Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Master rad

Jednakosti i nejednakosti u prvom razredu gimnazije

Svjetlana Rončević

UVOD

1. O NASTAVI MATEMATIKE

Nastava matematike je aktivan proces u kom učestvuje nekoliko činilaca. Vrijednost obrazovanja zavisi od svih aktera: nastavnih programa, udžbenika , nastavnika, učenika i načina izvođenja nastave.

Preduslov ostvarenja ciljeva nastave matematike u matematičkom obrazovanju je dobra, racionalna organizacija i pravilno odabran način izvođenja nastave, uvažavanje individualnih razlika učenika, redovno praćenje učenikovih aktivnosti.

Rad na nastavnim programima se mora temeljiti na pouzdanim podacima o mogućnostima usvajanja gradiva jer preobiman program, nepravilan raspored gradiva, neusklađenost pojedinih dijelova programa i te kako utiču na napredovanje učenika.Nastavni program bi trebalo da prati udžbenik koji sadrži gradivo predviđeno programom.

Udžbenik utiče na rad nastavnika i učenika. Na nastavnika vrši uticaj u načinu obrade novog gradiva, organizaciji ponavljanja i vježbanja. Ako je udžbenik didaktički neprikladan kod učenika će izazvati negativan stav koji se ogleda u gubitku interesa za učenje matematike. Posljedica rada sa takvim udžbenikom će biti nekvalitetna učenička znanja podložna zaboravljanju.Udžbenik kao nastavno sredstvo i izvor saznanja mora sadržati kvalitetno napisane matematičke sadržaje koji su oblikovani tako da ih učenici mogu usvajati.Udžbenici kojima se mi služimo u nastavi su napisani teško razumljivim stilom, neprilagođeni mogućnostima većine učenika, pretrpani činjeničnim sadržajima .

Veliku odgovornost u nastavi, ima nastavnik koji je organizator i realizator obrazovanja i istovremeno, vaspitanja. Nastavnik mora imati kvalitetno matematičko i metodičko obrazovanje.Takav nastavnik će učenicima prenositi prava, neiskrivljena saznanja, razvijati potpune pojmove o matematičkim pojavama i objektima, osiguraće racionalno izvođenje nastave, primjenjivaće adekvatne metode i oblike rada, pravilno upotrijebiti nastavna sredstva, individualizirati, aktivirati učenike. U suprotnom, nedovoljno stručan nastavnik može izvoditi mehaničke i rutinske aktivnosti bez pravog smisla i značenja i izgraditi formalistička nepovezana znanja.

Drugi, ne manje važan, činilac u nastavi je učenik. Probleme u učenju možemo očekivati ukoliko učenik nema dovoljno matematičkog predznanja, rutine u računskim operacijama, nije usvojio oznake u sadržaju pojma, ako odvaja i usvaja samo govorni ili bilo koji drugi oblik izražavanja (crteži,formule, simboli) od sadržaja. Takav formalistički način učenja ima mnogo negativnih karakteristika jer ta znanja nisu usvojena svjesno, njima se nepravilno izražavaju matematičke zakonitosti, učenici ih ne primjenjuju u praksi a ne pomažu ni daljem matematičkom obrazovanju. Na žalost, praksa je pokazala da su učenici skloni formalističkom znanju.

Mislim da problemi kreću već od osnovne škole, kada se učenici upoznaju sa različitim matematičkim znanjima, koja se prikazuju pomoću matematičkih znakova i skupova znakova što se često usvaja kao oblik, ali ne i sadržaj i strukture koje ih predstavljaju.

Svake godine se povećava broj znakova i simbola pa kontinuirano matematičko obrazovanje u smislu shvatanja matematičkih znakova i simbola i njihovih sklopova dolazi u pitanje.

Formalizam se javlja u mnogim oblastima pa i u rješavanju jednačina i nejednačina.Učenik će formalno riješiti jednačinu ali često neće znati objasniti sadržaj transformacije, niti na kojim zakonitostima se izvršila transformacija.

Moje iskustvo u nastavi je pokazalo začuđujuću činjenicu da se učenici toliko zapliću pri rješavanju linearnih jednačina i nejednačina, izuzetno važnih u nastavi matematike.

Pri obradi jednačina uočila sam gdje učenici najčešće griješe :

U jednačini pišu $\frac{2x-3}{2}=\frac{x+7}{3}=6x-9=2x+14$ - znacima jednakosti se vežu jednačine koje nisu među sobom jednake.

Učenici često zaboravljaju prvu osobinu jednakosti i činjenicu da se jednačina može čitati i zapisati s lijeva na desno i s desna na lijevo.

Recimo, data je jednačina $3+x=2x-1$.

Možemo je čitati i zabilježiti kao $2x-1=x+3$ i takvu rješavati.

Učenici se ne snalaze pri rješavanju jednačine $1-2x=0$, gdje , kako i koji član je promjenio mjesto pri daljem rješavanju $2x=1$?

Karakteristična greška je i rješavanje jednačina oblika $\frac{a(x)}{b(x)}=0$, pri čemu vrlo često stavljaju $a(x)=0$ i $b(x)=0$

U jednačini $\frac{3x+1}{2}-\frac{2-x}{3}=x+1$, množeći sa zajedničkim imeniocem 6, zaboravljaju desnu stranu jednakosti pomnožiti brojem 6 .

Najčešće, učenik ne kontroliše rezultat, zadovoljan je što je dobio odgovor a to što je platio ručak sa 2406 eura ili da deda ima 8 godina može ostati neprimjećeno kao nevjerovatan rezultat.

Pri rješavanju nejednačina oblika $\frac{3x-2}{1+x}\leq 0$, množe nejednačinu sa $1+x$,

i često zaboravljaju uslov $1+x\neq 0$.

Rješavajući nejednačinu $-x\geq 3$, množe sa -1 ali ne mijenjaju znak nejednakosti.

Kako su se ovakvi i slični problemi ponavljali kroz različite generacije, analizirala sam uzroke teškoća i otkrila nedostatak znanja u osnovnim pojmovima, nepoznavanje simbolike, osobina jednakosti i nejednakosti, neutreniranost pri izvođenju operacija, nedovoljnu primjenu stečenog znanja u realnosti.Trudila sam se da nađem način da se prevaziđu navedeni problemi i da se, kao rezultat, dobije svjesno usvojeno i pravilno primjenjeno znanje.

2. JEDNAČINE

2.1. JEDNAKOSTI, IDENTITETI, JEDNAČINE

Jednačine pomažu učenicima da uvide zavisnost između veličina, da izražavaju karakteristike različitih pojava realnog svijeta, uvode nas u oblasti brojeva, uspostavljaju važnu vezu između matematike i drugih nauka.

Pri obradi novog gradiva, učenicima izlažem ponešto iz istorije matematike jer smatram da je važno da učenici čuju koji matematičari su zaslužni za koja otkrića, period (vijek) u kom su živjeli, čak i neku anegdotu. Na pitanje, u kom vijeku je živio Dekart, u prvom razredu , niko mi nije dao odgovor, (ponavlja se kroz generacije) , i uvjerava me u opravdanost izlaganja dijelova istorije matematike.

Metoda za rješavanje jednačina prvog stepena koja se zasniva na osobinama aritmetičkih operacija, razvila se kod različitih naroda u toku niza vijekova. Počeci se javljaju prije 40-50 vijekova kod Egipćana, Vavilonaca, Indijaca.

Diofant (3.vijek), grčki matematičar, ostavio je djelo o aritmetici u kom govori o brojevima, njihovim kvadratima i kubovima, rješavanju jednačina i nejednačina.

Indijska matematika se razvija između V i XII vijeka. Indijci razvijaju algebru, uvode pozitivne i negativne brojeve, i prvi imaju na umu pozitivna i negativna rješenja jednačina.

Arapski matematičar Al Horezmi (780-850.god.) se zove „ocem algebre“ jer je Al Horezmi prvi proučavao algebru u elementarnoj formi.

Zahvaljujući djelu Hisab al džabr we al muqabala, civilizacija je dobila novi pojam „algebra“. Njegova matematika je u potpunosti urađena riječima, bez korištenja simbola.

Al Horezmi koristi linearne i kvadratne jednačine za rješavanje praktičnih problema, različitih vrsta i porijekla.

Način pisanja jednačina kako se nama čini prirodnim je izgrađen u 16. i 17. vijeku.

Fransoa Viete (1540-1603), u svojim radovima, uvodi algebarski metod, slova za označavanje veličina, simboličku algebru. Znak jednakosti i zagrade se upotrebljavaju u 18. vijeku.

Jednačine se uvode u osnovnoj školi rješavanjem na osnovu računskih radnji. Tada se daje pojam jednačine i njenog rješenja, prvo na osnovu zakona matematičkih operacija a zatim putem pronalaženja analogija u strukturi obe strane jednačine i nalaženja rješenja jednačine.

U srednjoj školi se zbog veće matematičke zrelosti, rješavanje izgrađuje po principu ekvivalentnosti i razvija se dublje ideja jednačine.

Mislim da je preduslov za to usvajanje algebarske simbolike.

Njutn u svojoj „Aritmetica universalis“ govori o postavljanju jednačina kao o prevođenju sa jednog jezika na drugi. Postavljati jednačine znači uslove formulisane riječima, izraziti matematičkim simbolima. Teškoće koje se javljaju pri postavljanju jednačine su teškoće prevođenja . Učenici bi trebalo da dobro poznaju oblike matematičkog izražavanja, da stavove izražene riječima, prevedu u stavove izražene matematičkim simbolima, znacima jednakosti i nejednakosti i obratno, da obrasce izraze riječima, da ih interpretiraju, zapažaju izvjesne pravilnosti.

Prilikom provjere znanja učenika o simbolima, uvidjela sam da je izraženo nepoznavanje simbola i njihovog značenja, tako da je vježba za usvajanje simbolike jako korisna za daljnji rad. Za usvajanje simbolike koristim računar i prezentaciju sa vježbama (u početku nastave

prvog razreda gimnazije). Prije izvođenja vježbi, učenicima navedem koje grupe simbola postoje i na primjerima pokažem kako ih koristimo. Zatim u prezentaciju postavim sasvim jednostavne zadatke za usvajanje i vježbanje simbolike.

Zadaci izgledaju ovako:

1. Napiši izraz u kome će biti dvije konstante, jedna promjenjiva i operacije množenja i sabiranja.

2. U datom izrazu $\frac{2x-3z}{5y}$ odredi:

a) sve konstante

b) sve promjenjive

c) operacije zastupljene u izrazu

d) koju vrijednost promjenjiva y ne smije uzeti?

3. Pročitaj značenje

a) $x \in S$ b) $A \subseteq S$

4. Vježba za bilježenje nekih pojmova pomoću slova i obratno, izgovaranje riječima pojma koji je napisan opštim brojevima.

Primjer: 1. Napiši izraz za prirodni broj koji je djeljiv sa pet.

2. Napiši kub nekog cijelog broja

3. $x = 2k, k \in Z$

5. Vježba za zapisivanje algebarskim simbolom matematičkih stavova izraženih riječima.

Primjer: 1. Napiši pravilo za računanje osnovice pravougaonika kada je data površina P i visina h.

2. Za svaki element iz skupa A, postoji u tom skupu tačno jedan element takav da je prvi element jednak dvostrukom drugom.

3. Za svaki prirodni broj x je tačna formula $x \geq 1$

6. Čitanje i interpretacija obrazaca

Ovdje se mogu javiti teškoće u odstupanju reda riječi u rečenici od reda vršenja radnji koji je usvojen u matematici pa treba navići djecu da prilikom prevođenja govornih izraza na matematički jezik preuređuju konstrukciju rečenice da bi ona što jasnije prikazivala sadržaj.

Primjer: 1. $(\forall a \in Z)(\exists! b \in N) a^2 = b$

2. $(\forall x \in N) x > -1$

3. $(\exists! x \in N)(x > 2 \wedge x < 4)$

7. Samostalno sastavljanje obrazaca

Ovdje je važno otkriti proces koji leži u osnovi rješenja pojedinih zadataka istog tipa, a onda da se putem simbolike oformi.

Primjer: 1. Napiši obrazac za aritmetičku sredinu brojeva a, b, c.

2. Napiši obrazac za komplementne uglove

8. Upotreba simbolike u traženju brojne vrijednosti algebarskih izraza za zadane vrijednosti opštih brojeva. Ove vježbe su korisne za ponavljanje aritmetičkih operacija sa cijelim i racionalnim brojevima.

Primjer:1. Ako je, $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{-1}{3}$ nađi vrijednost izraza $4x^2 - xy + 3y^2$

Praksa je pokazala da je svaki simbol najbolje naučiti odmah čim se sretnemo s njim i svjesno se služiti simbolima u svakoj prilici.

JEDNAKOST, IDENTITET

Prije uvođenja jednačina potrebno je posvetiti pažnju jednakosti, identitetu i identičnim transformacijama.

Za dva broja ili izraza možemo reći da su jednaki ako je njihova razlika jednaka nuli.

Posmatranjem sljedećih primjera, učenici će uočiti da se jednakosti dijele na dva tipa: na jednakosti koje su tačne za sve vrijednosti opštih brojeva i na jednakosti koje su tačne samo za određene vrijednosti opštih brojeva. Prve jednakosti nazivamo identitetima a druge jednačinama.

Učenici treba da uoče koje od navedenih jednakosti su tačne za sve vrijednosti ili samo za određene vrijednosti opštih brojeva, ili nisu tačne.

Primjeri: 1. $2 + 3 = 5$ je tačna jednakost

2. $\frac{10}{3 \cdot 4 - 6 \cdot 2} = 10$ je netačna jednakost jer djeljenje nulom nije moguće

3. $a + 5 = 22$ ova jednakost je tačna za $a = 17$ a za svaku drugu vrijednost nije tačna

4. $a + a = 2a$

5. $a(b + c) = ab + ac$ ove jednakosti su tačne za svaku vrijednost a,b,c

6. $a(b + c) = ab + c$ ova jednakost nije tačna po distributivnom zakonu je $a(b + c) = ab + ac$, ali može biti tačna jednakost za $a = 1$ i $c = 0$

7. $\frac{a+b}{a-a}=a$ ova jednakost nije tačna jer $a-a$ je jednako nuli a djeljenje nulom nije moguće.

Učenici mogu uporediti i ove tabele:

1. Ispuni tabelu:

x	-1	0	1	3/2	2	13/4
$x+2$	1	2	3	7/2	4	21/4
$3x-1$	-4	-1	1	7/2	5	35/4

a) Šta primjećuješ posmatrajući tabelu?

b) Za koje vrijednosti x je tačna jednakost $3x-1=x+2$?

c) Kako se zove ova vrijednost broja x?

2. Ispuni tabelu:

m	-1	0	1/2	1
$(m-1)^2$	4	1	1/4	0
m^2-2m+1	4	1	1/4	0

a) Šta primjećuješ posmatrajući tabelu?

b) Za koje vrijednosti je tačna jednakost $(m-1)^2=m^2-2m+1$?

Tabela je indicija ali ne i dokaz identiteta.

Za dva algebarska izraza koji imaju jednake brojne vrijednosti za bilo koje (jednake za oba izraza) vrijednosti, kaže se da su identično jednaki. Jednakosti koje označavaju da su dva algebarska izraza identično jednaka zove se identitet.

Da bi rješavanje jednačina bio svjestan proces potrebno je, posebno, naglasiti identične transformacije i osobine jednakosti. To je jedna od „Ahilovih peta“ većine učenika.

Identična transformacija nekog algebarskog izraza je transformacija tog izraza u drugi koji mu je identično jednak.

Osobine identičnih transformacija:

1. Ako se identično jednakim izrazima doda jedan isti izraz, dobijeni zbirovi su identično jednaki.

Ako je $A=B$, onda je $A+C=B+C$.

2. Ako se identično jednaki izrazi pomnože jednim istim izrazom, dobijeni proizvodi su identično jednaki.

Ako je $A=B$, onda je $AC=BC$.

3. Ako saberemo lijeve (i desne) strane dva identiteta, dobićemo identitet.

Ako je $A = B$, i $C = D$, onda je $A + C = B + D$.

4. Ako pomnožimo lijeve strane dva identiteta i pomnožimo desne strane dva identiteta, dobićemo identitet.

Ako je $A = B$, i $C = D$, onda je $AC = BD$.

Osobine identičnih transformacija učenici mogu uočiti primjenom transformacija na jednakosti.

Primjeri mogu izgledati ovako:

1. $2x - 3 = x$

2. $\frac{3x}{2} = 5$

3. $x + 3 = 2x - 1$, $3x - 2 = x + 2$

4. $3x = 2x + 1$, $\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$

Osnovne osobine jednakosti:

1. Simetričnost jednakosti

Ako je $A = B$, onda je $B = A$.

Prema definiciji iz $A = B$, proizilazi da je $A - B = 0$ pa je prema tome i $B - A = 0$ tj. $B = A$.

2.Tranzitivnost

Ako je $A = B$ i $B = C$, onda je i $A = C$.

Prema definiciji iz $A = B$ proizilazi $A - B = 0$ a iz $B = C$ proizilazi da je $B - C = 0$. Zbir dva sabirka od kojih je svaki jednak nuli je također nula pa je $A - B + B - C = 0$ ili $A - C = 0$, dakle, $A = C$.

3. Ako se lijevoj i desnoj strani jednačine doda (oduzme) isti izraz dobije se jednakost. Neka je $A = B$, dodajmo lijevoj i desnoj strani C, treba dokazati da je $A + C = B + C$.

Iz $A = B$ proizilazi $A - B = 0$ i dalje $A + C - B - C = 0$ tj. $A + C - (B + C) = 0$ pa je $A + C = B + C$.

Izraz C može imati bilo koju vrijednost, ali ne može izgubiti smisao broja, npr. ne možemo dodati razlomak čiji je imenilac jednak nuli.

4. Kada se obe strane jednakosti pomnože istim izrazom, dobijemo opet jednakost.

Neka je $A = B$, i C ma koji broj ili izraz koji ne gubi smisao broja.

Iz $A = B$, proizilazi $A - B = 0$, proizvod svake strane jednačine brojem C jednak je nuli pa je $AC - BC = 0$ i dobijamo $AC = BC$.

Posljedica 1: Dijeljenjem obe strane jednakosti $A = B$ ma kojim brojem (izrazom) koji ne gubi smisao, dobija se jednakost $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$

Neka je $A = B$, množimo sa $\frac{1}{C}$ pri čemu je $C \neq 0$, $A\frac{1}{C} = B\frac{1}{C}$ ili $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$.

Posljedica 2: Množenjem svih članova jednakosti koja sadrži algebarske razlomke, zajedničkim imeniocem, dobija se jednakost koja sadrži samo cijele izraze.

JEDNAČINE

Jednačinom zovemo jednakost koja je tačna kada se na mjestima svih opštih brojeva zamjene neki određeni, posebni brojevi. Ti posebni brojevi koji pretvaraju jednačinu u tačnu jednakost nazivaju se rješenja jednačine (korijeni jednačine).Riješiti jednačinu znači naći sve one brojeve koji kada se zamjene na mjesto opšteg broja daju tačnu jednakost.

Pored definicije jednačine i značenja njenog rješenja, potrebno je da učenici znaju kojem skupu brojeva treba da pripadaju rješenja jednačine. Prilikom izlaganja uvijek naglasim da postojanje ili ne postojanje rješenja može zavisiti ne samo od jednačine nego i od oblasti mogućih vrijednosti rješenja.

Na primjer, jednačina $8x = 50$ nema rješenja u oblasti prirodnih brojeva, jednačina $x^2 = 2$ nema rješenje u oblasti racionalnih brojeva.

Dakle, pored traženja rješenja jednačine, potrebno je insistirati na diskusiji u kojoj se ispituje oblast u kojoj rješenja postoje, u kojoj ih nema, koliko rješenja ima u određenoj oblasti. Ova diskusija mora pratiti rješavanje jednačine, tijesno se prepliće sa rješavanjem i nerazdvojiva je od rješavanja.

Prije uvođenja ekvivalentnih jednačina, navodim jednostavnije primjere rješavanja jednačina $ax = b$, a učenici se uvjeravaju da riješiti jednačinu znači naći sve vrijednosti nepoznate koje pretvaraju jednačinu u tačnu jednakost. Jednačina prvog stepena ima jedno rješenje.

Primjeri: Neka je data jednačina $x + 7 = 12$, rješenje je $x = 5$. Ako na mjesto x stavimo drugi broj, dobijamo netačnu jednakost pa se kaže da broj 5 zadovoljava jednačinu.

Jednakost $7x - 2x = 5x$ je tačna za svaku vrijednost x i čini identitet.

Učenicima se može postaviti pitanje: da li jednačina prvog stepena sa jednom nepoznatom može imati beskonačno mnogo rješenja a da pri tome ne bude identitet?
Da li svaka jednačina ima rješenje?

Uzmimo $x + 2 = x + 7$, ova jednačina, očigledno, nema rješenje jer ne postoji takva vrijednost koja bi zadovoljavala jednačinu. Ako se nepoznatom broju doda 2, i istom broju doda 7, dobijeni zbirovi ne mogu biti isti jer je za ma koju vrijednost, drugi zbir uvijek veći za 5.

Još jedan primjer: nađi visinu pravougaonika sa osnovicom 7/2 čiji je obim dva puta manji od obima kvadrata sa stranicom koja je jednaka visini pravougaonika.

Dakle, osnovica $a = \frac{7}{2}$, iz uslova zadatka je $2(7 + 2x) = 4x$ pa je $14 + 4x = 4x$, odnosno, 14=0. Zaključujemo da ne postoji pravougaonik i kvadrat koji ispunjavaju uslove zadatka.

Prema tome, postoje jednačine koje nemaju rješenje i zovemo ih protivrječnim jednačinama.

Jednostavnije jednačine koristim su za rad učenika na računaru jer su ovakvi časovi dinamični, svi učenici su angažovani i jednačine dobijaju življi, stvarnosti bliži, realniji oblik. Učenicima je važno da uvide gdje je primjena oblasti koju uče, često pitaju „Što mi to treba u životu?“ Gube interesovanje za učenje ukoliko se primjena ili značenje jasno i na primjerima ne naznači.

Ove jednačine su zgodne za sastavljanje obrazaca, postavljanje jednačine prema tekstu, postavljanje problema prema zapisanoj jednačini, provjeru tačnosti jednakosti ali i da se pokaže kako se jednačinama riješavaju različiti problemi, problemi kretanja, račun miješanja, geometrijski problemi.

Učenici kreću od jednostavnijih primjera ka nešto složenijim:

1. Pridruži odgovarajuće jednačine ponuđenim rečenicama:

a) trostruka vrijednost nekog broja uvećana za 7 postaje 25. $1.\ \frac{3x}{7} = 25$

b) sedmina nepoznatog broja umanjena za 3 je 25 $2.\ 3x + 7 = 25$

c) trostruka vrijednost nekog broja umanjena 7 puta daje broj 25. 3. $\frac{x}{7}-3=25$

2. Odredi napamet k, p iz jednačine $i=\frac{ktp}{100}$

3. Napiši rečenicu (problem) za zadanu jednačinu:

a) $6x=30$

b) $3x-5=20$

c) $\frac{x}{3}-1=2$

4. Provjeri tačnost jednakosti

Zadana nepoznata	jednačina	tačnost jednačine
$s=2$	$\frac{16}{s}=3$	$\perp$
$g=3$	$2g=5$	$\perp$
$t=12$	$14-t=2$	$\top$

5. Provjeri da li je zadani broj rješenje jednačine

a) $x=3,\quad 3x-9=0$

b) $t=\frac{-1}{2},\quad \frac{3}{4}-t=\frac{1}{2}$

6. Problem odnosa između brojeva

Stub stoji trećinom svoje dužine u zemlji, polovinom svoje dužine u vodi a 20 cm izviruje iz vode. Kolika je dužina stuba?

7. Problemi kretanja

a) Konjanik treba da stigne pješaka koji je već 7 sati na putu. Koliko će vremena trebati za to ako on na sat prevaljuje 12 km, a pješak 5 km?

b) Putnik pođe na put i prelazi dnevno 30 km. Poslije 6 dana, pođe za njim drugi putnik koji ga stigne za 9 dana hoda. Kojom se brzinom kreće drugi putnik?

8. Geometrijski problemi

a) U jednom trouglu ugao γ je dva puta veći od ugla α, a ugao β iznosi $\frac{3}{4}\gamma$. Koliki su uglovi trougla?

b) Strane pravougaonika se odnose kao 3:5. Umanjimo li kraću stranicu za 1 cm, a dužu za toliko povećamo, tada se površina umanji za 7 cm^2. Kolike su stranice?

9. Račun miješanja

a) ako se pomiješa 5 l vina po cijeni od 6 km sa 7 l vina po cijeni od 8km, koliko će koštati litar mješavine?

b) Mlin ima dvije vrste brašna, od 720 i 480 dinara po kilogramu. Koliko treba uzeti od svake vrste da se dobije mješavina težine 1200 kg čija bi cijena bila 640 dinara po kilogramu?

Rješenja

1. a) i 2. b) i 3. c) i 1.

2. $k = \frac{100i}{tp}$, $k = \frac{100i}{kt}$

3. Na primjer, tekst može biti:

1. Šestostruka cijena čokolade od 100 gr je 30 km, koliko košta 100 gr čokolade?
2. Ako trostruku vrijednost broja umanjimo za 5, dobijemo 20. Koji je to broj?
3. Ako od trećine jabuka oduzmem jednu jabuku, ostaće mi dvije jabuke. Koliko je bilo jabuka?

4. a) $\perp$ b) $\perp$ c) $\top$

5. a) $\top$ b) $\perp$

6. $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 20 = x$

$2x + 3x + 120 = 6x$

$5x + 120 = 6x$

$x = 120cm$

7. a) konjanik je na putu x sati, pješak $x + 7$ sati

$12x = 5(x + 7)$

$12x = 5x + 35$

$7x = 35$

$x = 5$

b) drugi putnik se kreće brzinom od x km na dan, na putu je proveo 9 dana, a prvi putnik 15 dana

$15 \cdot 30 = 9x$

$x = 50km$ na dan

8. a) $\gamma = 2\alpha$, $\beta = \frac{3}{4}\gamma$, $\beta = \frac{3}{4}2\alpha$, $\beta = \frac{3\alpha}{2}$

$\alpha + \beta + \gamma = 180$

$\alpha + \frac{3\alpha}{2} + 2\alpha = 180^0$

$2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360^0$

$9\alpha = 360^0$

$\alpha = 40^0$, $\beta = \frac{3 \cdot 40}{2}$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 2\alpha$, $\gamma = 80^0$

b) $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$

$(b-1)(a+1) = ab - 7$

$\frac{3a}{5} = b$

$\left(\frac{3a}{5} - 1\right)(a+1) = a \cdot \frac{3a}{5} - 7$

$3a^2 - 5a + 3a - 5 = 3a^2 - 35$

$-2a = -30$

$a = 15$

$b = \frac{3 \cdot 15}{5}$, $b = 9$

9. a) mješavina od 5 l i 7 l je 12 l vina

$5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 = 12x$

$86 = 12x$

$x = \frac{86}{12}$

$x = 7{,}16km$

b) $x + y = 1200$

$y = 1200 - x$

$x \cdot 720 + (1200 - x) \cdot 480 = 1200 \cdot 640$

$720x + 1200 \cdot 480 - 480x = 1200 \cdot 640$

$240x = 1200 \cdot 160$

$x = 800, \quad y = 400kg$

Kada se usvoji pojam jednačine, može se preći na dalje uopštavanje.

2.2. EKVIVALENTNE JEDNAČINE

Učenici se dalje upoznaju sa ekvivalentnim jednačinama, definicijom i načinom njihovog dobijanja.

Za dvije jednačine se kaže da su ekvivalentne ako su rješenja prve jednačine istovremeno i rješenja druge a rješenja druge u isto vrijeme rješenja prve.

Na ovim primjerima uočavaju koje su jednačine ekvivalentne a koje ne :

1. Jednačine $x+2=5$ i $3x+5=14$ su ekvivalentne jer svaka od njih ima samo jedno rješenje $x=3$.

2. Jednačine $x+3=8$ i $2x+3=9$ nisu ekvivalentne jer je rješenje prve $x=5$ a druge $x=3$.

3. Jednačine $3x=6$ i $x^2-4=0$ nisu ekvivalentne. Prva ima rješenje $x=2$ a druga $(x+2)(x-2)=0$ ima dva rješenja koja dobijamo iz $x-2=0$ i $x+2=0$, $x=2$ i $x=-2$. Rješenje $x=-2$ ne zadovoljava jednačinu $3x=6$ pa jednačine nisu ekvivalentne.

Poslije kakvih operacija se dobijaju ekvivalentne jednačine? Izuzetno je važno da učenici osvijeste kojim operacijama i na koji način dolazimo do ekvivalentnih jednačina.

1. Zadana je jednačina $A(x)=B(x)$

Dodajmo svakoj strani jednačine m, $A(x)+m=B(x)+m$, gdje je m ma koji broj ili algebarski izraz (cijeli ili racionalni čiji je imenilac različit od nule) dobijene jednačine su ekvivalentne.

Primjer: Data je jednačina $3x=6$. Rješenje jednačine je $x=2$.

Dodajući svakoj strani jednačine razlomak $\frac{1}{x-2}$, dobijamo $3x+\frac{1}{x-2}=6+\frac{1}{x-2}$.

Za $x=2$, razlomak gubi smisao pa se prilikom dodavanja razlomka treba paziti da razlomak ne izgubi smisao za onu vrijednost nepoznate koja zadovoljava datu jednačinu.

Posljedica 1: Ako se od lijeve i desne strane jednačine oduzme izraz m koji ne gubi smisao, dobijamo jednačinu ekvivalentnu datoj.

Posljedica 2: Ako ma koji član prenesemo sa jedne strane na drugu i pri tome promjenimo znak, dobićemo ekvivalentnu jednačinu.

Posljedica 3: Svaku jednačinu možemo dovesti na oblik $P(x)=0$ (dovoljno je sve članove prevesti na lijevu stranu sa suprotnim znakom).

2. Ako svaku stranu jednačine pomnožimo istim izrazom koji nije jednak nuli i koji ne gubi smisao, dobijamo jednačinu ekvivalentnu datoj.

Množenje sa, recimo, $\frac{1}{m}$, m≠0 je dopušteno zbog uslova m≠0 pa $\frac{1}{m}$ ne gubi smisao broja.

Zašto je potreban uslov, ilustrovaće primjer:

Zadana je jednačina $7x=21$ (*). Rješenje ove jednačine je $x=3$: ako se obje strane jednačine pomnože sa 0, dobijamo $7x\cdot 0=21\cdot 0$ (**) , $0=0$ –identitet i imamo beskonačno mnogo rješenja.

Prema tome, (*) ima jedno rješenje a (**) ima beskonačno mnogo rješenja pa nisu ekvivalentne.

Posljedica 1: Dijeljenjem lijeve i desne strane jednačine istim brojem ili izrazom koji nije jednak 0, dobijamo jednačinu ekvivalentnu prvoj.

Primjer: Data je jednačina $3x+15=6x-45$, dijeljenjem svih članova sa 3, prelazimo na njoj ekvivalentnu jednačinu $x+5=2x-15$.

Posljedica 2: Jednačinu sa razlomljenim koeficijentima možemo pretvoriti u ekvivalentnu jednačinu sa cijelim koeficijentima ako svaki član pomnožimo sa najmanjim zajedničkim sadržiocem.

Treba naglasiti da ako su dva razlomka jednaka a brojioci (imenioci) su im jednaki, onda će i imenioci (brojioci) biti jednaki.

Iz $\frac{1-x}{4}=\frac{3}{4}$ ili $\frac{2}{3-x}=\frac{2}{5}$ dobijamo da je $1-x=3$, odnosno, iz druge jednakosti $3-x=5$.

Posljedica 3: Ako svim članovima promjenimo znake, dobijamo ekvivalentne jednačine

Primjer: $B - AX = C$ je ekvivalentna sa $AX - B = -C$ ili $AX = B - C$

Vježbe i zadatke iz ovog dijela zadajem ovim postepenim redoslijedom:

1. $2x + 3x + 4x = 18$ članovi koji sadrže nepoznatu su na jednoj strani
2. $5x + 7x = 8 - 3x + 7$ članovi koji sadrže nepoznatu su na obe strane a poznati članovi su samo na jednoj strani
3. $12x + 9 - 3x = 6 + 2x$ na svakoj strani ima članova sa nepoznatom i slobodnih članova
4. $8(9 - 2x) = 5(3x + 2)$ jednačina sadrži nepoznatu u zagradama
5. $\frac{x}{5} + \frac{3x}{7} - \frac{x}{2} = 9$ jednačina sadrži razlomke sa brojnim imeniocem i nepoznatom u brojiocu
6. $\frac{8 - x}{6} - \frac{5 - 4x}{3} = \frac{x + 6}{2}$ jednačina sadrži brojne imenioce i polinome u brojiocu
7. $\frac{1}{7x} + \frac{3}{x} = \frac{5}{2x} + \frac{9}{28}$ jednačina sadrži nepoznatu u monomu imenioca
8. $\frac{2 + x}{x - 1} - \frac{5}{2(x - 1)} = \frac{8}{3(x - 1)} - \frac{5}{18}$ jednačina sadrži nepoznatu u polinomu imenioca

Posebnu pažnju posvećujem obradi jednačina oblika $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, $P(x)$ i $Q(x)$ cijeli polinomi po x i razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se ne može skratiti.

Množenjem sa $Q(x)$, lijeve i desne strane $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, dobijamo da je $P(x) = 0$.

Jednačine $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ i $P(x) = 0$ su ekvivalentne, za $Q(x) \neq 0$.

Rješenja jednačine $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, ako postoje, moraju zadovoljiti jednačinu $P(x) = 0$ ali to su vrijednosti x za koje je $P(x) = 0$ i koje ne pretvaraju jednačinu $Q(x) = 0$ u nulu.

Kada bi za istu vrijednost x, npr. $x = a$, $P(x)$ i $Q(x)$ bili jednaki nuli, onda bi $P(x)$ i $Q(x)$ imali zajednički djelilac $x - a$ pa bi se razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mogao skratiti, što je protivno pretpostavci.

Kada se dobije vrijednost x iz jednačine $P(x)=0$, učenici se moraju uvjeriti da li te vrijednosti pretvaraju imenilac u nulu.

Samo pod tim uslovom se mogu nađena rješenja jednačine $P(x)=0$ smatrati rješenjem jednačine $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$

Funkcija $y=\frac{x(x-a)}{x-a}$ je određena za sve vrijednosti x osim za $x=a$, za koju imenilac postaje nula i funkcija gubi smisao.

Za sve ostale vrijednosti x, tj. za $x \neq a$ imamo $y=\frac{x(x-a)}{x-a}$

Prema tome, ako isključimo vrijednost $x=a$, jednačine $\frac{x(x-a)}{x-a}=0$ i $x=0$ su ekvivalentne.

Primjeri: 1. $\frac{1}{x-2}=1$

Da bi razlomak bio jednak jedinici, potrebno je da brojilac i imenilac budu jednaki, tj. $x-2=1$ pa je $x=3$. Taj uslov je dovoljan jer $x=3$ ne pretvara imenilac u nulu.

Ovaj zadatak po opštoj metodi bi se radio ovako:

$\frac{1}{x-2}-1=0$, $\frac{1-x+2}{x-2}=0$, $\frac{3-x}{x-2}=0$, $3-x=0$, odavde je $x=3$ a to rješenje ne pretvara imenilac u nulu.

2. $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=0$

$(x-1)(x+1)=0$, $x-1=0$ i $x+1=0$, $x=1$ i $x=-1$

Vrijednost $x=1$ ne može biti rješenje jednačine jer imenilac postaje nula kada se vrijednost $x=1$ uvrsti u jednačinu, pa je rješenje samo $x=-1$.

Drugim načinom:

Za sve vrijednosti $x \neq 1$, razlomak $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ ima vrijednost $x+1$.

Za $x=1$ razlomak $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ gubi smisao. Na taj način $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ i $x+1$ su jednaki za sve vrijednosti različite od jedan.

Ali kako za $x=1$ razlomak $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ gubi smisao, jedan ne može biti rješenje date jednačine.

Jednačinu $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=0$ možemo zamjeniti drugom $x+1=0$ i koja je ekvivalentna prvoj (ako se izuzme $x=1$). Prema tome, $x=-1$.

3. $\frac{(x-1)(x-1)}{x-1}=0$

U oblasti racionalnih brojeva za sve vrijednosti $x \neq 1$ lijeva strana je jednaka $x-1$ i ne postaje jednaka nuli ni za jednu vrijednost $x \neq 1$.

Za $x=1$ lijeva strana gubi smisao.

Jednačine $\frac{(x-1)(x-1)}{x-1}=0$ i $x-1=0$ nisu ekvivalentne, prva gubi smisao za $x=1$ a druga se pretvara u tačnu jednakost.

Prema tome, jednačina $\frac{(x-1)(x-1)}{x-1}=0$ nema rješenja.

2.3. JEDNAČINA PRVOG STEPENA SA JEDNOM NEPOZNATOM I OPŠTIM KOEFICIJENTIMA

Interpretaciju rješenja jednačine prvog stepena u koordinatnom sistemu posebno naglašavam učenicima jer na taj način učenici uviđaju vezu između algebre i geometrije. Zahvaljujući Dekartu i njegovoj metodi koordinata, opšti oblik jednačine sa jednom nepoznatom se zapisuje u obliku $ax+b=0,$ gdje je $a \neq 0.$ Dekart ističe da se $x=\frac{-b}{a}$, rješenje jednačine $ax+b=0,$ može geometrijski predstaviti tačkom T, koja je presjek prave $y=ax+b$ i ose Ox.

Uvođenjem opštih koeficijenata u jednačinu $ax+b=0$ treba naglasiti, pored oblasti mogućih vrijednosti nepoznate, vrijednosti za koeficijente a, b.

Pri rješavanju brojnih jednačina mogući su ovi slučajevi:

a) ako je $a \neq 0$ jednačina ima rješenje,

b) ako je $a = 0$ i $b = 0$ jednačina ima beskonačno mnogo rješenja (jednačina je neodređena),

c) ako je $a = 0$ i $b \neq 0$ jednačina nema rješenja (nemoguća jednačina), jer kada $a \to 0$ razlomak $\frac{b}{a}$ postaje po apsolutnoj vrijednosti veći od ma kog pozitivnog broja.

Kod jednačina koje sadrže parametre, u diskusiji rješenja koja prati rješavanje zadatka, učenici određuju za koje vrijednosti parametara može biti jedno rješenje, za koje beskonačno mnogo rješenja i kada rješenja neće biti .Tako se učenici kroz diskusiju uvjeravaju da riješiti jednačinu koja sadrži parametar znači naći sve te vrijednosti parametara iz zadanog skupa brojeva za koje jednačina ima rješenje i odrediti rješenje jednačine za svaki od nađenih vrijednosti parametara.

Primjeri: 1. $ax - cx = a^2 - c^2$

$x(a-c) = a^2 - c^2$, ako je $a - c \neq 0$,

jednačina ima jedan korijen $x = \frac{(a-c)}{a-c}(a+c)$, $x = a + c$

Za $a - c = 0$, jednačina se pretvara u identitet i ima beskonačno mnogo rješenja.

2. $\frac{a-x}{b} + \frac{b-x}{a} = 2$, jednačina ima smisla za $b \neq 0$, $a \neq 0$

$a(a-x) + b(b-x) = 2ab$

$a^2 - ax + b^2 - bx = 2ab$

$a^2 - 2ab + b^2 = ax + bx$

$(a-b)^2 = x(a+b)$ ako je $a + b \neq 0$, jednačina ima jedno rješenje $x = \frac{(a-b)^2}{a+b}$

Šta će se desiti ako je $a + b = 0$ i ako je $b \neq 0$, $a \neq 0$?

Ako je npr. $a = 1$, $b = -1$ zamjenom u polaznu jednačinu dobijamo $\frac{1-x}{-1} + \frac{-1-x}{1} = 2$ dobijamo netačnu jednakost $-2 = 2$.

3. $\frac{x}{a+b} - \frac{x}{a-b} = \frac{b}{a+b} - \frac{a}{a-b}$ jednačina ima smisla ako je $a + b \neq 0$ i $a - b \neq 0$

$$x\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}\right) = \frac{ab - b^2 - a^2 - ab}{(a+b)(a-b)}$$

$$x\frac{a-b-a-b}{(a+b)(a-b)}=\frac{-a^2-b^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$-2bx=-a^2-b^2$$

$2bx=a^2+b^2$ za $b\neq 0$, rješenje je $x=\frac{a^2+b^2}{2b}$

Za $b=0$ i $a\neq 0$ jednačina nema rješenja

Za $b=0$ i $a=0$ jednačina se pretvara u identitet

4. $ax-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}x+1$

$$2ax-1=3x+2$$

$$2ax-3ax=3$$

$x(2a-3)=3$, za $2a-3\neq 0$, rješenje je $x=\frac{3}{2a-3}$

Ako je $2a-3=0$, $a=\frac{3}{2}$ zamjenom u polaznu jednačinu dobijemo $-\frac{1}{2}=1$, jednakost koja nije moguća. Dakle, rješenje imamo samo za $2a-3\neq 0$, $a\neq\frac{3}{2}$.

2.4. SASTAVLJANJE JEDNAČINA

Samostalno postavljanje zadataka doprinosi shvatanju suštine matematičkih zadataka i predstavlja pravu stvaralačku, kreativnu, produktivnu aktivnost. Sastavljanje zadataka razvija intelektualne sposobnosti učenika, povezuje matematička znanja i vještine sa realnim situacijama.

Međutim, učenici imaju dosta teškoća kada treba po datim uslovima, koji su izraženi riječima, da sastave jednačinu prvog stepena.Da bi uspješno postavljali jednačine,učenici bi trebalo da osvijeste da je potrebno podizati nivo matematičke kulture,dugotrajni rad i vježbanje.

Analizom uzroka otkrila sam sljedeće praznine:

1. učenici ne poznaju matematičku simboliku
2. nemaju navika da sastavljaju algebarske izraze i obrasce

3. ne poznaju zavisnost između operacija i njihovih rezultata

4. ne znaju da pronađu vezu između nekoliko veličina

5. nedostaje im tačnost u bilježenju

Sastavljanje jednačina sa jednom nepoznatom se sastoji iz nekoliko koraka:

1. izbor odnosa koji služi za sastavljanje jednačine

2. izbor nepoznate i uvođenje oznake za nju

3. izražavanje veličina koje ulaze u glavni odnos preko poznatih i nepoznatih veličina

4. sastavljanje jednačine

5. rješavanje jednačine

6. provjera da li korijen jednačine zadovoljava uslove zadatka

Pri rješavanju, (naročito u početku rada na sastavljanju jednačina) sa učenicima analiziram sve ove korake pri rješavanju pojedinačnih zadataka.

U prvom dijelu riješavamo pitanje koja od veličina što ulazi u uslove zadatka je jednaka nekoj drugoj veličini koja stoji sa prvom u međusobnoj zavisnosti.

Dakle, koja su dva broja jednaka (od kojih je jedan označen sa x) prema uslovima zadatka. Svaka jednakost koja se dobije iz uslova zadatka pri pravilnom, logičkom razumijevanju mora dovesti do rješenja pitanja.

Primjer: Podijeli broj 21 na dva dijela, tako da razmjera prvog dijela prema drugom bude $\frac{3}{4}$.

Zadatak sadrži dva odnosa, prvi zbir dva tražena broja je 21, drugi njihov količnik je $\frac{3}{4}$.

1. Uzećemo prvi odnos kao osnovu za sastavljanje jednačine .

Zbir dva tražena broja je 21.

2. Izbor nepoznate

X - veći broj

3. Izražavanje drugih veličina preko nepoznate

$\frac{3x}{4}$ je manji broj, prema drugom odnosu

4. Sastavljanje jednačine

$$X + \frac{3x}{4} = 12$$

5. Rješavanje jednačine

$$X = 12$$

6. Provjera da li rješenje zadovoljava uslove zadatka

$$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}\ ,\quad 9+12=21$$

Izbor glavnog odnosa je najvažnija stavka pri sastavljanju jednačine. Taj odnos unosi red i jasnoću u ponekad, rasplinuti tekst zadatka, daje putokaz i čuva učenike od haotičnih operacija pri izražavanju svih nepoznatih veličina.

Ovaj izbor vrši uticaj na izbor nepoznate i na izražavanje ostalih nepoznatih pomoću nje.

Smatra se da je dobro uzeti traženi broj kao nepoznatu ali ponekad i ne mora biti tako.

Sljedeći primjer to ilustruje.

Primjer: Cifra jedinica dvocifrenog broja je za četiri veća od cifre desetica. Broj je četiri puta veći od zbira svojih cifara. Nađi broj.

Zadatak ima dva odnosa: a) cifra jedinica dvocifrenog broja je za četiri veća od cifre desetica

b) broj je jednak zbiru svojih cifara pomnoženih sa četiri

Uzećemo drugi odnos za osnovu sastavljanja jednačine.

Označimo cifru desetica sa x pa je po prvom odnosu, cifra jedinica $4+x$. Izrazimo pomoću nepoznate broj koji sadrži $4+x$ jedinice i x desetica. Taj broj je $10x+x+4$.

Prema tome, $10x+x+4=(x+x+4)4$

$$11x+4=8x+16$$

$$x=4$$

Cifra desetice je 4, a cifra jedinice je 8 pa je traženi broj 48.

Provjera: cifra jedinica je za 4 veća od cifre desetica 8-4=4. Broj 48 podijeljen sa 12 daje količnik 4.

U ovom zadatku smo za nepoznatu uzeli cifru njegovih jedinica a ne traženi broj.

Pri izražavanju nepoznatih brojeva jednom glavnom nepoznatom, korisno je izvoditi vježbe u kojima se utvrđuje odnos između veličina.

Na primjer:

1. Razmjera dva broja je 2:5. Manji broj je a. Izrazi pomoću njega veći broj. Ako je veći broj b, izrazi pomoću njega manji broj a.

2. Napiši dvocifreni broj ako ima a desetica i b jedinica.

3. Napiši odnos između dvocifenog broja iz prethodnog primjera i dvocifrenog broja sastavljenog od istih cifara ali obrnutim redom.

Praksa je pokazala da nepoznate veličine treba označavati i drugim slovima osim x. Ovo je posebno važno jer prilikom rješavanja jednačina u geometriji, fizici ili hemiji, često se dešava da se učenik ne snalazi ako nepoznata nije označena sa x.

Pomoć u rješavanju mogu biti i ilustracije, skice, crteži .

Provjera rješenja je izuzetno važna jer se pri rješavanju jednačine traže rješenja u određenoj oblasti rješenja.

Učenicima predočavam da se može desiti da prema smislu problema, traženi broj treba da pripada drugoj oblasti brojeva koja je ograničenija od oblasti mogućih vrijednosti rješenja jednačine.Tada treba uzeti ona rješenja koja odgovaraju uslovima zadatka. Ona rješenja koja zadovoljavaju jednačinu ali ne zadovoljavaju uslove zadatka, treba odbaciti. Može se reći da jednačina ima rješenje a problem nema.

Primjer: U jednoj fabrici radi 300 radnika. Broj žena je $\frac{3}{5}$ boja muškaraca. Koliko muškaraca i žena radi u fabrici?

Ako broj muškaraca označimo sa x a broj žena sa $\frac{3x}{5}$, imamo $x+\frac{3x}{5}=300$, odavde je $\frac{8x}{5}=300$, $x=187.5$ ali kako je 187.5 broj muških, a broj muških ne može biti razlomak to znači da broj 187.5 zadovoljava jednačinu a ne zadovoljava uslove zadatka.

Dakle, uvijek treba provjeriti da li je rješenje jednačine u isto vrijeme i rješenje postavljenog zadatka.

Najbolja provjera je još jednom riješiti zadatak ali na drugi način. Dobro je da geometrijski zadatak riješimo i analitički (metodom koordinata) a algebarski zadatak i grafički (takođe metodom koordinata).

Na primjer, rješiti jednačinu $3x-2=6-x$ možemo tako što ćemo nacrtati u koordinatnom sistemu dvije prave $y=3x-2, y=6-x$, naći njihovu presječnu tačku i na taj način doći do rješenja jednačine.

Ako na oba načina dobijemo isti rezultat, sigurno je da smo uradili ispravno zadatak.

Na ovaj način učenik stiče iskustvo u kojim slučajevima jedna metoda ima prednost u odnosu na drugu. Tako riješeni zadaci imaju veliki vaspitni značaj, pored slobode mišljenja , kritičnog provjeravanja, učenici će vršiti i nekoliko nizova operacija a dobijati isti rezultat pa mehanizam rješavanja jednačine neće dominirati nad razumijevanjem suštine pojma jednačine.

Pri izboru zadataka dajem prednost problemima iz života i prirodnih nauka.
Podaci ne treba da budu izmišljeni, brojevi moraju odgovarati stvarnim odnosima veličina.
Izuzetak mogu biti istorijski zadaci (egipatski, kineski, grčki) jer oni imaju originalne zamisli i odražavaju pogled na svijet tih naroda.

3. NEJEDNAČINE

3.1. NEJEDNAKOSTI, NEJEDNAČINE PRVOG STEPENA SA JEDNOM NEPOZNATOM

Učenici su u osnovnoj školi upoznali numeričke jednakosti.
U prvom razredu srednje škole se nastavlja sa daljim upoznavanjem i primjenom u algebri.
Korisno je početi od jednostavnijih nejednakosti.
1. Koje cijele vrijednosti može uzeti x ako je a) $-3 \le x \le 5$, b) $-2.5 < x < -1.7$?
Predstavljanjem na brojnoj osi utvrđujemo vrijednosti za x
2. Nađi sve pozitivne cijele brojeve x ako je $x < 7$.
3. Koji se cijeli brojevi nalaze između brojeva -4 i 1?
Napiši međusobni odnos pomoću znaka nejednakosti i odredi brojeve na brojnoj osi.
Pored definicije nejednakosti (ako dva broja, numerička ili algebarska izraza vežemo znakom nejednakosti dolazimo do nejednakosti), posmatraćemo i ove nejednakosti
a) $(a-b)^2 > 0$, $a \ne b$
b) $x - 3 > 1$
Napravićemo tabele za oba tipa nejednakosti

a)

a	b	$(a-b)^2$
-1	2	9
0	1	1
1	0	1

b)

x	-1	0	2	5	6
$x-3$	-4	-3	-1	2	3

Učenicima postavljam pitanja: *) za koje vrijednosti važe nejednakosti pod a) i b)? *) Uočavaš li razliku između nejednakosti?

Učenici će uočiti da postoje nejednakosti koje (a) su zadovoljene za svaku vrijednost opštih brojeva koji se u njima javljaju (bezuslovne nejednakosti (identične nejednakosti)) i nejednakosti (b) koje su zadovoljene samo za izvjesne vrijednosti opštih brojeva koje se u njoj nalaze (nejednačine).

Upoređujući rješenje jednačine i nejednačine, recimo $2x-3=5$ i $2x-3<5$, učenici mogu uočiti jasnu razliku između njihovih rješenja, i zaključiti da se rješenje jednačine sastoji od konačnog broja vrijednosti nepoznate koje zadovoljavaju jednačinu, a rješenje nejednačine je skup realnih brojeva, za koje nejednačina prelazi u tačnu nejednakost.

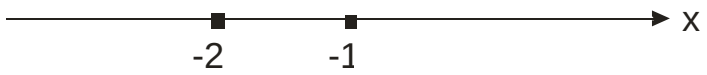
Osnovne osobine nejednakosti

Prije daljneg rješavanja nejednačina, učenike podsjetim na osnovne osobine nejednakosti jer su potrebne za uočavanje odnosa među brojevima, i za rješavanje samih nejednačina.

Neka su a, b, c ma koji brojevi (na osnovu osobina uređenosti skupa racionalnih brojeva) važi:

1. Ako je $a<b$, onda je $b>a$ ili ako je $a>b$, onda je $b<a$ (ako se mijenjaju strane nejednakosti, nejednakost mijenja smisao)

Neka je , na primjer, $a=-2, b=-1$

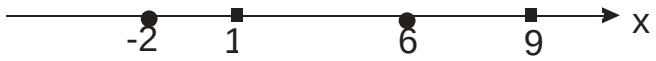


2. Ako je $a<b$ i $b<c$, onda je i $a<c$. Isto tako, iz $a>b$ i $b>c$, slijedi da je $a>c$.

Neka je , na primjer, $a=-3, b=2, c=4$

3. Ako je $a > b$, onda je $a + c > b + c$ $(a - c > b - c)$. Isto tako, iz $a < b$, slijedi $a + c < b + c$ $(a - c < b - c)$ i obratno iz $a + c < b + c$ $(a - c < b - c)$ slijedi $a < b$ ili iz $a + c > b + c$ $(a - c > b - c)$ slijedi $a > b$.

Neka je, na primjer, $a = -2, b = 6, c = 3$



Neka je, na primjer, $a = -1, b = 5, c = -2$

4. Ako je $a > b$, $c > 0$ onda je $ac > bc$, ali ako je $c < 0$ onda iz $a > b$ slijedi $ac < bc$ (ako se obje strane nejednakosti pomnože (podijele) istim brojem, nejednakost ne mijenja ili mijenja svoj smisao prema tome da li je taj broj pozitivan ili negativan.

Neka je , na primjer, $a = 3, b = 1, c = 2$

Neka je, na primjer, $a = 3, b = 1, c = -2$

Iz $ac > bc$, slijedi $a > b$, ako je $c > 0$ i $a < b$ ako je $c < 0$.

Iz $ac < bc$, slijedi $a < b$, ako je $c > 0$ i $a > b$ ako je $c < 0$.

3.2. EKVIVALENTNE NEJEDNAČINE

Kao i kod jednačina, učenici se upoznaju sa ekvivalentnim nejednačinama kao i sa načinom kako se one mogu dobiti .

Za dvije nejednačine kažemo da su ekvivalentne ako je rješenje prve ujedno rješenje i druge nejednačine i obrnuto, ako je rješenje druge nejednačine rješenje i prve .

Na primjer: $2x+3>x+2$ i $2x>x-1$.

Rješenje je $x>-1$ koje je isto tako i rješenje druge nejednačine.

Teoreme koje se zasnivaju na osobinama nejednakosti

Teorema 1: Ako se na obe strane date nejednačine doda (oduzme) isti broj ili racionalni izraz, dobićemo novu nejednačinu ekvivalentnu datoj.

$A(x)<B(x)$ (1)

$A(x)+C(x)<B(x)+C(x)$ (2)

Dokaz: Rješenje nejednačine (1) je i rješenje nejednačine (2). Označimo sa x_0 ma koju vrijednost x koja zadovoljava nejednačinu (1). Pretpostavimo da su za te vrijednosti argumenta definisane funkcije $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ i da su za $x=x_0$ numeričke vrijednosti tih funkcija brojevi a,b,c tj. da je $A(x_0)=a$, $B(x_0)=b$, $C(x_0)=c$.

Pošto je pretpostavljeno da je za $x=x_0$ zadovoljena nejednačina (1), postoji sljedeća nejednakost $a<b$.

Prema osobinama nejednakosti važi $a+c<b+c$ i $a-b<b-c$ (numeričke vrijednosti izraza $A(x)+C(x)$ i $B(x)+C(x)$ i $A(x)-B(x), B(x)-C(x))$ pa je nejednačina (2) zadovoljena za $x=x_0$.

Rješenje nejednačine (2) je i rješenje nejednačine (1).

Označićemo sa x_1 bilo koju vrijednost koja zadovoljava nejednačinu (2).

Ako su a_1,b_1,c_1 numeričke vrijednosti funkcija za $x=x_1$, $A(x_1)=a_1$, $B(x_1)=b$, $C(x_1)=c_1$ onda numeričke vrijednosti nejednakosti za $x=x_1$, jesu brojevi a_1+c_1, a_1-c_1 i b_1+c_1, b_1-c_1.

Nejednakost (2) kaže da su numeričke vrijednosti lijeve strane manje od numeričkih vrijednosti desne strane pa za $x=x_1$, postoji sljedeća nejednakost $a_1+c_1<b_1+c_1$, $a_1-c_1<b_1-c_1$, prema osobinama nejednakosti $a_1<b_1$ pa je nejednačina (1) zadovoljena za $x=x_1$.

Posljedice teoreme 1: Dva člana sa istim znacima se poništavaju ako se nalaze na različitim stranama nejednačine.

Članovi nejednačine se mogu prenositi sa jedne strane na drugu ako im se znaci promjene.

Teorema 2: Ako se obe strane date nejednačine pomnože (podijele) sa istim pozitivnim brojem, dobiće se ekvivalentna nejednačina.

$A(x) < B(x)$ (1)

$CA(x) < CB(x)$ (3)

Dokaz: Rješenje nejednačine (1) je i rješenje nejednačine (3).

Označimo sa $x = x_0$ ma koju vrijednost za koju je zadovoljena nejednačina (1) i a,b numeričke vrijednosti lijeve i desne strane nejednačine (1) tj. $A(x_0) = a$, $B(x_0) = b$. Nejednačina (1) kaže da za $x = x_0$ mora biti $a < b$.

Ako je $c > 0$, prema osobinama nejednakosti slijedi $ac < bc$.

ac, bc su numeričke vrijednosti lijeve i desne strane nejednakosti (3) za $x = x_0$, pa je za $x = x_0$, zadovoljena nejednačina (3).

Rješenja nejednačine (3) su rješenja nejednačine (1).

Označićemo sa $x = x_1$, ma koju vrijednost x za koju je zadovoljena nejednačina (3) a sa ca_1 i cb_1 numeričke vrijednosti lijeve i desne strane te nejednačine.

Nejednačina (3) kaže da će i za $x = x_0$ važiti nejednakost $ca_1 < cb_1$. Prema osobinama nejednakosti, odavde je za $c > 0$, $a_1 < b_1$ gdje su a_1, b_1 numeričke vrijednosti nejednačine (1) za $x = x_1$, pa je nejednačina (1) zadovoljena za $x = x_1$.

Šira formulacija ove teoreme bi značila da se obe strane nejednačine mogu pomnožiti sa racionalnim izrazom $C(x)$ (za one vrijednosti x za koje izraz $C(x)$ ima pozitivne numeričke vrijednosti), $A(x)C(x) < B(x)C(x)$.

Posljedica teoreme 2: Ako obe strane nejednačine sadrže pozitivan množilac, onda se sa njim može podijeliti svaka strana nejednačine.

Teorema 3: Ako se obe strane date nejednačine pomnože (podijele) jednim negativnim brojem (izrazom čije su numeričke vrijednosti negativne) i promijeni se smisao nejednačine, dobija se nova ekvivalentna nejednačina.

Dokaz kao u prethodnom teoremu.

Posljedica: Ako se obe strane nejednačine pomnože sa -1, mora joj se promijeniti smisao.

3.3. RJEŠAVANJE LINEARNIH NEJEDNAČINA SA JEDNOM NEPOZNATOM

Svaka linearna nejednačina se može dovesti na oblik $ax+b>0$ $(ax+b<0)$.

Pretpostavimo da je $a \neq 0$ (ako je $a=0$ nejednačina bi prešla u numeričku nejednakost $b>0$)

Ako je $a>0$ dobija se nova ekvivalentna nejednakost $x>\frac{-b}{a}$

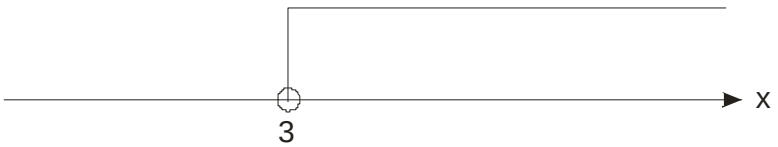
Ako je $a<0$ dobija se nova ekvivalentna nejednakost $x<\frac{-b}{a}$

Krećemo od osnovnih primjera rješavanja nejednačina

1. Riješi nejednačinu $5x-2>2x+7$

Ako objema stranama dodamo izraz $-2x+2$ dobićemo (prva osobina nejednakosti) $5x-2+(-2x+2)>2x+7+(-2x+2)$, $5x-2x>7+2$, odavde se vidi, kao i kod jednačina da se pojedini članovi mogu prenijeti sa jedne strane na drugu pošto im se promijeni znak.

$3x>9$, obe strane podijelimo sa 3 (druga osobina nejednakosti) i dobijamo $x>3$.



1a) Riješi nejednačinu $6x-3<3(2x+1)$

$$6x-3<6x+3$$

$$6x-6x<3+3$$

$$0<6$$

Ova nejednačina je tačna za sve vrijednosti iz skupa realnih brojeva, pa rješenje zapisujemo ovako $x \in R$

1b) Riješi nejednačinu $\frac{2x-1}{2}>\frac{3x+5}{3}$

$$6x-3>6x+10$$

$$6x-6x>10+3$$

$$0>13$$

Ova nejednakost nije tačna, pa je skup rješenja prazan skup. Bilježimo to na ovaj način: $x \in 0$.

2. Iz nejednačine $2\left(x-\frac{1}{3}\right)-1>3\left(x-\frac{1}{4}\right)+3$, naznačenim množenjem dobijamo

$$2x-\frac{2}{3}-1>3x-\frac{3}{4}+3$$

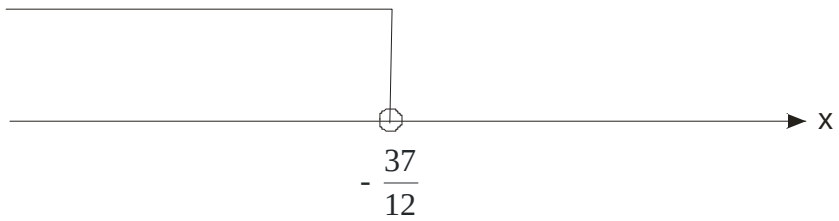
Kad pomnožimo obe strane zajedničkim imeniocem 12 (druga osobina), dobijamo

$$24x-8-12>36x-9+36$$

$$24x-36x>12+8-9+36$$

$$-12x>37$$

dijeljenjem obje strane sa -12, mijenjamo smisao znaka nejednakosti pa je $x<\frac{-37}{12}$.



Dakle, nejednačine se transformišu kao i jednačine, jedino se pri množenju ili dijeljenju negativnim brojem mijenja smisao nejednakosti. Prema tome, ako je potrebno da se promijeni znak članova u nejednačini, pomnožićemo je sa -1.

3. U nejednačini se mogu naći i neki opšti brojevi (parametri)

$$3ax+2b>a(2x-b)+b(a+4)$$

$$3ax+2b>2ax-ab+ab+4b$$

$$3ax-2ax>4b-2b$$

$$ax>2b$$

Razlikujemo ove slučajeve:

a) ako je $a>0$, rješenje nejednačine će biti $x>\frac{2b}{a}$

b) ako je $a<0$, rješenje nejednačine će biti $x<\frac{2b}{a}$

c) ako je $a=0$, imamo $0\cdot x>2b$ što je zadovoljeno za svako x, ako je $b<0$, a ni za jedno x ako je $b>0$.

4. Za koje vrijednosti parametra a jednačina ima pozitivna, odnosno negativna , rješenja.

$x+\frac{2x}{a+1}=1+\frac{a(x+1)-2}{a+1}$ pod uslovom da je $a+1\neq 0$, $a\neq -1$ jednačina ima rješenje

$$x(a+1)+2x=a+1+a(x+1)-2$$

$$ax+x+2x=a+1+ax+a-2$$

$$ax+3x=2a+ax-1$$

$$3x=2a-1$$

$$x=\frac{2a-1}{3}$$

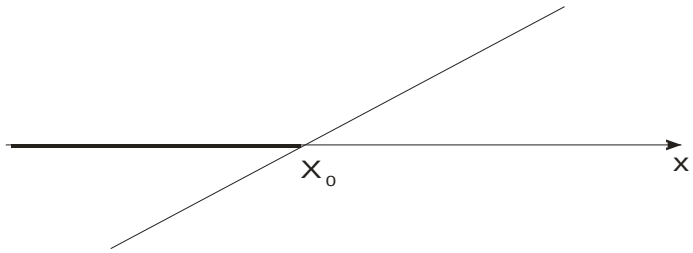
Za $2a-1>0$, $a>\frac{1}{2}$ rješenja će biti pozitivna a za $2a-1<0$, $a<\frac{1}{2}$ rješenja će biti negativna.

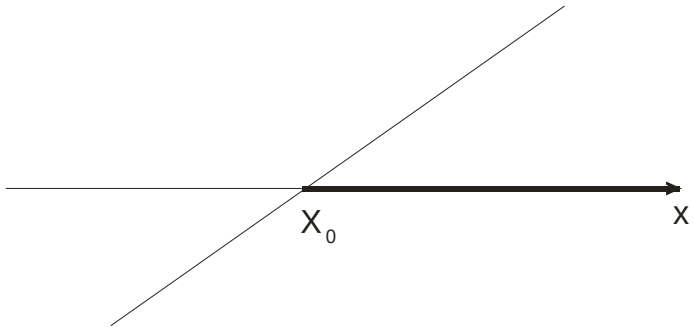
3.4. GRAFIČKO RJEŠAVANJE LINEARNIH NEJEDNAČINA

Grafičko rješavanje nejednačina pomaže u prihvatanju i razumijevanju nejednačina i sistema nejednačina. Grafički riješiti nejednačinu $ax+b>0$, znači nacrtati pravu, grafik funkcije $y=ax+b$, odrediti nulu $x=\frac{-b}{a}$. Rješenje date nejednačine biće sve one vrijednosti x koje su apscise svih tačaka grafika čije su ordinate pozitivne $y>0$ ili $ax+b>0$. Takve vrijednosti se nalaze desno ili lijevo od nule funkcije, što zavisi od toga da li je parametar a pozitivan ili negativan.

Da bismo riješili $ax+b<0$, nacrtaćemo pravu i odrediti nulu. Rješenje nejednačine biće sve one vrijednosti x koje su apscise svih tačaka grafika čije su ordinate $y<0$ ili $ax+b<0$. Takve vrijednosti se nalaze lijevo ili desno od nule funkcije, što zavisi od toga da li je a pozitivno ili negativno.

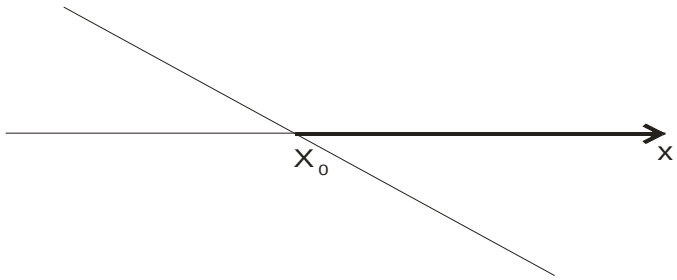
$ax+b<0,\ a>0$

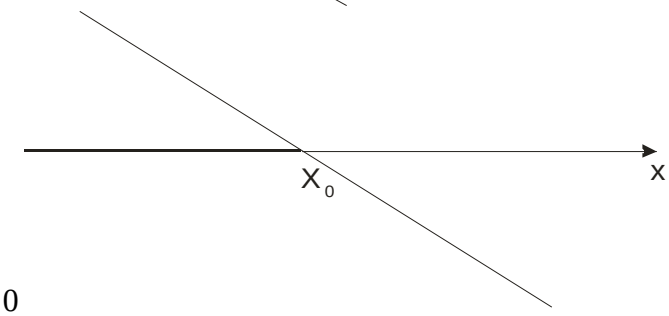




$ax+b>0,\ a>0$

$ax+b>0,\ a<0$





$ax+b<0,\ a<0$

Moje iskustvo pri obradi nejednačina je pokazalo da učenici dobro reaguju na grafičko rješavanje nejednačina, da brzo prihvataju taj način prikazivanja funkcija i traženja rješenja.

3.5. RJEŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH NEJEDNAČINA

Sljedeća stepenica je rješavanje sistema linearnih nejednačina.

Svaki sistem od dvije linearne nejednačine se može dovesti na oblik $ax+b<0$ i $a_1x+b_1<0$ ili $ax+b>0$ i $a_1x+b_1>0$ gdje su a_1, b_1, a, b dati brojevi.

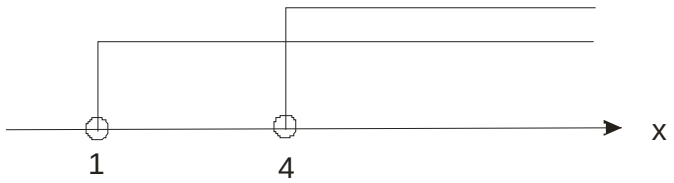
Svaku nejednačinu rješavamo a rješenje sistema će biti one vrijednosti x koje pripadaju rješenju prve i druge nejednačine sistema. Ako rješenja nejednačina nemaju takvih zajedničkih vrijednosti x, onda kažemo da sistem nema rješenja.

Primjeri:

1. $2(x+1)-3>3+x$ i $2(x-2)+1<3(x-1)-1$

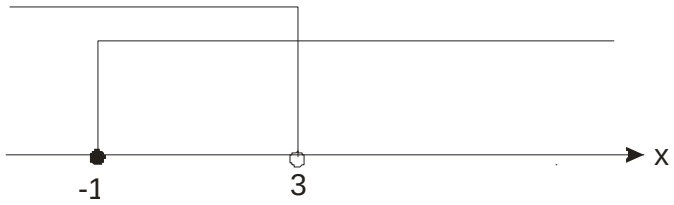
$$2x+2-3>3+x \qquad 2x-4+1<3x-3-1$$
$$2x-x>3+1 \qquad 2x-3x<3-4$$
$$x>4 \qquad -x<-1$$
$$x>1$$

Rješenje sistema je $x>4$ (brojevi koji su veći od 4 su sigurno veći i od 1), $x\in(4,\infty)$



2. $\frac{x-1}{2}+1\geq\frac{x+1}{3}$ i $\frac{2(x-3)}{3}+\frac{1}{2}<\frac{x-1}{4}$

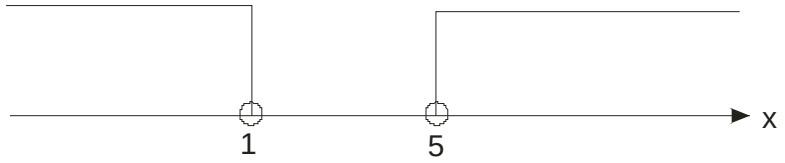
Dobićemo za prvu nejednačinu $x\geq-1$ a za drugu $x<3$. Nejednačine su zadovoljene za sve brojeve između -1 i 3, $x\in[-1,3)$



3. $4(x-1)+1>2(x-3)+13$ i $\frac{x}{2}+\frac{1}{3}<\frac{x}{5}+\frac{19}{30}$

Rješavanjem prve nejednačine dobijamo $x>5$ a iz druge $x<1$.

Ne postoji broj veći od pet a manji od jedan, $x\in 0$



4. Koje uslove treba da zadovolji parametar m da bi jednačina $m(x-2)+x+1=0$ imala rješenje manje od 1?

$m(x-2)=-x-1$

$mx-2m=-x-1$

$mx+x=2m-1$

$x(m+1)=2m-1$

$x=\dfrac{2m-1}{m+1}$, prema uslovu zadatka treba riješiti nejednačinu

$\dfrac{2m-1}{m+1}<1$

$\dfrac{2m-1}{m+1}-1<0$

$\dfrac{2m-1-m-1}{m+1}<0$

$\dfrac{m-2}{m+1}<0$ ovoj nejednačini odgovara sljedeći sistem nejednačina:

a) $m-2>0$ i $m+1<0$ b) $m-2<0$ i $m+1>0$

Za sistem pod a) je $m>2$ i $m<-1$ a za sistem pod b) je $m<2$ i $m>-1$.

U sistemu a) $m\in 0$ a za sistem pod b) $-1<m<2$

Dakle, jednačina ima rješenja manja od jedan kada se parametar m nalazi između -1 i 2,

$m\in(-1,2)$

5. Nejednačina oblika $(x-2)(x-3)>0$ (1) se svodi na rješavanje sistema nejednačina.

Nejednačina će biti zadovoljena za one vrijednosti x koje zadovoljavaju istovremeno obe nejednačine

a) $x-2>0$ i $x-3>0$ ili b) $x-2<0$ i $x-3<0$

$x>2$ i $x>3$ ili $x<2$ i $x<3$

odavde je $x>3$ ili odavde je $x<2$

Rješenje polazne nejednačine je $x<2$ ili $x>3$, $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

Iz mog iskustva u radu sa učenicima, pokazalo se da učenici bolje reaguju na tabelarni način rješavanja nejednačina oblika $AB < 0$, $(AB > 0)$ i $\frac{A}{B} < 0$, $(\frac{A}{B} > 0)$.

x	$(-\infty,2)$	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
$x-2$	-	+	+
$x-3$	-	-	+
$(x-2)(x-3)$	+	-	+

$x \in (-\infty,2) \cup (3,+\infty)$

6. U funkciji $(m+1)x - y(m-2) + 3m - 4 = 0$ nađi parametar m, tako da funkcija bude opadajuća.

Funkciju prebacimo u eksplicitni oblik $y = \frac{m+1}{m-2}x + \frac{3m-4}{m-2}$, funkcija $y = kx + n$ je opadajuća ako je $k < 0$ pa prelazimo, po uslovu, na nejednačinu $\frac{m+1}{m-2} < 0$.

Nejednačina će biti zadovoljena za one vrijednosti x koje zadovoljavaju istovremeno

a) $m+1 < 0$ i $m-2 > 0$ ili b) $m+1 > 0$ i $m-2 < 0$

$m < -1$ i $m > 2$ $\qquad$ $m > -1$ i $m < 2$

odavde je $m \in 0$ ili $-1 < m < 2$

Dakle, funkcija je opadajuća za vrijednosti parametra $-1 < m < 2$.

Tabelom, rješenje bi izgledalo ovako

m	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$m+1$	-	+	+
$m-2$	-	-	+
$\frac{m+1}{m-2}$	+	-	+

$m \in (-1,2)$

7. Riješi tabelarno nejednačinu $\frac{2x}{3-x} \leq 1$

$$\frac{2x}{3-x}-1\le 0$$

$$\frac{3x-3}{3-x}\le 0,\ x\ne 3$$

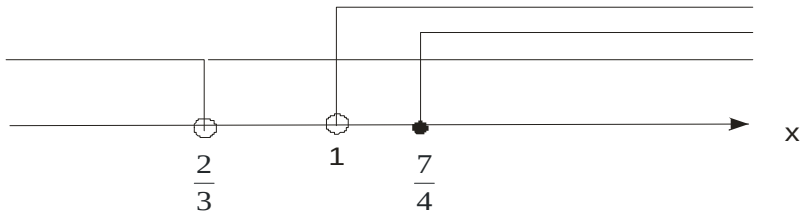
x	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$3(x-1)$	-	+	+
$3-x$	+	+	-
$\frac{3(x-1)}{3-x}$	-	+	-

$$x\in(-\infty,1]\cup(3,+\infty)$$

8. Za koje vrijednosti parametra b je tačna nejednakost $2\le\frac{2b+3}{3b-2}<5$?

Ovu nejednakost bi razdvojili na dvije nejednakosti $2\le\frac{2b+3}{3b-2}$ i $\frac{2b+3}{3b-2}<5$,

našli rješenja za obe nejednačine, presjecanjem ta dva dobijena intervale, dobili bismo interval koji je rješenje polazne nejednakosti, $b\in\left[\frac{7}{4}.+\infty\right)$



3.6. BEZUSLOVNE NEJEDNAKOSTI

Pošto su ranije definisane bezuslovne nejednakosti, učenike je dobro upoznati sa aritmetičkom, geometrijskom, harmonijskom sredinom kao primjerima bezuslovnih nejednakosti, i njihovim osobinama.

Skup Q ima značajnu osobinu- gustinu racionalnih brojeva. Ovu osobinu nemaju ni prirodni ni cijeli brojevi.

Između ma koja dva racionalna broja postoji neograničeno mnogo racionalnih brojeva, što nije slučaj sa prirodnim i cijelim brojevima.

1. Pokaži da se između ma koja dva racionalna broja a, b, $a < b$ uvijek nalazi njihova aritmetička sredina tj. da važi nejednakost $a < \frac{a+b}{2} < b$ za svaki racionalni broj a, b.

Polazeći od pretpostavke $a < b$, dodamo na obe strane a, a onda i b i dobijamo dvije nejednakosti

$a + a < a + b$ i $a + b < b + b$ ili $a < \frac{a+b}{2}$ i $\frac{a+b}{2} < 2$, iz kojih dobijamo $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Još razmatramo da $a < b$ povlači $a \leq b$ a odavde $a + a \leq a + b$, ako bi ovdje važila jednakost onda bi bilo da je $a = b$ što nije tačno.

2. Pokaži da se između dva ma koja broja a,b, $a < b$, istog znaka, uvijek nalazi njihova geometrijska sredina tj. da je zadovoljena nejednakost $a < \sqrt{ab} < b$ za svaki broj a,b, istog znaka.

Polazeći od pretpostavke $a < b$, i $a > 0$, $b > 0$ množimo obe strane te nejednakosti jedanput sa a, a drugi put sa b, i dobijamo nejednakosti $a^2 < ab$ i $ab < b^2$ ili $a < \sqrt{ab}$ i $\sqrt{ab} < b$, kojima se dokazuje da je $a < \sqrt{ab} < b$.

3. Za proizvoljne brojeve $a \geq 0$ i $b \geq 0$ važi nejednakost $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

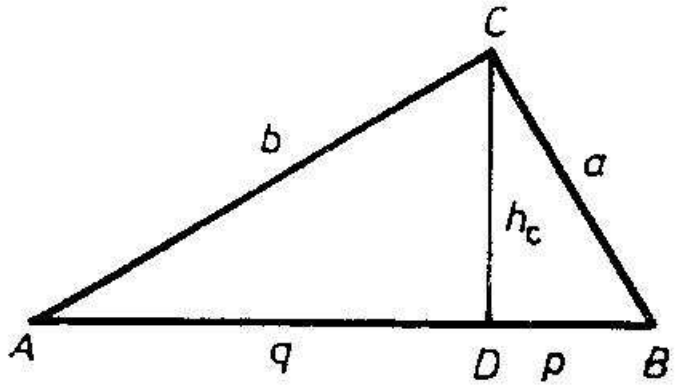
Jednakost važi ako i samo ako je $a = b$.

U dokazu polazimo od nejednakosti $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, kvadriranjem dobija se

$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, ako se na obje strane doda $2\sqrt{ab}$ a zatim podijeli sa 2, dobija se tražena nejednakost.

Geometrijska interpretacija geometrijske sredine se može pokazati na pravouglom trouglu.

U svakom pravouglom trouglu važi da je hipotenuzina visina geometrijska sredina odsječaka koje sama odsijeca na hipotenuzi.



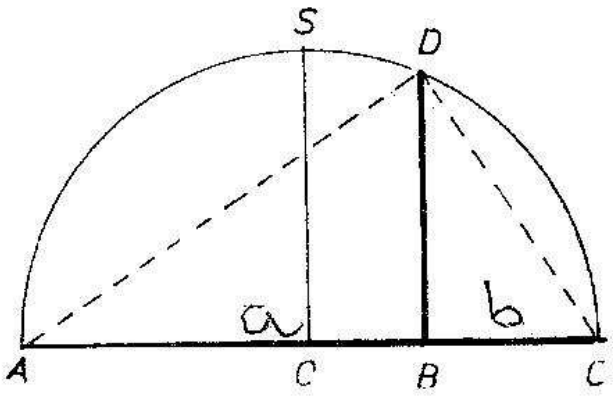
Neka su p i q odsječci koje određuje visina CD na hipotenuzi, $p+q=c$.

Trougao ACD je sličan trouglu CBD, jer je $\angle BAC = \angle BCD$ (uglovi sa normalnim kracima) i $\angle ADC = \angle BDC = 90^0$. Iz te sličnosti imamo $\frac{q}{h} = \frac{h}{p}$, odnosno $h^2 = pq$.

Kako možemo konstruisati geometrijsku sredinu datih duži a, b?

Duž $AB = a$, $BC = b$. Tražena duž je visina BD. Koristimo činjenicu da je ugao nad prečnikom prav.

Poluprečnik je OS, $OS = \frac{1}{2}AC$ a $AC = a+b$ pa je $OS = \frac{1}{2}(a+b)$. Ovdje se vidi odnos aritmetičke i geometrijske sredine jer poluprečnik OS je veći ili jednak BD ($OS = BD$ ako je $a = b$ po 4)).



4. Pokaži da je sljedeća dvostruka nejednakost $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ zadovoljena za svaki pozitivan racionalan broj a i b, $a \neq 0, b \neq 0$.

Krenimo od nejednakosti $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$ (#) kada je $ab \neq 0$ i $a+b \neq 0$ i pomnožimo je jednom sa $\frac{2ab}{a+b} > 0$ (pretpostavka je da je $a,b > 0$) i drugi put sa $\sqrt{ab} > 0$, dobićemo

$$\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 < \sqrt{ab}\,\frac{2ab}{a+b}$$

I $\frac{2ab}{a+b} < \left(\sqrt{ab}\right)^2$ iz kojih slijedi nejednakost ekvivalentna sa (#)

$$\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 < \left(\sqrt{ab}\right)^2 \quad \text{ili} \quad \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} < ab$$

Pošto je $ab > 0$, posljednja nejednakost se može zamijeniti sa $\frac{4ab}{(a+b)^2} < 1$

$$4ab < (a+b)^2$$

$$(a+b)^2 - 4ab > 0, \quad (a-b)^2 > 0$$

Posljednja nejednakost je zadovoljena za svako a i b pa i onda kada su a i b veći od nule. Pod ovim uslovima je posljednja nejednakost ekvivalentna (#)

Iz nejednakosti $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ (##) pretpostavljajući da je $a+b > 0$, $\sqrt{ab > 0}$ slijede ove nejednakosti:

$$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} < 1 \quad , \quad \frac{2\left(\sqrt{ab}\right)^2}{a+b} < \sqrt{ab}$$

$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$ tj. nejednakost (##) je ekvivalentna sa (#) i ima ista rješenja kao i nejednakost (#) tj. zadovoljena je za svako $a,b > 0$ i $ab \neq 0$.

Dakle, za ma koje pozitivne racionalne brojeve, geometrijska sredina se nalazi između harmonijske i aritmetičke sredine.

ZAKLJUČAK

Proučavanje jednačina, u nastavi matematike, zauzima izuzetno važno mjesto. Jednačine pomažu učenicima da uvide zavisnost između veličina, da izražavaju karakteristike različitih pojava realnog svijeta, uvode nas u oblast brojeva, predstavljaju važnu vezu između matematike i drugih nauka.

U početku mog rada sa učenicima, nisam očekivala teškoće u obradi jednakosti i nejednakosti. Vremenom sam uočila da postoje problemi, na dubljem nivou, pri rješavanju jednačina i nejednačina. Kako su se to ponavljalo kroz različite generacije, nastojala sam da shvatim u čemu je problem, i da pokušam naći način da se teškoće prevaziđu s obzirom na značaj jednačina i nejednačina.

Analizirala sam uzroke teškoća i otkrila nedostatak znanja u osnovnim pojmovima, nepoznavanje simbolike, osobina jednakosti i nejednakosti, neutreniranost pri izvođenju operacija, nedovoljnu primjenu stečenog znanja u realnosti.

Trudila sam se da nađem način da se prevaziđu navedeni problemi i da se, kao rezultat , dobije svjesno usvojeno i pravilno primjenjeno znanje.

U ovom radu sam ukazala na mjesta gdje postoje problemi u pravilnom prihvatanju i rješavanju jednakosti i nejednakosti, načine na koje ih pokušavam prevazići, i kako dobiti dobru reakciju učenika.

Radeći i proučavajući jednačine i nejednačine, učenici će se osposobiti za kritičko prosuđivanje, usvajanje orijentacije i argumentacije, za matematiziranje i algoritmiranje pri rješavanju problema u realnosti.

S obzirom na ogroman značaj ove matematičke cjeline, potrebno je potpuno se posvetiti obradi jednakosti i nejednakosti, dati dobar temelj, već u prvom razredu, daljem matematičkom obrazovanju.

Shvatila sam da učenici imaju i dosta predrasuda vezanih za njihove mogućnosti i sposobnosti učenja matematike.

Praksa, a i nauka, su pokazale da matematika nije dostupna samo izrazito nadarenoj djeci i da potpuno nesposobnih, za učenje matematike, nema.

Sovjetski psiholog V.A. Krutecki smatra da je, u psihičkom pogledu zdrav i normalan učenik, sposoban da manje ili više savlada, u dobro organizovanoj nastavi, predviđeni program matematike.

Nastojim da učenici razumiju i prihvate da će se ulaganjem vremena, napora i strpljenja, znanje graditi organizovano i sistematski, i kasnije kvalitetno produbljivati i nadograđivati. Na taj način će se i intelektualne sposobnosti učenika razvijati u onoj mjeri koliko sam učenik dopusti.

LITERATURA:

CHARLES H. BUTLER,F.LYNWOOD WREN:The teaching of secondary mathematics,Michigan University,1960.g.

GEORG POLYA:How to solve it,Princeton,1954.g.

S.S.BRONŠTEЙN:Algebra i eë prepodavanie v semiletneй škole,Moskva,1946.g.

V.MROČEKЬ I F.FILIPPOVIČЬ:Pedagogika matematiki,Moskva,1930.g.

IVAN M. BANDIĆ I DRAGIŠA A.STEVANOVIĆ:Algebra,Beograd,1956.g.

BORIVOJE N.RAŠAJSKI:Algebra za prvi razred gimnazije,Beograd,1965.g.

FADILA ARNAUTOVIĆ:Radna osnova nastave matematike,Sarajevo,1968.g.

MARKO OBRADOVIĆ:Opća metodika nastave matematike,Zagreb,1998.g

PREDRAG I VERICA RADOJEVIĆ:Metodika nastave matematike,Beograd,1987.g.

Ž.IVANOVIĆ I R.PETROVIĆ:Nejednakosti,o nekim metričkim osobinama tetraedra,Beograd,1981.g.

IGNACIJE SMOLEC:Kako da učim matematiku,Zagreb,1964.g.

JOSIP MARKOVAC:Neuspjeh u nastavi matematike,Zagreb,1978.g.

B.A.KRUTECKI:Psihologija metematičeskih sposobnostei školjnikov,Moskva,1968.g.

H.V.BERNARD:Psychology of learning and teaching,New York,1954.g.

Z.P.DIENES:Building up Mathematics,London 1969.g.

P.ŠIMLEŠA:Pedagogija,Zagreb,1971.g.

B.F.SKINNER:The science of learning and the art of teaching,London, 1970.g.

R.ROSENTHAL I L.JACOBSON:Pygmalion in the classroom,New York,1968.g.

C.V.GOOD:Dictionary of Education,New York,1959.g.

BORIS ČEKRLIJA: Vremeplovom kroz matematiku,Banja Luka , 2000.g.

SADRŽAJ

UVOD

1. O NASTAVI MATEMATIKE 2

2. JEDNAČINE.....4

2.1. JEDNAKOST, IDENTITET, JEDNAČINE.....7

2.2. EKVIVALENTNE JEDNAČINE.....15

2.3. JEDNAČINE PRVOG STEPENA SA JEDNOM NEPOZNATOM I OPŠTIM KOEFICIJENTIMA 19

2.4. SASTAVLJANJE JEDNAČINA 21

3. NEJEDNAČINE 25

3.1. NEJEDNAKOSTI, NEJEDNAČINE PRVOG STEPENA SA JEDNOM NEPOZNATOM

3.2. EKVIVALENTNE NEJEDNAČINE 28

3.3. RJEŠAVANJE LINEARNIH NEJEDNAČINA SA JEDNOM NEPOZNATOM ...30

3.4. GRAFIČKO RJEŠAVANJE LINEARNIH NEJEDNAČINA 32

3.5. RJEŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH NEJEDNAČINA.....34

3.6. BEZUSLOVNE NEJEDNAKOSTI 38

ZAKLJUČAK 42

LITERATURA 43