P24.436

Svetozar Milić

P R I L O G   T E O R I J I   K V A Z I G R U P A

(Doktorska disertacija)

Rukovodilac,

Dr. Slaviša Prešić

Vanr. prof. PMF

B E O G R A D   1 9 7 1.

S A D R Ž A J

PRILOG TEORIJI KVAZIGRUPA

0. UVOD

Pojam kvazigrupe je izvesno proširenje pojma grupe, odnosno grupa je ona kvazigrupa koja je asocijativna.

U implicitnom obliku pojam kvazigrupe susreće se već u radu L.Eulera [25] , gde se tretira tzv. problem o 36 oficira, koji je ekvivalentan postojanju para ortogonalnih latinskih kvadrata razmere 6. Latinski kvadrat je Kelijeva tablica za konačne kvazigrupe i igra važnu ulogu u kombinatornoj analizi [33]. Njegovi se rezultati, prema današnjoj terminologiji, mogu označiti kao prvi rezultati iz teorije neasocijativnih algebarskih struktura, odnosno kvazigrupa. Ipak, kao početak teorije kvazigrupa i lupa uzima se 1935. godina sa pojavom rada R.Moufanga [38].

Značajnije radove iz teorije kvazigrupa dali su A.A.Albert, R.H.Bruck, A.Sade, V.D.Belousov i dr. Od kompletnijih monografija navodimo R.H.Bruck [18] i V.D.Belousov 12 , dok se mnogobrojni radovi koji tretiraju probleme iz ove oblasti nalaze po raznim internacionalnim časopisima.

Neki problemi iz teorije projektivnih ravni, teorije funkcionalnih jednačina i drugih oblasti matematike, nametnuli su potrebu izučavanja univerzalnih algebri sa sistemom kvazigrupnih operacija λ, vezanih nekim identitetom (zakonom) ili sistemom identiteta. Problematika proučavanja ovakvih univerzalnih algebri sa identitetom račva se u tri vida problema:

Prvi - ako identitet smatramo u običnom smislu (v. na pr. [35]).

Drugi - kada nisu samo slobodne promenljive, koje učestvuju u identitetu, bilo koji elementi skupa Q na kome su definisane sve kvazigrupe operacije iz λ, već i sve operacije toga identiteta bilo koje iz sistema λ.

Treći - ako su neke operacije iz identiteta proizvoljne iz λ, a ostale zavise od njih.

U ovakvu vrstu problema spadaju i proučavanja tzv. specijalnih grupa u kojima je asocijativan zakon zamenjen nekim slabijim zakonom. Tako je V.D.Belousov 1958. god. u [11] dokazao sledeću teoremu tzv. "Teoremu o četiri kvazigrupe": Ako četiri kvazigrupe $Q(A_i)$ $(i=1,2,3,4)$ zadovoljavaju opšti asocijativan zakon

$$(1) \qquad A_1(A_2(x,y),z) = A_3(x, A_4(y,z))$$

onda su sve $Q(A_i)$ izotopne jednoj te istoj grupi $Q(.)$. Druge dokaze ove teoreme dali su još J.Aczél u [1], J. Aczél, V.D.Belousov i M.Hosszú u [2] , M. Hosszú u [30].

Grupa sa oslabljenim asocijativnim zakonom proučavali su T.Evans u [25], A. Sade u [45], V.D.Belousov u [16], V.Devidé u [23] i dr. Tako je V.Devidé u [23], izmedju ostalog, proučavao tzv. D-grupe tj. kvazigrupe $Q(.)$ u kojima je za svaku trojku $x,y,z \in Q$ ispunjeno

$$(2) \qquad (x.y).z = fx.(gy.hz)$$

gde su f,g,h permutacije skupa Q. Neposredno se utvrdjuje da je (2) specijalan slučaj identiteta (1). U monografiji R.H.Brucka [18] posebno su proučene tzv. Mufangove kvazigrupe tj. kvazigrupe u kojima su ispunjeni sledeći zakoni: $x.e = e.x = x$, $(x.y)(z.x)=(x.(y.z)).x$, gde je e jedinica kvazigrupe $Q(.)$. Iz tih proučavanja proizašla su mnoga važna uopštavanja svojstava grupa.

U poslednje vreme pojavili su se mnogi radovi posvećeni univerzalnim algebrama sa jednom n-arnom operacijom. Takve algebre obično se zovu n-grupoidi. Prvi rad iz ove oblasti može se smatrati rad [24] W.Dörntea u kome se razmatra uopštenje, za n-arni slučaj, pojma grupe. Iscrpniju monografiju o n-grupama i n-polugrupama dao je E.L.Post u [39] . Za teoriju n-polugrupa i n-grupa možemo reći da se nalazi u začetku. Od naših matematičara koji su dali značajnije priloge iz teorije n-polugrupa i n-grupa treba istaći G.Čupona i B.Trpenovski [20], [21] , [22], [48], [49] i dr. Ako u n-grupoidu postoje sve inverzne operacije, onda za takav n-grupoid kažemo da je n-kvazigrupa. U nekim geometrijskim problemima (na primer u teoriji rešetaka) značajnu ulogu imaju n-grupoidi, posebno za $n = 2$ i $n = 3$.

F.Rado je 1960.god.u radu [43] izučavao vezu izmedju 3-kvazigrupa i prostornih rešetki.

Iz teorije n-kvazigrupa pojavljuju se radovi 1964.god. M.Hosszú i F.Rado [31], V.D.Belousov i M.Hosszú [17], V.D.Belousov i M.D.Sandik 1966.god. u [13] i dr. U radu [13] se za n-arni slučaj uopštava teorema Alberta [6], koja tvrdi da je svaka binarna kvazigrupa izotopna nekoj lupi.

Jedan od osnovnih problema u teoriji n-kvazigrupa je pitanje predstavljanja n-kvazigrupe preko kvazigrupa manje arnosti. U [13] dat je nov dokaz Hosszú-Gluskinove teoreme koja tvrdi, da se svaka n-grupa Q(A) može predstaviti pomoću neke binarne grupe "o" i njenih automorfizama tj.

$$A(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \circ \varphi x_2 \circ \ldots \circ \varphi^{n-1} x_n \circ a$$

gde je $\varphi^{n-1} x = a \circ x \circ a^{-1}$, $\varphi a = a$, φ je automorfizam grupe "o". Ovu teoremu je M.Hosszú dokazao 1963.god. u [29], a nezavisno od njega L.M.Gluskin 1964.god. u [28].

U ovom radu razmatrani su neki problemi sistema kvazigrupnih operacija raznih dužina (arnosti), vezanih nekim zakonom ili sistemom zakona. Zatim, dokazane su neke teoreme u algebri UD-grupoida, čijom primenom nalazimo rešenje funkcionalne jednačine opšte asocijativnosti na kvazigrupama raznih dužina.

Rad se sastoji iz četiri dela. U prvom delu dati su pojmovi i oznake, kao i poznati rezultati na koje se pozivamo u ostalim glavama. Prvi deo sadrži i neke originalne leme.

U drugom delu razmatraju se sistemi binarnih kvazigrupa koje zadovoljavaju razne algebarske zakone specijalnog tipa, kao recimo

$$A_1A_2\ldots A_{n-1}x_1x_2\ldots x_n = B_1x_1B_2x_2\ldots B_iB_{i+1}\ldots B_{n-1}x_ix_{i+1}\ldots x_n$$

i utvrdjuje se izotopija svih kvazigrupa iz takvog zakona sa nekom grupom. Slične zakone kao i navedeni, tzv. uravnoteženi, razmatrao je V.D.Belousov u radu [14] (str.69.). Metod dokaza, za funkcionalne jednačine koje se ovde razmatraju, bitno se razlikuju od dokaza iz rada [14]. S druge strane, koristeći se ovim metodom, mogu se razmatrati i drugi zakoni koji nisu asocijativnog tipa, kao što je to uradjeno u slučaju funkcionalne jednačine T.

U trećem delu detaljno se opisuju uopšteni (i,j)-modularni sistemi n-kvazigrupa.

Prvo, dokazuje se da se svaki uopšteni (i,j)-modularan sistem n-kvazigrupnih operacija svodi na (i,j)-modularan (Lema 3.2.1.).

Drugo, dato je opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$A(x_1,\dots,x_{i-1},B(y_1,\dots,y_n),x_{i+1},\dots,x_n)$$

$$= C(y_1,\dots,y_{j-1},D(x_1,\dots,x_{i-1},y_j,x_{i+1},\dots,x_n),y_{j+1},\dots,y_n)$$

na n-kvazigrupama (Teorema 3.2.4.). Tim rezultatima uopšteni su rezultati B.Trpenovskog iz [47], [48].

U ovom delu Teorema 3.2.2. je centralna. Tom teoremom opisane su sve n-kvazigrupe koje zadovoljavaju sistem (konjunkciju) (i,j)-modularnih zakona. Teorema glasi:

n-kvazigrupe Q(A) i Q(B) zadovoljavaju (i,j)-modularan zakon

$$A(x_1^{i-1},B(y_1^n),x_{i+1}^n) = B(y_1^{j-1},A(x_1^{i-1},y_j,x_{i+1}^n),y_{j+1}^n)$$

za svako $i,j \in \{1,\dots,n\}$, ako i samo ako su

$$A(x_1,\dots,x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n + a$$

$$B(x_1,\dots,x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n + b$$

gde je Q(+) Abelova grupa odredjena s tačnošću do izomorfizma, dok su a i b neki fiksirani elementi skupa Q.

Koristeći se ovom teoremom dati su potrebni i dovoljni uslovi za n-lupu koja zadovoljava entropijski zakon (Teorema 3.2.5.).

Osnovni problem koji se razmatra u četvrtom delu ovoga rada, sastoji se u sledećem:

Ako familija UD-grupoida (uopšteni grupoidi sa delenjem) zadovoljavaju uravnoteženi (jednakoslovni) algebarski zakon, da li postoji binarna kvazigrupa koja je homotopna slika svih UD-grupoida iz tog zakona i pri tome, ta kvazigrupa zadovoljava taj isti zakon.

Teoremom 4.2.4., koja je u ovom delu osnovna, dat je potvrdan odgovor na gornji problem za zakon

$$A_1A_2\ldots A_{n-1}x_1x_2\ldots x_n = B_1x_1B_2x_2\ldots B_{n-1}x_{n-1}x_n.$$

Specijalno za $n = 2$, kvazigrupa $Q(\circ)$ koja je homotopna slika svih UD-grupoida je grupa, pa je taj slučaj izdvojen posebnom Teoremom 4.2.1. Do sličnog rezultata za $n = 2$ došao je M. Hosszú u radu [32] . Ovde je dokaz Teoreme 4.2.1. bitno uprošćen i razlikuje se od dokaza iz [32].

Primenom Teoreme 4.2.2. dobijaju se svi rezultati V.D.Belousova izloženih na prvih 47 stranica iz rada [9] , koji se odnose na rešavanje funkcionalne jednačine opšte asocijativnosti. Dalje, daju se potrebni i dovoljni uslovi za koje neka n-kvazigrupa zadovoljava (1,n)-asocijativan zakon. Na kraju, izložen je još jedan primer primene Teoreme 4.2.4. na rešavanje nekih funkcionalnih jednačina sa kvazigrupnim operacijama različitih dužina.

Većina rezultata iz rada prikazani su u okviru Odseka za al gebru, matematičku logiku i teoriju brojeva, kao i u okviru Odsek za matematiku Matematičkog instituta SRS u Beogradu.

I D E O

1. NEKE DEFINICIJE, OZNAKE I POZNATI REZULTATI IZ TEORIJE KVAZIGRUPA

Skup Q sa jednom n-arnom operacijom A zovemo n-grupoid ako za svako $x_1,\dots,x_n \in Q$ je $A(x_1,\dots,x_n) \in Q$ i označavamo ga sa Q(A) ili obično samo sa A.

Niz $x_m, x_{m+1},\dots,x_n$ označavaćemo sa $\{x_i\}_m^n$. Često ćemo izostavljati i velike zagrade tj. označavaćemo x_m^n umesto $\{x_i\}_m^n$. Ukoliko je $m > n$ smatraćemo da je x_m^n prazan skup, a niz x_m^n za $m = n$ se sastoji od jednog elementa x_m. Niz $\underbrace{x,x,\dots,x}_{n\text{-puta}}$ označavaćemo sa $\overset{n}{x}$. Takodje, $\overset{0}{x}$ smatramo prazan skup.

Neka je Q konačan ili beskonačan skup. Operacije proizvoljne arnosti dužine označavaćemo velikim latinskim slovima A,B,C,... Tako $A(x_1^n) = x_{n+1}$ označava, da n-arna operacija A nizu x_1^n korespondira $x_{n+1} \in Q$. Ukoliko je A binarna (2-arna) operacija, obično označavamo sa: $x.y$, $x\circ y$, itd.

Pod n-kvazigrupom podrazumevamo n-grupoid Q(A) u kome postoje sve inverzne operacije operacije A tj. Q(A) je n-kvazigrupa ako su jednačine

$$A(a_1^{i-1}, x_i, a_{i+1}^n) = b$$

jednoznačno rešive po x_i za svako $a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n,b \in Q$ i za svako $i = 1, 2,\dots,n$. Specijalno, binarni grupoid Q(A) je kvazigrupa (2-kvazigrupa), ako su jednačine

$$A(a,x) = b \qquad \text{i} \qquad A(y,a) = b$$

jednoznačno rešive po x i y za svaki par $a,b \in Q$.

n-grupoid Q(A) zovemo (i,j)-asocijativnim [50], ako je ispunjeno

$$A(x_1^{i-1}, A(x_i^{n+i-1}), x_{n+i}^{2n-1}) = A(x_i^{j-1}, A(x_j^{n+j-1}), x_{n+j}^{2n-1})$$

za svako $x_1, \ldots, x_{2n-1} \in Q$.

Ako je $Q(A)$ (i,j)-asocijativan n-grupoid za svako i,j $1 \leq i < j \leq n$, tada $Q(A)$ zovemo n-polugrupa.

n-kvazigrupu $Q(A)$, koja je n-polugrupa zovemo n-grupa. Preciznije n-kvazigrupa $Q(A)$ je n-grupa ako su na $Q(A)$ ispunjeni sledeći sistem zakona:

$$A(A(x_1^n), x_{n+1}^{2n-1}) = A(x_1^{i-1}, A(x_i^{n+i-1}), x_{n+i}^{2n-1}) \tag{1}$$

za svako $i = 1,2,\ldots,n$.

Na primer za $n=3$ asocijativan zakon (1) ima oblik

$$A(A(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5) = A(x_1,A(x_2,x_3,x_4),x_5) = A(x_1,x_2,A(x_3,x_4,x_5)).$$

n-grupoid $Q(A)$ kažemo da poseduje i-neutralni slog $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n$ ako je ispunjeno

$$A(e_1^{i-1}, x, e_{i+1}^n) = x$$

za proizvoljno $x \in Q$. Ako je $e_1 = e_2 = \ldots = e_n = e$, onda za e kažemo da je i-jedinični element, odnosno jedinični element ako je i-jedinični za svako $i = 1,\ldots,n$.

Ako n-kvazigrupa $Q(A)$ ima bar jedan jedinični element, onda $Q(A)$ zovemo n-lupa.

n-grupa ne mora imati jedinični element, a može imati i više jediničnih elemenata. U [39] je dokazano da svaka n-grupa ima 1-jedinični i n-jedinični neutralni slog, pri čemu je i svaka njegova ciklična permutacija takodje 1-jedinični i n-jedinični slog. Ovaj rezultat predstavlja uopštenje rezultata o jedinici u binarnoj grupi.

Primer n-grupe. Neka je $Q(.)$ binarna grupa. Uvedimo n-arnu operaciju na sledeći način $A(x_1^n) = x_1 . x_2 . \ldots . x_n$. Tada je očigledno $Q(A)$ n-grupa.

Ako u n-kvazigrupi Q(A) tj. u $A(x_1^n)$ fiksiramo k ($k < n$) pro-menljivih dobijamo (n-k)-kvazigrupu. Ta činjenica nam omogućava prikazivanje n-kvazigrupa, za malo n i sa konačnim skupom Q, pomoću sistema od m Cayleyevih tablica, pri čemu je m moć skupa Q.

Na primer, za n = 3 tj. neka je Q(A) 3-kvazigrupa. Uvedimo oznaku

$$A_x(y,z) = A(x,y,z).$$

Ako fiskiramo x, onda je $Q(A_x)$(binarna) kvazigrupa. Ovu kvazigrupu možemo prikazati tablicom

A_x	... z ...
.	.
.	.
.	.
y	... u ...
.	
.	
.	

gde je A(x,y,z) = u. U ovakvoj tablici, u svakoj vrsti i svakoj koloni elementi skupa Q se ne ponavljaju. 3-kvazigrupa je zadana, ako su date Cayleyeve tablice za svaki element iz Q. Prema tome, potreban i dovoljan uslov da bi m Cayleyevih tablica za binarne kvazigrupe, gde je m moć skupa Q, predstavljale neku 3-kvazigrupu je sledeće: elementi koji se nalaze na preseku y-te vrste i z-te kolone u svim tablicama A_x treba da budu različiti za proizvoljne $x,y,z \in Q$ [13].

Na primer, neka je $Q = \{a,b,c\}$ i ternana operacija A zadana tablicama

A_a	a	b	c
a	a	b	c
b	c	a	b
c	b	c	a

A_b	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

A_c	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	a	b	c

Lako se proverava da je Q(A) 3-kvazigrupa.

Važnu ulogu u teoriji kvazigrupa, opštije u teoriji n-kvazigrupa igra pojam i z o t o p i j e jedno uopštenje izomorfizma. Za binarnu kvazigrupu Q(A) kažemo da je izotopna sa binarnom kvazigrupom Q(B), ako postoje tri permutacije α, β, γ skupa Q, takve da je ispunjeno

$$A(x,y) = \gamma^{-1}B(\alpha x, \beta y) \tag{2}$$

za proizvoljne $x,y,\in Q$. Uredjenu trojku $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ zovemo izotopijom.

Ako je Q(A) izotop (izotopna sa) od Q(B), označavamo

$$A = B^T \qquad \text{ili} \qquad A = B^{(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Ako je $\gamma = 1$, gde je 1 identična permutacija tj. ako je

$$A(x,y) = B(\alpha x, \beta y)$$

tada Q(A) zovemo glavni izotop od Q(B).

Za $\alpha = \beta = \gamma$ (2) izražava izomorfizam, koji označavamo i ovako

$$A = B^{\alpha}$$

Ako je

$$A = A^T$$

onda $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ zovemo autotopija operacije A.

Analogno se uvodi pojam izotopije za n-grupoide. Neka su na skupu Q definisana dva n-grupoida Q(A) i Q(B). Rećićemo da je n-grupoid Q(A) izotopan sa n-grupoidom Q(B), ako postoji takva uredjena n+1-torka $T=(\alpha_1^n, \delta)$ permutacija skupa Q, da je ispunjeno

$$A(x_1^n) = \delta^{-1} B(\{\alpha_k x_k\}_1^n) \tag{3}$$

Ovde $\{\alpha_k x_k\}_1^n$ označava niz $\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n$.

Ako je $T= (\alpha_1^n, 1)$ gde je 1 identična permutacija skupa Q, tada Q(A) zovemo glavni izotop od Q(B).

Ako je Q(A) izotopna sa Q(B) pomoću izotopije T, označavaćemo $A = B^T$. Iz definicije izotopije sleduje

1. Ako je $A = B^T$, onda $B = A^{T^{-1}}$, gde je $T^{-1} = (\{\alpha_i^{-1}\}_1^n, \delta^{-1})$

2. Ako je $A = B^T$, $B = C^S$, gde je $T = (\alpha_1^n, \delta)$ i $S = (\beta_1^n, \omega)$, tada je $A = C^{ST}$ ili $A = (C^S)^T = C^{ST}$, gde je $ST = (\{\beta_k \alpha_k\}_1^n, \omega\delta)$

Ako je Q(A) binarna kvazigrupa, onda su

$$L^A(a)x \overset{\text{def}}{=} A(x,a) \quad \text{i} \quad R^A(b)x \overset{\text{def}}{=} A(b,x)$$

gde su a i b neki fiksirani elementi skupa Q, permutacije skupa Q. Redom $L^A(a)$ i $R^A(b)$ zovemo leva i desna translacija kvazigrupe Q(A).

Analogno, ako je Q(A) n-kvazigrupa, onda su

$$L_i^A(\tilde{a})x \overset{\text{def}}{=} A(a_1^{i-1}, x, a_{i+1}^n)$$

gde su $a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n$ neki fiksirani elementi skupa Q, za svako $i = 1,2,\ldots,n$, permutacije skupa Q. Zovemo ih i-ta translacija n-kvazigrupe Q(A). Ovde je sa $\tilde{a}$ označen niz $a_1,\ldots,a_{i-1}$, $a_{i+1},\ldots,a_n$. Obično se kaže i i-ta translacija u odnosu na $\tilde{a}$.

Za n-kvazigrupu Q(A) reći ćemo da je L-izotopna n-kvazigrupi Q(B), ako je $A = B^T$ gde je

$$T = (\{(L_i^A(\tilde{a}))^{-1}\}_1^n, 1).$$

L-izotop je glavni izotop.

Za binarne kvazigrupe, još Albert je 1943.god. u [6] dokazao da je svaka kvazigrupa izotopna (i to glavno izotopna) nekoj lupi. Ovaj rezultat su V.D.Belousov i M.D.Sandik u [13] 1966.god. uopštili na n-arni slučaj. Preciznije, L-izotop n-kvazigrupe je n-lupa. Takodje, Albertov stav [6] , ako je lupa Q(L) izotopna nekoj grupi Q(.), onda je lupa Q(L) izomorfna sa grupom Q(.), V.D.Belousov i M.D.Sandik [13] su uopštili. To uopštenje glasi: Ako je n-lupa Q(L) izotopna n-grupi sa jedinicom Q(A), onda je Q(L) takodje n-grupa sa jedinicom izomorfna sa Q(A). Odakle, pored ostalog imamo da je izotopija u teoriji grupa i n-grupa sa jedinicom neplodna, jer se praktično svodi na izomorfizam.

U drugom delu pozivamo se na izvesne rezultate koje ovde navodimo sa dokazima.

U uvodu je formulisana "teorema o četiri kvazigrupe". Ovde navodimo dokaz S.B.Prešića [40] uz izmenjene oznake.

Neka kvazigrupe $Q(A_i)$ $i=1,2,3,4$ zadovoljavaju opšti asocijativan zakon

$$A_1(A_2(x,y),z) = A_3(x, A_4(y,z)) \tag{4}$$

Postavimo u (4) redom $x=a$, $y=a$, $z=a$, $x=z=a$ gde je a neki fiksiran element skupa Q, tada uzimajući u obzir oznake

$$L_i x = A_i(x,a)\,, \qquad R_i x = A_i(a,x) \qquad (i=1,2,3,4)$$

nalazimo

$$\begin{aligned} A_1(R_2 y, z) &= R_3 A_4(y,z)\\ A_1(L_2 x, z) &= A_3(x, R_4 z)\\ L_1 A_2(x,y) &= A_3(x, L_4 y)\\ L_1 R_2 &= R_3 L_4 \end{aligned} \tag{5}$$

Odakle imamo da su sve kvazigrupe $Q(A_i)$ $i=1,2,3,4$, medjusobno izotopne. Posebno, sve su izotopne sa $Q(A_1)$. Svi izotopi kvazigrupe $Q(A_1)$ su

$$A_1(x,y) = \gamma^{-1} A(\alpha x, \beta y) \tag{6}$$

gde su α, β, γ permutacije skupa Q, a A neka kvazigrupna operacija definisana na skupu Q.

Iz (5) i (6) nalazimo

$$\begin{aligned} A_1(x,y) &= \gamma^{-1} A(\alpha x, \beta y)\\ A_2(x,y) &= L_1^{-1} \gamma^{-1} A(\alpha L_2 x, \beta R_4^{-1} L_4 y)\\ A_3(x,y) &= \gamma^{-1} A(\alpha L_2 x, \beta R_4^{-1} y)\\ A_4(x,y) &= R_3^{-1} \gamma^{-1} A(\alpha R_2 x, \beta y) \end{aligned} \tag{7}$$

Zamenom (7) u (4) dobijamo

$$\gamma^{-1} A(\alpha L_1^{-1} \gamma^{-1} A(\alpha L_2 x, \beta R_4^{-1} L_4 y), \beta z)$$
$$= \gamma^{-1} A(\alpha L_2 x, \beta R_4^{-1} R_3^{-1} \gamma^{-1} A(\alpha R_2 x, \beta z))$$

Odakle, zbog četvrte jednakosti (5) nalazimo da je Q(A) grupa, ako je $\gamma = 1$, $\alpha = L_1$ i $\beta = R_3 R_4$.

Tada se jednakosti (7) svode na

$$(8) \quad \begin{aligned} A_1(x,y) &= A(L_1 x,\ R_3 R_4 y) \\ A_2(x,y) &= L_1^{-1} A(L_1 L_2 x,\ R_3 L_4 y) \\ A_3(x,y) &= A(L_1 L_2 x,\ R_3 y) \\ A_4(x,y) &= R_3^{-1} A(L_1 R_2 x,\ R_3 R_4 y) \end{aligned}$$

Time je tvrdjenje dokazano.

Svakoj kvazigrupi A odgovaraju pet inverznih operacija koje označavamo

$$(9) \quad {}^{-1}A,\ A^{-1},\ {}^{-1}(A^{-1}),\ ({}^{-1}A)^{-1},\ A^{*}$$

tj.

$$\begin{aligned} A(x,y) = z &\overset{def}{\Longleftrightarrow} {}^{-1}A(z,y) = x \\ A(x,y) = z &\overset{def}{\Longleftrightarrow} A^{-1}(x,z) = y \\ A(x,y) = z &\overset{def}{\Longleftrightarrow} {}^{-1}(A^{-1})(y,z) = x \\ A(x,y) = z &\overset{def}{\Longleftrightarrow} ({}^{-1}A)^{-1}(z,x) = y \\ A(x,y) = z &\overset{def}{\Longleftrightarrow} A^{*}(y,x) = z \end{aligned}$$

Lako se utvrdjuje da je svaka druga inverzna operacija od A jedna od (9).

L e m a 1. Ako je kvazigrupa Q(A) izotopna grupi Q(.), onda su i sve inverzne operacije operacije A izotopne istoj grupi Q(.).

Dokažimo za operaciju ${}^{-1}A$. Kako je

$$A(x,y) = \gamma^{-1}(\alpha x . \beta y)$$

imamo

(10) $$^{-1}A(\gamma^{-1}(\alpha x.\beta y),\ y) = x.$$

Stavimo $\gamma^{-1}(\alpha x.\beta y) = z$, odakle nalazimo $x = \alpha^{-1}(\gamma z.(\beta y)^{-1})$ tj. $x = \alpha^{-1}(\gamma z.I\beta y)$, gde je $Ix = x^{-1}$. Jasno, da je I permutacija. Kako je i β permutacija to je i $I\beta$ permutacija.

Tada (10) postaje

$$^{-1}A(z,y) = \alpha^{-1}(\gamma z.I\beta y).$$

Slično se dokazuje i za ostale inverzne operacije.

Za četiri kvazigrupe $Q(A_i)$ $i = 1,2,3,4$ kažemo da zadovoljavaju opšti zakon tranzitivnosti, ako je ispunjeno

(11) $$A_1(A_2(x,z),\ A_3(y,z)) = A_4(x,y)$$

za svako $x,y,z \in Q$.

T e o r e m a 1. Ako četiri kvazigrupe $Q(A_i)$ $i=1,2,3,4$ zadovoljavaju zakon (11), onda su sve one izotopne jednoj te istoj grupi $Q(.)$. [12]

Dokaz. Stavimo $A_3(y,z) = u$, odakle nalazimo $y = {}^{-1}A_3(u,z)$, to zamenom u (11) dobijamo

$$A_1(A_2(x,z),u) = A_4(x,\ {}^{-1}A_3(u,z))$$

tj.

$$A_1(A_2(x,z),u) = A_4(x,({}^{-1}A_3)^{*}(z,u)).$$

Poslednja jednakost je jednakost opšte asocijativnosti. Na osnovu "teoreme o četiri kvazigrupe" imamo da su A_1, A_2, $({}^{-1}A_3)^{*}$, A_4 izotopne jednoj te istoj grupi $Q(.)$. Na osnovu Leme 1. je onda i A_3 izotopna grupi $Q(.)$. Dakle, sve $Q(A_i)$ $i = 1,2,3,4$ su izotopne grupi $Q(.)$.

L e m a 2. Ako kvazigrupe $Q(A_i)$ $i = 1,2,3,4$ i $Q(B_i)$ $i=1,2,3,4$ zadovoljavaju jednakosti

1° $$A_1(A_2(x,y),z) = A_3(x, A_4(y,z))$$
$$B_1(B_2(x,y),z) = B_3(x, B_4(y,z))$$

ili

2° $$A_1(A_2(x,z), A_3(y,z)) = A_4(x,y)$$
$$B_1(B_2(x,z), B_3(y,z)) = B_4(x,y)$$

i pri tome je $A_i = B_j$ za neko $i,j \in \{1,2,3,4\}$, tada su sve $Q(A_i)$ i $Q(B_i)$ izotopne jednoj te istoj grupi.

Dokaz. Neka je ispunjeno 1° i odredjenosti radi $A_2 = B_4$. Na osnovu "teoreme o četiri kvazigrupe" imamo da su sve $Q(A_i)$ $i=1,2,3,4$ izotopne grupi $Q(\cdot)$ i sve $Q(B_i)$ $i = 1,2,3,4$ izotopne grupi $Q(*)$. Kako je

$$A_2(x,y) = \gamma^{-1}(\alpha x\cdot\beta y) = \delta^{-1}(\varphi x * \psi y) = B_4(x,y)$$

imamo da su grupe "." i "*" izotopne, pa prema tome i izomorfne. Prema tome, sve $Q(A_i)$ i $Q(B_i)$ su izotopne jednoj istoj grupi $Q(\cdot)$ (ili $Q(*)$).

Koristeći Teoremu 1. analogno se dokazuje i slučaj 2°.

U [12] je V.D.Belousov uveo jedna relaciju ekvivalencije u skupu svih permutacija skupa Q na sledeći način:

$$\alpha \sim \beta \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists a,b \in Q)\ (\forall x \in Q)\ (\alpha x = a\cdot\beta x\cdot b)$$

gde je $Q(\cdot)$ grupa.

Pomoću ovako uvedene ekvivalencije u skupu permutacija skupa Q, može se formulisati sledeći rezultat: Ako četiri kvazigrupe $Q(A_i)$ $(i=1,2,3,4)$ zadovoljavaju (4), tada (8) glasi:

$$
\begin{aligned}
&A_1(x,y) = \alpha x \cdot \beta y \\
&A_2(x,y) = \alpha^{-1}(\gamma x \cdot \delta y) \\
(12) \qquad &A_3(x,y) = \gamma x \cdot \varphi y \\
&A_4(x,y) = \varphi^{-1}(\delta x \cdot \beta y)
\end{aligned}
$$

gde je grupa $Q(\cdot)$ odredjena s tačnošću do izomorfizma, a permutacije $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi$, sa tačnošću do ekvivalencije $\sim$.

Za n-grupoide uvodi se oslabljeni komutativan zakon, kao i komutativan zakon na sledeći način:

Neka je φ neka permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$. Reći ćemo da je n-grupoid $Q(A)$ φ-komutativan, ako je ispunjeno

$$A(x_1^n) = A(\{x_{\varphi i}\}_1^n)$$

za svako $x_1,\ldots,x_n \in Q$, i je promenljiv indeks. Ako je n-grupoid φ-komutativan za svaku permutaciju φ, tada takav n-grupoid zovemo komutativan.

II D E O

2. O JEDNOJ KLASI KVAZIGRUPNIH OPERACIJA ASOCIJATIVNOG TIPA

2.1. Uvod

U ovom poglavlju razmatraju se familije kvazigrupa $Q(A_i)$ $(i=1,\dots,2n-2)$ koje zadovoljavaju sledeće zakone

(1) $$A_{n-1}A_{n-2}\dots A_1x_1x_2\dots x_{n-1}A_{2n-2}A_{2n-3}\dots A_{n+1}x_nx_2\dots x_{n-1}$$
$$= A_nx_1x_n$$

(2) $$A_1A_2\dots A_{n-1}x_1x_2\dots x_n = A_nx_1A_{n+1}x_2\dots A_{2n-2}x_{n-1}x_n$$

(3) $$A_1A_2\dots A_{n-1}x_1x_2\dots x_n = A_nx_1A_{n+1}x_2\dots A_{n+k-2}x_{k-1}A_{n+k-1}$$
$$\dots A_{2n-3}A_{2n-2}x_kx_{k+1}\dots x_n$$
$$(k=2,\dots,n-1)$$

Zakon (2) i sistem zakona (3) su asocijativnog tipa, što znači sledeće: Ako stavimo $A_i=A_j$ za svako $i,j \in \{1,\dots,2n-2\}$ onda su formule (2) i (3) posledice asocijativnog zakona.

U radu [14] V.D.Belousov je generalisao teoremu o četiri kvazigrupe. U toj teoremi dati su uslovi pod kojima je neka klasa kvazigrupa vezanih zakonima asocijativnog tipa izotopna grupi. Ovde dajemo nov dokaz generalizovane teoreme o četiri kvazigrupe Belousova za zakone (2) i (3). Slično tvrdjenje dokazujemo i za zakon (1) koji nije asocijativnog tipa.

U navedenim zakonima zagrade su izostavljene.

2.2. Funkcionalna jednačina T

Funkcionalnu jednačinu

$$(1)\qquad A_{n-1}A_{n-2}\dots A_1x_1x_2\dots x_{n-1}A_{2n-2}A_{2n-3}\dots A_{n+1}x_nx_2\dots x_{n-1} = A_nx_1x_n$$

gde su $x_1,\dots,x_n$ proizvoljni elementi nepraznog skupa Q i A_i $(i=1,\dots,2n-2;\ n\geqslant 3)$ proizvoljne binarne kvazigrupne operacije definisane na skupu Q zovemo: funkcionalna jednačina T.

T e o r e m a 2.2.1. Ako kvazigrupe $Q(A_i)$ $(i=1,\dots,2n-2)$ zadovoljavaju funkcionalnu jednačinu T, onda su sve one izotopne jednoj te istoj grupi $Q(\cdot)$.

D o k a z

Uvedimo oznake

$$(2.2.1)\qquad X_1 = x_1,\quad Y_1 = x_n$$

$$X_i = A_{i-1}(X_{i-1},x_i),\qquad Y_i = A_{n+i-1}(Y_{i-1},x_i)\quad (i=2,\dots,n-1)$$

Tada (1) postaje

$$(2.2.2)\qquad A_{n-1}(A_{n-2}(X_{n-2},x_{n-1}),\ A_{2n-2}(Y_{n-2},x_{n-1})) = A_n(x_1,x_n).$$

Kako je

$$A_{n-1}(A_{n-2}(X_{n-2},x^0_{n-1}),\ A_{2n-2}(Y_{n-2},x^0_{n-1})) = A_n(x_1,x_n)$$

gde je x^0_{n-1} proizvoljan fiksirani element skupa Q, to leva strana jednakosti (2.2.2) ne zavisi od x_{n-1}. Ta činjenica nam dopušta da uvedemo operaciju S_{n-2} na sledeći način.

(2.2.3) $A_{n-1}(A_{n-2}(X_{n-2},x_{n-1}),\ A_{2n-2}(Y_{n-2},x_{n-1})) \stackrel{def}{=\!=} S_{n-2}(X_{n-2},Y_{n-2})$

Operacija S_{n-2} je očigledno kvazigrupa.
Iz

$$S_{n-2}(X_{n-2},Y_{n-2}) = A_n(x_1;x_n)$$

i jednakosti (2.2.1) imamo

(2.2.4) $S_{n-2}(A_{n-3}(X_{n-3},x_{n-2}),\ A_{2n-3}(Y_{n-3},x_{n-2})) = A_n(x_1,x_n)$

Sličnim rasudjivanjem stavimo

(2.2.5) $S_{n-2}(A_{n-3}(X_{n-3},x_{n-2}),\ A_{2n-3}(Y_{n-3},x_{n-2})) = S_{n-3}(X_{n-3},Y_{n-3})$

gde je S_{n-3} takodje (nova) kvazigrupna operacija.
Produžujući ovaj postupak, dobijamo

(2.2.6) $S_i(A_{i-1}(X_{i-1},x_i),\ A_{n+i-1}(Y_{i-1},x_i)) = S_{i-1}(X_{i-1},Y_{i-1})$

$(i=2,\dots,n-1)$

gde je $S_{n-1} \stackrel{def}{=\!=} A_{n-1}$, $S_1 \stackrel{def}{=\!=} A_n$.

Dakle, jednakost (1), tj. funkcionalna jednačina T svodi se na sistem od n-2 jednakosti (2.2.6).
Iz (2.2.6) i Teoreme 1. (prvi deo str. 13.) imamo, da su kvazigrupe S_i, A_{i-1}, A_{n+i-1}, S_{i-1} za svako fiksirano $i \in \{2,\dots,n-1\}$ izotopne istoj grupi. Kako se S_k $(k=2,\dots,n-1)$ nalaze u dvema (i samo u dvema) jednakostima sistema (2.2.6), to na osnovu Leme 2. (prvi deo str.14. imamo da su sve kvazigrupe A_i $(i=1,\dots,2n-2)$ izotopne jednoj te istoj grupi $Q(\circ)$.

Teorema je time dokazana.

2.3. Funkcionalna jednačina AT

Funkcionalnu jednačinu

$$(2) \qquad A_1A_2\dots A_{n-1}x_1x_2\dots x_n = A_nx_1A_{n+1}x_2\dots A_{2n-2}x_{n-1}x_n$$

gde su $x_1,\dots,x_n$ proizvoljni elementi nepraznog skupa Q i A_i $(i=1,\dots,2n-2;\ n \geqslant 3)$ proizvoljne binarne kvazigrupne operacije definisane na skupu Q zovemo: funkcionalna jednačina AT.

T e o r e m a 2.3.1. Ako kvazigrupe $Q(A_i)(i=1,\dots,2n-2)$ zadovoljavaju funkcionalnu jednačinu AT, onda su sve one izotopne jednoj te istoj grupi $Q(.)$.

D o k a z

Uvedimo oznake

$$(2.3.1) \qquad \begin{array}{lll} A_{n-1}x_1x_2 = y_1 & \qquad & A_{2n-2}x_{n-1}x_n = z_1 \\ A_{n-2}y_1x_3 = y_2 & & A_{2n-3}x_{n-2}z_1 = z_2 \\ A_{n-3}y_2x_4 = y_3 & & A_{2n-4}x_{n-3}z_2 = z_3 \\ \vdots & & \vdots \\ A_2y_{n-3}x_{n-1} = y_{n-2} & & A_{n+1}x_2z_{n-3} = z_{n-2} \\ A_1y_{n-2}x_n = y_{n-1} & & \end{array}$$

Budući da operacije A_i zadovoljavaju zakon (2), tj. funkcionalnu jednačinu AT, to iz jednakosti (2.3.1) dobijamo jednakost

$$(2.3.2) \qquad A_nx_1z_{n-2} = y_{n-1}$$

Prelaskom od A_i $(i=1,\dots,2n-2)$ na njihove leve inverzne operacije, dobijamo

$$
(2.3.3)\qquad
\begin{array}{ll}
B_{n-1}y_1x_2 = x_1 & B_{2n-2}z_1x_n = x_{n-1} \\
B_{n-2}y_2x_3 = y_1 & B_{2n-3}z_2z_1 = x_{n-2} \\
B_{n-3}y_3x_4 = y_2 & B_{2n-4}z_3z_2 = x_{n-3} \\
\vdots & \vdots \\
B_2y_{n-2}x_{n-1} = y_{n-3} & B_{n+1}z_{n-2}z_{n-3} = x_2 \\
B_1y_{n-1}x_n = y_{n-2} &
\end{array}
$$

i konačno

$$(2.3.4)\qquad B_ny_{n-1}z_{n-2} = x_1$$

gde je $B_i = {}^{-1}A_i$ $(i=1,\dots,2n-2)$, tj. $B_ixy = z \xLeftrightarrow{def} A_izy = x$.
Iz (2.3.3) imamo

$$x_1 = B_{n-1}y_1x_2 = B_{n-1}B_{n-2}y_2x_3B_{n+1}z_{n-2}z_{n-3} = \dots$$

$$= B_{n-1}B_{n-2}\dots B_2B_1y_{n-1}x_nB_{2n-2}z_1x_nB_{2n-3}z_2z_1\dots B_{n+1}z_{n-2}z_{n-3}$$

Zbog (2.3.4) je

$$
(2.3.5)\qquad
\begin{aligned}
&B_{n-1}B_{n-2}\dots B_2B_1y_{n-1}x_nB_{2n-2}z_1x_nB_{2n-3}z_2z_1\dots B_{n+1}z_{n-2}z_{n-3} \\
&\qquad = B_ny_{n-1}z_{n-3}
\end{aligned}
$$

Elementi y_{n-1}, x_n, z_i $(i=1,\dots,n-2)$ su proizvoljni elementi skupa Q. Ako izvršimo prenumeraciju promenljivih i to: y_{n-1} sa x_1, x_n sa x_2, z_1 sa x_{i+2} $(i=1,\dots,n-2)$, tada (2.3.5) postaje

(2.3.6) $B_{n-1}B_{n-2}\ldots B_2B_1x_1x_2B_{2n-2}x_3x_2B_{2n-3}x_4x_3\ldots B_{n+1}x_nx_{n-1}$

$$= B_nx_1x_n$$

Iz (2.3.6) dobijamo

(2.3.7) $B_{n-2}\ldots B_2B_1x_1x_2B_{2n-2}x_3x_2B_{2n-3}x_4x_3\ldots B_{n+2}x_{n-1}x_{n-2}$

$$= {}^{-1}B_{n-1}B_nx_1x_nB_{n+1}x_nx_{n-1}$$

Kako je

$$ {}^{-1}B_{n-1}B_nx_1x_nB_{n+1}x_nx_{n-1} = {}^{-1}B_{n-1}B_nx_1x_n^oB_{n+1}x_n^ox_{n-1}$$

gde je x_n^o neki fiksirani element skupa Q, jer leva strana jednakosti (2.3.7) ne zavisi od x_n. Pa možemo uvesti novu operaciju D_{n-3} na sledeći način:

(2.3.8) $B_{n-2}\ldots B_2B_1x_1x_2B_{2n-2}x_3x_2B_{2n-3}x_4x_3\ldots B_{n+2}x_{n-1}x_{n-2}$

$$\overset{def}{=\!=} D_{n-3}x_1x_{n-1}$$

Operacija D_{n-3} je, očigledno, kvazigrupa. Prema tome, jednakost (2.3.6) postaje

(2.3.9) $$B_{n-1}D_{n-3}x_1x_{n-1}B_{n+1}x_nx_{n-1} = B_nx_1x_n$$

Dalje, iz (2.3.8) dobijamo

(2.3.10) $B_{n-3}\ldots B_2B_1x_1x_2B_{2n-2}x_3x_2B_{2n-3}x_4x_3\ldots B_{n+3}x_{n-2}x_{n-3}$

$$= {}^{-1}B_{n-2}D_{n-3}x_1x_{n-1}B_{n+2}x_{n-1}x_{n-2}$$

Na osnovu istog rasudjivanja kao pre, možemo staviti

$$(2.3.11)\qquad B_{n-3}\cdots B_2B_1x_1x_2B_{2n-2}x_3x_2B_{2n-3}x_4x_3\cdots B_{n+3}x_{n-2}x_{n-3} \stackrel{def}{=\!=} D_{n-4}x_1x_{n-2}$$

gde je D_{n-4} takodje, kvazigrupna operacija. Jednakost (2.3.8) tada postaje

$$(2.3.12)\qquad B_{n-2}D_{n-4}x_1x_{n-2}B_{n+2}x_{n-1}x_{n-2} = D_{n-3}x_1x_{n-1}$$

Produžujući ovaj postupak, dobijamo da se jednakost (2.3.6) svodi na sledeći sistem od n-2 jednakosti

$$(2.3.13)\qquad \begin{aligned} &B_{n-1}D_{n-3}x_1x_{n-1}B_{n+1}x_nx_{n-1} = B_nx_1x_n \\ &B_iD_{i-2}x_1x_iB_{2n-i}x_{i+1}x_i = D_{i-1}x_1x_{i+1} \quad (i=3,\ldots,n-2) \\ &B_2B_1x_1x_2B_{2n-2}x_3x_2 = D_1x_1x_3 \end{aligned}$$

Na osnovu Teoreme 1. (prvi deo str. 13.) imamo da su četiri kvazigrupe vezane bilo kojom jednakošću iz sistema (2.3.13) izotopne jednoj te istoj grupi. Kako se svaka od kvazigrupa D_k $(k=1,\ldots,n-3)$ nalazi u dvema (i samo u dvema) jednakostima sistema (2.3.13), to na osnovu Leme 2. (prvi deo str. 14.) imamo da su sve B_i $(i=1,\ldots,2n-2)$ izotopne jednoj te istoj grupi $Q(\cdot)$. Na osnovu Leme 1. (prvi deo str. 12.) su onda i sve A_i $(i = 1,\ldots,2n-2)$ izotopne grupi $Q(\cdot)$.

Teorema je time dokazana.

2.4. Sistem funkcionalnih jednačina AT

Sistem jednačina

$$(3)\qquad \begin{aligned} A_1A_2\cdots A_{n-1}x_1x_2\cdots x_n &= A_nx_1A_{n+1}x_2\cdots A_{n+k-2}x_{k-1}A_{n+k-1} \\ &\cdots A_{2n-3}A_{2n-2}x_kx_{k+1}\cdots x_n \quad (k=2,\ldots,n-1) \end{aligned}$$

gde su $x_1,\ldots,x_n$ proizvoljni elementi nepraznog skupa Q i A_i ($i=1,\ldots,2n-2$; $n \geqslant 3$) proizvoljne binarne kvazigrupne operacije definisane na skupu Q zovemo: sistem funkcionalnih jednačina AT.

T e o r e m a 2.4.1. Ako kvazigrupe $Q(A_i)$ ($i=1,\ldots,2n-2$) zadovoljavaju bilo koju jednačinu iz sistema funkcionalnih jednačina AT, onda su sve A_i izotopne jednoj te istoj grupi $Q(\cdot)$.

D o k a z

Dokaz izvodimo za k-tu jednačinu sistema (3). Uvedimo oznake

(2.4.1)

$$\begin{array}{ll}
A_{n-1}x_1x_2 = y_1 & A_{2n-2}x_kx_{k+1} = z_1 \\
A_{n-2}y_1x_3 = y_2 & A_{2n-3}z_1x_{k+2} = z_2 \\
A_{n-3}y_2x_4 = y_3 & \vdots \\
\vdots & A_{n+k-1}z_{n-k-1}x_n = z_{n-k} \\
 & A_{n+k-2}x_{k-1}z_{n-k} = z_{n-k-1} \\
 & \vdots \\
A_2y_{n-3}x_{n-1} = y_{n-2} & A_{n+1}x_2z_{n-3} = z_{n-2} \\
A_1y_{n-2}x_n = y_{n-1} &
\end{array}$$

Kako operacije A_i zadovoljavaju zakon (3), tj. k-tu jednačinu iz sistema funkcionalnih jednačina AT, to iz jednakosti (2.4.1) i (3) dobijamo jednakost

(2.4.2) $$A_nx_1z_{n-2} = y_{n-1}$$

Prelaskom od A_i ($i=1,\ldots,2n-2$) na njihove leve inverzne operacije, dobijamo

$$B_{n-1}y_1x_2 = x_1 \qquad B_{2n-2}z_1x_{k+1} = x_k$$

$$B_{n-2}y_2x_3 = y_1 \qquad B_{2n-3}z_2x_{k+2} = z_1$$

$$B_{n-3}y_3x_4 = y_2 \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad B_{n+k-1}z_{n-k}x_n = z_{n-k-1}$$

$$B_{n+k-2}z_{n-k+1}z_{n-k} = x_{k-1}$$

$$\vdots$$

$$B_2y_{n-2}x_{n-1} = y_{n-3} \qquad B_{n+1}z_{n-2}z_{n-3} = x_2$$

$$B_1y_{n-1}x_n = y_{n-2}$$

i konačno

(2.4.4)
$$B_ny_{n-1}z_{n-2} = x_1$$

gde je $B_i \overset{\text{def}}{=\!=} {}^{-1}A_i$ ($i = 1,\ldots,2n-2$).

Iz (2.4.3) imamo

$$x_1 = B_{n-1}y_1x_2 = B_{n-1}B_{n-2}y_2x_3B_{n+1}z_{n-2}z_{n-3} = \ldots$$

$$= B_{n-1}B_{n-2}\ldots B_1y_{n-1}x_nx_{n-1}\ldots x_{k+1}B_{2n-2}\ldots B_{n+k-1}z_{n-k}x_nx_{n-1}\ldots$$

$$\ldots x_{k+1}B_{n+k-2}z_{n-k+1}z_{n-k}\ldots B_{n+2}z_{n-3}z_{n-4}B_{n+1}z_{n-2}z_{n-3}$$

Zbog (2.4.4) dobijamo

$$B_{n-1}B_{n-2}\ldots B_1 y_{n-1}x_n x_{n-1}\ldots x_{k+1}B_{2n-2}\ldots B_{n+k-1}z_{n-k}x_n x_{n-1}\ldots$$

$$(2.4.5) \qquad \ldots x_{k+1}B_{n+k-2}z_{n-k+1}z_{n-k}\ldots B_{n+2}z_{n-3}z_{n-4}B_{n+1}z_{n-2}z_{n-3}$$

$$= B_n y_{n-1}z_{n-2}$$

Ako izvršimo prenumeraciju promenljivih i to: y_{n-1} sa x_1, x_{n-i} sa x_{i+2} $(i=0,1,\ldots,n-k-1)$, z_{n-k+i} sa $x_{n-k+i+2}$ $(i=0,1,\ldots,k-2)$, tada (2.4.5) postaje

$$B_{n-1}B_{n-2}\ldots B_1 x_1 x_2 x_3\ldots x_{n-k+1}B_{2n-2}\ldots B_{n+k-1}x_{n-k+2}x_2 x_3\ldots$$

$$(2.4.6) \qquad \ldots x_{n-k+1}B_{n+k-2}x_{n-k+3}x_{n-k+2}\ldots B_{n+2}x_{n-1}x_{n-2}B_{n+1}x_n x_{n-1}$$

$$= B_n x_1 x_n$$

Iz (2.4.6) dobijamo

$$B_{n-2}B_{n-3}\ldots B_1 x_1 x_2 x_3\ldots x_{n-k+1}B_{2n-2}\ldots B_{n+k-1}x_{n-k+2}x_2 x_3\ldots$$

$$(2.4.7) \qquad \ldots x_{n-k+1}B_{n-k+2}x_{n-k+3}x_{n-k+2}\ldots B_{n+2}x_{n-1}x_{n-2}$$

$$= {}^{-1}B_{n-1}B_n x_1 x_n B_{n+1}x_n x_{n-1}$$

$$= {}^{-1}B_{n-1}B_n x_1 x_n \overset{*}{B}_{n+1}x_{n-1}x_n$$

gde je $Bxy = z \Longleftrightarrow \overset{*}{B}yx = z$.
Odakle imamo

$${}^{-1}B_{n-1}B_n x_1 x_n \overset{*}{B}_{n+1}x_{n-1}x_n = {}^{-1}B_{n-1}B_n x_1 x_n^o \overset{*}{B}_{n+1}x_{n-1}x_n^o$$

gde je x_n^o proizvoljan fiksirani element skupa Q, jer leva strana jednakosti (2.4.7) ne zavisi od x_n. Koristeći tu činjenicu uvedimo operaciju D_{n-1} na sledeći način:

$$(2.4.8) \qquad {}^{-1}B_{n-1}B_n x_1 x_n \overset{*}{B}_{n+1} x_{n-1} x_n \overset{\mathrm{def}}{=\!=} D_{n-1} x_1 x_{n-1}$$

Operacija D_{n-1} je, očigledno, kvazigrupa.

Na osnovu (2.4.8), jednakost (2.4.7) postaje

$$B_{n-2}B_{n-3}\dots B_1 x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-k+1} B_{2n-2}\dots B_{n+k-1} x_{n-k+2} x_2 x_3 \dots$$

$$(2.4.9) \qquad \dots x_{n-k+1} B_{n-k+2} x_{n-k+3} x_{n-k+2} \dots B_{n+2} x_{n-1} x_{n-2}$$

$$= D_{n-1} x_1 x_{n-2}$$

Iz (2.4.9) dobijamo

$$B_{n-3}B_{n-4}\dots B_1 x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-k+1} B_{2n-2}\dots B_{n+k-1} x_{n-k+2} x_2 x_3 \dots$$

$$(2.4.10) \qquad \dots x_{n-k+1} B_{n-k+2} x_{n-k+3} x_{n-k+2} \dots B_{n+3} x_{n-2} x_{n-3}$$

$$= {}^{-1}B_{n-2} D_{n-1} x_1 x_{n-1} B_{n+2} x_{n-1} x_{n-2}$$

$$= {}^{-1}B_{n-2} D_{n-1} x_1 x_{n-1} \overset{*}{B}_{n+2} x_{n-2} x_{n-1}$$

Iz istih razloga kao pre, možemo staviti

$$(2.4.11) \qquad {}^{-1}B_{n-2} D_{n-1} x_1 x_{n-1} \overset{*}{B}_{n+2} x_{n-2} x_{n-1} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} D_{n-2} x_1 x_{n-2}$$

Produžavajući ovaj postupak, dobijamo sistem jednakosti

$$ {}^{-1}B_{n-p+2}D_{n-p+3}x_1x_{n-p+3}B^{*}_{n+p-2}x_{n-p+2}x_{n-p+3} $$

$$ = D_{n-p+2}x_1x_{n-p+2} \qquad (p=3,4,\ldots,k) $$

(2.4.12)
$$ B_{n-k+1}B_{n-k}\ldots B_1x_1x_2x_3\ldots x_{n-k+1}B_{2n-2}\ldots B_{n+k-1}x_{n-k+2}x_2x_3 \ldots x_{n-k+1} = D_{n-k+2}x_1x_{n-k+2} $$

gde je $D_n \overset{\text{def}}{=\!=} B_n$.

Dakle, jednakost (2.4.6) svodi se na sistem (2.4.12) od k-1 jednakosti. Iz prvih k-2 jednakosti sistema (2.4.12) na osnovu Teoreme 1. (prvi deo str. 13.) četiri kvazigrupe ${}^{-1}B_{n-p+2}$, D_{n-p+3}, B^{*}_{n+p-2}, D_{n-p+2} za svako $p \in \{3,4,\ldots,k\}$ su izotopne jednoj te istoj grupi. Kako se svaka od kvazigrupa D_s nalazi u dvema (i samo u dvema) jednakostima sistema (2.4.12), to na osnovu Leme 2. (prvi deo str. 14.) imamo da su sve kvazigrupe iz prvih k-2 jednakosti sistema (2.4.12) izotopne jednoj te istoj grupi. Iz poslednje jednakosti sistema (2.4.12) i Teoreme 2.2.1. imamo da su sve kvazigrupe iz poslednje jednakosti izotopne jednoj istoj grupi. Kako se kvazigrupa D_{n-k+2} nalazi u dvema pretposlednjim jednakostima sistema (2.4.12) to su na osnovu Leme 2. sve kvazigrupe iz sistema (2.4.12) izotopne jednoj te istoj grupi. Q(.). Na osnovu Leme 1. su tada i sve A_i (i=1,...,2n-2 izotopne grupi Q(.).

Teorema je time dokazana.

N a p o m e n a 1. Teorema 2.3.1. i Teorema 2.4.1. predstavljaju jednu generalizaciju teoreme V.D.Belousova o četiri kvazigrupe, jer se za n=3 svode na teoremu o četiri kvazigrupe.

N a p o m e n a 2. Za k = n-1 poslednja jednakost iz sistema (3) je jednakost (2), pa je Teorema 2.4.1. jedna generalizacija Teoreme 2.3.1.

III D E O

3. O MODULARNIM SISTEMIMA n-KVAZIGRUPA

3.1. Uvod

U ovom delu rada razmatraćemo (i,j)-modularan, kao i uopšteni (i,j)-modularan zakon na n-kvazigrupama.

D e f i n i c i j a 3.1.1. Skup $M_{i,j}$ n-kvazigrupnih operacija definisanih na skupu Q zovemo (i,j)-modularan sistem operacija na Q, ako je za svake dve operacije $A,B \in M_{i,j}$ i savko $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in Q$ ispunjeno

$$A(x_1^{i-1}, B(y_1^n), x_{i+1}^n) = B(y_1^{j-1}, A(x_1^{i-1}, y_j, x_{i+1}^n), y_{j+1}^n) \tag{3.1.1}$$

Specijalno, ako je $i=j$ skup $M_{i,i}$ označavamo M_i i zvaćemo ga i-modularan sistem operacija. Relaciju (3.1.1) zovemo (i,j)-modularan zakon.

D e f i n i c i j a 3.1.2. Skup $M_{i,j}^u$ n-kvazigrupnih operacija definisanih na skupu Q zovemo uopšteni (i,j)-modularan sistem operacija na skupu Q, ako je za svake četiri operacije $A,B,C,D \in M_{i,j}^u$ i svako $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in Q$ ispunjeno

$$A(x_1^{i-1}, B(y_1^n), x_{i+1}^n) = C(y_1^{j-1}, D(x_1^{i-1}, y_j, x_{i+1}^n), y_{j+1}^n) \tag{3.1.2}$$

Specijalno, ako je $i=j$ skup $M_{i,j}^u$ označavamo M_i^u i zvačemo ga uopšteni i-modularan sistem operacija. Relaciju (3.1.2) zovemo uopšteni (i,j)-modularan zakon.

Navodimo jedan primer za (i,j)-modularan sistem operacija $M_{i,j}$.

P r i m e r. Neka je $Q(+,\cdot)$ polje i neka je $M_{i,j}(Q)$ skup svih operacija oblika

$$(3.1.3) \qquad A(x_1^n) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu x_\nu + q$$

gde je $p_i = p_j = 1$, $p_\nu \neq 0$ i q neki fiksirani element iz Q za datu operaciju A. Lako se proverava da svaka operacija oblika (3.1.3) zadovoljava (i,j)-modularan zakon, tj. zakon (3.1.1).

3.2. Uopšteni (i,j)-modularan zakon

Za četiri n-kvazigrupe A,B,C,D kažemo da zadovoljavaju uopšteni (i,j)-modularan zakon ako je ispunjeno

$$A(x_1^{i-1},B(x_i^{n+i-1}),x_{n+1}^{2n-1}) = C(x_i^{i+j-2},D(x_1^{i-1},x_{i+j-1},x_{n+i}^{2n-1}),x_{i+j}^{n+i-1})$$

za svako $x_1,\ldots,x_{2n-1} \in Q$.

Ako je $A = D$ i $B = C$ onda uopšteni (i,j)-modularan zakon zovemo (i,j)-modularan. Sa $M_{i,j}$ označavaćemo skup svih n-kvazigrupnih operacija koje zadovoljavaju (i,j)-modularan zakon.

L e m a 3.2.1. Ako četiri n-kvazigrupe A,B,C,D zadovoljavaju uopšteni (i,j)-modularan zakon

$$(1) \qquad A(x_1^{i-1},B(y_1^n),x_{i+1}^n) = C(y_1^{j-1},D(x_1^{i-1},y_j,x_{i+1}^n),y_{j+1}^n)$$

tada postoje n-kvazigrupe S i T takve da su A i D izotopne sa S, a B i C izotopne sa T i ispunjeno je

$$S(x_1^{i-1},T(y_1^n),x_{i+1}^n) = T(y_1^{j-1},S(x_1^{i-1},y_j,x_{i+1}^n),y_{j+1}^n)$$

tj. $S,T \in M_{i,j}$.

D o k a z

Iz (1) fiksirajući redom x_1^{i-1}, x_{i+1}^n sa a_1^{i-1}, a_{i+1}^n, zatim y_1^{j-1}, y_{j+1}^n sa a_1^{j-1}, a_{j+1}^n i na kraju sve x-ove i y-one sa a-ovima izuzev y_j, dobijamo

$$
(3.2.1)\qquad
\begin{aligned}
L_i^A(\widehat{a})B(y_1^n) &= C(y_1^{j-1},L_i^D(\widehat{a})y_j,y_{j+1}^n)\\
A(x_1^{i-1},L_j^B(\widehat{a})y_j,x_{i+1}^n) &= L_j^C(\widehat{a})D(x_1^{i-1},y_j,x_{i+1}^n)\\
L_i^A(\widehat{a})L_j^B(\widehat{a}) &= L_j^C(\widehat{a})L_i^D(\widehat{a})
\end{aligned}
$$

gde su $L_i^A(\widehat{a})$, $L_i^D(\widehat{a})$, $L_j^B(\widehat{a})$, $L_j^C(\widehat{a})$ i-te odnosno j-te translacije na primer $L_i^A(\widehat{a})x = A(a_1^{i-1},x,a_{i+1}^n)$.

Odakle imamo da su B i C, kao i A i D izotopne operacije.

Zamenom B i A iz (3.2.1) u (1) dobijamo

$$
\begin{aligned}
&L_j^C(\widehat{a})D(x_1^{i-1},(L_j^B(\widehat{a}))^{-1}(L_i^A(\widehat{a}))^{-1}C(y_1^{j-1},L_i^D(\widehat{a})y_j,y_{j+1}^n),x_{i+1}^n)\\
&\qquad = C(y_1^{j-1},D(x_1^{i-1},y_j,x_{i+1}^n),y_{j+1}^n)
\end{aligned}
$$

tj. koristeći i treću jednakost (3.2.1) imamo

$$
\begin{aligned}
&D(x_1^{i-1},(L_i^D(\widehat{a}))^{-1}(L_j^C(\widehat{a}))^{-1}C(y_1^n),x_{i+1}^n)\\
(3.2.2)\qquad &=(L_j^C(\widehat{a}))^{-1}C(y_1^{j-1},D(x_1^{i-1},(L_i^D(\widehat{a}))^{-1}y_j,x_{i+1}^n),y_{j+1}^n)
\end{aligned}
$$

Stavimo

$$
\begin{aligned}
&(L_j^C(\widehat{a}))^{-1}\ C(y_1^n) = T(y_1^n)\\
(3.2.3)\qquad &D(x_1^{i-1},(L_i^D(\widehat{a}))^{-1}y_j,x_{i+1}^n) = S(x_1^{i-1},y_j,x_{i+1}^n)
\end{aligned}
$$

Tada (3.2.2) postaje

$$S(x_1^{i-1}, T(y_1^n), x_{i+1}^n) = T(y_1^{j-1}, S(x_1^{i-1}, y_j, x_{i+1}^n), y_{j+1}^n)$$

tj. $S, T \in M_{i,j}$.

S obzirom na (3.2.1) i (3.2.3) imamo izotopiju

$$
(3.2.4)\quad
\begin{aligned}
A(x_1^n) &= L_j^C(\widehat{a})S(x_1^{i-1}, L_i^D(\widehat{a})(L_j^B(\widehat{a}))^{-1}x_i, x_{i+1}^n)\\
B(x_1^n) &= (L_i^A(\widehat{a}))^{-1}L_j^C(\widehat{a})T(x_1^{i-1}, L_i^D(\widehat{a})x_j, x_{j+1}^n)\\
C(x_1^n) &= L_j^C(\widehat{a})T(x_1^n)\\
D(x_1^n) &= S(x_1^{i-j}, L_i^D(\widehat{a})x_i, x_{i+1}^n).
\end{aligned}
$$

Lema je time dokazana.

Na osnovu dokazane Leme imamo da je od interesa ispitivanje (i,j)-modularan zakon, jer se svaki uopšteni (i,j)-modularan zakon svodi na (i,j)-modularan zakon.

T e o r e m a 3.2.1. Neka n-kvazigrupe A i B zadovoljavaju (i,j)-modularan zakon

$$(1)\qquad A(x_1^{i-1}, B(y_1^n), x_{i+1}^n) = B(y_1^{i-1}, A(x_1^{i-1}, y_j, x_{i+1}^n), y_{j+1}^n)$$

Tada je opšte rešenje funkcionalne jednačine (1)

$$(2)\qquad A(x_1^n) = x_i \circ A_1(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n),\ B(x_1^n) = B_1(x_1^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ x_j$$

gde su A_1, B_1 dve proizvoljne (n-1)-kvazigrupe, a "$\circ$" grupa.

D o k a z

U (1) umesto $y_2,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_n$ postavimo $a_2,\dots,a_{j-1}$, $a_{j+1},\dots,a_n$, gde su a-ovi neki fiksirani elementi skupa Q.

Tada (1) postaje

$$A(x_1^{i-1}, G(y_1,y_j),x_{i+1}^n) = G(y_1,A(x_1^{i-1},y_j,x_{i+1}^n)) \tag{3.2.5}$$

gde je $G(x,y) = B(x,a_2,\dots,a_{j-1},y,a_{j+1},\dots,a_n)$.

Iz (3.2.5) postavljajući $y_j=a_j$ gde je a_j proizvoljan fiksiran elemenat skupa Q, dobijamo

$$A(x_1^{i-1},\lambda y_1,x_{i+1}^n) = G(y_1,A_1(x_1^{i-1},x_{i+1}^n))$$

gde su $\lambda y_1 \stackrel{\text{def}}{=\!=} G(y_1,a_j)$ i $A_1(x_1^{i-1},x_{i+1}^n) \stackrel{\text{def}}{=\!=} A(x_1^{i-1},a_j,x_{i+1}^n)$.

Očigledno je λ unarna kvazigrupa i A_1 (n-1)-kvazigrupa. Odakle,

$$A(x_1^{i-1},y_1,x_{i+1}^n) = G(\lambda^{-1}y_1,A_1(x_1^{i-1},x_{i+1}^n)). \tag{3.2.6}$$

Zamenom (3.2.6) u (3.2.5) dobijamo

$$G(\lambda^{-1}G(y_1,y_j),A_1(x_1^{i-1},x_{i+1}^n)) = G(y_1,G(\lambda^{-1}y_j,A_1(x_1^{i-1},x_{i+1}^n))$$

tj.

$$G(\lambda^{-1}G(\lambda^{-1}x,y),z) = G(\lambda^{-1}x,G(\lambda^{-1}y,z)) \tag{3.2.7}$$

gde je stavljeno $y_1 = \lambda^{-1}x$, $y_j = y$, $A_1(x_1^{i-1},x_{i+1}^n) = z$.

Stavimo

$$G(\lambda^{-1}x,y) = x\circ y \tag{3.2.8}$$

Operacija "$\circ$" je očigledno kvazigrupa (2-kvazigrupa).

Zamenom (3.2.8) u (3.2.7) imamo

(3.2.9) $$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

što daje da je kvazigrupa "$\circ$" grupa.

Prema tome, iz (3.2.6) za operaciju A dobijamo

(3.2.10) $$A(x_1^n) = x_i \circ A_1(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n).$$

Zamenom (4.4.10) u (1) dobijamo

(3.2.11) $$B(y_1^n) \circ A_1(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n) = B(y_1^{j-1}, y_j \circ A_1(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n), y_{j+1}^n)$$

odakle, stavljajući $y_j = e$, gde je e jedinica grupe $\circ$, imamo

$$B_1(y_1^{j-1}, y_{j+1}^n) \circ A_1(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n) = B(y_1^{j-1}, A_1(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n), y_{j+1}^n)$$

tj.

(3.2.12) $$B(y_1^n) = B_1(y_1^{j-1}, y_{j+1}^n) \circ y_j$$

gde je $B_1(y_1^{j-1}, y_{j+1}^n) = B(y_1^{j-1}, e, y_{j+1}^n)$ i A_i zamenjeno sa y_j.

Teorema je time dokazana.

P o s l e d i c a. Ako je i = j, tada je (1) i-modularan zakon. U tom slučaju za operacije A i B dobijamo

$$A(x_1^n) = x_i \circ A_1(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n)$$

$$B(x_1^n) = B_1(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n) \circ x_i.$$

Sledećom teoremom data je karakterizacija n-kvazigrupa koje zadovoljavaju sve i,j modularne zakone.

T e o r e m a 3.2.2. n-kvazigrupe A i B zadovoljavaju (i,j)-modularan zakon za svako $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ ako i samo ako je

$$(1) \qquad A(x_1^n) = x_1 + \ldots + x_n + a, \quad B(x_1^n) = x_1 + \ldots + x_n + b$$

gde je " + " komutativna grupa odredjena do izomorfizma i a, b dva fiksirana elementa skupa Q.

D o k a z

Pretpostavimo da je ispunjeno (1). Tada se neposredno verifikacijom utvrdjuje da operacije A i B zadovoljavaju (i,j)-modularan zakon za svako $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

Obrnuto, neka n-kvazigrupe A i B zadovoljavaju (i,j)-modularan zakon za svako $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, dokažimo da su tada operacije A i B oblika (1).

Na osnovu Teoreme 4.4.1. za fiksirano j redom j=1, j=2,..., j=n i svako i dobijamo

$$
\begin{array}{lll}
 & A(x_1^n) = x_i + A_i(x_1^{i-1},x_{i+1}^n) & B(x_1^n) = B_1(x_2^n) + x_1 \\
 & A(x_1^n) = x_i \; 2 \; A_i^{(2)}(x_1^{i-1},x_{i+1}^n) & B(x_1^n) = B_2(x_1,x_3^n) \; 2 \; x_2 \\
(3.2.13) & \qquad \vdots & \qquad \vdots \\
 & A(x_1^n) = x_i \; n \; A_i^{(n)}(x_1^{i-1},x_{i+1}^n) & B(x_1^n) = B_n(x_1^{n-1}) \, n \; x_n
\end{array}
$$

gde su " + ", " 2 ", " 3 ", ..., " n " (binarne) grupe.
Odakle

$$(3.3.14) \qquad x_i + A_i(x_1^{i-1},x_{i+1}^n) = x_i \; k \; A_i^{(k)}(x_1^{i-1},x_{i+1}^n) \quad (k=2,\ldots,n)$$

Postavljajući u (3.2.14) $x_i = 0$ gde je 0 jedinični element grupe " + " imamo

(3.2.15) $A_i(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n) = 0 \; k \; A_i^{(k)}(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n) = \alpha_k A_i^{(k)}(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n)$

$(k=2,\dots,n)$

Tada iz (3.2.14) i (3.2.15) dobijamo

(3.2.16) $x_i + \alpha_k A_i^{(k)}(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n) = x_i \; k \; A_i^{(k)}(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n) \quad (k=2,\dots,n)$

ili zamenjujući x_i sa x i $A_i^{(k)}(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n)$ sa y

(3.2.17) $x + \alpha_k y = x \; k \; y \qquad (k = 2,\dots,n)$

Relacija (3.2.17) nam daje da su sve grupe "2", "3",...,"n" izotopne, pa prema tome i izomorfne sa grupom " + ". Dokažimo da je α_k izomorfizam grupe $Q(k)$ sa grupom $Q(+)$. Kako je $\alpha_k y = 0 \; k \; y$ to je α_k permutacija skupa Q. Ako u (4.4.17) stavimo $\alpha_k x$ umesto x dobijamo

(3.2.18) $\alpha_k x + \alpha_k y = \alpha_k x \; k \; y = 0 \; k \; x \; k \; y = \alpha_k(x \; k \; y)$

odakle imamo da je α_k izomorfizam grupe $Q(k)$ u grupu $Q(+)$.

Iz (3.2.17) i (3.2.18) i zamenjujući $\alpha_k y$ sa y dobijamo

$$\alpha_k(x + y) = \alpha_k x + y$$

odakle, za $x = 0$ imamo $\alpha_k y = \alpha_k 0 + y$.

Na osnovu dokazanog i (3.2.13) je

$$B_1(x_2^n) + x_1 = B_2(x_1, x_3^n) + \alpha_2 x_2 = \dots = B_n(x_1^{n-1}) + \alpha_n x_n$$

tj.

(3.2.19) $B_1(x_2^n) + x_1 = B_2(x_1, x_3^n) + \alpha_2 0 + x_2 = \dots$

$$= B_n(x_1^{n-1}) + \alpha_n 0 + x_n$$

Iz prve u nizu jednakosti (3.2.19) za $x_1 = 0$ dobijamo

$$B_1(x_2^n) = B_2(0, x_3^n) + \alpha_2 0 + x_2$$

pa je

$$B(x_1^n) = B_2(0, x_3^n) + \alpha_2 0 + x_2 + x_1 \tag{3.2.20}$$

Iz druge u nizu jednakosti (3.2.19) za $x_1 = x_2 = 0$ dobijamo

$$B_2(0, x_3^n) + \alpha_2 0 = B_3(0, 0, x_4^n) + \alpha_3 0 + x_3$$

i na osnovu (3.2.20) imamo

$$B(x_1^n) = B_3(0, 0, x_4^n) + \alpha_3 0 + x_3 + x_3 + x_1$$

Produžujući ovaj postupak konačno dobijamo

$$B(x_1^n) = b + x_n + \ldots + x_2 + x_1$$

gde je $b = B_n(\overset{n-1}{0}) + \alpha_n 0 = B(\overset{n}{0})$.

Za operaciju A iz (3.2.13) je

$$x_1 + A_1(x_2^n) = x_2 + A_2(x_1, x_3^n) = \ldots = x_n + A_n(x_1^{n-1})$$

pa sličnim rasudjivanjem kao i pre dobijamo

$$A(x_1^n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + a$$

gde je $a = A_n(\overset{n-1}{0}) = A(\overset{n}{0})$.

Dokažimo sada da je grupa " + " komutativna. Iz (3.2.19) imamo

$$B_1(x_2^n) + x_1 = B_n(x_1^{n-1}) + \alpha_n 0 + x_n$$

odakle, za $x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ dobijamo

$$B_1(\overset{n-2}{0}, x_n) + x_1 = B_n(x_1, \overset{n-2}{0}) + \alpha_n 0 + x_n \tag{3.2.21}$$

Stavljajući u (3.2.21) $x_1 = 0$, zatim $x_n = 0$ dobijamo

$$\begin{aligned} B_1(\overset{n-2}{0}, x_n) &= B_n(\overset{n-1}{0}) + \alpha_n 0 + x_n \\ B_1(\overset{n-1}{0}) + x_1 &= B_n(x_1, \overset{n-2}{0}) + \alpha_n 0 \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Zamenom (3.2.22) u (3.2.21) nalazimo

$$B_n(\overset{n-1}{0}) + \alpha_n 0 + x_n + x_1 = B_1(\overset{n-1}{0}) + x_1 + x_n$$

odakle, za $x_1 = x_n = 0$ je $B_n(\overset{n-1}{0}) + \alpha_n 0 = B_1(\overset{n-1}{0})$, pa je

$$x_n + x_1 = x_1 + x_n.$$

Time je teorema dokazana.

P o s l e d i c a 1. Ako je $A = B$ tj. ako n-kvazigrupa A zadovoljava (i,j)-modularan zakon za svako $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, tada je A komutativna n-grupa.

D o k a z

Na osnovu dokazane teoreme je $A(x_1^n) = x_1 + \ldots + x_n + a$, gde je "+" komutativna (binarna) grupa. Neposredno se proverava da A zadovoljava asocijativan zakon, pa je prema tome A komutativna n-grupa.

T e o r e m a 3.2.3. Neka četiri n-kvazigrupe A,B,C,D zadovoljavaju uopšteni (i,j)-modularan zakon

$$A(x_1^{i-1}, B(y_1^n), x_{i+1}^n) = C(y_1^{j-1}, D(x_1^{i-1}, y_j, x_{i+1}^n), y_{j+1}^n) \tag{1}$$

Tada postoji binarna grupa "$\circ$" i (n-1)-kvazigrupe K i P da je

$$A(x_1^n) = L_j^C(\tilde{a})(L_i^D(\tilde{a})(L_j^B(\tilde{a}))^{-1}\, x_i \circ K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n))$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} B(x_1^n) &= (L_i^A(\tilde{a}))^{-1}\, L_j^C(\tilde{a})(P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ L_i^D(\tilde{a})x_j) \\ C(x_1^n) &= L_j^C(\tilde{a})(P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ x_j) \end{aligned}$$

$$D(x_1^n) = L_1^D(\tilde{a})x_i \circ K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n)$$

gde su $L_i^A(\tilde{a})$, $L_i^D(\tilde{a})$, $L_j^C(\tilde{a})$, $L_j^B(\tilde{a})$ i-te translacije za A i D, odnosno j-te translacije za C i B u odnosu na $\tilde{a}$, za koje je ispunjeno

$$L_i^A(\tilde{a})L_j^B(\tilde{a}) = L_j^C(\tilde{a})L_i^D(\tilde{a}).$$

D o k a z

Na osnovu Leme 3.2.1. imamo da su A i D izotopne sa nekom n-kvazigrupom S, a B i C izotopne sa nekom n-kvazigrupm T, pri tome S i T zadovoljavaju (i,j)-modularan zakon. Ta izotopija je data u relaciji (3.2.4) (str. 31). Onda na osnovu Teoreme 3.2.1. za S i T dobijamo

$$(3.2.23)\qquad S(x_1^n) = x_i \circ K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n), \quad T(x_1^n) = P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ x_j$$

Iz (3.2.23) i (3.2.4) dobijamo (2).

Time je teorema dokazana.

Ako u jednakostima (2) Teoreme 3.2.3 stavimo $L_j^C(\tilde{a}) = \alpha$, $L_i^D(\tilde{a})(L_j^B(\tilde{a}))^{-1} = \beta$, $L_i^D(\tilde{a}) = \gamma$, tada s obzirom na jednakost $L_i^A(\tilde{a})L_j^B(\tilde{a}) = L_j^C(\tilde{a})L_i^D(\tilde{a})$ važi sledeća:

T e o r e m a 3.2.4. Ako četiri n-kvazigrupe A,B,C,D zadovoljavaju uopšteni (i,j)-modularan zakon

$$A(x_1^{i-1},B(y_1^n),x_{i+1}^n) = C(y_1^{j-1},D(x_1^{i-1},y_j,x_{i+1}^n),y_{j+1}^n)$$

tada postoji grupa "$\circ$" i (n-1)-kvazigrupe K i P da je

$$A(x_1^n) = \alpha(\beta x_i \circ K(x_1^{i-1},x_{i+1}^n))$$

$$B(x_1^n) = \beta^{-1}(P(x_1^{j-1},x_{j+1}^n) \circ \gamma x_j)$$

$$C(x_1^n) = \alpha(P(x_1^{j-1},x_{j+1}^n) \circ x_j)$$

$$D(x_1^n) = \gamma x_i \circ K(x_1^{i-1},x_{i+1}^n)$$

gde su α, β, γ permutacije skupa Q odredjene do na ekvivalenciju, a grupa "$\circ$" odredjena do na izomorfizam. K i P su proizvoljne (n-1)-kvazigrupe.

Za n-kvazigrupu kažemo da zadovoljava entropijski zakon, ako je ispunjeno

$$\begin{aligned} &A(A(x_{11},x_{12},\ldots,x_{1n}),A(x_{21},x_{22},\ldots,x_{2n}),\ldots,A(x_{n1},x_{n2},\ldots,x_{nn})) \\ (3)\quad &=A(A(x_{11},x_{21},\ldots,x_{n1}),A(x_{12},x_{22},\ldots,x_{n2}),\ldots,A(x_{1n},x_{2n},\ldots,x_{nn})) \end{aligned}$$

za svako $x_{ij} \in Q$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

Identitet (3) se sreće pod raznim nazivima: medijalnost, bisimetrija (ovaj termin se često upotrebljava u teoriji funkcionalnih jednačina), kvaziabelov zakon i dr.

T e o r e m a 3.2.5. Ako n-lupa A zadovoljava entropijski zakon (3), tada je A komutativna n-grupa sa jedinicom i pri tome, postoji binarna komutativna grupa " + " takva da je

$$A(x_1^n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n -(n-1)e$$

gde je e jedinica n-lupe A.

D o k a z

Neka je e jedinica n-lupe A. Postavimo u (3) $x_{ij} = e$ izuzev $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ i $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}$, tada (3) postaje

$$(3.2.24)\qquad A(x_{i1},\ldots,x_{i-1j},A(x_{i1},\ldots,x_{in}),x_{i+1j},\ldots,x_{nj})$$
$$= A(x_{i1},\ldots,x_{ij-1},A(x_{1j},\ldots,x_{nj}),x_{ij+1},\ldots,x_{in})$$

Kako je (3.2.24) ispunjeno za svako $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, to imamo da n-lupa A zadovoljava sve (i,j)-modularne zakone. Na osnovu Teoreme 3.2.2. (Posledica 1.) je A komutativna n-grupa tj.

$$(3.2.25)\qquad A(x_1^n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + a.$$

Kako je $A(\overset{n}{e}) = e$, to iz (3.2.25) dobijamo

$$A(\overset{n}{e}) = ne + a = e$$

odakle je $a = -(n-1)e$, pa je konačno

$$A(x_1^n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n -(n-1)e.$$

Neposredno se utvrdjuje da je e jedinica n-grupe A.

Time je teorema dokazana.

IV DEO

4. NEKI REZULTATI IZ TEORIJE UD-GRUPOIDA SA PRIMENAMA NA KVAZIGRUPE

4.1. Uvod

Neka su S,T,V tri neprazna skupa i

$$G : S \times T \longrightarrow V,$$

tada uredjenu četvorku (S,T,V; G) zovemo U-grupoid (uopšteni grupoid).

Uvedimo oznake

$$L_a^G x \stackrel{def}{=\!=} G(a,x) \qquad , \qquad R_b^G x \stackrel{def}{=\!=} G(x,b)$$

gde su $a \in S$, $b \in T$ neki fiksirani elementi. Preslikavanja L_a^G i R_b^G zovemo leva, odnosno desna U-translacija u odnosu na element a, odnosno b.

Ako su L_a^G i R_b^G sirjektivna preslikavanja, tada U-grupoid G zovemo UD-grupoid (U-grupoid sa delenjem). Tj. U-grupoid G zovemo UD-grupoid, ako za svako $a \in S$, $b \in T$, $c \in V$ jednačine

$$G(x,b) = c \qquad \text{i} \qquad G(a,y) = c$$

uvek imaju rešenja po $x \in S$ i $y \in T$, ali ne obavezno jednoznačna. Ukoliko su ta rešenja jednoznačna (ili ukoliko su L_a^G i R_b^G bijektivna preslikavanja) onda U-grupoid G zovemo U-kvazigrupa.

Za U-grupoide, UD-grupoide, kao i za U-kvazigrupe uvedimo pojam homotopije:

D e f i n i c i j a 4.1.1. U-grupoid $(S,T,V;\ A)$ homotopno se preslikava na U-grupoid $(S', T', V';\ B)$ ako postoji trojka $H=[\alpha,\beta,\gamma]$ sirjektivnih preslikavanja $\alpha: S \to S'$, $\beta: T \to T'$, $\gamma: V \to V'$, takva da je ispunjeno

$$\gamma A(x,y) = B(\alpha x, \beta y)$$

za svako $x \in S$, $y \in T$.

Ako su α, β, γ bijektivna preslikavanja, tada homotopiju zovemo izotopija.

L e m a 4.1.1. Homotopna slika UD-grupoida je UD-grupoid.

D o k a z

Neka je $(S', T', V';\ B)$ homotopna slika UD-grupoida $(S,T,V;\ A)$ pri homotopiji $H=[\alpha,\beta,\gamma]$.

Posmatrajmo jednačinu $B(x', b') = c'$ gde su $b' \in T'$, $c' \in V'$ neki fiksirani elementi. Neka je $b' = \beta b$, $c' = \gamma c$ za neke elemente $b \in T$, $c \in V$. Jednačina $A(x,b) = c$ ima skup rešenja u S. Odakle, na osnovu homotopije imamo

$$\gamma A(x,b) = B(\alpha x, \beta b) = \gamma c$$

tj.

$$B(\alpha x, b') = c'$$

Rešenja poslednje jednačine su $\alpha x \in S'$ za svako x za koje je $A(x,b) = c$.

Slično se dokazuje postojanje rešenja jednačine $B(a', y') = c'$.

Time je lema dokazana.

4.2. Uopštenje teoreme o četiri kvazigrupe sa primenama

U ovoj tački dokazane su neke teoreme o UD-grupoidima vezanim zakonom asocijativnog tipa.

Iz Teoreme 4.2.3. koju nešto kasnije dokazujemo, kao specijalan slučaj za $n = 2$, dobija se Teorema 4.2.1. Ipak, ovde je Teorema 4.2.1. istaknuta kao posebna teorema, s obzirom na primenu pomoću koje dobijamo neke rezultate V,D. Belousova iz rada [9] , izloženih na prvih 47 strana.

T e o r e m a 4.2.1 Ako četiri UD-grupoida A,B,C,D gde je

$$B : S_1 \times S_2 \longrightarrow S_4 \qquad D : S_2 \times S_3 \longrightarrow S_5$$

$$A : S_4 \times S_3 \longrightarrow S \qquad C : S_1 \times S_5 \longrightarrow S$$

zadovoljavaju jednačinu

(1) $$A(B(x,y),z) = C(x,D(y,z))$$

za svako $x \in S_1$, $y \in S_2$, $z \in S_3$ i ako su L_a^C i R_c^A bijektivna preslikavanja za neko fiksirano $a \in S_1$ i $c \in S_3$, tada postoji grupa $(S, \circ)$ koja je homotopna slika za sve UD-grupoide A,B,C,D.

D o k a z

Iz (1) fiksirajući redom $x = a \in S_1$, $y = b \in S_2$, $z = c \in S_3$, zatim $x = a$ i $z = c$ dobijamo

$$A(L_a^B y,z) = L_a^C D(y,z)$$

$$A(R_b^B x,z) = C(x,L_b^D z)$$

(4.2.1)

$$R_c^A B(x,y) = C(x,R_c^D y)$$

$$R_c^A L_a^B = L_a^C R_c^D$$

Uočimo jednakost

(4.2.2) $$A(u,z) = R_c^A u \circ L_a^C L_b^D z$$

Jednakost (4.2.2) na osnovu pretpostavke o A definiše bar jednu operaciju " $\circ$ " na skupu S. U tom cilju, dokažimo da za proizvoljna dva elementa $s,t \in S$ jednoznačno je definisan element $s \circ t \in S$. Tako, za s postoji samo jedan element $u \in S_4$ takav da je $s = R_c^A u$, jer je R_c^A bijektivno preslikavanje. S druge strane, za t mogu postojati $z_1, z_2 \in S_3$ da je ispunjeno

(4.2.3) $$t = L_a^C L_b^D z_1 = L_a^C L_b^D z_2$$

tj.
$$s \circ t = R_c^A u \circ L_a^C L_b^D z_1 = A(u,z_1)$$

$$s \circ t = R_c^A u \circ L_a^C L_b^D z_2 = A(u,z_2)$$

Dokažimo da je $A(u,z_1) = A(u,z_2)$

Iz (4.2.3) na osnovu pretpostavke o L_a^C dobijamo $L_b^D z_1 = L_b^D z_2$, odakle

(4.2.4) $$L_x^C L_b^D z_1 = L_x^C L_b^D z_2$$

Kako za $b \in S_2$ i proizvoljno u S_4 postoji $x \in S_1$ da je $B(x,b) = u$, to iz (4.2.4) i (1) dobijamo

$$C(x,D(b,z_1)) = C(x,D(b,z_2))$$

tj.
$$A(B(x.b), z_1) = A(B(x,b),z_2)$$

ili
$$A(u,z_1) = A(u,z_2)$$

Time smo dokazali da je operacija " $\circ$ " dobro definisana na skupu S. Dakle, $(S,S,S;\circ) \stackrel{def}{=\!=} (S,\circ)$ je homotopna slika UD-grupoida $(S_4,S_3,S;\ A)$ pri homotopiji $H = \left[R_c^A,\ L_a^C L_b^D,\ 1\right]$ (1 = identičko preslikavanje skupa S). Na osnovu Leme 4.1.1. je $(S,\circ)$ grupoid sa delenjem. Iz dokaza da je " $\circ$ " dobro definisana operacija sleduje i više, da je $(S,\circ)$ kvazigrupa.

Iz (4.2.1) na osnovu (4.2.2) nalazimo

$$(4.2.5)\qquad \begin{aligned} A(u,z) &= R_c^A u \circ L_a^C L_b^D z \\ B(x,y) &= (R_c^A)^{-1} (R_c^A R_b^B x \circ L_a^C R_c^D y) \\ C(x,v) &= R_c^A R_b^B x \circ L_a^C v \\ D(y,z) &= (L_a^C)^{-1} (R_c^A R_a^B y \circ L_a^C L_b^D z) \end{aligned}$$

Odakle imamo da je kvazigrupa $(S,\circ)$ homotopna slika za sve UD-grupoide A,B,C,D. Da je $(S,\circ)$ grupa, dovoljno je dokazati da je operacija " $\circ$ " asocijativna na skupu S.

Zamenom (4.2.5) u (1) dobijamo

$$(4.2.6)\qquad (R_c^A R_b^B x \circ L_a^C R_c^D y) \circ L_a^C L_b^D z = R_c^A R_b^B x \circ (R_c^A L_a^B y \circ L_a^C L_b^D z)$$

i kako je

$L_a^C R_c^D = R_c^A L_a^B$ to (4.2.6) postaje

$$(\xi \circ \eta) \circ \zeta = \xi \circ (\eta \circ \zeta)$$

za svako $\xi, \eta, \zeta \in S$. Dakle, $(S,\circ)$ je grupa.

Time je teorema dokazana.

N a p o m e n a. Kardinalni brojevi skupova S_4, S_5 i S moraju biti jednaki, što neposredno sleduje iz uslova da su R_c^A i L_a^C bijektivna preslikavanja.

P r i m e r . Neka su $S_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $S_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$ $S_3 = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$, $S_4 = \{a, b, c\}$, $S_5 = \{p, q, r\}$ $S = \{u, v, w\}$ dati skupovi. Neka su preslikavanja A,B, C i D definisana sledećim tablicama:

B	y_1	y_2	y_3
x_1	a	b	c
x_2	c	a	b
x_3	b	c	a
x_4	c	a	b

D	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
y_1	p	r	q	p	q
y_2	q	p	r	q	r
y_3	r	q	p	r	p

A	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
a	u	v	w	u	w
b	w	u	v	w	v
c	v	w	u	v	u

C	p	q	r
x_1	u	w	v
x_2	v	u	w
x_3	w	v	u
x_4	v	u	w

Neposredno se proverava da UD-grupoidi A,B,C,D zadovoljavaju jednakost

$$A(B(x,y),z) = C(x,D(y,z))$$

za svako $x \in S_1$, $y \in S_2$, $z \in S_3$, kao i da su R_x^A, L_z^C bijektivna preslikavanja za neko fiksirano $x \in S_1$ i $z \in S_3$.

Takodje, lako utvrdjujemo da su svi UD-grupoidi A,B,C,D homotopni grupi $(S,\circ)$ gde je operacija " $\circ$ " definisana tablicom

$\circ$	u	v	w
u	u	v	w
v	v	w	u
w	w	u	v

ako uzmemo kao fiksirane elemente x_1, y_1, z_1 tj.

$$A(x,y) = R_{z_1}^A x \circ L_{x_1}^C L_{y_1}^D y \ .$$

Za drugi izbor fiksiranih elemenata dobili bi grupu izomorfnu grupi $(S, \circ)$.

Uvedimo u skupu svih sirjektivnih preslikavanja nekog skupa P na neki skup Q relaciju ekvivalencije na sledeći način:

$$\alpha \sim \beta \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists a,b \in Q) \quad (\forall x \in P) \quad (\alpha x = a \cdot \beta x \cdot b)$$

gde je (Q, $\cdot$) grupa.

Ako u jednakostima (4.2.5) stavimo

$$\alpha = R_c^A \ , \quad \beta = L_a^C L_b^D \ , \quad \gamma = R_c^A R_c^B \ , \quad \delta = L_a^C R_c^D \ , \quad \varphi = L_a^C$$

tada, koristeći jednakost $R_c^A L_a^B = L_a^C R_c^D$ važi

T e o r e m a 4.2.2. Ako četiri UD-grupoida A,B,C,D zadovoljavaju uslove Teoreme 4.2.1. onda je opšte rešenje jednačine (1)

$$A(x,y) = \alpha x \circ \beta y$$

$$B(x,y) = \alpha^{-1}(\gamma x \circ \delta y)$$

$$C(x,y) = \gamma x \circ \varphi y$$

$$D(x,y) = \varphi^{-1}(\delta x \circ \beta y)$$

gde je " $\circ$ " grupa odredjena sa tačnošću do na izomorfizam, a preslikavanja α, β , γ , δ , φ sa tačnošću do na ekvivalenciju.

P o s l e d i c a . Ako je $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S$ i $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi$ permutacije skupa S, tada dobijamo poznatu teoremu Belousova o četiri kvazigrupe ([12] str. 93.).

U radu [9] razmatra se sledeća funkcionalna jednačina opšte asocijativnosti

$$A(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},B(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+m-1}),x_{i+m},\dots,x_p)$$

(4.2.7)
$$= C(x_1,x_2,\dots,x_{j-1},D(x_j,x_{j+1},\dots,x_{j+n-1}),x_{j+n},\dots x_p)$$

gde su A,B,C,D kvazigrupe definisane na istom nepraznom skupu Q arnosti

$$|A| = p-m+1 \quad , \quad |B| = m \quad , \quad |C| = p-n+1 \quad , \quad |D| = n$$

(Arnost operacije K označena je sa $|K|$). Specijalan slučaj jednačine (4.2.7) za $i=1, j+n-1=p$ razmatrao je M.Hosszu [32] .

Ovde ćemo pokazati da se rezultati V.D.Belousova [9] mogu dobiti primenom Teoreme 4.2.2.

Radi kraćeg označavanja uvedimo neke skraćenice. Tako, niz $x_k,x_{k+1},\dots,x_s$ označavamo sa x_k^s. Simbol x_k^s smatramo praznim ako je $s<k$. Isto tako, uredjenu s-k+1 - torku $(x_k,x_{k+1},\dots,x_s)$ označavaćemo sa (x_k^s).

Koristeći uvedene oznake jednačina (4.2.7) ima oblik

$$A(x_1^{i-1},B(x_i^{i+m-1}),x_{i+m}^p)=C(x_1^{j-1},D(x_j^{j+n-1}),x_{j+n}^p) \tag{4.2.8}$$

Razmotrimo slučaj jednačine (4.2.8) za $\underline{i\leqslant j, \quad j<i+m\leqslant j+n.}$

U jednačinu (4.2.8) fiksirajmo zajedničke promenljive za operacije A i C, tj. fiksirajmo x_1^{i-1} i x_{j+n}^p sa a_1^{i-1} i a_{j+n}^p korespodentno. Tada (4.2.8) postaje

$$A_1(B(x_i^{j-1},x_j^{i+m-1}),x_{i+m}^{j+n-1}) = C_1(x_i^{j-1},D(x_j^{i+m-1},x_{i+m}^{j+n-1})) \tag{4.2.9}$$

gde su

$$A_1(x,x_{i+m}^{j+n-1}) = A(a_1^{i-1},x,x_{i+m}^{j+n-1},a_{j+n}^p)$$

$$C_1(x_i^{j-1},x) \;=\; C(a_1^{i-1},x_i^{j-1},x,a_{j+n}^{p})$$

i A_1, C_1 su kvazigrupe arnosti $|A_1| = j+n-i-m+1$, $|C_1| = j-i+1$.

Stavimo

$$
\begin{aligned}
&A_1(x,x_{i+m}^{j+n-1}) \overset{\text{def}}{=\!=} \widetilde{A}_1(x,(x_{i+m}^{j+n-1}))\\
&B(x_i^{j-1},x_j^{i+m-1}) \overset{\text{def}}{=\!=} \widetilde{B}((x_i^{j-1}),\ (x_j^{i+m-1}))\\
(4.2.10)\quad &C_1(x_i^{j-1},x) \overset{\text{def}}{=\!=} \widetilde{C}_1((x_i^{j-1}),x)\\
&D(x_j^{i+m-1},x_{i+m}^{j+n-1}) \overset{\text{def}}{=\!=} \widetilde{D}((x_j^{i+m-1}),(x_{i+m}^{j+n-1}))
\end{aligned}
$$

ako još uvedemo oznake $X = (x_i^{j-1})$, $y = (x_j^{i+m-1})$, $Z = (x_{i+m}^{j+n-1})$,

tada (4.2.9) postaje

$$(4.2.11)\qquad \widetilde{A}_1\ (\widetilde{B}(X,Y),Z) = \widetilde{C}_1\ (X,\widetilde{D}(Y,Z))$$

gde su $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{D}$ s obzirom na (4.2.10) UD-grupoidi. Kako je

$$\widetilde{B} : Q^{j-i} \times Q^{i+m-j} \longrightarrow Q \qquad\qquad \widetilde{D} : Q^{i+m-j} \times Q^{j+n-i-m} \longrightarrow Q$$

$$\widetilde{A}_1 : Q \times Q^{j+n-i-m} \longrightarrow Q \qquad\qquad \widetilde{C}_1 : Q^{j-i} \times Q \longrightarrow Q$$

i sobzirom na relaciju (4.2.10) pomoću koje su definisani ovi UD-grupoidi imamo, da UD-grupoidi $\widetilde{A}_1,\widetilde{B},\widetilde{C}_1,\widetilde{D}$ zadovoljavaju uslove Teoreme 4.2.2. to iz (4.2.11) nalazimo

$$(4.2.12)\ \widetilde{B}(X,Y) = \alpha^{-1}(\gamma X \circ \delta Y), \qquad \widetilde{D}(Y,Z) = \varphi^{-1}(\delta Y \circ \beta Z).$$

Tj.

$$B(x_i^{j-1}, x_j^{i+m-1}) = \alpha^{-1}(\gamma(x_i^{j-1}) \circ \delta(x_i^{i+m-1}))$$

(4.2.13)

$$D(x_j^{i+m-1}, x_{i+m}^{j+n-1}) = \varphi^{-1}(\delta(x_j^{i+m-1}) \circ \beta(x_{i+m}^{j+n-1}))$$

gde je $(Q, \circ)$ grupa, γ, δ, β kvazigrupe arnosti $|\gamma| = j-i$, $|\delta| = i+m-j$, $|\beta| = j+n-i-m$, a α i φ permutacije skupa Q (kvazigrupe dužine jedan).

Zamnom (4.2.13) u (4,2.8) dobijamo

$$A(x_1^{i-1}, \alpha^{-1}(\gamma(x_i^{j-1}) \circ \delta(x_j^{i+m-1})), x_{i+m}^p)$$

(4.2.14)

$$= C(x_1^{j-1}, \varphi^{-1}(\delta(x_j^{i+m-1}) \circ \beta(x_{i+m}^{j+n-1})), x_{j+n}^p)$$

Odakle, fiksirajući x_i^{j-1} sa c_i^{j-1} tako da je $\gamma(c_i^{j-1}) = e$ (e = jedinica grupe "$\circ$"), imamo

$$A(x_1^{i-1}, \alpha^{-1}\delta(x_j^{i+m-1}), x_{i+m}^p)$$

(4.2.15)

$$= K(x_1^{i-1}, \delta(x_j^{i+m-1}) \circ \beta(x_{i+m}^{j+n-1}), x_{j+n}^p)$$

gde je

$$K(x_1^{i-1}, y, x_{j+n}^p) = C(x_1^{i-1}, c_i^{j-1}, \varphi^{-1}y, x_{j+n}^p)$$

kvazigrupa arnosti $|K| = i+p-j-n$.

Ako stavimo

$$\alpha^{-1}\delta(x_j^{i+m-1}) = x$$

tada iz (4.2.15) dobijamo

(4.2.16) $$A(x_1^{i-1},x,x_{i+m}^p) = K(x_1^{i-1},\alpha x\circ\beta(x_{i+m}^{j+n-1}),x_{j+n}^p)$$

Ako u (4.2.14) stavimo $\delta(x_j^{i+m-1}) = e$, dobijamo

$$C(x_1^{j-1},\varphi^{-1}\beta(x_{i+m}^{j+n-1}),x_{j+n}^p)$$

$$= A(x_1^{i-1},\alpha^{-1}\gamma(x_i^{j-1}),x_{i+m}^p)$$

Odakle, na osnovu (4.2.15) imamo

$$C(_1^{j-1},\varphi^{-1}\beta(x_{i+m}^{j+n-1}),x_{j+n}^p)$$

$$= K(x_1^{i-1},\gamma(x_i^{j-1})\circ\beta(x_{i+m}^{j+n-1}),x_{j+n}^p)$$

ili ako stavimo $\varphi^{-1}\beta(x_{i+m}^{j+n-1}) = y$, nalazimo

(4.2.17) $$C(x_1^{j-1},y,x_{j+n}^p) = K(x_1^{i-1},\gamma(x_i^{j-1})\circ\varphi y,x_{j+n}^p)$$

Konačno, relacije (4.2.13), (4.2.15) i (4.2.17) daju

(4.2.18)
$$\begin{aligned}
A(x_1^{i-1},x,x_{i+m}^p) &= K(x_1^{i-1},\alpha x\circ\beta(x_{i+m}^{j+n-1}),x_{j+n}^p)\\
B(x_i^{i+m-1}) &= \alpha^{-1}(\gamma(x_i^{j-1})\circ\delta(x_j^{i+m-1}))\\
C(x_1^{j-1},y,x_{j+n}^p) &= K(x_1^{i-1},\gamma(x_i^{j-1})\circ\varphi y,x_{j+n}^p)\\
D(x_j^{j+n-1}) &= \varphi^{-1}(\delta(x_j^{i+m-1})\circ\beta(x_{i+m}^{i+n-1})),
\end{aligned}$$

što pretstavlja opšte rešenje jednačine (4.2.8).

Specijalno, za $i=j$, $n=m$ iz (4.2.18) dobijamo

$$D(x_i^{i+m-1}) = \theta B(x_i^{i+m-1})$$

$$A(x_1^{i-1}, x, x_{i+m}^p) = C(x_1^{i-1}, \theta x, x_{i+m}^p)$$

gde je $\theta = \varphi^{-1}\alpha$ permutacija skupa Q.

Za $i = j$, $j < i+m < j+n$ iz (4.2.18) dobijamo

$$A(x_1^{i-1}, x, x_{i+m}^p) = K(x_1^{i-1}, \alpha x \circ \beta(x_{i+m}^{i+n-1}), x_{i+n}^p)$$

$$B(x_i^{i+m-1}) = \alpha^{-1}\delta(x_i^{i+m-1})$$

$$C(x^{i-1}, y, x_{i+n}^p) = K(x_1^{i-1}, \varphi y, x_{i+n}^p)$$

$$D(x_i^{j+n-1}) = \varphi^{-1}(\delta(x_i^{i+m-1}) \circ \beta(x_{i+m}^{i+n-1})).$$

Za $i < j$, $i+n = j+n$ iz (4.2.18) dobijamo

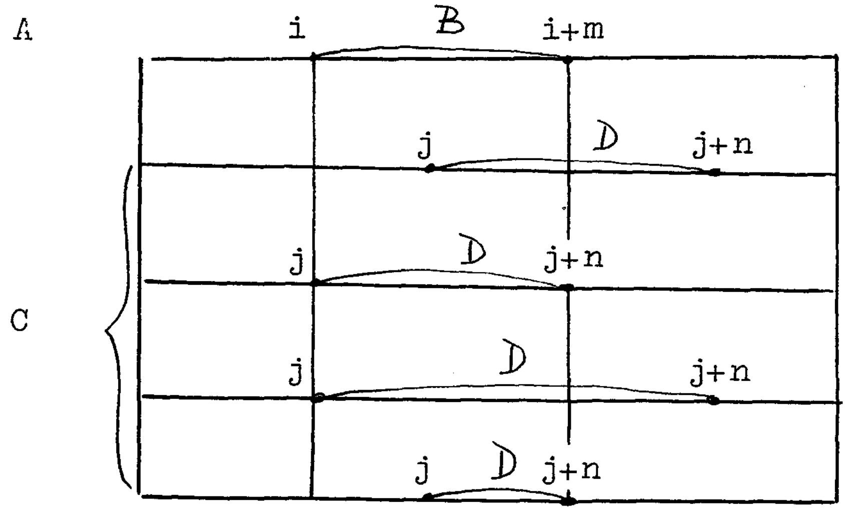
$$A(x_1^{i-1}, x, x_{i+m}^p) = K(x_1^{i-1}, \alpha x, x_{i+m}^p)$$

$$B(x_i^{i+m-1}) = \alpha^{-1}(\gamma(x_i^{j-1}) \circ \delta(x_j^{i+m-1}))$$

$$C(x_1^{j-1}, y, x_{i+m}^p) = K(x_1^{i-1}, \gamma(x_i^{j-1}) \circ \varphi y, x_{i+m}^p)$$

$$D(x_j^{i+m-1}) = \varphi^{-1}\delta(x_j^{i+m-1}).$$

Sledeći šematski prikaz daje pod kojim uslovima je jednačina (4.2.8) rešena



U ostalim slučajevima, rešenja jednačine (4.2.8) se ne izražavaju preko jedne grupne operacije i kvazigrupa manje dužine, već samo preko kvazigrupa manje dužine [9] . Rešenje za $i < j$, $i+m = j+n$ ne može se dobiti iz teoreme 2.1. rada [9] .

Sledeća teorema karakteriše (1,n)-asocijativne n-kvazigrupe.

T e o r e m a 4.2.3. n-kvazigrupa $Q\langle A\rangle$ je (1,n)-asocijativna tj. ispunjen je zakon

$$A(A(x_1^n),x_{n+1}^{2n-1}) = A(x_1^{n-1},A(x_n^{2n-1}))$$

ako i samo ako je

$$A(x_1^n) = x_1 \circ K(x_2^{n-1}) \circ x_n$$

gde je $(Q,\circ)$ grupa, a K proizvoljna (n-2)-kvazigrupa.

D o k a z

Ako je $A(x_1^n) = x_1 \circ K(x_2^{n-1}) \circ x_n$, lako se proverava da je A (1,n)-asocijativna n-kvazigrupa.

Obrnuto, neka je $Q(A)$ (1,n)-asocijativna n-kvazigrupa tj. važi

$$A(A(x_1^n), x_{n+1}^{2n-1}) = A(x_1^{n-1}, A(x_n^{2n-1}))$$

Tada na osnovu Teoreme 4.2.2. imamo

$$A(x_1^n) = \alpha x_1 \circ \beta(x_2^n)$$

$$A(x_1^n) = \alpha^{-1}(\gamma(x_1^{n-1}) \circ \delta x_n)$$

(4.2.19)

$$A(x_1^n) = \gamma(x_1^{n-1}) \circ \varphi x_n$$

$$A(x_1^n) = \varphi^{-1}(\delta x_1 \circ \beta(x_2^n))$$

Odakle,

(4.2.20) $$\alpha x_1 \circ \beta(x_2^n) = \gamma(x_1^{n-1}) \circ \varphi x_n$$

Za $\varphi x_n = e$ (e = jedinica grupe " $\circ$ ") , iz (4.2.20) dobijamo

(4.2.21) $$\gamma(x_1^{n-1}) = \alpha x_1 \circ \overline{\beta}(x_2^{n-1})$$

gde je $\overline{\beta}(x_2^{n-1}) = \beta(\varphi^{-1}e, x_2^{n-1})$. Zamenom (4.2.21) u (4.2.20) dobijamo

(4.2.22) $$\beta(x_2^n) = \overline{\beta}(x_2^{n-1}) \circ \varphi x_n \quad .$$

Iz (4.2.19) je

$$\alpha^{-1}(\gamma(x_1^{n-1})\circ\delta x_n) = \varphi^{-1}(\delta x_1\circ\beta(x_2^n))$$

to na osnovu (4.2.21) i (4.2.22) dobijamo

$$\alpha^{-1}(\alpha x_1\circ\overline{\beta}(x_2^{n-1})\circ\delta x_n) = \varphi^{-1}(\delta x_1\circ\overline{\beta}(x_2^{n-1})\circ\varphi x_n)$$

odakle, ako stavimo $\overline{\beta}(x_2^{n-1}) = e$ imamo

$$\alpha^{-1}(\alpha x_1\circ\delta x_n) = \varphi^{-1}(\delta x_1\circ\varphi x_n)$$

ili

(4.2.23) $$\alpha^{-1}(x_1\circ\delta\varphi^{-1}x_n) = \varphi^{-1}(\delta\alpha^{-1}x_1\circ x_n) .$$

Iz (4.2.19) je

$$\alpha x_1\circ\beta(x_2^n) = \alpha^{-1}(\gamma(x_1^{n-1})\circ\delta x_n)$$

odakle, zbog (4.2.21) i (4.2.22) imamo

$$\alpha x_1\circ\overline{\beta}(x_2^{n-1})\circ\varphi x_n = \alpha^{-1}(\alpha x_1\circ\overline{\beta}(x_2^{n-1})\circ\delta x_n) .$$

Ako u poslednju jednakost stavimo $\alpha x_1 = e$, $\overline{\beta}(x_2^{n-1}) = e$ dobijamo $\varphi = \alpha^{-1}\delta$. Slično se dokazuje da je $\delta = \varphi\alpha$. Tada, iz (4.2.23) imamo

$$\alpha^{-1}(x_1\circ\alpha x_n) = \varphi^{-1}(\varphi x_1\circ x_n)$$

odakle, za $x_1 = e$, zatim $x_n = e$ nalazimo

$$\varphi x_n = a\circ x_n \qquad (\varphi e = a)$$

$$\alpha x_1 = x_1\circ b \qquad (\alpha e = b)$$

Tada

$$\delta x = \alpha\varphi x = \alpha(a\circ x) = a\circ x\circ b .$$

Na osnovu dokazanog imamo

$$A(x_1^n) = \alpha x_1 \circ \beta(x_2^n) = x_1 \circ b \circ \overline{\beta}(x_2^{n-1}) \circ \varphi x_n$$

$$= x_1 \circ b \circ \overline{\beta}(x_2^{n-1}) \circ a \circ x_n = x_1 \circ K(x_2^{n-1}) \circ x_n$$

gde je $K(x_2^{n-1}) = b\circ\overline{\beta}(x_2^{n-1})\circ a.$

Do istog dolazimo ako podjemo od bilo koje jednakosti iz (4.2.19). Na primer, ako podjemo od druge jednakosti imamo

$$A(x_1^n) = \alpha^{-1}(\gamma(x_1^{n-1})\circ\delta x_n) = \alpha^{-1}(\alpha x_1 \circ \overline{\beta}(x_2^{n-1})\circ\delta x_n)$$

$$= \alpha^{-1}(x_1\circ b\circ\overline{\beta}(x_2^{n-1})\circ a\circ x_n\circ b) = x_1\circ K(x_2^{n-1})\circ x_n .$$

Time je teorema dokazana.

Sledeća teorema je centralna u ovom delu rada.

T e o r e m a 4.2.4. Ako UD-grupoidi A_i, B_i $(i = 1,\dots,n)$ gde je

$$A_n : X_1 \times X_2 \longrightarrow Q_n \qquad B_n : X_n \times X_{n+1} \longrightarrow P_n$$

$$A_{n-1} : Q_n \times X_3 \longrightarrow Q_{n-1} \qquad B_{n-1} : X_{n-1}\times P_n \longrightarrow P_{n-1}$$

$$A_{n-2} : Q_{n-1}\times X_4 \longrightarrow Q_{n-2} \qquad B_{n-2} : X_{n-2}\times P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$A_2 \;:\; Q_3 \times X_n \longrightarrow Q_2 \qquad B_2 \;:\; X_2 \times P_3 \longrightarrow P_2$$

$$A_1 \;:\; Q_2 \times X_{n+1} \longrightarrow Q \qquad B_1 \;:\; X_1 \times P_2 \longrightarrow Q$$

zadovoljavaju jednačinu

$$A_1 A_2 \dots A_n x_1 x_2 \dots x_{n+1} = B_1 x_1 B_2 x_2 \dots B_n x_n x_{n+1} \tag{2}$$

i ako su α_k, γ_k $(k = 1,\dots,n-1)$ definisana na sledeći način:

$$\alpha_k u = A_k(u,x_o) \quad , \quad \gamma_k v = B_k(y_o,v) \quad (k = 1,\dots,n)$$

za neko fiksirano $x_o \in X_{n-k+3}$ i $y_o \in X_n$, bijektivna preslikavanja, a α_n, γ_n, β_k, δ_k $(k = 1,\dots,n)$ definisana na sledeći način:

$$\alpha_n u = A_n(u,x_o) \quad , \quad \gamma_n v = B_n(y_o,v)$$

$$\beta_k x = A_k(u_o,x) \quad , \quad \delta_k y = B_k(y,v_o)$$

za neko fiksirano $x_o \in X_{n+1}$, $y_o \in X_n$, $u_o \in Q_{k+1}$, $v_o \in P_{k-1}$ sirjektivna preslikavanja, tada postoji kvazigrupa $(Q,\circ)$ koja je homotopna slika za sve UD-grupoide A_i, B_i $(i = 1,\dots,n)$ i za koju je ispunjeno

$$(\dots((u_1 \circ u_2)\circ u_3)\circ \dots)\circ u_n)\circ u_{n+1}$$

$$= u_1 \circ (u_2 \circ (u_3 \circ (\dots \circ (u_n \circ u_{n+1})\dots)\,.$$

D o k a z. Radi kraćeg zapisivanja uvedimo oznake:

$$\alpha_k^s \overset{\text{def}}{=\!=} \alpha_s \alpha_{s+1} \cdots \alpha_k \, , \quad \gamma_k^s \overset{\text{def}}{=\!=} \gamma_s \gamma_{s+1} \cdots \gamma_k$$

za $s \leq k$, $k = 1,\ldots,n-1$, gde je desna strana gornjih jednakosti proizvod preslikavanja. Jasno, da su preslikavanja α_k^s i γ_k^s za svako $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ i svako s bijektivna preslikavanja.

Iz (2) fiksirajući redom $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2, \ldots, x_{n-1} \in X_{n-1}$ tj. sve x-ove osim x_n i x_{n+1}; zatim sve x-ove osim x_{n-1} i x_{n+1}, itd. sve x-ove osim x_1 i x_{n+1} dobijamo

$$
\begin{aligned}
A_1(\beta_2 x_n, x_{n+1}) &= \gamma_{n-1}^1 B_n(x_n, x_{n+1}) \\
A_1(\alpha_2 \beta_3 x_{n-1}, x_{n+1}) &= \gamma_{n-2}^1 B_{n-1}(x_{n-1}, \gamma_n x_{n+1}) \\
A_1(\alpha_3^2 \beta_4 x_{n-2}, x_{n+1}) &= \gamma_{n-3}^1 B_{n-2}(x_{n-2}, \gamma_{n-1} \gamma_n x_{n+1}) \\
A_1(\alpha_4^2 \beta_5 x_{n-3}, x_{n+1}) &= \gamma_{n-4}^1 B_{n-3}(x_{n-3}, \gamma_{n-1}^{n-2} \gamma_n x_{n+1}) \\
&\;\;\vdots \\
A_1(\alpha_{n-1}^2 \beta_n x_2, x_{n+1}) &= \gamma_1 B_2(x_2, \gamma_{n-1}^3 \gamma_n x_{n+1}) \\
A_1(\alpha_{n-1}^2 \alpha_n x_1, x_{n+1}) &= B_1(x_1, \gamma_{n-1}^2 \gamma_n x_{n+1}) .
\end{aligned}
\tag{4.2.24}
$$

Isto tako, ako u (2) fiksiramo redom sve x-ove osim x_1 i x_2; zatim sve x-ove osim x_1 i x_3, itd. sve x-ove osim x_1 i x_n dobijamo

$$\alpha^1_{n-1}A_n(x_1,x_2) = B_1(x_1,\delta_2 x_2)$$

$$\alpha^1_{n-2}A_{n-1}(\alpha_n x_1,x_3) = B_1(x_1,\gamma_2\delta_3\, x_3)$$

$$\alpha^1_{n-3}A_{n-2}(\alpha_{n-1}\alpha_n x_1,x_4) = B_1(x_1,\gamma^2_3\delta_4\, x_4)$$

$$\alpha^1_{n-4}A_{n-3}(\alpha^{n-2}_{n-1}\alpha_n x_1,x_5) = B_1(x_1,\gamma^2_4\delta_5 x_5)$$

(4.2.25)

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\alpha^1_2 A_3(\alpha^4_{n-1}\alpha_n x_1,x_{n-1}) = B_1(x_1,\gamma^2_{n-2}\delta_{n-1}x_{n-1})$$

$$\alpha_1 A_2\,(\alpha^3_{n-1}\alpha_n x_1,x_n) = B_1(x_1,\gamma^2_{n-1}\delta_n x_n)$$

Iz (4.2.24) fiksirajući $x_{n+1} \in X_{n+1}$ u svim jednakostima, kao i iz (4.2.25) fiksirajući u svim jednakostima $x_1 \in X_1$ dobijamo

$$\alpha_1\beta_2 = \gamma^1_{n-1}\delta_n \qquad \alpha^1_{n-1}\beta_n = \gamma_1\delta_2$$

$$\alpha^1_2\beta_3 = \gamma^1_{n-2}\delta_{n-1} \qquad \alpha^1_{n-2}\beta_{n-1} = \gamma^1_2\delta_3$$

$$\alpha^1_3\beta_4 = \gamma^1_{n-3}\delta_{n-2} \qquad \alpha^1_{n-3}\beta_{n-2} = \gamma^1_3\delta_4$$

(4.2.26)

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\alpha^1_{n-1}\beta_n = \gamma_1\delta_2 \qquad \alpha^1_2\beta_3 = \gamma^1_{n-2}\delta_{n-1}$$

$$\alpha^1_{n-1}\alpha_n = \delta_1 \qquad \alpha_1\beta_2 = \gamma^1_{n-1}\delta_n\,.$$

Uočimo jednakost

$$(4.2.27) \qquad A_1(u,x_{n+1}) = \alpha_1 u \circ \gamma^1_{n-1}\,\gamma_n x_{n+1}$$

Da jednakost (4.2.27) definiše bar jednu operaciju " $\circ$ " na skupu Q slično se dokazuje kao i za jednakost (4.2.2) Teoreme 4.2.1. Dakle, kvazigrupa $(Q, \circ)$ je na osnovu (4.2.27) homotopna slika UD-grupoida $(Q_2, X_{n+1}, Q;\ A_1)$.

Iz poslednje jednakosti (4.2.24) na osnovu (4.2.27) imamo

$$B_1(x_1, \gamma^2_{n-1}\,\gamma_n x_{n+1}) = A_1(\alpha^2_{n-1}\,\alpha_n x_1, x_{n+1})$$

$$= \alpha^1_{n-1}\,\alpha_n x_1 \circ \gamma^1_{n-1}\,\gamma_n x_{n+1}$$

Ili ako stavimo $\gamma^2_{n-1}\,\gamma_n x_{n+1} = v \in P_2$ imamo

$$(4.2.28) \qquad B_1(x_1,v) = \alpha^1_{n-1}\,\alpha_n x_1 \circ \gamma_1 v$$

Iz (4.2.24) i (4.2.25) na osnovu (4.2.27) i (4.2.28) dobijamo

$$A_1(x,y) = \alpha_1 x \circ \gamma^1_{n-1}\,\gamma_n y$$

$$A_2(x,y) = (\alpha_1)^{-1}\,(\alpha^1_2 x \circ \gamma^1_{n-1}\,\delta_n y)$$

$$A_3(x,y) = (\alpha^1_2)^{-1}(\alpha^1_3 x \circ \gamma^1_{n-2}\,\delta_{n-1} y)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$
(4.2.29)\qquad
\begin{aligned}
A_{n-1}(x,y) &= (\alpha^{1}_{n-2})^{-1}(\alpha^{1}_{n-1}x \circ \gamma^{1}_{2}\delta_{3}y)\\
A_{n}(x,y) &= (\alpha^{1}_{n-1})^{-1}(\alpha^{1}_{n-1}\alpha_{n}x \circ \gamma^{1}_{1}\delta_{2}y)\\
B_{1}(x,y) &= \alpha^{1}_{n-1}\alpha_{n}x \circ \gamma_{1}y\\
B_{2}(x,y) &= (\gamma_{1})^{-1}(\alpha^{1}_{n-1}\beta_{n}x \circ \gamma^{1}_{2}y)\\
&\ \ \vdots\\
B_{n-3}(x,y) &= (\gamma^{1}_{n-4})^{-1}(\alpha^{1}_{4}\beta_{5}x \circ \gamma^{1}_{n-3}y)\\
B_{n-2}(x,y) &= (\gamma^{1}_{n-3})^{-1}(\alpha^{1}_{3}\beta_{4}x \circ \gamma^{1}_{n-2}y)\\
B_{n-1}(x,y) &= (\gamma^{1}_{n-2})^{-1}(\alpha^{1}_{2}\beta_{3}x \circ \gamma^{1}_{n-1}y)\\
B_{n}(x,y) &= (\gamma^{1}_{n-1})^{-1}(\alpha_{1}\beta_{2}x \circ \gamma^{1}_{n-1}\gamma_{n}y)
\end{aligned}
$$

Odakle imamo da je kvazigrupa $(Q,\circ)$ homotopna slika za sve UD-grupoide A_i, B_i $(i = 1,\dots,n)$.

Zamenom (4.2.29) u (2) dobijamo

$$(\dots(\alpha^{1}_{n-1}\alpha_{n}x_{1}\circ\gamma_{1}\delta_{2}x_{2})\circ\gamma^{1}_{2}\delta_{3}x_{3})\circ\dots)\circ\gamma^{1}_{n-1}\delta_{n}x_{n})\circ\gamma^{1}_{n-1}\gamma_{n}x_{n+1}$$

$$= \alpha^{1}_{n-1}\alpha_{n}x_{1}\circ(\alpha^{1}_{n-1}\alpha_{n}x_{2}\circ(\dots\circ(\alpha^{1}_{2}\beta_{3}x_{n-1}\circ(\alpha_{1}\beta_{2}x_{n}\circ\gamma^{1}_{n-1}\gamma_{n}x_{n+1})\dots$$

odakle, sobzirom na (4.2.26) imamo

$$(\ldots(u_1 \circ u_2)\circ u_3)\circ \ldots)\circ u_n)\circ u_{n+1} = u_1\circ(u_2\circ(\ldots\circ(u_{n-1}\circ(u_n\circ u_{n+1})\ldots)$$

Time je teorema dokazana.

P r i m e r. Neka su $Q(A_i)$ i $Q(B_i)$ $(i = 1,2,3)$ kvazigrupe raznih dužina, koje zadovoljavaju jednačinu

$$A_1(A_2(A_3(x_1,\ldots,x_n),x_{n+1},\ldots,x_m),x_{m+1},\ldots,x_p)$$

(4.2.30)

$$= B_1(x_1,\ldots,x_i,B_2(x_{i+1},\ldots,x_n,B_3(x_{n+1},\ldots,x_p)))$$

arnosti

$$|A_1| = p-n+1 \qquad |A_2| = m-n \qquad |A_3| = n$$

$$|B_1| = i+1 \qquad |B_2| = n-i \qquad |B_3| = p-n \quad (1<i<n) .$$

Na osnovu Teoreme 4.2.3. neposredno nalazimo opšte rešenje jednačine (4.2.30). U tom cilju stavimo

$$A_1(u,x_{m+1},\ldots,x_p) \overset{\text{def}}{=\!=} \widetilde{A}_1(u,(x_{m+1},\ldots,x_p))$$

$$A_2(v,x_{n+1},\ldots,x_m) \overset{\text{def}}{=\!=} \widetilde{A}_2(v,(x_{n+1},\ldots,x_m))$$

$$A_3(x_1,\ldots,x_n) \overset{\text{def}}{=\!=} \widetilde{A}_3((x_1,\ldots,x_i),(x_{i+1},\ldots,x_n))$$

(4.2.31)

$$B_1(x_1,\ldots,x_i,w) \overset{\text{def}}{=\!=} \widetilde{B}_1((x_1,\ldots,x_i),w)$$

$$B_2(x_{i+1},\ldots,x_n,t) \overset{\text{def}}{=\!=} \widetilde{B}_2((x_{i+1},\ldots,x_n),t)$$

$$B_3(x_{n+1},\ldots,x_p) \overset{\text{def}}{=\!=} \widetilde{B}_3((x_{n+1},\ldots,x_m),(x_{m+1},\ldots,x_p))$$

gde su $(x_1,\ldots,x_i)\in Q^{i-1}$, $(x_{i+1},\ldots,x_n)\in Q^{n-i}$, $(x_{m+1},\ldots,x_p)\in Q^{p-m}$, $(x_{n+1},\ldots,x_m)\in Q^{m-n}$; $u,\ v,\ w,\ t\in Q$.

Tada (4.2.30) postaje

$$(4.2.32)\qquad \widetilde{A}_1(\widetilde{A}_2(\widetilde{A}_3(z_1,z_2),z_3),z_4) = \widehat{B}_1(z_1,\widehat{B}_2(z_2(\widehat{B}_3(z_3,z_4)))$$

gde su

$$\widetilde{A}_1 : Q \times Q^{p-m} \longrightarrow Q \qquad \widehat{B}_1 : Q^{i-1} \times Q \longrightarrow Q$$

$$\widetilde{A}_2 : Q \times Q^{m-n} \longrightarrow Q \qquad \widehat{B}_2 : Q^{n-i} \times Q \longrightarrow Q$$

$$\widetilde{A}_3 : Q^{i-1} \times Q^{n-i} \longrightarrow Q \qquad \widehat{B}_3 : Q^{m-n} \times Q^{p-m} \longrightarrow Q$$

UD-grupoidi za koje su ispunjeni uslovi Teoreme 4.2.4 što se lako proverava na osnovu jednakosti (4.2.31) koristeći pretpostavku da su A_i i B_i $(i = 1,2,3)$ kvazigrupe, pa je

$$\widetilde{A}_1(x,y) = \alpha_1 x \circ \gamma_2^1 \gamma_3 y \qquad \widehat{B}_1(x,y) = \alpha_2^1 \alpha_3 x \circ \gamma_1 y$$

$$\widetilde{A}_2(x,y) = (\alpha_1)^{-1}(\alpha_2^1 x \circ \gamma_2^1 \delta_3 y) \qquad \widehat{B}_2(x,y) = (\gamma_1)^{-1}(\alpha_2^1 \beta_3 x \circ \gamma_2^1 y)$$

$$\widetilde{A}_3(x,y) = (\alpha_2^1)^{-1}(\alpha_2^1 \alpha_3 x \circ \gamma_1 \delta_2 y) \qquad \widehat{B}_3(x,y) = (\gamma_2^1)^{-1}(\alpha_1 \beta_2 x \circ \gamma_2^1 \gamma_3 y)$$

ili zbog (4.2.31)

$$A_1(u,x_{m+1},\ldots,x_p) = \alpha_1 u \circ \gamma_2^1 \gamma_3 (x_{m+1},\ldots,x_p)$$

$$A_2(v,x_{n+1},\ldots,x_m) = (\alpha_1)^{-1}(\alpha_2^1 v \circ \gamma_2^1 \delta_3(x_{n+1},\ldots,x_m))$$

$$A_3(x_1,\ldots,x_n) = (\alpha_2^1)^{-1}(\alpha_2^1 \alpha_3(x_1,\ldots,x_i) \circ \gamma_1 \delta_2(x_{i+1},\ldots,x_n))$$

$$B_1(x_1,\ldots,x_i,w) = \alpha_2^1 \alpha_3(x_1,\ldots,x_i) \circ \gamma_1 w$$

$$B_2(x_{i+1},\ldots,x_n,t) = (\gamma_1)^{-1}(\alpha_2^1 \beta_3(x_{i+1},\ldots,x_n) \circ \gamma_2^1 t)$$

$$B_3(x_{n+1},\ldots,x_p) = (\gamma_2^1)^{-1}(\alpha_1 \beta_2(x_{n+1},\ldots,x_m) \circ \gamma_2^1 \gamma_3(x_{m+1},\ldots,x_p));$$

Koristeći (4.2.26) i ako uvedemo oznake

$$\alpha_1 = \alpha,\quad \gamma_2^1\gamma_3 = \beta,\quad \alpha_2^1 = \gamma,\quad \alpha_1\beta_2 = \gamma_2^1\delta_3 = \delta,\quad \gamma_1 = \eta$$

$\gamma_2^1 = \xi$, $\alpha_2^1\alpha_3 = \varphi$, $\alpha_2^1\beta_3 = \gamma_1\delta_2 = \psi$ dobijamo

$$A_1(u, x_{m+1}, \ldots, x_p) = \alpha u \circ \beta(x_{m+1}, \ldots, x_p)$$

$$A_2(v, x_{n+1}, \ldots, x_m) = \alpha^{-1}(\gamma v \circ \delta(x_{n+1}, \ldots, x_m))$$

$$A_3(x_1, \ldots, x_n) = \gamma^{-1}(\varphi(x_1, \ldots, x_i) \circ \psi(x_{i+1}, \ldots, x_n))$$

$$B_1(x_1, \ldots, x_i, w) = \varphi(x_1, \ldots, x_i) \circ \eta w$$

$$B_2(x_{i+1}, \ldots, x_n, t) = \eta^{-1}(\psi(x_{i+1}, \ldots, x_n) \circ \xi t)$$

$$B_3(x_{n+1}, \ldots, x_p) = \xi^{-1}(\delta(x_{n+1}, \ldots, x_m) \circ \beta(x_{m+1}, \ldots, x_p))$$

gde je $(Q, \circ)$ binarna kvazigrupa za koju važi zakon

$$((u_1 \circ u_2) \circ u_3) \circ u_4 = u_1 \circ (u_2 \circ (u_3 \circ u_4))$$

i

$$\alpha, \gamma, \eta, \xi : \quad Q \longrightarrow Q$$

preslikavanja 1-1 i na, tj. kvazigrupe dužine jedan, a β, δ, φ i ψ gde su

$$\beta : Q^{p-m} \longrightarrow Q,\quad \delta : Q^{m-n} \longrightarrow Q,\quad \varphi : Q^{i-1} \longrightarrow Q,\quad \psi : Q^{n-i} \longrightarrow Q$$

preslikavanja na, tj. kvazigrupe arnosti:

$$|\beta| = p-m,\quad |\delta| = m-n,\quad |\varphi| = i-1,\quad |\psi| = n-i .$$

L I T E R A T U R A

1 A c z é l J., Vorlessungen über Funktionalgleichungen und ihre Anvendungen, Berlin, VEB Deutsch. Verl. Wiss. 1961.

2 A c z é l J., B e l o u s o v V.D., H o s s z ú M., Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups, Acta Math. Sci. Hung. 11, No. 1-2 (1960), 127-136.

3 A c z é l J., P i c k e r t G., R a d ó F., Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen, Mathematica, 2(25)(1960), 5-24.

4 A c z é l J., Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York and London, 1966.

5 А ц е л ь Я., Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений, УМН 11, вып. 3(69)(1956), 3-68.

6 A l b e r t A.A., Quasigroups I, Trans. Amer. Math. Soc. No. 54(1943), 507-519.

7 A l b e r t A.A., Quasigroups II, Trans. Amer. Math. Soc. No. 55(1944), 401-419.

8 Б е л о у с о в В.Д., Основы теории квазигрупп и луп, Наука. Москва, 1967.

9 B e l o u s o v V.D., Balanced identities in algebras of quasigroups, Fac. Math. Univ. Waterloo, Canada, 1971.

10 Б е л о у с о в В.Д., Ассоциативные в целом системы квазигрупп, Матем. сб. 55(97)(1961), 221-236.

11 Б е л о у с о в В.Д., Ассоциативные системы квазигрупп, УМН 13, вып. 3(1958), 243

12 Б е л о у с о в В.Д., Системы квазигрупп с обобщенными тождествами, УМН XX, вып. 1(121)(1965), 75-146.

13 Б е л о у с о в В.Д., С а н д и к М.Д., n-Арные квазигруппы и лупы, Сиб. матем. ж. VII, No. 1(1966), 31-54.

14 Б е л о у с о в В.Д.,Уравновешенные тождества в квазигруппах, Матем.сб.70(112)(1966),55-97.

15 Б е л о у с о в В.Д.,О функциональном уравнении общей ассоциативности, Матем.зап.т.7,Свердловск 1970.

16 Б е л о у с о в В.Д.,О структуре D-квазигрупп, Научн.докл.высш. школы Физ.Матем.науки,No.6(1958),8-13.

17 B e l o u s o v V.D.,H o s s z ú M.,Some problems on ternary quasigroups, Publ.Math.Debrecen,12(1965).

18 B r u c k R.H.,A survey of binary systems, Berlin-Heidelberg-New York,1971.

19 Ч у н и х и н С.А.,К теории неассоциативных n-групп с постулатом К, Докл.Акад.Наук СССР,48,No.1(1945),7-49.

20 Ч у п о н а Ѓ.,За финитарните операции, Годишен зборник ПМФ Унив.Скопје,кн.12.No.11(1959),7-49.

21 Ч у п о н а Ѓ.,За n-арните подполугрупи, Билтен на Друштвото на матем. и физ. од Македонија,кн.12(1961),5-13.

22 Č u p o n a G.,Finitarne asocijativne operacije, Mat.bibl.sv.39 (1969),Beograd,135-149.

23 D e v i d é V.,Über eine Klasse von Gruppoiden, Glasnik mat.fiz. i astronomski 10(1955),265-285.

24 D ö r n t e W.,Untersuchugen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff, Math.Zeits,29(1928),1-19.

25 E u l e r L.,Commentations Arithmeticae, Peterburg,1849,302-361.

26 E v a n s T.,A note on the associative law, J.London Math.Soc. 25(1950),196-201.

27 E v a n s T.,N e u m a n n B.H.,On varieties of groupoids and loops, J.London Math.Soc.28(1953),342-350.

28 Г л у с к и н Л.М.,О позиционных оперативах, Докл.Акад.Наук СССР, 182, o.5(1968),1000-1003.

29 H o s s z ú M.,On the explicit form of n-group operations, Publ. math.10,No.1-4(1963),88-92.

30 H o s s z ú M.,On a theorem of Belousov and some of its applications, Maguar Tud.Akad.Matem.es Fis.,oszt.Közl.9(1959),51-56.

31 H o s s z ú M.,R a d ó F.,Über eine Klasse von ternaren Quasigruppen, Acta Math.Hung.15,No.1-2(1964),20-36.

32 H o s s z ú M.,Algebrai rendszereken értelmezett függrényegyenlétek,II.Az asszociativitás függrényegyenlétek általánositásai, Magyar Tud.Akad.Mat.Fiz.Oszt.Közl.13(1963),1-15.

33 Х о л л М., Комбинаторный анализ, Мат.ИЛ,1962.

34 K u r e p a Dj., Viša algebra I i II, šk. Zagreb,1965.

35 К у р о ш А.Г., Лекции по общей алгебре, ФМ Москва,1962.

36 M i l i ć S.,O jednoj klasi kvazigrupnih operacija asocijativnog tipa, Mat. vesnik,8(23)(1971),281-285.

37 M i l i ć S.,A new proof of Belousov's theorem for a special law of quasigroup operations, Publ.Inst.Math.t.11(25)(1971), 89-91.

38 M o u f a n g R.,Zur Struktur von Alternativ Körpern, Math. Ann. 110(1935),416-430.

39 P o s t E.L.,Polyadic Groups, Trans.Amer.Math.Soc.48(1940), 208-350.

40 P r e š i ć S.B.,Zbirka zadataka iz algebre, PMF Beograd,1962.

41 P r e š i ć S.B.,Uvod u matematičku logiku, Matem.bibl.34, Beograd,1968.

42 R a d ó F.,Eine Bedingung für die Regularität der Gewebe, Matematica RPR 2,No.2(1960),325-334.

43 R a d ó F.,Generalizarea tesuturilor spatiale pentru structuri algebrice, Studia Univ."Babes-Bolyai" Math.-phys.No.1(1960), 41-55.

44 S a d e A.,Quasigroupes obeissant a certaines lois, Rev.Fac.Sci. Univ.Istambul 22(1957),151-184.

45 S a d e A.,Entropie demosienne de multigroupoides et de quasigroupes, Soc.Sci.Bruxeles,ser.1(1959),302-309.

46 S a d e A., Theorie des systemes demosiens de groupoides, Pacif. Journ. Math. 10, No. 2(1960), 625-660.

47 Т р п е н о в с к и Б.Л., За еден вид системи од операции, Билтен на ДМФ СР Македония, кн. XIX, 1968, 17-24.

48 Т р п е н о в с к и Б.Л., За еден вид системи од квазигрупи, Прилози I 2(1969) МАНУ, 5-13.

49 Т р п е н о в с к и Б.Л., n-полугрупи што можат да се пополнат со неутрални елементи, Билтен на ДМФ СР Македония, кн. XV. (1964), 24-26.

50 Т р п е н о в с к и Б.Л., Ч у п о н а Г., Финитарни асоциятивни операции со неутрални елементи, Билтен на ДМФ СР Македония, кн. XII, (1961), 15-24.

51 U š a n J., O jednoj klasi kvazigrupa, Disertacija, Beograd, 1971.

52 В е д е л ь Я.Я., Гомотопия квазигрупп, M at. vesnik, 7(22) sv. 4, (1970) 493-506.