Ušćumlić P. Momčilo

"NEKI PROBLEMI SINTEZE I MINIMIZACIJE U TEORIJI KONAČNIH AUTOMATA I LOGIČNIH MREŽA"

- Doktorska disertacija -

S A D R Ž A J

U V O D

Pod <u>konačnim automatom</u> se u savremenoj tehnici podrazumevaju mašine koje su u stanju da preradjuju informacije. Ne uzimajući u obzir složenost unutrašnje konstrukcije, takva mašina se može šematski prikazati kao uredjaj koji prima signale, koji su kombinacija konačnog broja ulaznih signala, preradjuje ih izvesnim promenama svojih unutrašnjih stanja čiji je broj, takodje, konačan i, na kraju izbacuje rezultate u obliku kombinacija od konačno mnogo izlaznih signala.

Sa gledišta mehanike konačni automat spada u klasu <u>dinamičkih sistema.</u> Pod ~~dinamički~~ dinamički sistem obično se podrazumevaju sistemi u tehnici, prirodi i medju živim organizmima kod kojih se procesi odvijaju u vremenu. Stanje dinamičkog sistema se u svakom trenutku odredjuje nekim brojem (konačnim ili bezskonačnim) uopštenih koordinata.

Procesi u dinamičkim sistemima se karakterišu promenom uopštenih koordinata u vr menu i opisuju jednačihama različitih tipova.

Dinamičke sisteme možemo podeliti na nekoliko klasa u zavisnosti od sledećih fakata:

a) od toga, da li se pr tpostavlja da vreme teče kontinualno ili diskretno, tj. menjali se na kontinuumu ili prebrojivom skupu.

b) od toga, ima li sistem konačan ili beskonačan broj uopštenih koordinata, i, na kraju

c) od moći skupa svih mogućih vrednosti svake od uopštenih koordinata, tj.od toga, da li je taj skup konačan, beskonačan prebrojiv ili pak kontinualan.

Sa pojmom "dinamičnog sistema" mi najčešće vezujemo sve sisteme, koji se opisuju običnim diferencijalnim jednačinama ili parcijalnim jednačinama. U sistemima te vrste broj uopštenih koordinata je konačan (obično diferencijalne jednačine) ili beskonačan (parcijalne jednačine), no kako koordinate tako i vreme se menjaju kontinualno.

U slučaju kad je vreme diskretno, tj. menja se na prebrojivom skupu, a svaka od konačnog ili beskonačnog broja uopštenih koordinata može uzimati vrednosti iz kontinualnih skupova, ponašanje sistema se opisuje diferencnim jednačinama.

Svaki dinamički sistem može biti podvrgnut spoljnim uticajima. Ti uticaji takodje mogu biti zadati na kontinuumu, prebrojivom ili konačnom skupu. U dinamičkim sistemima, opisanim diferencijalnim ili diferencnim jednačinama, obično se rasmatra konačan broj spoljnih uticaja, koji mogu uzimati proizvoljne vrednosti iz nekog kontinuuma. Pri rasmatranju dinamičkih sistema, čije se koordinate zadaju na prebrojivom skupu, prirodno se smatra da je broj spoljnih uticaja konačan i da je svaki od njih takodje zadat na konačnom skupu.

Dinamičke sisteme te vrste (vreme se zadaje na prebrojivom skupu; koordinate i spoljni uticaji se zadaju na konačnim skupovima; broj spoljnih uticaja i koordinata je konačan) zovemo konačnim dinamičkim sistemima.

Dinamičkim sistemima te klase pripadaju konačni automati i uzastopne mašine.

Opšta teorija automata se deli na dva dela, koji se nazivaju apstraktna teorija automata i strukturna teorija automata. Razlika izmedju te dve teorije se sastoji u tome, što je apstraktna teorija automata čisto matematička disciplina koja proučava automate u skladu sa gore navedenom šemom. No interesujući se za tehničke detalje konstrukcije, tj. strukturom samog automata i njegovih ulaznih i izlaznih signala, ova teorija proučava automate kao sisteme koji raspolažu konačnom ulaznom azbukom, konačnim skupom unutrašnjih stanja i konačnom izlaznom azbukom. Osnovni problem jedne takve teorije jeste problem mogućnosti prerade ulaznih signala. Jasno je da automat ne može primiti na obradu ma kakav skup ulaznih signala. Pri tome čak nije toliko važno pitanje kapaciteta pošto se on, bar teorijski, može uvek povećati povezivanjem više automata, već pitanje strukture tih ulaznih signala. Zasluga je matematičke teorije apstraktnih automata što je to pitanje potpuno rasvetlila i precizno definisala kvalitet informacija koje jedan automat uopšte može obraditi. Apstraktna teorija automata je bliska, na taj način, teoriji algoritama i u suštini je samo njena dalja detaljizacija.

Što se tiče postanka apstraktna teorija automata se pojavila sasvim skoro - početkom minule decenije. Prvi radovi u kojima su dati osnovi (npr. [13], [20]) pojavili su se u poznatom zborniku "Automati" pod redakcijom Kloda Šenona (C. Shannon) i Makartija (Mc Carthy J.). Od tog vremena teorija automata se znatno razvila u mnogobrojnim novim radovima, tako da je nemoguće navesti sve kasnije doprinose, jer je za nepunih deset godina ta teorija postala izvanredno obimna naučna disciplina, kojom se bave kako inženjeri konstruktori tako i matematičari i logičari. Dobar deo tih rezultata objavljen je, pre nekoliko godina, u izvrsnom ekspozitornom radu V.M. Gluškova [6]. Iz dana u dan ta teorija se sve više usavršava i počinje da dobija konačnu fizionomiju. Pri tome se javljaju sve noviji i noviji problemi u samoj toj teoriji i otkrivaju njene veze sa drugim matematičkim disciplinama. Paralelno s time se vrši i usavršavanje metoda za rešavanje nekih problema iz te oblasti, koji su već rešeni na izvestan način.

Postoji više prilaza apstraktnoj teoriji konačnih automata. Prvi je teorija "nervnih mreža" Mak Kuloča (W.S.Mc. Culloch) i Pitsa (E.Pitts) [33], koji su se rukovodili analogijom sa radom čovekovog nervnog sistema. Najdublju razradu te teorije dao je S.K.Klini (S.C.Kleene) [13], koji je uveo pojam regularnog dogadjaja, sa kojim se, uglavnom poklapaju mogućnosti prerade informacija konačnog automata. E.F.Mur (E.F. Moore) [20] je ukazao na vezu sa savremenim tehničkim konstrukcijama i kao prvi razmatrao izvesne automatički nerešive probleme - problem različitosti stanja. G.Mili (G.Mealy) [36] je uveo pojam kasnije nazvanog milijevog automata, koji je apstraktna šema rada elektronskih računskih mašina.

Suprotno teoriji apstraktnih automata, je strukturna teorija koja se zanima pre svega strukturom kako samog automata, tako i njegovih ulaznih i izlaznih signala. U strukturnoj teoriji se izučava postupak konstrukcije automata iz elementarnih automata, postupak kodiranja ulaznih i izlaznih signala elementarnim signalima, koji se predaju po realnim ulaznim i izlaznim kanalima itd.

Na taj način je strukturna teorija automata nastavak i dalje razvijanje apstraktne teorije. Specijalno zadatak sinteze idealizovanog (bez obzira na prelazne režime - procese) cifarskog automata se na prirodan način deli na etape apstraktne i strukturne sinteze.

Ovde ćemo se ukratko osvrnuti na neke od centralnih problema iz teorije konačnih automata.

1° Jedan od najvažnijih problema u teoriji automata je i problem sinteze. Problem sinteze u apstraktnoj teoriji automata svodi se pre svega na iznalaženje podesnog jezika za zapisivanje uslova rada automata sa udobnim algoritmom prelaska sa zapisa na kanoničke jednačine. Za sada su najzgodniji algebarski jezik (jezik regularnih izraza Klinija) koji su dalje usavršili Gluškov, Kopi (J.M.Copi), Rajt (J.Wright) i dr. i logički jezik zasnovan na logici jednomesnih predikata. Na mogućnost primene zadnjog jezika najpre su ukazali Trahtenbrot (B.A.Trahtenbrot) i Čerč (A.Church). Logički jezik je širi od jezika regularnih izraza i drugih jezika koji se koriste u teoriji konačnih automata. Jedinu teškoću kod tog jezika čini prolaz od formulacije u logičkim terminima na kanonične jednačine. U svom radu slaba aritmetika drugog reda i konačni automati [27] Bjuhi (J.R.Büchi) je pokazao da je umesto formalizma regularnih izraza udobnije koristiti drugi formalizam - slabu aritmetiku drugog reda. U vezi s tim pojavio se niz radova sa sledećom sadržinom: konstruisati automat, koji prema proizvoljnoj formuli datog jezika 1) kazuje, postojili ograničeno - determinisani operator, koji sadovoljava tu formulu; 2) ako postoji, onda treba napisati kanoničke jednačine kakvog bilo takvog operatora ili svih takvih operatora.

2° Metodu kodiranja i dekodiranja saopštenja realizovanom u konačnom automatu, posvećen je niz radova Levenštajna (V.I. Levenšteun), Mura, Hilberta (E.N.Gilbert), Hlebskog (I V.Glebskog) i dr. Treba napomenuti da je problem kodiranja jedan od najtežih problema vezanih za konačne automate. Npr. problemom kodiranja neprekidnih funkcija bavi se nova matematička disciplina - konstruktivna matematika.

3° Do skora metode računa verovatnoće primenjivane su uglavnom za ispitivanje sigurnosti šema, konstruisanih od elemenata suprotnog svojstva. U radovima Cetlina (M.L.Cetlin) takve metode se primenjuju za ispitivanje ponašanja automata u slučajnim sredinama.

Uporedo sa determinisanim automatima u nizu radova su ispitivani i automati, čije funkcionisanje nosi u sebi elemente slučajnosti. Ta osobina automata može biti rezultat njihovih unutrašnjih svojstava ili rezultat dejstva na automat nekog slučajnog niza signala. Sa toga aspekta je i definisan pojam verovatnog automata. Tim problemom su se bavili Fon Nojman (Von Neumann John), Milija, de Leu (K.de Leeu), Makarov (S.V. Makarov), Čirkov (M.K.Čirkov), Mur, Šenon, Šapiro (N.Šapiro).

4° Interesantno je primetiti da su ispitivanja u oblasti apstraktnih automata dovela do uzajamnog prožimanja pojmova i metoda teorije apstraktnih automata s jedne strane, i algebre i matematičke logike s druge strane. Na toj osnovi su se pojavila ispitivanja, koja predstavljaju interes sa gledišta tematike tradicionalne za algebru i logiku. Na nju se odnose radovi Gluškova, Sorkina (Ю .I.Sorkin) i drugih, ukojima se izučava veza izmedju automata i polugrupa. Bjuhi je prvi skrenuo pažnju na to, da su ideje teorije automata podesne za rešavanje čisto logičkih zadataka. Primetimo još, da su se pojam konačnog automata i njegove analogije pokazale korisne takodje i u matematičkoj lingvistici i dinamičkom programiranju. Metode konačnih automata se koriste u problemu prebrojivosti i razrešljivosti skupa prirodnih brojeva odnosno problemu rekurzivno prebrojivog i opšte rekurzivnog skupa.

5° Kolmogorov (A.N.Kolmogorov) i Lupanov (O.B.Lupanov) su razradili niz pojmova, podesnih za klasifikaciju i izučavanje šema automata, polazeći od toga, da li se sa vremenom menja sastav elemenata šeme i postupak njihovog sjedinjavanja ili ne. Na inicijativu Kolmogorova njegovi učenici su preduzeli tako ispitivanje sinteze automata, koja je zasnovana na paralelnoj primeni principa asimptotske ocene složenosti i ocene entropije funkcionalnih prostora. Taj problem je prvi postavio Klod Šenon.

6° Na teoriju bezpovratnih kontaktnih šema se odnose i radovi Trahtenbrota. U njima se obilato koristi aparat kombinatorne topologije - teorija grafova. U formulisanju problema iz te oblasti učestvovao je i P.S.Novikov (P.S.Novikov).

Ovde ćemo navesti i neke tendencije u razvitku apstraktne teorije automata.

Prva tendencija se sastoji u daljem uopštavanju pojma automata. Ta tendencija se prvo pojavila kod Hinzburga (S.Ginsburga), koji je uveo pojam uopštenog automata ili kvazimašine. Pod kvazimašinom Hinzburg podrazumeva familiju od pet objekata - neprazan skup stanja S, dve proizvoljne apstraktne polugrupe X i Y, koje je respektivno nazvao njenim ulaznim i izlaznim polugrupama, i dve funkcije $\delta(s, x)$ i $\lambda(s, x)$ nazvanih respektivno funkcijama prelaska i izlaska date kvazimašine A. Funkcije δ i λ realizuju jednoznačno preslikavanje skupa $S \times X$ u skupove S i Y, respektivno. Pri tome je za proizvoljno stanje $s \in S$ i proizvoljna dva ulaza x_1 i x_2 iz X.

$$\delta(s, x_1 x_2) = \delta(\delta(s, x_1), x_2) \quad \text{i} \quad \lambda(s, x_1 x_2) = \lambda(s x_1)\lambda(\delta(s x_1, x_2)$$

Lako je videti da pri prirodnom proširenju funkcija prelaska i izlaska običnih automata ti automati prelaze u kvazimašine, kod kojih su kako ulazna tako i izlazna polugrupa slobodne polugrupe. Na taj način, smisao uopštenog pojma automata, koji je uveo Hinzburg, se sastoji u zameni slobodnih ulaznih i izlaznih polugrupa proizvoljnim polugrupama.

Druga tendencija koja se nameće u teoriji apstraktnih automata, sastoji se u tome, da se u skup stanja automata i njegovu ulaznu i izlaznu polugrupu uvede toplogija, uredjenost i druge strukture, koje bi omogućile da se rasmatraju razni oblici funkcija prelaska i izlaska (neprekidne, diferencijabilne itd.). Ta tendencija se pojavila prvo u radu [39] Šjutcenberža (M.P.Schützenberger): Un problème de la theorie des automates u kome se u mnoštvu stanja automata rasmatra proizvod konačnog skupa i prstena celih brojeva. Prisustvo algebarske strukture u skupu stanja dozvoljava da se funkcije prelaska i izlaska tretiraju kao "mnogostruke" algebarske funkcije.

U radu [40] M.A.Spivak je primenio aparat teorije relacija i teorije skupova, metode koje se sreću i kod Ž.Rigea (J.Riguet) za rešavanje problema iz apstraktne teorije automata.

Na kraju pomenimo još jednu tendenciju, koja se sastoji u pokušaju primene apstraktne teorije automata u konstrukcije apstraktne teorije jezika. Jezik se pri tome tretira kao automat sa višeznačnom funkcijom prelaska.

U ovom radu je takodje obradjen niz problema i dobijeni su izvesni novi rezultati. U prvom paragrafu je obradjivan problem odnosa parcijalnih i totalnih automata. Još V.M.Gluškov u [6] je primetio da neke teoreme koje se odnose na totalne automate ne važe za parcijalne. Polazeći od te konstatacije V.Vučković je u [30] dao dve teoreme vezane za parcijalne automate i u istom radu postavio neke probleme u vezi s tim ovde su, uglavnom, ti problemi rešeni i dobijen je opštiji rezultat od rezultata V.Vučkovića.

U drugom paragrafu su date dve nove teoreme koje se odnose na jake automate. Jaki automat je konačni automat čija funkcija prelaska trpi izvesne restrikcije - definisana je na poseban način. Ta vrsta automata je veoma značajna zbog njegove veze sa pojmom regularnog skupa. Sem toga u pomenutom paragrafu je dat i jedan prirodniji dokaz, od onog koji već postoji, teoreme koja daje vezu izmedju striktno regularnih i jako regularnih skupova, odnosno jakog automata i regularnog skupa. Ova problematika je takodje u početnoj fazi i prve tragove jakog automata nalazimo kod V. Vučkovića u [28].

Rezultati dobijeni u prvom i drugom paragrafu, po svojoj suštini, spadaju u problem sinteze automata, shvaćen u širem smislu.

U trećem paragrafu je dat jedan nov postupak sinteze konačnog automata koji realizuje neko automatno preslikavanje ili neki skup regularnih dogadjaja. Postupak je očigledniji i prirodniji od postupaka Gluškova i u neku ruku je blizak postupku datom u radu [40]. Sem toga automat dobijen na taj način je minimalan.

U četvrtom paragrafu je dat jedan uprošćen postupak minimizacije konačnog automata zadatog tablicama prelaska i izlaska. Za primenu je ovaj postupak podesniji od postupka Aufenkampa.

Na kraju, u dodatku, je dat i jedan postupak za minimizaciju bulovih funkcija koji je u stvari usavršeni postupak poznate metode neodredjenih koeficijenata.

Sem ovoga što je navedeno u predgovoru uz odgovarajuće paragrafe je takodje data izvesna paralela izmedju onoga što je dato u ovom radu i onoga što je već bilo poznato.

δ.1 OSNOVNI POJMOVI I DEFINICIJE

Pojam apstraktnog automata je nikao pri sintezi realnih diskretnih automata pre svega računskih mašina. Prilikom rešavanja nekih zadataka sinteze automata pokazalo se kao udobno šematsko prikazivanje automata (gotovog ili u projektu) kao sistema od tri "uredjaja": ulaznog, unutrašnjeg i izlaznog. Svaki od tih uredjaja ima svoj skup stanja, respektivno X, S, Y. Stanja sva tri uredjaja se mogu menjati samo u odredjenim momentima vremena $t = 1, 2, \dots$. Stanje ulaznog uredjaja u datom momentu $x(t)$ odredjuje se stanjem "spoljašnje sredine" i ne zavisi od konstrukcije automata. Stanje unutrašnjeg uredjaja u datom momentu odredjeno je stanjem ulaznog uredjaja u datom momentu i stanjem unutrašnjeg uredjaja iz prethodnog momenta, tj. formulom oblika

$$s(t) = \delta(s(t-1), x(t)),$$

Gde je δ neka funkcija, koja ne zavisi od t i odredjena je konstrukcijom automata. Stanje izlaznog uredjaja u datom momentu $y(t)$ odredjeno je stanjem ulaznog uredjaja u datom momentu i stanjem unutrašnjeg uredjaja u prethodnom momentu, tj. formulom oblika

$$y(t) = \lambda(s(t-1), x(t)),$$

u slučaju automata <u>prve vrste</u> koji se još naziva <u>Milijev automat</u>, ili stanjem ulaznog uredjaja u datom momentu i stanjem unutrašnjeg uredjaja takodje u datom momentu, tj.

formulom oblika

$$y(t) = \lambda(s(t), x(t)),$$

u slučaju automata druge vrste, gde je λ neka funkcija koja ne zavisi od t i odredjena je konstrukcijom automata. Specijalan slučaj automata druge vrste je Murov automat. Kod murovog automata stanje spoljneg uredjaja je odredjeno formulom

$$y(t) = \lambda(s(t));$$

U daljem radu biće uvek naglašeno o kome se automatu radi.

Matematički opis ove šeme daje sledeća definicija

Definicija 1.1. Neka su X, S, Y - proizvoljni neprazni skupovi, δ preslikavanje skupa $S \times X$ u skup S, λ - preslikavanje skupa $S \times Y$ ili skupa S u skup Y. Sistem objekata $(X, S, Y, \delta, \lambda)$ mi nazivamo automatom sa skupom ulaznih signala X, skupom stanja S, skupom izlaznih signala Y, funkcijom prelaska δ i funkcijom izlaska λ.

Sa gledišta primene najveći značaj imaju konačni automati - automati kod kojih su skupovi X, Y, S, konačni. Pri izučavanju automata mi ćemo svuda imati u vidu gore datu interpretaciju. Za obeležavanje automata upotrebljavaćemo grčka slova.

Sada ćemo uvesti još neke definicije vezane za skupove X S i Y.

Neka je data konačna azbuka

$$X = (x_0, x_1, \ldots \ldots x_{n-1}) \tag{1.1}$$

sa $n \geq 1$ slova, koja treba shvatiti kao dalje nedeljive atome. Pod <u>rečima</u> u azbuci X podrazumevaćemo sve moguće varijacije (sa ponavljanjem) od jednog, dva, tri, ..., i, m ..., slova date azbuke. Sem tih reči u daljem ćemo uvek podrazumevati da svaka data azbuka sadrži još i <u>praznu reč</u> koju ćemo obeležavati sa e. To je takva reč koja ne sadrži ni jedno slovo.

Obeležimo sa $L(X)$ skup svih konačnih nizova elemenata iz X oblika $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$, dopunjen još i elementom l_0 koji se naziva, prema gornjem, <u>praznim nizom.</u> U skupu $L(X)$ se definiše binarna algebarska operacija formulama

$$(x_{i_1} \dots x_{i_m})(x_{j_1} \dots x_{j_m}) = x_{i_1} \dots x_{i_m} x_{j_1} \dots x_{j_m} \tag{1.2}$$

$$(x_{i_1} \dots x_{i_m})\, l_0 = x_{i_1} \dots x_{i_m}$$

u odnosu na tu operaciju skup $L(X)$ je polugrupa sa jedinicom l_0 i naziva se <u>slobodnom polugrupom</u> nad skupom X.

Ako sa $d(l)$ obeležimo dužinu niza $l \in L(X)$, stavljajući pri tome da je $d(l_0) = 0$, tada je

$$d(l_1 l_2) = d(l_1) + d(l_2) \tag{1.3}$$

Svakom ulaznom signalu $x \in X$ automata A korespondiramo preslikavanje φ_{Ax} skupa S_A definisano formulom

$$\varphi_{Ax}(s) = \delta_A(s, x) \tag{1.4}$$

Dalje nepraznom nizu signala $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \in L(X)$ korespondiramo preslikavanje $\varphi_{A x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}$ skupa S_A, definisano formulom

$$\varphi_{Ax_{i1} \ldots x_{ik}} = \varphi_{Ax_{ik}} \circ \ldots \ldots \circ \varphi_{Ax_{i2}} \circ \varphi_{Ax_{i1}} \qquad (1.5)$$

Na kraju praznom nizu e_0 korespondiramo identično preslikavanje

$$\varphi_{Ae_0} = \Delta S_A \qquad (1.6)$$

Lako je videti, da je

$$\varphi_{Ae_1 e_2} = \varphi_{Ae_2} \circ \varphi_{Ae_1} \qquad (1.7)$$

tj. preslikavanje φ_{Ae} obrazuje polugrupu preslikavanja koja je presłavnik slobodne polugrupe $L(X)$.

Ako je početno stanje automata A fiksirano onda se takav automat naziva <u>inicijalnim.</u> U protivnom slučaju automat se naziva <u>neinicijalnim.</u> U buduće mi ćemo uvek naglasiti da li se radi o inicijalnom ili neinicijalnom automatu.

Ako su funkcije δ i λ definisane za sve parove $(s, x) \in$ $\in S \times X$, njih nazivamo <u>totalnim.</u> Ako postoje parovi $(s, x) \in S \times X$ za koje funkcije nisu definisane (nezavisno jedna od druge) nazivamo ih <u>parcijalnim.</u> U prvom slučaju automat se naziva totalnim u drugom slučaju <u>parcijalnim.</u>

<u>Definicija 1.2.</u> Totalni neinicijalni automat A je uredjena sedmorka

$$A = \langle X, S, Y, S', S'', \delta, \lambda \rangle \qquad (1.8)$$

gde je $S' \subset S$ i $S'' \subset S$. Skup S' je skup inicijalnih stanja automata a S'' je skup njegovih izlaznih (ili završnih) stanja.

U slučaju kad se skup S' sastoji samo od jednog elementa onda imamo, kao što je već rečeno, inicijalni automat.

Za automat A kažemo da akceptira reč

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \in L(X) - (e)$$

gde je e prazna reč, ako i samo ako postoji reč $s_{j_0} s_{j_1} \ldots s_{j_k}$ u azbuci S takva da važe relacije

$$s_{j_0} \in S' \tag{1.9}$$

$$s_{j_k} \in S'' \tag{1.10}$$

$$\delta(s_{j_\nu}, x_{i_{\nu+1}}) = s_{j_{\nu+1}} \tag{1.11}$$

za $\nu = 0, 1, 2, \ldots k-1$.

Skup svih akceptiranih reči za dati automat A obeležavamo sa $T(A)$. Po konvekciji je $e \in T(A)$ tada i samo tada ako je $S' \cap S'' \neq \Phi$, gde Φ označava prazan skup. Svakoj akceptiranoj reči $x_{i_1} \ldots x_{i_k} \in L(X) - (e)$ odgovara izlazna reč $y_{t_0} y_{t_1} \ldots y_{t_k} \in L(Y) - (e)$ koja je definisana na sledeći način

$$y_{t_\nu} = \lambda(s_{j_\nu} x_{i_{\nu+1}}) \qquad \nu = 0, 1, \ldots k-1$$

Prazna reč je izlazna tada i samo tada ako je akceptirana. Skup svih akceptiranih izlaznih reči obeležavamo sa $\Gamma(A)$. Na kraju skup svih reči azbuke S obeležavamo sa $\Omega(S)$.

Uz svaki sledeći paragraf mi ćemo, sem ovih opštih pojmova, definisati i još niz drugih pojmova koji će se odnositi na konkretnu problematiku.

§.2. TOTALNI I PARCIJALNI AUTOMATI

Apstraktna teorija totalnih automata je uveliko razradjena disciplina. Medjutim, apstraktna teorija parcijalnih automata tek se nalazi u početnoj fazi.

Problematiku po ovoj temi prvi je otvorio V.M.Gluškov u [6]. Teoreme koje su ovde date su generalizacija teorema V.Vučkovića [30] njihovo dalje proširivanje.

Teorema 2.1. Za svaki parcijalni automat A sa parcijalnom funkcijom prelaska δ i parcijalnom funkcijom izlaska λ moguće je konstruisati totalni automat A', takav da automati A i A' imaju isti skup akceptiranih izlaznih reči, tj. $I(A)=I(A')$. Medjutim, pri tome je uopšte $T(A') \neq T(A)$.

Dokaz. Neka je automat A definisan sa (1.8) pri čemu su δ i λ parcijalne funkcije. Neka je $s' \notin S$ i $y' \in Y$. ~~Definišimo~~ STAVIMO da je $S_1 = S \cup (s')$ i $Y_1 = Y \cup (y')$. Neka je, dalje, A' automat

$$A' = \langle X, S, Y, S', S'', \delta_1, \lambda_1 \rangle \tag{2.1}$$

gde su funkcije δ_1 i λ_1 definisane na sledeći način:

za sve parove $(s, x) \in S \times X$ za koje su δ i λ definisane stavimo

$$\begin{aligned} \delta_1(s, x) &= \delta(s, x) \\ \lambda_1(s, x) &= \lambda(s, x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Za sve parove za koje je $\delta(s, x)$ definisana a $\lambda(s, x$ nedefinisane stavimo

$$\begin{aligned} \delta_1 (s, x) &= s' \\ \lambda_1 (s, x) &= y' \end{aligned} \tag{2.3}$$

za sve parove za koje je $\delta(s, x)$ nedefinisana a $\lambda(s, x)$ definisana stavimo

$$\begin{aligned} \delta_1 (s, x) &= s' \\ \lambda_1 (s, x) &= \lambda(s, x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

za sve parove (s, x) za koje su $\delta(s, x)$ i $\lambda(s, x)$ nedefinisane stavimo

$$\begin{aligned} \delta_1 (s, x) &= s' \\ \lambda_1 (s, x) &= y' \end{aligned} \tag{2.5}$$

Najzad definišimo

$$\begin{aligned} \delta_1 (s', x) &= s' \\ \lambda_1 (s, x) &= y' \end{aligned} \tag{2.6}$$

za svako $x \in X$.

Očigledno je, posle ove konstrukcije, da su δ_1 i λ_1 totalne funkcije definisane za svaki par $(s, x) \in S_1 \times X$. Pri tome treba pretpostaviti da $s' \notin S''$. Dokazaćemo da je

$$I(A') = I(A) \tag{2.7}$$

Ako je $g \in I(A)$ onda je prema našoj konstrukciji očigledno i $g \in I(A')$.

Neka je sada $q \in I(A')$ i neka je

$$q = y_{i_0} y_{i_1} \cdots y_{i_{k-1}} \tag{2.8}$$

pri čemu neko od slova y_{i_ν} može biti i slovo y'.

Kako je $q \in I(A')$ to postoje reči

$$x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_k} \in T(A') \tag{2.9}$$

i

$$s_{l_0} s_{l_1} \cdots s_{l_k} \in \Omega(S_1) \tag{2.10}$$

takve da važe

$$s_{l_0} \in S', \quad s_{l_k} \in S'' \tag{2.11}$$

$$\delta'(s_{l_\nu}, x_{j_{\nu+1}}) = s_{l_{\nu+1}} \qquad \nu = 0, 1, 2 \ldots k-1 \tag{2.12}$$

$$\lambda_1(s_{l_\nu}, x_{j_{\nu+1}}) = y_{i_\nu} \qquad \nu = 0, 1, 2 \ldots k-1 \tag{2.13}$$

Dokazaćemo da reč (2.8) ne sadrži slovo y'. Pretpostavimo, suprotno tome, da je za neko $0 \leq \nu \leq k-1$ $y_{i_\nu} = y'$. To, s obzirom na našu konstrukciju, znači da je u pitanju jedan od slučajeva (2.3), (2.5) ili (2.6). U sva tri slučaja bi isplo da onda mora biti ispunjen i uslov da je $s' \in S''$, što je, prema ranije uvedenoj pretpostavci nemoguće.

Prema tome reč q iz (2.8) ne sadrži slovo y'. Sem toga reč iz 2.10 pripada samo skupu $\Omega(S)$, pa otuda važe uslovi (2.11) i (2.12) sa δ umesto δ_1. Na osnovu toga sledi da reč (2.9) pripada skupu $T(A)$ pa je otuda $q \in I(A)$ što je i trebalo dokazati.

Na kraju pokažimo da je uopšte $T(A) = T(A')$. Radi toga je dovoljno da postoji jedan par $(s_{i_0}, x_\nu) \in S \times X$ za koji funkcija λ nije definisana, a da je pri tome $s_{i_0} \in S'$ i $\delta'(s_{i_0} x_\nu) = s'$. Tada je $x_\nu \in T(A)$, ali je $x_\nu \notin T(A')$, pošto je $\delta_1(s_{i_0}, x_\nu) = s'$ i $s' \in S''$.

Što se tiče skupa akceptiranih reči mi ćemo dokazati stav koji će dati potrebne i dovoljne uslove pod kojima je za neki parcijalni ne inicijalni automat A moguće naći totalni automat A' sa istim skupovima akceptiranih i izlaznih reči.

Teorema 2.2. Neka je dato n automata A_i $(i=1,2\ldots n)$ sa parcijalnim funkcijama prelaska i izlaska koje imaju tu osobinu da su obadve funkcije za neki par $(s_i, x) \in S_i \times X$ istovremeno ili definisane ili nedefinisane, onda se može konstruisati totalni automat A' koji ima isti skup akceptiranih i izlaznih reči kao i skup automata A_i.

Dokaz. Dovoljno je dati dokaz samo za jedan automat iz skupa automata A_i $(i=1,2\ldots n)$ pa je samim tim dat dokaz i za skup automata A_i. U teoremi se pretpostavlja da svi automati iz skupa A_i imaju iste ulasne i izlazne azbuke X i Y. Neka je, dalje, dat parcijalni neinicijalni automat

$$A = \langle X, Y, S, S', S'', \delta, \lambda \rangle$$

Konstruišimo totalni automat

$$A' = \langle X, Y_1, S_1, S', S'', \delta_1, \lambda_1 \rangle$$

gde je $S = S \cup (s')$ i $Y_1 = Y \cup (y')$ takav da je

$$\delta_1(s, x) = \delta(s, x)$$
$$(2.14)$$
$$\lambda_1(s, x) = \lambda(s, x)$$

za sve parove (s, x) za koje su funkcije δ i λ definisane, i

$$\delta_1(s, x) = s'$$
$$(2.15)$$
$$\lambda_1(s, x) = y'$$

za sve parove (s, x) za koje funkcije δ i λ nisu definisane. Sem toga stavimo da je

$$\delta_1 (s', x) = s'$$

i

$$\lambda_1 (s', x) = y'$$

za svako $x \in X$. Kao i ranije pretpostavljamo da $s' \notin S''$.

Dokažimo prvo da je $T(A) = T(A')$.

Zaista, ako je $p \in T(A)$ sledi da je i $p \in T(A')$. Pretpostavimo sada da je $p \in T(A')$ pa dokažimo da je $p \in T(A)$. Neka je $p = 0$, onda je to moguće samo ako je $S' \cap S'' \neq \emptyset$ odakle sledi da je $p \in T(A)$. Pretpostavimo sada da je $p \neq 0$. Tada postoji S_1 - reč

$$s_{j_0} \; s_{j_1} \; s_{j_2} \dots s_{j_k} \in \Omega (S_1) \tag{2.16}$$

takva da važe:

$$s_{j_0} \in S' \qquad s_{j_k} \in S'' \tag{2.17}$$

i

$$\delta_1 (s_{j_\nu}, x_{\nu+1}) = s_{j_{\nu+1}} \quad \nu = 0, 1, 2 \dots k-1 \tag{2.18}$$

Kad bi za neko $\mu \leq k-1$ važilo $\delta_1 (s_{j_\mu}, x_{\mu+1}) = s'$ onda bi se reč (2.16) morala, na osnovu naše konstrukcije završavati sa s', što je nemoguće, pošto je $s' \in S''$. Otuda se s' uopšte ne pojavljuje u reči (2.16), te tako imamo da je

$$s_{j_0} \; s_{j_1} \; \dots \; s_{j_k} \in \Omega (S) \tag{2.19}$$

Sem toga važe (2.17) i (2.18) sa δ umesto δ_1, pa odatle sledi da je $p \in T(A)$.

Napominjemo da je našom konstrukcijom, očigledno, ostao nepromenjen i skup izlaznih reči, pa je $I(A) = I(A')$.

Na osnovu dokazanog i na osnovu prethodne teoreme sledi da je postavljeni uslov i potreban i dovoljan, što je i trebalo dokazati.

Kao što se vidi teoreme 2.1. i 2.3. u potpunosti rešavaju problem odnosa totalnih i parcijalnih automata u pogledu skupova akceptiranih ulaznih i izlaznih reči.

§.3. JAKI AUTOMATI I REGULARNI SKUPOVI

U ovom paragrafu mi ćemo uvesti pojam <u>jakog automata.</u> To je ustvari podklasa klase svih konačnih automata. Jaki automat je jedan inicijalni automat sa bar dva stanja više nego što ima slova u njegovoj azbuci X i čija funkcija prelaska trpi vrlo velike restrikcije. Neke indicije o jakom automatu prvi je dao V.Vučković u [28].

Bez obzira što je ta klasa automata vrlo uska ona čini u neku ruku <u>jezgro</u> klase svih konačnih automata: svaki konačni automat može biti definisan pomoću jakog automata i pogodno izabranog preslikavanja.

Pre nego defnišemo jaki automat uvedimo sledeću definiciju.

<u>Definicija 3.1.</u> Pod inicijalnim X-automatom, gde je X neka konačna azbuka, podrazumevamo četvorku

$$A = \langle S, S', s_0, \delta \rangle \tag{3.1}$$

gde je

$$S = (s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}) \tag{3.2}$$

neki konačan skup (skup unutrašnjih stanja), skup $S' \subset S$ je skup finalnih stanja a δ (funkcija prelaska) je funkcija koja preslikava skup $S \times X$ u skup S. Sa s_0 je obeleženo početno stanje automata.

Za neku reč $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \in L(X) - (e)$ kažemo da je akceptirana sa $T(A)$ ako i samo ako postoji reč u skupu S, $s_{j_1} s_{j_2} \ldots s_{j_k}$, takva da je $\delta(s_0, x_{i_1}) = s_{j_1}$, $\delta(s_{j_\nu}, x_{i_{\nu+1}}) = s_{j_{\nu+1}}$ za svako $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$ $s_{j_k} \in S'$

Po konvekciji reč e je akceptirana pomoću A ako i samo ako $s_0 \in S'$.

Skup svih reči akceptiranih sa A obeležavaćemo, kao ranije, sa $T(A)$. Svaki skup $\alpha \subset L(X)$ za koji postoji automat A takav da je $\alpha = T(A)$ zove se X-regularnim (ili prosto regularnim).

Definicija 3.2. Neka je $X = (x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$. Četvorku $A = \langle S, S', s_0, \delta \rangle$ nazivamo jakim automatom ako njegov skup unutrašnjih stanja

$$S = (s_0, s_1, \ldots s_{m-1}, s_m, s_{m+1} \qquad (3.3)$$

sadrži tačno $m+2$ stanja i ako njegova funkcija prelaska δ zadovoljava uslove: za svako $x_j \in X$ je

$$\delta(s_i, x_j) = s_{j+1} \quad \text{ili} \quad \delta(s_i, x_j) = s_{m+1}$$

za svako $i = 0, 1, \ldots m-1, m$ i

$$\delta(s_{m+1}, x_j) = s_{m+1} \qquad (3.4)$$

gde je $s_m \notin S'$.

Za jaki automat je karakterističan način na koji su akceptirane X-reči povezane sa odgovarajućim S-rečima, naime ako je $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \in T(A)$ onda je odgovarajuća S-reč $s_{i_1+1} s_{i_2+1} \ldots s_{i_k+1}$. Dalje ako se neka S-reč završava sa s_{m-1}, onda odgovarajuća S-reč sigurno nije akceptirana (ovo je samo dovoljan a ne i potreban uslov za neakceptiranje).

Definicija 3.3. Ako je $\alpha \subset L(X)$ i ako postoji jaki X-automat A, takav da je $\alpha = T(A)$, onda se α naziva jaki X-regularni skup.

Očigledno je, da je klasa svih jako regularnih skupova podklasa klase svih regularnih skupova. Kao što ćemo videti postoji suštinski kriterijum jako regularnosti.

__Definicija 3.4.__ Neka je X neka azbuka a r neka binarna relacija na njoj (tj. $r \in X \times X$) i ako dopustimo takodje da je $r \in X$ (što znači da r može biti bilo koje prosto slovo iz X) mi onda zovemo r __birelacijom__ na X .

Pre nego uvedemo sledeću definiciju navešćemo još neke oznake, koje ćemo u ovom paragrafu koristiti.

$a(p)$ (označava početno slovo od neke reči p :

$a(e) = e$, $a(x_i p) = x_i$

$l(p)$ (označava zadnje slovo reči p :

$l(e) = e$, $l(p x_i) = x_i$

$\sim(p)$, čitaj "prethodnik od p " je ostalo od p posle izbacivanja njegovog prvog slova;

$\sim(e) = e$, $\sim(x_i p) = p$;

$V(p,q)$, čitaj "q-ti prethodnik od p ", je reč dobijena iz p izbacivanjem iz njega onoliko početnih slova koliko se nalazi u reči q :

$V(p,0) = p$ $\quad V(p, x_i q) = \sim(V(p,q))$

$\bigwedge\limits_{q=0}^{p} \mathcal{P}(q)$, gde je $\mathcal{P}(q)$ reč predikat, znači iskaz: za sve reči q takve da je $e \leq q \leq p$, važi $\mathcal{P}(q)$.

$\bigvee\limits_{q=0}^{p} \mathcal{P}(q)$, znači iskaz: "postoji reč q , $e \leq q \leq p$, takva da je $\mathcal{P}(q)$ ".

Sem ovih simbola mi ćemo koristiti i druge logičke i matematičke simbole.

__Definicija 3.5.__ Ako je r birelacija na X onda je mi proširujemo na ceo skup $L(X)$ pomoću

$$r(p,q) \longleftrightarrow r(a(p), a(q)) \tag{3.5}$$

tj. dve reči p i q su u -relaciji ako i samo ako su njihova početna slova u r -relaciji.

Definicija 3.6. Skup $\alpha \subset L(X)$ se zove striktno X -regularnim ako postoje dve podazbuke $X' \subset X$ i $X'' \subset X$ i birelacija r na X taka da je

$$p \in \alpha - (e) \longleftrightarrow a(p) \subset X \wedge$$

$$\bigwedge_{q=0}^{\sim(p)} r\left(V(p,q), V(p, q+x_0)\right) \wedge \ell(p) \in X'' \tag{3.6}$$

Drugi uslov na desnoj strani u (3.6) znači sledeće: ako je $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_k} \in \alpha - (e)$ onda su svaka dva konsekutivna slova u - relaciji tj.

$$r(x_{i_\nu}, x_{i_{\nu+1}}) \quad \text{ZA} \quad \nu = 1, 2, 3, \dots k-1$$

U slučaju kad se reč p sastoji samo od jednog slova, tj. kad ima dužinu jedan, onda pretpostavljamo da je

$$\bigwedge_{q=0}^{\sim(p)} r\left(V(p,q), V(p, q+x_0)\right)$$

uvek zadovoljeno.

Kad je reč o klasičnom pojmu konačnog automata onda se i nehotice pri upotrebi toga pojma javlja asocijacija na automatno preslikavanje. Isto pitanje se, logično, nameće i kad je reč o jakom automatu. No tada smo prinudjeni, u želji da ne odstupimo od prvobitne definicije jakog automata, da mu pridružimo neko preslikavanje λ , definisano na odgovarajući način.

A sada možemo da dokažemo jednu teoremu, koja je čista analogija jedne od osnovnih teorema iz klasične teorije konačnih automata.

Teorema 3.1. Za svako automatno preslikavanje φ koje preslikava skup X u neki skup Y postoji jaki X -automat i neko preslikavanje λ koji, skupa uzeti, čine neki konačni automat A sa funkcijom izlaska λ koja realizuje isto preslikavanje kao i φ izuzimajući one reči $p_i \in \lambda$ koje sadrže slovo x_{n-1}.

Dokaz. Neka je $A = \langle S, S', s_0, \delta \rangle$ i λ neko preslikavanje skupa X i skup Y, pridruženo jakom X -automatu. Mi ćemo izabrati automat A i preslikavanje tako da budu zadovoljeni uslovi teoreme, za skup unutrašnjih stanja traženog automata uzmimo skup

$$S = (e, x_0, x_1 \ldots x_{n-1}, s') \tag{3.7}$$

gde je neko slovo koje ne pripada azbuci X i sem toga $s' \notin S'$. Kao i ranije sa e smo obeležili praznu reč. Za početno stanje s_0 uzećemo baš praznu reč, tj. $s_0 = e$. Skup S' definišemo na sledeći način

$$S' = \{ x_{i_k+1} \mid \delta(x_{i(k-1)+1}, x_{i_k}) = x_{i_k+1} \} \tag{3.8}$$

funkciju prelaska δ odredjujemo po sledećem postupku

$$\delta(s_i, x_j) = s_{j+1} \vee s' \tag{3.9}$$

tj.

$$\delta(e, x_{i_1}) = x_{i_1+1}$$
$$\delta(x_{i_1+1}, x_{i_2}) = x_{i_2+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta(x_{i(k-1)+1}, x_{i_k}) = x_{i_k+1}$$

za svako $x_{i_k} \neq x_{n-1}$, dok je za $x_{i_k} = x_{n-1}$

$$\delta(x_j, x_{n-1}) = s' \tag{3.10}$$

Sem toga stavimo

$$\delta(s', x_j) = s' \qquad j = 0, 1, \ldots n-1 \tag{3.11}$$

Što se tiče preslikavanja λ njega definišemo na sledeći način

$$\lambda(x_j) = \varphi(x_{j-1}), \qquad j > 0 \tag{3.13}$$

tj.

$$\lambda(e) = \text{nedefinisano}$$

$$\lambda(x_{i_1+1}) = \varphi(x_{i_1}),$$

$$\lambda(x_{i_2+1}) = \varphi(x_{i_1}x_{i_2}),$$

$$\lambda(x_{i_3+1}) = \varphi(x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}),$$

$$- - - - - - - - - - -$$

$$\lambda(x_{i_k+1}) = \varphi(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}),$$

i na kraju ostavimo $\lambda(s')$ nedefinisano.

Posle ovako izvedene konstrukcije dokaz je očigledan. Zaista, ako je $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ neka reč azbuke X koja ne sadrži slovo x_{n-1} i kojoj preslikavanje φ korespondira reč $q = y_{j_1} y_{j_2} y_{j_3} \dots y_{j_k}$ azbuke Y, tada prema našoj konstrukciji i funkcija λ realizuje to isto preslikavanje.

Treba primetiti da se ovde konačni jaki X -automat može shvatiti u smislu definicije automata po Hinzburgu, dok posmatran zajedno sa preslikavanjem λ može biti tretiran kao uzastopna mašina.

Sledeća teorema se odnosi na problem akceptiranja reči u jakom X -automatu. Kao i kod običnog apstraktnog automata i ovde ćemo pretpostaviti da jaki X -automat može biti totalan i parcijalan, u zavisnosti od toga da li mu je funkcija prelaska totalna ili parcijalna.

Teorema 3.2. Neka je A jaki X -automat sa parcijalnom funkcijom prelaska δ, tada postoji jaki X automat A' sa totalnom funkcijom prelaska δ_1 koji akceptira isti skup reči kao i automat A.

Dokaz. Neka je A automat iz definicije (3.2). Konstruišimo automat $A' = \langle S_1, S', s', \delta_1 \rangle$ gde $s' \notin S'$, na sledeći način.

Za ulaznu azbuku automata A' uzimamo skup $X_1 = X \cup (x')$, a za azbuku unutrašnjih stanja, skup $S_1 = S \cup (s')$ $(s' \notin S')$. Dalje, za sve parove (s, x) za koje je funkcija prelaska δ definisana stavimo

$$\delta(s, x) = \delta_1(s, x)$$

Za sve parove (s, x) za koje funkcija δ nije definisana stavimo

$$\delta_1(s, x) = s'$$

Na kraju definišimo sledeće jednakosti:

$$\delta_1(s', x) = s' \qquad \text{za svako } x \in X$$

$$\delta_1(s, x') = s' \qquad \text{za svako } s \in S$$

i

$$\delta_1(s', x') = s'$$

Iz ove konstrukcije sledi da je funkcija δ_1 definisana za sve parove $(s, x) \in S_1 \times X$.

Ako sada sa $T(A)$ i $T(A')$ obeležimo respektivno skupove akceptiranih reči u automatima A i A' onda nije teško dokazati da je $T(A) = T(A')$.

Očigledno je, na osnovu naše konstrukcije, da iz $p \in T(A)$ sledi, takodje, $p \in T(A')$. Dokažimo sada obrnuto da iz $p \in T(A')$ sledi da je $p \in T(A)$.

Neka je zato

$$p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \in T(A')$$

Ako je $p = e$ onda je to moguće ako i samo ako je $s_0 \in S'$ odakle sledi da je $p \in T(A)$.

Pretpostavimo da je $p \neq e$. Tada postoji S_1 -reč takva da je

$$s_{i_0+1} s_{i_1+1} s_{i_2+1} \dots s_{i_k+1} \in \Omega(S_1) \qquad (3.15)$$

tako da važi

$$s_{i_k+1} \in S'$$

i

$$\delta_1(s_{i(\nu-1)+1}, x_{i_\nu}) = s_{i_\nu+1}$$

za svako $\nu = 1, 2, \ldots, k$.

Ako bi za neko $\mu \leq k$ važno da je

$$\delta(s_{i(\mu-1)+1}, x_{i_\mu}) = s'$$

onda bi to značilo, na osnovu naše konstrukcije, da je i $s_{i_k+1} = s'$ što je nemoguće jer $s' \notin S'$. Otuda sledi da je reč $q \in \Omega(S)$ i da je moguće zameniti δ_1' sa δ čime je dokaz završen.

Sledeća teorema se tiče odnosa jako regularnih i striktno regularnih skupova.

U radu [29] V.Vučković je dokazao teoremu da je svaki jako X-regularni skup striktno X-regularan, a takodje i obrnutu teoremu. Mi ćemo sada dati drugu verziju dokaza obrnute teoreme ne zahtevajući ništa više već da azbuka S sadrži samo dva stanja: s_0 i s_{n+1}. Ostala stanja, što je i prirodnije, konstruišemo pomoću azbuke X. Drugim rečima konstrukcija se izvodi unutar same azbuke X.

Teorema 3.3. Svaki striktno X-regularni skup α je jako X-regularni.

Dokaz. Neka je

$$p \in \alpha - (e) \longleftrightarrow a(p) \in X' \wedge \bigwedge_{q=0}^{\sim(p)} r(V(p,q), V(p,q+x_0)) \wedge$$
$$\wedge\ l(p) \in X''$$

Definišimo jaki X-automat $A = \langle S, S', s_0, \delta \rangle$ gde je $S = (s_0, x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, s_{n+1})$ na sledeći način

$$S' = (x_{j+1} \mid x_j \in X'') \tag{3.16}$$

Zatim definišimo funkciju prelaska δ' pomoću sledećih jednakosti:

Za svako $x_i \in X$ i s_0 stavimo $\delta'(s_0, x_i) = x_{i+1}$ (3.17)

$$r(x_i, x_j) \longleftrightarrow \delta'(x_{i+1}, x_j) = x_{j+1} \qquad (3.18)$$

Za sve parove $(x_i, x_j) \in S \times X$ za koje $\delta'(x_i, x_j)$ nije definisana pomoću (3.17) i (3.18) stavimo $\delta'(x_i, x_j) = x_{n+1}$. Ukazujemo da je

$$\delta'(s_{n+1}, x_i) = s_{n+1} \quad \text{za svako } x_i \in X \qquad (3.19)$$

i da je

$$s_{n+1} \notin S' \qquad (3.20)$$

Ako je $e \in \alpha$ onda je $s_0 \in S'$

Dokažimo da je $\alpha = T(A)$

Neka je

$$x_{i_1} \; x_{i_2} \ldots\ldots x_{i_k} \in \alpha - (e) \qquad (3.21)$$

i neka njegova dužina bude veća od 1. Formirajmo reč

$$x_{i_1+1} \; x_{i_2+1} \ldots\ldots x_{i_k+1}$$

Prvo ako je $x_{i_1} \in X'$ imaćemo na osnovu (3.17)

$$\delta'(s_0, x_{i_1}) = x_{i_1+1} \qquad (3.22)$$

Kako je $r(x_{i_\nu}, x_{i_{\nu+1}})$ za svako $\nu = 1, 2, \ldots k-1$ imamo na osnovu (3.18)

$$\delta'(x_{i_\nu+1}, x_{i_{\nu+1}}) = x_{i_{\nu+1}+1} \quad \text{za } \nu = 1, 2 \ldots k-1 \qquad (3.23)$$

a ako je $x_{i_k} \in X''$, imamo na osnovu (3.16) da je

$$x_{i_k+1} \in S' \qquad (3.24)$$

Iz (3.21), (3.22) i (3.23) sledi da je $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \in T(A) - (e)$.

Ako je dužina reči jednaka 1 dokaz je očigledan.

Uzmimo sada da je

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \in T(A) - (e) \tag{3.25}$$

Odgovarajuća S -reč je tada tačno

$$x_{i_1+1} \; x_{i_2+2} \ldots x_{i_k+1}$$

Iz $x_{i_1+1} = \delta(s_0, x_{i_1})$ imamo na osnovu (3.17) da je

$$x_{i_1} \in X' \tag{3.26}$$

Iz $x_{i_{\nu+1}+1} = \delta(x_{i_\nu+1}, x_{i_{\nu+1}})$ za $\nu = 1, 2 \ldots k-1$, imamo na osnovu (3.18)

$$r(x_{i_\nu}, x_{i_{\nu+1}}) \quad \text{za } \nu = 1, 2 \ldots k-1 \tag{3.27}$$

a iz $x_{i_k+1} \in S'$ na osnovu (3.16)

$$x_{i_k} \in X'' \tag{3.28}$$

Na osnovu (3.26), (3.27) i (3.28) imamo da je $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \in \alpha - (e)$.

Ako je dužina reči iz (3.25) jednaka 1, dokaz je očigledan. Sem toga na osnovu definicije je

$$e \in \alpha \longleftrightarrow T(A)$$

Time je teorema u potpunosti dokazana.

δ.4. ALGORITAM SINTEZE KONAČNOG AUTOMATA

Rasmatranje automata sa gledišta mogućnosti predstavljanja dogadjaja u njima vodi poreklo od radova S.K. Klinija [13]. Za ovaj problem koji je faktički rešio još Klini, u navedenom radu, bili su predloženi različiti postupci rešavanja. Metod M.A.Spivka [40] koji bazira na teoriji binarnih relacija u suštini se poklapa sa metodom A.A.Latičevskog [16]. On ima to preimućstvo nad postupkom Gluškova [6] što: 1) ne traži prethodno pretpostavljanje dogadjaja u specijalnom obliku "regularnih izraza"; 2) dovodi odmah do automata sa najmanjim brojem stanja. Njegov suštinski nedostatak je u tome što taj metod nije algoritam. Naš cilj je da u neku ruku povežemo ta dva postupka i damo jedan nov postupak sinteze apstraktnog automata.

Tačna formulacija ovog problema, prema Gluškovu, glasi:

Treba konstruisati algoritam, koji omogućava da se prema proizvoljnom konačnom skupu $E_i = (i = 1, \ldots, m)$ regularnih dogadjaja zadatih svojim regularnim izrazima, nadju tablica prelaska konačnog totalnog milijevog automata A i obeležena tablica prelaska totalnog murovog automata B tako da su svi dogadjaji skupa PRESTAVLJENI ~~dostavljeni~~ kako u automatu A, tako i u automatu B nekim skupom njihovih izlaznih signala.

Pretpostavljajući da je poznat algoritam sinteze V.M.Gluškova mi ćemo se njega dotaći samo onoliko koliko nam je potrebno u daljem izlaganju, odnosno koliko nam može poslužiti kao ideja za naš postupak.

Sem osnovnih operacija algebre dogadjaja u ovom paragrafu ćemo koristiti još dve operacije komplement i presek. Prva od njih je jednomesna a druga dvomesna algebarska operacija. Dopunom E' dogadjaja E iz neke azbuke X nazivamo skup reči azbuke X koje ne pripadaju dogadjaju E. Presekom $E_1 \cap E_2$ dogadjaja E_1 i E_2 se naziva dogadjaj, koji se sastoji od svih reči koje pripadaju i dogadjaju E_1 i dogadjaju E_2.

Mi ćemo se sada osvrnuti na postupak V.M.Gluškova u nešto izmenjenom obliku. Taj uprošćeni postupak se sastoji u sledećem. U datom skupu dogadjaja E_i $(i \in I)$ svim slovima se korespondiraju različiti indeksi iz skupa prirodnih brojeva. Pri tome jedno isto slovo dobija onoliko različitih indeksa koliko se puta pojavljuje u datom skupu dogadjaja. Sem toga sva slova, koja mogu biti početna slova bilo koje reči iz skupa dogadjaja E_i, dobijaju, s leve strane, još jedan indeks npr. nulu. Što se tiče načina pisanja regularnih izraza i tu unosimo malu izmenu. Umesto vitičastih zagrada, koje simbolišu operaciju iteracije, mi ćemo upotrebljavati strelicu i čitati "ponavlja se" ili nastavlja se. To činimo isključivo zbog toga da bi što adekvatnije istakli suštinu operacije iteracije. Tako napisane regularne izraze zvaćemo regularnim lancima. Za tako dobijene regularne lance moguće je odmah konstruisati automat A čiji skup stanja sačinjavaju indeksi iz skupa 1, 2, ... k . Sva stanja koja mogu biti izlazna, kao i kod Gluškova, obeležavamo onim dogadjajima iz kojima pripada reč čije je to izlazno stanje. Stanja koja nisu izlazna ostavljamo neobeleženim. Pri takvoj gruboj sintezi dovoljno je voditi računa o tome da funkcija prelaska tako dobijenog automata ne bude višeznačna. Radi preglednosti korisno je konstruisati graf tako dobijenog automata, koji ćemo nazvati grubim automatom.

Automat A konstruisan po neizmenjenom algoritmu Gluškova dobija se iz grubog automata fuzionisanjem nekih njegovih stanja. U vezi s tim očigledno je sledeće tvrdjenje.

Ako je moguće fuzionisati n parova različitih stanja u grubom automatu onda se ukupan broj stanja smanjuje tačno za n .

Nije teško primetiti, pri fuzionisanju stanja, da odlučujuću ulogu igraju reči sa nepraznim presecima. To nam daje povoda da sve reči u datom skupu dogadjaja $E_i \ (i \in I)$ podelimo na podskupove na način kako ćemo tek pokazati.

Pre nego predjemo na konstrukciju našeg algoritma uvešćemo još neke pojmove koji leže u osnovi tog postupka.

Prvi pojam koji ćemo koristiti, a koji se smatra manje više poznatim je pojam beskonačnog logičkog drveta. Logičko drvo se konstruiše na sledeći način: fiksiramo tačku 0 , nazvanu teme ranga, ili koren drveta, i povlačimo iz njega n odrezaka, koje nazivamo rebrima prvog ranga. Ta rebra mogu da se numerišu po nekom pravilu, npr. rebra posmatrana u smeru kr. skazaljke na časovniku numerišemo sa $0, 1 \cdots\cdots , n-1$ ili, što je isto, sa

$x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ gde su x_i $(i = 0, \ldots n-1)$ slova neke azbuke X .

Krajeve odsečaka prvog ranga, različite od temena prvog ranga nazivamo temenima drugog ranga, kojima se takodje na ukazati način korespondira i slova azbuke X . Ovaj proces se nastavlja neograničeno, proizvodeći temena i rebra svih rangova; pri tome se svaki put rebrima, koja izlaze iz jednog istog temena, korespondiraju po navedenom postupku slova x_i $(i = 0, \ldots n-1)$

Skup svih rebara i -tog ranga $(i = 1, 2, \ldots)$ koji se sastoji očigledno iz n^i rebara, nazivaćemo i -tim spratom drveta.

Proizvoljan niz rebara koji polazi iz bilo kog temena logičkog drveta i nastavljaju se jedno na drugo nazivamo putem ili granom u logičkom drvetu. Broj rebara u jednom putu nazivamo dužinom puta.

Za dva puta l_1 i l_2 u logičkom drvetu kažemo da su jednaka ako imaju istu dužinu i jednako obeležena odgovarajuća rebra.

Za našu svrhu biće potrebno uvesti neke izmene u navedenoj konstrukciji logičkog drveta. Prvo mi ćemo posmatrati samo konačno logičko drvo, kod koga iz svakog temena ne mora izlaziti tačno i putova iste dužine. Drugo, neko od rebara može da ima za početak i kraj jedno isto teme. Tako rebro mi nazivamo PROSTOM petljom. Tako logičko drvo zovemo nepotpuno logičko drvo.

Iz konstrukcije beskonačnog logičkog drveta proizilazi da se svakom nizu iz skupa $L(X)$ azbuke X na jednoznačan način može dodeliti po jedan put tog drveta i obrnuto. Tako je moguće govoriti o rečima q koje su manje ili jednake od reči p , u oznaci: sve reči q tako da je $e \leq q \leq p$; to su tačno sve one reči, o čemu smo već govorili u § 3, koje su dobijene iz p izbacivanjem iz njegovog početka jednog slova, posle drugog itd. sve dok se ne dodje do prazne reči. Prema tome mi možemo shvatiti sve reči iz X kao delimično uredjeno drvo sa 0 pri dnu, njegovim sledbenicima prvi sprat, njihovim drugi itd.

Za svako $x_i \in X$ kažemo da je i -ti sledbenik reči p ako slovo x_i stoji ispred p tj. $x_i p$. Za ovako napisanu reč često se koristi oznaka $x_{ip} = p + x_i$

Sada ćemo uvesti i pojam relacije na skupu $L(X)$. Za razliku od definicije u § 3 ovde ćemo definisati relaciju izmedju dve reči na nešto izmenjen način.

Definicija 4.1. Za dve reči p i q iz skupa $L(X)$ kažemo da su u relaciji, ako im početni delovi imaju neprazan presek. Rang relacije se odredjuje brojem zajedničkih slova.

Iz definicije 4.1. neposredno proizilazi da broj skupova reči u relaciji može iznositi najviše n gde je n broj slova azbuke X.

Uvedimo još pojam ekvivalentnosti temena nepotpunog logičkog drveta.

Definicija 4.2. Dva temena nepotpunog logičkog drveta su ekvivalentna ako su svi putevi koji polaze iz njih jednaki.

U vezi s gornjom definicijom treba primetiti da u slučaju ekvivalentnih temena jedno teme može preuzeti na sebe "funkciju" drugoga bez promene skupa reči azbuke X.

Sem pojma ekvivalentnosti uvodimo još i pojam skraćivanja puta u nepotpunom logičkom drvetu.

Za neki put l_1 u nepotpunom logičkom drvetu kažemo da se može skratiti ako mu se dva uzastopna susedna temena mogu fuzionisati a da se time ne promene odgovarajući ulazni nizovi

Nije teško dokazati i sledeću lemu.

Lema 4.1. Neki put l_1 u nep. logičkom drvetu može se skratiti onda i samo onda kad iz prethodnog temena postoji samo jedan izlaz a sledeće sadrži prostu petlju sa istom oznakom koju ima prethodno rebro.

Na kraju treba primetiti ako reči p_1 i p_2 počinju npr. sa x i $\bar{x}$ onda su one svakako u relaciji pošto, prema algebri dogadjaja, važi jednakost $\bar{x} = x\bar{x}$.

Posle ovako uvedenih pojmova i modela možemo demonstrirati naš postupak sinteze.

Prva etapa se sastoji u ispisivanju svih reči iz skupa događaja $E_i(i \in I)$. Pri tome se slovo sa strelicom iznad tretira kao i slovo bez strelice. Tim je na neki način izvršena generalizacija pojma reči. Tako ispisatim rečima se korespondira po jedan put nepotpunog logičkog drveta. Na taj način se svakom slovu neke reči korespondira po jedno rebro nekog puta u nepotpunom logičkom drvetu, ako je to slovo bez strelice iznad; ako slovo ima još i strelicu onda mu se korespondiraju dva rebra, jedno kao slovima bez strelice i drugo koje polazi i završava se u krajnjem temenu prethodnog mu korespondiranog rebra. Takva rebra, kao što smo već rekli, se nazivaju petljama puta. Sem toga sva rebra se numerišu odgovarajućim slovima a krajnja temena indeksima događaja kome ta reč pripada. Time se završava prva etapa sinteze.

Druga etapa se sastoji u izdvajanju skupova reči koje su u relaciji, odnosno u razbijanju svih reči na skupove reči u relaciji. Uzimajući put najduže reči, iz skupa reči u istoj relaciji, kao bazu "nanosimo" duž njega delove puteva svih ostalih reči iz tog skupa idući od većeg ka manjem rangu. Zatim, kao i kod prvoga koraka sva rebra i temena zadržavaju svoje oznake. Ako sem toga još izvršimo numeraciju prirodnim brojevima svih temena dobijamo parcijalni grubi automat o kome je bilo reči ranije. Pri tome smo za stanja automata uzeli temena logičkog drveta. Time se završava druga etapa sinteze.

Treća zadnja etapa se sastoji u fuzionisanju svih ekvivalentnih temena odnosno stanja i skraćivanju puteva kad je to dopušteno. Prilikom fuzionisanja stanja može da se desi, kad su u pitanju reči koje se ponavljaju, da neko rebro spaja dva nezastopna temena. Takav slučaj se naziva složenom petljom, za razliku od proste petlje koju smo gore definisali.

Da bi automat bio TOTALAN uvodimo u slučaju potrebe, još jedno završno teme. To je takvo teme u kome se stiču sva rebra krajnjih temena puteva koja bi bez toga ostala bez izlaza. Napominjemo da se pri fuzionisanju temena i skraćivanju puteva oznake temena ne menjaju. Posle fuzionisanja svih medju sobom ekvivalentnih temena i mogućih skraćivanja puteva treba izvršiti prenumeraciju svih temena. Ako, sem toga, sva neobeležena temena i završno teme obeležimo sa e onda je time završena treća i poslednja etapa sinteze konačnog inicijalnog murovog automata B .

Na osnovu opisanog postupka sinteze možemo formulisati sledeću teoremu.

<u>Teorema 4.1.</u> Totalni inicijalni murov automat B konstruisan po navedenom postupku je konačan i ima najmanju moć skupa stanja od svih automata koji realizuju preslikavanje nekog datog skupa dogadjaja.

Prvi deo teoreme je očigledan, a drugi sledi iz činjenice da je konstrukcija izvedena sa minimalnim brojem temena nepotpunog logičkog drveta.

Radi uporedjivanja sa našim postupkom navešćemo na kraju neke pojmove i rezultate koji se nalaze u [40] .

Pod <u>reakcijom</u> automata A , koja odgovara nekom početnom stanju $s_0 \in S_A$ podrazumevaćemo preslikavanje ρ_{As_0} skupa $L(X)$ u skup Y definisan formulom

$$\rho_{As_0}(l) = \lambda(\varphi_{Al}(s))$$

gde je $l \in L(X)$

<u>Unutrašnjom reakcijom</u> automata A , koja odgovara početnom stanju $s_0 \in S_A$, nazivamo preslikavanje σ_{As_0} skupa $L(X)$ u skup S_A , definisanom formulom

$$\sigma_{As_0}(l) = \varphi_{Al}(s_0)$$

Dogadjaj E se naziva <u>predstavljivim</u> u automatu A skupom stanja $S \subset S_A$ ako je ispunjena jednakost

$$E = \sigma_A^{-1}(S), \tag{4.1}$$

ili u razvijenom obliku

$$l \in E \longleftrightarrow \sigma_A(l) \in S$$

Ako se skup svih dogadjaja predstavljenih u inicijalnom automatu A, obeleži sa $L_A(X)$, onda se iz (4.1) dobija da je dogadjaj $E \in L_A(X)$ predstavljiv u automatu A tada i samo tada, kad on zadovoljava uslove

$$\mathcal{E}_A(E) \subset E \tag{4.2}$$

gde je $\mathcal{E}_A = \sigma_A^{-1} \circ \sigma_A$ ili u razvijenom obliku

$$\mathcal{E}_A = \bigcup_{(l_1, l_2)} \varphi_{Al_1}(s) = \varphi_{Al_2}(s)$$

Otuda se relacija $\mathcal{E}_A$ naziva relacijom <u>prestavljivosti</u> automata A.

Očigledno je da je

$$\mathcal{E}_A \subset \rho^{-1} \circ \rho$$

gde je ρ_A reakcija automata A.

Neka je sada ρ -proizvoljno preslikavanje skupa $L(X)$ u skup Y, Obeležimo sa ω_l preslikavanje skupa $L(X)$, definisano formulom

$$\omega_l(l_1) = l_1 l$$

Automat $\Omega = \Omega(\rho)$ konstruisan po formulama

$$S_\Omega = L(X), \quad \delta_{\Omega x} = \omega_x, \quad \lambda_\Omega = \rho$$

nazivamo <u>slobodnim automatom</u> NAD SKUPOM X, koji odgovara datom preslikavanju ρ.

Neka su sada A i B dva automata sa zajedničkim ulaznim i izlaznim azbukama X i Y. Binarnu relaciju $\nu \subset S_A \times S_B$ nazivamo <u>stabilnom</u> ako zadovoljava uslove

$$\bigwedge_{x \in X} \varphi_{Bx} \circ \nu \circ \varphi_{Ax} \subset \nu \tag{4.3}$$

ili u razvijenom obliku

$$\bigwedge_{x\in X} (s_1, s_2)\in \nu \longrightarrow (\varphi_{Ax}(s_1), \varphi_{Bx}(s_2))$$

Primetimo da uslov stabilnosti (4.3) za binarnu relaciju $\nu\subset L(X)\times L(X)$ u slobodnom automatu $\Omega(\rho)$ ima oblik

$$\bigwedge_{\ell\in L(X)} \omega_\ell \circ \nu \circ \omega_\ell^{-1} \subset \nu \tag{4.4}$$

ili u razvijenom obliku

$$\bigwedge_{\ell\in L(X)} (\ell_1, \ell_2)\subset \nu \longrightarrow (\ell_1\ell, \ell_2\ell)\subset \nu$$

Binarna relacija $\nu\subset L(X)\times L(X)$ koja zadovoljava uslov (4.4) je poznata pod imenom <u>regularna s desna</u> u slobodnoj polugrupi $L(X)$. Odgovarajuću operaciju stabilnog pokrivanja nazivamo operacijom desnoregularnog otkrivanja.

Polazeći od uvedenih pojmova može se dokazati teorema:

Da bi relacija ekvivalencije $\mathcal{E}\subset L(X)\times L(X)$ bila relacija predstavljivosti nekog automata, potrebno je i dovoljno, da ona bude regularna s desna.

Na kraju treba primetiti da relacija predstavljivosti automata A mora zadovoljavati uslov

$$\bigwedge_{i\in I} \mathcal{E}_A(E_i)\subset E_i ,$$

što je ekvivalentno sa

$$\bigwedge_{i\in I} \mathcal{E}_A \subset E_i\times E_i \cup E_i'\times E_i'$$

tj.

$$\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}$$

gde je

$$\mathcal{E} = \bigcap_{i\in I} (E_i\times E_i \cup E_i'\times E_i') \tag{4.5}$$

Uzimajući desnoregularno otkrivanje od obe strane gornjeg odnosa, imamo

$$\mathcal{E}_A \subset O\Omega(\mathcal{E})$$

gde je

$$O\Omega(\mathcal{E}) = \bigcap_{\ell \in L(X)} \omega_\ell^{-1} \circ \mathcal{E} \circ \omega \tag{4.6}$$

Glavna teorema koja rešava problem sinteze automata tvrdi da inicijalni automat $\Omega \mid O\Omega(\mathcal{E})$ kod koga je $\mathcal{E}$ konstruisano po formuli (4.5) a njegovo desnoregularno otkrivanje po formuli (4.6) ima najmanju moć skupa stanja od svih automata koji predstavljaju sistem dogadjaja E_i $(i \in I)$. Pri tome je automat $\Omega \mid O\Omega(\mathcal{E})$ konstruisan na sledeći način:

$$\delta(\Omega \mid \mathcal{E})_x (E_i) = E_j \longleftrightarrow \omega_x^{-1}(E_j)$$

gde su $E_i, E_j \in L(X) \setminus \mathcal{E}$

Iz ovoga kratkog rezimea može se videti da se i u ovom postupku sve reči iz skupa dogadjaja E_i $(i \in I)$ dele na skupove reči koje zadovoljavaju uslove (4.5) i (4.6) a to je čista analogija našem postupku odredjivanja skupova relacija. U vezi s tim ostaje još otvoren problem da se uspostavi veza izmedju našeg konstruktivnog postupka za odredjivanje stanja automata i odredjivanja tih stanja prema rekurentnoj formuli datoj u navedenom radu.

Radi ilustracije našeg postupka navešćemo sada nekoliko primera sinteze apstraktnog automata.

<u>Primer 1.</u> Konstruisati automat sa najmanjim brojem stanja, koji predstavlja dogadjaje

$$E_1 = 0\vec{\lambda}0 \quad ; \quad E_2 = 00 \vee \vec{\lambda} 0 \vec{\lambda}$$

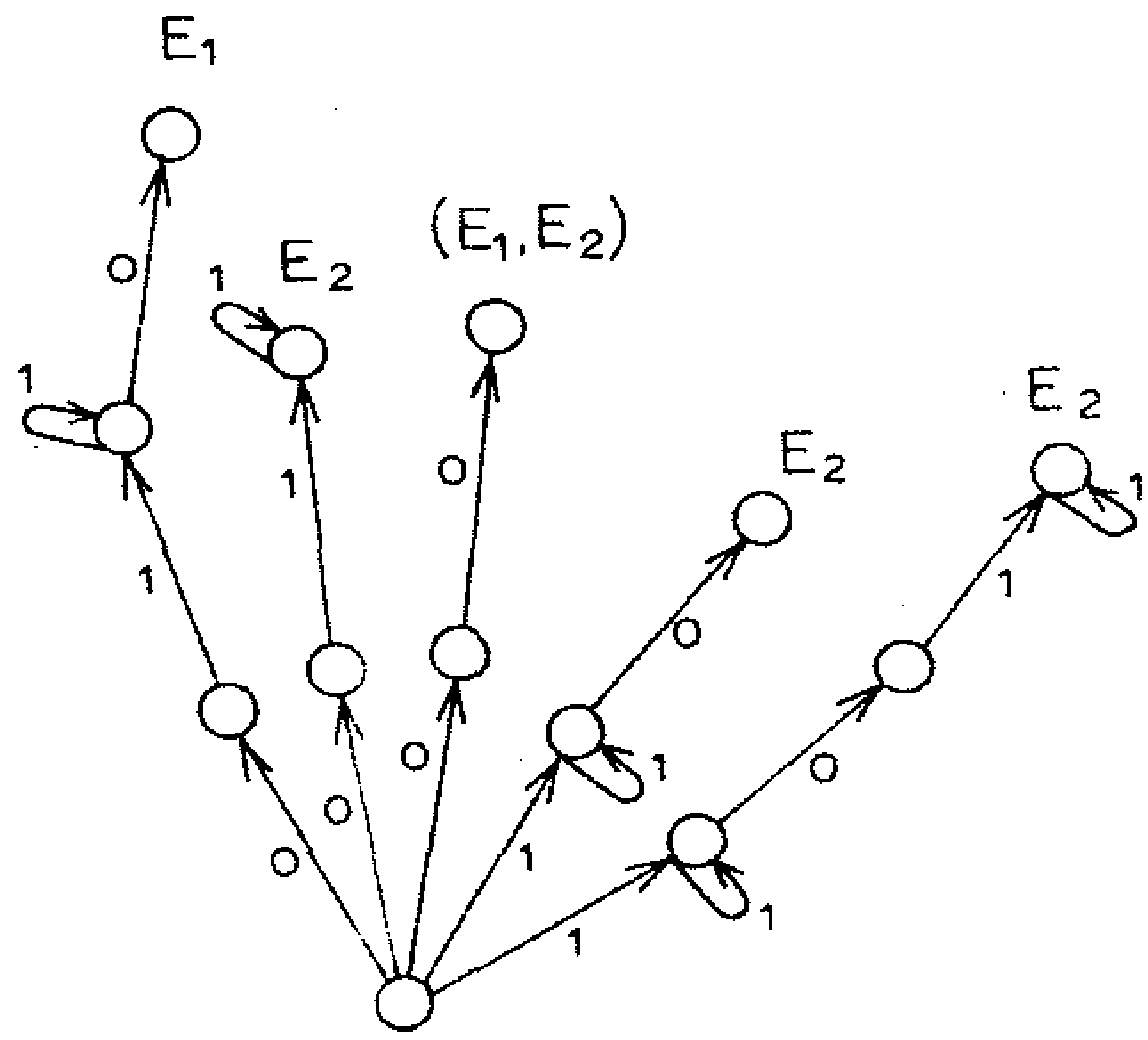
Ovaj isti zadatak su rešavali V.M.Gluškov [6], i M.A.Spivak [40]. Broj stanja po Gluškovu iznosi 9 a po Spivku 8.

Broj stanja po našem postupku je takodje 8.

Dati dogadjaji sadrže sledeće "reči" (00, 01, 010, 10, 101)

Nepotpuno logičko drvo koje odgovara tom skupu dato je na (sl. 1). Konstrukcijom tog drveta završava se prva etapa sinteze.

Sada primenjujemo drugo pravilo sinteze. Napominjemo pri tome da se prilikom primene prvog pravila rukovodimo idejom da svi skupovi reči u relaciji budu grupisani. To doprinosi boljoj preglednosti.

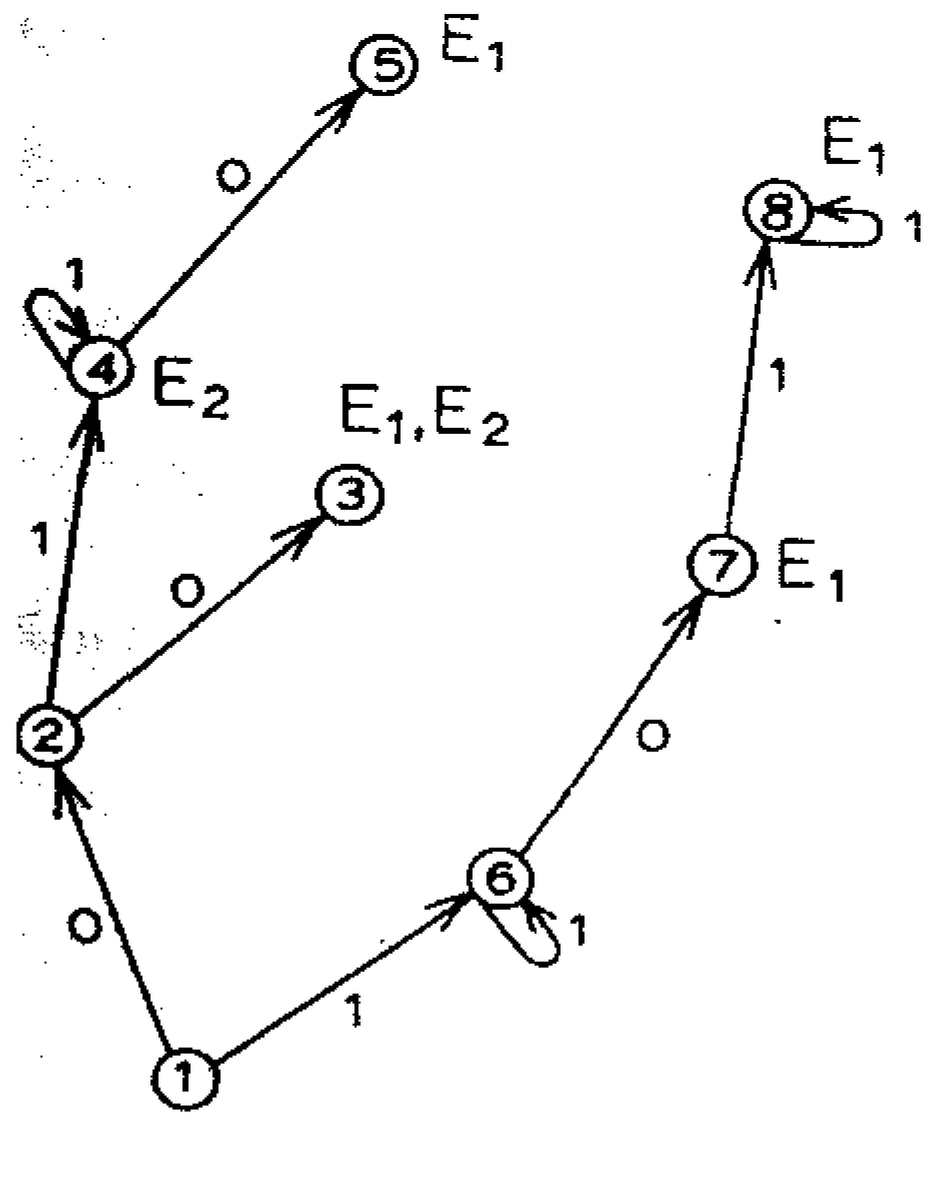


(sl. 1)

Nepotpuno logičko drvo dobijeno primenom drugog pravila sinteze ima oblik dat na (sl. 2).

Time je završena druga etapa sinteze.

Na kraju primenjujemo treće pravilo sinteze. Posle fuzionisanja ekvivalentnih temena 7 i 8 odnosno skraćivanja odgovarajućeg puta, ostaje jedino da se konstruiše završno teme i izvrši numeracija svih temena prema uputstvu datom tim pravilom. Konačan graf automata dat je na (sl. 3). Kao što se vidi on zainsta ima samo 8 stanja.

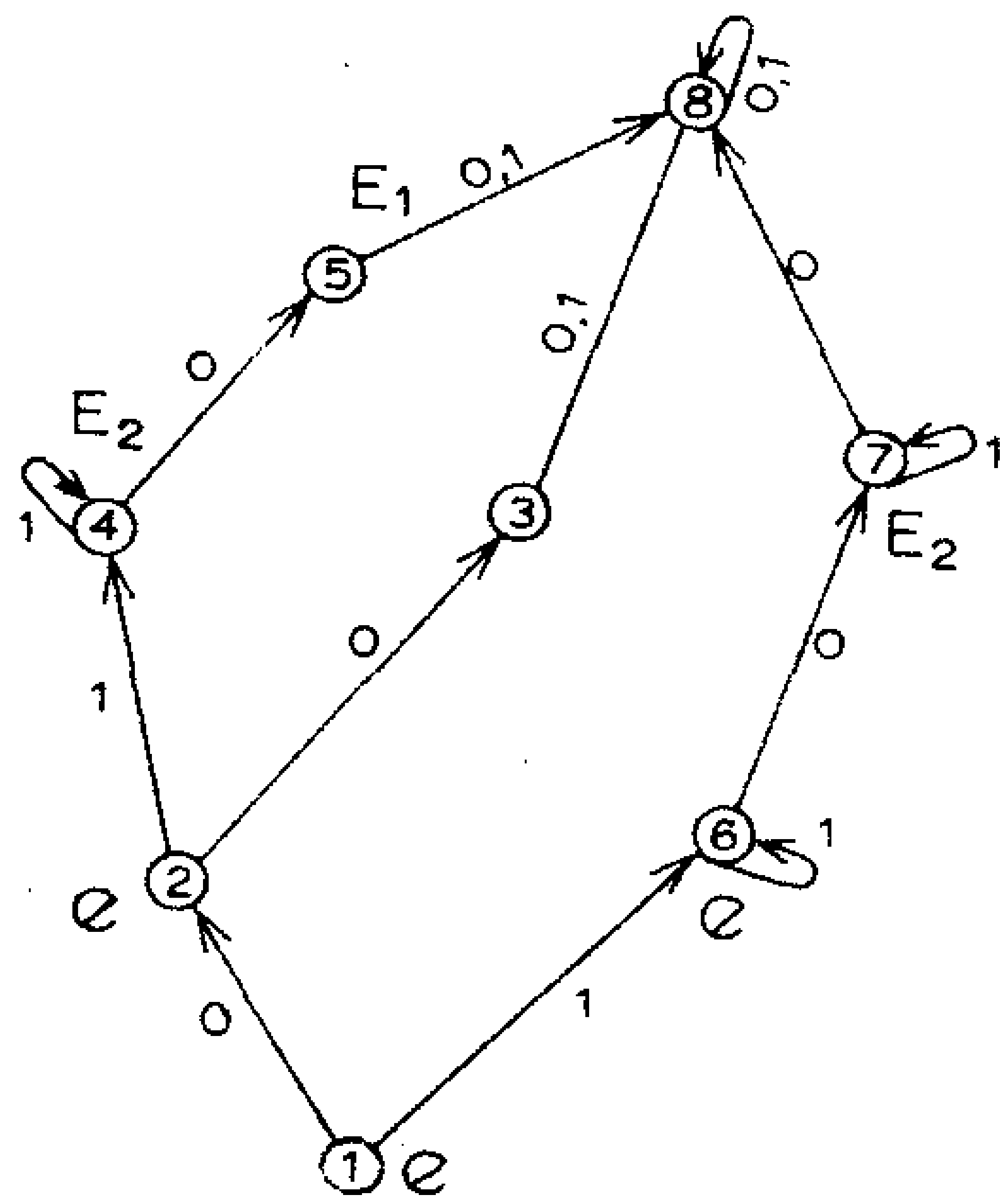


(sl. 2)

Primer 2. Treba konstruisati konačni inicijalni automat u kome će za ulaznu azbuku $X=(0,1)$ biti predstavljena dva dogadjaja: dogadjaj E_1 koji se sastoji iz svih reči azbuke X, kod kojih sva slova 0 prethode svim slovima 1, i dogadjaj E_2, koji se sastoji iz svih reči azbuke X, koje se završavaju slovom 0.

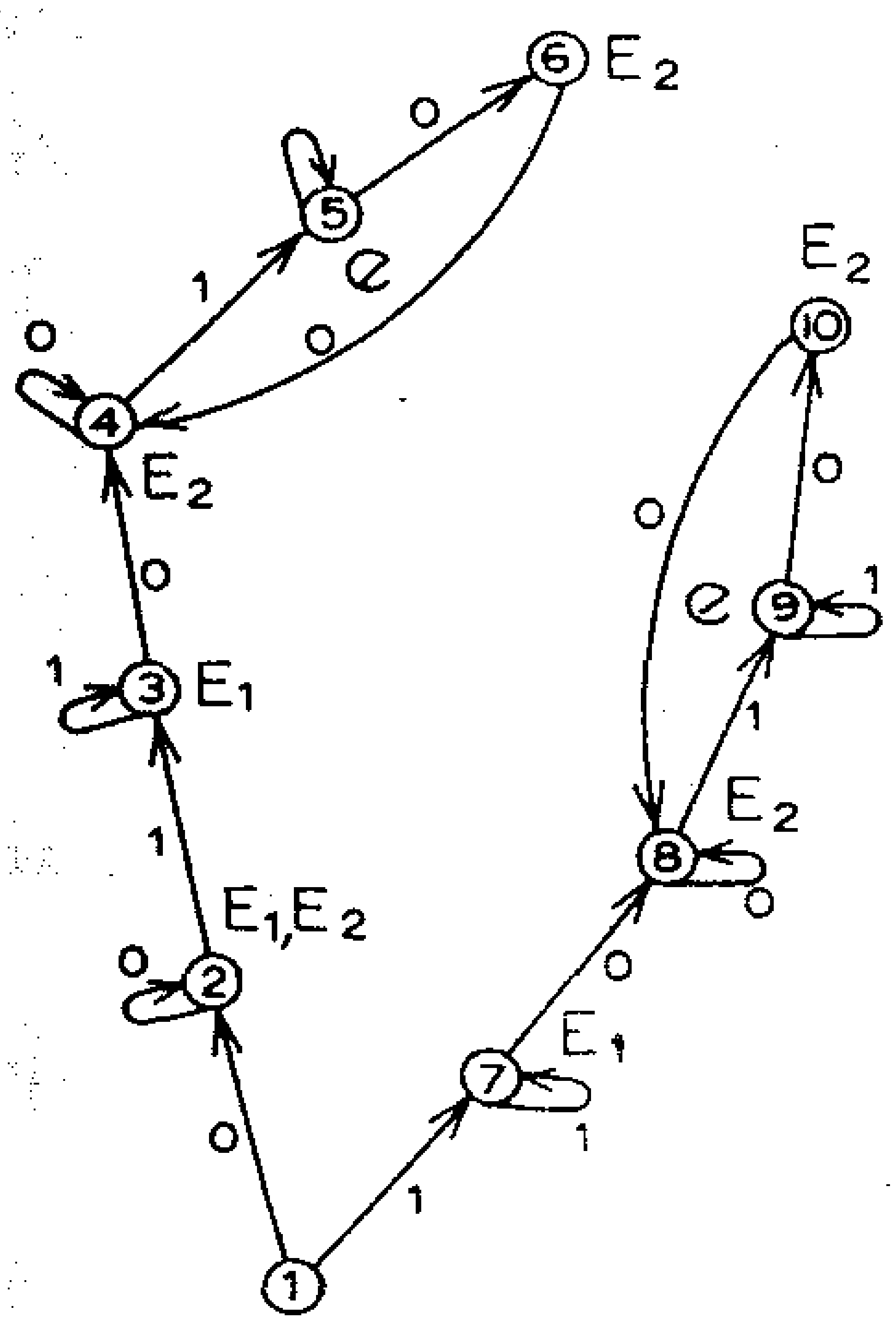
Ako odmah predjemo na skupove reči u relaciji onda imamo sledeća dva skupa: $(\vec{0}, \vec{0}\vec{1}\vec{0})$ i $(\vec{1}, \vec{1}\vec{0})$ pošto su dogadjaji $E_1 = \vec{0}\vec{1}$ i $E_2 = (\overline{0 \vee 1})0$

Kratkoće radi mi možemo odmah konstruisati grubi automat preskačući prvu etapu sinteze. Odgovarajući grubi automat je dat na (sl. 4).

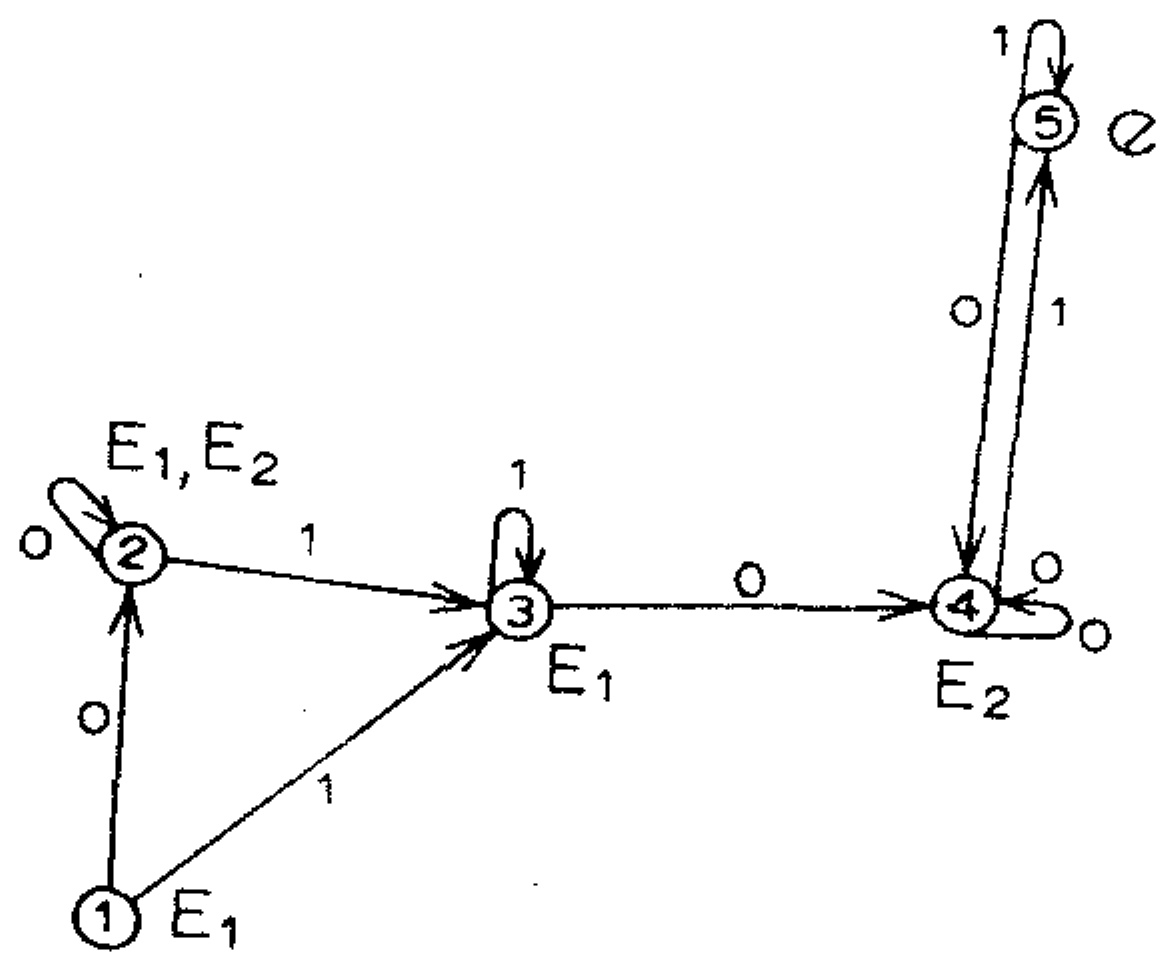


(sl. 3)

Fuzionisanjem temena 6 i 4, 10 i 8 a zatim temena 7 i 3 konačno dobijamo graf automat dat na (sl. 5). U ovom primeru kao



(sl. 4)



(sl. 5)

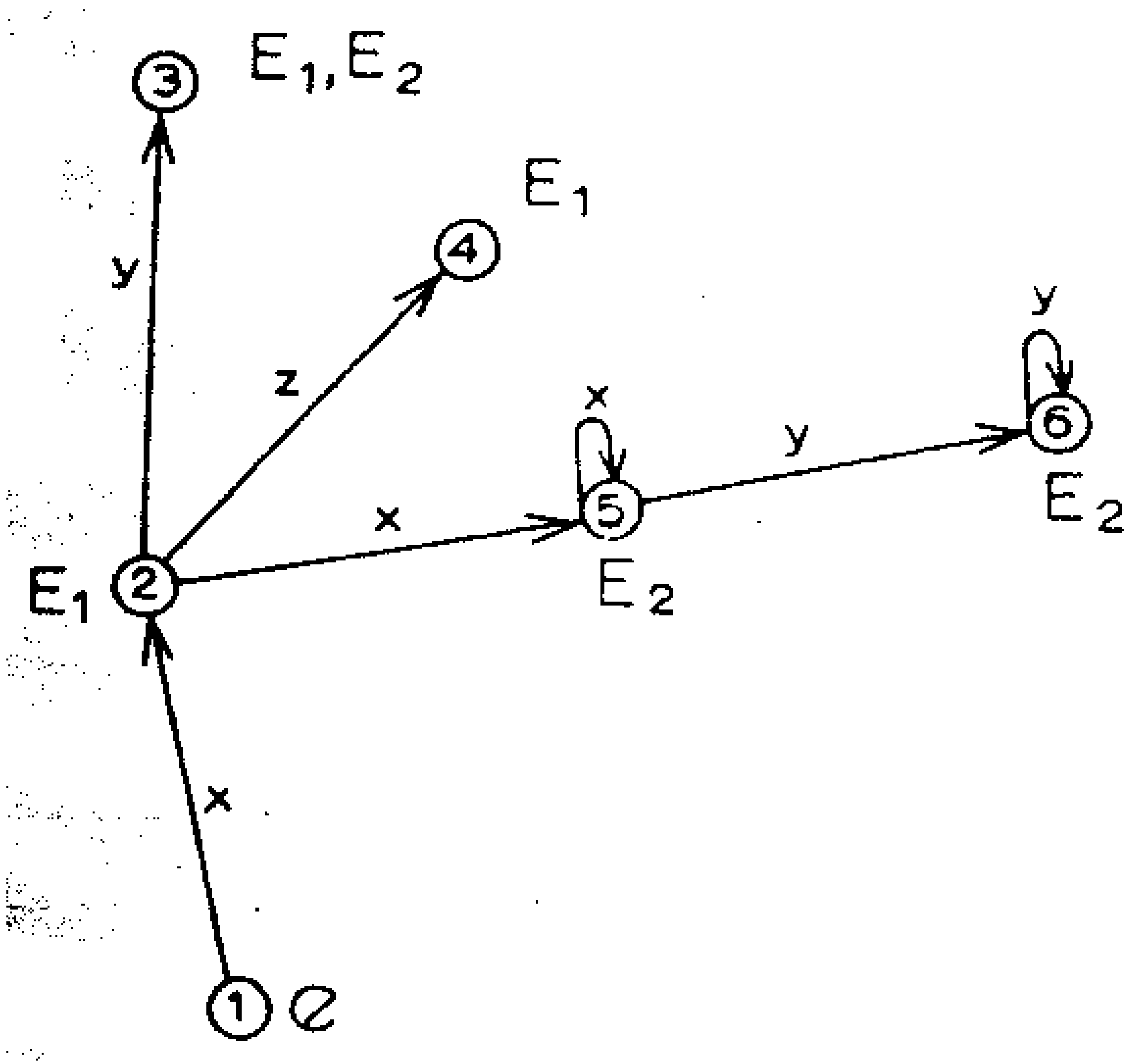
što se vidi imamo složenu petlju.

Primer 3. Konstruisati konačni automat koji predstavlja dogadjaje:

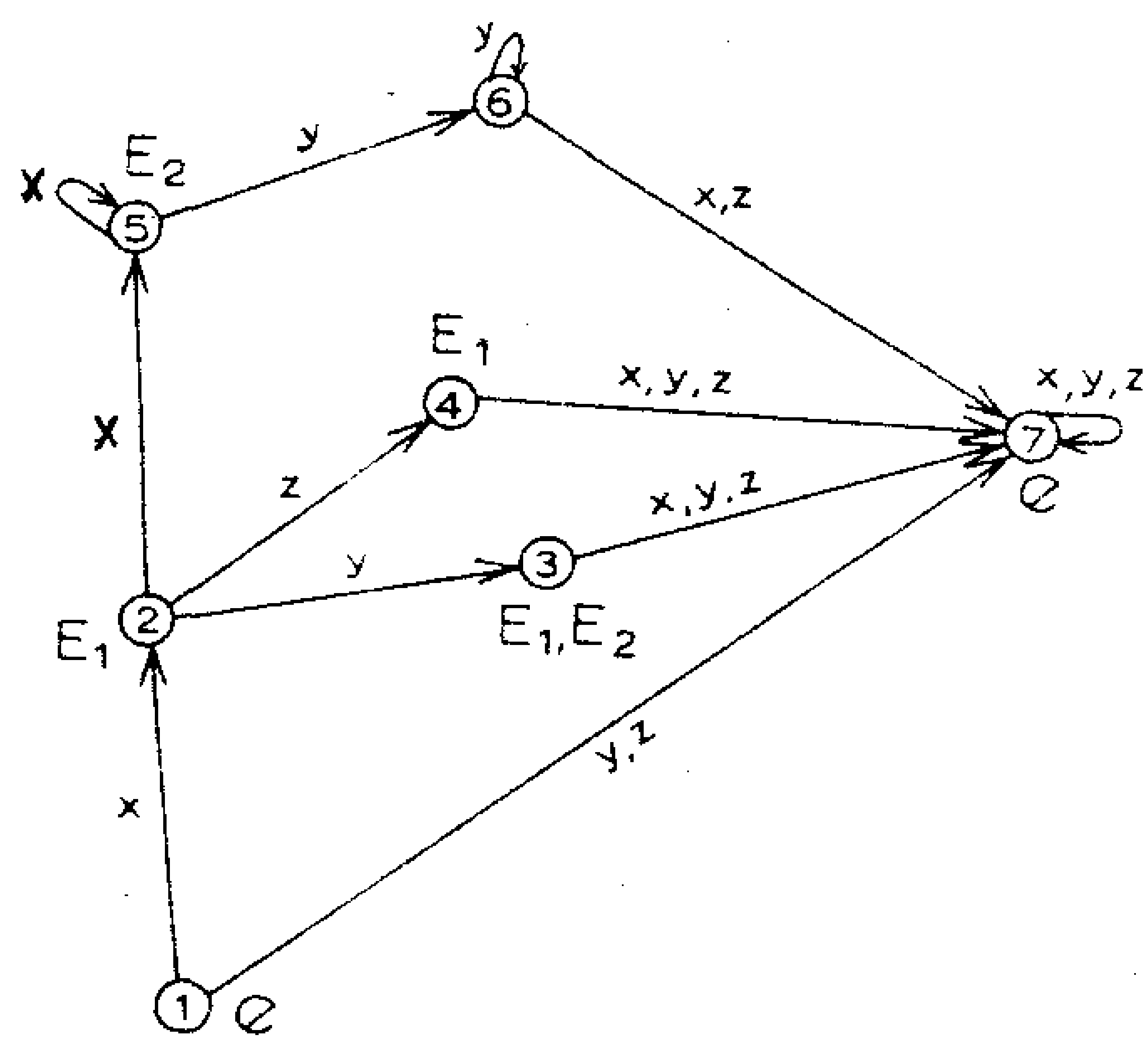
$$E_1 = x\vec{y} \quad \text{i} \quad E_2 = xx$$

Iz datih izraza se vidi da imamo sledeći skup reči:$(x, xx, x\vec{y})$ Vidi se, takodje, da imamo samo jedan skup reči u relaciji, pa će otuda grubi parcijalni automat imati samo jednu granu (sl. 6).

Pošto nema ekvivalentnih temena ostaje još jedino da se konstruiše završno teme i dovrši započeta numeracija. Konačan graf je dat na (sl. 7).



(sl. 6)

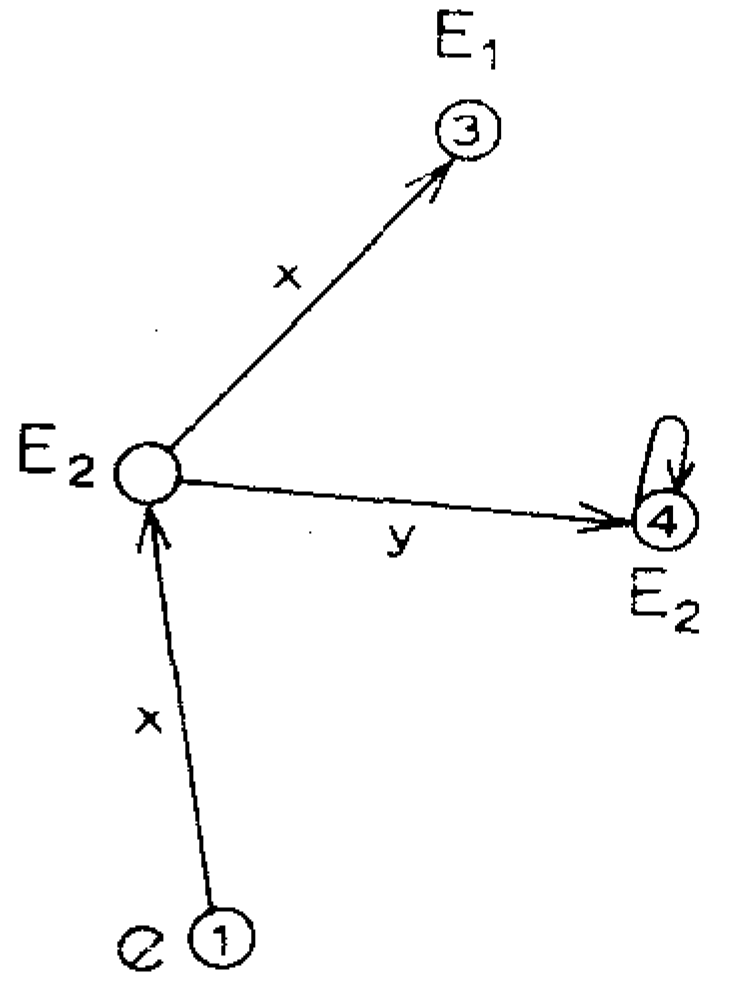


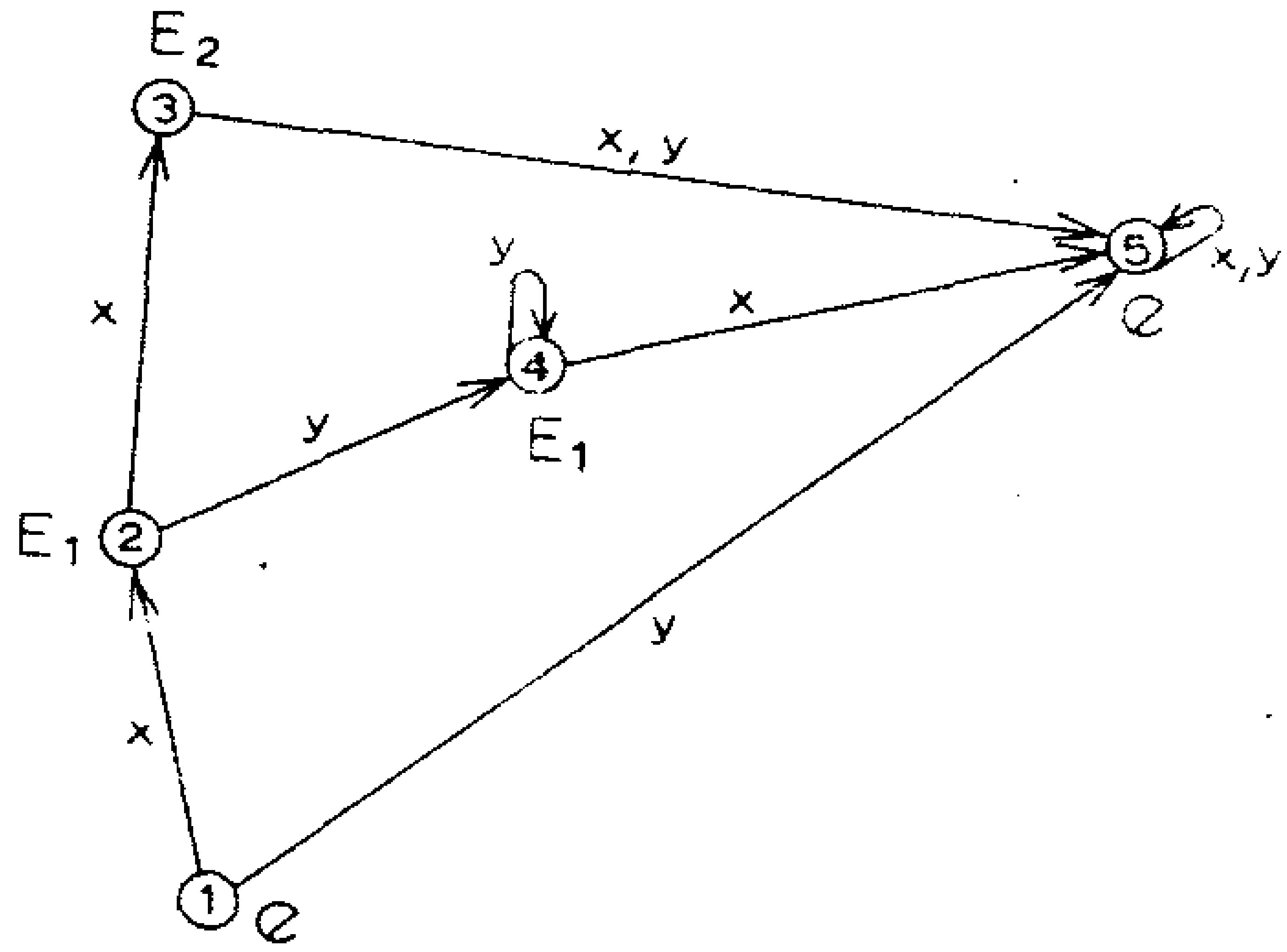
(sl. 7)

Primer 4. Konstruisati konačni automat koji predstavlja sledeće dogadjaje

$$E_1 = xz \vee \vec{x}\vec{y} \qquad \text{i} \qquad E_2 = xy$$

U datom slučaju imamo samo jedan skup reči u relaciji: $(xz, \vec{x}\vec{y}, x\vec{y}$. Spajajući istovremeno i prvu i drugu etapu sinteze dobijamo parcijalni grubi automat dat grafom na (sl. 8).





(sl. 8) (sl. 9)

Pošto nema ekvivalentnih stanja zadnja etapa se sastoji još samo u konstrukciji završnog temena i njegovoj numeraciji. Konačni graf je dat na (sl. 9).

§.5. ALGORITAM MINIMIZACIJE APSTRAKTNOG AUTOMATA

Problem minimizacije, prema Gluškovu, zahteva razradu takvih konstruktivnih postupaka, koji omogućavaju da se prema proizvoljnom datom konačnom milijevom ili murovom automatu nadje njemu ekvivalentan (ili u slučaju parcijalnih automata nalaženje automata koji ga ekvivalentno produžava) milijev odnosno murov automat, koji ima najmanju moć skupa stanja. Taj problem nosi naziv problem <u>mitimizacije konačnih automata.</u>

U vezi toga potrebno je istaći da se dva totalna automata nazivaju ekvivalentnim, ako induciraju isto preslikavanje, dok se parcijalni automat A naziva ekvivalentnim produžavanjem parcijalnog automata B, ako se njino induciranje preslikavanje poklapa sa preslikavanjem, induciranim automatom za sve reči koje su dopuštene u automatu B.

U prethodnom paragrafu mi smo rešili, zajedno sa problemom sinteze, i problem minimizacije apstraktnog murovog automata, za slučaj kad su dati regularni izrazi koje treba realizovati. Medjutim, kad je apstraktni automat zadat tablicama prelaska i izlaska, odnosno obeleženom tablicom prelaska, takodje se postavlja problem minimizacije bez prethodnog prelaženja na skup regularnih dogadjaja. U ovom paragrafu mi ćemo se upravo i pozabaviti tim problemom.

Postupak minimizacije se obično izvodi po etapama.

<u>Prva etapa</u> svake minimizacije se sastoji u izdvajanju neodredjenih izlaznih signala i stanja. Takvim izdvajanjem se ne menja polazno preslikavanje, koje mora inducirati posmatrani automat.

<u>Druga etapa</u> minimizacije se sastoji u isključivanju nedostižnih stanja, tj. prelaz na svezani automat.

<u>Treća etapa</u> se sastoji u objedinjavanju u jedno stanje svih takozvanih ekvivalentnih stanja, čime se završava proces minimizacije. Mi sada prelazimo na detaljno razmatranje ove etape.

Nastojeći da detaljno proučimo ovaj problem, mi ćemo ovde uporedo sa slučajem, kad na klasu svih mogućih ulaznih reči, odnosno nizove ulaznih signala, nisu nametnuta nikakva ograničenja, rasmatrati i slučaj kad su na tu klasu nametnuta i neka ograničenja.

Usled mogućnosti da su izvesni nizovi signala nedopušteni za neki dati automat, mi ćemo skup E svih mogućih ulaznih nizova konačne dužine razbiti na dva podskupa: podskup $L(X) = E$ (konačan ili beskonačan), koji sadrži sve dopuštene za dati automat A ulazne nizove (reči), i komploment tog podskupa $\overline{L}(X)$, koji čini skup zabranjenih ulaznih nizova. U specijalnom slučaju može biti $L(X) = E$; to znači da je za automat dopušten proizvoljan ulazni niz.

Ograničenja ovog tipa se odnose na sve moguće ulazne nizove i ne stoje ni u kakvoj vezi sa stanjima automata.

Takodje su moguća ograničenja i drugog tipa koja su nametnuta konstrukcijom automata A na skup ulaznih nizova.

Ograničenja drugog tipa se mogu nametnuti na jedno ili pak na više stanja automata. Pri tome su u opštem slučaju ograničenja za različita stanja različita.

Ako je zadat automat A i ako neki ulazni niz ne menja osobinu stanja s_i i svih uzastopnih stanja, onda se takav niz naziva <u>dopuštenim ulaznim nizom stanja s_i</u>. Obeležavaćemo ga sa $L_{s_i}(X)$

Ograničenja ovog tipa prvi je rasmatrao Aufencamp. Zbog toga ćemo od sada takav tip ograničenja ulaznih nizova nazivati ograničenjima tipa Aufencampa.

Kada su u pitanju ograničenja tipa Aufencampa nema ni jednog skupa dopuštenih ulaznih nizova, takvog da proizvoljan niz koji pripada skupu $L(X)$, može biti uveden u automat nezavisno od toga, u kakvom se početnom stanju on nalazi. Svako izmedju k mogućih početnih stanja automata ima svoj skup dopuštenih ulaznih nizova $L_{s_i}(X)$, koji je u opštem slučaju različit, od drugih skupova $L_{s_j}(X)$ $(j \neq i)$.

Treba napomenuti, za slučaj ograničenja prvog tipa dopuštenih ulaznih nizova skupa $L(X)$, tj. kad je taj skup nezavisan od stanja automata A, algoritam raspoznavanja pripadnosti proizvoljnog ulaznog niza iz skupa $L(X)$ može biti formulisan u terminima, koji nisu vezani za izbor početnog stanja automata, a kad-kad nisu uopšte vezani za automat. Otuda takav tip ograničenja, kad algoritam raspoznavanja postoji "sam po sebi", tj. može biti izražen u terminima, ne vezanim za mašinu (mada je on možda izveden polazeći od specifičnosti rada i konstrukcije mašine), mi ćemo ubuduće nazivati tipom ograničenja u sebe i govorićemo da je u tom slučaju skup svih mogućih nizova "ograničen u sebi".

Posmatrajmo sada samo nizove "ograničene u sebi" i uvedimo pojam ekvivalentnosti stanja konačnog automata.

Pretpostavimo da je zadat skup $L(X)$ dopuštenih ulaznih nizova i dva automata A i B jednog istog tipa (u specijalnom slučaju A i B mogu da predstavljaju jedan isti automat). Za dva stanja, stanje s_i automata A i stanje s_j automata B kažemo da su ekvivalentna u odnosu na skup $L(X)$ ako stanja s_i i s_j imaju iste reakcije.

Kao što je već rečeno u § 4, pod reakcijom automata A, koja odgovara nekom početnom stanju $s_0 \in S$ podrazumevamo preslikavanje ρ_{As_0} skupa $L(X)$ u skup Y definisano formulom

$$\rho_{As_0}(\ell) = \lambda(\varphi_{A\ell}(s))$$

gde je $\ell \in L(X)$

Ako se automati A i B poklapaju, onda imamo definiciju ekvivalentnosti u odnosu na $L(X)$ dva stanja jednog istog automata.

U slučaju kad je $L(X) = E$ tj. kad skup dopuštenih ulaznih nizova sadrži sve nizove kažemo prosto da su stanja s_i i s_j ekvivalentna.

Polazeći od gore date definicije ekvivalentnih stanja, može se formulisati sledeći zadatak analize automata.

Dat je automat A i skup dopuštenih ulaznih nizova $L(X)$. Traži se postupak koji omogućava da se za proizvoljna dva stanja automata odgovori na pitanje: da li su ta dva stanja ekvivalentna u odnosu na skup $L(X)$ ili ne.

Jasno, ako je dat algoritam za raspoznavanje ekvivalentnosti stanja automata u odnosu na skup $L(X)$ onda možemo razbiti sva stanja na grupe ekvivalentnih stanja u odnosu na $L(X)$.

Pod grupom ekvivalentnih stanja u odnosu na $L(X)$ podrazumoćemo takav skup stanja automata A koji ima sledeće osobine: 1^o proizvoljna dva stanja su ekvivalentna u odnosu $L(X)$; 2^o proizvoljno stanje iz grupe nije ekvivalentno u odnosu na $L(X)$ nikakvom stanju van grupe.

Krajnji cilj pri tome je razjašnjenje mogućnosti odredjivanja ekvivalentnosti dvaju stanja u odnosu na proizvoljan skup "zadat efektivno", tj. zadat algoritmom raspoznavanja.

U vezi s tim, koristeći aparat teorije algoritama Mur je dokazao sledeću teoremu.

Teorema 5.1. Problem raspoznavanja ekvivalentnosti stanja s_i i s_j u odnosu na proizvoljno efektivno zadat skup je algoritmički nerešljiv.

Mi ćemo se, u našem radu, zadržati na slučaju kad na skup dopuštenih ulaznih nizova signala (reči) nije nametnuto nikakvo ograničenje, odnosno nikakav uslov, tj. kad je $L(X) = E$ i prema tome ostaje prosto samo da se utvrdi ekvivalentnost stanja automata. U tu svrhu postoji, pored ostalih, i dosta podesan algoritam Aufencampa i Hohna koji mi ovde nećemo navoditi.

Algoritam koji ćemo ovde dati ima prednost nad do sada poznatim algoritmima kako po teorijskoj interpretaciji tako i zbog njegove primene u praksi.

Teorijska podloga za ovaj postupak leži u činjenici da se svaki konačni Milijev ili Murov automat (u opštem slučaju ...ijalni) može uspostaviti korespondencija izmedju elemenata ...upova S_A, X_A i Y_A na sledeći način. Jednom fiksiranom ... $(s_i, y_j) \subset S \times Y$ $(i = 0, 1, \ldots m;\ j = 0, 1, \ldots n)$ ... korespondiraju svi oni parovi (s_k, x_t) koji zadovoljavaju ...deće jednačine:

$$\begin{aligned} \delta(s_i, x_t) &= s_k \\ \lambda(s_i, x_t) &= y_j \end{aligned} \tag{5.1}$$

...igledno je da je uspostavljena relacija višeznačna. Na taj ...čin je moguće konstruisati tablicu uspostavljene relacije ... da su vrste tablice obeležene parovima (s_i, y_j) a kolone, ...cimo, parovima (s_k, x_t) dobijenim iz jednačina (5.1). Takva ...blica, prema tome, može da zameni istovremeno tablicu prelas... i izlaska, odnosno obeležnu tablicu prelaska, milijevog od...sno murovog automata.

Uvodjenjem pomenute relacije, obeležimo je sa ν gde je

$$\nu \subset (S \times Y) \times (S \times X) \tag{5.2}$$

...guće je veoma jednostavno izvesti niz teorema na kojima bazi... algoritam minimizacije.

Grafičku reprezentaciju relacije (5.2) možemo dati uvodeći ...jam <u>graf - matrice.</u>

<u>**Definicija 5.1.**</u> Pod graf-matricom ćemo podrazumevati svaki ...načan graf čija temena obrazuju kolone neke matrice M obli... $M = [a_{ik}]_m^2$

Ako sada svakom elementu prve kolone pridružimo po jedno slo... $s \in S$ i svakom elementu druge kolone po jedno slovo $y_i \in Y$ onda smo time uspostavili uzajamnu i jednoznačnu korespon...nciju izmedju elemenata kolonâ i slova $s_i \in S$ i $y_i \in Y$. ...etpostavka je da imamo dovoljan broj temena grafa radi uspostavljanja navedene relacije.

Napominjemo da je u opštem slučaju broj slova s_i različit od broja slova y_j. No mi smo uvek u mogućnosti da izjednačimo njihov broj dodajući prazne elemente azbuci sa manjim brojem slova. To nam je potrebno isključivo zbog toga da bi i formalno opravdali naziv graf - matrica.

Iz svakog temena prve kolone izlazi najviše n orijenisanih rebara, gde je n broj slova azbuke X. Svako od tih rebara spaja neke teme prve kolone sa nekim temenom druge kolone. Sem toga ćemo svakom rebru korespondirati par elemenata (s_k, x_t) koji su u relaciji (5.2), na osnovu jednačina (5.1), sa elementima (s_i, y_j). Elemenat s_k nije ništa drugo, prema jednačinama (5.1), nego stanje u koje prelazi dati automat A iz stanja s_i pod uticajem signala x_t.

Rebra grafa sa pridruženim parom $(s_k, x_t) \subset S \times X$ nazivamo obeleženim. Graf - matrica može služiti takodje i za zadavanje automata.

Definicija 5.2. Pod putem u graf - matrici podrazumevamo skup svih rebara koja polaze iz jednog temena s_i uključujući i njihove krajeve, odnosno temena druge kolone.

Definicija 5.3. Za dva puta l_1 i l_2 iz skupa puteva $L(X)$ graf - matrice kažemo da su jednaki ili da se poklapaju ako su im odgovarajuća rebra jednako obeležena i imaju jednake reakcije.

Definicija 5.4. Za dva puta $l_1, l_2 \in L(X)$ kažemo da se ekvivalentno nastavljaju ako svi odgovarajući signali (rebra) daju iste rekaije i prevode dotična stanja u ekvivalentna medju sobom stanja.

Posle ovako uvedenih pojmova možemo formulisati osnovnu teoremu na kojoj počiva algoritam minimizacije.

Teorema 5.2. Dva stanja s_i i s_j nekog automata prvog tipa su ekvivalentna onda i samo onda ako im se odgovarajući putevi poklapaju ili ekvivalentno nastavljaju.

Uslov je dovoljan. Uzmimo proizvoljan niz ulaznih signala $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$. Ako taj niz dovedemo na ulaz automata A prethodno dovedenog u stanje s_i onda se dobija odgovarajući izlazni niz $q = y_{j_1} y_{j_2} y_{j_3} \dots y_{j_k}$. Ako to isto ponovimo uzimajući za početno stanje s_j onda je odgovarajući izlazni niz $q' = y'_{j_1} y'_{j_2} \dots y'_{j_k}$. Lako je pokazati da je $y_{j_1} = y'_{j_1}$. Ta činjenica sledi neposredno iz definicije o poklapanju puteva. Naime ulaznoj reči p dovedenoj na stanje s_i odgovara put l_1 a dovedenoj na stanje s_j put l_2. Pa smo pretpostavimo da je $l_1 = l_2$ onda sledi da je i $y_{j_1} = y'_{j_1}$. No kako je u tom slučaju i $s_k = s'_k$ onda mora biti i $y_{j_2} = y'_{j_2}$. Produžujući taj proces do kraja sledi da mora biti i $y_{j_k} = y'_{j_k}$, a otuda i $q = q'$.

Uslov je potreban. Pretpostavimo da se putevi koji odgovaraju stanjima s_i i s_j razlikuju. Onda to znači da je ili $y_j \neq y'_j$ ili se neki od prvih indeksa rebara puteva razlikuju. Ako je u pitanju prvi slučaj onda je dokaz završen. Ako je po sredi drugi slučaj onda to znači da neki od signala x_{i_k} prevodi stanja s_i i s_j u dva različita stanja s_m i s_n, koja u opštem slučaju nemaju iste reakcije. Time je dokaz u potpunosti završen.

Dokazana teorema, očigledno, da je i efektivni postupak za odredjivanje grupa ekvivalentnih medju sobom stanja, drugim rečima, da je i algoritam minimizacije.

Što se tiče murovog automata onda još treba voditi računa o tome da stanja s_i i s_j budu jednako obeležena. Taj zahtev se može izostaviti ako ne tražimo da minimizirani automat i dalje ostane Murov.

Pri definiciji pojma ekvivalentnih stanja prećutno smo podrazumevali da je reč o totalnim automatima. Medjutim, kad je u pitanju parcijalni automat, milijev ili murov, onda se umesto pojma ekvivalentnosti stanja uvodi pojam udruženosti stanja (ili združenosti). Taj pojam je prvi uveo V.M.Gluškov.

Pod pojmom udruženih stanja s_i i s_j podrazumevamo takva dva stanja ili skup stanja $S_1 \subset S$, čija su sva stanja medjusobom ekvivalentna za one ulazne signale za koje su definisano i funkcija prelaska i funkcija izlaska automata.

Iz same definicije udruženih stanja sledi da se, pri tome sva stanja iz podskupa S_1 mogu zameniti ~~tim~~ onim koje ima najveći broj definisanih izlaznih signala, odnosno ima najveću moć skupa akceptiranih ulaznih i izlaznih reči, ili jednim iz grupe stanja podskupa S_1, kad za sva stanja iz te grupe skupovi $T(A)$ i $I(A)$ imaju istu moć.

U vezi sa onim što je napred kazano treba istaći da klase ekvivalentnih stanja nemaju zajedničkog elementa, tj. imaju prazan presek. Za svako $i, j \in I \longrightarrow S_i \cap S_j = \Phi$. No, kad je reč o skupovima u-druženih medju sobom stanja, onda ti skupovi mogu da imaju i neprazan presek. Ta činjenica sledi neposredno iz definicije. Prema tome klase udruženih stanja nisu jednoznačno odredjene.

Jasno je da naš model za minimizaciju ostaje u važnosti i za slučaj parcijalnih automata, s tim što se može izvršiti proizvoljno dodefinisanje neodredjenih izlaznih signala.

Prednost našeg algoritma nad algoritmom Gluškova je očigledan. S našeg modela mogu se u mnogim slučajevima direktno pročitati ∞ klase ekvivalencije, i nije potrebno ići postupno od 1-klase do ∞ -klase ekvivalencije. U slučaju kad se stanja ekvivalentno nastavljaju onda je potrebno izvršiti samo prenumeraciju odgovarajućih stanja.

Ako i usvojimo postupak V.M.Gluškova, onda bi korišćenjem naših definicija znatno uprostili dokazivanje nekih od tamo navedenih tvrdjenja.

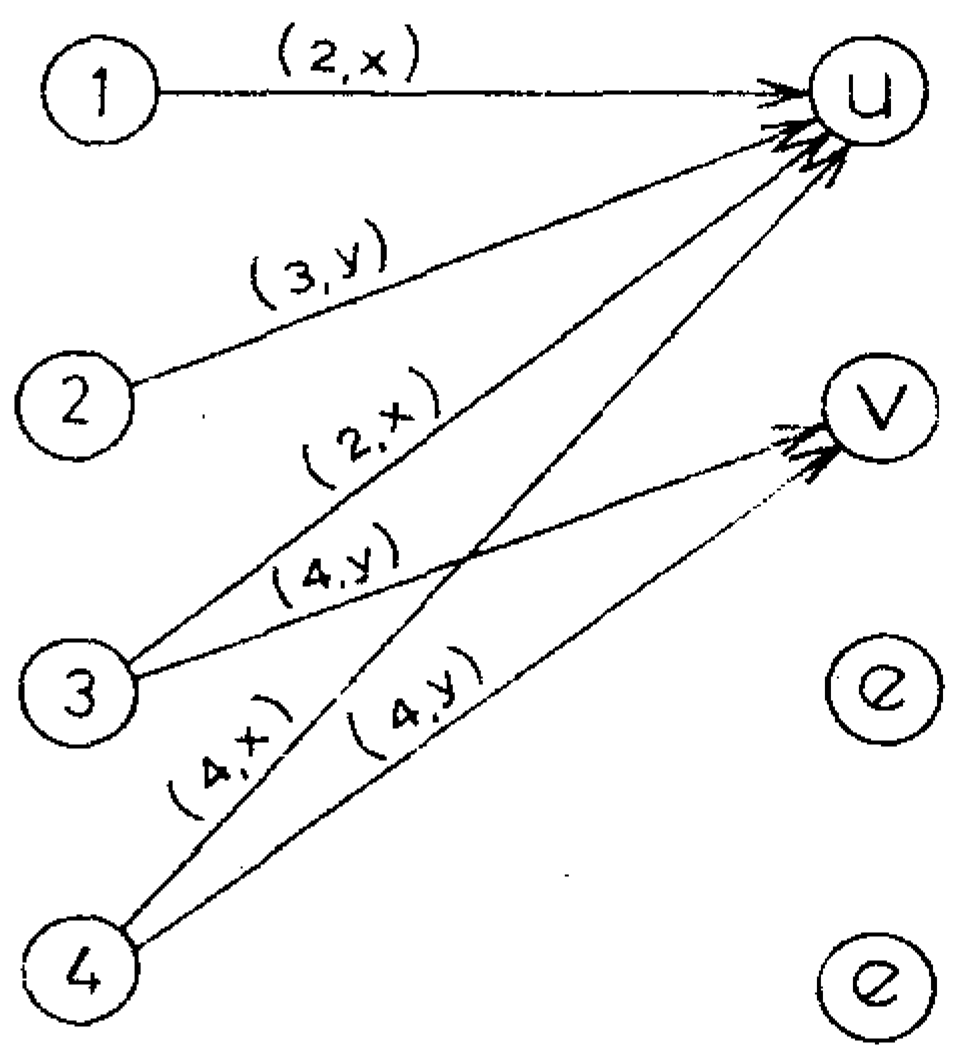
Na kraju navodimo nekoliko primera.

Primer 1. Minimizirati konačni automat zadat sledećim tablicama prelaska i izlaska

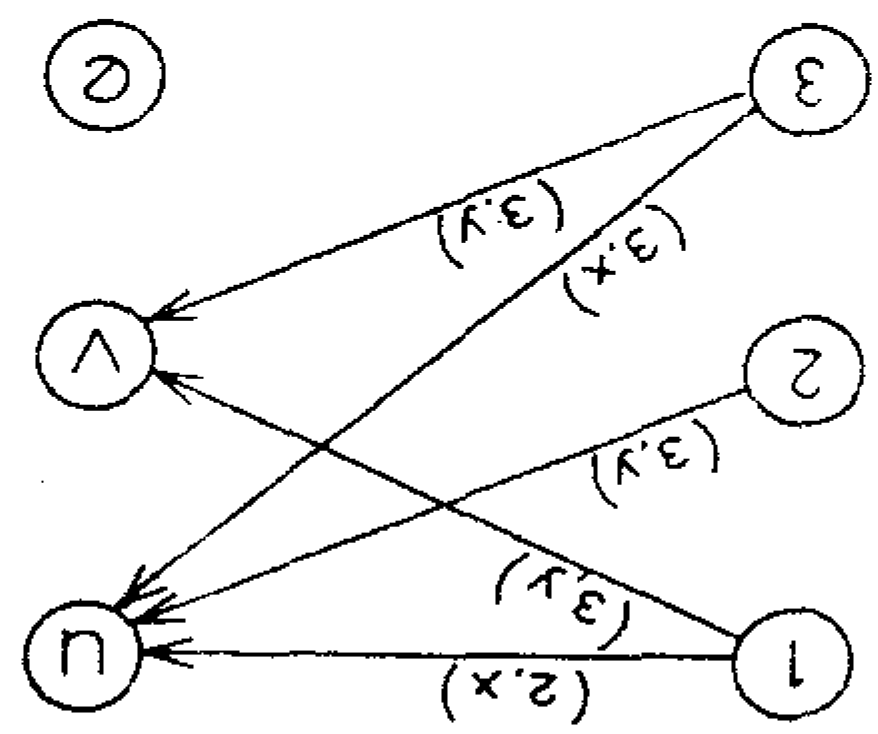
	1	2	3	4
x	2	–	2	4
y	–	3	4	4

	1	2	3	4
x	u	–	u	u
y	–	u	v	v

Kao što se vidi iz tablica u pitanju je parcijalni milijev automat. Odgovarajuća graf-matrica toga automata data je na (sl. 10).



(sl. 10)



(sl. 11)

Kao što se vidi sa modela (sl. 10) imamo tri klase udruženih stanja: (1, 3), (2) i (4). Posle prenumeracije graf-matrica minimiziranog automata je data na (sl. 11). Ima još jedna kombinacija klasa ekvivalencije.

__Primer 2.__ Minimizirati istovremeno skup M, koji se sastoji od dva milijeva automata A i B, zadatim sledećim tablicama prelaska i izlaska:

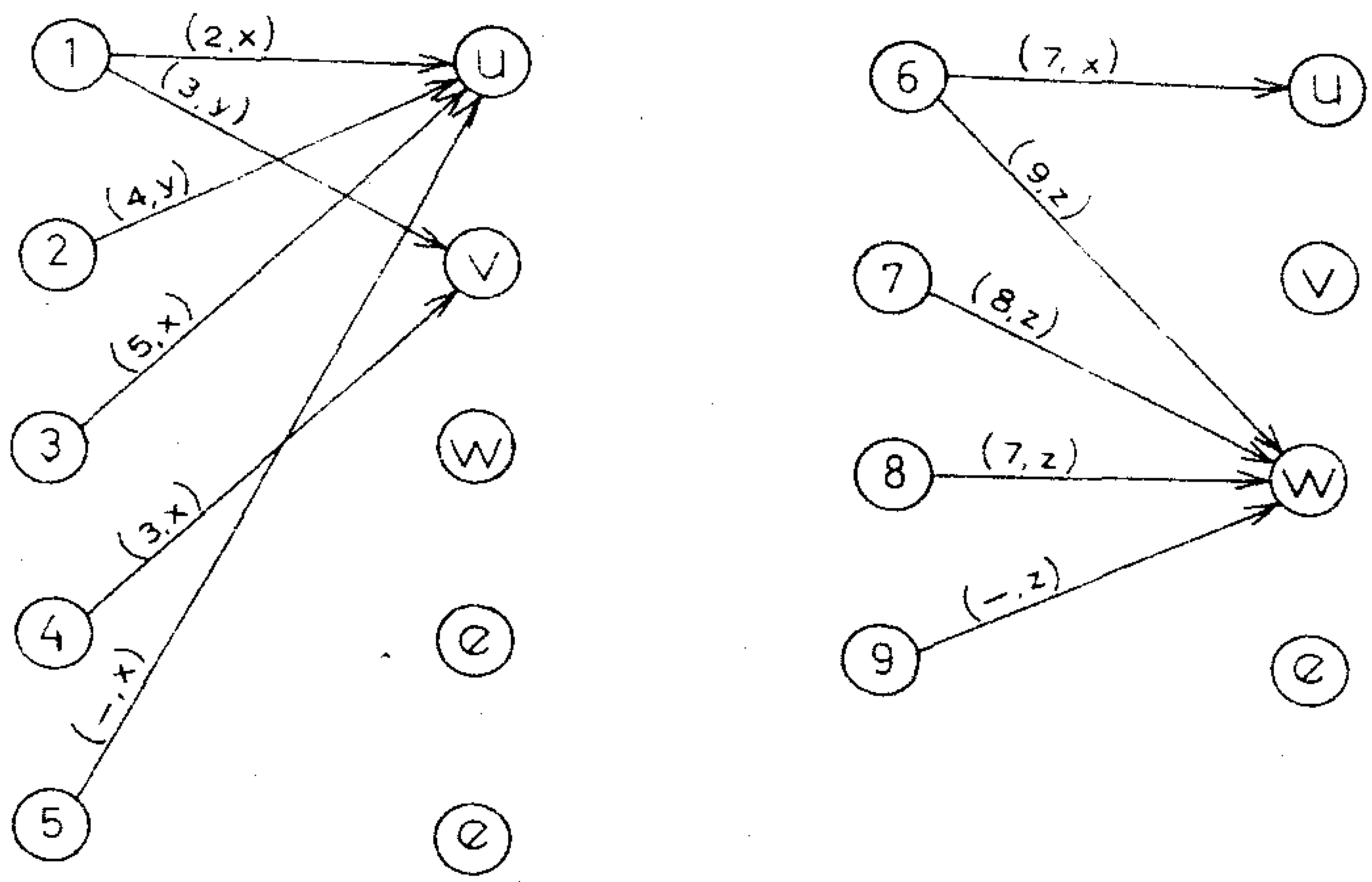
	1	2	3	4	5
x	2	–	5	3	–
y	3	4	–	–	–

	1	2	3	4	5
x	u	–	u	v	u
y	v	u	–	–	–

	6	7	8	9
x	7	–	–	–
z	9	8	7	

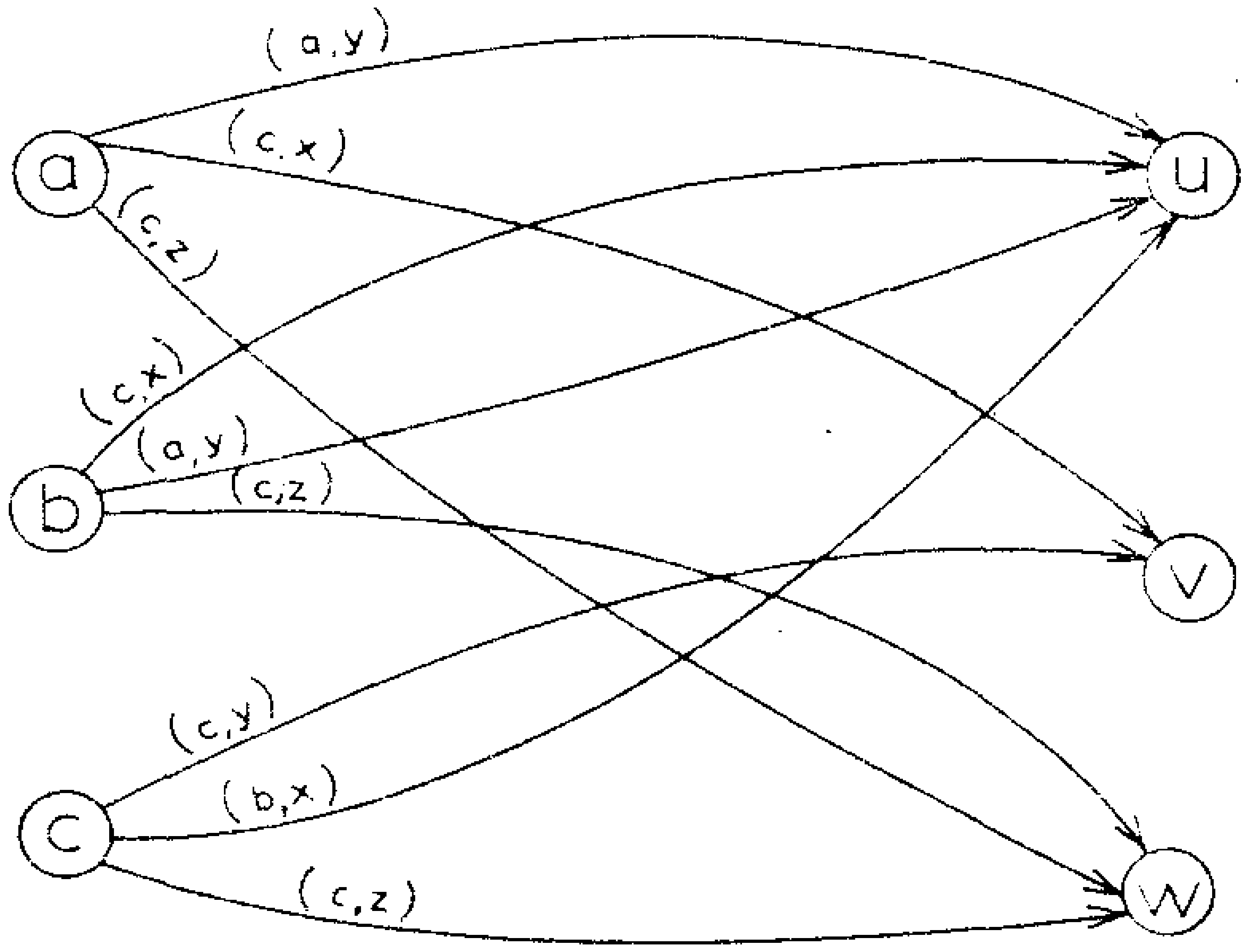
	6	7	8	9
x	u	–	–	–
z	w	w	w	w

Odgovarajuća graf-matrica je data na (sl. 12).



(sl. 12)

Direktno se može pročitati sa graf-matrice da jednu klasu ekvivalencije čine stanja: (2, 4, 7, 8, 9). Otuda automatski sledi da su stanja 1 i 6 ekvivalentna pošto im se odgovarajući putevi ekvivalentno nastavljau. Tako imamo još dve nove grupe ekvivalentnih medju sobom stanja: (2, 3, 5, 6, 7, 8, 9) i (1, 3, 5, 6, 7, 8, 9). Ako odgovarajuće grupe ekvivalentnih stanja obeležimo respektivno sa a, b i c dobijamo graf-matricu minimiziranog automata datu na (sl. 13).



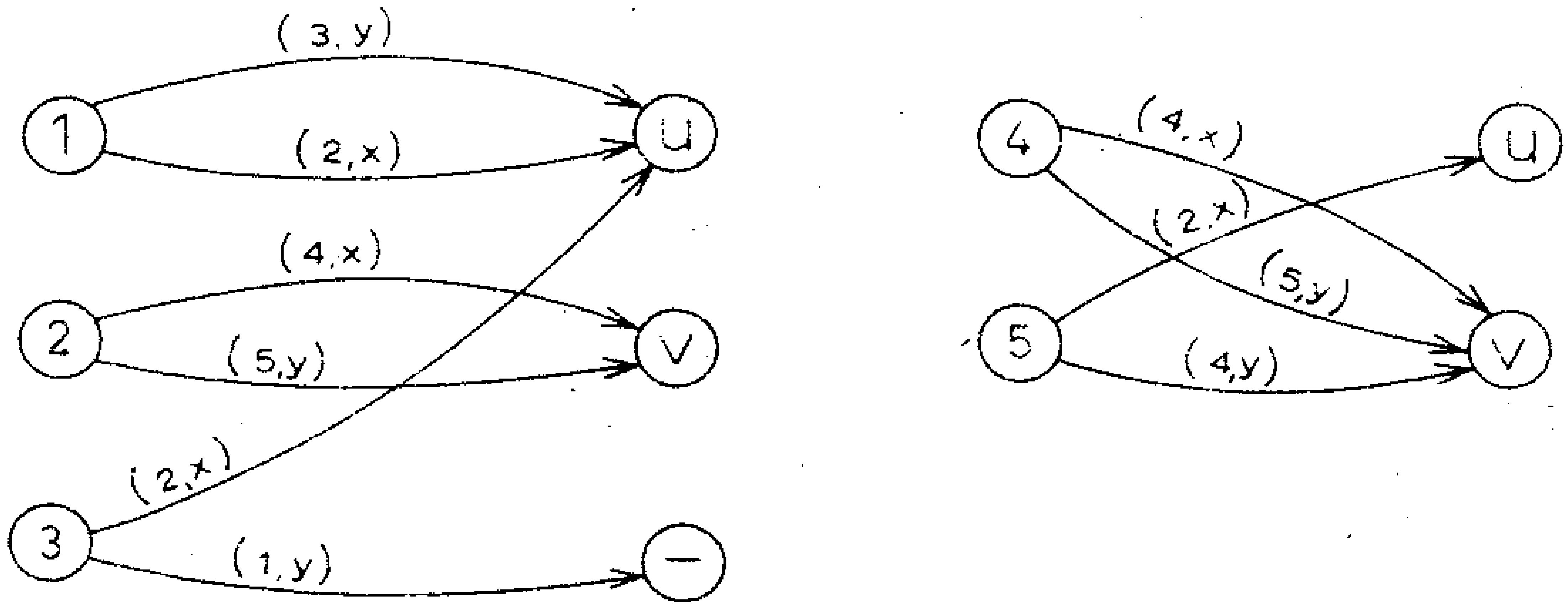
(sl. 13)

Napomena. Za početno stanje uzimamo klasu c pošto ona sadrži početna stanja oba data automata.

<u>Primer 3.</u> Minimizirati murov automat B zadat sledećom obeležnom tablicom

	–	u	u	v	v
	1	2	3	4	5
x	2	4	2	4	2
y	3	5	1	5	7

Radi preglednosti mi ćemo u graf-matrici grupisati jednako obeložena stanja (sl. 14).



(sl. 14)

Napomena. Početno stanje i ako je neobeležno možemo, po definiciji, uključiti u bilo koju grupu jednako obeloženih stanja.

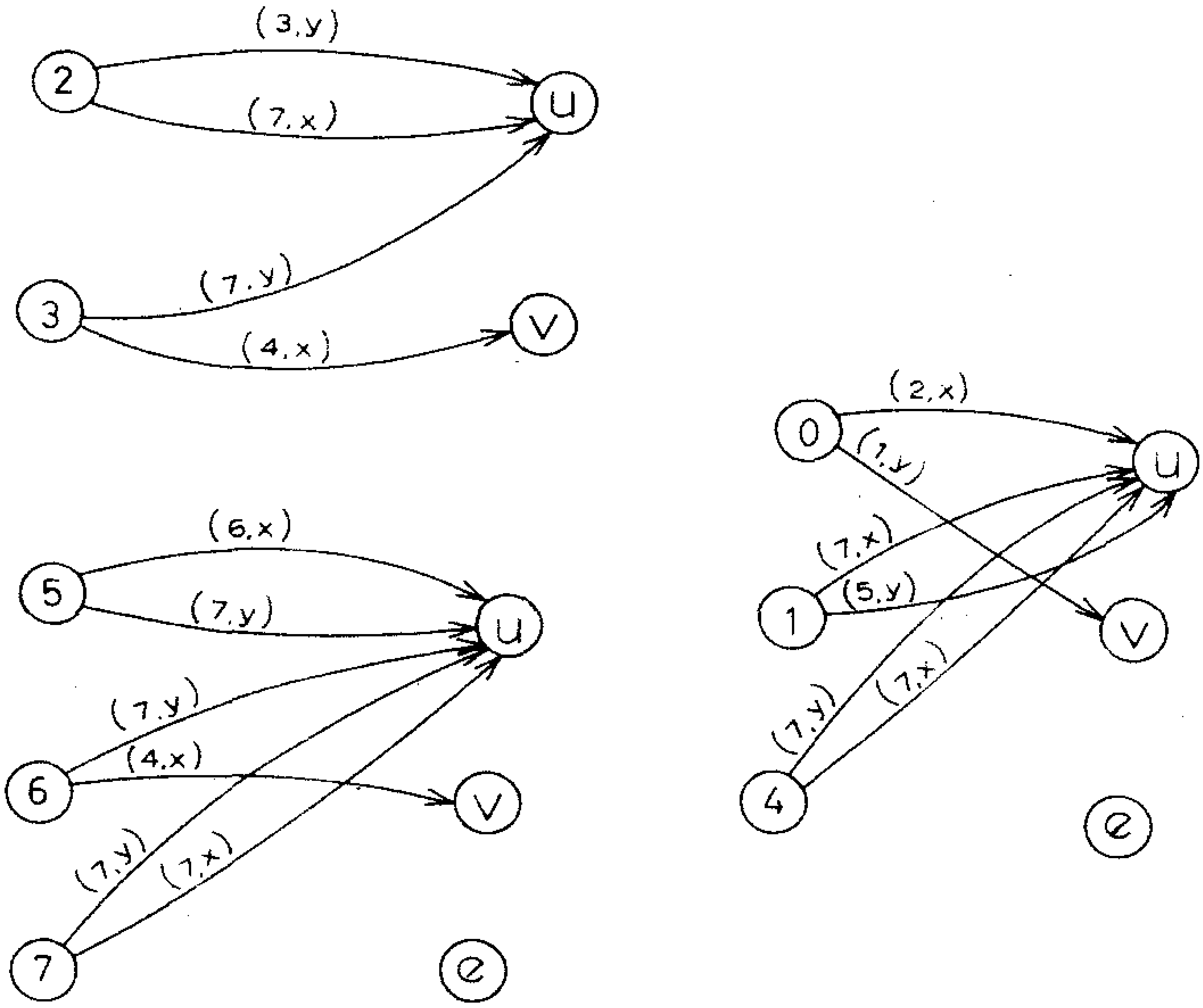
Sa našeg modela odmah se vidi da imamo četiri klase ekvivalentnih stanja: (1, 3), (2), (4) i (5).

Na osnovu izvršene podele lako se može dobiti odgovarajuća graf-matrica ili obeležena tablica prelaska minimiziranog automata A .

Primer 4. Minimizirati murov automat zadat sledećom obeleženom tablicom prelaska

	−	v	u	u	v	u	u	u
	0	1	2	3	4	5	6	7
x	2	7	7	4	7	6	4	7
y	1	5	3	7	7	7	7	7

Odgovarajuća graf-matrica je data na (sl. 15). Direktno se može pročitati da su samo stanja 3 i 6 ekvivalentna pa se tako broj stanja može smanjiti za jedan.



Ostaje još samo da se izvrši prenumeracija stanja i time je zadatak u potpunosti rešen.

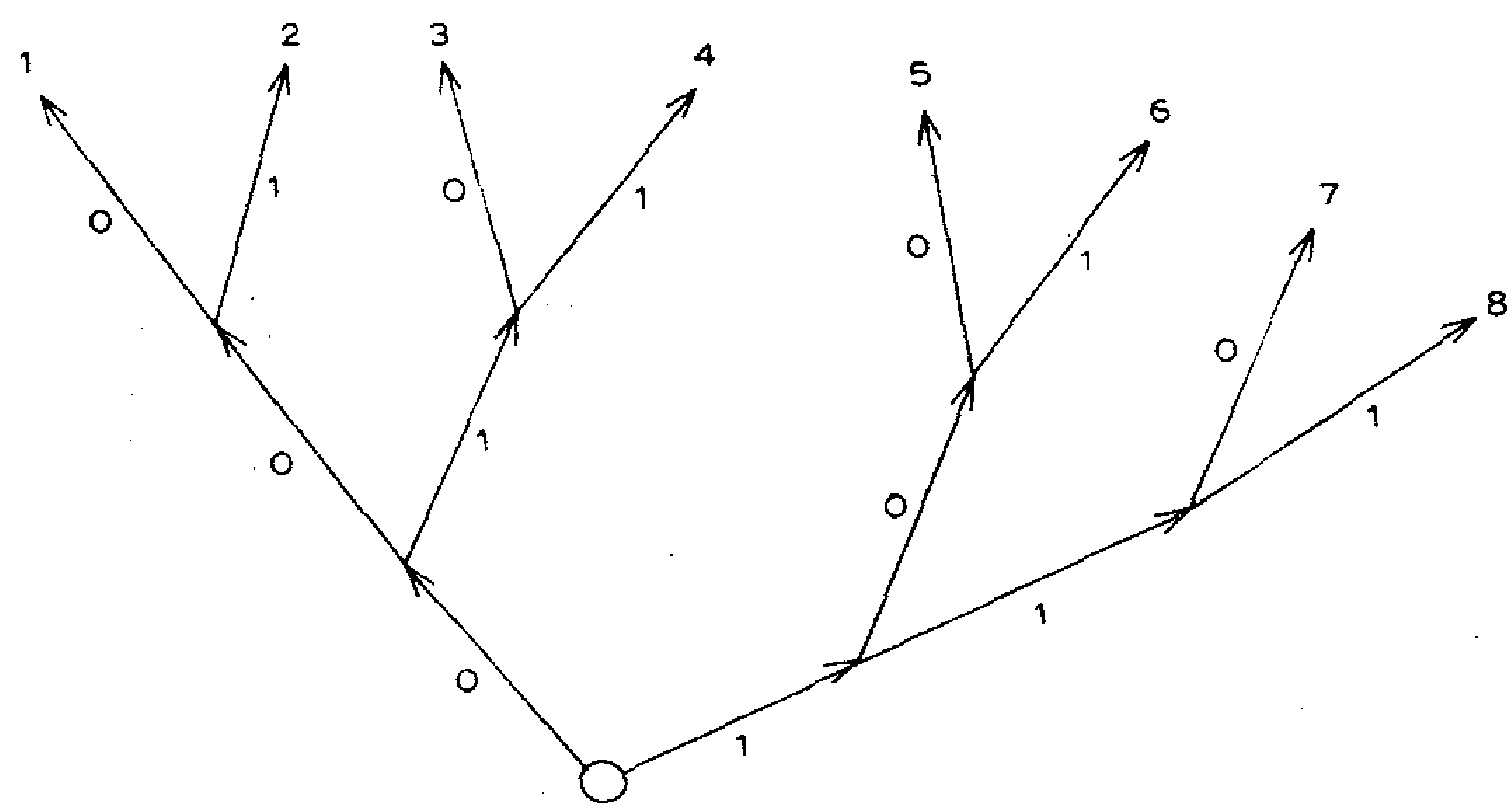
DODATAK

Jedan prilog problemu minimizacije bulovih funkcija

Prema definiciji V.M.Gluškova pod minimizacijom bulove funkcije se podrazumeva najprostije predstavljanje te funkcije u obliku superpozicije funkcija, koje čine kakav bilo potpun fiksirani funkcionalni sistem $\int$ bulovih funkcija. Najprostijim se obično smatra predstavljanje koje sadrži najmanji mogući broj superpozicija. Pošto su uvek u pitanju samo konačni funkcionalni sistemi onda je i zadatak minimizacije uvek rešljiv. Rešenje se očigledno postiže prebrojavanjem svih mogućih superpozicija potpunog sistema funkcija $\int$. Medjutim, u praksi se koriste specijalni postupci minimizacije, koji su razradjeni posebno za svaki potpuni funkcionalni sistem $\int$ bulovih funkcija. Najdetaljnije su ti postupci razradjeni za slučaj, kad se sistem $\int$ sastoji od disjunkcije, konjukcije i negacije. U tom slučaju zadatak minimizacije bulove funkcije se svodi na iznalaženje izraza bulove algebre, koji predstavlja datu funkciju a konstruisan je pomoću najmanjeg mogućeg broja operacija. Mi ćemo se ograničiti na još prostiji slučaj predstavljanje date bulove funkcije pomoću disjunktivne normalne forme, koja sadrži najmanji mogući broj slova. Taj zadatak mi ćemo nazivati zadatak konačne minimizacije bulove funkcije.

Predstavljajući da su pojmovi kojim operišemo poznati mi ćemo odmah preći na konstrukciju postupka koji može poslužiti za dobijanje skraćenih i minimalnih d.n.f. funkcija bulove algebre.

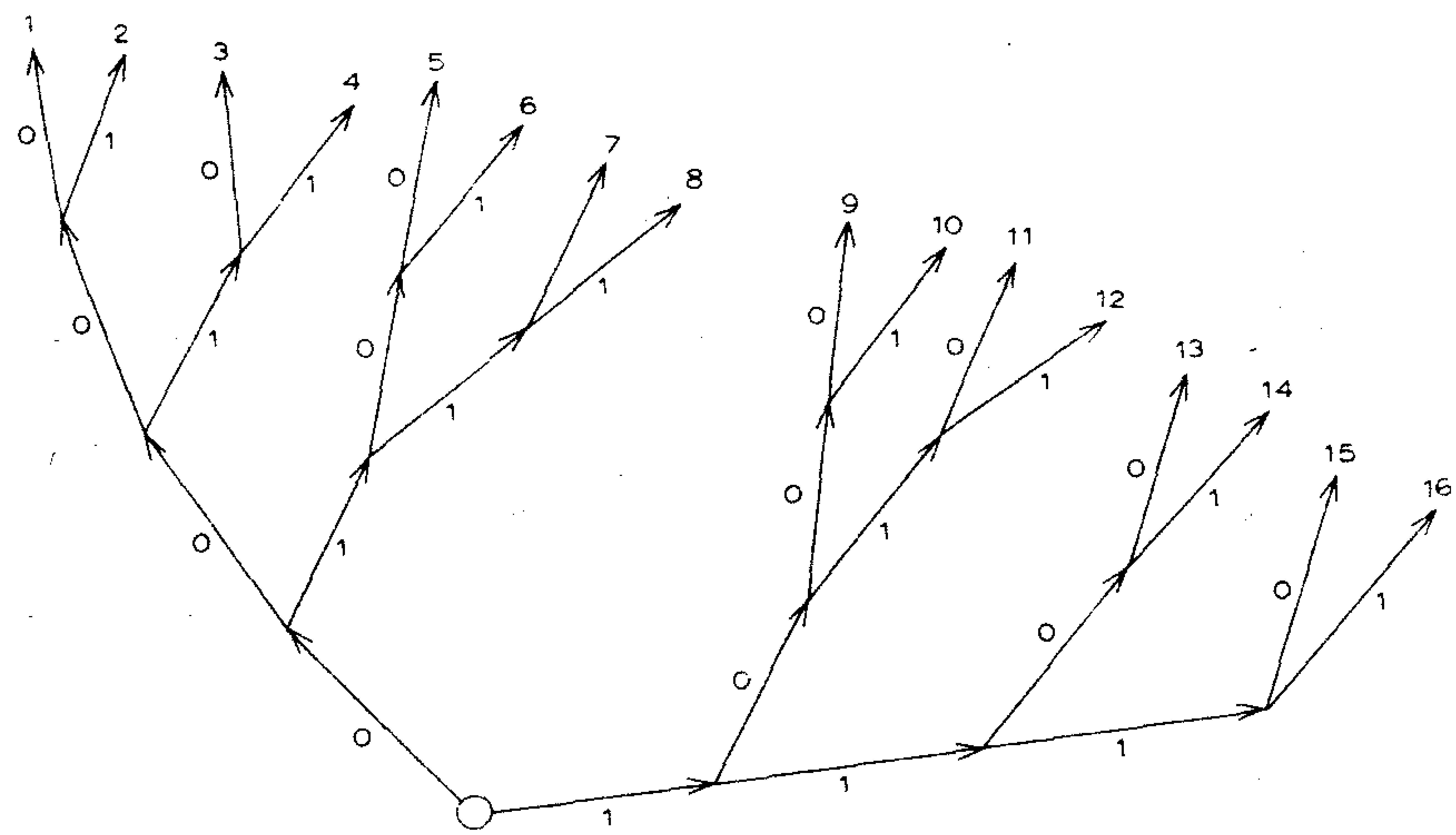
Kao prvo, umesto konstrukcije n-dimenzionog jediničnog kuba koji se koristi u problemu minimizacije bulove funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ od n promenljivih, mi ćemo se poslužiti logičkim drvetom sa čijom smo definicijom već upoznati. Pošto poredak bulovih promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ može biti proizvoljan to možemo svakom spratu logičkog drveta dodeliti po jednu promenljivu i obrnuto. Npr. prvom x_1, drugom x_2 i n-om x_n. Iz korena drveta polaze tačno 2 rebra numerisana sa 0 i 1. Takodje iz svakog drugog temena drveta polaze po dva rebra sa istom numeracijom. Na taj način dobijamo 2^n puteva u logičkom drvetu od kojih svaki odgovara po jednom od mogućih 2^n dualnih nizova. Mi ćemo se upravo ovde pozabaviti proučavanjem nekih osobina tih puteva, bolje rečeno nekih zakonitosti koje postoje i korišćenjem tih osobina u problemu minimizacije bulovih funkcija. Radi boljeg poimanja posmatraćemo prvo bulovu funkciju od tri promenljive x_1, x_2 i x_3. Logičko drvo koje odgovara toj funkciji dato je na (sl. 16). Svi putevi u tom drvetu



(sl. 16)

su numerisani prirodnim brojevima. Posmatrajući logičko drvo može se konstatovati da za svaki put u tom drvetu npr. 1 postoje još tačno tri puta koji imaju iste zajedničke delove dužine 2. U našem slučaju to su putevi sa indeksima 2, 3 i 5. Putu sa indeksom 2 odgovaraju putevi sa indeksima 1, 4 i 6 itd. Takodje se vidi da svakom putu u logičkom drvetu odgovaraju po četiri puta sa zajedničkim delovima dužine 1.

Uzmimo još logičko drvo (sl. 17) koje odgovara bulovoj funkciji od četiri promenljive x_1 , x_2 , x_3 i x_4 . Posmatrajmo takodje puteve u tom drvetu i njihove medjusobne odnose. U ovom slučaju putu sa indeksom 1 odgovaraju 4 puta sa zajedničkim delovima dužine 3. To su putevi sa indeksima 2, 3, 5 i 9. Putu 2 odgovaraju putevi 1, 4, 6 i 10 itd.



(sl. 17)

Iz ova dva navedena primera možemo izvući sledeći zaključak. Za svaki put ℓ iz prvog primera postoje tačno tri puta koji imaju zajedničke delove dužine 2 sa tim putem. Dva od tih puteva imaju isti početak kao i put ℓ dok je treći sa različitim početkom. I za drugi slučaj važi sličan zaključak.

Posmatrajmo sada logičko drvo koje sadrži 2^n puteva. Za sve puteve iz tog drveta koji imaju najveći zajednički deo sa nekim putem ℓ kažemo da su u $(n-1)$-oj relaciji s tim putem. Analogno definišemo skupove puteva koji su u $(n-2)$-oj relaciji itd. Što se tiče skupova puteva koji su u $(n-2)$-oj relaciji to su očigledno svi putevi iz n – prve relacije prošireni još sa putevima koji su samo u $n-2$ -oj relaciji sa nekim putem ℓ.

S obzirom da pojam relacije, kako smo ga ovde definisali, igra, kao što ćemo videti, odlučujuću ulogu pri nalaženju minimalnih d. n. f. bulovih funkcija, logično se nameće pitanje može li se dati neki opštiji postupak za odredjivanje tih skupova, odnosno broja puteva koji su u ma kakvoj relaciji sa nekim putem. Radi toga ćemo i ukazati na neke opštije osobine koje ostaju u važnosti za proizvoljan broj bulovih promenljivih. Lako je dokazati sledeće tvrdjenje.

Ako bulova funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zavisi od n promenljivih tj. ako logičko drvo ima 2^n različitih puteva onda postoji tačno n puteva koji su u $(n-1)$ -oj relaciji sa nekim putem ℓ. Od tih n puteva $n-1$ imaju isti početak sa datim putem ℓ a samo je jedan od tih sa različitim početkom.

Dokaz. Svaki put dužine n ima tačno $n-1$ teme različito od početnog i krajnjeg. Kroz svako od tih temena mora prolaziti jedan i samo jedan put koji je u $(n-1)$-oj relaciji sa posmatranim putem. Pošto se svi putevi iz skupa puteva sa različitim početkom već razlikuju za jedno rebro onda očigledno može postojati samo jedan od njih koji je u $(n-1)$-oj relaciji sa datim putem. Ako bi postojao još jedan onda bi oni morali biti medjusobom jednaki, što je u suprotnosti sa činjenicom da su svi putevi logičkog drveta različiti medju sobom.

Lako se dokazuje i tvrdjenje ako neki put ima indeks k onda put koji je $(n-1)$-oj relaciji s njim a ima drugi početak mora imati indeks $2^{n-1}+k$.

Od naročitog značaja za nas je i sledeće tvrdjenje.

U logičkom drvetu koje sadrži 2^n različitih puteva postoje samo dva puta sa istim zajedničkim delom dužine $n-1$. Četiri puta sa istim delom dužine $n-2$, osam puteva sa zajedničkim delom dužine $n-3$ itd. Dokaz sledi iz prvog tvrdjenja.

A sada ćemo pokušati da ove osobine iskoristimo za usavršavanje poznate metode neodredjenih koeficijenata koja služi za minimizaciju bulovih funkcija. Polazimo od činjenice da se svaka minimalna d.n.f. bulove funkcije može predstaviti u obliku

$$\bigvee_{\binom{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}{i_1,\ldots,i_m}} A^{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}_{i_1,\ldots,i_m} \,\&\, x_{i_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_2} \,\&\ldots\&\, x_{i_m}^{\sigma_m}, \tag{1}$$

sa neodredjenim koeficijentima

$$A^{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$$

gde se sumiranje izvodi sa različitim slogovima za $m=1,2,\ldots,n$; $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m)$ prolazi za svako $(i_1,i_2,\ldots,i_m)$ skupom svih m-članih nizova, koji se sastoje od 0 i 1; $(i_1,i_2,\ldots i_m)$; prolazi skupom svih podskupova od m različitih celih brojeva, koji se nalaze izmedju 1 i n. Za odredjivanje koeficijenata služi sistem od 2^n jednačina

$$\bigvee_{\binom{\sigma_1,\dots,\sigma_m}{i_1,\dots,i_m}} A_{i_1,\dots,i_m}^{\sigma_1,\dots,\sigma_m} \alpha_{i_1}^{\sigma_1} \alpha_{i_2}^{\sigma_2} \cdots \alpha_{i_m}^{\sigma_m} = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \tag{2}$$

gde je $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \leq 1$. Posle očiglednih uproščavanja dobija se da je

$$\bigvee_{\binom{\sigma_1,\dots,\sigma_m}{i_1,\dots,i_m}} A_{i_1,\dots,i_m}^{\sigma_1,\dots,\sigma_m} = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \tag{3}$$

gde $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ teče skupom svih n-članih nizova.

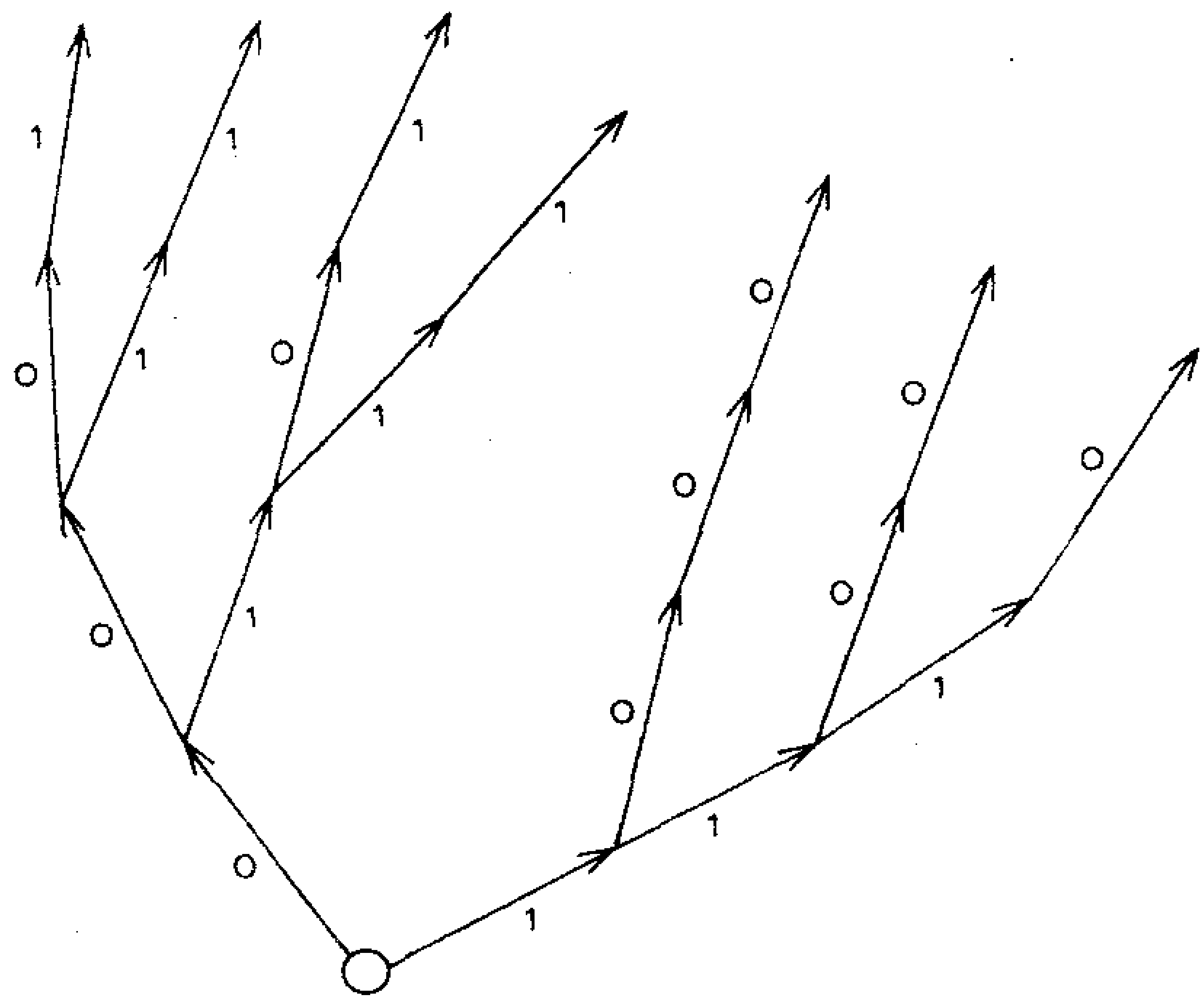
Očigledno je da glavna teškoća ovog postupka leži u velikom broju jednačina koji treba rešiti, odnosno iz kojih treba odrediti nepoznate koeficijente. Otuda je taj postupak podesan jedino kad su u pitanju bulove funkcije sa malim brojem promenljivih - do pet. No ako se iskoriste osobine i medjusobne veze puteva u logičkom drvetu, drugim rečima osobine dualnih nizova onda se broj jednačina (3.) može jako smanjiti, a naročito u slučajevima kad je broj članova savršene d. n. f. date bulove funkcije mali a broj bulovih promenljivih veliki.

Postupak ćemo demonstrirati na jednom primeru.

Primer 1. Minimizirati bulovu funkciju čija je s.d.n.f. zadata putevima u logičkom drvetu na (sl. 18).

Odmah se vidi da disjunktivni članovi dužine 1 ne mogu da pokrivaju ni jedan od puteva datog logičkog drveta. Ako m.d.n.f. sadrži članove dužine 2 onda se njihovi odgovarajući putevi moraju pojavljivati u datom drvetu tačno četiri puta. Prostim "prebrojavanjem" se vidi da taj uslov zadovoljava jedino član

$\bar{x}_1 x_4$. Time su pokriveni putevi 2, 4, 6 i 8. Ako m.d.n.f. sadrži disjuktivne članove dužine 3 onda odgovarajućih puteva u datom logičkom drvetu mora biti dva. Taj uslov zadovoljava član $x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$, čime su pokriveni putevi 9 i 13. I na kraju



(sl. 18)

put sa indeksom 15 može da pokrije jedino odgovarajući disjunktivni član $x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$. Prema tome n.d.n.f. zadate funkcije glasi

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_4 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$$

Treba napomenuti da disjunktivne članove čiji odgovarajući putevi pripadaju putevima sa rezultatom nula unapred treba odbaciti, pošto njihovi koeficijenti u jednačinama (2) moraju biti jednaki nuli.

Kao što se vidi iz navedenog primera jedina teškoća u ovom postupku se sastoji u "prebrojavanju" puteva koji odgovaraju nekom disjunktivnom članu. Ali ako se uzme u obzir da je u ovom slučaju potrebno ispisati samo 25 koeficijenata u odnosu na 192 ako bi pisali sve onda je ušteda zaista velika.

Navedene osobine se takodje mogu iskoristiti i u slučaju kad je potrebno naći m.d.n.f. funkcije koja nije zadata na svim dualnim nizovima, drugim rečima u problemu dodefinisanja bulove funkcije, a takodje pri odredjivanju maksimalnih intervala i skraćenih d.n. formi neke bulove funkcije.

LITERATURA

1. Айзерман М.А., Гусев Л.А., Розоноэр Л.И., Смирнова И.М., Таль А.А., Логика Автоматы Алгоритмы. Государственное издатель. физ. мат. литературы, Москва 1963.

2. Ауфенкамп Д.Д., Анализ последовательностных машин, II. Математика, периодический сборник переводов иност. статей, 3:6, 1959.

3. Ауфенкамп Д.Д., Хон Ф.Е., Анализ последовательностных машин, I. Математика, периодический сборник переводов иност. статей, 3:3, 1959.

4. Бурбаки Н., Теория множеств (сводка результатов). Приложение к книге Н. Бурбаки, Общая топология, основные структуры, Физматгиз, М, 1958, 264-309.

5. Гинзбург С., Методы синтеза последовательностных машин с минимальным числом состояний, математика 4:4 (1960), 145-168.

6. Глушков В.М., Абстрактная теория автоматов. Усп. Мат. Наук. XVI, 5(101), сент.-окт. 1961, 3-62.

7. Глушков В.М., Синтез цифровых автоматов. Государственное издатель. физ. мат. литературы, Москва 1962.

8. Глушков В.М., Введение в кибернетику. Издатель. АН УССР, Киев 1964.

9. Гудстейн Р.Л., Математическая логика. Издатель. иностранной литературы. Москва 1961.

10. Журавлев Ю.И., Об отделимости подмножеств вершин -мерного единичного куба. ТМИ имени В.А. Стеклова LI, 143-157, издатель. А.Н. СССР, Москва 1958.

11. Журавлев Ю.И., О различных понятиях минимальности дизъюнктивных нормальных форм. Сибирский матем. журнал, т.1, No 4, ноябрь - декабрь, 1960.

12. Клини С., Введение в метаматематику. Издатель. иностранной литературы, Москва - 1957.

13. Клини С.К., Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах, Сб. »Автоматы«, ИЛ, М, 1956, 15-67.

14. Кобринский Н.Е. и Трахтенброт Б.А., Введение в теорию конечных автоматов. Государственное изатель. физ. мат. литератури, Москва 1962.

15. Козмидиади В.А., О множествах, разрешимых и перечислимых автоматами. Проблемы логики, 102-115, Изд. АН СССРК Москва 1963.

16. Латичевский А.А., О синтезе конечних автоматов, ДАН УССР 2, 1961, 139-141.

17. Майстрова Т.Л., Линейное програмирование и задач минимизации нормальних форм булевих функций. Проблеми передачи информации, випуск 12, 5-15, издатель. АН ССР,1963.

18. Марков А.А., Теория алгорифмов. ТМИ имени В.А.Стеклова XLII. Издатель. АН СССР, Москва 1954, Ленинград.

19. Медведев Ю.Т., О классе событий, допускавших представление в конечном автомате, Сб. »Автомати« (1956), 385-401.

20. Мур Э.Ф., Умозрительние експерименти са последовательностними машинами, Сб. »Автомати«, ИЛ, М., 1956, 179-212.

21. Новиков П.С., Элементи математической логики. Г.И.Ф.М.Л., Москва 1959.

22. Соркин Ю.И., Алгебра автоматов, Пробл. киберн. (1961).

23. Шенон К., Работи по теории информации и кибернетике, Издатель. И.Л., Москва 1963.

24. Яблонский С.В., Функциональние построения в к-значной логике. ТМИ имени В.А. Стеклова LI, 1-141, издатель. АН СССР, Москва 1958.

25. Asser G., Rekursive Wortfunktionen. Zeitschr. f. math.Logik und Grundlagen d. Math. 6 (1960), 264-284.

26. Asser G., Einführung in die mathematische Logik, teil I. B.G.Teubner verlagsgesellschaft, Leipzig 1959.

27. Büchi J.R., Weak second-order arithmetic and finite automata, Z.Math. Logik und Grundl. d. Math., 6, 1 (1960)66-92.

28. Vučković V., Rekursive Wortarithmetik. Acc. Serbe, Publications de l'Inst, Mathématique, 14 (1960), 9-10.

29. Vučković V., Jaki automati i regularni skupovi. Rad saopšten u Matematičkom institutu u Beogradu, 1963.

30. Vučković V., Dva stava o parcijalnim automatima. Neki nerešeni problemi u matematici. Matematička biblioteka 1963, 41-49.

31. Ginsburg S., Some remarks on abstract machines, Trans. Amer. Math. Soc., 96, 3, 1960, 400-444.

32. Copy J.M., Elgot C., Wright J.B., Realisation of eventus by logical nets, Journ. Ass. Comp. Mach. 5, N 2 (1958), 181-196.

33. Culloch Mc. W.S. and Pitts. E., A logical calculus of the ideas imminent in nervous activity. Bulletin of. Math. Biophysics 5 (1943), 115-133.

34. Cherch A., Aplication of recursive arithmetic in the theory of computers and automata. Lecture Notes, Summer Conference, University of Michigan, June, 1958.

35. Cherch A., Introduction to matematical logic, Volume I, Princeton, New Jersey, Princeton University press, 1956.

36. Mealy G., A method for synthesising sequential circuits. The Bell System Technical Journal, Sept. 1955, 1045-1079.

37. Post Emil L., Introduction to a general theory of elementary propositon, Amer. Journ. math., 43, 163-189.

38. Riguet J., Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois, Bull. Soc. math. France, 76 (1948), 1-4, 114-155.

39. Schützenberger M.P., Semin. Dubreil - Pisot, 13e année, n° 3 (1959/60).

40. Спивак М.А., Трактовка теории автоматов методами теории отношений..Проблемы кибернетики, выпуск 12, 1964;69-97.