ЛАЗАР С. РУСОВ

ГЕОМЕТРИЗАЦИЈА МЕХАНИКЕ

И

ПРОБЛЕМ ПРВИХ ИНТЕГРАЛА ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА

С А Д Р Ж А Ј

УВОД

Карл Густав Јакоби изразио је принцип најмањег дејства у таквом облику у коме се може сагледати његова дубока веза са геометријом вишедимензионих простора, па се та чињеница може узети као почетак дубљег повезивања механике са геометријом.

Теорија релативности је прва та која је извршила геометризацију механике у простору-времену и на тај начин указала на врло уску везу између физичког процеса и геометрије, као науке о особинама простора, при чему тај простор није више тродимензиони Еуклидски већ Риманов.

Први део овог рада посвећен је геометризацији механике. У прва два одељка дат је приказ познатих геометризација склерономних система а у трећем одељку наведене су неке од познатих класичних геометризација реономних холономних система. Реономни системи представљају сами по себи сложенији облик, јер величине које карактеришу такве системе зависе експлицитно у општем случају и од времена. Класичне геометризације реономних система представљају кретање реономних система као кретање у деформабилном подпростору Риманова простора у коме време игра улогу једне координате. Такав поступак је аналоган формално неким појмовима изе теорије релативности.

У одељку 3.1 показано је да се за једну класу реономних система, када кинетичка енергија и генералисана сила не зависе експлицитно од времена, може наћи геометријска интерпретација која ни формално са теоријом релативности нема никакве везе. Наиме показано је да се диференцијалне једначине кретања посматране класе реономних система са n степени слободе могу представити као диференцијалне једначине геодезијских линија једног n димензионог простора а не $n+1$ димензионог простора. Структура тог простора у потпуности и искључиво је одређена кинетичком енергијом и силама које делују на тај систем.

Други део овог рада посвећен је првим интегралима једначина кретања. У недостатку метода за интеграцију диференцијалних једначина кретања у општем случају, принуђени смо да кроз геометризацију динамичких процеса и геометријску интерпретацију једначина кретања тражимо било какве податке о неком динамичком процесу за који нисмо у стању да нађемо коначне једначине кретања.

У четвртом одељку формирана је једна класа првих линеарних интеграла диференцијалних једначина геодезијских линија Римановых простора. Затим користећи се геометријским особинама Риманових простора у конформном односу, изведено је под којим условима је могуће директно написати прве линеарне интеграле диференцијалних једначина геодезијских линија простора $\bar{V}_n$, ако су при томе већ познати први интеграли простора V_n .

У одељку 6. показано је да диференцијалне једначине склерономних неконзервативних система недопуштају прве линеарне интеграле дате у облику 4.1 . Потом је у одељку 6.1 извршено уопштење Ајзенхартовог става о првим линеарним интегралима једначина геодезијских линија и уопштење генералисаног момента количине кретања Растка Стојановића, на не-Риманове просторе.

У последњем, седмом одељку показано је да диференцијалне једначине кретања специјалне класе реономних система, допуштају један први квадратни интеграл кретања, ако активне силе имају функцију силе.

На крају можемо рећи да је спајање геометриј-ског и аналитичког аспекта проучавања механике у n димензионим не-Еуклидским просторима не само обогатило концепцију о геометријској интерпретацији једначина кретања, већ се на тај начин у исто време користи класична механика да би продубили познавање стварних законитости материјалног света.

Овај рад плод је вишегодишње сарадње са Др. Растком Стојановићем, доцентом за механику Природно-математичког факултета у Београду, па сматрам да ми је дужност а то ми у исто време причињава и посебно задовољство, да му се захвалим на великој и несебичној помоћи коју ми је урек пружао.

I. ГЕОМЕТРИЗАЦИЈА ДИНАМИКЕ ХОЛОНОМНИХ СИСТЕМА

У овом раду се ограничавамо на посматрање холономних система. Проблем њихове геометризације може да се схвати са формалне тачке гледишта као проблем налажења таквог простора у коме диференцијалне једначине кретања проучаваног система добивају посебни геометријски смисао. Другим речима поставља се захтев априори да путање система буду у неком простору линије одређеног карактера, па се тражи какав и који треба да буде тај простор у коме ће постављени услов бити задовољен.

У овом поступку несумњиво да геометријска једноставност извесних линија у неком простору, за квалитативно проучавање динамике игра посебно важну улогу. Управо због тога се са геометријске тачке гледишта и намеће потреба да се уобичајена подела холономних система на склерономне и реономне одржи. Док код склерономних система време игра само улогу независно промењивог параметра, у случају реономних система време игра далеко сложенију улогу. Утицај такве улоге времена најбоље се види у чињеници да и поред многих настојања геометризација општег реономног система до сада није употпуности успела, о чему ће посебно бити речи у одељку посвећеном геометризацији реономних система.

Геометризација склерономних система је релативно једноставна, премда дисипација енергије већ у случају склерономних неконзервативних система игра значајну улогу која се огледа у томе да између два параметра, елемента лука и времена не постоји нека једноставна веза. Ако се као најједноставније линије у било ком простору посматрају геодезијске линије, управо због тога структура простора у коме се посматра систем геодезијских линија не може бити једноставна и намеће посебну потребу за увођењем простора веома сложене структуре.

2. СКЛЕРОНОМНИ СИСТЕМИ

Посматрајмо неки склерономни холономни, у општем случају неконзервативни систем на који дејствују задане силе које су само функција положаја. Нека су независне координате тог система, за који предпостављамо да има n степени слободе, x^α $(\alpha = 1, 2, \dots, n)$. У односу на те независне координате система нека су коваријантне координате активних сила Q_α, а кинетичка енергија система може се изразити у облику

$$(2.1)\qquad 2T = g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\ ;\quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

где је $\dot{x}^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{dt}$,

док коефицијенти кинетичке енергије $g_{\alpha\beta}$ представљају неки симетрични коваријантни тензор другог реда у n димензионом простору.

Ако са $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$ означимо Кристофелове симболе друге врсте формиране у односу на тензор $g_{\alpha\beta}$, диференцијалне једначине кретања посматраног склерономног система могу се написати у облику

$$(2.2)\qquad \ddot{x}^\alpha + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta = Q^\alpha(x)\,.$$

Једначине кретања (2.2) могу се непосредно интерпретирати као једначине кретања једне тачке у неком Римановом простору V_n одређеном метричком формом

$$(2.3)\qquad ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta\;;\quad Det(g_{\alpha\beta}) \neq 0.$$

Овде коефицијенти кинетичке енергије, тј. координате тензора $g_{\alpha\beta}$ преузимају улогу основног тензора за уочени V_n .

Показано је [6] * да се диференцијалне једначине кретања (2.2) могу да интерпретирају и као диференцијалне једначине геодезијске линије у неком генералисаном простору.

У случају конзервативних сила из закона одржања енергије следи пропорционалност диференцијала лука и времена $ds^2 = 2Tdt^2 = 2(E-V)dt^2$ где је E тотална енергија система а V потенцијална енергија система, диференцијалне једначине кретања (2.2) са

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial x^\alpha}$$

могу се написати као једначине геодезијске линије неког Римановог простора.

У случају неконзервативних система једначине (2.2) су такође геодезијске линије неког простора, али не више Римановог већ Дагласовог у коме коефицијенти линеарне повезаности нису само функције положаја већ и брзине. Навешћемо укратко ову геометризацију.

Диференцијалне једначине геодезијских линија $x^\alpha = x^\alpha(t)$ у неком линеарно повезаном простору L_n са коефицијентима повезаности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ гласе**

$$(2.4)\qquad \frac{\overset{\Gamma}{d}\dot{x}^\lambda}{dt} \equiv \ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \theta\dot{x}^\lambda\;,$$

при чему је t неки произвољан параметар који се мења дуж линије. За конзервативне системе конструисан је простор, чији су коефицијенти повезаности одређени изразом

* угласте заграде односе се на цитирану литературу
**индекс Γ изнад симбола δ за контраваријантни ди-

$$(2.5)\quad \Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}_g + \frac{1}{2T}\left(Q_\nu \delta^{\lambda}_{\mu} + Q_\mu \delta^{\lambda}_{\nu} - Q^{\lambda} g_{\mu\nu}\right)$$

а, $$\theta = \frac{Q_\nu \dot{x}^\nu}{T}$$

тако да се диференцијалне једначине (2.2) могу да интерпретирају као диференцијалне једначине геодезијских линија

$$(2.6)\quad \overset{\circ\circ}{x}{}^{\lambda} + \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = \theta\dot{x}^{\lambda}.$$

Такође је показано да се параметар t може схватити и као афини параметар, па се једначине кретања неконзервативног склерономног система могу интерпретирати као диференцијалне једначине геодезијских линија

$$(2.7)\quad \overset{\circ\circ}{x}{}^{\lambda} + \Lambda^{\lambda}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0,$$

у простору чији су коефицијенти повезаности одређени изразом

$$(2.8)\quad \Lambda^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}_g - \frac{1}{2T}Q^{\lambda} g_{\mu\nu}.$$

Простор са коефицијентима повезаности (2.5) и (2.8) припада класи генерелисаних афиних геодезијски простора, тј. Дагласових простора, који су истовремено генерализација Вајлових простора, а имају неке особине и Финслерових простора.

ференцијал означава у односу на коју повезаност се овај узима. $\frac{\varepsilon}{\varepsilon t}$ је апсолутни (Бјанкијев) извод.

2.1 СКЛЕРОНОМНИ КОНЗЕРВАТИВНИ СИСТЕМИ

Диференцијалне једначине кретања конзервативног система као што је већ речено, могу се интерпретирати као једначине кретања по инерцији тачке у Римановом простору познате акционе метрике која је одређена кинетичком и потенцијалном енергијом система.

Наведена геометризација кретања склерономних неконзервативних система садржи у себи као специјалан случај геометризацију конзервативних система. Знамо да за конзервативне системе важи

$$T-U=E$$

где је $U=-V$ функција силе

а $$Q_\gamma=\partial_\gamma U \qquad \left(\partial_\gamma=\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\right).$$

Из геометризације неконзервативних система следи у овом случају да је*

$$\overset{\Pi}{\nabla}_\gamma g_{\mu\nu}=-\frac{\overline{Q}_\gamma \overline{g}_{\mu\nu}}{T} \tag{2.9}$$

где ∇_γ означава коваријантни извод по координати x^γ. И (2.9) је

$$\overline{Q}_\gamma=2\frac{\partial_\gamma P}{2P}T-Q_\gamma , \tag{2.10}$$

---

* индекс изнад симбола ∇ за коваријантно диференцирање означује у односу на коју повезаност се врши коваријантно диференцирање.

а $\bar{g}_{\mu\nu}$ је метрички тензор неког $\bar{V}_n$ у коме ће једначине кретања бити једначине геодезијских линија. Заменом (2.10) у (2.9) добија се

$$\overset{n}{\nabla}_{\gamma} g_{\mu\nu} = \left[\frac{\partial_{\gamma} P}{P} - \frac{\partial_{\gamma} U}{2(U+E)}\right]\bar{g}_{\mu\nu} . \tag{2.11}$$

Избором скалара P тако да буде задовољена једначина

$$\frac{\partial_{\gamma} P}{P} = \frac{\partial_{\gamma} U}{2(U+E)}$$

добијамо да је

$$P^2 = C(U+E)$$

а тиме и

$$\bar{g}_{\mu\nu} = C(U+E) g_{\mu\nu} \quad ; \quad C = const.$$

па на тај начин смо дошли до познатог израза за акциони линиски елемент Римановог простора $\bar{V}_n$

$$d\bar{s}^2 = C(U+E)ds^2 .$$

3. РЕОНОМНИ СИСТЕМИ

3.1 КЛАСИЧНЕ ГЕОМЕТРИЗАЦИЈЕ РЕОНОМНИХ СИСТЕМА

Питање геометризације реономних система веома је сложено. Знамо да кинетичка енергија реономних система није као у случају склерономних веза хомогена квадратна форма по генералисаним брзинама $\dot{x}^{\alpha}$, већ је у општем случају то неки израз облика

$$2T = a_{\alpha\beta}(x;t)\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} + 2a_{\alpha}(x;t)\dot{x}^{\alpha} + a(x;t). \tag{3.1}$$

Навешћемо неке од познатих геометризација реономних холономних система.

Вундхајлер ([7] стр.127) је предложио линиски елемент облика

$$ds^2 = 2T\,dt^2 = a_{\alpha\beta}(x;t)dx^{\alpha}dx^{\beta} + 2a_{\alpha}(x;t)dx^{\alpha}dt + a(x;t)dt^2 \tag{3.2}$$

са општом координатном трансформацијом

$$\bar{x}^{\alpha} = f^{\alpha}(x^1, \ldots, x^n; t) \tag{3.3}$$

и $n+1$ -дно димензиони простор V_{n+1}, где време t игра улогу $n+1$ -ве координате. Такав простор Вундхајлер назива "реономни простор",а неки други аутори називају тај простор мултиплицитетом конфигурације и времена.

За $t = const.$ добија се хиперповршина $V_n(t)$ у простору V_{n+1} и на тај начин кретање реономног система може да се посматра као кретање по некој кривој у простору V_{n+1}. Пошто у "реономном простору" V_{n+1} време t нема привилегован положај већ се третира као координата $t = x^0$, то се линиски елемент (3.2) пише у облику

$$(3.4) \quad ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j$$

$$(i,j = 0,1,2,\ldots,n).$$

Стављајући у израз за Бјанкијев извод коваријантне брзине [5]

$$(3.5) \quad \frac{\delta \dot{x}_i}{dt} = \frac{d\dot{x}_i}{dt} - [k,ij]\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}$$

да је $i = \alpha$ (латински индекси i,j иду од $0,1,2,\ldots,n$ а грчки α,β од $1,2,\ldots,n$) добићемо

$$(3.6) \quad \frac{\delta \dot{x}_i}{dt} = \frac{d\dot{x}_\alpha}{dt} - [k,\alpha j]\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}.$$

Ако сада $[k,\alpha j]$ раставимо у комбинације

$[0,\alpha 0]$; $[0,\alpha\beta]$; $[\gamma,\alpha 0]$; $[\gamma,\alpha\beta]$

и када се израчунају ове вредности Кристофелових симбола прве врсте, једначина (3.6) постаје

$$\frac{\delta \dot{x}_\alpha}{dt} = \frac{d\dot{x}_\alpha}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\beta}{dt} - [\gamma,\alpha\beta]\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt}. \tag{3.7}$$

На основу ове једначине Вундхајлер је формирао диференцијалне једначине кретања реономног система које гласе:

$$\frac{d\dot{x}_\alpha}{dt} - [\gamma,\alpha\beta]\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\beta}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x^\alpha} = Q_\alpha \tag{3.8}$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

За $\alpha = 0$ у случају система са конзервативним силама добијамо да је

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(a_i \dot{x}^i + \frac{1}{2}a\right) - 2\frac{\partial U}{\partial t}$$

што одражава закон промене тоталене енергије система, а једначина (3.8) у овом случају своди се на облик

$$\frac{\delta \dot{x}_\alpha}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{3.9}$$

Леон Брилуен ([3] стр. 148) уводи за реономне системе линиски елемент облика

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = (A + 2T - 2V)dt^2 = \tag{3.10}$$
$$= (A + a(x,t) + 2a_\alpha(x,t)\dot{x}^\alpha + a_{\alpha\beta}(x,t)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta - 2V)dt^2,$$

где је A нека недефинисана константа, а V потенцијална енергија система. Разлика у односу на метрику (3.4) је само у изразу за g_{00} тј.

$$g_{00} = A + a - 2V$$

док су остале координате метричког тензора исте као и раније

$$g_{0\alpha} = g_{\alpha 0} = a_\alpha$$

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \, .$$

Приликом формирања диференцијалних једначина кретања, које Брилуен назива једначине геодезијских линија за мале брзине, израчуна се прво

$$\frac{dx_\alpha}{ds} = g_{\alpha j}\frac{dx^j}{ds} = a_\alpha \frac{dt}{ds} + a_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{ds} \tag{3.11}$$

$$= \left(a_\alpha + a_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{dt}\right)\frac{dt}{ds}$$

затим уводећи генералисане импулсе

$$p_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}$$

следи да је

$$\frac{dx_\alpha}{ds} = p_\alpha \frac{dt}{ds} \, . \tag{3.12}$$

Напишимо сада једначине геодезијских линија у облику

$$\frac{d}{ds}\left(p_\alpha \frac{dt}{ds}\right) = [k, \alpha j]\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} \, . \tag{3.13}$$

Пошто је

$$[0,\alpha 0] = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(A+a-2V) \; ;$$

$$[0,\alpha\beta]+[\beta,\alpha 0] = \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha} \; ,$$

једначина (3.13) постаје

$$\frac{d}{ds}\left(P_\alpha \frac{dt}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(A+a-2V)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \tag{3.14}$$

$$+ \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dt}{ds} + [\gamma,\alpha\beta]\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} .$$

Предпостављејући да је $A \gg 2T-2V > 0$
и уз апроксимацију

$$ds^2 \approx A\,dt^2 \tag{3.15}$$

добијају се диференцијалне једначине кретања реономног система

$$P_\alpha \frac{d^2t}{ds^2} + \left(\dot{P}_\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\beta}{dt} - [\gamma,\alpha\beta]\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0. \tag{3.16}$$

Ове једначине Брилуен назива једначине геодезијских линија реономног система у Римановом простору V_{n+1}
Једначине (3.16) и даље се упрошћавају јер, обзиром да је по прдпоставци A врло велико, може се занемарити $\frac{d^2t}{ds^2}$ у поређењу са $\left(\frac{dt}{ds}\right)^2$ па се једначина (3.16) своди на облик

$$(3.17)\qquad \dot{p}_\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\beta - [\gamma, \alpha\beta]\dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma + \frac{\partial V}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Уколико је потребно да се изврши виша апроксимација тада се израз

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = (A+2T-2V)^{-1}$$

развија у ред.

Сем ових геометризација реономних система има још предложених линиских елемената, од којих ћемо навести укратко само још један и то линиски елемент Ајзенхарта ([7] стр.29).

Ајзенхар посматра реономни систем са n степени слободе и са потенцијалном енергијом V која може да зависи и од времена t . Кинетичка енергија система има облик (3.1). Предлаже се простор V_{n+2} са $n+2$ димензија, са координатама x^α, t, u и са линиским елементом

$$(3.18)\qquad ds^2 = a_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2a_\alpha dx^\alpha dt + (A-2V)dt^2 + 2dt\,du.$$

Показано је да ако се геодезијске линије простора V_{n+2} пројектују дуж параметарске линије u на површини $u=const.$, тако добијене криве поклапаће се са динамичким трајекторијама у "реономном простору"

-.-

Из наведених геометризација реономних система видимо да увођењем $n+1$ димензионих простора са временом t као $n+1$ -ом координатом, проучавање реономних система излази из оквира класичне механике јер је тешко овде наћи формулацију механике у строго класичном смислу, која не би тежила релативистичкој интерпретацији појава. Брилуенова геометризација у том смислу баш показује да је заиста нужно предпоставити да су брзине једног реономног система мале у односу на неку недефинисану константу A , да би n димензиони подпростор Риманова простора V_{n+1} био конфигурациони простор реономних система. Таква апроксимација једначина кретања реономних система несумњиво подсећа на теорију релативности и прву апроксимацију релативистичких једначина кретања,када под предпоставком да су брзине мале у односу на брзину светлости, из релативистичких једначина изводимо једначине кретања класичне механике.

Најзад можемо рећи да се сматра да ни један поступак у погледу геометризације реономних система није успео да се покаже задовољавајућим. Основни проблем је да се нађе неки n димензиони простор у коме би се извршила потпуна геометризација динамичког система са n степени слободе. Све наведене геометризације прелазе преко тог захтева.

3.2 ГЕОМЕТРИЗАЦИЈА ЈЕДНЕ СПЕЦИЈАЛНЕ КЛАСЕ РЕОНОМНИХ СИСТЕМА

У случају једне специјалне класе реономних система могуће је извршити геометризацију система потпуно у духу напред наведеног захтева.

Посматрајмо реономни систем за који кинетичка енергија и генералисана сила независе експлицитно од времена [2], тј. када је

$$2T = g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} + 2a_{\alpha}\dot{x}^{\alpha} + 2a \tag{3.19}$$
$$2T = 2T_0 + 2T_1 + 2T_2$$

где је

$$2T_0 = g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}$$
$$T_1 = a_{\alpha}\dot{x}^{\alpha} \tag{3.20}$$
$$T_2 = a.$$

Диференцијалне једначине кретања посматраног реономног система, еквивалентне су са једначинама кретања тачке у Римановом простору V_n метрике

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta}\,; \quad (\alpha,\beta = 1,2,\dots,n) \tag{3.21}$$

изводе се из Лагранжевих једначина друге врсте

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{\gamma}} - \frac{\partial T}{\partial x^{\gamma}} = P_{\gamma}(x)$$

и гласе

$$g_{\gamma\mu}\ddot{x}^{\mu} + [\mu\nu,\gamma]\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} + a_{\rho\gamma}\dot{x}^{\rho} - \frac{\partial a}{\partial x^{\gamma}} = P_{\gamma}(x)\,, \tag{3.22}$$

где је

(3.23) $$a_{\varrho\gamma} = \partial_\gamma x^\varrho - \partial_\varrho x^\gamma$$

антисиметрични тензор који зависи само од x^ϱ.
Множећи једначину (3.22) са контраваријантним метричким тензором $g^{\alpha\gamma}$ и узимајући у обзир да је

(3.24) $$Q_\gamma(x) = P_\gamma(x) + \partial_\gamma a(x) \; ; \quad \left(\partial_\gamma \equiv \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\right),$$

добијамо за диференцијалне једначине кретања посматраног реономног система следећи израз

(3.25) $$\ddot{x}^\alpha + \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g^{\alpha\gamma} a_{\varrho\gamma} \dot{x}^\varrho = Q^\alpha(x)$$

где су $\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$ Кристофелови симболи друге врсте формирани у односу на $g_{\alpha\beta}$.

Поставимо сада задатак да конструишемо такав простор у коме ће једначине (3.25) бити диференцијалне једначине геодезијских линија и то прво за случај када параметар t није афини и једначине геодезијских линија моћи ћемо написати у облику

(3.26) $$\frac{\delta_\Gamma \dot{x}^\lambda}{dt} = \ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \theta \dot{x}^\lambda ,$$

где је θ нека скаларна функција.

У том циљу напишимо једначину (3.25) овако

$$\ddot{x}^{\alpha}+\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}=Q^{\alpha}+R^{\alpha} \tag{3.27}$$

при чему смо са R^{α} означили величину $R^{\alpha}=-g^{\alpha\gamma}a_{\rho\gamma}\dot{x}^{\rho}$.
Полазећи од закона кинетичке енергије у диференцијалном облику, имаћемо у овом случају да је

$$dT_0=dA(Q_{\alpha})+dA(R_{\alpha}) \tag{3.28}$$

где је
$$dA(Q_{\alpha})=Q_{\alpha}dx^{\alpha}\;;\quad dA(R_{\alpha})=R_{\alpha}dx^{\alpha}.$$

Пошто је $R_{\alpha}=-a_{\rho\alpha}\dot{x}^{\rho}$ то се једначина (3.28) своди на облик

$$dT_0=dA(Q_{\alpha})=Q_{\alpha}dx^{\alpha} \tag{3.29}$$

јер је $a_{\rho\gamma}$ антисиметричан тензор, па је тада

$$dA(R_{\alpha})=R_{\alpha}dx^{\alpha}=-a_{\rho\gamma}\dot{x}^{\rho}\dot{x}^{\gamma}dt=0. \tag{3.30}$$

Диференцирањем (3.20) по параметру t добиће се

$$2dT_0=\overset{\Gamma}{\delta}g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}+2g_{\alpha\beta}\overset{\Gamma}{\delta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}. \tag{3.31}$$

Да би одредили коефицијенте повезаности $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ неког линеарно повезаног простора у коме се једначина (3.25) може написати у облику (3.26), из (3.26) вредност

$$\overset{\Gamma}{\delta}\dot{x}^{\alpha} = \theta\dot{x}^{\alpha}dt$$

заменимо у (3.31), па користећи (3.29) добијамо

$$\overset{\Gamma}{\delta} g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} + 2g_{\alpha\beta}\theta\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}dt = 2Q_{\lambda}\,dx^{\lambda}.$$

Ова једначина, када се члан на десној страни прошири са $2T_0 = g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}$ постаје

$$\left[\overset{\Gamma}{\delta} g_{\alpha\beta} + 2g_{\alpha\beta}\theta dt - \frac{2Q_{\lambda}dx^{\lambda}}{2T_0}g_{\alpha\beta}\right]\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0. \tag{3.32}$$

Предпоставимо сада да је θ одређено изразом

$$\theta = \theta_{\nu}\dot{x}^{\nu}. \tag{3.33}$$

Како је израз у загради једначине (3.32) симетричан, то следи

$$\overset{\Gamma}{\delta} g_{\alpha\beta} + 2g_{\alpha\beta}\theta_{\nu}dx^{\nu} - \frac{2Q_{\lambda}dx^{\lambda}}{2T_0}g_{\alpha\beta} = 0. \tag{3.34}$$

Из ове једначине можемо одредити

$$\overset{\Gamma}{\delta} g_{\alpha\beta} = -2\left(\theta_{\nu} - \frac{Q_{\nu}}{2T_0}\right)g_{\alpha\beta}\,dx^{\nu}. \tag{3.35}$$

Пошто је по дефиницији

$$\overset{\Gamma}{\delta} g_{\alpha\beta} \overset{def}{=} \overset{\Gamma}{\nabla}_\nu g_{\alpha\beta} dx^\nu ,$$

то (3.35) постаје

(3.36) $$\nabla_\nu g_{\alpha\beta} = -2\Phi_\nu g_{\alpha\beta}$$

где смо са Φ_ν означили вектор

(3.37) $$\Phi_\nu = \left(\theta_\nu - \frac{Q_\nu}{2T_0}\right).$$

Ако се једначина (3.36) напише у развијеном облику, цикличким мењањем индекса и сабирањем добићемо

(3.38) $$[\nu\alpha,\beta]_g = g_{\omega\beta}\Gamma^{\omega}_{\nu\alpha} + [\Phi_\beta g_{\nu\alpha} - \Phi_\alpha g_{\nu\beta} - \Phi_\nu g_{\alpha\beta}].$$

Множећи ову једначину са $g^{\beta\sigma}$ добија се

$$\left\{ {\sigma \atop \nu\alpha} \right\}_g = \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} + [\Phi_\beta g_{\nu\alpha} g^{\beta\sigma} - \Phi_\alpha \delta^\sigma_\nu - \Phi_\nu \delta^\sigma_\alpha],$$

одакле одређујемо тражене коефицијенте повезаности

(3.39) $$\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} = \left\{ {\sigma \atop \nu\alpha} \right\}_g + [\Phi_\alpha \delta^\sigma_\nu + \Phi_\nu \delta^\sigma_\alpha - \Phi_\beta g_{\nu\alpha} g^{\beta\sigma}].$$

Остаје још да се у изразу (3.39) одреде вредности вектора Φ_ν .Користећи (3.39), израз (3.26) може се написати у облику

(3.40) $$\ddot{x}^\sigma + \left\{ {\sigma \atop \nu\alpha} \right\}_g \dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha = \theta_\nu \dot{x}^\sigma \dot{x}^\nu + \phi_\beta g^{\beta\sigma} 2T_0 - 2\phi_\alpha \dot{x}^\alpha \dot{x}^\sigma.$$

На основу (3.27), (3.37) и (3.40) следи

(3.41) $$\left(\theta_\nu - \frac{Q_\nu}{T_0}\right)\left(2T_0 g^{\nu\sigma} - \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma\right) = R^\sigma.$$

Ову једначину можемо написати једноставније,

(3.42) $$a_\nu \Pi^{\nu\sigma} = R^\sigma$$

где је

$$a_\nu = \theta_\nu - \frac{Q_\nu}{T_0} \quad ;$$

(3.43) $$\Pi^{\nu\sigma} = \left(2T_0 g^{\nu\sigma} - \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma\right).$$

Множећи једначину (3.42) са тензором $\overset{-1}{\Pi}_{\sigma\mu}$ реципрочним тензору $\Pi^{\sigma\mu}$ добићемо

$$a_\nu \Pi^{\nu\sigma} \overset{-1}{\Pi}_{\sigma\mu} = R^\sigma \overset{-1}{\Pi}_{\sigma\mu}$$

одакле је

(3.44) $$a_\mu = R^\sigma \overset{-1}{\Pi}_{\sigma\mu}$$

а тиме је одређена и вредност скаларног множитеља

(3.45) $$\theta = \frac{Q_\nu}{T_0}\dot{x}^\nu + R^\sigma \overset{-1}{\Pi}_{\sigma\nu}\dot{x}^\nu$$

као и вредност вектора Φ_ν,

(3.46) $$\Phi_\nu = \frac{Q_\nu}{2T_0} + R^\sigma \overset{-1}{\Pi}_{\sigma\nu}.$$

Замењујући (3.46) у (3.39) добићемо коначно и тражене вредности за коефицијенте линеарне повезаности,

(3.47) $$\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} = \left\{{\sigma \atop \nu\alpha}\right\}_g + \left(\frac{Q_\alpha}{2T_0} + R^\lambda \overset{-1}{\Pi}_{\lambda\alpha}\right)\delta^\sigma_\nu + \left(\frac{Q_\nu}{2T_0} + R^\lambda \overset{-1}{\Pi}_{\lambda\nu}\right)\delta^\sigma_\alpha - \left(\frac{Q_\beta}{2T_0} + R^\lambda \overset{-1}{\Pi}_{\lambda\beta}\right) g_{\nu\alpha} g^{\beta\sigma}.$$

Из свега напред изнетог следи закључак:

Диференцијалне једначине кретања (3.25) неког реономног система за који коефицијенти кинетичке енергије и координате силе Q_α не зависе експлицитно од времена, могу се посматрати као диференцијалне једначине геодезијских линија (3.26) линеарно повезаног простора L_n са коефицијентима повезаности одређеним изразом (3.47).

Сада ћемо показати да једначине (3.26) геодезијских линија простора са коефицијентима повезаности $\Gamma^\sigma_{\nu\alpha}$ јесу једначине кретања посматраног реономног система.

Заменимо ли у једначине геодезијских линија (3.26) вредност коефицијената повезаности (3.47) добићемо

$$\ddot{x}^{\sigma}+\left\{{\sigma \atop \nu\alpha}\right\}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\alpha}-R^{\lambda}\overset{-1}{\Pi}_{\lambda\beta}\Pi^{\beta\sigma}=Q^{\sigma}.$$

Узимајући у обзир да је $R^{\lambda}=g^{\lambda\gamma}a_{\varrho\gamma}\dot{x}^{\varrho}$ добијамо

$$\ddot{x}^{\sigma}+\left\{{\sigma \atop \nu\alpha}\right\}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\alpha}+g^{\sigma\gamma}a_{\varrho\gamma}\dot{x}^{\varrho}=Q^{\sigma},$$

што се поклапа са диференцијалним једначинама кретања (3.25) посматраног реономног система.

Простор са коефицијентима повезаности (3.47) припада класи генералисаних афиних геодезијских простора ([1] стр.194) у коме су коефицијенти повезаности функције не само положаја x^{σ} већ и генералисаних брзина $\dot{x}^{\sigma}$.

Потражимо сада такав линеарно повезан простор у коме ће се једначине кретања (3.25) моћи интерпретирати као диференцијалне једначине геодезијских линија за случај када је параметар (време) t афини, тј. у облику

$$\ddot{x}^{\lambda}+\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}=0. \tag{3.48}$$

Из диференцијалне геометрије генералисаних афиних геодезијских простора ([1] стр.195) познато је да ће два линеарно повезана простора допуштати исте геодезијске линије ако разлика коефицијената повезаности одређује тензор облика

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{1}{2T_0}\left(Q_{\mu}\delta^{\lambda}_{\nu}+Q_{\nu}\delta^{\lambda}_{\mu}\right)+R^{\gamma}\overset{-1}{\Pi}_{\gamma\nu}\delta^{\lambda}_{\mu} \tag{3.49}$$

што у нашем случају, на основу (3.47) доводи до

(3.50)
$$\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}=\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}_g-R^{\gamma}\overset{-1}{\Pi}_{\gamma\beta}g_{\mu\nu}g^{\lambda\beta}-\frac{Q_\beta}{2T_o}g_{\mu\nu}g^{\lambda\beta}+ + R^{\gamma}\overset{-1}{\Pi}_{\gamma\mu}\delta^{\lambda}_{\nu},$$

отуда следи да у простору са коефицијентима повезаности (3.50) кретање реономног система своди се на кретање по геодезијксој линији (3.48).

У случају када за посматрани систем активне силе имају функцију силе, тј.

(3.51)
$$Q_\gamma=\partial_\gamma U$$

у питању геометризације таквог реономног система суштински се ништа не мења, треба само у изразима за коефицијенте повезаности (3.47) и (3.50) заменити вредност (3.51).

Геометризација специјалне класе реономних система садржи у себи као специјалан случај геометризацију кретања склерономних конзервативних и неконзервативних система. За случај конзервативног склерономног система, коефицијенти повезаности (3.47) своде се на

(3.52)
$$\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}=\left\{{\sigma \atop \nu\alpha}\right\}_g+\frac{\partial_\alpha U}{2T}\delta^{\sigma}_{\nu}+\frac{\partial_\nu U}{2T}\delta^{\sigma}_{\alpha}-\frac{\partial_\beta U}{2T}g^{\beta\sigma}g_{\nu\alpha},$$

а $\theta=\dfrac{\partial_\nu U}{T}\dot{x}^\nu$.

Заменом (3.52) у једначину (3.26) добијамо

(3.53)
$$\ddot{x}^\sigma+\left\{{\sigma \atop \nu\alpha}\right\}\dot{x}^\nu\dot{x}^\alpha=\partial_\beta U g^{\beta\sigma}$$

а то су познате једначине кретања склерономног конзервативног система.

Исто тако и у случају када је време t афини параметар коефицијенти повезаности (3.50) своде се на

$$\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}_g - \frac{\partial_\beta U}{2T} g^{\lambda\beta} g_{\mu\nu} \tag{3.54}$$

што заменом у (3,48) доводи до једначине (3.53).

Из изложене геометризације специјалне класе реономних система види се да ова геометризација нема ни формално никакве везе са теоријом релативности.

II. НЕКИ ПРВИ ИНТЕГРАЛИ ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА

Уобичајени поступци у аналитичкој динамици за одређивање првих интеграла једначина кретања непосредно дају под одређеним условима четири врсте првих интеграла и то интеграле закон количине кретања, закон момента количине кретања и цикличне интеграле као интеграле линеарне по брзинама и интеграл енергије као интеграл квадратан по брзинама који постоји у случају конзервативних сила. Постојање првих линеарних интеграла добивених из закона количине кретања и закона момента количине кретања не зависе од избора координатног система, већ је суштински везано за структуру проучаваног динамичког система. Циклични интеграли међутим, зависе искључиво од избора независних координата система и не морају бити независни од интеграла прве две категорије.

Геометризацијом динамике јављају се могућности да се пронађу под одређеним условима и први интеграли који не морају бити само интеграли наведених категорија линеарних интеграла или њихове комбинације, а њихово постојање је условљено структуром простора у коме је геометризација неког динамичког система извршена. На тај начин интеграли чија се егзистенција под одређеним условима утврђује у наредним излагањима су свакако шири по свом значају од класе цикличних интеграла.

4. ЛИНЕАРНИ ИНТЕГРАЛИ КОНЗЕРВАТИВНИХ СИСТЕМА

4.1 ПРВИ ИНТЕГРАЛИ ОБЛИКА $\frac{dx^i}{ds} = g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}$ ЈЕДНАЧИНА ГЕОДЕЗИЈСКИХ ЛИНИЈА

Посматрајмо Риманов простор V_n са метричком формом

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \; ; \; (\alpha,\beta = 1,2,\dots,n). \tag{4.1}$$

Диференцијалне једначине геодезијских линија у том простору V_n гласе

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right) + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} \frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \tag{4.2}$$

где су $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$ Кристофелови симболи друге врсте формирани у односу на метрички тензор $g_{\alpha\beta}$.

Поставимо сада питање, да ли је могуће коваријантне векторе тангенте геодезијских линија

$$T_\alpha = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{ds} \; ; \; \left(T^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}\right), \tag{4.3}$$

представити као градијенте неке скаларне функције ϕ одређене геометријском структуром посматраног простора, тј. у облику

$$T_\alpha = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} . \tag{4.4}$$

Да би коваријантне векторе тангенте T_α геодезијских линија било могућно изразити у облику (4.4) морају бити задовољена два услова.

П р в о: T^α је јединични вектор и отуда мора бити

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}=1. \tag{4.5}$$

Д р у г о: контраваријантни вектор тангенте

$$T^\alpha=g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} \tag{4.6}$$

мора идентички да задовољава једначину (4.2).

Ако у једначину (4.2) заменимо (4.6) добићемо

$$\frac{d}{ds}\left(g^{\alpha\ell}\frac{\partial\phi}{\partial x^\ell}\right)+\left\{{\alpha \atop \beta\gamma}\right\}g^{\beta m}g^{\gamma n}\frac{\partial\phi}{\partial x^m}\frac{\partial\phi}{\partial x^n}=0, \tag{4.7}$$

а када се изврши назначено диференцирање, једначина (4.7) постаје

$$\begin{aligned} &g^{\alpha\ell}g^{mn}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\ell\partial x^m}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x^n}+\\ &+\frac{\partial\phi}{\partial x^m}\frac{\partial\phi}{\partial x^n}g^{pn}\left(\frac{\partial g^{\alpha m}}{\partial x^p}+\left\{{\alpha \atop \beta p}\right\}g^{\beta m}\right)=0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Користећи чињеницу да је коваријантни извод метричког тензора $g^{\alpha m}$ у Римановом простору једнак нули, можемо једначину (4.8) написати

$$g^{\alpha\ell}g^{mn}\frac{\partial\phi}{\partial x^n}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\ell\partial x^m}-\frac{\partial\phi}{\partial x^p}\left\{{p \atop \ell m}\right\}\right)=0. \tag{4.9}$$

Израз у загради једначине (4.9) је коваријантни извод вектора $\frac{\partial\phi}{\partial x^m}$, те се једначина (4.9) може написати у облику

$$(4.10) \qquad g^{\alpha\ell} g^{mn} \frac{\partial\phi}{\partial x^n} \nabla_\ell \frac{\partial\phi}{\partial x^m} = 0.$$

Множећи ову једначину са коваријантним тензором $g_{\alpha\gamma}$ добићемо

$$g^{mn} \frac{\partial\phi}{\partial x^n} \nabla_\gamma \frac{\partial\phi}{\partial x^m} = 0$$

а ова се једначина своди на облик

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(g^{mn} \frac{\partial\phi}{\partial x^m} \frac{\partial\phi}{\partial x^n}\right) = 0$$

одакле следи да је

$$(4.11) \qquad g^{mn} \frac{\partial\phi}{\partial x^m} \frac{\partial\phi}{\partial x^n} = \text{const.}$$

$$(m, n = 1, 2, \dots, n).$$

Према томе видимо да из услова (4.6) следи да ће

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}$$

задовољавати диференцијалну једначину геодезијских линија (4.2) ако функција ϕ задовољава услов (4.11). Из првог захтева (4.5) следи да мора бити управо интензитет градијента функције ϕ једнак јединици, па су оба ова услова потпуно сагласна и можемо рећи:

Ако неки Риманов простор V_n допушта решење $\phi = \phi(x^1, \dots, x^n; C_1, \dots, C_n)$ парцијалне диференцијалне једначине

(4.12) $$g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}}=1,$$

диференцијалне једначине геодезијских линија простора V_n допуштају потпуни систем од n првих линеарних интеграла облика

(4.13) $$\frac{dx^{\alpha}}{ds}=g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}}.$$

Множећи једначину (4.12) са $g_{\alpha\gamma}$ добијамо

$$ds=\frac{\partial\phi}{\partial x^{\gamma}}dx^{\gamma}$$

одакле је

(4.14) $$\phi=s=\int_{N_0}^{N}\sqrt{g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}}.$$

На основу (4.14) следи геометријска интерпретација потпуног интеграла ϕ парцијалне једначине (4.12). Потпуни интеграл ϕ парцијалне једначине (4.12) представља дужину геодезијске линије у посматраном простору V_n.

4.11 "СЛИЧНИ" ИНТЕГРАЛИ ЗА ПРОСТОРЕ У КОНФОРМНОМ ОДНОСУ

За добијање првих линеарних интеграла једначина геодезијских линија простора у конформном односу, користићемо резултате добијене у § 4.1.

Нека је ϕ неки потпуни интеграл парцијалне једначине

$$(4.15) \qquad a^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}}=1.$$

Поставимо сада питање, дали једначине

$$(4.16) \qquad a^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\beta}}=\lambda^{2}(x^{1},\dots,x^{n})$$

допуштају неко решење $\psi=\psi(x)$.

Ако једначине (4.16) допуштају решење тада мора бити задовољен услов

$$a^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\beta}}\right)=1,$$

тј. мора бити

$$(4.17) \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}}.$$

Према томе постојање функције ψ која ће задовољавати (4.16) зависи од интеграбилности једначине (4.17), односно једначине

$$(4.18) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}=\lambda\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}}$$

где је ϕ познато решење парцијалне једначине (4.15), а λ је задана скаларна функција.

Услови интеграбилности једначине (4.18) су

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\beta}}=0\ ,$$

односно

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial\lambda}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}}=0. \tag{4.19}$$

Ако су услови (4.19) задовољени, интеграцијом једначине (4.18), може се наћи функција ψ која ће представљати потпуни интеграл парцијалне једначине (4.16). На основу изнетог следи:

Ако простор V_n са метриком

$$ds^2=a_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta}$$

допушта прве линеарне интеграле диференцијалних једначина геодезијских линија, облика

$$\frac{dx^{\alpha}}{ds}=a^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}}$$

простор $\bar{V}_n$ конформан простору V_n и са метриком

$$d\bar{s}^2=\lambda^2 ds^2=g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta};\ g_{\alpha\beta}=\lambda^2 a_{\alpha\beta}$$

допуштаће прве линеарне интеграле једначина геодезијских линија, облика

$$\frac{dx^{\alpha}}{d\bar{s}}=\lambda^2 a^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}}$$

ако је

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial\lambda}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}}=0.$$

4.12 ПРИМЕНА НА ДИНАМИКУ КОНЗЕРВАТИВНИХ СИСТЕМА

Кретање неког склерономног конзервативног система може се интерпретирати као кретање по геодезијској линији тачке у $\bar{V}_n$ са акционим линиским елементом. Позната је веза између метричких тензора $a_{\alpha\beta}$; $g_{\alpha\beta}$ простора V_n и $\bar{V}_n$,

$$g_{\alpha\beta} = 2(E-V)a_{\alpha\beta} \tag{4.20}$$

где је E тотална енергија а V потенцијална енергија система а $2T = a_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$ је двострука кинетичка енергија система.

Из

$$2T = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

следи

$$dt^2 = \frac{ds^2}{2T}.$$

Због $T+V=E$ је

$$dt^2 = \frac{ds^2}{2(E-V)}.$$

Како је у $\bar{V}_n$ $d\bar{s}^2 = 2(E-V)ds^2$ следи

$$d\bar{s}^2 = 4(E-V)^2 dt^2.$$

Према томе је

$$\frac{dx^\alpha}{d\bar{s}} = \frac{dx^\alpha}{2(E-V)dt} \tag{4.21}$$

а собзирон на (4.20) имамо да је

(4.22) $$g^{\alpha\beta} = \frac{a^{\alpha\beta}}{2(E-V)} \, .$$

Заменом (4.21 у (4.12) добићемо

$$\frac{dx^{\alpha}}{dt} = 2(E-V)g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}}$$

што собзиром на (4.22) доводи до

(4.23) $$\frac{dx^{\alpha}}{dt} = a^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}} \, .$$

Према томе за конзервативни систем коси се креће са тоталном енергијом E и потенцијалном V енергијом , ако постоји неки потпуни интеграл $\phi(x^1, \ldots x^n; c_1, \ldots, c_n)$ парцијалне једначине

$$a^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}} = 2(E-V)$$

онда постоји потпуни систем првих линеарних интеграла једначина кретања, облика (4.23).

4.2 ИНТЕГРАЛИ УСЛОВЉЕНИ ПОСТОЈАЊЕМ ГРУПЕ ИЗОМЕТРИЈСКИХ ТРАНСФОРМАЦИЈА

Ако су R и $\bar{R}$ две области општег геометријског простора X_n и ако између тачака P и Q области R и $\bar{R}$ постоји једнозначна кореспонденција, онда израз

$$x_Q^i = f^i(x_P) \; ; \; \mathrm{Det}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) \neq 0 \tag{4.24}$$

одређује неку пунктуалну трансформацију, а x_P^i и x_Q^i су координате тачака P и Q .

Посматрајмо сада аналитичку пунктуалну трансформацију (4.24) у Римановом простору V_n са метриком

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \; ; (i,j = 1,2,\dots,n). \tag{4.25}$$

Трансформације (.24(ће тачке x^i области R пресликати у тачке $\bar{x}^i$ области $\bar{R}$ а тачке $x^i + dx^i$ у тачке $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$. Ако је растојање између полазних тачака $x^i + dx^i$ и тачака $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$ увек једнако за све области R и $\bar{R}$ у датом Римановом простору V_n ,трансформација (4.24) се назива изометрија или кретање у том простору.

Ако место коначне трансформације (4.24) посматрамо инфинитезималну трансформацију

$$\bar{x}^i = x^i + \varepsilon \xi^i(x), \tag{.26}$$

превлачењемб из R у $\overline{R}$ метрички тензор ће се променити у

$$(4.27)\qquad \overline{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon \underset{\xi}{\pounds} g_{ij} ,$$

где је $\underset{\xi}{\pounds} g_{ij}$ Лиов извод тензора g_{ij} у пољу вектора ξ^i .При трансформацијама (4.26) имамо да је

$$(4.28)\qquad \begin{aligned} \delta dx^i &= d\delta x^i = \varepsilon \partial_j \xi^i dx^j \\ \delta g_{ij} &= \varepsilon \xi^k \partial_k g_{ij} \end{aligned}$$

па је промена метрике одређена изразом

$$(4.29)\qquad \delta ds^2 = \underset{\xi}{\pounds} g_{ij} dx^i dx^j$$

према томе,
<u>потребан и довољан услов да инфинитезимална трансформација (4.26) представља групу изометрије у Римановом простору V_n јесте да је Лиов извод метричког тензора са обзиром на трансформације (4.26) једнак нули,</u>

$$(4.30)\qquad \underset{\xi}{\pounds} g_{ij} = 2 \nabla_{(i} \xi_{j)} = 0 .$$

Једначине (4.30) називају се Килингове једначине а вектор који задовољава Килингове једначине је је Килингов вектор ξ^i ([4] стр.125).

4.21 ПРИМЕНА НА ДИНАМИКУ КОНЗЕРВАТИВНИХ СИСТЕМА

Кретање склерономног конзервативног система на познат начин сводимо на кретање тачке по геодезијској линији у простору $\bar{V}_n$. Проблем првих интеграла једначина кретања конзервативних система тада је еквивалентан са проблемом одређивања првих интеграла једначина геодезијских линија,

$$(4.31)\qquad \frac{\delta}{d\bar{s}}\frac{dx^i}{d\bar{s}}=\frac{d^2x^i}{d\bar{s}^2}+\bar{\Gamma}^i_{jk}\frac{dx^j}{d\bar{s}}\frac{dx^k}{d\bar{s}}=0.$$

Према једном Ајзенхартовом ставу ([8] стр.129) једначине геодезијских линија (4.31) допуштаће интеграле облика

$$(4.32)\qquad \xi^i_{(\lambda)}\frac{dx_i}{d\bar{s}}=const.$$

ако вектори $\xi_{(\lambda)i}$ задовољавају Килингове једначине (4.30),

$$\nabla_i\xi_j+\nabla_j\xi_i=0.$$

На тај начин је постојање интеграла облика (4.32) линеарних по првим изводима везано за постојање групе изометријских трансформација у $\bar{V}_n$. Како Килингове једначине (4.30) у општем случају допуштају известан број, рецимо r независних решења

$$\xi_{(\lambda)i}\,,\quad \lambda=1,2,\ldots,r>0$$

имамо став:

Ако простор $\bar{V}_n$ допушта r параметарску групу изометрије, онда он допушта и r првих интеграла диференцијалних једначина геодезијских линија, облика (4.32) и обрнуто.

Исто тако можемо рећи:

Систем диференцијалних једначина геодезијских линија у $\bar{V}_n$ не може имати више од r независних првих интеграла линеарних по брзинама, ако је G_r потпуна група изометрије у $\bar{V}_n$.

Интеграли (4.32), узимајући у обзир (4.20) могу се написати у облику линеарном по брзинама

$$\frac{\xi_{(\lambda)i}}{2(E-V)}\frac{dx^i}{dt} = C_{(\lambda)}$$

или

$$\eta_{(\lambda)i}\frac{dx^i}{dt} = C_{(\lambda)}.$$

У раду Р.Стојановића (саопштеном на IV Југословенском конгресу за механику у Опатији 1958 г) показано је да се према особинама групе изометрије G_r коју допушта конфигурациони простор $\bar{V}_n$, могу разликовати три посебна случаја:

1.- Група G_r је просто транзитивна тј. $r = n$ а ранг матрице $|\xi_{(\lambda)i}|$ је такође једнак n.
2.- Група G_r је вишеструко транзитивна тј. $r > n$ а ранг матрице $|\xi_{(\lambda)i}|$ је n ; и
3.- Група G_r је интранзитивна $r \leq n$ а ранг матрице $|\xi_{(\lambda)i}|$ је мањи од n .

У првом случају првих линеарних интеграла има тачно онолико колико систем име степени слободе.
У другом случају је број линеарних независних интеграла(у односу на константне коефицијенте) већи од броја димензија кофигурационог простора.

У трећем случају познато је из теорије група да тада постоји неки $\overline{V}_r$ који је подпростор $\overline{V}_n$, тако да згодним изботом координата у $\overline{V}_n$ група G_r индуцирана на $\overline{V}_r$ постаје транзитивна.

5. ПРОШИРЕЊЕ ЗАКОНА МОМЕНТА КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА НА НЕ-ЕУКЛИДСКЕ ПРОСТОРЕ И ОДГОВАРАЈУЋИ ПРВИ ИНТЕГРАЛИ

У калсичној механици диференцијалне једначине кретања изводе се из два Ојлерова закона и то закона количине кретања и закона момента количине кретања.

Ако је $\vec{v}$ неки вектор дат у тачки одређеној у односу на координатни почетак O вектором положаја $\vec{r}$, момент вектора $\vec{v}$ у односу на тачку O дефинише се векторским производом

$$\vec{r} \times \vec{v}.$$

Ова дефиниција не може се генералисати на не-Еуклидске просторе, пошто је векторски карактер вектора положаја особина само Еуклидових простора. Према томе, други Ојлеров основни закон класичне механике не може се генералисати на не-Еуклидске просторе.

У једном свом раду Р.Стојановић дао је нову формулацију два основна закона у облику који је независан од појма вектора положаја. У тако формулисаном јединственом закону два Ојлерова закона јављају се као специјални случајеви. Одговарајуће диференцијалне једначине кретања јесу скаларне једначине које остају инваријантне при трансформацији координата.

Нека су x^i $(i=1,2,3)$ криволинијске координате у тродимензионом Еуклидовом простору E_3 а нека је g_{ij} основни тензор дефинисан у односу на Једначина

$$(5.1) \qquad \nabla_j \xi_i + \nabla_j \xi_i = 0$$

има у простору E_3 шест независних решења која представљају основне векторе шестопараметарске групе G_6 изометрије датог простора. Три од ових вектора $\xi_{(\lambda')i}$ ($\lambda' = 1,2,3$) јесу основни вектори подгрупе G_3' транслације, док остала три вектора $\xi_{(\lambda'')i}$ ($\lambda'' = 4,5,6$) представљају основне векторе подгрупе G_3'' ротације.

Нека v^i буде вектор у простору E_3, шест инваријаната

$$(5.2)\qquad M_{(\lambda)} \stackrel{def}{=} v^i \xi_{(\lambda)i}$$

назваћемо моментима вектора у односу на почетак (v^i),0.

Ако је v^i вектор брзине $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ тада се може поставити следећи став:

<u>Изводи момента брзине по времену једнаки су моментима убрзања у односу на исти координатни почетак.</u>

Из (5.2) следи

$$\frac{d}{dt}(v^i \xi_{(\lambda)i}) = \frac{\delta v^i}{dt}\xi_{(\lambda)i} + v^i \nabla_j \xi_{(\lambda)i} v^j$$

где је $\frac{\delta}{dt}v^i = a^i$ убрзање.

Из (5.1) видимо да су $\nabla_j \xi_{(\lambda)i}$ координате антисиметричног тензора, па је

$$\nabla_{(j}\xi_{(\lambda)i)} v^i v^j = 0$$

а стога је

$$(5.3)\qquad \frac{d}{dt}(v^i \xi_{(\lambda)i}) = a^i \xi_{(\lambda)i},$$

чиме је теорема доказана.

Ако на материјалну тачку дејствује систем сила $F^i_{(1)}, \ldots, F^i_{(k)}$, резултујући момент ће бити

$$(5.4) \qquad M_{(\Lambda)} = \sum_{\nu=1}^{N} F^{i}_{(\nu)} \xi_{(\Lambda)i}.$$

Може се догодити да неке од ових сила имају моменте једнаке нули у односу на векторе $\xi_{(\Lambda')i}$ транслације, али не и у односу на векторе подгрупе $\xi_{(\Lambda'')i}$ ротације. Такве силе образују спрег. Пошто спрег може бити изражен само својим моментима, то ћемо такве моменте обележити ознаком $L_{(\Lambda)}$, где је $L_{(\Lambda')} = 0$. Означавајући силу са $F^{i} = \sum_{\nu} F^{i}_{\nu}$ а са $L(\Lambda)$ спрег који дејствује на материјалну тачку, укупни момент дат је изразом

$$(5.5) \qquad M_{(\Lambda)} = F^{i} \xi_{(\Lambda)i} + L_{(\Lambda)}.$$

Моменти количине кретања система материјалних тачака чије су масе $m_1, \dots, m_N$ дат је једначином

$$(5.6) \qquad H_{(\Lambda)} = \sum_{\nu} m_{\nu} v^{i}_{\nu} \xi_{(\Lambda)i}$$

док су моменти сила које дејствују на систем дати изразом

$$(5.7) \qquad M_{(\Lambda)} = \sum_{\nu=1}^{N} \left(F^{i}_{\nu} \xi_{(\Lambda)i} + L_{\nu(\Lambda)} \right).$$

Основни закон може се сада изразити у облику

$$(5.8) \qquad \frac{dH_{(\Lambda)}}{dt} = M_{(\Lambda)} \qquad (\Lambda = 1, 2, \dots, 6)$$

У овом облику основног закона садржана су оба Ојлерова закона као специјални случајеви, при чему један одговара векторима транслације са $\Lambda' = 1,2,3$ а други векторима ротације са $\Lambda'' = 4,5,6$.

Једначине кретања у уобичајеном облику добијају се непосредно ако се координатама вектора $\xi_{(\Lambda)i}$ дају конкретни облици које они у E_3 имају.

Кретање склерономног холономног материјалног система са n степени слободе може се увек интерпретирати као кретање једне материјалне тачке у Римановом простору метрике

$$ds^2 = 2T dt^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Једначине кретања су

$$\frac{dv^i}{dt} = Q^i \tag{5.9}$$

где су Q^i координате генералисане силе.

Ако Риманов простор V_n допушта неку r параметарску групу изометрије са основним векторима $\xi_{(\Lambda)i}$, тада ће постојати r скаларних једначина

$$\frac{d}{dt}\left(v^i \xi_{(\Lambda)i}\right) = Q^i \xi_{(\Lambda)i}$$

које одговарају датом кретању и отуда:

Ако су генералисане силе Q^i ортогоналне на неком од основних вектора групе изометрије конфигурационог простора V_n онда сваком вектору одговара по један линеаран први интеграл једначина кретања, облика

$$v^i \xi_{(\Lambda)i} = C_{(\Lambda)} \tag{5.10}$$

$$\Lambda = 1, \dots, r > 0$$

6. НЕКОНЗЕРВАТИВНИ СИСТЕМИ. НЕМОГУЋНОСТ УОПШТЕЊА СТАВА О ИНТЕГРАЛИМА ОБЛИКА 4.1 НА НЕКОНЗЕРВАТИВНЕ СИСТЕМЕ

Диференцијалне једначине кретања склерономног неконзервативног система, могу се на познат начин интерпретирати као кретање тачке у Римановом простору V_n метрике (4.1)

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\left\{{i \atop jk}\right\}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=Q^i \tag{6.1}$$

где су $\left\{{i \atop jk}\right\}$ Кристофелови симболи друге врсте формирани у односу на тензор g_{ij} који је одређен изразом

$$ds^2=2T\,dt^2=g_{ij}dx^i dx^j=g_{ij}T^iT^j dt^2 \tag{6.2}$$

где је $\quad T^i\equiv\dfrac{dx^i}{dt}\equiv v^i.$

Да би доказали да диференцијалне једначине неконзервативног система у Римановом простору не допуштају прве интеграле типа (4,13) линеарне по брзинама, предпоставићемо да се у једначини (6.1) може генералисана брзина изразити у облику

$$\frac{dx^i}{dt}=g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}=T^i. \tag{6.3}$$

Замењујући (6.3) у (6.1) добићемо

(6.4) $$\frac{d}{dt}T^i + \left\{ {i \atop j\,k} \right\} T^j T^k = Q^i$$

Када се изврши назначено диференцирање добија се

$$g^{il} g^{mn} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^l \partial x^n} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^m} + \frac{\partial \phi}{\partial x^m} \frac{\partial \phi}{\partial x^n} g^{pm} \left(\frac{\partial g^{in}}{\partial x^p} + \left\{ {i \atop p\,k} \right\} g^{kn} \right) = Q^i.$$

Израз $\partial_p g^{in} + \left\{ {i \atop p\,k} \right\} g^{kn}$ у загради ове једначине може се заменити са $-\left\{ {n \atop p\,k} \right\} g^{ik}$, што се добија из услова да је коваријантни извод метричког тензора g^{in} у Римановом простору једнак нули, па имамо

$$g^{il} g^{pm} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^l \partial x^p} \frac{\partial \phi}{\partial x^m} - \left\{ {n \atop p\,l} \right\} \frac{\partial \phi}{\partial x^m} \frac{\partial \phi}{\partial x^n} g^{pm} g^{il} = Q^i,$$

или

$$g^{il} g^{pm} \frac{\partial \phi}{\partial x^m} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \phi}{\partial x^p} - \left\{ {n \atop p\,l} \right\} \frac{\partial \phi}{\partial x^n} \right) = Q^i.$$

Израз у загради ове једначине представља коваријантни извод вектора $\partial_p \phi$, па се може написати

(6.5) $$g^{pm} \frac{\partial \phi}{\partial x^m} \nabla_k \frac{\partial \phi}{\partial x^p} = Q_k .$$

Најзад једначина (6.5) своди се на облик

$$\nabla_k \left(g^{pm} \frac{\partial \phi}{\partial x^p} \frac{\partial \phi}{\partial x^m} \right) = 2Q_k$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(g^{pm}\frac{\partial\phi}{\partial x^p}\frac{\partial\phi}{\partial x^m}\right)=2Q_k$$

што собзиром на (6.2) доводи до

$$(6.6)\qquad \frac{\partial}{\partial x^k}T=Q_k.$$

Пошто Q_k није конзервативна сила то је $Q_k\neq\frac{\partial U}{\partial x^k}$ па је релација (6.6) немогућа и следи:

Неконзервативни склерономни системи чије су диференцијалне једначине кретања (6.1) не допуштају прве интеграле облика (6.3) у Римановом простору V_n.

6.1 ИНТЕГРАЛИ УОПШТЕНОГ ЗАКОНА МОМЕНТА КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ЗА НЕКОНЗЕРВАТИВНЕ СИСТЕМЕ И АЈЗЕНХАРТОВ СТАВ О ПРВИМ ИНТЕГРАЛИМА

У генералисаном афином геодезијском простору са коефицијентима повезаности $\overset{\Pi}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ датим у (2.8) једначине

$$\overset{\Pi}{\nabla}_i \xi_j + \overset{\Pi}{\nabla}_j \xi_i = 0 \tag{6.7}$$

називају се квази Килингове једначине, вектори $\xi_{(N)i}$ који задовољавају те једначине називају се квази Килингови вектори ([9] стр. 86).

Показали смо да је за склерономне неконзервативне системе конструисан такав простор са повезаношћу (2.8) у коме се диференцијалне једначине кретања могу написати као диференцијалне једначине геодезијских линија, тј. у облику

$$\frac{\overset{\Pi}{\delta} v^i}{dt} = 0 \quad ; \quad v^i \equiv \frac{dx^i}{dt}. \tag{6.8}$$

Покажимо сада да је на основу (6.7) и (6.8) могуће извршити уопштење Ајзенхартовог става о првим интегралима диференцијалних једначина геодезијских линија и на неконзервативне системе.

Помножимо (6.8) са квази Килинговим векторима $\xi_{(N)i}$

$$\xi_{(\lambda)i}\frac{\overset{\Pi}{\delta} v^i}{dt}=0.$$

Ову једначину написаћемо даље у облику

$$(6.9)\quad \xi_{(\lambda)i}\frac{\overset{\Pi}{\delta} v^i}{dt}=\frac{\overset{\Pi}{\delta}}{dt}(\xi_{(\lambda)i}v^i)-v^i\frac{\overset{\Pi}{\delta}}{dt}\xi_{(\lambda)i}=0.$$

Пошто је

$$\frac{\overset{\Pi}{\delta}}{dt}\xi_{(\lambda)i}=\overset{\Pi}{\nabla}_j\,\xi_{(\lambda)i}v^j,$$

што се замењује у (6.9) и добијамо

$$(6.10)\quad \frac{\overset{\Pi}{\delta}}{dt}(\xi_{(\lambda)i}v^i)-(\overset{\Pi}{\nabla}_i\,\xi_{(\lambda)j}+\overset{\Pi}{\nabla}_j\,\xi_{(\lambda)i})v^iv^j=0.$$

На основу (6.7) једначина (6.10) постаје

$$\frac{\overset{\Pi}{\delta}}{dt}(\xi_{(\lambda)i}v^i)=\frac{d}{dt}(\xi_{(\lambda)i}v^i)=0.$$

Одакле непосредно следи

$$(6.11)\qquad \xi_{(\lambda)i}v^i=C_{(\lambda)}=const.$$

отуда имамо:

Ако квази Килингове једначине (6.7) у Дагласовом

<u>простору допуштају r независних решења $\xi_{(\lambda)i}$ $(\lambda=1,2,\dots,r>0)$ тада и диференцијалне једначине геодезијских линија (6.8) допуштају r независних кваzи линеарних интеграла облика (6.11)</u>.

Интеграли (6.11) нису линеарни по брзинама, пошто у коефицијенте повезаности простора (2.3) улазе и генералисане брзине $\dot{x}^i$, на вектори $\xi_{(\lambda)i}$ садрже у себи већ генералисане брзине.

У овом уопштеном ставу о првим интегралима геодезијских линија неконзервативних система, видимо да се као специјални случајеви садрже и Ајзенхартов став о првим интегралима геодезијских линија Риманових простора V_n и исто тако став о првим интегралима уопштеног момента количине кретања Растка Стојановића.

7. ЈЕДАН КВАДРАТНИ ИНТЕГРАЛ РЕОНОМНОГ СИСТЕМА

Посматрајмо овде реономни систем структуре проучене у § 3. у коме коефицијенти кинетичке енергије не зависе експлицитно од времена и где активне силе имају функцију силе тј.

$$Q_\gamma = \frac{\partial U}{\partial x^\gamma} \tag{7.1}$$

Тада диференцијалне једначине кретања посматраног реономног система (3.25) можемо написати у облику

$$\frac{d}{dt}(g_{\gamma\mu}\dot{x}^\mu) - \left\{ {\lambda \atop \gamma\nu} \right\} g_{\lambda\mu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = Q_\gamma - a_{\varrho\gamma}\dot{x}^\varrho$$

односно

$$\frac{\overset{g}{\delta}}{dt}(g_{\gamma\mu}\dot{x}^\mu) = Q_\gamma - a_{\varrho\gamma}\dot{x}^\varrho \tag{7.2}$$

где је

$$Q_\gamma = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}(U+a) = \frac{\partial U^*}{\partial x^\gamma}.$$

Множећи једначину (7.2) са $\dot{x}^\gamma$ добићемо

$$\dot{x}^\gamma \frac{\overset{g}{\delta}}{dt}(g_{\gamma\mu}\dot{x}^\mu) - \frac{\partial U^*}{\partial \dot{x}^\gamma}\dot{x}^\gamma = -a_{\varrho\gamma}\dot{x}^\varrho \dot{x}^\gamma. \tag{7.3}$$

Како је $a_{\varrho\gamma} = -a_{\gamma\varrho}$ имамо да је

$$-a_{\varrho\gamma}\dot{x}^\varrho \dot{x}^\gamma = 0$$

па се једначина (7.3) своди на облик

$$\dot{x}^\gamma \frac{\overset{g}{\delta}}{dt}(g_{\mu\gamma}\dot{x}^\mu) - \frac{dU^*}{dt} = 0. \tag{7.4}$$

Израз у загради једначине (7.3) можемо трансформисати на следећи начин

$$\dot{x}^{\gamma}\frac{\delta}{dt}\left(g_{\gamma\alpha}\dot{x}^{\alpha}\right)=\frac{1}{2}\frac{\delta}{dt}\left(g_{\gamma\alpha}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\gamma}\right)=\frac{d}{dt}T_0\ ;$$

па се једначина (7,4) може написати

$$\frac{d}{dt}\left(T_0-U^{x}\right)=0,$$

одакле следи

$$T_0-U^{*}=\text{const.} \tag{7.5}$$

пошто је

$$T=T_0+T_1+T_2\ ;\quad U^{*}=U+Q=U+T_2$$

то следи из (7.5)

$$T_0-T_2-U=\text{const}=C$$

или

$$T-U=T_2+C. \tag{7.6}$$

Дакле, реономни систем чија кинетичка енергија има облик (3.19) и активне силе имају функцију силе, допушта један квадратни први интеграл кретања облика (7.6).

Литература

[1]. Yano K. The theory of Lie derivatives and its Applications - Amsterdam 1955

[2] Lichnerowicz A.- Aufenkamp D. Journal of Rational mecanics and Analysis - INDIANA UNIVERSITY - 1952

[3] Brilleuin L. Les Tenseurs en Mecanique et en elasticite Paris - 1946

[4] Стојановић Р. Основи диференцијалне геометрије - Београд 1953 г.

[5] Анђелић Т. Тензорски рачун - Научна књига, Београд 1952 г.

[6] Вујановић Б. Геометризација кретања и поремећаја неконзервативних система - Докторска дисертација 1964 г.

[7] Синг Д. Тензорние методи в динамике (превод са енглеског), Москва 1947 г.

[8] Eisenhart L. Riemannian geometry - Princeton 1949

[9] Јано К. - Бохнер С. Кривизна и числа бети (превод са енглеског), Москва 1947 г.

[10] Eisenhart L. Non-Riemannian geometry - New York 1927

[11] Whittaker E. Analytical Dynamics - New York 1944