}_{\beta i} = \vec{\ell}_{\beta i}(u_0,..,u_{3N}) \quad , \quad \ell_\beta = \ell_\beta(u_0,..,u_{3N})$$

U proširenom prostoru V_{n+1} jednačine (2.18) će biti oblika

$$\sum_i^N \vec{\ell}_{\beta i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\mu}}} \cdot \dot{q}^{\bar{\mu}} + \ell_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,..,g)$$

odnosno

$$\phi^*_{\beta\bar{\mu}} \cdot \dot{q}^{\bar{\mu}} + \ell_\beta = 0 \tag{2.19}$$

gdje je

$$\phi^*_{\beta\bar{\mu}} = \sum_i^N \vec{\ell}_{\beta i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\mu}}} \qquad (\beta = 1,..,g;\ \bar{\mu} = 0,1,..,n)$$

Jednačine (2.19) možemo napisati tako da one budu homogene u odnosu na generalisane brzine. Imamo, naime

$$\phi_{\beta\bar{\mu}} \cdot \dot{q}^{\bar{\mu}} = 0 \tag{2.20}$$

gdje smo uveli oznake

$$\phi_{\beta\mu} = \phi^{*}_{\beta\mu} \qquad \phi_{\beta 0} = \phi^{*}_{\beta 0} + \ell_{\beta} \qquad \begin{matrix} (\beta = 1,..,g) \\ (\bar{\mu} = 0,1,..,n) \\ (\mu = 1,..,n) \end{matrix}$$

jer je $\dot{q}^{0}=0$.

Odavde vidimo da su vektori $\phi_{\beta\bar{\mu}}$ upravni na brzinu reprezentativne tačke pri njenom kretanju u prostoru V_{n+1}.

Što se tiče neholonomnih veza, uočavamo da smo uvodjenjem koordinate q^{0} postigli da jednačine veza koje nijesu homogene po brzinama, napišemo u homogenom obliku.

Sve brzine $\dot{q}^{\bar{\mu}}$ nijesu nezavisne, već su povezane pomoću g jednačina (2.20).

Ako jednačine neholonomnih veza napišemo u obliku

$$\phi_{\beta\alpha'} \cdot \dot{q}^{\alpha'} + \phi_{\beta\bar{\alpha}} \cdot \dot{q}^{\bar{\alpha}} = 0 \qquad \begin{matrix} (\bar{\alpha} = 0,1,..,m = n-g) \\ (\alpha' = m+1,..,n) \end{matrix}$$

i odredimo vektore $E^{\beta\alpha'}$ takve da je

$$\phi_{\beta\alpha'} E^{\beta\delta} = \delta^{\delta}_{\alpha'} = \begin{cases} 1, & \delta = \alpha' \\ 0, & \delta \neq \alpha' \end{cases}$$

neholonomne veze će biti zadate u formi eksplicitne zavisnosti g zavisnih generalisanih brzina od preostalih m+1=n+1-g, tj.

$$\dot{q}^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}_{\bar{\alpha}} \cdot \dot{q}^{\bar{\alpha}} = \varphi^{\alpha'}_{\alpha} \cdot \dot{q}^{\alpha} + \varphi^{\alpha'}_{0} \qquad (\bar{\alpha} = 0,1,..,m;\ \alpha' = m+1,..n) \tag{2.21}$$

gdje je $\varphi^{\alpha'}_{\alpha} = -\phi_{\beta\alpha} E^{\beta\alpha'}$ $\quad \varphi^{\alpha'}_{0} = -\phi_{\beta 0} E^{\beta\alpha'}$

Iz (2.21) proizilazi da je

$$\delta q^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}_{\bar{\alpha}} \delta q^{\bar{\alpha}} \tag{2.22}$$

gdje je δ oznaka za varijaciju.

Odavde bi zaključili da su svi $\delta q^{\bar{\alpha}}$ nezavisni, ali uzimajući u obzir prirodu koordinate q^o i definiciju pojma varijacije koordinate, odnosno virtualnog pomjeranja, smatraćemo da je $\delta q^o=0$, pa će nezavisna virtualna pomjeranja biti:

$$\delta q^1, \delta q^2, .., \delta q^m$$

Kako broj nezavisnih virtualnih pomjeranja odredjuje broj stepena slobode, posmatrani mehanički sistem ima m stepena slobode.

U prostor V_{n+1} metriku uvodimo na sledeći način

$$ds^2 = a_{\bar{\mu}\bar{\nu}} dq^{\bar{\mu}} dq^{\bar{\nu}} \qquad (\bar{\mu}, \bar{\nu} = 0, 1, .., n)$$

gdje je

ds^2 - kvadrat linijskog elementa

$a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ - kovarijantne koordinate osnovnog metričnog tenzora

odnosno

$$a_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \sum_i^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\mu}}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\nu}}} \tag{2.23}$$

tako da je reprezentativna tačka, čije kretanje posmatramo, jedinične mase.

Pored generalisanih koordinata $q^o, \ldots q^n$, definišemo generalisane impulse

$$p_{\bar{\mu}} = \sum_i^N m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\mu}}} \tag{2.24}$$

tako da je

$$p_o = \sum_i^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \tag{2.25}$$

Na osnovu (2.23) relacije (2.24) napisaćemo u obliku

$$p_{\bar{\mu}} = \sum_i^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\mu}}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\nu}}} \cdot \dot{q}^{\bar{\nu}} = a_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \cdot \dot{q}^{\bar{\nu}} \qquad (\bar{\mu}, \bar{\nu} = 0, 1, .., n) \tag{2.26}$$

Kako je det $(a_{\bar{\mu}\bar{\nu}})$ u opštem slučaju različita od nule, mogoćuje je naći kontravarijantne koordinate ovog tenzora iz jednakosti

$$a^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \cdot a_{\bar{\mu}\bar{\theta}} = \delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\theta}} = \begin{cases} 1, & \bar{\nu}=\bar{\theta} \\ 0, & \bar{\nu}\neq\bar{\theta} \end{cases}$$

Odavde je

$$\dot{q}^{\bar{\mu}} = a^{\bar{\mu}\bar{\nu}} p_{\bar{\nu}} \qquad (\bar{\mu},\bar{\nu}=0,1,..,n) \tag{2.27}$$

Jednačine neholonomnih veza (2.21) se mogu dati i pomoću generalisanih impulsa na sledćei način:

$$a^{\alpha'\bar{\nu}} p_{\bar{\nu}} - \varphi^{\alpha'}_{\bar{\alpha}} a^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} p_{\bar{\nu}} = 0$$

odnosno

$$(a^{\alpha'\bar{\nu}} - \varphi^{\alpha'}_{\bar{\alpha}} a^{\bar{\alpha}\bar{\nu}}) \cdot p_{\bar{\nu}} = 0 \qquad \begin{matrix} (\bar{\alpha}=0,1,..,m\ ) \\ (\alpha'=m+1,..,n) \\ (\bar{\nu}=0,1,..,n\ ) \end{matrix} \tag{2.28}$$

Iz (2.28) vidimo da medju n+1 generalisanih impulsa postoji g veza i da je samo m+1=n+1-g od njih nezavisno. Ako iz konfiguracionog prostora predjemo u fazni prostor V_{2n+2}, koji je odredjen koordinatama $q^0,\dots,q^n$, $p_0,\dots,p_n$, vidjećemo da će se tačka kretati u onom dijelu tog prostora u kome je u svakoj tački ispunjen uslov (2.28).

3. Diferencijalne jednačine kretanja reonomnih neholonomnih sistema u faznim promjenljivim

Neka na posmatrani mehanički sistem, čije je kretanje ograničeno sa d+g jednačina veza (2.1) i (2.18), djeluju aktivne sile $\vec{F}_i$. Diferencijalne jednačine kretanja u vektorskom obliku će biti

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \qquad (i = 1,..,N) \tag{3.1}$$

$\vec{a}_i$ - ubrzanje i-te tačke,

$\vec{R}_i$ - rezultujuća sila reakcija svih d+g veza.

Kako smo pretpostaivli da su veze idealne, rad sila reakcije na virtualnim pomjeranjima je po definiciji jednak nuli:

$$\sum_i^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \tag{3.2}$$

gdje je

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\mu}}} \delta q^{\bar{\mu}} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\mu}} \delta q^{\mu} \qquad \begin{pmatrix} \bar{\mu} = 0,1,..,n \\ \mu = 1,2,..,n \end{pmatrix}$$

jer je, kako smo već ranije pretpostavili $\delta q^0 = 0$, pa će biti

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\nu}} \delta q^{\nu} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha'}} \delta q^{\alpha'} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1,...,m \\ \alpha' = m+1,..,n \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Zbog (2.22) prethodna relacija se svodi na:

$$\delta \vec{r}_i = \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\nu}} + \varphi_{\nu}^{\alpha'} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha'}} \right) \delta q^{\nu} \tag{3.4}$$

Skalarnim množenjem relacija (3.1) vektorima virtualnih pomjeranja i sabiranjem po i dobija se

$$\sum_i^N (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i - \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Zbog (3.2) slijedi da je

$$\sum_i^N (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \tag{3.5}$$

Relacija (3.5) se, zbog (3.4), može napisati u obliku:

$$\sum_i^N (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu} + \varphi_\nu^{\alpha'} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha'}}\right)\delta q^\nu = 0 \quad (\nu = 1,..,m;\ \alpha' = m+1,..,n)$$

Zbog nezavisnosti δq^ν ova jednačina se raspada na m jednačina oblika
$$\sum_i^N (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i)\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu} + \varphi_\nu^{\alpha'} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha'}}\right) = 0$$

odnosno

$$\sum\left(m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu} + m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha'}}\varphi_\nu^{\alpha'}\right) = \sum_i^N\left(\vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu} + \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha'}}\varphi_\nu^{\alpha'}\right) \quad (3.6)$$

Lijeva strana ovih jednačina može se predstaviti na sledeći način

$$\sum_i^N\left(m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu} + m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha'}}\varphi_\nu^{\alpha'}\right) = \frac{Dp_\nu}{dt} + \varphi_\nu^{\alpha'}\frac{Dp_{\alpha'}}{dt} \quad (3.7)$$

jer je

$$\sum_i^N m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu} = \frac{d}{dt}\sum_i^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu} - \sum_i^N m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu} =$$

$$= \frac{dp_\nu}{dt} - \sum_i^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar\mu}}\dot{q}^{\bar\mu} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q^{\bar\nu}\partial q^\nu}\dot{q}^{\bar\nu} = \frac{dp_\nu}{dt} - [\nu\bar\nu,\bar\mu]\dot{q}^{\bar\nu}\dot{q}^{\bar\mu} \quad (3.8)$$

$$= \frac{dp_\nu}{dt} - a^{\bar\nu\bar\theta}p_{\bar\theta}[\nu\bar\nu,\bar\mu]\cdot\dot{q}^{\bar\mu} = \frac{dp_\nu}{dt} - \left\{{\bar\theta \atop \nu\,\bar\nu}\right\}p_{\bar\theta}\dot{q}^{\bar\mu} = \frac{Dp_\nu}{dt}$$

$\sum_i^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu} = Q_\nu$ - generalisane sile.

Relacije (3.6) se, na osnovu gore izvedenog, svode na oblik

$$\frac{Dp_\nu}{dt} + \varphi_\nu^{\alpha'}\frac{Dp_{\alpha'}}{dt} = Q_\nu + \varphi_\nu^{\alpha'}Q_{\alpha'} \quad \begin{matrix}(\nu = 1,..,m)\\ (\alpha' = m+1,..n)\end{matrix} \quad (3.9)$$

Jednačina (3.9) ima m i u njima se pojavljuje 2(n+1) nepoznatih $q^o,...,q^n$, $p_o,...p_n$, jer je

$$\varphi_\nu^{\alpha'} = \varphi_\nu^{\alpha'}(q^o,..,q^n) \qquad Q_\nu = Q_\nu(q^o,..,q^n, p_o,..,p_n)$$

Kako svi $p_o, \dots, p_n$, nijesu nezavisni, to jednačinama (3.9) treba dodati g jednačina neholonomnih veza zadatih u obliku (2.28). Diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na promjenljive $q^{\bar{\mu}}$ date su relacijama (2.27). Svim ovim jednačinama treba pridružiti jednačinu u kojoj će na lijevoj strani figurisati apsolutni izvod od p_o, analogno jednačinama (3.9). Tu jednačinu ćemo dobiti nakon sledećih razmatranja:

Na osnovu (3.2) slijedi da je

$$\sum (\vec{R_i}' + \vec{R_i}'') \cdot \delta \vec{r_i} = 0$$

gdje je

$\vec{R}_i'$ - rezultanta reakcija svih holonomnih veza koje djeluju na i-tu tačku.

$\vec{R}_i''$ - rezultanta reakcija svih neholonomnih veza koje djeluju na i-tu tačku.

Na osnovu (2.3) slijedi da je

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r_i}} f_\alpha \cdot \delta \vec{r_i} = 0$$

pa zaključujemo da su

$\vec{R}_i'$ i $\operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha$ kolinearni. Odatle je

$$\vec{R_i}' = \sum_\alpha^d \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{\vec{r_i}} f_\alpha \qquad (3.10)$$

Na osnovu (2.18) slijedi da je

$$\sum_i^N \vec{l_{\beta i}} \cdot \delta \vec{r_i} = 0$$

te su $\vec{l}_{\beta i}$ i $\vec{R}_i''$ takodje kolinearni, tako da je

$$\vec{R_i}'' = \sum_\beta^g \mu_\beta \vec{l_{\beta i}} \qquad (3.11)$$

λ_α i μ_β su Lagranževi neodredjeni množitelji.

Na osnovu prethodnog, jednačine (3.1) se mogu zapisati na sledeći način:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{\alpha}^{d} \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha + \sum_{\beta}^{g} \mu_\beta \vec{\ell}_{\beta i} \qquad (3.12)$$

Skalarnim množenjem lijeve i desne strane sa $\vec{V}_i$ i sabiranjem po i zbog (2.3) i (2.18) dobijamo

$$\sum_{i}^{N} m_i \vec{a}_i \vec{v}_i = \sum_{i}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i - \sum_{\alpha}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \sum_{\beta}^{g} \mu_\beta \ell_\beta$$

što se zbog

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\mu}}} \dot{q}^{\bar{\mu}} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\alpha}}} \dot{q}^{\bar{\alpha}} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha'}} \varphi^{\alpha'}_{\bar{\alpha}} \dot{q}^{\bar{\alpha}} = \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\alpha}}} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha'}} \varphi^{\alpha'}_{\bar{\alpha}}\right) \dot{q}^{\bar{\alpha}}$$

može napisati u obliku

$$\left(\frac{Dp_{\bar{\alpha}}}{dt} + \varphi^{\alpha'}_{\bar{\alpha}} \frac{Dp_{\alpha'}}{dt}\right) \cdot \dot{q}^{\bar{\alpha}} = \left(Q_{\bar{\alpha}} + \varphi^{\alpha'}_{\bar{\alpha}} Q_{\alpha'}\right) \cdot \dot{q}^{\bar{\alpha}} - \sum_{\alpha}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \sum_{\beta}^{g} \mu_\beta \ell_\beta$$

Na osnovu (3.9) vidimo da su svi koeficijenti uz $\dot{q}^{\alpha}$ ($\alpha = 1,\ldots,m$) jednaki nuli, pa se ova jednačina svodi na

$$\frac{Dp_0}{dt} + \varphi^{\alpha'}_0 \frac{Dp_{\alpha'}}{dt} = Q_0 + Q_{\alpha'} \varphi^{\alpha'}_0 - \sum_{\alpha}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \sum_{\beta}^{g} \mu_\beta \ell_\beta \qquad (3.13)$$

Konačno, sistem diferencijalnih jednačina kretanja će biti

$$\begin{aligned}
&\frac{Dp_\mu}{dt} + \varphi^{\alpha'}_\mu \frac{Dp_{\alpha'}}{dt} = Q_\mu + \varphi^{\alpha'}_\mu Q_{\alpha'} \\
&\frac{Dp_0}{dt} + \varphi^{\alpha'}_0 \frac{Dp_{\alpha'}}{dt} = Q_0 + \varphi^{\alpha'}_0 Q_{\alpha'} - \sum_{\alpha}^{d} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \sum_{\beta}^{g} \mu_\beta \ell_\beta \\
&\dot{q}^{\bar{\mu}} = a^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \cdot p_{\bar{\nu}} && (\mu = 1,\ldots,m) \\
&p_{\bar{\nu}} \left(a^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} \varphi^{\alpha'}_{\bar{\alpha}} - a^{\alpha'\bar{\nu}}\right) = 0 && (\alpha' = m+1,\ldots,n) \\
& && (\bar{\mu}, \bar{\nu} = 0,1,\ldots,n)
\end{aligned} \qquad (3.14)$$

Lagranževe neodredjene množitelje λ_α i μ_β odredjujemo na sledćei način:

Iz uslova

$$f_\alpha = 0 \quad ; \quad \varphi_\beta = 0$$

slijedi

$$\frac{d^2 f_\alpha}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d\varphi_\beta}{dt} = 0 \tag{3.15}$$

što se može napisati u sledećem razvijenom obliku:

$$\frac{d^2 f_\alpha}{dt^2} = \sum_i^{3N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_i} \ddot{u}_i + D_2 f_\alpha = \sum_i^{N} \mathrm{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha \cdot \vec{a}_i + D_2 f_\alpha = 0$$
$$\frac{d\varphi_\beta}{dt} = \sum_i^{3N} \vec{\ell}_{\beta i}\, \vec{a}_i + D_2 \varphi_\beta \tag{3.16}$$

gdje su $D_2 f_\alpha$ veličine koje sadrže druge parcijalne izvode veličina f_α , a sa $D_2 \varphi_\beta$ skraćeno je dat izraz

$$D_2 \varphi_\beta = \sum_i^{N} \frac{d\varphi_\beta}{dt} \cdot \vec{V}_i + \frac{d\ell_\beta}{dt}$$

Relacije (3.16) daju d+g uslova za ubrzanja tačaka posmatranog sistema.

Kada $\vec{a}_i$ izraženo preko desne strane jednačina (3.12) uvrstimo u d+g jednačina (3.16) odredićemo d+g množitelja Λ_α i μ_β.

Jednačinama (3.14) zapisano je kretanje neholonomnog reonomnog sistema u faznim promjenljivim proširenog faznog prostora V_{2n+2}. Odavde se kao specijalni slučajevi dobijaju diferencijalne jednačine npr. holonomnog sistema ili skleronomnog sistema. Ako je sistem i skleronoman i holonoman i uz to su sile potencijalne, dobijamo kanonske jednačine oblika (12).

Napomena: Pri izvodjenju ovih jednačina i dalje, korišćena je Ajnštajnova konvencija o sabiranju.

Poznati primjer kretanja kuglice po horizontalnoj ravni riješimo primjenom jednačina (3.14). Kretanje kuglice ograničavaju dvije holonomne veze

$$f_1 = z = 0$$

$$f_2 = r - (R - at) = 0$$

a početni uslovi su $v_{\varphi 0} = v_0$, $v_{r0} = -a$, $r_0 = R$

Diferencijalne jednačine (3.14) u ovom slučaju su

$$\frac{Dp_0}{dt} = Q_0 - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t}$$

$$\frac{Dp_1}{dt} = Q_1$$

$$p_0 = a_{00} + a_{01} \cdot \dot{q}^1$$

$$p_1 = a_{01} + a_{11} \dot{q}^1$$

gdje je

$$a_{00} = ma^2, \quad a_{01} = 0, \quad a_{11} = m(R-at)^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0, \quad Q_0 = m\vec{g}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0, \quad Q_1 = m\vec{g}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0$$

Na osnovu ovoga prethodne jednačine se svode na oblik

$$\frac{dp_0}{dt} + m(R-at)a\dot{q}^{1\,2} = -\lambda_2 a$$

$$\frac{dp_1}{dt} = 0$$

$$p_0 = ma^2$$

$$p_1 = m(R-at)^2 \dot{q}^1$$

Rješenje ovog sistema jednačine je sledeći

$$p_1 = const = mRv_0$$

$$p_0 = ma^2$$

$$\dot{q}^1 = \dot{\varphi} = \frac{Rv_0}{a(R-at)}$$

$$q^0 = t$$

Iz ovih jednačina izračunava se koeficijent λ_2

$$\lambda_2 = -m(R-at)\cdot\dot{\varphi}^2 = -\frac{mR^2v_0^2}{(R-at)^3}$$

pa je reakcija $\vec{R}_2 = \lambda_2 \operatorname{grad}_{\vec{r}} f_2 = -\frac{mR^2v_0^2}{(R-at)^3}\vec{r}_0$.

4. Ravnotežno stanje reonomnih sistema

Razmatranje ovog problema dijelimo na četiri dijela:

1. Ravnotežni položaj reonomnih holonomnih sistema
2. Ravnotežno stanje reonomnih holonomnih sistema
3. Ravnotežni položaj reonomnih neholonomnih sistema
4. Ravnotežno stanje reonomnih neholonomnih sistema

U svakom od ova četiri dijela razlikujemo dva oblika ravnoteže:

a) Apsolutna ravnoteža
b) Relativna ravnoteža.

Pod apsolutnom ravnotežom podrazumijevamo onaj položaj, odnosno ono stanje sistema koje se tokom vremena ne mijenja. Dakle, kad sistem jednom dodje u taj položaj, odnosno u to stanje, ono se ne mijenja pri datom dejstvu sila i djelovanju veza. Uslov koji se često u literaturi susreće da se sistem u početnom trenutku nalazi u položaju, odnosno stanju ravnoteže ne čini definiciju strožijom jer se vrijeme uvijek može mjeriti od trenutka kad je ravnoteža ostvarena.

U slučaju relativne ravnoteže sistem nije u miru u odnosu na apsolutni sistem referencije. Moguće je kretanje tačaka zajedno sa holonomnim vezama, ali nema kretanja duž veza.

U svijetlu podjele kretanja reonomnih sistema na prenosno i relativno, apsolutna ravnoteža podrazumijeva da su apsolutne brzine svih tačaka sistema jednake nuli, tj. da su prenosna brzina i relativna brzina svake tačke suprotni vektori (isti intenzitet, a suprotan smjer). Dakle, ova dva vektora ne moraju biti jednaki nuli, već njihov zbir treba da je jednak nuli. Drugim riječima uslov da su i relativna i prenosna brzina tačaka sistema jednake nuli je samo dovoljan, ali ne i neophodan uslov ravnoteže sistema.

U slučaju relativne ravnoteže ne ograničavamo prenosne brzine tačaka sistema već samo namećemo uslov da su relativne brzine jednake nuli.

U ovom radu proučavaćemo samo apsolutnu ravnotežu.

4.1.a. Položaj apsolutne ravnoteže reonomnog holonomnog sistema

Rečeno je da će u položaju apsolutne ravnoteže sistema od N materijalnih tačaka M_i mase m_i, svi vektori položaja $\vec{r}_i$ biti konstantni od nekog trenutka t_1.

$$\dot{\vec{r}}_i(t)=0 \;,\; t\geq t_1 \qquad (i=1,\dots,N) \tag{4.1}$$

tako da su brzine tačaka sistema kad on dospije u položaj ravnoteže

$$\vec{v}_i=0 \tag{4.2}$$

Zbog podjele kretanja na relativno i prenosno, prethodni uslov se zapisuje u obliku

$$\vec{v}_{ri}+\vec{v}_{pi}=0 \qquad (i=1,\dots,N) \tag{4.3}$$

gdje su relativna i prenosna brzina definisane pomoću (2.13) i (2.14). Uslov da su u položaju ravnoteže apsolutne brzine tačaka sistema jednake nuli, povlači za sobom blaži uslov da su ubrzanja tačaka sistema jednaka nuli

$$\vec{a}_i=0 \qquad (i=1,\dots N) \tag{4.4}$$

Ovaj uslov je ispunjen i kada sve tačke sistema vrše jednoliko pravolinijsko kretanje. Često se i ovakvo kretanje sistema smatra ravnotežom, tj. ne odvaja se od ravnoteže.

U problemima ravnoteže sistema postavljaju se dva zadatka:

- da li je ravnoteža sistema pri dejstvu datih veza moguća,

- ako je moguća treba odrediti položaje ravnoteže ako su poznate sile koje djeluju na neslobodni sistem, ili za unaprijed odredjeni položaj ravnoteže odrediti sile koje treba da djeluju na sistem da bi dati položaj ravnoteže bio moguć.

Uslov da postoji ravnoteža znači da su ispunjeni uslovi (4.1), (4.2), (4.3).

Ako na sistem djeluje d holonomnih veza

$$f_\alpha(t,\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N)=0 \qquad (\alpha=1\dots d) \tag{4.5}$$

one se u diferencijalnom obliku zapisuju na sledeći način

$$\frac{df_\alpha}{dt}=\mathrm{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha\cdot\vec{V}_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=0$$

Zbog (4.2) u položaju ravnoteže, veze ispunjavaju uslov

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=0 \tag{4.6}$$

Pod pretpostavkom da ovi uslovi važe, možemo preći na odredjivanje položaja ravnoteže.

Iz (4.4) i (8) dobijamo vektorsku jednačinu ravnoteže

$$\vec{F}_i+\sum_\alpha^d \Lambda_\alpha\,\mathrm{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha=0 \qquad (i=1,\dots,N) \tag{4.7}$$

kojima treba dodati d jednačine (4.5).

U odnosu na Dekartov sistem koordinata jednačine ravnoteže su

$$X_i+\sum_\alpha^d \Lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}=0 \quad Y_i+\sum_\alpha^d \Lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}=0 \quad Z_i+\sum_\alpha^d \Lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}=0$$

$$f_\alpha(t,x_1,\dots,z_N)=0$$

Odavde se može odrediti $3N+d$ nepoznatih $\Lambda_1,\dots,\Lambda_d,x_1,\dots,z_N$, ako su poznate sile koje djeluju na sistem.

Uvodjenjem nezavisnih generalisanih koordinata $q^1,\dots,q^n$, $n=3N-d$, pod pretpostavkom da su veze idealne dobijamo sledeće jednačine ravnoteže

$$Q_\mu=0 \tag{4.8}$$

U odnosu na prošireni sistem koordinata $q^0=t,q^1,\dots,q^n$ jednačinama (4.8) treba dodati i jednačinu koja odgovara koordinati q^0 . Nju dobijamo kada jednačinu (8) pomnožimo redom sa vektorom prenosne brzine $\partial\vec{r}_i/\partial t$ odgovarajuće tačke i izvršimo sumiranje po indeksu i

$$\sum_i^N\left(\vec{F}_i+\sum_\alpha \Lambda_\alpha\,\mathrm{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha\right)\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}=0 \tag{4.9}$$

Kako je

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \vec{V}_i - \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu$$

u položaju ravnoteže će biti

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = - \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu$$

pa je reakcija veze

$$Q_0' = \sum_i^N \sum_\alpha^d \Lambda_\alpha \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = - \sum_i^N \sum_\alpha^d \Lambda_\alpha \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu = 0 \qquad (4.10)$$

jer su veze idealne.

Zbog (4.10) jednačina (4.9) se svodi na oblik

$$Q_0 = 0 \qquad (4.11)$$

gdje je $Q_0 = \sum_i^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$

Dakle, u odnosu na prošireni sistem koordinata jednačine ravnoteže su

$$Q_{\bar{\mu}} = 0 \qquad (\bar{\mu} = 0, 1, \ldots, n) \qquad (4.12)$$

Ako lijeve i desne jednačine (4.8) pomnožimo redom sa dq^μ i saberemo dobićemo uslov da je rad aktivnih sila na relativnom kretanju jednak nuli. Množenjem lijeve i desne strane jednačine (4.11) sa dt dobijamo uslov da je rad aktivnih sila na prenosnom kretanju jednak nuli.

4.2.a. Ravnotežno stanje reonomnog holonomnog sistema

U analogiji sa ravnotežnim položajem u konfiguracionom prostoru V_n ili V_{n+1} uvodi se pojam ravnotežnog stanja u faznom prostoru V_{2n} i V_{2n+2}.

Iz uslova da su brzine tačaka sistema jednake nuli u položaju ravnoteže slijediće da su i svi generalisani impulsi jednaki nuli

$$P_\mu = \sum_i^N m_i v_i \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q^\mu_\alpha} = 0 \qquad (\mu = 1, .., n)$$

$$p_0 = \sum_i^N m_i \vec{v_i} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t} = 0$$

Zbog toga će ravnotežno stanje reonomnog holonomnog sistema u faznom prostoru V_{2n} biti odredjen sa $2n$ jednačina

$$p_\mu = 0 \ , \quad Q_\mu = 0 \qquad (\mu = 1, .., n) \qquad (4.13)$$

gdje je $\quad Q_\mu = Q_\mu(t, q^1, .., q^n, p_1, .. p_n)$

U proširenom faznom prostoru jednačine ravnoteže će biti

$$p_{\bar{\mu}} = 0 \ , \quad Q_{\bar{\mu}} = 0 \qquad (4.14)$$

gdje je $\quad Q_{\bar{\mu}} = Q_{\bar{\mu}}(q^0, .., q^n, p_0, .., p_n)$

4.3.a. Ravnotežni položaj reonomnog neholonomnog sistema

Ako na posmatrani sistem osim holonomnih veza (4.5) djeluju i neholonomne veze oblika

$$\varphi_\beta = \sum_i^N \vec{l_{\beta i}} \cdot \vec{v_i} + l_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, .., g) \qquad (4.15)$$

Jednačine neholonomnih veza u položaju ravnoteže moraju zadovoljiavati uslov

$$l_\beta = 0 \qquad (4.16)$$

dok holonomne, kao što smo pokazali, zadovoljavaju uslov (4.6).

Jednačine ravnoteže u vektorskom obliku su

$$\begin{aligned} &\vec{F_i} + \sum_\alpha^d \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{\vec{r_i}} f_\alpha + \sum_\beta^g \mu_\beta \vec{l_{\beta i}} = 0 && (i = 1, .., N) \\ &\sum_i^N \vec{l_{\beta i}} \cdot \vec{v_i} + l_\beta = 0 && (\beta = 1, .., g) \\ &f_\alpha(t, \vec{r_1}, .., \vec{r_N}) = 0 && (\alpha = 1, .., d) \end{aligned} \qquad (4.17)$$

Odavde se na jednostavan način izvode jednačine ravnoteže u Dekartovim koordinatama.

Slično kao za holonomne sisteme izveli bi iz (4.17) i jednačine ravnoteže u generalisanim koordinatama.

Kako su u prethodnoj glavi izvedene diferencijalne jednačine kretanja za reonomni neholonomni sistem i iz uslova da su generalisani impulsi $p_\mu=0$, u slučaju ravnoteže sistema, slijediće da su jednačine ravnoteže u konfiguracionom prostoru V_n sledeće

$$Q_\mu + \varphi^{\alpha'}_{\mu} Q_{\alpha'} = 0 \qquad (\mu=1,\dots,m=3N-d-g) \tag{4.18}$$
$$\dot{q}^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}_{\mu}\dot{q}^{\mu} + \varphi^{\alpha'}_{0} \qquad (\alpha'=m+1,\dots,n=3N-d)$$

U odnosu na prošireni konfiguracioni prostor jednačine ravnoteže su, zbog $p_{\bar{\mu}}=0$, $\bar{\mu}=0,1,\dots n$ sledeće

$$Q_{\bar{\mu}} + \varphi^{\alpha'}_{\bar{\mu}} Q_{\alpha'} = 0 \qquad \bar{\mu}=0,1,\dots,m=3N-d-g$$
$$\dot{q}^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}_{\bar{\mu}}\dot{q}^{\bar{\mu}} \qquad \alpha'=m+1,\dots,n=3N-d \tag{4.19}$$

Ovdje su uzeti u obzir i uslovi (4.6) i (4.16).

U slučaju (4.18) imamo sistem od n diferencijalnih jednačina prvog reda u kojima se pojavljuje n nepoznatih $q^1,\dots,q^n$. Slično tome u slučaju (4.19) imamo $n+1$ jednačinu sa $n+1$ nepoznatom $q^0, q^1,\dots,q^n$. Ako su sve jednačine (4.18) odnosno (4.19) nezavisne, imamo potpun sistem diferencijalnih jednačina.

4.4.a. Ravnotežno stanje reonomnog neholonomnog sistema

Ravnotežno stanje, kao i ravnotežni položaj, dobijamo iz jednačina kretanja (3.9α), kada desne strane ovih jednačina izjednačimo sa nulom. Ovim jednačinama dodajemo i uslov da su svi generalisani impulsi p_μ jednaki nuli, kao i jednačine veza u obliku (2.28):

$$p_\mu = 0$$
$$Q_\alpha + \varphi^{\alpha'}_{\alpha} Q_{\alpha'} = 0 \tag{4.20}$$
$$(a^{\alpha'\nu} - \varphi^{\alpha'}_{\alpha} a^{\alpha\nu} - \varphi^{\alpha'}_{0} a^{\alpha 0})\, p_\nu = 0$$

$$(\mu,\nu=1,\dots,n;\quad \alpha=1,\dots,m=n-g\quad;\quad \alpha'=m+1,\dots,n=3N-d)$$

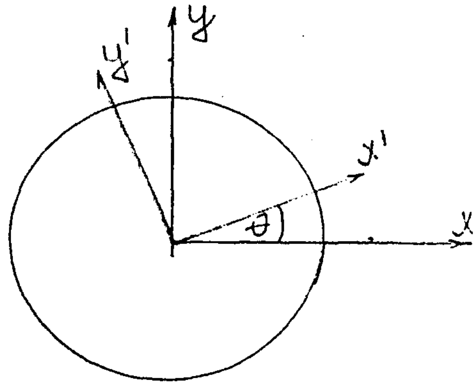
Jednačinama (4.20) odredjeno je ravnotežno stanje sistema u faznom prostoru V_{2n} , dok će ravnotežno stanje u faznom prostoru V_{2n+2} biti odredjeno sledećim sistemom jednačina:

$$p_{\bar{\mu}} = 0 \qquad Q_{\bar{\alpha}} + \varphi^{\alpha'}_{\bar{\alpha}} Q_{\alpha'} = 0 \qquad (a^{\alpha'\bar{\nu}} - \varphi^{\alpha'}_{\alpha} a^{\alpha\bar{\nu}}) p_{\bar{\nu}} = 0 \quad (4.21)$$

1. Primjer

Teška materijalna tačka kreće se pod dejstvom tangentne sile konstantnog intenziteta po vertikalnom krugu. Krug se obrće oko horizontalne ose koja prolazi kroz njegov centar ugaonom brzinom $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$. Ispitati ravnotežu posmatrane materijalne tačke.

U ovom zadatku treba ispitati da li je moguća ravnoteža i ako jeste odrediti ravnotežne položaje.



Veza se može zadati u obliku

$$r = a$$
$$\vec{i}' = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$
$$\vec{j}' = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

Vektor položaja posmatrane tačke će biti

$$\vec{r} = a\cos(\theta+\varphi)\vec{i} + a\sin(\theta+\varphi)\vec{j}$$

gdje je φ generalisana koordinata kojom mjerimo kretanje tačke po krugu.

Uslov (4.2) u ovom primjeru je sledeći

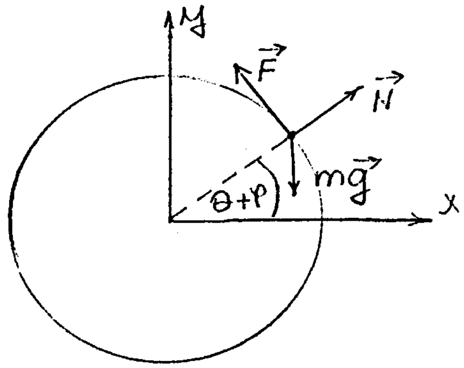
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} = \vec{v}_r + \vec{v}_p = 0$$
$$\vec{v}_r = [-a\sin(\theta+\varphi)\vec{i} + a(\cos(\theta+\varphi)\vec{j}]\dot{\varphi}$$
$$\vec{v}_p = [-a\sin(\theta+\varphi)\vec{i} + a\cos(\theta+\varphi)\vec{j}]\dot{\theta}$$

odakle slijedi da je ravnoteža moguća ako je $\dot{\varphi} = -\dot{\theta}$, odnosno

$$\varphi = -\theta + A \qquad (*)$$

ovom uslovu A je bilo koja konstanta.

Sledeći korak je da se ispita kada će relacija (*)
ažiti, ako na materijalnu tačku djeluju date sile $\vec{F} = b\,\vec{c}_0$ i $m\vec{g}$
slov ravnoteže sila koje dje-
uju na tačku je



$$ng \sin(\theta+\varphi) = N$$
$$= mg\cos(\theta+\varphi)$$

ko u drugu od ovih jednačina
vrstimo uslov (*) dobijamo po-
ložaj ravnoteže

$$b = mg\cos A \quad \rightarrow \quad \cos A = \frac{b}{mg} \qquad (b \leq mg)$$

davde odredjujemo konstantu A, a time i položaj ravnoteže

$$\theta + \varphi = \arccos \frac{b}{mg}$$

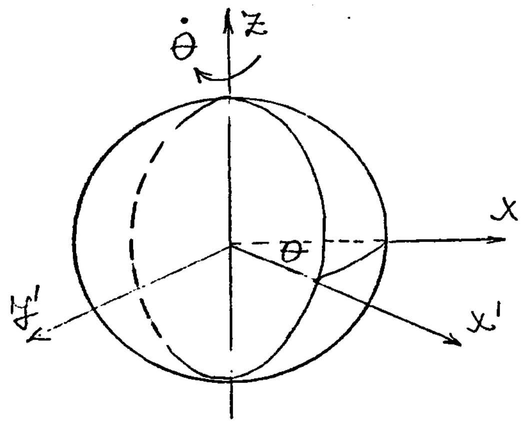
nači da je ravnoteža moguća u položaju u kome je ispunjen ovaj
slov. Da li će se ta ravnoteže i ostvariti zavisi od početnih
slova.

2. Primjer

Tačka se kreće po vertikalnom krugu koji se obrće oko
vog vertikalnog prečnika.

eza je zadata u obliku

$$\vec{i}' = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$$
$$\vec{j}' = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$$



Vektor položaja $\vec{r}$ je

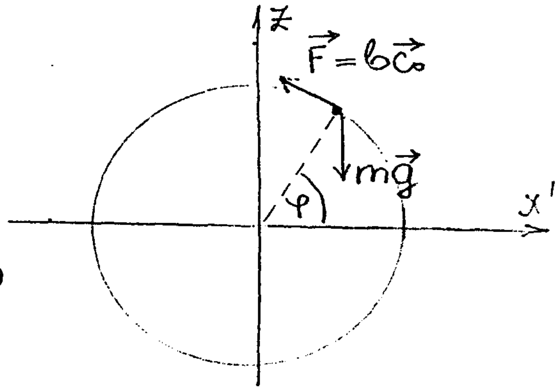
$$\vec{r} = a\cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} + a\cos\varphi\sin\theta\,\vec{j} + a\sin\varphi\,\vec{k}$$

a njegovi parcijalni izvodi su

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -a\sin\varphi\,\vec{i}\,' + a\cos\varphi\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} = a\cos\varphi\,\dot{\theta}\,\vec{j}\,'$$

U položaju ravnoteže brzina tačke je jednaka nuli.



$$\vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} = 0$$

$$(-a\sin\varphi\,\vec{i}\,' + a\cos\varphi\,\vec{k})\dot{\varphi} + a\cos\varphi\,\dot{\theta}\,\vec{j}\,' = 0$$

Ravnoteža je moguća samo u trivijalnom slučaju kada je $\dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0$ odnosno

$$\varphi = A \quad , \quad \theta = B$$

što znači da nema ni relativnog ni prenosnog kretanja

$$\cos A = \frac{b}{mg}$$, θ je proizvoljan ugao

Za razliku od drugog primjera, u prvom primjeru moguća je ravnoteža kada se veza kreće, tj. (kada je veza reonomna) ako je brzina kretanja po vezi (relativna brzina) vektor suprotan brzini kretanja zajedno sa vezom (prenosna brzina). Naravno, ovaj slučaj uključuje u sebe i trivijalno rješenje $\vec{v}_r = 0$, $\vec{v}_p = 0$

5. Mehanička energija reonomnog holonomnog sistema. Zakon o održanju energije.

Posmatramo reonomni holonomni sistem materijalnih tačaka $M_i (i=1,\dots N)$, tj. sistem tačaka potčinjen vezama oblika:

$$f_\alpha(t, \vec{r_i})=0 \qquad (\alpha=1,\dots,d;\ i=1,\dots,N) \tag{5.1}$$

Ako su zadate veze idealne tada je zbir radova reakcija tih veza na virtualnim pomjeranjima jednak nuli

$$\sum_i^N \vec{R_i}\delta\vec{r_i}=0 \tag{5.2}$$

što se u razvijenom obliku u odnosu na Dekartov sistem koordinata može napisati:

$$\sum_i^N (R_{ix}\delta x_i+R_{iy}\delta y_i+R_{iz}\delta z_i)=0 \tag{5.3}$$

Reakcije $\vec{R_i}$ se pomoću tzv. Lagranževih neodredjenih množitelja, pretpostavljaju u obliku

$$\vec{R_i}=\sum_\alpha^d \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{\vec{r_i}} f_\alpha \tag{5.4}$$

tako da se relacija (5.2) sada zapisuje u obliku

$$\sum_i^N\sum_\alpha^d \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{\vec{r_i}} f_\alpha\cdot\delta\vec{r_i}=0 \tag{5.5}$$

Uvodeći nezavisne koordinate $q^\nu (\nu=1,\dots\ n=3N-d)$ relacija (5.5) postaje

$$\sum_i^N\sum_\alpha^d \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{\vec{r_i}} f_\alpha\cdot\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q^\mu}\delta q^\mu=0 \tag{5.6}$$

Označimo li sa $Q'_\nu = \sum_i^N \sum_\alpha^d \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu}$ (5.6)
se svodi na oblik

$$Q'_\nu \cdot \delta q^\nu = 0 \qquad (\nu = 1,..,n) \qquad (5.7)$$

Uporedjujući (5.3) i (5.7) zaključujemo da je uslov idealnosti veze invarijantan u odnosu na transformaciju koordinata iz opažajnog prostora (x_i, y_i, z_i) u prostor V_n generalisanih koordinata q^ν.

Čak i ako iz n-dimenzionog prostora V_n predjemo u prostor V_{n+1} gdje smo prostor proširili koordinatom $q^0=t$, uslov idealnosti veze se ne mijenja jer će zbog $\delta q^0 = \delta t = 0$ važiti

$$Q'_{\bar\nu} \cdot \delta q^{\bar\nu} = 0 \qquad (\bar\nu = 0,1,..,n) \qquad (5.8)$$

Prelaskom iz opažajnog E_3 prostora u prostor V_n koordinata q^μ, problem posmatranja sistema materijalnih tačaka M_i, sveli smo na problem posmatranja jedne tačke, tzv. reprezentativne.

Dok na sistem tačaka u E_3 djeluju reakcije veza $\sum_\alpha \lambda_\alpha \operatorname{grad} f_\alpha$ dotle na reprezentativnu tačku djeluje reakcija Q' čije su projekcije Q'_ν na bazne vektore $\partial \vec{r}_i / \partial q^\nu$ jednake nuli. Dakle, tu silu posmatrač u prostoru V_n ne uočava (ona je ostala u okolnom prostoru).

Proširivanjem prostora V_n koordinatom $q^0=t$ dobijamo još jednu projekciju Q'_0 reakcije veze Q_0:

$$Q'_0 = \sum_i^N \sum_\alpha^d \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \qquad (5.9)$$

koja je različita od nule, mada je virtualno pomjeranje δt u pravcu te koordinate jednako nuli (na osnovu definicija varijacije), pa i dalje važi da je virtualni rad sile Q' jednak nuli.

Proširivanjem prostora od V_n do V_{n+1} vidimo da reakcija veze Q' ne ispunjava i dalje uslov da čitava ostane izvan prostora V_{n+1} kao što je to slučaj u V_n, već ima projekciju Q'($\neq$0) u pravac baznog vektora .

Pokažimo kako se reakcija Q'_o može kraće zapisati:

Kako je $f_\alpha(t,\vec{r}_i)=0$ to je $df_\alpha/dt=0$

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$$

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$$

z uslova ortogonalnosti grad f_α i $\partial\vec{r}_i/\partial q^\mu$ slijedi

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = 0$$

rethodna relacija se svodi na

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$$

odavde

$$\sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} f_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = -\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \qquad (5.10)$$

ako da se (5.9) na osnovu (5.10) može zapisati u obliku

$$Q'_o = -\sum_\alpha^d \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \qquad (5.11)$$

Kako će postojanje projekcije Q'_o u prostoru V_{n+1} uticati na potencijal sila V^*, Lagranževu funkciju L^* i Hamiltonovu funkciju H^*?

Na posmatranu reprezentativnu tačku djelovaće sledeće generalisane sile:

aktivne $\displaystyle\sum_i^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\mu}}} = Q_{\bar{\mu}} = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$

reakcije veza $\displaystyle\sum_i^N \vec{R}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\bar{\mu}}} = Q'_{\bar{\mu}} = \{Q'_0, 0, \dots, 0\} = \left\{-\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}, 0, \dots, 0\right\}$

I jedne i druge mogu eksplicitno da zavise od vremena, pa i njihov potencijal, ako postoji, takodje može zavisiti od vremena. U tom slučaju se rezultujuća sila koja djeluje na reprezentativnu tačku može predstaviti u obliku zbira

$$Q_{\bar{\mu}}+Q'_{\bar{\mu}}=\left\{Q_0+Q'_0, Q_1,\dots,Q_n\right\}=\left\{\frac{\partial V^*}{\partial q^0},\frac{\partial V^*}{\partial q^1},\dots,\frac{\partial V^*}{\partial q^n}\right\}$$

tako da je

$$\begin{aligned} dW^* &= \frac{\partial V^*}{\partial q^0}dq^0+\frac{\partial V^*}{\partial q^1}dq^1+\dots+\frac{\partial V^*}{\partial q^n}dq^n \\ &=(Q_0+Q'_0)dq^0+Q_1dq^1+\dots+Q_ndq^n \\ &=dA(Q_0+Q'_0)+dA(Q_1)+\dots+dA(Q_n)=dA(Q_{\bar{\mu}}+Q_{\bar{\mu}}') \end{aligned} \tag{5.12}$$

Totalni diferencijal funkcije V^*je rad generalisane sile $Q(Q_0+Q'_0+Q_1,\dots,Q_n)$ na mogućem pomjeranju $dq(dq^0,\dots,dq^n)$ reprezentativne tačke.

U prostoru V_n potencijalnu funkciju V tražimo u obliku $V(t,q^u)$ takvom da se njen diferencijal

$$dV=\frac{\partial V}{\partial q^\mu}\cdot dq^\mu+\frac{\partial V}{\partial t}dt=Q_\mu\cdot dq^\mu+\frac{\partial V}{\partial t}dt$$

Rad generalisane sile Q_μ neće biti totalni diferencijal funkcije V, već će se razlikovati za član $\frac{dV}{dt}dt$. Iz definicije elementarnog rada prethodna relacija će glasiti

$$dV=dA(Q_\mu)+\frac{\partial V}{\partial t}dt \tag{5.13}$$

Dakle, u prostoru V_{n+1} totalni diferencijal dV^*jednak je radu sile Q koja djeluje na reprezentativnu tačku, što nije slučaj u prostoru V_n. Različitost radova u ova dva slučaja tumačimo time da se u prostoru V_n ne nalazi čitava sila Q, tj. njena komponenta Q_0 pripada okolnom prostoru i ne uzima se u obzir njen rad.

Tek kada prostor V_n proširimo koordinatom $q^o=t$, komponen-
ta Q_o sile duž te koordinate ulazi u prostor u kome operišemo i
sada je, kao što smo vidjeli

$$dW^* = dA(Q\mu)$$

Poredjenjem potencijalnih funkcija V i V^* u V_n i V_{n+1} dolazimo
do veze medju njima:

$$dV^* = dA(Q\bar{\mu}) = dA(Q_o + Q_o') + dA(Q\mu)$$
$$dW^* - dW^* = dA(Q_o + Q_o') - \frac{\partial V}{\partial t}dt \tag{5.14}$$

U slučaju da je $\frac{\partial V}{\partial t} = Q_o + Q_o'$ može se desiti da su
V^* i V isto.

Lagranževa funkcija L^* je

$$L^* = T + V^*$$

što u slučaju da je $V^* = V$, tj. $\frac{\partial V}{\partial t} = Q_o + Q_o'$ može biti i Lagranževa
funkcija L u V_n.

Hamiltonovu funkciju H^* u prostor V_{2n+2} uvodimo na sledeći
način:

$$H^* = p_{\bar{\mu}}\dot{q}^{\bar{\mu}} - L^* = p_o + p_\mu \dot{q}^\mu - L^* \tag{5.15}$$

U slučaju da je $V=V^*$, tj. $L = L^*$ prethodna relacija se može napi-
sati u obliku

$$H^* = p_o + p_\mu \dot{q}^\mu - L = p_o + H \tag{5.16}$$

gdje je H - Hamiltonova funkcija u V_{2n}.

Odavde zaključujemo da se Hamiltonova funkcija H^* u
V_{2n+2} i H u V_{2n}, u slučaju da je u oba prostora potencijalna
funkcija ista, tj. da je $V = V^*$, razlikuju tačno za generalisani
impuls p_o. Pokažimo sada čemu je jednaka Hamiltonova funkcija H^*:

$$H^* = p_{\bar{\mu}}\dot{q}^{\bar{\mu}} - L^* = p_{\bar{\mu}}\dot{q}^{\bar{\mu}} - T - V^* = \frac{1}{2} p_{\bar{\mu}}\dot{q}^{\bar{\mu}} - V^* = E^* \tag{5.17}$$

H^{*} u $\mathcal{V}_{2n+2}$ predstavlja totalnu mehaničku energiju, kao što je to u skleronomnom slučaju Hamiltonova funkcija H u V_{2n}.

Izvedimo sada uslove za postojanje zakona o održanju totalne mehaničke energije.

Postavlja se pitanje da li je, osim Jakobijevog i Penleveovog koji su u literaturi dobro poznati, moguće za reonomne sisteme izvestii uslove pri kojima će važiti zakon o održavanju ukupne mehaničke energije.

Prvi korak ka ovom cilju je da definišemo (uvedemo) mehaničku energiju.

Ponovićemo da se pojam mehaničke energije (tačnije potencijalne energije) u Lagranžovom i Njutnovom pristupu razlikuju. Ta razlika je sledeća:

U Lagranževom pristupu, prelaskom na generalisane koordinate, gube se iz vida reakcije idealnih veza i operiše se samo sa aktivnim generalisanim silama $Q_{\mu}(\mu=1\ldots,n=3N-d)$.

Potencijalna funkcija V(q,t) uvodi se kao

$$\frac{\partial V}{\partial q^{\mu}}=Q_{\mu} \qquad (\mu=1,..,n) \tag{5.18}$$

U Njutnovom pristupu prisutne su i aktivne sile i reakcije veza, s tim što je zbog idealnosti veza $\sum_i \vec{R_i}\cdot\partial\vec{r_i}/\partial q^{\mu}=0$. Elementarni rad svih sila je

$$dA=\sum_{i}^{N}(\vec{F_i}\cdot d\vec{r_i}+\vec{R_i}\cdot d\vec{r_i})=Q_{\mu}\cdot dq^{\mu}+(Q_0+Q_0')dt \tag{5.19}$$

gdje je $$Q_0=\sum_{i}^{N}\vec{F_i}\cdot\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial t} \qquad Q_0'=\sum_{i}^{N}\vec{R_i}\cdot\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial t}$$

Potencijalna funkcija $V^{*}(q,t)$ uvodi se kao

$$\frac{\partial V^{*}}{\partial q^{\mu}}=Q_{\mu} \qquad \frac{\partial V^{*}}{\partial t}=Q_0+Q_0' \tag{5.20}$$

gdje je
$$Q_o = \sum_i^N \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} V^*(\vec{r}_i, t) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \Bigg|_{\vec{r}_i = \vec{r}_i(q,t)}$$
$$Q_o' = \frac{\partial V^*(\vec{r}_i, t)}{\partial t} \Bigg|_{\vec{r}_i = \vec{r}_i(q,t)}$$

Napomenućemo da se razlika u ova dva pristupa gubi u slučaju skleronomnih veza jer je tada $Q_o + Q'o = 0$, tako da elementarni rad vrše samo aktivne sile.

Pošto mi radimo sa reonomnim vezama, odn. sistemima usvojićemo Njutnov pristup kao adekvatniji i polazimo od zakona o promjeni kinetičke energije

$$dT = dA \tag{5.21}$$

gdje kao što znamo dA u opštem slučaju, nije totalni diferencijal već oznaka za elementarni rad svih sila koje djeluju na sistem. U stvari mi tražimo uslove pod kojima je dA totalni diferencijal.

Na osnovu (5.19) prethodna relacija postaje

$$dT = Q_\mu \cdot dq^\mu + (Q_o + Q_o')dt \tag{5.22}$$

S ciljem da zbir $Q_o + Q'o$ izrazimo na drugi način, uz pomoć drugog Njutnovog zakona čije obje strane množimo sa $\partial \vec{r}_i / \partial t$ i sabiramo po i dobijamo:

$$\sum_i^N m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt = \sum_i^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt = (Q_o + Q_o')dt$$

$$\sum_i^N m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_i^N \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) - m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} \right] = \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_o) - \frac{\partial T}{\partial t}$$

tako da dobijamo relaciju

$$\frac{d}{dt}(T_1 + 2T_o) - \frac{\partial T}{\partial t} = Q_o + Q_o' \tag{5.23}$$

Zakon o promjeni kinetičke energije sada glasi

$$dT = Q_\mu dq^\mu + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_o)dt - \frac{\partial T}{\partial t} dt \; (= dA) \tag{5.24}$$

Da bi postojao integral energije mora biti:

$$\frac{\partial V^*}{\partial q^\mu_\alpha} = Q_\mu \qquad \frac{\partial V^*}{\partial t} = \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_o) - \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.25)$$

U protivnom je

$$dT = \bar{Q}_\mu dq^\mu_\alpha + \frac{\partial V^*}{\partial q^\mu_\alpha} dq^\mu_\alpha + (\bar{Q}_o + \bar{Q}'_o)dt + \frac{\partial V^*}{\partial t}dt \quad (5.26)$$

gdje su $(\bar{Q}_o + \bar{Q}'o)$, $\bar{Q}_1, \ldots, \bar{Q}_n$ - nepotencijalne sile

$$\frac{\partial V^*}{\partial t}, \frac{\partial V^*}{\partial q^1_\alpha}, \ldots, \frac{\partial V^*}{\partial q^n_\alpha} \qquad \text{- potencijalne sile.}$$

Dakle, ako postoji funkcija V^* sa osobinama (5.25) važiće zakon o održanju totalne mehaničke energije

$$E^*meh = const = T - V^* \quad (5.27)$$

Odredimo vezu izmedju E^*meh u Njutnovom i $E\,meh$ u Lagranževom pristupu.

U Lagranževom pristupu $E\,meh$ se odredjuje samo uslovima (5.18). Uporedjujući relacije (5.18) sa (5.25) slijedi

$$V^*(q,t) = V(q,t) + F(t)$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \dot{F}(t) = \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_o) - \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.28)$$

tako da je:

$$\dot{F}(t) = \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_o) - \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} \quad (5.29)$$

pa je veza izmedju ove dvije funkcije sledeća

$$V^* = V + \underbrace{T_1 + 2T_o - \int\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt}_{F(t)} \quad (5.30)$$

Kako su u (5.30) sadržani uslovi (5.25) i (5.28) zaključujemo da je relacijom (5.30) dat potreban i dovoljan uslov postojanja integrala mehaničke energije (5.27).

Ako se vratimo na relaciju (5.24) vidimo da je potreban uslov, da desna strana te relacije bude totalni diferencijal data uslovom

$$Q_\mu \dot{q}^\mu - \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dt} K(q,t) \longrightarrow K = V - \int \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt \qquad (5.31)$$

što se svodi na Jakobijev integral.

Uslov za postojanje Jakobijevog integrala je blaži od uslova za postojanje integrala ukupne mehaničke energije. Dakle, u slučaju da važi zakon o održanju mehaničke energije, odnosno da je ispunjen uslov (5.30) važiće i Jakobijev integral i veza izmedju $K(q,t)$ i $V^*(q,t)$ je

$$V^* = K + T_1 + 2T_0 \qquad (5.32)$$

Obrnuto ne važi, jer ako postoji funkcija K sa osobinama (5.31) postojaće i neka funkcija W takva da je

$$W = K + T_1 + 2T_0 = V - \int \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt + T_1 + 2T_0$$

ali ona ne mora imati osobinu (5.30).

NAPOMENA:

Uz pomoć relacije (5.30) Hamiltonova funkcija H^* se odredjuje kao

$$H^* = p_{\bar{\mu}} \dot{q}^{\bar{\mu}} - L^* = \frac{1}{2} p_{\bar{\mu}} \dot{q}^{\bar{\mu}} - V - F(t) = p_0 + H - F(t)$$

Ovdje ćemo izvesti važan zaključak da se jednačine kretanja u faznim promjenljivim mogu napisati u kanonskom obliku (1.4) samo onda kada važi zakon o održanju mehaničke energije.

Prethodni zaključak istovjetan je sa tvrdnjom da ako postoji Hamiltonova funkcija, ona mora biti konstantna, tj.

$$H^* = E^*_{meh} = \text{const.}$$

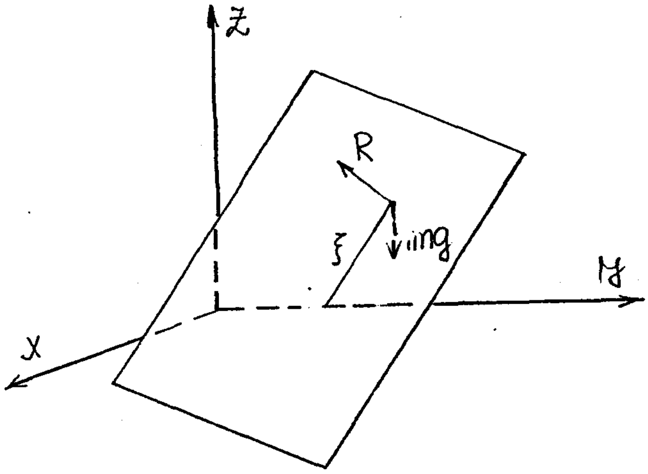
Demonstriraćemo prethodno izvedene stavove na dva primjera.

Prvi primjer je kretanje materijalne tačke koja se nalazi na strmoj ravni. Ravan se kreće horizontalno konstantnom brzinom v.

Izaberimo koordinatni sistem tako da se strma ravan kreće u pravcu y ose i da je linija pada strme ravni paralelna y-z ravni zaklapajući ugao α sa y osom. Jednačina veze je:

$$f=\frac{z}{y-vt}-a=0 \quad , \quad a=\operatorname{tg}\alpha$$

Tačka ima dva stepena slobode i biramo dvije nezavisne generalisane koordinate ξ i x.



Vektor položaja posmatrane tačke je:

$$\vec{r}=x\vec{i}+(vt+\xi\cos\alpha)\vec{j}+\xi\sin\alpha\vec{k}$$

Kinetička energija $T=T_2+T_1+T_o$ je:

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{\xi}^2)+mv\cos\alpha\dot{\xi}+\frac{1}{2}mv^2$$

Aktivna sila i reakcija veze su:

$$\vec{F}=-mg\vec{k} \qquad \vec{R}=-R\sin\alpha\vec{j}+R\cos\alpha\vec{k}$$

Aktivne sile i reakcije veza u generalisanim koordinatama su:

$$Q_x=0 \qquad Q_\xi=-mg\sin\alpha \qquad Q_o=0$$

$$Q_x'=0 \qquad Q_\xi'=0 \qquad Q_o'=-Rv\sin\alpha$$

Potencijalne funkcije V i V^* su:

$$V=-mg\sin\alpha\,\xi \qquad V^*=-mg\sin\alpha\,\xi-Rv\sin\alpha\cdot t$$

Kako nijesu ispunjeni uslovi (5.25), odnosno (5.30) jer je

$$T_1+2T_o-\int\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial t}\right)dt\neq F(t)$$

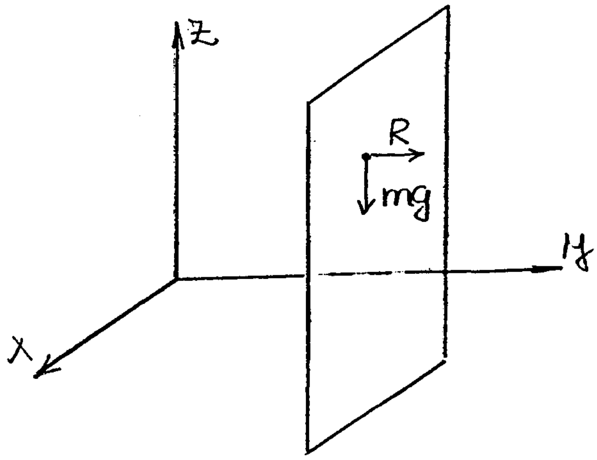
ne važi zakon o održanju potpune energije. Jakobijev integral važi, jer postoji takva funkcija K da je (5.31) zadovoljen:

$$Q_\mu \cdot \dot{q}^\mu_\alpha - \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dK}{dt} \longrightarrow \quad K = -mg \sin\alpha \cdot \xi$$

Jakobijev, tačnije Penlevin integral glasi:

$$\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{\xi}^2) - \frac{1}{2} m v^2 = -mg \sin\alpha\, \xi + h$$

U sledećem primjeru posmatramo kretanje materijalne tačke mase m po vertikalnoj ravni, koja se kreće horizontalno brzinom v=t.



Izaberimo koordinatni sistem tako da se ravan kreće u pravcu y ose i da je paralelna hz ravni. Jednačina veze je:

$$f = y - \frac{t^2}{2} = 0$$

Tačka ima dva stepena slobode i nezavisne generalisane koordinate su: x i z. Vektor položaja posmatrane tačke je:

$$\vec{r} = x\vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{j} + z\vec{k}$$

a kinetička energija $T=T_2+T_o$ je

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} m t^2$$

aktivna sila i reakcija veze su

$$\vec{F} = -mg\vec{k} \qquad \vec{R} = -R\vec{j}$$

tako da su generalisane sile

$$Q_x = 0 \qquad Q_z = -mg \qquad Q_o = 0$$

$$Q'_x = 0 \qquad Q'_z = 0 \qquad Q'_o = -Rt$$

a potencijalna funkcija V je V=-mgz

Uslov (5.30) je ispunjen jer je

$$T_1 + 2T_o - \int \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt = mt^2 - \int mt\,dt = \frac{mt^2}{2} = F(t)$$

Prema tome važi zakon o održanju ukupne energije $T-V^* =$ const, gdje je

$$V^* = -mgz - Rt^2/2$$

Zakon o održanju ukupne mehaničke energije glasi

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}mt^2-mgz-Rt^2/2=\text{const.}$$

Nepoznatu reakciju $\vec{R}$ nalazimo iz relacije (5.23):

$$\frac{d}{dt}(T_1+2T_0)-\frac{\partial T}{\partial t}=Q_0+Q_0'$$

što u našem slučaju daje kao rezultat R=m, tako da zakon o održanju ukupne mehaničke energije ima oblik

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{z}^2)-mgz=\text{const.}$$

Na taj način je ispunjen uslov za postojanje Jakobijevog integrala

$$Q_\mu\cdot\dot{q}^\mu-\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{dK}{dt}$$

pa Jakobijev integral $T_2-T_0=K$ glasi

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{z}^2)-mgz=\text{const.}$$

6. Kinematika reonomnog problema tretirana kao složeno kretanje

Kao jedan od karakteristika u našem pristupu rješavanju reonomnih problema naveli smo ideju da takve probleme rešavamo kao složeno kretanje. Kretanje tačaka po samim vezama definisaćemo kao relativno kretanja, a kretanje tačaka zajedno sa vezama kao prenosno kretanje (kako je učinjeno u drugoj glavi drugog dijela ovog rada. Na taj način u izrazu za ukupno (apsolutno) ubrzanje, pored relativne i prenosne komponente postoji i tzv. "dopunska" komponenta. Za razliku od Koriolisovog koje je antisimetrično, ovo ubrzanje ima i simetrični i antisimetrični dio.

Naš cilj je da bliže odredimo "dopunsko" ubrzanje, kao i prirodu njegovih komponenti:

Neka na sistem od N tačaka djeluje d reonomnih holonomnih veza:

$$f_\alpha = f_\alpha(t, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d) \tag{6.1}$$

Jasno je da sistem ima $n=3N-d$ stepeni slobode i da bi se kretanje moglo opisati sa n nezavisnih generalisanih koordinata

$q^1, \ldots q^n$

Medjutim, mi ćemo kretanje posmatrati kao kretanje reprezentativne tačke u 3N dimenzionom prostoru koordinata.

$$q^1, \ldots, q^n, q^{n+1}, \ldots, q^{n+d} \tag{6.2}$$

tako da je na vezama $q^{n+\alpha} = \dot{q}^{n+\alpha} = \ddot{q}^{n+\alpha} = 0$

Pri tom smo koordinate $q^{n+\alpha}$ izabrali tako da je

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^{n+\alpha}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^m} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, d, \; m = 1., \ldots n) \tag{6.3}$$

Uvedimo metriku u ovaj prostor:

$\vec{g}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$ - kovarijantna baza vektora

$$ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt\right)\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt\right)$$

$$= \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} dq^i dq^j + 2\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dq^i dt + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt^2 \tag{6.4}$$

$$= a_{ij}\, dq^i dq^j + 2 a_{io}\, dq^i dt + a_{oo}\, dt^2$$

$$= a_{im}\, dq^i dq^m + 2 a_{io}\, dq^i dt + a_{oo}\, dt^2$$ - lučna koordinata

$(i,j=1....,3N,\ m=1....,n)$

Na osnovu definicije brzine i ubrzanja slijedi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\cdot \dot{q}^i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

$$\vec{W} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\ddot{q}^i + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial q^i}\dot{q}^i$$

$$q^{n+\alpha} = 0, \quad \dot{q}^{n+\alpha} = 0, \quad \ddot{q}^{n+\alpha} = 0 \tag{6.5}$$

Na osnovu naše definicije relativnog i prenosnog kretanja uvodimo relativne i prenosne komponente brzine i ubrzanja na sledeći način:

$$\vec{v}_{rel} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\dot{q}^i \qquad \vec{v}_p = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \qquad \vec{W}_{rel} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\ddot{q}^i \qquad \vec{W}_p = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}$$

tako da je dopunsko ubrzanje dato izrazom:

$$\vec{W}_d = 2\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial q^i}\dot{q}^i \tag{6.7}$$

U ovim izrazima se podrazumijeva da je $q^{n+\alpha} = \dot{q}^{n+\alpha} = \dot{q}^{n+\alpha} = 0$

Napomenimo da za skleronomne sisteme veze miruju i da postoji samo kretanje tačaka po vezama, tj. relativno kretanje . Tada je

$$\vec{v}_p = \vec{W}_p = \vec{W}_d = 0$$

Razložimo sada dopunsko ubrzanje na simetričn i antisimetrični dio:

U tom cilju pomnožimo obje strane (6.7) baznim vektorom $\vec{g}_j = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}$

$$(Wd)_j = 2\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t\, \partial q^i}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}\,\dot{q}^i$$

Desnoj strani gornje relacije dodaćemo i oduzeti $\dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t\, \partial q^j}\cdot\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\,\dot{q}^i$

$$(Wd)_j = \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t\, \partial q^i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t\, \partial q^j}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\right)\cdot\dot{q}^i + \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t\, \partial q^i}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} - \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t\, \partial q^j}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i$$

što se zbog $\vec{V}_p = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ svodi na oblik

$$(Wd)_j = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}\right)\dot{q}^i + \left[\frac{\partial}{\partial q^i}(\vec{V}_p)\vec{g}_j - \frac{\partial}{\partial q^j}(\vec{V}_p)\vec{g}_i\right]\dot{q}^i \quad (6.8)$$

Sredjivanjem gornjeg izraza dobija se

$$(Wd)_j = \frac{\partial}{\partial t}(a_{ij})\dot{q}^i + \left(\frac{\partial V_{pj}}{\partial q^i} - \frac{\partial V_{pi}}{\partial q^j}\right)\dot{q}^i$$

odnosno

$$(Wd)_j = (\delta_{ij} + \omega_{ij})\cdot\dot{q}^i \Big|_{\dot{q}^{n+\alpha}=0\,,\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^m}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^{n+\alpha}}=0}$$

gdje je

$$\delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}(a_{ij}) \qquad \omega_{ij} = \frac{\partial V_{pj}}{\partial q^i} - \frac{\partial V_{pi}}{\partial q^j}.$$

tako da $(Wd)_j$ razlažemo na dva sabirka $(Wd)_j = (Wd_1)_j + (Wd_2)_j$

$$\begin{aligned} (Wd)_\ell &= \delta_{m\ell}\cdot\dot{q}^m + \omega_{m\ell}\,\dot{q}^m \qquad & \ell, m = 1,\ldots,n = 3N-\alpha \\ (Wd)_{n+\alpha} &= \omega_{m\,n+\alpha}\,\dot{q}^m & \alpha = 1,\ldots,d \end{aligned} \quad (6.9)$$

Dok $\vec{W}d_2$ može da ima svih 3N koordinata, dotle $\vec{W}d_1$ ima samo prvih n koordinata, tako da je tangentan na mnogostruktost po kojoj se kreće reprezentativna tačka.

Ukupno ubrzanje reprezentativne tačke sastojaće se od naredne tri komponente: $\vec{W}_r, \vec{W}_p, \vec{W}_d$ Pokažimo čemu su one jednake. Ubrzanje $\vec{W}$ po definiciji je:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Pomnožimo obje strane gornje relacije baznim vektorom $\vec{g}_l = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^l}$

$$(W)_l = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{g}_l = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^l} = \frac{d}{dt}v_l - \vec{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^l}\right)$$

Kako su operatori $\frac{d}{dt}$ i $\frac{\partial}{\partial q^l}$ komutativni, dobijamo

$$(W)_l = \frac{dv_l}{dt} - \vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial q^l} = \frac{dv_l}{dt} - \frac{\partial}{\partial q^l}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

Kako je $\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ gornja relacija dobija oblik

$$(W)_l = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^l}\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q^l}\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j + 2\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right]$$

što se može napisati na sledeći način

$$(W)_l = \frac{d}{dt}\left(a_{il}\dot{q}^i + a_{l0}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q^l}\left(a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + 2a_{j0}\dot{q}^j + a_0\right)$$

ili u razvijenom obliku

$$(W)_l = \frac{\partial a_{il}}{\partial t}\dot{q}^i + \frac{\partial a_{l0}}{\partial t} + a_{il}\ddot{q}^i + \frac{\partial a_{il}}{\partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{\partial a_{l0}}{\partial q^j}\dot{q}^j - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^l}\dot{q}^i\dot{q}^j - \frac{\partial a_{j0}}{\partial q^l}\dot{q}^j - \frac{\partial a_0}{\partial q^l}$$

grupisanjem odgovarajućih članova dobijamo

$$(W)_l = \left(\frac{\partial a_{il}}{\partial q^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^l}\right)\dot{q}^i\dot{q}^j + a_{il}\ddot{q}^i + \left(\frac{\partial a_{l0}}{\partial q^i} - \frac{\partial a_{i0}}{\partial q^l}\right)\dot{q}^i - \frac{1}{2}\frac{\partial a_0}{\partial q^l} + \frac{\partial a_{il}}{\partial t}\dot{q}^i$$

tako da ukupno ubrzanje sadrži tri sabirka

$$(W)_l = \underbrace{[ij,l]\dot{q}^i\dot{q}^j + a_{il}\ddot{q}^i}_{\text{relativno}} + \underbrace{\frac{\partial a_l}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_0}{\partial q^l}}_{\text{prenosno}} + \underbrace{2\omega_{il}\dot{q}^i + d_{il}\dot{q}^i}_{\text{dopunsko}}$$

Iz (6.8) vidimo da je antisimetrični dio vektora dopunskog ubrzanja samo Koriolisovo ubrzanje:

$$\vec{W}_{d_2} = 2\,\mathrm{rot}\,\vec{U}_p \times \vec{U}_r$$

i ono će postojati u slučaju da veze rotiraju u prostoru kao krute.

Simetrični dio W_{d1} postoji jer se koeficijenti metričke forme mijenjaju sa vremenom, što znači da veze mijenjaju oblik i veličinu sa vremenom.

Na osnovu ovih razmatranja nameće se zaključak da bi se kinematika relativnog kretanja mogla tretirati kao specijalan slučaj reonomnih problema u kojima se veze kao krute pomjeraju u prostoru, tj. kao slučaj kada je $\vec{W}_{d_1}=0$

Ilustrovaćemo izvedene relacije na karakterističnim primjerima:

1. Posmatramo kretanje materijalne tačke u ravni po elsipsi koja se translatorno pomjera po paraboličnoj putanji.

Jednačina elipse je

$$x = a\cos\varphi \qquad y = b\sin\varphi$$

Za generalisane koordinate biramo ugao φ i koordinatu q; za $q=0$ dobijamo elipsu koja se translatorno pomjera po paraboličnoj putanji.

Vektor položaja posmatrane tačke je

$$\vec{r} = \left[t+(a+q)\cos\varphi\right]\vec{i} + \left[t^2+(b+q)\sin\varphi\right]\vec{j} = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(q,\varphi) \quad (*)$$

Koordinate osnovnog metričkog tenzora u proširenom prostoru V_3 su

$$a_{\varphi\varphi} = (a+q)^2\sin^2\varphi + (b+q)^2\cos^2\varphi \qquad a_{\varphi o} = -(a+q)\sin\varphi + (b+q)\,2t\cos\varphi$$

$$a_{qq} = 1 \qquad a_{qo} = \cos\varphi + 2t\sin\varphi$$

$$a_{q\varphi} = (b-a)\sin\varphi\cos\varphi$$

Koordinate dopunskog ubrzanja su

$$(W_d)_\varphi = \left[\frac{\partial}{\partial t}(a_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(a_{\varphi 0}) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(a_{\varphi 0})\right]\dot{\varphi} = 0$$

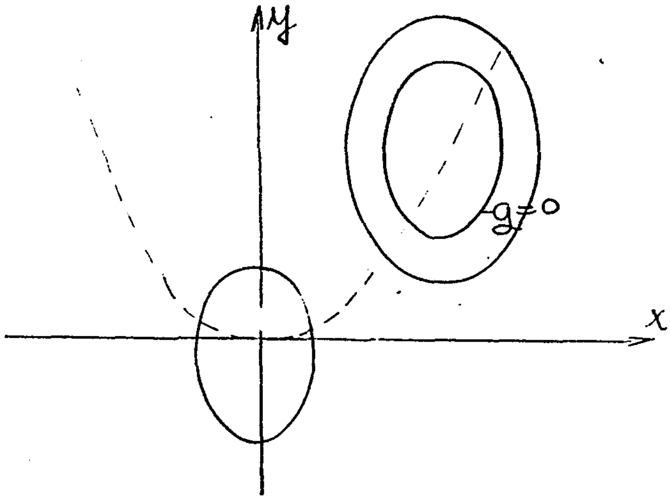
$$(W_d)_\varrho = \left[\frac{\partial}{\partial t}(a_{\varrho\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(a_{\varrho 0}) - \frac{\partial}{\partial \varrho}(a_{\varphi 0})\right]\dot{\varphi} = 0$$

odnosno dopunsko ubrzanje je

$$\vec{W}_d = 0$$

Ako je vektor položaja zadat u obliku (*) vidimo da je $v_p = v_p(t)$

- sve tačke na vezi imaju u datom trenutku iste brzine, linija po kojoj se kreće posmatrana tačka se translatorno pomjera.



2. U ovom primjeru veza je krug koji mijenja svoj prečnik i translatorno se pomjera. Vektor položaja posmatrane materijalne tačke je

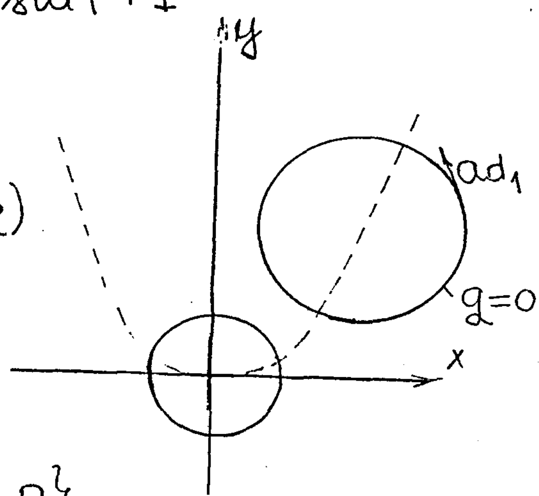
$$\vec{r} = \left[t + (t+\varrho)\cos\varphi\right]\vec{i} + \left[t^2 + (t+\varrho)\sin\varphi\right]\vec{j}$$

koordinate osnovnog metričkog tenzora su

$$a_{\varphi\varphi} = (t+\varrho)^2 \qquad a_{\varphi 0} = -(t+\varrho)\sin\varphi + 2t(t+\varrho)\cos\varphi$$

$$a_{\varrho\varrho} = 1 \qquad a_{\varrho 0} = \cos\varphi + 2t\sin\varphi + 1$$

$$a_{\varrho\varphi} = 0$$



Koordinate dopunskog ubrzanja su

$$(W_d)_\varphi = \left[\frac{\partial}{\partial t}(a_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(a_{\varphi 0}) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(a_{\varphi 0})\right]\dot{\varphi} = 2(t+\varrho)$$

$$(W_d)_\varrho = \left[\frac{\partial}{\partial t}(a_{\varrho\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(a_{\varrho 0}) - \frac{\partial}{\partial \varrho}(a_{\varphi 0})\right]\dot{\varphi} = 0$$

tako da je

$$\vec{W}_{d_1} = \{2t,\ 0\}\dot{\varphi} = 2t\dot{\varphi}\vec{e}_0 \qquad \vec{W}_{d_2} = \{0,\ 0\}$$

3. Veza je krug koji se obrće u svojoj ravni oko svog središta. Vektor položaja posmatrane tačke je

$$\vec{r} = (a+\varrho)\cos(t+\varphi)\vec{i} + (a+\varrho)\sin(t+\varphi)\vec{j}, \quad a=\text{const.}$$

Koordinate osnovnog metričkog tenzora su:

$$a_{\varphi\varphi} = (a+\varrho)^2 \qquad a_{\varphi 0} = (a+\varrho)^2$$

$$a_{\varrho\varrho} = 1 \qquad a_{\varrho 0} = 0$$

$$a_{\varrho\varphi} = 0$$

Koordinate dopunskog ubrzanja su

$$(wd)_\varphi = \left[\frac{\partial}{\partial t} a_{\varphi\varphi}\right]\dot{\varphi} = 0$$

$$(wd)_\varrho = \left[\frac{\partial}{\partial t} a_{\varrho\varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} a_{\varrho 0} - \frac{\partial}{\partial \varrho} a_{\varphi 0}\right]\dot{\varphi} = -2(a+\varrho)\dot{\varphi}$$

tako da su dvije komponente dopunskog ubrzanja

$$\vec{wd}_1 = \{0, 0\} \qquad \vec{wd}_2 = \{0, -2a\}\dot{\varphi} = -2a\dot{\varphi}\vec{\varrho}_0$$

Literatura

1. Istorija mehaniki, Moskva, 1972.

2. Andjelić, T., Stojanović, R.: Racionalna mehanika, Beograd, 1966.

3. Appel , P.: Teoretičeskaja mehanika (prevod sa francuskog) Moskva, 1960.

4. Arnold, V.I.: Mathematical Methods of Classical Mechanics (prevod s ruskog) New York, 1980.

5. Bilimović, A.: Racionalna mehanika, Beograd, 1951.

6. Gantmaher, E.R.: Analitička mehanika (prevod s ruskog) Beograd, 1965.

7. Goldstein, H.: Classical Mechanics, Cambridge, 1951.

8. Greenwood, D.: Principles of dynamics, London,1965.

9. Kane, T.: Dynamics, Stanford, 1972.

10. Kilmster, C.W.: Hamiltonian Dynamics, New York, 1964.

11. Lanczos, C.: The Variational Principles of Mechanics, Toronto, Univ. Toronto Press,1949.

12. Lurie, A.I.: Analitičeskaja mehanika, Moskva, 1956.

13. Meirovitch, L.: Methods of Analytical Dynamics, New York, 1970.

14. Murnaghan, F.: Introduction to Applied Mathematics, New York, 1963.

15. Pars, L.: Analytical Dynamics, London, 1964.

16. Rosenberg, R.: Analytical Dynamics of Dicrete Systems, New York, 1977.

17. Vujičić V.: Kovarijantna dinamika, Beograd, 1981.

18. Whittaker, E.,: A treatise on Analytical Dynamics, Cambridge, 1937.

19. Bakša, A, Stabilnost kretanja neholonomnih sistema, Doktorska disertacija, PMF, Beograd, 1976.

20. Rumjantsev, V.: On Lagrange and Jacobi Principles for Nonholonomic systems, PMM, vol. 43. No.4, 1979. PP 583-590.

21. Rumjacev, B.K.: Lagranževih reonommih sistem so svjazami, PMM Tom 48, Vip. 4. 1984.

22. Rusov L.: Generalizacija mehanike i problemi prvih integrala jednačina kretanja, doktorska teza, Beograd, 1971.

23. Vujičić V.: Snaga i reakcija reonomnih veza, Kongres mehanike Makedonije, Skoplje 1984.

24. Vuičič, V.: Ob integrale energii sistem otenennih neostacionarnimi svjazami, Teoretič. i prikl. mehanika, T.G. Beograd, 1980. s. 133.143.

25. Kažić,M.: Stabilnost ravnotežnog stanja reonomnog neholonomnog sistema, Magistarski rad, Beograd, 1980.

26. Kažić,M.: Stability of Equilibrium of Nonholonomic, Rheonomic Systems, Mehanika, Beograd, 1982.

27. Kažić,M.: O jednoj dualnosti u mehanici reonomnih sistema, Nelinearni problemi dinamike, Arandjelovac, Simpozijum, 1983.

28. Kažić, M.: Uporedjenje dveju metoda za proširenje faznog prostora, Kongres mehanike Jugoslavije, Bečići, 1983.

29. Kažić, M., Bulatović,R.: Kinematics of relative motion, GAMMKongres, Dubrovnik, 1985.

30. Kažić, M. Mehanička energija. Zakon o održanju mehaničke energije za reonomne sisteme, Kongres mehanike Jugoslavije, Zadar, 1986.