Univerzitet u Beogradu

MATEMATIČKI FAKULTET

# *Master rad*

## ***INTERAKTIVNI PRIKAZ NASTAVNIH SADRŽAJA MATEMATIKE ZA DRUGI CIKLUS OSNOVNOG OBRAZOVANJA KORIŠĆENJEM PROGRAMSKOG PAKETA GEOGEBRA***

**mentor:**
Docent dr Miroslav Marić

**kandidat:**
Dragana Petrović, dipl. mat.

Beograd, 2012.

# SADRŽAJ:

# Uvod

***„Matematika i njen stil mišljenja moraju postati sastavni deo opšte kulture savremenog čoveka, tj. čoveka kojeg obrazuju današnje škole, bez obzira da li će on vršiti posao koji koristi matematiku ili ne.“ KONFERENCIJA UNESKO 1956.G.***

Poslednjih godina sve više se ističu nedostaci obrazovanja kod nas i potreba da se izvrše korenite promene. Svedoci smo da, iako u školskim klupama učenici provode veliki deo svog detinjstva, rezultati obrazovanja nisu adekvatni. Razloga za takvo stanje ima dosta: zastareli programi nastave, neinteresantni udzbenici, neodgovarajuči uslovi za izvođenje nastave...

Osavremenjivanje nastavnog procesa je svakako jedan od preduslova za bolje obrazovanje. U našim školama još uvek je dominantan frontalni način rada uz korišćenje zelene table i krede. Zbog toga, ovaj rad ima za cilj da da doprinos praktičnoj primeni savremenih svetskih trendova u nastavi matematike, odnosno u programu GeoGebra.

U prvom poglavlju rada objašnjen je značaj matematike kao nauke i kao nastavni predmet. Uloga i značaj matematike ne mogu se sagledati bez dobrog poznavanja istorijskog razvitka, predmeta proučavanja, primene i tendencija daljeg razvitka. Matematika ima veliki značaj i ulogu ne samo kao nastavni predmet koji obrazuje ljude, pružajući im korisna znanja za život ili nastavljanje obrazovanja, nego kao i predmet koji i vaspitava ljude, doprinoseći izgrađivanju intelektualno snažnih i naprednih ličnosti.

Drugo poglavlje rada posvećeno je informacionim tehnologijama u savremenoj nastavi. Dobar deo nastave i danas se odvija isključivo tradicionalnim metodama, informacije su slabo dostupne, a vreme i mesto predavanja strogo definisano. To nas podstiče na razmišljanje da se sadržaj koji se izučava učini interaktivnim, javno dostupnim. Prikazani su objektivni faktori koji uslovljavaju unošenje obrazovne tehnike i tehnologije u nastavni proces i neki nedostaci tradicionalne nastave. Takođe, u ovom delu rada predstavljen je programski paket GeoGebra, korišćen u izradi materijala.

U trećem poglavlju predstavljeni su interaktivni materijali koji se odnose na linearnu funkciju. Ovaj nastavni materijal namenjen je učenicima, kao i profesorima matematike, u starijim razredima osnovne škole. U njemu su, zbog povezanosti nastavnih sadržaja matematike od 5. do 8. razreda, dati primeri, ilustracije i objašnjenja iz oblasti koje se obrađuju u nastavi matematike predviđenih za drugi ciklus osnovnog obrazovanja. U izradi materijala korišćene su informacione i veb tehnologije. Pomenuti materijal je javno dostupan na adresi http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml03001/.

# 1. Matematika kao nauka i kao nastavni predmet

***„Priroda je ogromna knjiga u kojoj je napisana nauka. Ona je stalno pred našim očima, ali je čovek ne može razumeti ukoliko prethodno ne nauči jezik i slova kojim je napisana. A napisana je ona jezikom matematike.“ Galio Galilej***

## 1.1. Značaj matematike kao nauke

Matematika je nastala iz praktičnih potreba ljudi da poboljšaju svoje uslove života i rada. Te potrebe su bile materijalne, socijalne ili duhovne prirode. Uloga i značaj matematike ne mogu se sagledati bez dobrog poznavanja istorijskog razvitka, predmeta proučavanja, primene i tendencija daljeg razvitka. Razvitak matematike prati se uglavnom kroz četiri epohe:

1) **Epoha stvaranja matematike** oduhvata period od formiranja prvih matematičkih pojmova do pojave Euklidovih *Elemenata*. Matematika ovog perioda vezana je za iskustvo i induktivni način otkrivanja znanja, a prati se preko matematike Vavilona, Egipta i Stare Grčke.

2) **Epoha elementarne matematike** vezuje se za pojavu *Elemenata*. Ona traje sve do otkrića u oblasti diferencijalnog i integralnog računa, vezanih za Njutna i Lajbnica. Karakteristike ove epohe su: sistemsko izlaganje gradiva, doslednost deduktivnog načina zaključivanja, uvođenje opšteg broja i razvitak algebre, pozicioni način pisanja brojeva, itd.

3) **Epoha matematike promenljivih veličina** nastaje pod uticajem razvitka prirodnih nauka. Za epohu je značajno uvođenje metode koordinata i uspostavljanje veze između algebre i geometrije.

4) **Epoha savremene matematike** vezuje se za pojavu neeuklidske geometrije Lobačevskog, koja je nastala kao posledica pokušaja dokaza V Euklidovog postulata. Svoj najviši domet matematika je dostigla u ovoj epohi. Stvorene su i dve nove i veoma značajne matematičke discipline, matematička logika i teorija skupova.

Primena matematike u prirodnim naukama i tehnici je ogromna. Razvitak i dostignuća u ovim oblastima ljudske delatnosti ne mogu se ni zamisliti bez matematike. Na primer, preciznost kosmičkih letova, snaga atomske energije, sposobnost računskih mašina i automata da neverovatno brzo izračunavaju i rešavaju veoma složene operacije govore o današnjem stepenu razvitka i primene matematike. Osnovni zadatak savremene tehnike je da zameni čoveka u obavljanju raznih fizičkih i intelektualnih delatnosti, da poboljša životne uslove i da oslobodi ljudsku energiju za nova kreativna stvaranja. I druge nauke (ekonomija, biologija, medicina, psihologija, sociologija, pedagogoja) sve više se oslanjaju na matematiku, a naročito na njene statističke metode. Danas je već poznato da je područje matematike neograničeno i da ne postoji ni jedna oblast ljudske delatnosti gde ne bi moglo doći do njene primene [1].

## *1.2. Matematika kao nastavni predmet*

U osnovnoj školi matematika je opšteobrazovni nastavni predmet. Sadržaji nastave matematike treba da odgovaraju ostvarivanju tog cilja. Uzrast i psihofizičke mogućnosti učenika takođe uslovljavaju izbor programskih sadržaja. Matematika kao nastavni predmet razlikuje se od matematike kao nauke, kako po cilju i sadržaju, tako i po metodama koje se primenjuju. Dok je cilj matematike kao nauke da otkriva nove činjenice i zakonitosti, dotle matematika kao predmet ima cilj sticanje znanja, umenja i navike.

Prenošenje znanja u nastavi je metodički razrađeno. Kad kažemo da je prenošenje znanja razrađeno, pod tim podrazumevamo najkraći put koji vodi učenika do ispravnog zaključka i saznanja primenom odgovarajućih nastavnih oblika, metoda i sredstava. U nastavi matematike, bez obzira na kom nivou se izvodi, svaki pojam i tvrđenje moraju se pravilno naučno interpretirati. Ne može se pred izgovorom „prilagođavanja“ učenicima neki pojam ili tvrđenje nenaučno tumačiti. To svaki profesor mora stalno imati na umu.

Matematika kao nastavni predmet u školi određena je sadržajima, ciljevima i zadacima koji su dati odgovarajućim nastavnim programima.

## *1.3. Obrazovno-vaspitni značaj matematike*

Matematika se sve više primenjuje u svakodnevnom životu, te ima veliku praktičnu vrednost. Za njenu uspešnu primenu potrebno je opšte matematičko obrazovanje. Opšte matematičko obrazovanje, potrebno svakom čoveku, stiče se savladavanjem nastavnih programa matematike za osnovnu školu.

Matematika ima veliki značaj i ulogu ne samo kao nastavni predmet koji obrazuje ljude, pružajući im korisna znanja za život ili nastavak obrazovanja, nego i kao predmet koji i vaspitava ljude, doprinoseći izgrađivanju intelektualno snažnih i naprednih ličnosti. Dakle, nastava matematike, pored obrazovne, ima i značajnu vaspitnu funkciju [1].

Pod obrazovno-vaspitnom ulogom nastave matematike podrazumeva se njen udeo u osposobljavanju i formiranju ličnosti učenika. Obrazovati i vaspitavati učenike uopšte, pa i u nastavi matematike, znači razvijati kod njih:

- određena znanja, umenja i navike,
- umne i ostale sposobnosti (logičko mišljenje, pažnju, kreativnost),
- određene pozitivne navike, volje i druge moralne vrline,
- smisao za lepo i harmonično,
- interesovanje za matematiku i sticanje novih znanja i osposobljavati ih da stečena znanja uspešno primenjuju u praksi.

Iz ovoga možemo zaključiti da je obrazovno-vaspitni doprinos nastave matematike dosta veliki i da se proteže na nekoliko područja obrazovanja i vaspitanja:

1) **Intelektualno područje** – Pod intelektualnim osposobljavanjem učenika podrazumeva se razvijanje umnih sposobnosti, među kojima su najvažnije pažnja, posmatranje, izvođenje misaonih operacija, logičko zaključivanje, posedovanje intuicije, maštanje i pamćenje.

2) **Moralno područje** – Nastavom matematike vaspitno se deluje na formiranje pozitivnih karakternih osobina i volje učenika. Bavljenje matematikom razvija kod učenika istrajnost, upornost, strpljenje, sistematičnost, inicijativnost, samokontrolu, pedantnost, disciplinovanost, a sve su to moralne vrline koje poseduju ličnosti jakog karaktera.

3) **Estetsko područje** – Matematika može da pruži trajno intelektualno zadovoljstvo, obojeno estetskim i emocionalnim tonovima, tako da istovremeno produbljuje, spoznaju i profinjuje ukus. Matematika kod učenika razvija smisao za simetriju, harmoniju, preciznost, jasnoću i drugo, a sve su to elementi lepog.

4) **Radno-tehničko područje** – Radno-tehničko osposobljavanje učenika kroz nastavu matematike je višestruko: razvija pozitivan odnos prema radu, formira određene sposobnosti, veštine i navike koje su neophodne za praktičnu delatnost.

## *1.4. Obrazovno-vaspitni cilj časa*

Bitna odlika efikasne nastave matematike, bez obzira na to koja se nastavna jedinica realizuje, jeste intelektualna aktivnost učenika, odnosno razmišljanje. Stoga strožer obrazovno-vaspitnog cilja svake nastavne jedinice čini određeni broj misaonih operacija i vrste zaključivanja. Misaone operacije i način zaključivanja najčešće određuju i nastavnu metodu kojom treba odrediti nastavnu jedinicu.

Obrazovno-vaspitni cilj časa određuje se u zavisnosti od:

- sadržaja rada (sticanje određenih znanja, utvrđivanje ili primena),
- primenjenih misaonih operacija koje dominiraju na času,
- vrste zaključivanja,
- nastavnih sredstava koja se primenjuju.

Nakon uočavanja najvažnijih komponenata formuliše se obrazovno-vaspitni cilj i unosi u plan nastavnog časa.

## *1.5.Vođenje matematičkog obrazovanja*

Vođenje matematičkog obrazovanja predstavlja niz pojmova, počevši od načina rada profesora preko kojih učenici stiču znanje i radne navike, do istraživačkih metoda. Profesor na ovaj način vodi učenike kroz kontinuiran proces matematičkih aktivnosti i kod njih podstiče i razvija intelektualne sposobnosti. Da bi se uspešno dostigao željeni cilj u nastavi matematike profesor mora, u toku rada, posvetiti se obrazovnim, vaspitno-razvojnim ciljevima.

Pre početka nastave, profesor mora pažljivo isplanirati, tj. organizovati čas. Priprema se tako što fiksira nastavnu jedinicu, pripremi gradivo koje će prezentovati, pripremi raznovrsne primere i zadatke, adekvatan prostor (ukoliko mu je potreban za tu nastavnu jedinicu), pripremi zadatke za domaći zadatak... Uz sve ovo, veoma je bitno osmisliti tok časa, uneti što više raznolikosti i kreativnosti u svom radu, a učenicima dozvoliti slobodu mišljenja. Poenta svakog časa je da na njemu učenici nešto nauče. Nije dovoljno samo realizovati nastavnu jedinicu, već je neophodno motivisati učenike za rad, za pažljivo praćenje nastave jer u toku časa učenik treba da razume temu koja se obrađuje, shvati cilj njenog izučavanja i šta je u svemu tome bitno.

Strukturu nastave čine:

- **uvodni deo časa**, podrazumeva se sadržinska, psihološka i tehnička priprema. U uvodnom delu časa uglavnom se vrši analiza domaćih zadataka, obnavljanje određenih sadržaja za povezivanje sa novim sadržajima, isticanje cilja časa i motivisanje učenika za intenziviranje aktivnosti.

- **glavni deo časa** je najvažniji, ali i najobimniji što se tiče sadržaja i vremena. Nastoji se, da se u tom delu časa, efikasno realizuje predviđen nastavni plan.
- **završni deo časa**, proverava se koliko su učenici usvojili najbitnije nastavne sadržaje koji su na času obrađeni ili kako su usvojeni primenjeni postupci.

U nastavi matematike razlikujemo nekoliko tipova časova:

- **čas obrade novog gradiva** namenjen je sticanju novog znanja, učenici se upoznaju sa novim matematičkim pojmovima, pravilima, dokazima i postupcima za njihovu primenu,
- **čas utvrđivanja** primenjuje se posle časa obrade novog gradiva, s ciljem da se obrađeni sadržaji utvrde, prodube i prošire,
- **čas vežbanja** organizuju se nakon obrade i utvrđivanja određenih nastavnih sadržaja, a koristi se radi primene usvojenih znanja u zadacima i problemima,
- **čas obnavljanja** primenjuje se sa ciljem da se pojedini nastavni sadržaji, koji su obrađeni ranije, detaljnije obnove uz određena produbljivanja, kako bi se uspešno izvršilo povezivanje sa novim sadržajem, organizuju se na početku školske godine ili kao uvodni u obradi pojedinih nastavnih tema,
- **čas sistematizacije** organizuje se posle obrade nastavne teme da bi se izvršila sistematizacija sadržaja, tj. pojmovi i pravila povezali, uopštili i izdvojili bitni sadržaji,
- **proveravanje znanja** radi ocenjivanja može se vršiti na svakom času i može biti usmeno ili pismeno. Za usmeno proveravanje znanja ne organizuju se posebni časovi, dok se pismeno proveravanje obavlja preko školskih pismenih zadataka, kontrolnih vežbi i testova.

Uspešnost vođenja matematičkog obrazovanja zavisi, u velikoj meri, od metoda, oblika i sredstava koji se primenjuju. Tomaso je rekao: „Loše metode čine da i dobre knjige i dobri učitelji postaju beskorisni.“

Pod nastavnom metodom podrazumeva se nastavni postupak kojim profesor zajedno sa učenicima obradom nastavnih sadržaja ostvaruje ciljeve i zadatke nastave matematike. Nastavi matematike najviše odgovaraju sledeće metode:

- **Monološka metoda** sastoji se u tome što profesor ili učenik izlaže nastavne sadržaje, a ostali učenici slušaju i na taj način stiču znanja.
  - Dobre strane monološke metode su u tome što je zastupljena sistematičnost i ekonomičnost, tj. učenicima se prenose sistematiski sređena znanja sa isticanjem bitnih pojmova i pravila, a za kraće vreme može se izložiti veći obim nastavnog gradiva.
  - Loše strane ove metode su u tome što se učenici ne stavljaju u aktivan položaj, što se znanja mogu usvojiti bez razumevanja suštine, što se ne usklađuje tempo usvajanja znanja prema individualnim sposobnostima učenika, već se određuje prema prirodi

sadržaja, a ne prema mogućnosti učenika da uspešno prate izlaganje i što se ne može sa sigurnošću ustanoviti koliko učenici usvajaju znanja u toku izlaganja.

- **Dijaloška metoda** sastoji se u tome da profesor postavlja pitanja, a učenici odgovaraju.
  - Prednosti su: veća aktivnost učenika, pažnja za sve vreme razgovora, povezivanje novog gradiva sa prethodno usvojenim, izvođenje zaključaka i pravila, a profesor pritom uspešno prati koliko učenici usvajaju nova znanja, doprinosi razvijanju samostalnosti i inicijativnosti učenika.
  - Nedostaci dijaloške metode su: za obradu određenih sadržaja potrebno je više vremena, priprema profesora je složenija, lako se može skrenuti od osnovnog predmeta razgovora.

- **Metoda rada s tekstom** je postupak kojim učenici na časovima stiču znanje korišćenjem pisanih ili štampanih tekstova.
  - Dobre strane su: učenici se osposobljavaju za samostalno korišćenje pisanih izvora saznanja, za samoobrazovanje, znanja koja se dobijaju su tačna, sistematična, pregledna i trajna.
  - Loše strane su: nemogućnost obrađivanja svih nastavnih jedinica ovom metodom, uspeh zavisi od stepena pripremljenosti učenika da se služe tekstom.

- **Metoda ilustracije** je postupak kojim se objašnjenje dopunjuje crtežima, dijagramima, graficima, tabelama i modelima. U procesu saznanja najbolji rezultati se postižu ako su uključena sva čula, odnosno više njih. Primenom metode ilustracije, znanja se primaju preko čula i sluha i vida, čime se ubrzava proces formiranja pojmova. Znanja stečena primenom ilustrativnih radova su suštinska i trajna.

- **Metoda demonstracije** je takav način rada kojim učenici preko percepcije upoznaju predmete koje im profesor pokazuje. Primenom ove metode kod učenika se razvija sposobnoet posmatranja i opažanja.

- **Metoda samostalnih radova učenika** primenjuje se onda kada učenici već poseduju izvesna znanja. Zbog toga ova metoda služi uglavnom za utvrđivanje, produbljivanje i primenu znanja.

U svakom organizovanom radu prisutni su i organizacioni oblici koji se primenjuju u procesu toga rada. Kako je obrazovno-vaspitni rad programiran, planiran i organizovan rad, u procesu toga rada primenjuju se sledeći oblici:

- **Frontalni oblik rada** podrazumeva rad sa učenicima jednog odeljenja, uz primenu istih metoda rada, u savlađivanju istih nastavnih sadržaja, ostvarivanju istih obrazovno-vaspitnih zadataka i pod istim uslovima rada.

- **Grupni oblik rada** podrazumeva takav organizacioni oblik gde se cilj i zadaci nastavnog časa ostvaruju radom učenika u malim grupama.

- **Rad u parovima** podrazumeva oblik gde se cilj i zadaci nastavnog časa ostvaruju zaduživanjem par učenika na rad na istom problemu.

- **Individualni oblik rada** podrazumeva se pojedinačni rad, pri čemu svaki radi samostalno na posebnom zadatku, ili svi učenici rade samostalno na istom zadatku.

# 2. Informaciona tehnologija u savremenoj nastavi

***„Mašina može da reši gotovo sve probleme koji joj se postave, ali ne može da sastavi, da smisli nijedan. To čini matematika.“ Albert Anštajn***

## 2.1. Kritika tradicionalne nastave

Potreba za promenama u obrazovanju, nastavi, metodama i oblicima rada ključno je pitanje svuda u svetu, uslov za poboljšanje nastave. Osnovna škola je temelj školskog sistema, što uslovljava potrebu da se njena delatnost stalno usavršava.

Tradicionalna nastava je orjentisana na prenošenje znanja, veština i navika, gde je profesor prenosilac informacija i kao takav postavljen iznad učenika, dok je učenik objekat nastavnog procesa. Oblici organizacije u tradicionalnoj nastavi su frontalni i individualni, a nastavne metode informacione i reproduktivne, pa je glavna karakteristika ovakve nastave pamćenje gradiva. Učenici u ovakvoj nastavi znanja usvajaju napamet i reprodukujući ih, što nikako ne dovodi do njihovog stalnog usvajanja, niti do njihove upotrebne vrednosti. Zbog toga se i njihov položaj odlikuje odsustvom interesovanja i pasivnošću. U tradicionalnoj nastavi dominantan je frontalni oblik rada gde profesor uglavnom vrši predavačku funkciju i takav način rada ne obezbeđuje dovoljnu interakciju sa učenicima, niti samostalne aktivnosti učenika u funkciji kvalitetnog ovladavanja nastavnim sadržajima.

Primetan je razvoj usavršavanja didaktičkih medija, nastavnih metoda i oblika rada u cilju poboljšanja efikasnosti i efektivnosti nastavnog procesa. Treba prevazići verbalizovanu, formalizovanu nastavu i obezbediti trajnost znanja i povezivanje teorije sa realnim životom. Nedovoljna opremljenost škole, učionica je jedan od razloga zašto nastava nije sistemski zasnovana. Sa povećanjem korišćenja računara u školama stvoreni su uslovi za kvalitetnije inoviranje obrazovne tehnologije. Multimedijalni programi nude mogućnost kreiranja elektronskih udzbenika sa tekstom, slikom, zvučnim animacijama i filmovima, tako da učenici mogu sami da napreduju u skladu sa sopstvenim mogućnostima i interesovanjima. Naučno-tehnološka revolucija omogućava da savremeno obrazovanje čoveka čini da on shvati i usvoji naučna dostignuća, da njima razvije i obogaćuje svoju ličnost, da ih koristi u stvaranju novih saznanja.

**Informaciona tehnika** obuhvata računarski hardver, softver i komunikacione mreže za elektronsku razmenu između fizički udaljenih računara, uređaje i adaptere koji konvertuju informacije (tekst, sliku, film, zvuk) u digitalni format. Pod **informacionom tehnologijom**

podrazumeva se informaciona tehnika i adekvatno korišćenje digitalnih informacija. Informaciona tehnologija u obrazovanju podrazumeva proučavanje karakteristika i mogućnosti elektronskih izvora informacija i adekvatnu primenu savremenih didaktičkih medija u cilju inoviranja tehnologije i nastave učenja. Postoji potreba za savladavanjem nivoa znanja i veština za efikasno korišćenje novih tehnologija od strane nastavnika i upoznavanje mogućnosti informacione tehnologije.

## *2.2. Računar u nastavi*

Računar je novo moćno nastavno sredstvo. Uz odgovarajuću dodatnu opremu, softver i priključak na internet, može da zameni mnoga druga nastavna sredstva. Za reprodukovanje već snimljenih ogleda iz fizike ili hemije dovoljan je video-bim. Uz odgovarajuće zvučnike moguće je reprodukovati muzike na časovima muzičke kulture. Video-bim je dovoljan za virtualnu šetnju po svetskim muzejima i visoko-kvalitetne reprodukcije slika važnih za istoriju umetnosti. Elektronski mikroskop je relativno jeftin dodatak uz pomoć kojeg se mogu snimiti ne samo fotografije već i digitalni filmovi o mikroskopskom procesu koji se proučava u nastavi biologije.

Primena računara sve više postaje neizostavan deo savremenog načina obrazovanja, čiji je osnovni cilj unapređivanje kvaliteta nastave bilo kao podrška ili kao zamena za deo tradicionalne nastave. Tradicionalna nastava se može dopuniti elektronskim i interaktivnim mogućnostima, što će je učiniti kvalitetnijom. Nastavnicima je omogućeno da prikupljaju podatke, analiziraju informacije i pripremaju materijale. Novi korisnički alati omogućuju da i sami kreiraju aplikacije za učenje i proveru znanja. Učenici, sa druge strane, mogu da koriste računare radi programiranog sticanja saznanja, aktivnijeg učešća u nastavi, analize i primene informacija, skraćenja vremena učenja i samomotivacije za sticanje novih znanja. Računari takođe pojednostavljuju i čine manje subjektivnim proveru stečenih znanja učenika [2].

Organizacija nastave uz pomoć računara ima određene prednosti nad tradicionalnom, kao na primer:

1. Proces nastave i učenja sa celim odeljenjem može se istovremeno individualizovati. To znači da svaki učenik ima mogućnost da radi, stiče odrećena znanja, veštine i sposobnosti shodno vlastitom ritmu i nivou angažovanja.
2. Obrazovni programi su kvalitetniji. Prema tome, zagarantovan je visok nivo naučnosti, postupnosti, primerenosti i motivacije uz gotovo neograničene mogućnosti dobijanja dodatnih informacija, uputstva za rad i uspešno rešavanje postavljenih zadataka.
3. Prilikom obrade i prezentacije odgovarajućih obrazovnih sadržaja računar raspolaže tehničkim i programskim mogućnostima da kod učenika istovremeno animira više saznajnih čula, što pozitivno utiče na njihovo efikasnije učenje i napredovanje.
4. Efikasno učenje uz pomoć računara nije više vezano za ustanovu, sobu, kabinet, radni dan ili sat. Učenik može da izučava određenu problematiku kod kuće, na putovanju, ekskurziji, bez obzira na datum, vreme i mesto trenutnog boravka.

5. Prilikom provere znanja računar nudi raznovrsne opcije. Posebna mu je prednost što eliminiše čitav niz subjektivnih grešaka imanentnih nastavniku kao evaluatoru.
6. Računar se u vaspitno-obrazovnoj delatnosti može koristiti ne samo za sticanje znanja i učenja, već i za veoma efikasno upravljanje nastavnim procesom, za obavljanje administrativnih, personalnih i mnogih drugih poslova, koji se odnose na neposrednu organizaciju i realizaciju vaspitno-obrazovnog rada.

Naglasiću neke konkretne načine moguće primene računara u nastavi i njegovu mogućnost zamene mnogih drugih sredstava. Računar može da zameni:

- *Dijaprojektor*. MS Power Point program nudi mogućnost izrade slajd prezentacije sa umetanjem teksta, slika, zvuka, animacija, videa... Sami možemo odrediti način prezentovanja, trajanje prikaza slajda i sl. Takođe je lako izvršiti promene u sadržaju slajdova, redosledu prikazivanja, a moguće je i odštampati tako pripremljen materijal.
- *Epiprojektor*. Potrebna je obična veb kamera da bi se sadržaj strane neke knjige projektovao.
- *Kasetofon*. Zvuk snimljen na audio kasetu nije stalnog kvaliteta za razliku od digitalnog zapisa. Zvuk je moguće reprodukovati, snimati i obrađivati na računaru u više formata (wav, mp3...), a i moguće je tako pripremljen zvuk koristiti u multimedijalnim aplikacijama.
- *Video plejer*. Danas su nam dostupne digitalne video kamere ili kartice za digitalizovanje video zapisa sa VHS kaseta, kao i softver za obradu videa, pa možemo ne samo da koristimo urađene sekvence i emisije, već da ih i sami izrađujemo.

## 2.3. Izbor obrazovnog softvera

U poslednje vreme počinju da se realizuju ideje o novom sistemu nastave, sistemu učenja putem obrazovnih računarskih softvera. Obrazovno računarski softver predstavlja računarski program specijalno namenjen sadržaju nastave, a projektovan u cilju poboljšanja nastave i razvijanju individualnosti učenja.

Nastava može biti uspešna samo ako se ostvaruje raznovrsnim metodama, upotrebom raznovrsnih nastavnih sredstava i medija. Inteziviranje rada nastavnika sa obrazovnim medijima tipa obrazovni softver utiče na veću zainteresovanost učenika za nastavni sadržaj i omogućava učeniku aktivniju ulogu u nastavnom procesu.

Bez obzira što je to novina za nastavnike, nastavnike bi trebalo hrabriti da, sarađujući sa timovima stručnjaka, organizuju i sprovode sticanja znanja uz pomoć računara. Osposobljavanje nastavnika za upotrebu obrazovnih softvera u nastavi postaje imperativ, jer se savremena didaktičko-tehnička modernizacija škole ne može zamisliti bez ovakvog oblika sprovođenja vaspitno-obrazovnog procesa. Primena individualizacije nastave obrazovnim računarskim softverima, omogućava školama da se oslobode tradicionalne nastave, što će i nastavu učiniti pristupačnijom i zanimljivijom učenicima.

Korišćenjem obrazovno-računarskog softvera u nastavi podstiče se:

- motivacija učenika,
- individualizacija i diferencijacija procesa učenja,
- samoocenjivanje,
- usvajanje novih znanja i ostvarivanje vežbanja,
- korišćenje informacionih baza podataka i pristup internetu,
- efikasnije trošenje vremena u procesu učenja [3].

## *2.4. GeoGebra u nastavi*

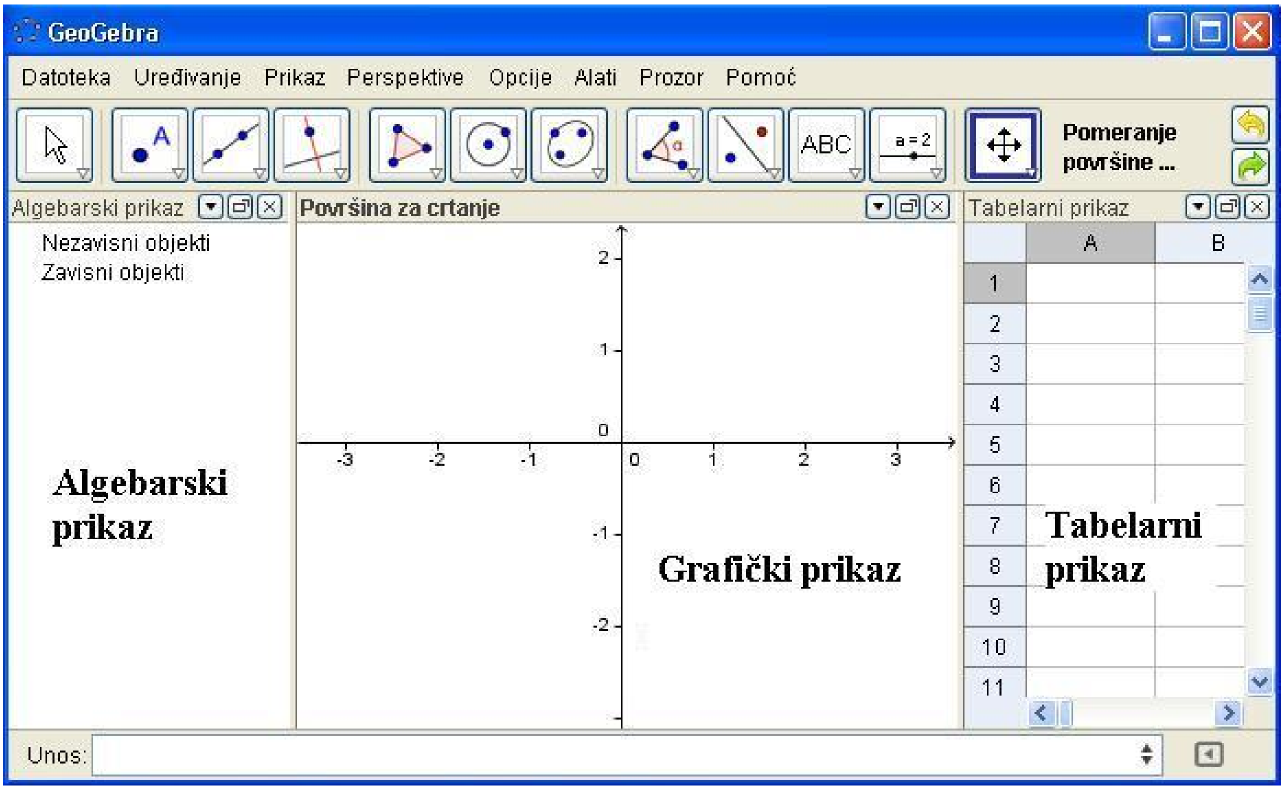
U nastavi matematike u osnovnoj školi u velikoj se meri obrađuju geometrijski sadržaji. Osvrnimo se na upotrebu programa dinamičke geometrije. To su računarski programi koji su prvenstveno namenjeni proučavanju i rešavanju planimetrijskih i stereometrijskih problema. Radi se o alatu koji profesorima i učenicima otvara novi pogled na tradicionalne geometrijske sadržaje, te pomoću kojeg metoda istraživanja i eksperimenta dobija novo, značajnije mesto u nastavi matematike [4]. Postoje programi dinamičke geometrije koji su lokalizovani, tj. prevedeni na srpski jezik. Jedan od tih programa je GeoGebra. Program karakteriše mogućnost lakog menjanja položaja ucrtanih objekata dok odnosi među njima ostaju nepromenjeni. Program animira statičnu geometrijsku konstrukciju u pomičnu, dinamičnu sliku koja otkriva nove odnose među geometrijskim objektima koje je možda teško otkriti na klasičnim, statičnim crtežima. Pokazalo se da učenicima viših razreda pružaju izvrsnu motivaciju za učenje matematike i razvijanje interesa za predmet.

GeoGebra je matematički program koji povezuje geometriju, algebru i analizu. Razvio ga je Markus Hohenwarter na Florida Atlantic univerzitetu, za nastavu i učenje matematike u školama [5].

GeoGebra je, s jedne strane, dinamički geometrijski sistem. Možemo da pravimo konstrukcije sa tačkama, vektorima, dužima, pravama, konusnim presecima kao i s funkcijama a zatim da ih dinamički menjamo. S druge strane, jednačine i koordinate možemo unositi direktno. Na taj način GeoGebra je u mogućnosti da radi sa promenljivima koje predstavljaju brojeve, vektore i tačke, da traži izvode funkcija, kao i da izvršava naredbe.

GeoGebra ima tri različita prikaza matematičkih objekata:

1. grafički prikaz
2. algebarski (brojčani) prikaz
3. tabelarni prikaz.

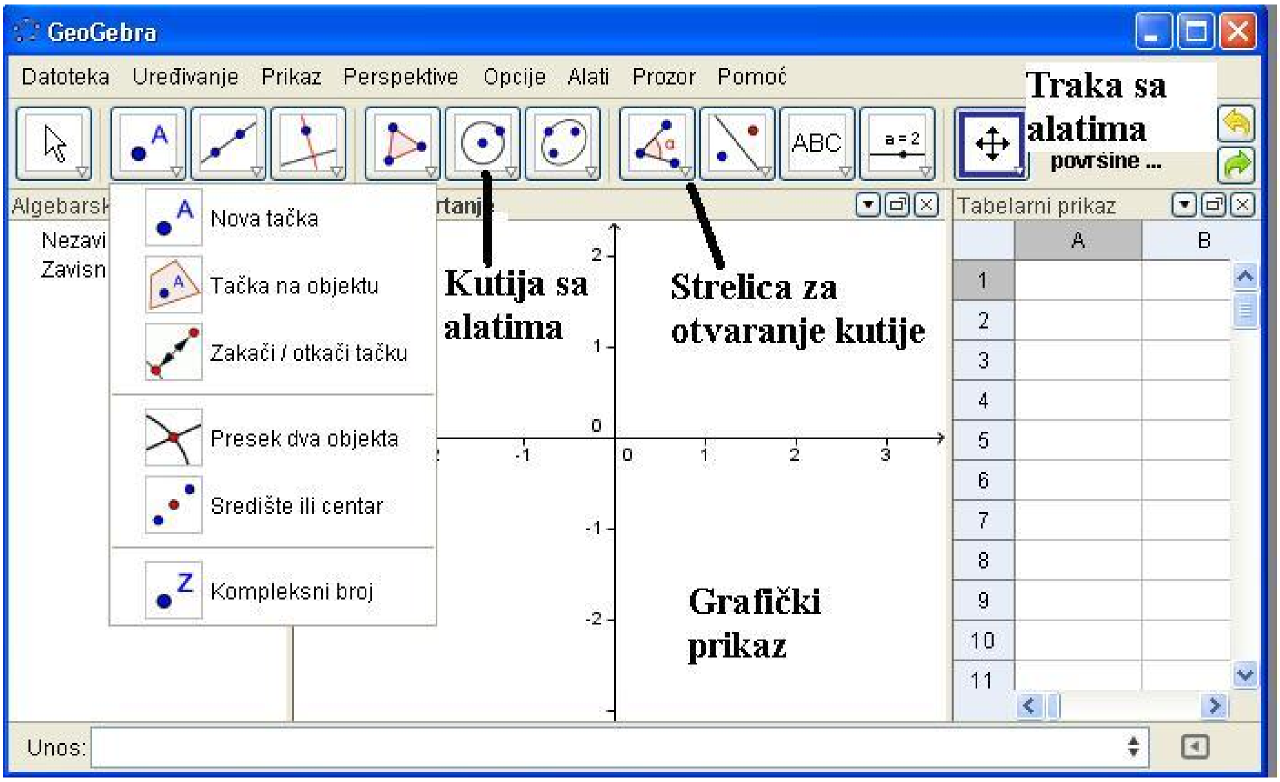



*Slika 1. Radno okruženje GeoGebre*

## *2.4.1. Grafički prikaz*

Geometrijske konstrukcije se prave u grafičkom prikazu, uz pomoć miša i alata za konstrukcije koji se nalaze na traci sa alatima. Svaka ikona na traci sa alatima predstavlja jednu kutiju sa alatima koja sadrži slične alate za konstrukciju. Kutiju sa alatima otvarate klikom na malu strelicu u donjem desnom uglu njene ikone.

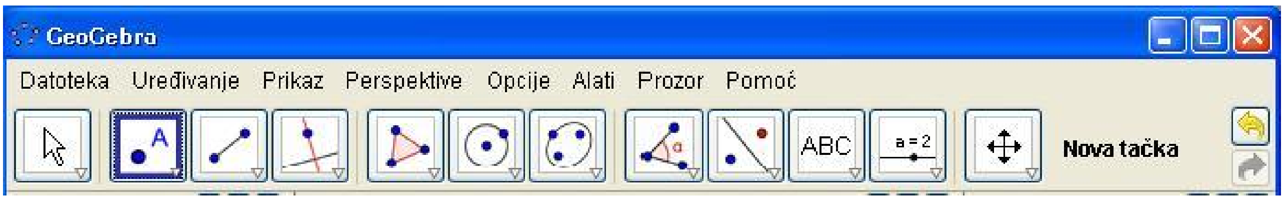
Svi objekti koji se naprave u grafičkom prikazu imaju i algebarsku reprezentaciju u algebarskom prikazu. Objekti u grafičkom prikazu mogu da se pomeraju tako ćete ih prevlačiti pomoću miša. U isto vreme, njihova algebarska reprezentacija u algebarskom prikazu se dinamički ažurira.




Slika 2. Grafički prikaz

Na traci sa alatima se nalaze ikone, i to za:

- tačke,
- linije,
- specijalne linije,
- mnogouglove,
- kružnice i lukove,
- konusne preseke,
- merenje,
- transformacije.




Slika 3. Traka sa alatima

Alati za konstrukciju su grupisani po vrsti, što olakšava rad u GeoGebri.


*Slika 4. Alati za tačke*

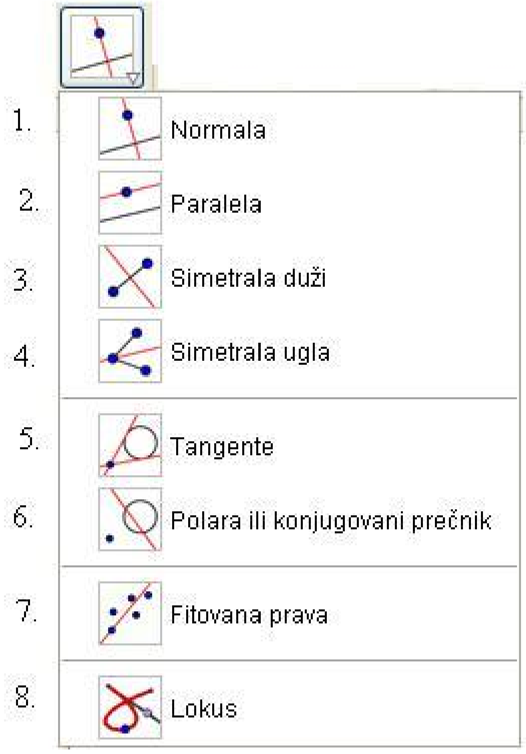
**Alati za tačke:**

1. Nova tačka se pravi klikom na površinu za crtanje. Klikom na duž, pravu, poligon, konusni presek, funkciju ili krivu kreiramo tačku na tom objektu. Klikom na presek dva objekta dobijamo presečnu tačku.
2. Nova tačka se pravi klikom na postojeći objekta, unutrašnjost kruga, elipse ili mnogougla.
3. Klikom na tačku, pa na objekat, tačka se zakači/otkači
4. Presečne tačke dva objekta mogu se dobiti na dva načina: označavanjem objekta, tada će se napraviti sve presečne tačke ta dva objekta ili klikom na jedan presek dva objekta, tada će se napraviti samo jedna presečna tačka.
5. Klikom na dve tačke dobija se središte duži određene tim dvema tačkama, na duž dobija se središte te duži, na konusni presek dobija se njegov centar.
6. Klikom na površinu za crtanje kreiramo objekat tipa kompleksan broj.


*Slika 5. Alati za linije*

**Alati za linije:**

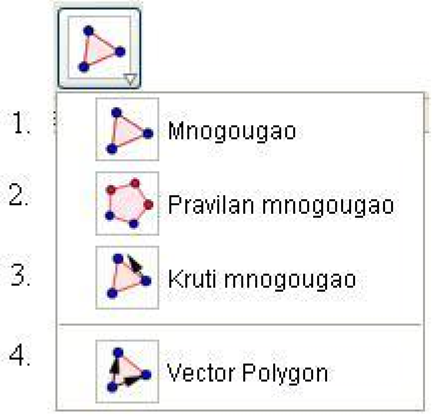
1. Odabirom dve tačke, dobija se prava koja sadrži te dve tačke.
2. Odabirom dve tačke, dobija se duž određena tim tačkama.
3. Kliknite na tačku, koja je početna tačka duži. Pojaviće se prozor u koji unosite dužinu duži.
4. Izaberite početnu tačku poluprave, a zatim tačku kroz koju prolazi poluprava.
5. Odabirom tačaka koje su temena izlomljene linije, a zatim spajanjem prve i poslednje tačke dobijamo izlomljenu liniju.
6. Odabirom početne i krajnje tačke dobija se vektor.
7. Odabirom tačke A i vektora v dobija se tačke B=A+v i vektor čija je početna tačka A, a krajnja B.




*Slika 6. Alati za specijalne linije*

**Alati za specijalne linije:**

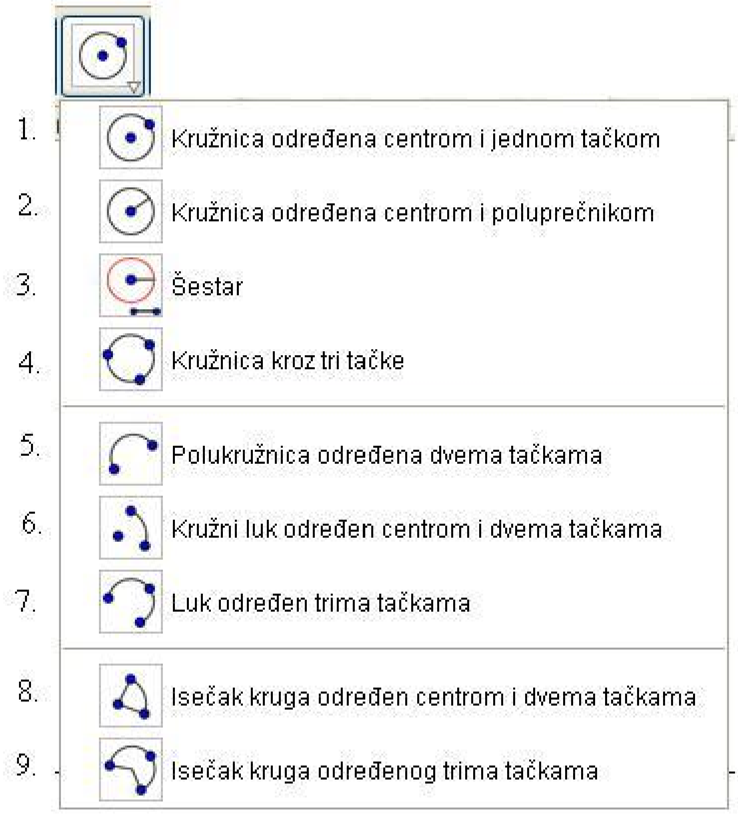
1. Odabirom prave a i tačke A, dobija se prava iz A normalna na pravu a.
2. Odabirom prave a i tačke A, dobija se prava kroz A paralelna pravoj a.
3. Odabirom dve tačke ili jedne duži, dobija se simetrala duži.
4. Odabirom tri tačke A, B, C dobija se simetrala ugla ABC ili odabirom dve prave dobijaju se obe simetrale uglova koje one određuju.
5. Odabirom tačke A i konusnog preseka dobijaju se sve tangente konusnog preseka kroz tačku A ili odabirom prave p i konusnog preseka dobijaju se sve tangente konusnog preseka, koje su paralelne pravoj p.
6. Odabirom tačke i konusnog preseka dobija se polara ili odabirom prave i konusnog preseka dobija se konjugovana prava koja sadrži konjugovani prečnik prave.
7. Dobija se fitovana prava za jednu grupu tačaka.
8. Odabirom tačke B koja se nalazi na nekom objektu, a zatim odabirom tačke A dobija se lokus.




*Slika 7. Alati za mnogouglove*

**Alati za mnogouglove:**

1. Odabirom tačaka, koja će biti temena mnogougla, a zatim odabirom početne tačke, dobija se mnogougao.
2. Odabirom dve tačke pojavljuje se prozor u kome treba upisati broj stranica pravilnog mnogougla.
3. Odabirom tačaka, koja će biti temena mnogougla, a zatim odabirom početne tačke, dobija se mnogougao, koji će zadržati oblik kada pomeramo tačke.
4. Odabirom tačaka, koja će biti temena mnogougla, a zatim odabirom početne tačke, dobija se mnogougao, koji će zadržati oblik kada pomeramo prvu tačku, dok druge možemo slobodno pomerati.




*Slika 8. Alati za kružnice i lukove*

**Alati za kružnice i lukove:**

1. Odabirom tačke, koja će biti centar kružnice i tačke na kružnici, dobijamo kužnicu.
2. Odabirom tačke koja će biti centar kružnice, pojavljuje se prozor u kome treba uneti dužinu poluprečnika.
3. Odaberite dve tačke ili duž, a zatim centra kruznice.
4. Odabirom tri tačke, koje su na kružnici, dobija se kružnica.
5. Odabirom dve tačke, dobija se polukružnica određena tim tačkama.
6. Odabirom tri tačke A, B, C dobija se kružni luk sa centrom A, početnom tačkom B i krajnjom tačkom C.
7. Odabirom tri tačke dobija se kružni luk određen tim tačkama.
8. Odabirom tri tačke A, B, C, dobija se isečak kruga sa centrom A, početnom tačkom B i krajnjom tačkom C.
9. Odabirom tri tačke, dobija se isečak kruga kroz te tačke.


*Slika 9. Alati za konusne preseke*

**Alati za konusne preseke:**

1. Odabirom tri tačke dobija se elipsa, čije su žiže prve dve tačke, a treća tačka je na toj elipsi.
2. Odabirom tri tačke dobija se hiperbola, čije su žiže prve dve tačke, a treća tačka je na toj hiperboli.
3. Odabirom tačke i direktrise dobija se parabola.
4. Odabirom pet tačaka dobija se konusni presek kroz njih.


*Slika 10. Alati za merenje*

**Alati za merenje:**

1. Dobija se ugao određen trima tačkama, dvema dužima, dvema pravama, sa dva vektora ili sve unutrašnje uglove mnogougla.
2. Odabirom dve tačke A i B, pojavljuje se prozor za unos veličine ugla, pri čemu se pojavljuje tačka C i ugao ABC.
3. Odabirom dve tačke, dve prave ili tačke i prave dobija se dinamički tekst koji ispisuje rastojanje.
4. Odabirom poligona, kružnice ili konusnog preseka dobija se dinamički tekst koji ispisuje površinu.
5. Prikazuje nagib prave kao dinamički tekst u geometrijskom prozoru.
6. Prilikom primene operacija i ugrađenih funkcija na liste, uvek se kao rezultat dobija nova lista.


*Slika 11. Alati za transformaciju*

**Alati za transformacije:**

1. Odaberite objekat čija se simetrična slika traži. Zatim kliknite na pravu koja će biti osa simetrije.
2. Odaberite objekat čija se simetrična slika traži. Zatim kliknite na tačku, koja ce biti centar simetrije.
3. Odabirom tačke, koju želimo da invertujemo, a zatim odaberemo kružnicu.
4. Odabirom objekta za rotaciju i centra rotacije pojavljuje se prozor unos ugla rotacije.
5. Odaberite objekat za transliranje, a zatim vektro translacije
6. Odabirom objekta za homotetiju i centra homotetije, pojavljuje se prozor za unos koeficijenta.

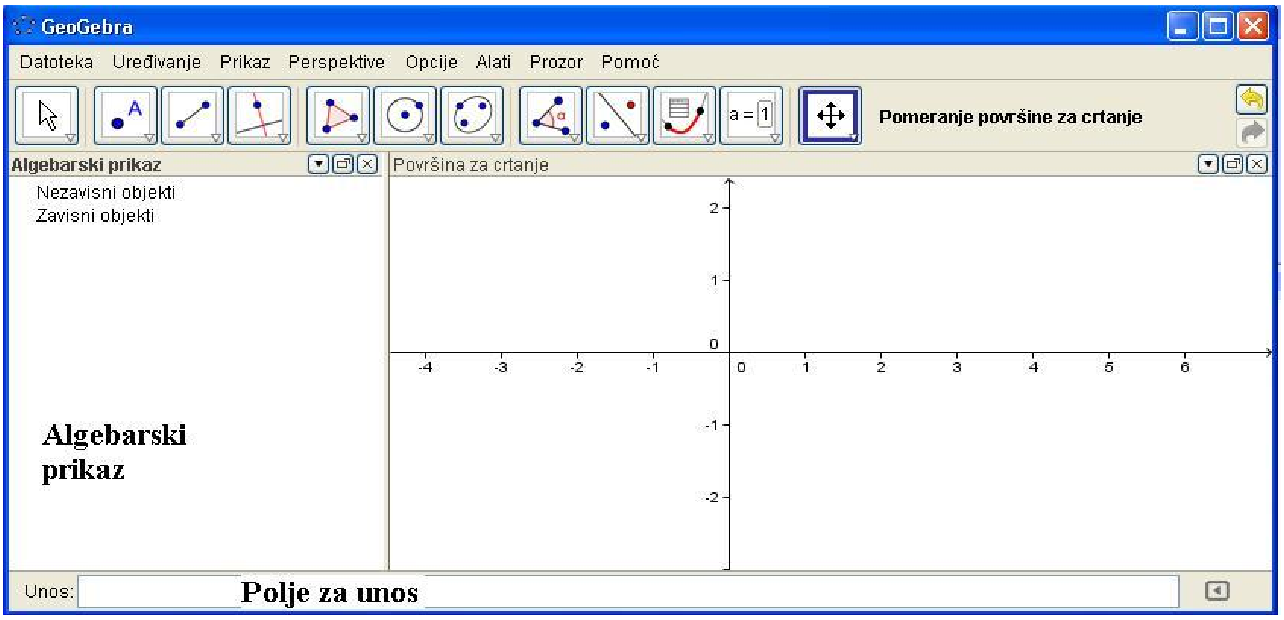

*Slika 12. Specijalni alati za objekte:*

**Specijalni alati za objekte:**

1. Klikom na površinu za crtanje otvara se prozor u kome treba otkucati tekst.
2. Klikom na površinu za crtanje , otvara se prozor za otvaranje datoteke u kome se bira slika koja se ubacuje.
3. Crtanje u grafičkom prikazu, za kraj izabrati drugi alat.
4. Odabirom dva objekta dobija se informacija o njihovom odnosu u novom prozoru.

## *2.4.2. Algebarski prikaz*

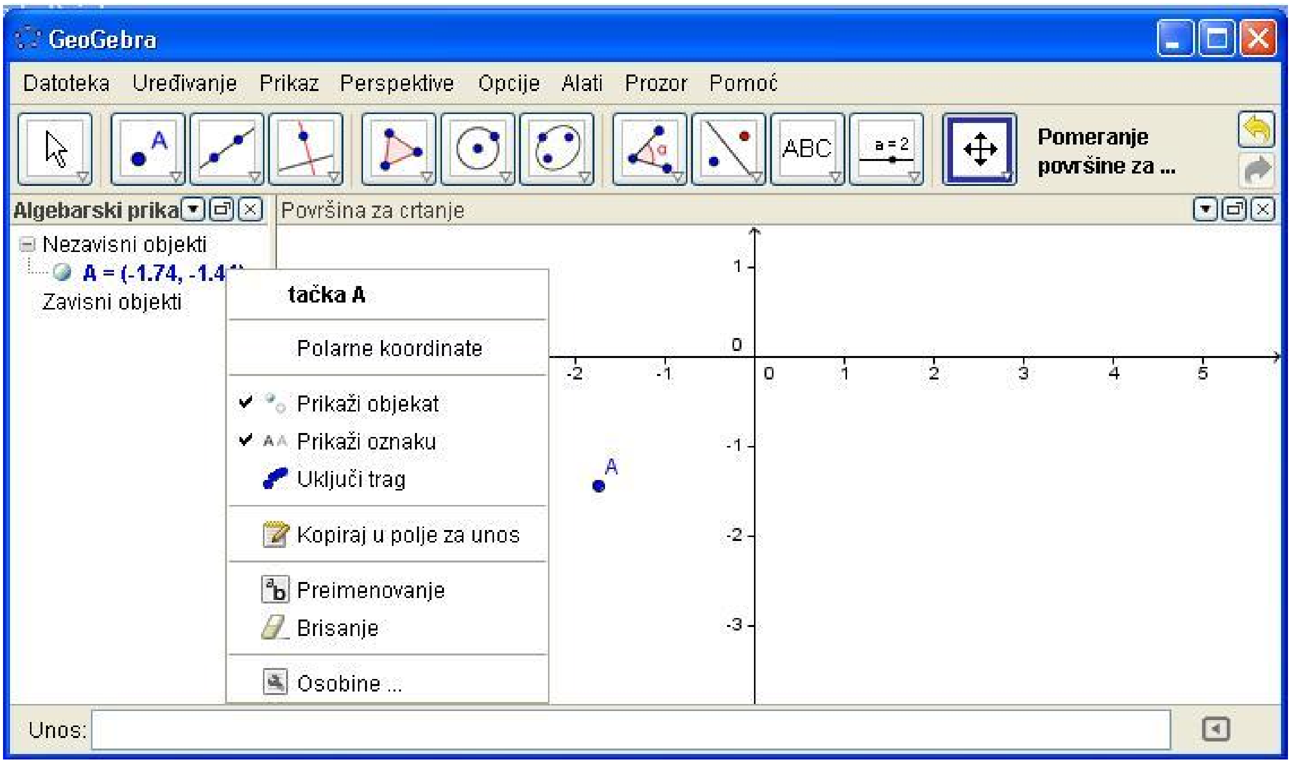
**Algebarski (brojčani) prikaz** nalazi se na levoj strani GeoGebrinog prozora. Organizuje matematičke objekte kao nezavisni i zavisni objekti. Nezavisan objekat je novi objekat koji je napravljen bez korišćenja bilo kojeg postojećeg objekta, dok je novi objekat napravljen korišćenjem postojećeg objekta zavisan objekat. *Polje za unos* služi za direktan unos algebarskih izraza, nalazi se na dnu GeoGebrinog prozora. Svaki put kada se nešto unese u Polje za unos treba pritisnuti Enter, algebarski unos će se pojaviti u algebarskom prikazu, a njegova grafička reprezentacija će automatski biti prikazana u grafičkom prikazu.




*Slika 13. Algebarski prikaz*

Objekte možete menjati i u algebarskom prikazu na sledeći način:

- postavite miš na objekat koji želite da promenite
- kliknite desnim tasterom miša
- otvoriće se prozor kao na slici.




*Slika 14. Menjanje objekta u algebarskom prikazu*

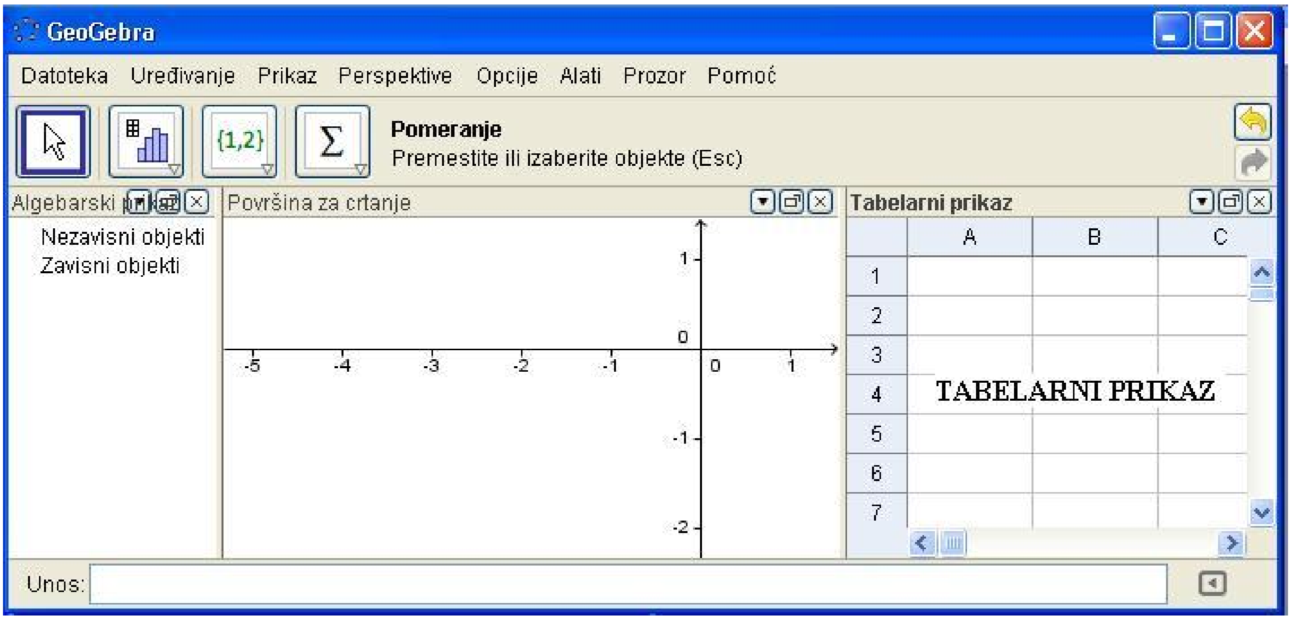

*Slika 15. Osobine objekta*

**Osobine objekta:**

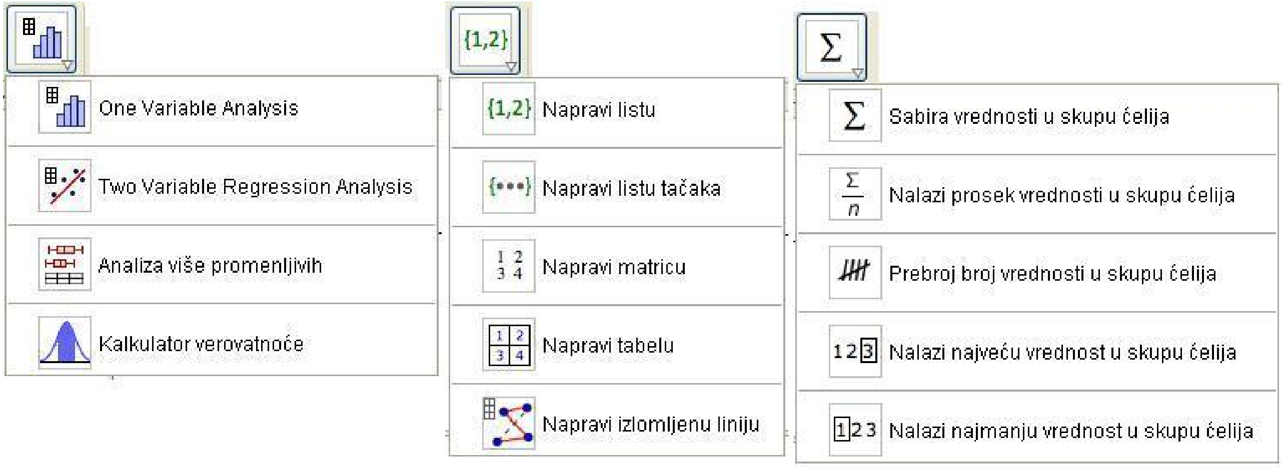
1. Prikaz polarnih ili Dekartovih koordinata.
2. U zavisnosti da li je opcija čekirana ili nije, prikazuje se odnosno ne prikazuje se objekat u grafičkom prikazu.
3. U zavisnosti da li je opcija čekirana ili nije, prikazuje se odnosno ne prikazuje se oznaka u grafičkom prikazu.
4. U zavisnosti da li je opcija čekirana ili nije, prikazuje se odnosno ne prikazuje se trag pomeranja objekta u grafičkom prikazu.
5. Ova opcija služi za kopiranje u polje za unos
6. Ova opcija služi za promenu imena objekta.
7. Ova opcija služi za brisanje objekta.
8. Odabirom ove opcije otvara se novi prozor sa dodatnim osobinama objekta.

### *2.4.3. Tabelarni prikaz*

**Tabelarni prikaz** se sastoji od ćelija. Svaka ćelija ima jedinstveno ime pomoću kojeg možemo direktno da je adresiramo. Na primer, ćelija u koloni A i vrsti 4 se zove A4. U tabeli se, pored brojeva, mogu unositi svi tipovi matematičkih objekata, na primer koordinate tačaka, funkcije, naredbe.




*Slika 16. Tabelarni prikaz*




*Slika 17. Alati za tabelarni prikaz*

## *2.4.4. Umetanje apleta*

Dok je aktivan prozor GeoGebre pritiskom dugmića na tastaturi **Ctrl+Shift+M** otvara se prozor sa informacijom da je izvoz u bafer uspeo.


*Slika 18. Prozor sa informacijom o izvozu u bafer*

Otvorite HTML dokument i pritisnite dugmiće na tastaturi **Ctrl+V**.

Na ovaj način umetnuti aplet korisnik ne može preuzeti. Zato možemo izbrisati reč **unsigned/** u drugom redu koda

```
<applet name="ggbApplet" code="geogebra.GeoGebraApplet" archive="geogebra.jar"
   codebase="http://www.geogebra.org/webstart/3.2/unsigned/"
```

pa će nakon dvostrukog klika na aplet korisniku biti dozvoljeno preuzeti aplet.

# 3. Internet prezentacija „Linearna funkcija“

*„Svet je bogat inteligencijom, ali je nedovoljno snabdeven hrabrošću da se stvari urade drugačije.“* Merilin vos Savant

## *3.1. O prezentaciji „Linearna funkcija“*

U ovom poglavlju predstavljeni su interaktivni materijali koji se odnose na linearnu funkciju. Ovaj nastavni materijal namenjen je učenicima, kao i profesorima matematike, u starijim razredima osnovne škole. U njemu su, zbog povezanosti nastavnih sadržaja matematike od 5. do 8. razreda, dati primeri, ilustracije i objašnjenja iz oblasti koje se obrađuju u nastavi matematike predviđenih za drugi ciklus osnovnog obrazovanja. U izradi materijala korišćene su informacione i veb tehnologije. Pomenuti materijal je javno dostupan na adresi http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml03001/.

Kreirani materijali predstavljaju interaktivnu interpretaciju poglavlja Linearna funkcija iz udzbenika [6] uz eventualne izmene koje su se oslanjale na udzbenik [7]. Zbog povezanosti nastavnih sadržaja predstavljeni su i poglavlja Brojevna poluprava i prava i Zavisne veličine i njihivo grafičko predstavljanje. Za kreniranje ovih materijala korišćeni su udzbenici [8], [9], [10], uz eventualne izmene koje su se oslanjale na udzbenike [11], [12], [13].

Na početnoj strani prezentacije (http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml03001/) nalazi se link *Master rad* koji vodi ka interaktivnim sadržajima. Sadržaj je kreiran u tri teme i to:

1. Brojevna poluprava i prava,
2. Zavisne veličine i njihovo grafičko predstavljanje,
3. Linearna funkcija.

U okviru svake teme kreirano je po nekoliko stranica, tj. u okviru teme *Brojevna poluprava i prava* kreirano je pet stranica, u okviru teme *Zavisne veličine i njihovo grafičko predstavljanje* kreirano je šest stranica, a u okviru teme *Linearna funkcija* sedam stranica. U daljem tekstu biće prikazani sadržaji stranica.

## *3.2. Brojevna poluprava i prava*

Sadržaj obrađen u temi *Brojevna poluprava i prava* realizuju se u nastavnom programu za 5. i 6. razred osnovne škole. Tako se, u 5. razredu obrađuju pozitivni razlomci, čiju obradu prate odgovarajući grafički prikazi na brojevnoj polupravoj. U 6. razredu uvodi pojam racionalnog broja, a najprirodniji način uvođenja negativnog broja je preko suprotnog broja, uz odgovarajuću ilustraciju na brojevnoj pravoj.

Tema *Brojevna poluprava i prava* je podeljena na podteme:

1. Brojevna poluprava,
2. Pridruživanje tačaka brojevne poluprave prirodnim brojevima,
3. Brojevna prava,
4. Pridruživanje tačaka brojevne prave celim brojevima,
5. Pridruživanje tačaka brojevne prave razlomcima.

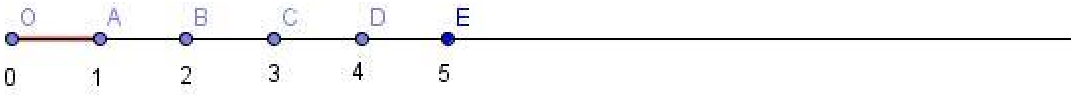
### *3.2.1 Brojevna poluprava*

Neka je data poluprava sa početkom u tački $O$. Odredimo najpre tačku $A$ takvu da dužinu duži $OA$ smatramo jediničnom. Desno od $A$ odredimo tačke $B$, $C$, $D$, $E$, tako da je

$$OA=AB=BC=CD=DE.$$

Tada su dužine duž: $OB=2$, $OC=3$, $OD=4$, $OE=5$. Zbog toga tačkama $O$, $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, redom pridružujemo brojeve 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ove brojeve nazivamo **koordinatama** ili **apscisama tačaka**. Tačke sa odgovarajućim koordinatama zapisujemo:

$$O(0), A(1), B(2), C(3), D(4), E(5).$$




*Slika 19. Brojevna poluprava*

Ovako definisana poluprava naziva se ***brojevna poluprava***.

## 3.2.2 Pridruživanje tačaka brojevne poluprave prirodnim brojevima

Na brojevnoj polupravoj prirodnom broju k dodeljujemo tačku *I* tako da k bude merni broj dužine duži *OI*, merene pomoću izabrane jedinične duži *OI*.

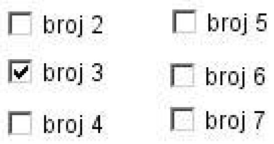
Brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...čine ***skup prirodnih brojeva***, koji označavamo sa $N$,

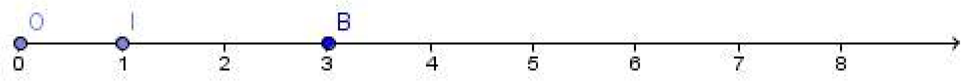
$$N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...\}.$$

Ako skupu $N$ dodamo 0, dobijamo prošireni skup prirodnih brojeva, koji označavamo sa $N_0$,

$$N_0=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...\}.$$

Primer:




*Slika 20. Pridruživanje tačaka brojevne poluprave prirodnim brojevima*

Čekiranjem određenog broja u GeoGebra apletu prikazuje se tačka na brojevnoj polupravi. Na primer, na slici je čekiran broj 3, u GeoGebra apletu prikazuje se tačka *B* kojoj pridružujemo broj 3.

Na ovoj stranici nalazi se link *Saznaj više*. To je link o prirodnim brojevima.

Brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,... čine *skup prirodnih brojeva*, koji označavamo sa *N*,

$$N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...\}.$$

Ako skupu *N* dodamo 0, dobijamo prošireni skup prirodnih brojeva, koji označavamo sa $N_0$,

$$N_0=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...\}.$$

Skup prirodnih brojeva ima sledeće osobine:

- Skup *N* ima najmanji element i to je broj 1,
- Svaki prirodan broj, osim prvoga, ima prethodnika u skupu *N*,
- Svaki prirodan broj ima sledbenika u skupu *N*,
- Ne postoji najveći prirodan broj,
- Prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo.

Na skupovima *N* i $N_0$ izvodimo operacije sabiranja i množenja. Ako sabiramo ili množimo dva prirodna broja, rezultat je takođe prirodan broj.

Važe sledeće jednakosti:

$a+b=b+a$ i $ab=ba$ *komutativnost*

$a+(b+c)=(a+b)+c$ i $a(bc)=(ab)c$ *asocijativnost*

$a(b+c)=ab+ac$ *distributivnost množenja u odnosu na zbir.*

Takođe važe:

$$a+0=0+a=a$$

$$a0=0a=0$$

$$a1=1a=a$$

Oduzimanje definišemo preko sabiranja: Kako je npr. 9=3+6, to je 9-3=6, odnosno 9-6=3.

Razlika prirodnih brojeva ne mora biti prirodan broj.

Rezultat deljenja prirodnih brojeva nije uvek prirodan broj. Deljenje nulom nije definisano, tj. $a:0$ nije definisano.

Takođe, ne zaboravimo da vrednost nekog izraza, u kojem ima više računskih operacija, izračunavamo poštujući sledeći redosled:

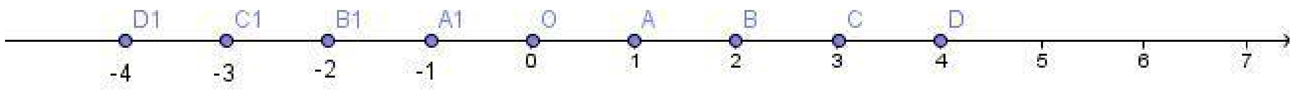
1. Ako nema zagrada, prvo se množi i deli, pa posle sabira i oduzima (množenje i deljenje su starije operacije).
2. Ako ima zagrada, prvo "računamo u zagradi" uz poštovanje pravila 1.
3. Ako imamo zagradu u zagradi, starija je unutrašnja zagrada.

## 3.2.3. Brojevna prava

Ako desnu brojevnu polupravu proširimo levom polupravom, iste prave, prenoseći levo od *O* tačke $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$,... suprotno tačkama *A*, *B*, *C*, *D*,... u odnosu na početnu tačku *O*, pri čemu su dužine duži

$$OA_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = 1$$

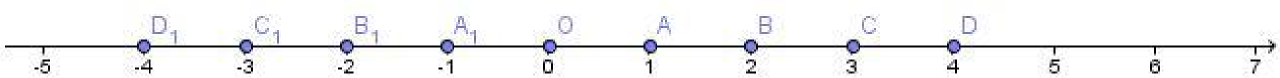
dobijamo brojevnu pravu.




*Slika 21. Brojevna prava*

## 3.2.4. Pridruživanje tačaka brojevne prave celim brojevima

Tačkama *A*, *B*, *C*, *D*,... pridružili smo brojeve 1, 2, 3, 4,... koje označavaju rastojanja ovih tačaka od tačke *O*. Tačkama $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$,... koje su sa leve strane tačke *O* i udaljene takođe redom: 1, 2, 3, 4,... pridružujemo brojeve: -1, -2, -3, -4,...




*Slika 22. Celi brojevi*

Uočimo sledeće:

Od tačke *O* do tačke *A* krećemo se udesno za dužinu 1, a do tačke $A_1$ krećemo se na suprotnu stranu za istu dužinu. Zbog toga odgovarajuće brojeve 1 i -1 nazivamo *suprotnim brojevima*.

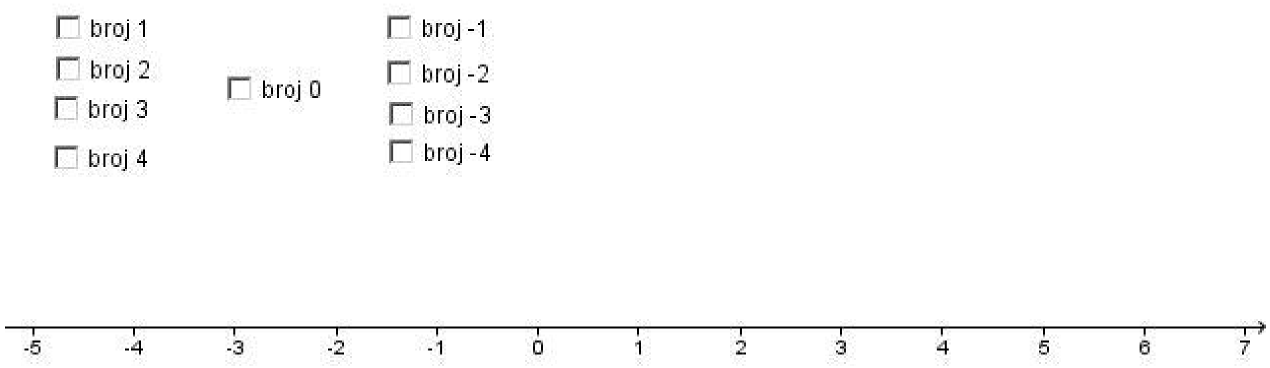
Ako je n prirodan broj, onda su n i - n suprotni celi brojevi. Broj nula je sam sebi suprotan broj.

Prirodni brojevi 1, 2, 3, 4,... su desno od 0 , oni su veći od nule i nazivamo ih *pozitivnim*.

Na brojevnoj pravoj brojevi -1, -2, -3, -4,... su levo od 0, pa su oni manji od nule i nazivamo ih *negativnim*.

Svi ovi brojevi čine zajedno <u>*skup celih brojeva*</u>, koji označavamo sa *Z*,

Z={...,-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,...}.

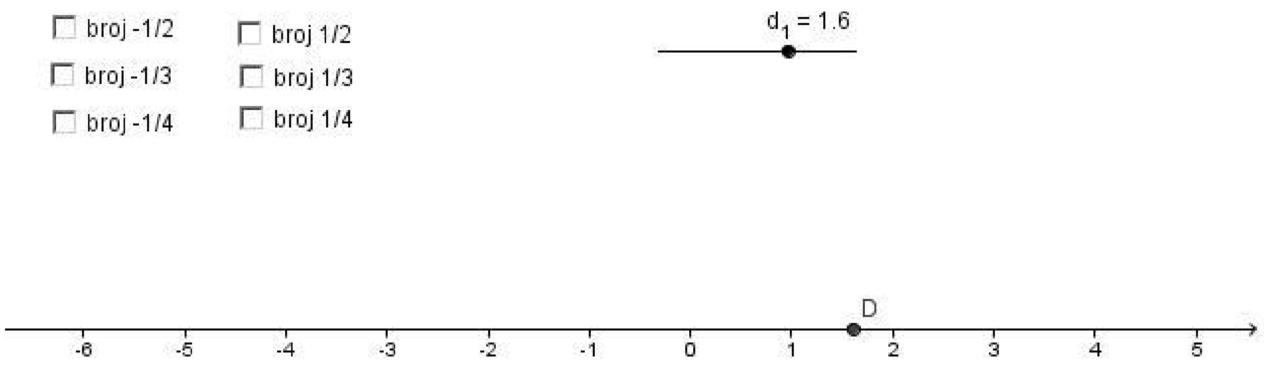



*Slika 23. Pridruživanje tačaka brojevne prave celim brojevima*

## <u>*3.2.5.Pridruživanje tačaka brojevne prave razlomcima*</u>

Svakom razlomku odgovara tačno jedna tačka brojevne prave, dobijena nanošenjem m puta n-tog dela jediničine duži *OI* brojevne prave od tačke *O* u smeru tačke *I*. Ukoliko se nanošenje obavi u negativnom smeru, dolazi se do tačke kojoj pridružujemo broj $-\frac{m}{n}$ suprotan broju $\frac{m}{n}$.

Svi brojevi oblika $\frac{m}{n}$ ili $-\frac{m}{n}$, kad m uzima vrednosti iz skupa $N_0$, a n iz skupa *N*, čine *skup Q racionalnih brojeva*.




*Slika 24. Pridruživanje tačaka brojevne prave razlomcima*

Objašnjenje:

- brojeve $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$, možete videti klikom na kvadratiće u gornjem levom uglu,
- odaberite koordinatu tačke *D* pomeranjem klizača.

Na ovoj stranici nalazi se link *Saznaj više*. To je link o razlomcima.

Ako su m i n prirodni brojevi, tada je $\frac{m}{n}$ razlomak u kojem brojevi m i n imaju posebna imena i posebna značenja:

- broj n je *imenilac* i označava na koliko je jednakih delova izdeljena neka celina,
- broj m je *brojilac* i označava koliko je takvih jednakih delova uzeto,
- crta između brojeva *m* i *n* je *razlomačka crta*.

$$\frac{m}{n} = \frac{brojilac}{imenilac}$$

Po imeniocu razlomci se nazivaju: polovine (delimo na dva jednaka dela), trećine (delimo na tri jednaka dela), četvrtine (delimo na 4 jednaka dela), petine, itd.

Ako su *m* i *n* prirodni brojevi, tada količnik brojeva *m* i *n* predstavlja razlomak $\frac{m}{n}$. Za *m, n* iz skupa prirodnih brojeva je $m : n = \frac{m}{n}$ pri čemu razlomačka crta označava operaciju deljenja.

Posmatrajući razlomak kao količnik dva prirodna broja, zavisno od međusobnog odnosa veličine brojioca i imenioca, možemo zapisati, na primer, da su manji od 1 razlomci:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{7},\frac{5}{9},\ldots,\text{ uopšte } \frac{m}{n}<1 \text{ ako je m<n.}$$

Slično zaključujemo, veći od 1 su razlomci:

$$\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{27}{7},\frac{11}{9},\ldots,\text{ uopšte } \frac{m}{n}>1\text{, ako je m>n.}$$

Za razlomak manji od 1, usvajamo naziv *pravi razlomak.*

Razlomke koji su veći od 1 nazivamo *nepravim razlomcima*.

Svi brojevi oblika $\frac{m}{n}$ ili -$\frac{m}{n}$ kad m uzima vrednosti iz skupa $N_0$, a n iz skupa *N*, čine *skup Q racionalnih brojeva.*

## *3.3 Zavisne veličine i njihovo grafičko predstavljanje*

Sadržaj obrađen u temi *Zavisne veličine i njihovo grafičko predstavljanje* realizuju se u nastavnom programu za 7. razred osnovne škole. U 7. razredu se uvodi pojam pravouglog koordinatnog sistema.

Tema *Zavisne veličine i njihovo grafičko predstavljanje* je podeljena na podteme:

1. Dekart,
2. Pravougli koordinatni sistem u ravni,
3. Rastojanje tačaka u koordinatnoj ravni,
4. Direktno proporcionalne veličine,
5. Obrnuto proporcionalne veličine,
6. Grafički prikaz direktno proporcionalnih veličina.

## *3.3.1. Dekart*

Način određivanja položaja tačaka u ravni potiče od francuskog matematičara i filozofa *Rene Dekarta*, pa se pravougli koordinatni sistem naziva i Dekartov koordinatni sistem.

*Slika 25. Dekart*

Rođen je 31. marta 1596. godine u La Eju (La Haue, danas La Haue Descartes) u Francuskoj. Obrazovanje je stekao u Anjonu upisavši Jezuitsku školu u La Flešu (La Fleche) sa samo osam godina (1604). Tu je proveo osam godina učeći logiku, matematiku i tradicionalnu Aristotelovu filozofiju. Imao je problema sa zdravljem, pa je dobio dozvolu da ostaje u krevetu do jedanaest sati ujutru. Tu naviku je zadržao do kraja života. U školi je Dekart shvatio koliko on u stvari malo zna. Jedini predmet kojim je bio zadovoljan bila je matematika. Ovo saznanje ne samo što je uticalo na njegov način razmišljanja, već i na njegov celokupni rad.

Po završetku škole preselio se u Pariz i posle nekog vremena upisao je Univerzitet u Puatijeu (Poitiers). Diplomiravši prava 1616.godine, prijavio se za vojnu školu u Bredau (Breda).

Godine 1618. počeo je da uči matematiku i mehaniku kod holandskog naučnika Isaka Bekmana (Isaac Beeckman), spoznajući jedinstvo prirodnih nauka. Posle dve godine provedene u Holandiji, putovao je po Evropi da bi se 1619. godine priključio Bavarskoj vojsci. U periodu od 1620. do 1628. godine Dekart je putovao po Evropi, boraveći u Češkoj (1620), Mađarskoj (1621), Nemačkoj, Holandiji i Francuskoj (1622-1623). U Parizu je 1623. upoznao Mersena (Mersenne) koji mu je dugi niz godina bio značajna veza sa svetom nauke. Iz Pariza je otputovao u Italiju, gde je neko vreme boravio u Veneciji, da bi se ponovo 1625. godine vratio u Francusku. Dekart se vremenom umorio od silnih putovanja i odlučio da se skrasi. Dugo je birao zemlju koja bi odgovarala njegovoj prirodi i na kraju se odlučio za Holandiju. Tu je živeo tokom sledećih dvadeset godina gde je počeo da radi na svojoj prvoj velikoj tezi u oblasti fizike, pod nazivom Svet (Le Monde, ou Traité de la Lumiere). Pri završetku ovog rada do njega je stigla vest da je Galileo osuđen na kućni zatvor. Dekart je mudro odlučio da ne rizikuje objavljujući svoj rad, tako da je Svet objavljen samo delimično posle njegove smrti. U Holandiji je Dekart imao mnogo prijatelja među naučnicima. I dalje je održavao prijateljstvo sa Bekmenom i Mersenom. Kontaktirao je i sa mnogim drugim naučnicima i misliocima svoga vremena.

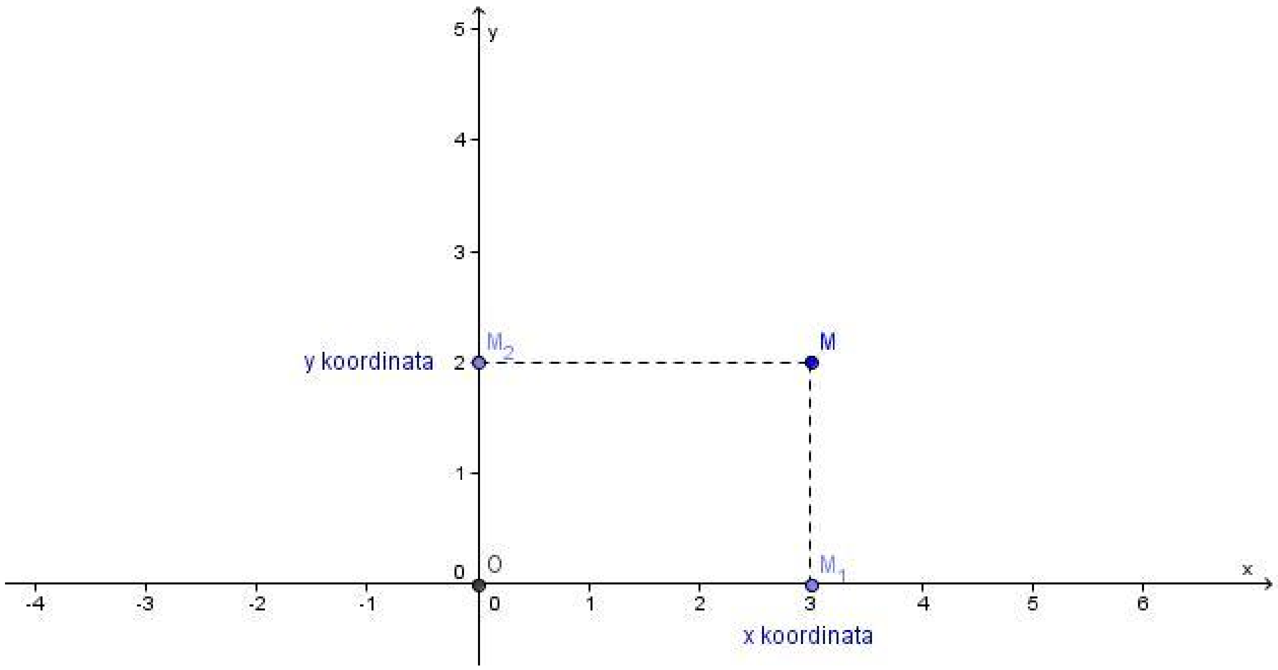
Godine 1649. švedska kraljica Kristina ubedila je Dekarta da dođe u Stokholm. Dvadesettrogodišnja kraljica je želela da crta tangente u pet sati ujutru, tako da je Dekart razbio svoju životnu naviku ustajanja u jedanaest sati. Želeći da svojim savetima utiče na ćudljivu vladarku tada močne zemlje kako bi time učinio nešto za mir u svetu, Dekart je podnosio surove uslove u zemlji stena i glečera. Posle samo nekoliko meseci provedenih na hladnoj severnoj klimi, hodajući svako jutro do palate, Dekart je umro 11. februara 1650. godine od zapaljenja pluća, u pedeset i četvrtoj godini.

## 3.3.2.Pravougli koordinatni sistem u ravni

*Pravougli koordinatni sistem*, čine dve koordinatne ose koje se seku pod pravim uglom takve da je njihova presečna tačka *O*, koordinatni početak obe koordinatne ose. Jedna koordinatna osa zove se *apscisna (x-osa)*, a druga *ordinatna (y-osa).* Ravan sa ovako izabranim koordinatnim sistemom *Oxy* zove se koordinatna ravan.

Neka je *M*, proizvoljna tačka koordinatne ravni *Oxy* i $M_1$ odnosno $M_2$, podnožja normala iz nje na x, odnosno y osu. Tački $M_1$ odgovara realni broj *x* (očitan na x-osi), a tački $M_2$ realni broj *y* (očitan na y-osi). Njih zovemo *prva koordinata (x-koordinata, apcisa)*, odnosno *druga koordinata (y-koordinata, ordinata)* tačke *M*. Na taj način tački *M* odgovara uređeni par realnih brojeva (x, y).

Ako tačka *M* ima koordinate *x* i *y*, pisaćemo *M (x, y).*

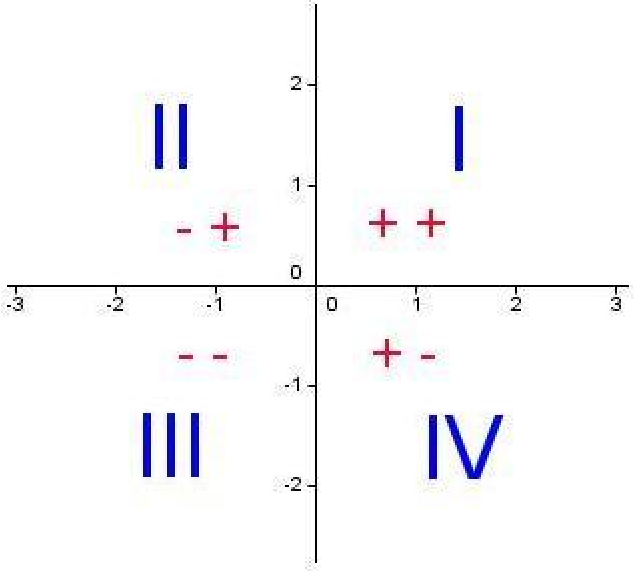



*Slika 26. Pravougli koordinatni sistem*

Primer:

Neka je data tačka *M* u koordinatnom sistemu i neka su $M_1$ odnosno $M_2$ podnožja normala iz nje na *x* odnosno *y* osu. Tački $M_1$ odgovara realni broj 3 (očitan na x-osi), a tački $M_2$ realni broj 2 (očitan na y-osi). To su prva koordinata, odnosno druga koordinata tačke *M*. Na taj način tački *M* odgovara uređeni par realnih brojeva (3, 2).

Ako tačka *M* ima koordinate 3 i 2, pisaćemo *M (3, 2).*



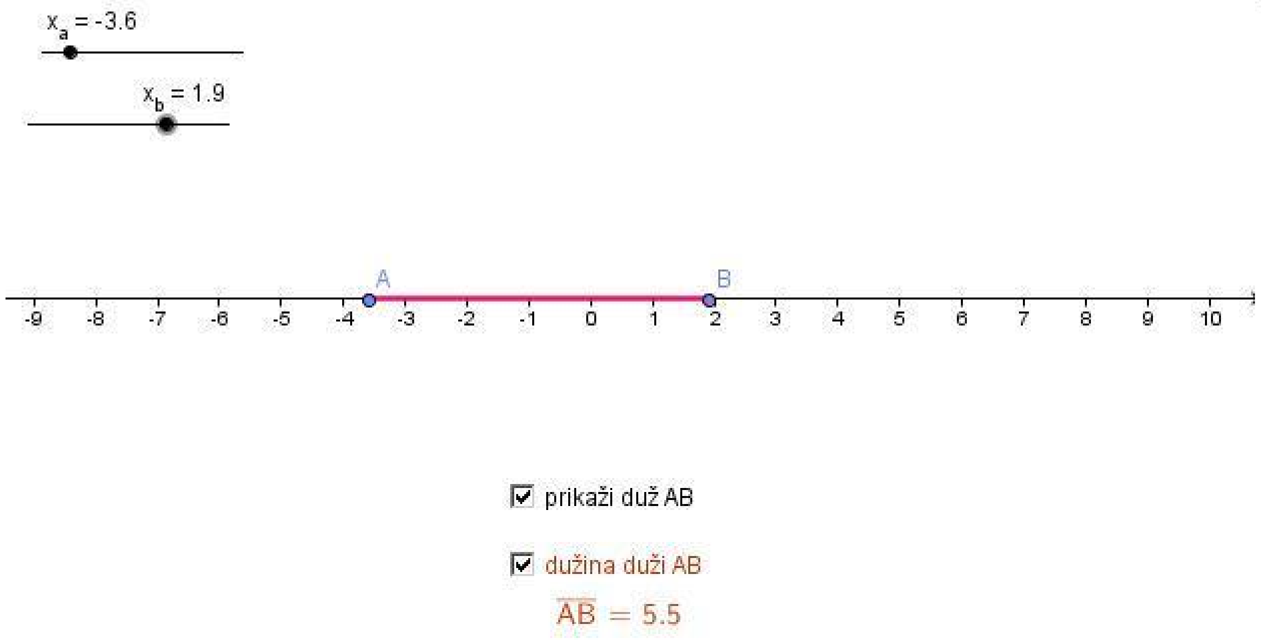

Slika 27. Kvadranti

U koordinatnom sistemu ose $x$ i $y$ određuju četiri prava ugla. Unutrašnje oblasti ovih uglova nazivamo *kvadrantima* koordinatnog sistema i označavamo ih sa I, II, III i IV, kao na slici.

Tačke koje pripadaju ovim kvadrantima razlikujemo po znacima + ili - apscise i ordinate. Kako se raspoređuju ovi znaci vidimo na slici, crveno označeno. Prvi znak odnosi se na apscisu, a drugi na ordinatu.

## 3.3.3.Rastojanje tačaka u koordinatnoj ravni

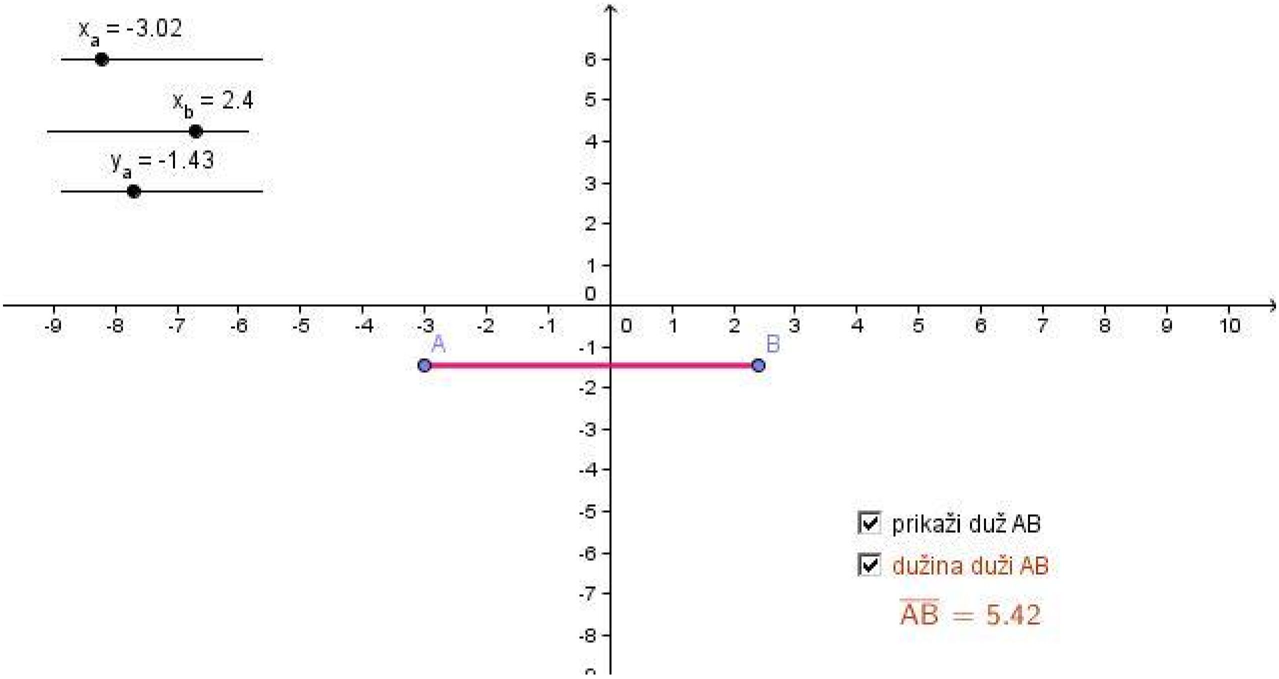
Rastojanje tačaka na brojevnoj osi izračunava se kao apsolutna vrednost razlike njihovih koordinata $|AB| = |x_A - x_B|$.




*Slika 28. Rastojanje tačaka na brojevnoj osi*

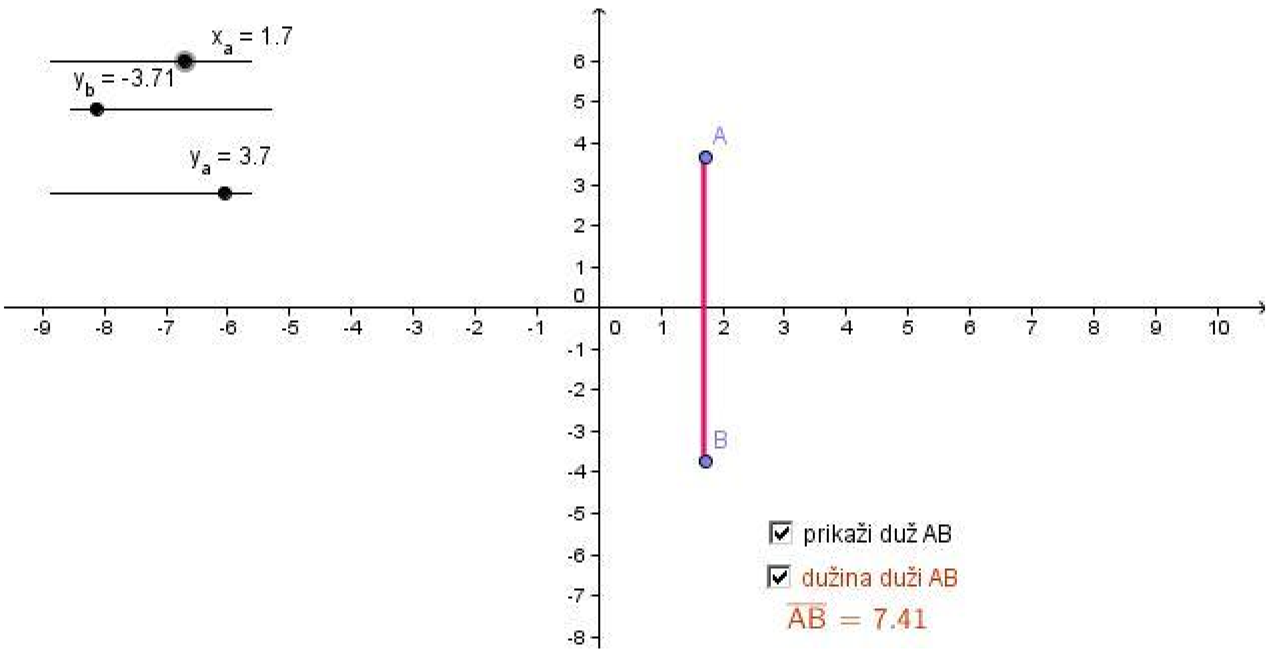
Neka je data duž $AB$ svojim koordinatama $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$.

Ako je duž $AB$ paralelna x-osi, tj. $y_A = y_B$, dužina duži $AB$ je jednaka $|AB| = |x_A - x_B|$.




*Slika 29. Dužuna duži AB paralelna x osi*

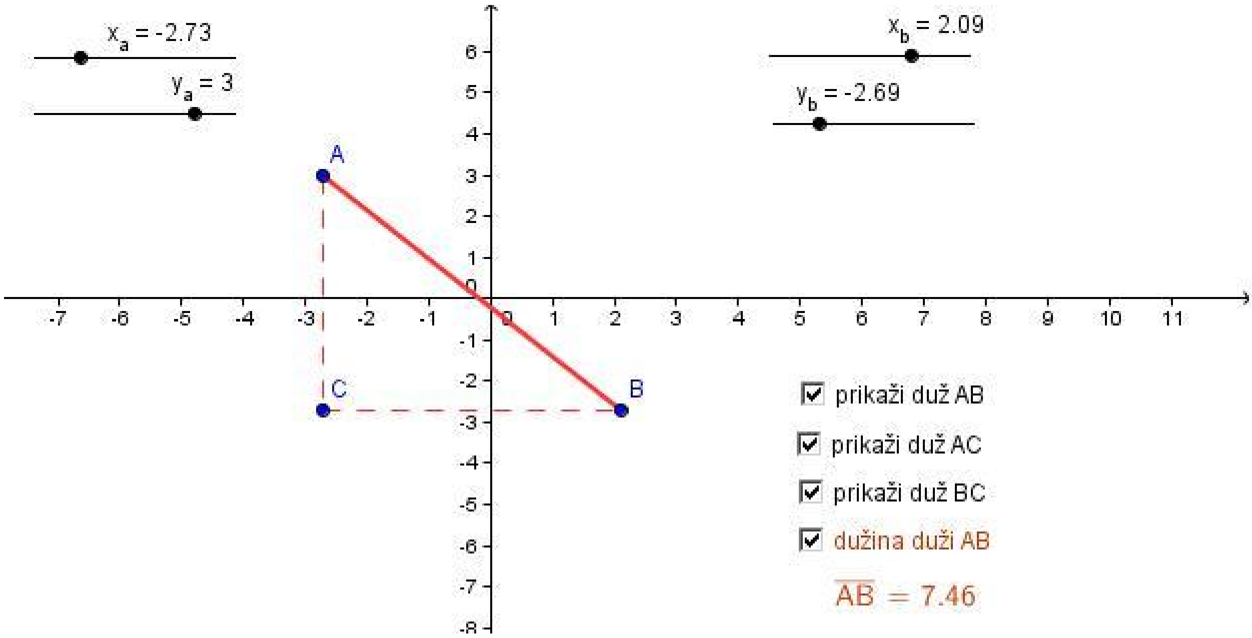
Ako je duž $AB$ paralelna y-osi, tj. $x_A = x_B$, dužina duži $AB$ je jednaka $|AB| = |y_A - y_B|$.




*Slika 30. Dužina duži AB paralelna y osi*

Ako duž *AB* nije paralelna nijednoj koordinatnoj osi, uočimo pravougli trougao kome je hipotenuza *AB*, a katete paralelne koordinatnim osama. Njihove dužine su $|x_A - x_B|$ i $|y_A - y_B|$. Primenom Pitagorine teoreme na taj trougao dobijamo da je rastojanje tačaka *A* i *B* jednako

$$|AB| = \sqrt{|x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2}\ .$$




*Slika 31. Rastojanje tačaka u ravni*

## 3.3.4. Direktno proporcionalne veličine

Veličina *y* je <u>*direktno proporcionalna*</u> veličini *x* ako je odnos $\frac{y}{x}$ svih njihovih odgovarajućih vrednosti uvek isti (konstantan) broj različit od nule.

Drugim rečima, promenljiva veličina *y* je direktno proporcionalna veličini *x* ako je za neki broj *k*, $y=kx$ za sve odgovarajuće vrednosti ovih veličina.

Broj *k* se naziva se *koeficijent proporcionalnosti*.

Osnovno svojstvo para direktno proporcionalnih veličina na osnovu kojeg se lako prepoznaje da su one direktno proporcionalne je sledeće:

Ako jedna od veličina poraste ili se smanji *m* puta, pri čemu je *m* broj različit od nule, njoj direktno proporcionalna veličina takođe poraste ili se smanji isti broj *m* puta.

## *3.3.5. Obrnuto proporcionalne veličine*

Dve veličine su *obrnuto proporcionalne* ako su proizvodi svake dve odgovarajuće vrednosti tih veličina međusobno jednaki, tj. ako postoji broj *k*, takav da je *xy=k* za svaki par odgovarajućih vrednosti *x* i *y* tih veličina.

Iz *xy=k*, $k \neq 0$ sledi da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$, pa se jedna od veličina ako se zna druga može izračunati po obrascima:

$$y = \frac{k}{x},\ x = \frac{k}{y}.$$

Obrnuta proporcionalnost dve veličine prepoznaje se najlekše na osnovu sledećeg svojstva:

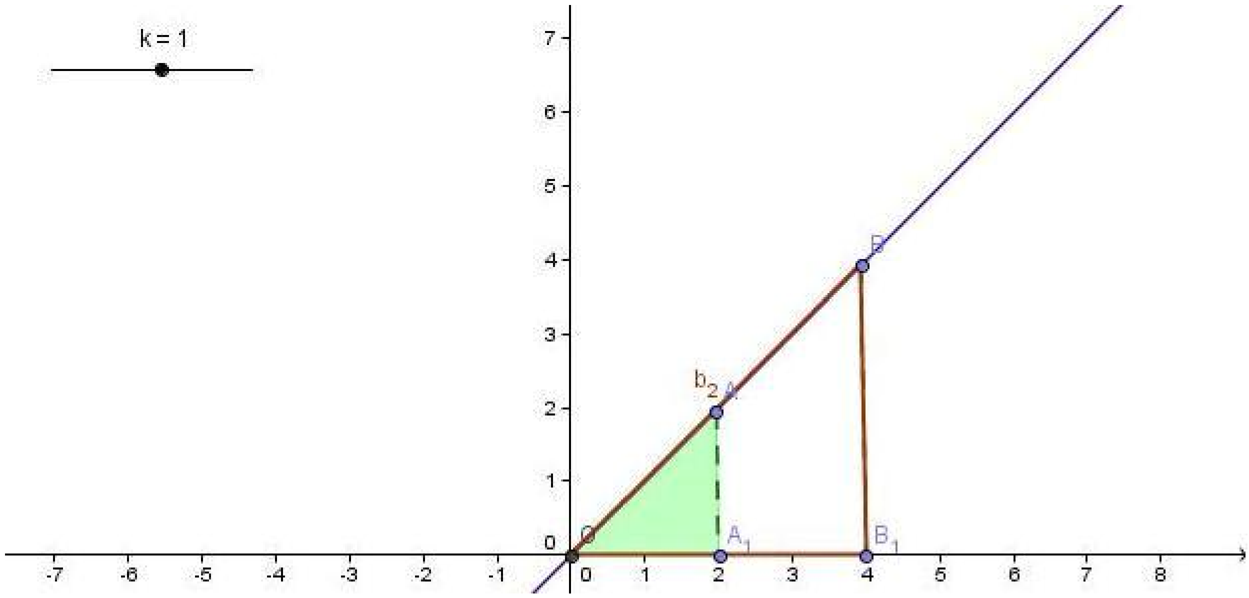
Ako se veličina *x* promeni u *mx*, gde je *m* proizvoljan broj, veličina *y* postaje $\frac{y}{m}$.

## *3.3.6. Grafički prikaz direktno proporcionalnih veličina*

**Grafik zavisnosti dve direktno proporcionalne veličine je prava koja sadrži koordinatni početak.**

Dokaz:

Znamo da je promenljiva veličina *y* direktno proporcionalna veličini *x* ako je za neki broj *k*, *y=kx* za sve odgovarajuće vrednosti ovih veličina. Nećemo umanjiti snagu dokaza, ako potvrdimo samo slučaj *k>0*. Kako je *y=0k=0*, za *x=0*, zaključujemo da koordinatni početak *O* pripada grafiku. Neka su $x_1$ i $x_2$ apscise dveju tačke grafika. Nije neophodno, ali uzmimo da je $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$. Budući da je *k* konstanta, za svako $x \neq 0$ je $\frac{y}{x} = k$. Uzimajući $x_1$ i $x_2$ za apscise, odredili smo dve tačke grafika, različite od *O*. Neka su to tačke *A*, *B*. Dokazaćemo da su tačke *O*, *A* i *B* uvek kolinearne.




*Slika 32. Grafički prikaz direktno proporcionalnih veličina*

Neka su $A_1$ i $B_1$ podnožje normala iz $A$ i $B$ na osu $Ox$. Tada koordinate $x_1$ i $y_1$ tačke $A$ predstavljaju dužine duži $OA_1$ i $AA_1$. Slično, zaključujemo da je $OB_1 = x_2$ i $BB_1 = y_1$. Uporedimo pravougle trouglove $OAA_1$ i $OBB_1$. Prema osobini direktno proporcionalnih veličina, važe jednakosti:

$$\frac{y_1}{x_1} = k \text{ i } \frac{y_2}{x_2} = k ,$$

pa je

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} .$$

Iz poslednje jednakosti sledi da je

$$\frac{AA_1}{OA_1} = \frac{BB_1}{OB_1} .$$

Dakle, pravougli trouglovi $OAA_1$ i $OBB_1$ slični su po stavu podudarnosti. Otuda sledi da su im jednaki odgovarajući uglovi, pa je ugao $A_1OA$ jednak uglu $B_1OB$. Pritom, kraci $OA_1$ i $OB_1$ se poklapaju, pa, pošto su $A$ i $B$ sa iste strane prave $OA_1$, poklopiće se i kraci OA i OB. Iz toga proizlazi da su tačke $O$, $A$ i $B$ na jednoj pravoj. Pritom, tačke $A$ i $B$ su bilo koje, a to znači da sve tačke koje zadovoljavaju uslov $y=kx$ pripadaju toj jednoj pravoj.

## *3.4. Linearna funkcija*

Sadržaj obrađen u temi *Linearna funkcija* realizuju se u nastavnom programu za 8. razred osnovne škole. U 8. razredu se uvodi pojam linearna funkcija. U obradi linearne funkcije koriste se znanja i umenja stečena iz oblasti koje su obrađivane u nastavnom programu matematike za 7. razred.

Tema *Linearna funkcija* je podeljena na podteme:

1. Pojam linearne funkcije,
2. Grafik linearne funkcije,
3. Nula linearne funkcije,
4. Znak linearne funkcije,
5. Tok linearne funkcije,
6. Eksplicitno i implicitno zadavanje linearne funkcije,
7. Jednačina prave.

### *3.4.1. Pojam linearne funkcije*

Zavisnost veličine y od promenljive veličine $x$ oblika $y=kx+n$ za zadate brojeve $k$ i $n$ naziva se *linearna funkcija*. Promenljivu $x$ nazivamo *nezavisnom ili argumentom*, a $y$ je *zavisna promenljiva ili vrednost funkcije*. Brojeve $k$ i $n$ nazivamo *koeficijentima* linearne funkcije.

Kod linearne funkcije $y=kx+n$, nezavisno promenljiva $x$ može uzimati vrednosti iz bilo kojeg podskupa $D$ skupa realnih brojeva $R$, jer je za sve $x$ iz $D$ jedinstveno određen odgovarajući realni broj *y=kx+n*. Skup vrednosti argumenta za koje je funkcija definisana, naziva se *oblast definisanosti* funkcije ili *domen* argumenta.

Skup odgovarajućih vrednosti funkcije, za sve vrednosti argumenta iz domena, naziva se *kodomen* funkcije.

Linearni izraz *y=kx+n*, razmatran kao običan algebarski izraz, postoji za sve realne vrednosti promenljive *x*.

**Linearna funkcija *y=kx+n* definisana je za sve realne vrednosti promenljive *x*, ako ne postoji neko posebno ograničenje.**

## *3.4.2.Grafik linearne funkcije*

**Grafik linearne funkcije predstavlja pravu.**

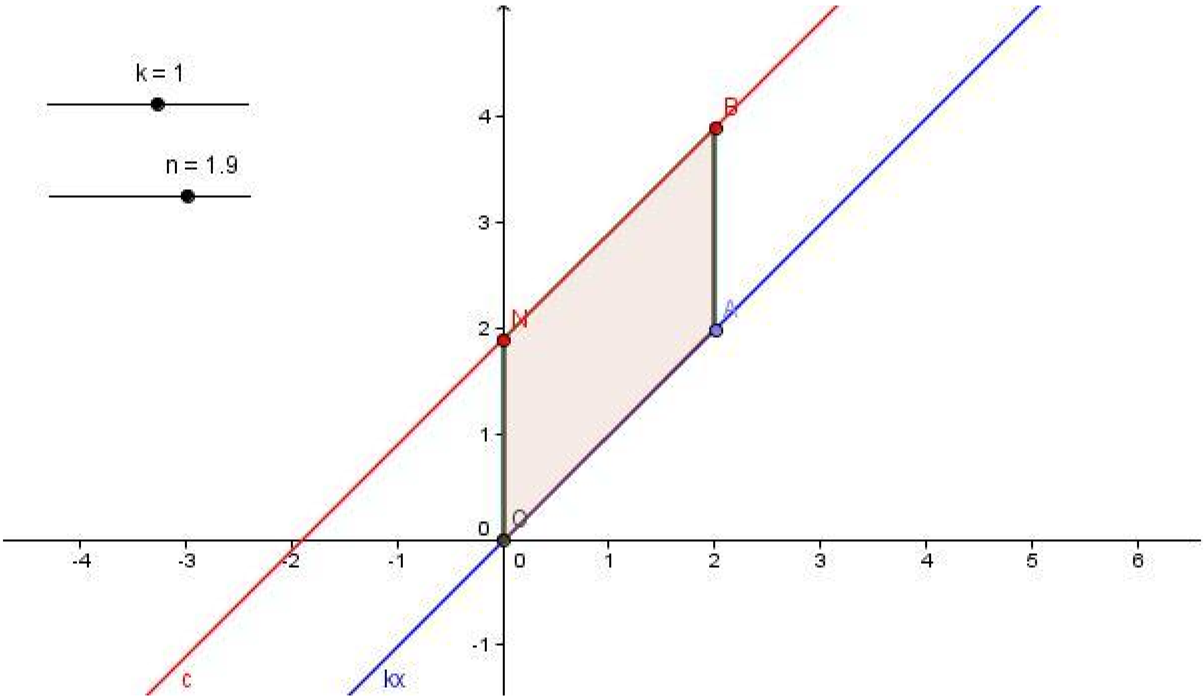
Dokaz:

Ako je $k \neq 0$, grafik linearne funkcije *y=kx* je prava linija koja sadrzi koordinatni početak (Dokazano u grafičkom prikazu direktno proporcionalnih veličina) .

Za *k=0* funkcija glasi *y=0*, pa se njen grafik poklapa sa x-osom (Dokazano u grafičkom prikazu direktno proporcionalnih veličina).

Neka je sada data funkcija *y=kx+n*. Pretpostavimo da je *k>0* i *n>0*. Prvo nacrtajmo grafik funkcije *y=kx*. Za to je bilo dovoljno da uzmemo tačku *O* i tačku $A(x_1, y_1)$.

Za grafik funkcije *y=kx+n* odredimo *y=0k+n=n*, za *x=0* i $y_1 = kx_1 + n$. Tako dobijamo tačke *N(0,n)* i $B(x_1, kx_1 + n)$. Kad uporedimo ordinate tačaka *O* i *N*, vidimo da je druga veća za *n*. Isto važi za tačke *A* i *B*. Uočavamo da su duži *ON* i *AB* jednake *n* i paralelne, pa je četvorougao *OABN* paralelogram. Tačka *A* je proizvoljno izabrana, a njoj odgovarajuća tačka *B* grafika funkcije *y=kx+n* uvek određuje paralelogram *OABN*. Sledi da je grafik funkcije *y=kx+n* prava paralelna sa grafikom funkcije *y=kx*.




*Slika 33. Grafik linearne funkcije*

Kako se vrednost funkcije $y=kx+n$ u tački $x$ dobija kada se na vrednost funkcije $y=kx$ u tački $x$ doda broj $n$, grafik funkcije $y=kx+n$ dobija se pomeranjem svake tačke za $|n|$:

- nagore, ako je $n>0$
- nadole, ako je $n<0$.

Zbog $y(0)=0k+n=n$, vidi se:

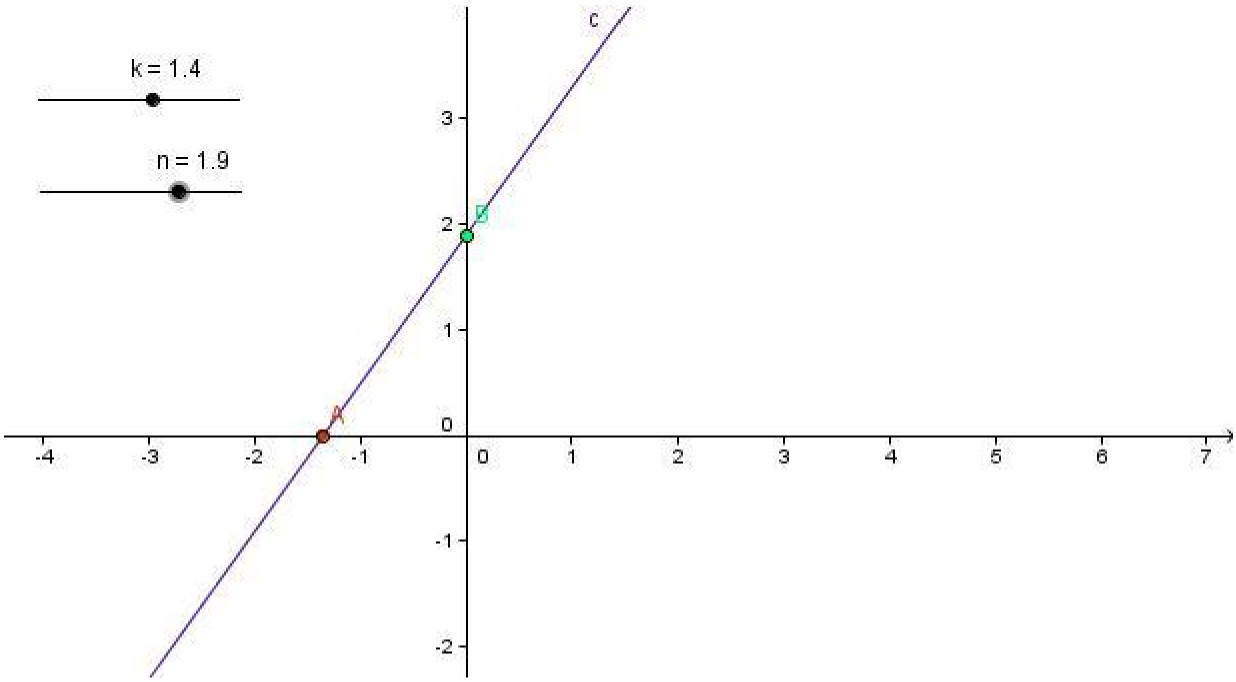
$n$ je jednako vrednosti funkcije $y=kx+n$ za $x=0$.

Grafik funkcije $y=kx+n$ je prava koja sadrzi tačku $(0, n)$ na y-osi i paralelna je pravoj koja je grafik funkcije $y=kx$.

## *3.4.3. Nula linearne funkcije*

Vrednost nezavisno promenljive $x$ za koju je vrednost linearne funkcije $y=kx+n$ jednaka nuli, tj. rešenje jednačine $kx+n=0$, naziva se **nula funkcije**.

Nula funkcije je prva koordinata tačke preseka grafika funkcije i $x$-ose.




*Slika 34. Nula funkcije*

Tačka u kojoj grafik linearne funkcije $y=kx+n$ seče $x$-osu ima koordinate $\left(-\frac{n}{k},0\right)$.

Grafik linearne funkcije $y=kx+n$ seče $y$-osu u tački koja je određena uređenim parom $(0, n)$. Broj n naziva se *odsečak prave na y-osi*.

Ako je $n>0$, tada je odsečak na pozitivnom delu $y$-ose.

Ako je $n<0$, odsečak je na negativnom delu $y$-ose.

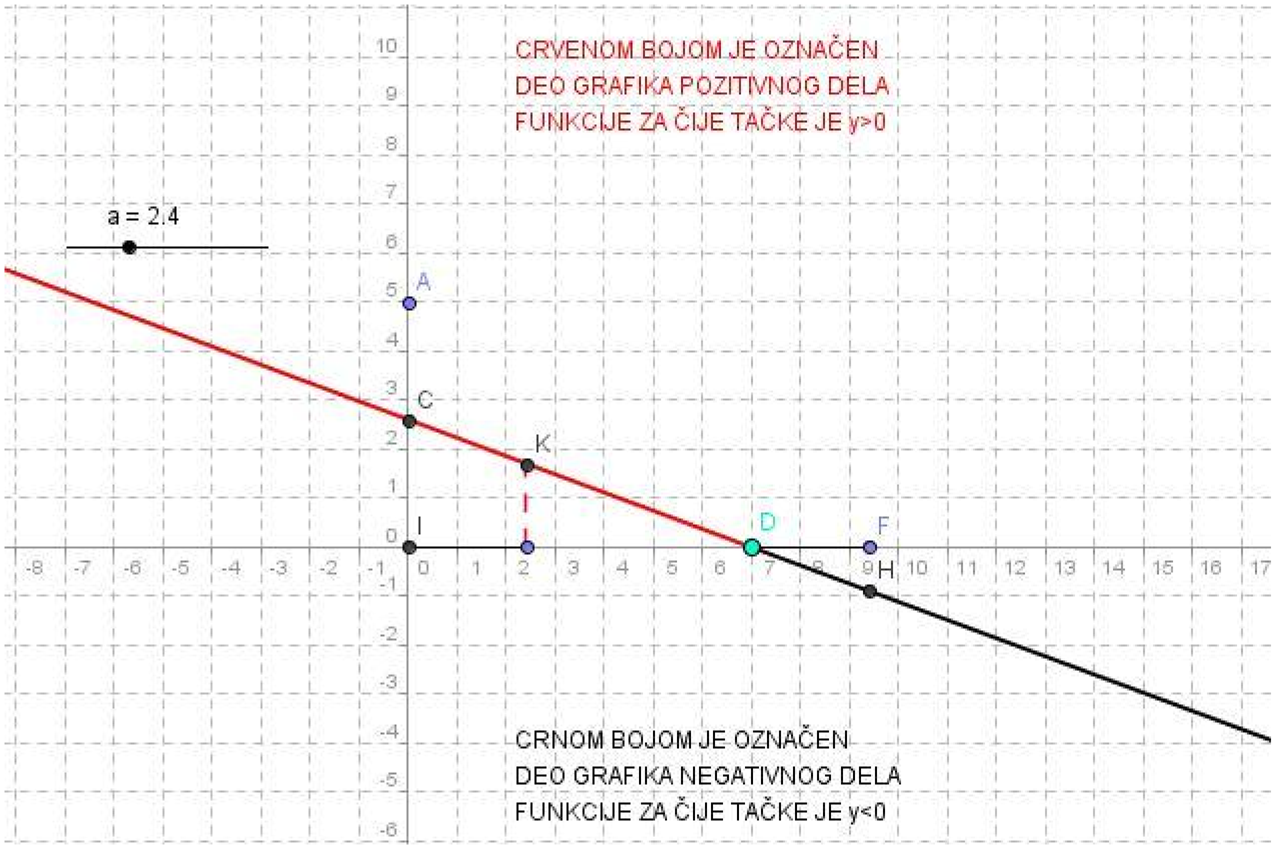
Za $n=0$, prava prolazi kroz koordinatni početak.

### *3.4.4. Znak linearne funkcije*

Određivanje vrednosti argumenta $x$ za koje su vrednosti funkcije pozitivne ili negativne je postupak određivanja znaka linearne funkcije.

Ako je u tački $x$ odgovarajuća vrednost $y$ linearne funkcije pozitivna, odgovarajuća tačka $(x, y)$ njenog grafika je iznad x-ose.

Ako je u tački *x* odgovarajuća vrednost *y* linearne funkcije negativna, odgovarajuća tačka *(x, y)* njenog grafika je ispod x-ose.




*Slika 35. Znak linearne funkcije*

## *3.4.5.Tok linearne funkcije*

**Ako je *k>0*, vrednost linearne funkcije *y=kx+n* raste sa porastom nezavisno promenljive, linearna funkcija je *rastuća*.**

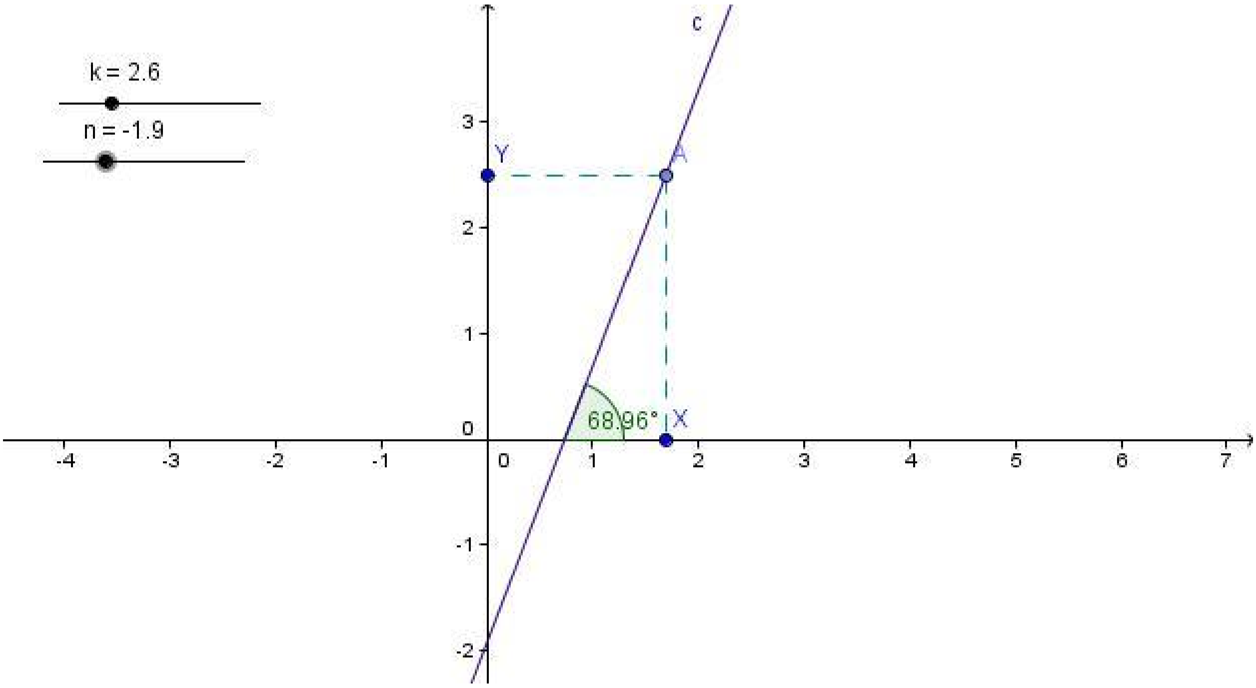
Dokaz:

Neka je $k>0$ u funkciji $y=kx+n$ i neka su $x_1$ i $x_2$ vrednosti argumenta, takve da je $x_2 > x_1$. Tada je $x_2 - x_1 > 0$. Odgovarajuće vrednosti funkcije su $y_1 = kx_1 + n$ i $y_2 = kx_2 + n$. Uporedimo vrednosti $y_1$ i $y_2$, tj. odredimo znak razlike $y_2 - y_1$:

$$y_2 - y_1 = kx_2 + n - (kx_1 + n) = kx_2 + n - kx_1 - n = k(x_2 - x_1) > 0 .$$

Proizvod $k(x_2 - x_1) > 0$, jer je i k>0 i $x_2 - x_1 > 0$. Zaključak: $y_2 > y_1$ ako je k>0.

Grafik ovakve funkcije ima *oštar* nagibni ugao prema pozitivnom delu apscisne ose.




*Slika 36. Rastuća funkcija*

Osnovno svojstvo rastuće fukcije:

- kada se vrednost promenljive x uveća, vrednost promenljive y se uveća,
- kada se vrednost promenljive x smanji, vrednost promenljive y se smanji.

**Ako je k<0, vrednost linearne funkcije *y=kx+n* opada sa porastom nezavisno promenljive, linearna funkcija je *opadajuća*.**

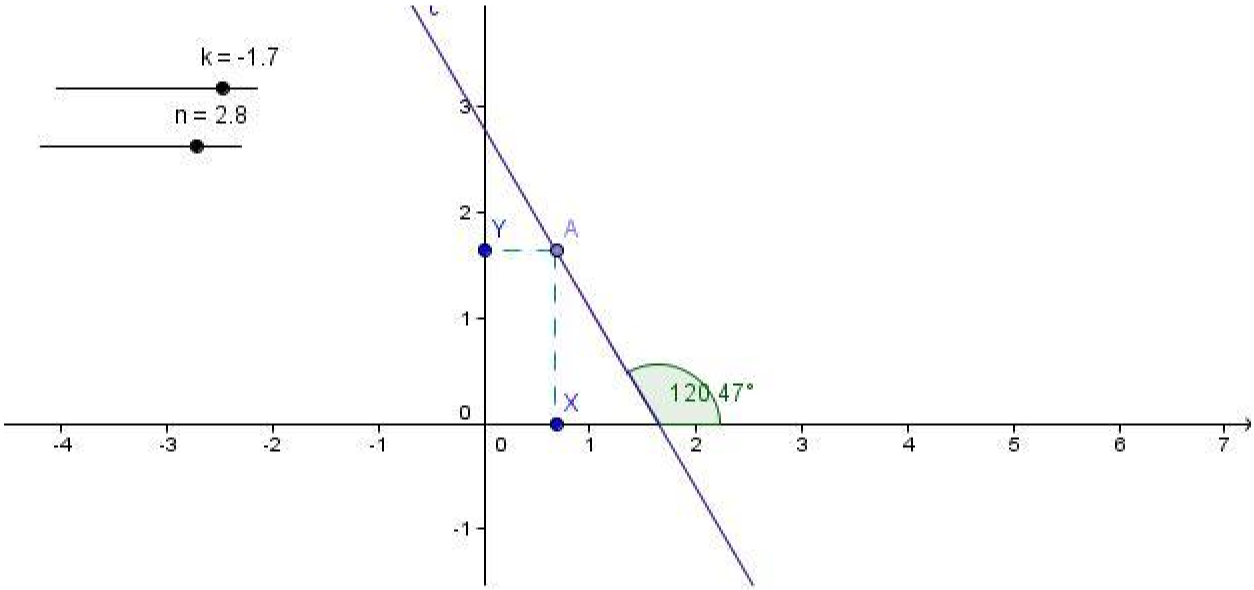
Dokaz:

Neka je k<0 u funkciji *y=kx+n* i neka su $x_1$ i $x_2$ vrednosti argumenta, takve da je $x_2 > x_1$. Tada je $x_2 - x_1$>0. Odgovarajuće vrednosti funkcije su $y_1 = kx_1 + n$ i $y_2 = kx_2 + n$. Uporedimo vrednosti $y_1$ i $y_2$, tj. odredimo znak razlike $y_2 - y_1$:

$$y_2 - y_1 = kx_2 + n - (kx_1 + n) = kx_2 + n - kx_1 - n = k(x_2 - x_1) < 0\,.$$

Proizvod $k(x_2 - x_1) < 0$, jer je *k<0* a $x_2 - x_1$>0. Zaključak: $y_2 < y_1$ ako je k<0.

Grafik ovakve funkcije ima *tup* nagibni ugao prema x-osi.




*Slika 37. Opadajuća funkcija*

Osnovno svojstvo opadajuće funkcije:

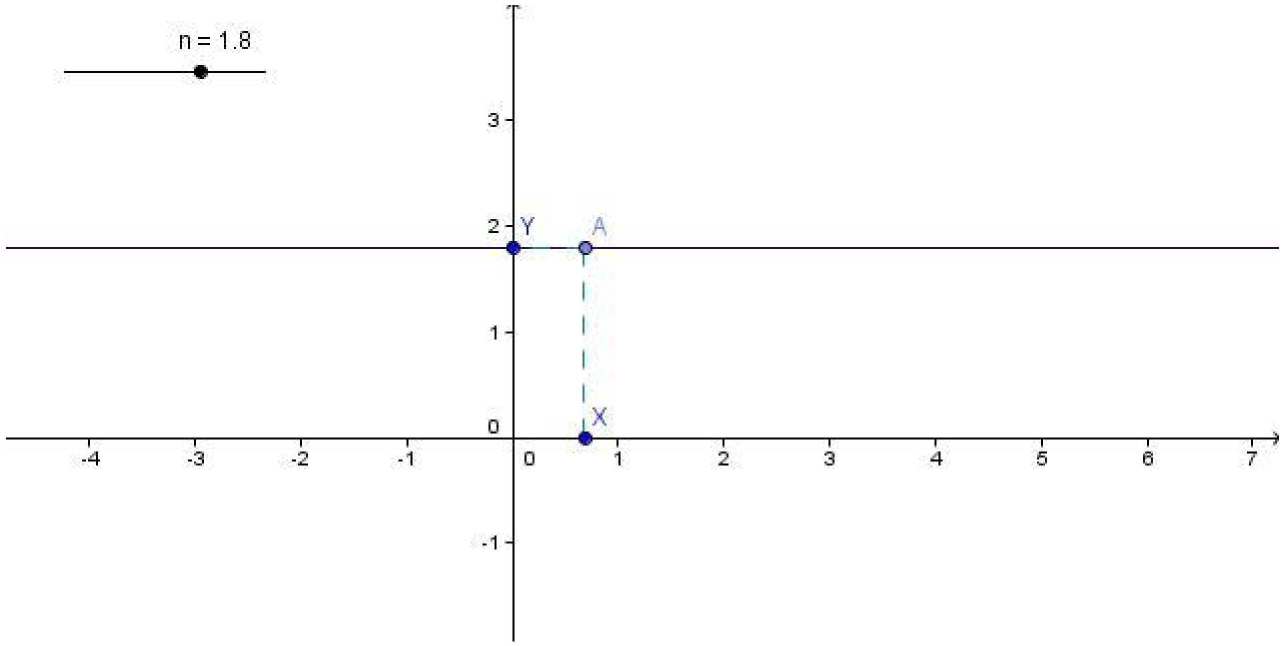
- kada se vrednost promenljive *x* uveća, vrednost promenljive *y* se smanji,
- kada se vrednost promenljive *x* smanji, vrednost promenljive *y* se uveća.

**Za *k=0*, linearna funkcija je konstantna, tj. ne menja vrednost na domenu.**

Dokaz:

Kada je *k=0*, imamo funkciju *y=0x+n*, odnosno *y=n*, tj. prava paralelna osi *Ox*.

Grafik ovakve funkcije *je prava paralelna x-osi*.




*Slika 38. Konstantna funkcija*

## *3.4.6. Eksplicitno i implicitno zadavanje linearne funkcije*

Razmotrimo vezu između promenljivih *x* i *y* oblika

$$ax+by+c=0,\ (a,\ b,\ c \in R).$$

U slučaju da je $b \neq 0$, ovu vezu možemo rešiti po *y*:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{a}{c}.$$

Odavde zaključujemo da je *y* linearna funkcija od *x*, pa skup parova *(x,y)* tačaka u koordinatnoj ravni koji zadovoljavaju ovu vezu predstavlja grafik te funkcije, dakle to je prava linija.

Zapis $y = -\frac{a}{b}x - \frac{a}{c}$, tj. zapis *y=kx+n* je *eksplicitni oblik* linearne funkcije (Reč eksplicitni na latinskom jeziku znači jasan, a u matematičkoj terminologiji ima značenje „rešen po *y*“).

U slučaju da je *b=0* i $a \neq 0$,vezu možemo rešiti po *x*: $x = -\frac{c}{a}$. Sada je *x* linearna funkcija od *y* (čak konstantna). Skup svih parova *(x, y)* tačaka u koordinatnoj ravni kojima je apscisa konstantna je prava paralelna *y*-osi.

Zato vezu $ax+by+c=0$, ako je bar jedan od brojeva $a$ ili $b$ različit od nule, nazivamo *implicitni oblik* linearne funkcije (U matematičkoj terminologiji to znači, jednostavno rečeno, nerešen oblik, jer su i argument i funkcija sa iste strane znaka jednakosti.)

Kada je $a=b=0$, $c \neq 0$ ne postoje $x$ i $y$ koji zadovoljavaju datu vezu.

Kada je $a=b=c=0$ bilo koji par realnih brojeva, zadovoljava datu vezu.

## *3.4.7. Jednačina prave*

Vezu $y=kx+n$ možemo posmatrati kao jednakost sa dve nepoynate $x$ i $y$. Skup rešenja ove jednačine se onda poklapa sa grafikom linearne funkcije $y=kx+n$. Zato za vezu $y=kx+n$ kažemo da je *jednačina prave*.

Broj $k$ se naziva *koeficijent pravca* prave $y=kx+n$.

Dve prave $y = k_1x + n_1$ i $y = k_2x + n_2$ koje imaju isti koeficijent pravca $k_1 = k_2 = k$ paralelne su pravoj $y=kx$ i zbog toga su paralelne. Važi i obrnuto, paralelne prave imaju isti koeficijent pravca.

# Zaključak

U ovom radu je prikazan jedan vid nastave uz pomoć računara, tj. programskog paketa GeoGebra. Predstavljen je interaktivni materijal u kome je obrađen pojam linearne funkcije i sve oblasti koje su povezane sa ovim pojmom, a obrađuju se u osnovnoj školi.

Ovakav vid nastave iziskuje motivisanog profesora i profesora koji je spreman da se permanentno usavršava kako bi išao u korak sa tehnologijama koje se stalno razvijaju. Realno gledajući, profesori gube ogromnu količinu energije i vremena da predavanje ispišu ili nacrtaju na običnoj tabli. To vreme uopšte nije zanemarljivo i na taj način se gubi suština, jer se nema dovoljno vremena za dodatna pojašnjenja nečeg neshvaćenog na času. Ukoliko profesor ima interaktivni prikaz nekog nastavnog sadržaja, dobija dragoceno vreme na raspolaganju za rad sa učenicima. Aktivnim razgovorima sa učenicima dobija preko potrebnu interakciju.

Kod učenika se očekuje da budu aktivni, kojima će vizuelnim prikazom pojedinih delova biti objašnjeni pojmovi i omogućeno suštinsko razumevanje sadržaja. Trodimenzionalne slike predmeta, brz prikaz geometrijskih tela, pisanje u više različitih boja, debljina i slično, definitivno privlače pažnju i lakše ostaju u sećanju onih koji tu nastavu prate.

Ovaj materijal će biti koristan iz sledećih razloga:

- svaki nastavnik će moći da nađe i iskoristi neku ideju da bi unapredio svoj rad,
- svi primeri, ilustracije i prilozi mogu poslužiti ne samo kao uzor, već se mogu neposredno primeniti u procesu nastave matematike,
- povećava se motivisanost učenika,
- poboljšava se razumevanje, otkrivanje i usvajanje matematičkih pojmova, pojava i zakonitosti.

# Literatura

[1] Stanoje Petrović, Jovan Martić, Milan Petkovič, “Didaktičko-metodički priručnik za nastavu matematike V-VIII razreda osnovne škole”, Zavod za udzbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1997.

[2] Jelena Đekić-Lović, Obrad Aničić, Milica Janković, “Uvođenje računarske tehnike u nastavni proces”, Međunarodni Simpozijum, Tehnički fakultet Čačak, 2011.

[3] Vukan Popović, prof. dr Dragica Radosav, “Obrazovni računarski softver”

[4] prof. dr sc Sanja Varomanes, “Primjena računala u nastavi matematike”, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

[5] Markus Hohenwarter, Judith Hohenwarter, “GeoGebra pomoć – zvanično upitstvo 3.2”, http://www.geogebra.org/.

[6] Vladimir Mićić, Vera Jocković, Đorđe Dugošija, Vojislav Andrić, „Matematika za osmi razred osnovne škole”, Zavod za udzbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2010.

[7] Vladimir Stojanović, „Matematika za osmi razred osnovne škole“ , Matematiskop, Beograd, 2010.

[8] Vladimir Mićić, Vera Jocković, Đorđe Dugošija, Vojislav Andrić, “Matematika za peti razred osnovne škole”, Zavod za udzbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2010.

[9] Vladimir Mićić, Vera Jocković, Đorđe Dugošija, Vojislav Andrić, “Matematika za šesti razred osnovne škole”, Zavod za udzbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2010.

[10] Vladimir Mićić, Vera Jocković, Đorđe Dugošija, Vojislav Andrić, “Matematika za sedmi razred osnovne škole”, Zavod za udzbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2010.

[11] Vladimir Stojanović, „Matematika za peti razred osnovne škole“, Matematiskop, Beograd, 2007.

[12] Vladimir Stojanović, „Matematika za šesti razred osnovne škole“, Matematiskop, Beograd, 2010.

[13] Vladimir Stojanović, „Matematika za sedmi razred osnovne škole“, Matematiskop, Beograd, 2009.