Matematički Fakultet
Univerzitet u Beogradu

Grupe simetrija prostora

- MASTER RAD -

Mentor:
dr Zoran Lučić

Student:
Aleksandra Paripović
1085/2010

Beograd,
Jun, 2011.

PREDGOVOR

Otkriće pet pravilnih poliedara dugo je bilo pripisano samom Pitagori. Postoje sačuvani dokumenti nastali u drugom veku nove ere, ili kasnije, koji se odnose na preplatonsku filozofiju, u kojima je reč o *pet elemenata svetske kugle*. Reč je najpre o fragmentu u kojem Teon[1] citira spis pitagorejca Filolaja[2] kazujući da

ima pet tela (elemenata) svetske kugle: u kugli su vatra, voda, zemlja i vazduh, a peti je brod nosilac kugle.

Kasnije će Proklo[3] u komentarima prve knjige Euklidovih *Elemenata* otkriće kosmičkih tela pomeriti još dalje u prošlost, pripisujući ga Pitagori rečima

on je bio taj koji je otkrio teoriju proporcija i konstrukciju kosmičkih tela.

Izvesno je da su ova tela bila poznata čoveku i u praistorijsko doba, pošto se u prirodi javljaju kao kristali nekih hemijskih jedinjenja. Pirit najčešće kristališe u obliku kocke ili skoro pravilnog dodekaedra; magnetit u obliku oktaedra. Materijalni dokazi poznavanja nekog od ovih tela, pre svega tetraedra, kocke i oktaedra, a kasnije i ikosaedra, potiču iz starog Egipta. U prepitagorejsko vreme se na Apeninskom poluostrvu znalo za dodekaedar, tako da su pitagorejci morali znati za svako od pet pravilnih tela. Po svemu sudeći, pojam pravilnog poliedra je tekovina bavljenja geometrijom na Platonovoj Akademiji. Teetet[4], jedan od učesnika Platonovih dijaloga, prvi je pisao o pomenutim telima i ispitivao njihova zajednička svojstva. Stoga se smatra da je upravo on u geometriju uveo pojam pravilnog poliedra.

Šta su izometrijske transformacije? Koje su vrste izometrijskih transformacija? Šta su grupe simetrija? Koje su grupe simetrija pravilnih poliedara? Koliko ima pravilnih poliedara, koji su i kako izgledaju? Kojih pet čine grupu Platonovih tela? Šta je simetrijska operacija?

Na sva ta pitanja želim da dam odgovore, koje sam donela pomoću meni dostupne literature, koja proučava simetrije ili ih koristi.

U I glavi, definisala sam i klasifikovala izometrijske transformacije Euklidovog prostora. Takođe sam definisala neke od izometrijskih transformacija,

[1] *Teon iz Smirne, (II vek n.e.)*, grčki filozof i matematičar.

[2] *Filolaj,(470. p.n.e. - 385. p.n.e.)*, grčki filozof, pitagorejac i presokratovac. Prema različitim izvorima, potiče iz Krotona, Tarentuma ili Metaponta.

[3] *Proklo, (412. - 485.)*, grčki filozof, neoplatonista, jedan od poslednjih klasičnih filozofa.

[4] *Teetet Atinski, (417. p.n.e. - 369. p.n.e.)*, grčki matematičar. Pretpostavlja se da je, kao i sam Platon, bio učenik Teodora iz Kirene.

zbog njihovih kasnijih upotreba u ovom radu, a to su : ravanska refleksija prostora, osna rotacija prostora, osna simetrija prostora, rotaciona refleksija i centralna simetrija prostora.

U II glavi, navela sam koje su direktne, a koje indirektne izometrijske transformacije kod: pravilnog tetraedra, pravilnog oktaedra i pravilnog ikosaedra. Pre svega sam dokazala zašto pravilan tetraedar ima 24, pravilan oktaedar 48, a pravilan ikosaedar 120 osnih simetrija.

U III glavi, definisala sam pravilne poligone i poliedre. Zatim sam navela kojih pet jesu Platonova tela. Dala odgovor na pitanje: Šta su grafovi, a sta mape?

U IV glavi, definisala sam grupe i simetrijske operacije. U ovoj, tj. poslednjoj glavi, naglašavam posebno, opisala sam tri metode za odgovor na suštinsko pitanje mog rada: **Koliko ima pravilnih poliedara**?

Aleksandra Paripović

Sadržaj

1 Izometrijske transformacije euklidskog prostora – definicija; klasifikacija **4**

1.1 Transformacije euklidskog prostora – definicija 4
1.2 Orijentacija prostora 5
1.3 Klasifikacija izometrijskih transformacija prostora 6
1.3.1 Direktne i indirektne izometrije prostora 7
1.4 Ravanska refleksija prostora 8
1.5 Osna rotacija i osna simetrija prostora 11
1.6 Rotaciona refleksija i centralna simetrija prostora 12

2 Grupe simetrija pravilnih poliedara **14**

2.1 Osobine pravilnih poliedara 14
2.2 Pravilan tetraedar 17
2.3 Pravilan oktaedar 18
2.4 Pravilan ikosaedar 18

3 Poligoni i poliedri **20**

3.1 Pravilni poligoni 20
3.2 Poliedri 22
3.3 Pet Platonovih tela 24
3.4 Grafovi i mape 25
3.5 Put oko sveta 26
3.6 Ojlerova formula 28
3.7 Regularne mape 29
3.8 Konfiguracije 30
3.9 Istorijske primedbe 31

4 Pravilni poliedri **34**

4.1 Grupe 35
4.2 Simetrijske operacije 37
4.3 Poliedarske grupe 39
4.4 Pet pravilnih sastava 40
4.5 Izomorfizmi 43
4.6 Koliko ima pravilnih poliedara? 45
4.7 Grupa simetrija opšteg pravilnog politopa 49
4.8 Nabrajanje mogućih pravilnih figura 52

1 Izometrijske transformacije euklidskog prostora – definicija; klasifikacija

1.1 Transformacije euklidskog prostora – definicija

Moguće je da u geometriji prostora definišemo posebnu klasu transformacija koju nazivamo izometrijskim transformacijama.

Definicija 1.1. Svaku bijekciju $\mathcal{I}$ prostora na sebe nazivamo izometrijskom transformacijom ili izometrijom ako je slika svakog para (A, B) tačaka njemu podudaran par tačaka $(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B))$.

Iz definicije 1.1. neposredno sledi da je identičnost izometrijska transformacija budući da za svake dve tačke A, B prostora važi relacija $(A, B) \cong (A, B)$.

Teorema 1.1. Skup svih izometrija je grupa u odnosu na proizvod transformacija.

Dokaz. Neka su $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ bilo koje dve izometrije prostora i A i B proizvoljne tačke tog prostora. Neka se tačke A i B izometrijom $\mathcal{I}_1$ preslikavaju redom u tačke A_1 i B_1, a tačke A_1 i B_1 izometrijom $\mathcal{I}_2$ redom u tačke A_2 i B_2. Tada će biti:

$$\mathcal{I}_2\mathcal{I}_1(A) = \mathcal{I}_2(A_1) = A_2,$$

$$\mathcal{I}_2\mathcal{I}_1(B) = I_2(B_1) = B_2 \qquad i \qquad (A, B) \cong (A_1, B_1), (A_1, B_1) \cong (A_2, B_2)$$

pa je i $(A, B) \cong (A_2, B_2)$. Stoga je i kompozicija $\mathcal{I}_2\mathcal{I}_1$ izometrijska transformacija prostora.

Iz $(A, B) \cong (A_1, B_1)$ sledi da je i $(A_1, B_1) \cong (A, B)$, jer je relacija podudarnosti parova tačaka simetrična, pa je i inverzna transformacija ${\mathcal{I}_1}^{-1}$ takođe izometrijska transformacija.

□

U narednoj teoremi navodimo uslove pod kojima je izometrija prostora jednoznačno određena:

Teorema 1.2. Ako su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke, a A', B', C', D' četiri tačke prostora takve da je $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$ tada postoji jedinstvena izometrija prostora u kojoj se tačke A, B, C, D preslikavaju, redom, na A', B', C', D'.

Posledica 1.1. Ako izometrijska transformacija prostora poseduje četiri nekomplementarne invarijantne tačke, ona je koincidencija.

Poznavajući aksiome podudarnosti lako se može dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema 1.3. Tačke sa iste strane neke ravni izometrijom se preslikavaju na tačke sa iste strane slike te ravni, a tačke sa raznih strana ravni u tačke sa raznih strana slike te ravni.

Takođe, izometrijom $\mathcal{I}$ se prava preslikava na pravu, poluprava sa temenom O na polupravu sa temenom $\mathcal{I}(O)$, a duž AB na duž $A'B'$, gde je $A' = \mathcal{I}(A)$ i $B' = \mathcal{I}(B)$. Slično, ravan se preslikava na ravan, poluravan sa ivicom s na poluravan sa ivicom $\mathcal{I}(s)$, a konveksni ugao pq na koveksan ugao $p'q'$, gde je $p' = \mathcal{I}(p)$ i $q' = \mathcal{I}(q)$. Zatim poligonska linija se preslikava na poligonsku liniju, oblast na oblast, konveksni lik na konveksni lik, poligon na poligon, poligonska površ na poligonsku površ, rogljasta površ na rogljastu površ, rogalj na rogalj, poliedarska površ na poliedarsku površ i poliedar na poliedar.

1.2 Orijentacija prostora

Da bismo opisali sve izometrije prostora neophodno je najpre upoznati se sa orijentacijom prostora. Kako je prostor određen sa četiri nekomplanarne tačke, orijentaciju prostora možemo posmatrati uz pomoć orijentacije tetraedra koji je određen sa te četiri tačke.

Tetraedar $A_1A_2A_3A_4$ čija su temena uređene četvorke tačaka (A_1, A_2, A_3, A_4) zvaćemo ***orijentisanim***. Ako je $A_2 = B_1$, $A_3 = B_2$, $A_4 = B_3$, orijentisane tetraedre $A_1A_2A_3A_4$ i $B_1B_2B_3B_4$ zovemo ***nadovezanim***. ***Lanac orijentisanih tetraedara*** je konačan niz orijentisanih tetraedara u kome su svaka dva uzastopna člana nadovezana.

Početak lanca je njegov ***prvi*** član, a kraj ***poslednji*** član lanca. Lanac je zatvoren ako su istovetni njegov početak i kraj. Lanac povezuje tetraedre t i t' ako je t njegov početak, a t' njegov kraj. Par nadovezanih orijentisanih tetraedara $A_1A_2A_3A_4$ i $A_2A_3A_4A_5$ zvaćemo ***preorijentacijom*** ako su tačke A_1 i A_5 sa iste strane ravni $A_2A_3A_4$. ***Parnost*** lanca je broj preorijentacja među parovima uzastopnih tetraedara u tome lancu. Orijentisane tetraedre t i t' zovemo ***istosmernim*** (pišemo $t \to t'$), ako je svaki lanac koji ih povezuje paran, u suprotnom ih zovemo ***suprotnosmernim*** (pišemo $t \leftrightarrow t'$).

1.3 Klasifikacija izometrijskih transformacija prostora

Izvršimo klasifikaciju svih izometrijskih transformacija prostora.

Na osnovu teoreme 1.21., što ću kasnije i pokazati, svaka direktna izometrija prostora može se izraziti kao proizvod dveju osnih simetrija prostora $\mathcal{S}_m$ i $\mathcal{S}_n$. U zavisnosti od međusobnog položaja osa m i n razlikujemo nekoliko mogućnosti:

Ako ose m i n pripadaju ravni π, a ν i μ su ravni koje sadrže i upravne su na π, tada je:

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_m\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_\nu\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu\mathcal{S}_\mu.$$

1° Ako su m i n istovetne ravni ν i μ će biti istovetne pa će kompozicija $\mathcal{S}_n\mathcal{S}_m$ biti identičnost.

2° Ako se m i n seku i ravni ν i μ se seku duž prave koja je u njihovoj presečnoj tački upravna na π, pa je $\mathcal{I}$ osna rotacija prostora.

3° Ako su m i n međusobno paralelne i ν i μ će biti paralelne pa je $\mathcal{I}$ translacija prostora

4° Ako su m i n mimoilazne prave, tada je na osnovu teoreme 10.2. izometrija $\mathcal{I}$ zavojno kretanje prostora.

Ako je $\mathcal{I}$ neka indirektna izometrija tada postoji tačka P tog prostora koja nije invarijantna u transformaciji $\mathcal{I}$. Neka je $\mathcal{I}(P) = P'$ i neka je π medijalna ravan duži PP'. U kompoziciji $\mathcal{S}_\pi\mathcal{I}$ tačka P je invarijantna, pa kako je ta kompozicija direktna izometrija prostora ona će biti ili identičnost ili osna rotacija.

Ako je $\mathcal{S}_\pi\mathcal{I}$ identičnost, $\mathcal{I}$ je ravanska refleksija.

Pretpostavimo da je $\mathcal{S}_\pi\mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$. Prava s ne pripada ravni π, jer bi u suprotnom $\mathcal{I}$ bila ravanska refleksija. Obeležimo sa μ ravan koja sadrži pravu s, a upravna je na π, a sa ν ravan takvu da je $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\mu\mathcal{S}_\nu$. Tada je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\mu\mathcal{S}_\nu$. Tada je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\mu\mathcal{S}_\nu = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_\nu$, gde je p presek međusobno upravnih ravni π i μ. Prava p ne pripada ν jer bi u suprotnom izometrija $\mathcal{I}$ bila refleksija. Obeležimo sa σ ravan koja sadrži p i upravna je na ν, a sa τ ravan koja sadrži p i upravna je na σ. Tada je: [3. str. 189.]

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_p\mathcal{S}_\nu = \mathcal{S}_\tau\mathcal{S}_\sigma\mathcal{S}_\nu = \mathcal{S}_\sigma\mathcal{S}_\tau\mathcal{S}_\nu.$$

S obzirom na međusobni položaj ravni ν i τ upravnih na σ razlikujemo sledeće slučajeve: [1 str. 201.]

1° Ako se ravni ν i τ seku $\mathcal{I}$ je po definiciji rotaciona refleksija prostora

2° Ako su ravni ν i τ međusobno paralelne $\mathcal{I}$ je po definiciji klizajuća refleksija prostora.

Time smo dokazali sledeće tvrđenje:

Teorema 1.4. Ako nije identičnost, direktna izometrija euklidskog prostora je ili rotacija, ili translacija, ili zavojno kretanje. Ako nije ravanska refleksija, indirektna izometrija euklidskog prostora je ili rotaciona ili klizajuća refleksija.

1.3.1 Direktne i indirektne izometrije prostora

Teorema 1.5. Izometrijom prostora se istosmerni tetraedri preslikavaju na istosmerne tetraedre, a suprotnosmerni na suprotnosmerne tetraedre.

Dokaz. Neka je $\mathcal{I}$ izometrija kojom se tretraedar $ABCD$ preslikava na tetraedar $A'B'C'D'$. Ako je $PQRS$ proizvoljan tetraedar i $P'Q'R'S'$ njegova slika u izometriji $\mathcal{I}$, a L lanac orijentisanih tetraedara koji povezuje tetraedre $ABCD$ i $PQRS$, a tada slika svakog od orijentisanih tetraedara toga lanca orijentisani tetraedar, pa je slika toga lanca neki lanac L'. Kako se izometrijom tačke sa iste strane neke ravni slikaju u tačke sa iste strane slike te ravni, a tačke sa raznih strana ravni u tačke sa raznih strana slike te ravni, broj preorijentacija među parovima uzastopnih orijentisanih tetraedara lanaca L i L' će biti isti, pa su ti lanci iste parnosti. Odatle sledi da su tetraedri $ABCD$ i $PQRS$ istosmerni ako i samo ako su njihove slike $A'B'C'D'$ i $P'Q'R'S'$ u izometriji $\mathcal{I}$ istosmerni orijentisani tetraedri. □

Iz ovog tvrđenja neposredno sledi da postoje dve vrste izometrija prostora: ***direktne*** izometrije, koje ne menjaju orijentaciju prostora i ***indirektne*** izometrije koje je menjaju. Da bi smo ustanovili da li je neka izometrija prostora direktna ili indirektna dovoljno je utvrditi da li dve odgovarajuće četvorke nekomplanarnih tačaka određuju istosmerne ili suprotnosmerne tetraedre. Iz teoreme sledi da je direktna (indirektna) izometrija prostora jednoznačno određena ako su zadata tri para odgovarajućih nekolinearnih tačaka. Specijalno, direktna izometrija koja ima tri invarijantne nekolinearne tačke je koincidencija. Kompozicija dveju direktnih ili dveju indirektnih izometrija prostora uvek je direktna izometrija tog prostora, dok kompozicija sastavljena iz jedne direktne i jedne indirektne izometrije uvek je indirektna izometrija prostora.

Sledeće teoreme nam omogućavaju uvođenje pojma orijentacije prostora:

Teorema 1.6. Za svaka dva orijentisana tetraedra t i t' postoji lanac L koji ih povezuje.

Teorema 1.7. Zatvoreni lanci su parni.

Teorema 1.8. Lanci koji imaju zajednički početak i kraj su iste parnosti.

Teorema 1.9. Relacija istosmernosti orijentisanih tetraedara je relacija ekvilalencije koja familiju orijentisanih tetraedara razlaže na dve klase ekvivalencije.

Klase ekvivalencije na koje relacija istosmernosti razlaže skup orijentisanih tetraedara zovemo ***smerovima prostora***.

1.4 Ravanska refleksija prostora

Na osnovu prethodnog zaključujemo da postoji izometrija prostora koja ostavlja invarijantnim tri nekolinearne tačke, tj. izometrija prostora koja ostavlja invarijantnim sve tačke jedne ravni. Tu izometriju prostora zovemo ravanskom refleksijom.

Definicija 1.2.Ravanskom refleksijom ili **ravanskom simetrijom prostora** sa osnovom π zovemo neidentičku izometriju prostora kojoj je svaka tačka ravni π invarijantna. Obeležavamo je sa $\mathcal{S}_\pi$. Ravan π zovemo **osnovom** ili **ravni refleksije**.

Važno je napomenuti da ravanska refleksija van ravni π nema invarijantnih tačaka.

Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke ravni π i neka je X' slika proizvoljne tačke X u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\pi$. Tada je:

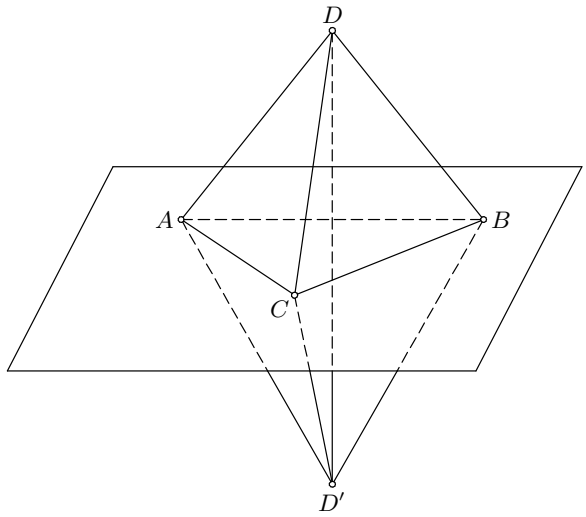
$$AX \cong AX', \qquad BX \cong BX', \qquad CX \cong CX'.$$

Odatle sledi da tačke A, B, C pripadaju meridijalnoj ravni π' duži XX'. Kako su A, B, C nekolinearne tačke, one određuju jednu i samo jednu ravan, pa je $\pi = \pi'$. Ovim smo dokazali sledeću teoremu.

Teorema 1.10. Ako se ravanskom refleksijom $\mathcal{S}_\pi$ tačka X preslikava u tačku X' tada je ravan π medijalna ravan duži XX'. Dokaz možete pronaći u [4, 107.str.].

Navedimo još nekoliko važnih svojstava ravanskih refleksija.

Teorema 1.11. Ravanska refleksija prostora je indirektna izometrija.



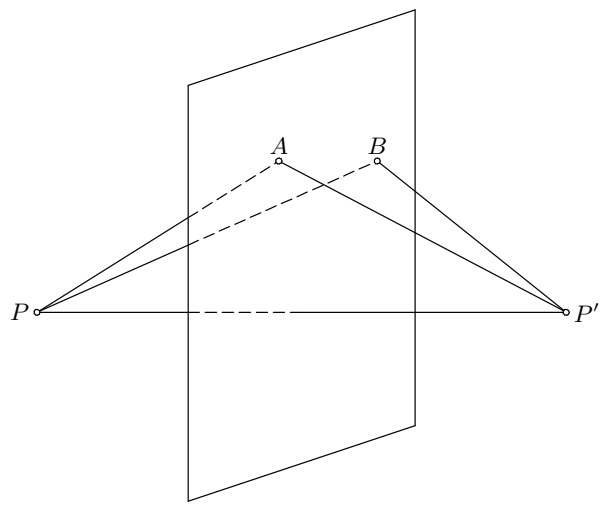
Slika 1.

Dokaz. Neka je $\mathcal{S}_\pi$ neka ravanska refleksija i neka su A, B, C tri nekolinearne tačke ravni π. Sa D' obeležimo tačku takvu da je $D' = \mathcal{S}_\pi(D)$. Tada je $D \neq D'$ i π je medijana ravan duži DD'. Stoga su tačke D i D' sa raznih strana ravni π pa su odgovarajući tetraedri $ABCD$ i $ABCD'$ suprotnosmerni što znači da je ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ indirektna izometrija prostora. $\square$

Teorema 1.12. Ravanska refleksija prostora je involuciona transformacija prostora.

Dokaz. Neka je X proizvoljna tačka prostora i neka je $\mathcal{S}_\pi$ neka ravanska refleksija tog prostora. Obeležićemo sa X' i X'' tačke takve da je $\mathcal{S}_\pi(X) = X'$ i $\mathcal{S}_\pi(X') = X''$. Ako $X \in \pi$ tada je $X = X'$ i $X' = X''$, pa je i $X = X''$. Ako $X \notin \pi$ tada je $X \neq X'$ i $X' \neq X''$, pa je osnova π ravanske refleksije $\mathcal{S}_\pi$ medijalna ravan svake od duži XX' i $X'X''$. Tada je $X = X''$. Ovim smo dokazali da je $\mathcal{S}_\pi^2 = \varepsilon$ (sa ε označavamo identičnost), pa je $\mathcal{S}_\pi$ involuciona transformacija prostora. $\square$

Teorema 1.13. Ako indirektna izometrija prostora poseduje dve razne invarijantne tačke tada je ona ravanska refleksija i pri tom osnova ravanske refleksije sadrži ove tačke.



Slika 2.

Dokaz. Neka je indirektna izometrija prostora i neka su A i B dve proizvoljne tačke tog prostora. Kako je $\mathcal{I}$ indirektna, a ε direktna izometrija prostora, biće $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Stoga postoji tačka P takva je da je $\mathcal{I}(P) = P'$ i $P \neq P'$. Pri tom je $(P, A) \neq (P', A)$ i $(P, B) \neq (P', B)$ i tačke A, B se nalaze u medijalnoj ravni π duži PP'. Kako su $\mathcal{S}_\pi$ i $\mathcal{I}$ indirektne izometrije kompozicija $\mathcal{S}_\pi\mathcal{I}$ je direktna izometrija prostora koja ostavlja invarijantnim tačke A, B, P, pa je ona konicidencija. Stoga je

$$\mathcal{S}_\pi\mathcal{I} = \varepsilon, \text{ pa je } \mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi.$$

□

Teorema 1.14. Neka su $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ dve ravanske refleksije sa raznim osnovama. Tačka X je invarijantna u kompoziciji $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\beta$ ako i samo ako pripada obema osnovama tih refleksija.

Dokaz. Ako X pripada osnovama α i β ona će biti invarijantna u svakoj od tih refleksija, dakle i u njihovoj kompoziciji.

Obrnuto, neka je $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\beta(X) = X$ i pretpostavimo da je $\mathcal{S}_\alpha(X) = Y$, pri čemu je $X \neq Y$. Tada mora biti $\mathcal{S}_\alpha(Y) = X$. Odatle sledi da su α i β dve razne medijalne ravni duži XY što je nemoguće, pa je $X = Y$. □

Teorema 1.15. Ako je $\mathcal{S}_\pi$ neka ravanska refleksija prostora i $\mathcal{I}$ bilo koja izometrija tog prostora, a π' ravan koja u izometriji $\mathcal{I}$ odgovara ravni π. Tada je $\mathcal{I}\mathcal{S}_\pi\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}'_\pi$.

Dokaz. Neka je P proizvoljna tačka ravni π. Kako je $\mathcal{I}(\pi) = \pi'$ tački P će u izometriji $\mathcal{I}$ odgovarati tačka $P' = \mathcal{I}(P)$ i $P' \in \pi'$. Odatle neposredno sledi da je $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I}^{-1}(P') = \mathcal{I}^{-1}(P')$, pa je $\mathcal{I}\mathcal{S}_\pi \mathcal{I}^{-1}(P') = \mathcal{I}\mathcal{I}^{-1}(P') = (P')$.

Dakle u kompoziciji $\mathcal{I}\mathcal{S}_\pi \mathcal{I}^{-1}$ svaka tačka ravni π je invarijantna, pa kako je ta kompozicija indirektna izometrija ona će biti ravanska refleksija $\mathcal{S}_{\pi'}$. □

Teorema 1.16. Dve ravanske refleksije prostora komutiraju ako i samo ako su im osnove istovetne ili međusobno upravne ravni.

Dokaz. Neka je $\mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \mathcal{S}_\beta$, tj. $\mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha(1)$. Ako je $\alpha' = \mathcal{S}_\beta(\alpha)$ iz prethodne teoreme sledi da je $\mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_{\alpha'}$. (2). Iz jednakosti (1) i (2) sledi da je $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_{\alpha'}$, pa je $\alpha = \alpha'$, tj. $\alpha = \mathcal{S}_\beta(\alpha)$. Odatle zaključujemo da su ravni α i β istovetne ili međusobno upravne.

Obrnuto, ako su osnove α i β istovetne ili međusobno upravne ravni biće $\mathcal{S}_\beta(\alpha) =_\alpha$, pa je na osnovu prethodne teoreme $\mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha$, tj. $\mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \mathcal{S}_\beta$.

□

Teorema 1.17. Svaka izometrija prostora može se predstaviti kao kompozicija najviše četiri ravanske refleksije prostora. [4, str. 111.]

1.5 Osna rotacija i osna simetrija prostora

Definicija 1.3. Neka su $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ dve ravanske refleksije euklidskog prostora kojima se osnove α i β seku duž prave s. *Osnom rotacijom prostora* oko prave s za ugao ω, nazivamo transformaciju $\mathcal{R}_s, \omega$ određenu relacijom $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha$. Pravu s zovemo osom, a ugao ω (koji je jednak dvostrukom uglu koji zahvataju ravni α i β) zovemo uglom osne rotacije $\mathcal{R}_s, \omega$. Ako su ravni α i β međusobno upravne takvu rotaciju nazivamo osnom simetrijom prostora i obeležavamo sa $\mathcal{S}_s$.

Kako se osna rotacija i osna simetrija dobijaju kao kompozicija dveju indirektnih izometrija, one su direktne izometrijske transformacije. [1, str. 257.]

Teorema 1.18. (**Dalamberova**): Svaka direktna izometrija prostora koja ima najmanje jednu invarijantnu tačku je identičnost ili osna rotacija.

Dokaz. Neka direktna izometrija $\mathcal{I}$ istavlja invarijantnom tačku O. Tada postoji tačka X čija je slika, $Y = \mathcal{I}(X)$, od nje različita. Tada postoji

medijalna ravan α duži XY. Tačke O i X će biti invarijantne u kompoziciji $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{I}$, pa je na osnovu teoreme 4.4, $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{I} = \mathcal{S}_\beta$, tj. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\beta$, pri čemu β sadrži tačke O i X. Kako X pripada ravni β, ali ne i ravni α, te dve ravni su različite i seku se, jer obe sadrže tačku O. Dakle, $\mathcal{I}$ predstvlja osnu rotaciju prostora. □

Iz prethodne teoreme neposredno sledi znamenita **Ojlerova teorema** o proizvodu rotacija, prema kojoj je kompozicija dveju osnih rotacija prostora čije se ose seku, opet osna rotacija.

Teorema 1.19. Osna rotacija $\mathcal{R}_s, \omega$ i ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ euklidskog prostora su komutativne transformacije ako i samo ako je prava s upravna na ravni π. [4, str. 119.]

1.6 Rotaciona refleksija i centralna simetrija prostora

Definicija 1.4. Rotacionom refleksijom prostora nazivamo kompoziciju triju ravanskih $\mathcal{S}_\pi, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta$, pri čemu se ravni α i β seku duž neke prave s koja je upravna na ravni π i obeležavamo je sa $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$. Dakle, $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega} = \mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\beta$. Ravan π zovemo osnovom, pravu s osom, a ugao ω (koji zahvataju ravni α i β) uglom rotacione refleksije $R\pi; s, \omega$. Ako su ravni α i β međusobno upravne rotacionu refleksiju $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$ zovemo centralnom simetrijom prostora i obeležavamo je sa $\mathcal{S}_o$, gde je O tačka prodora prave s kroz ravan π.

Iz definicije direktno proizilazi da su rotaciona refleksija i centralna simetrija indirektne izometrijske transformacije.

Teorema 1.20. Svaka indirektna izometrija prostora sa jedinstvenom invarijantnom tačkom je rotaiciona refleksija.

Dokaz. Neka je $\mathcal{I}$ indirektna izometrija prostora i neka se njome tačka P slika u neku drugu tačku Q. Ako je O jedina invarijantna tačka transformacije $\mathcal{I}$, biće $(O, P) \cong (O, Q)$, pa tačka O pripada medijalnoj ravni α duži PQ. Kompozicija $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{I}$ je direktna izometrijska transformacija u kojoj su tačke P i Q invarijantne. Po teoremi 6.1. ova izometrija je ili identičnost ili osna rotacija $\mathcal{R}_{s,\omega}$ čija osa s sadrži tačke O i P. Ako bi izometrija $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{I}$ bila identičnost $\mathcal{I}$ bi bila ravanska refleksija, pa bi pored tačke O posedovala još invarijantnih tačaka. [3, str. 185.]

Zbog toga je $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$. Kako tačka O pripada pravoj s i ravni α, a tačka P samo pravoj s, prava s prodire ravan α u tački O. Ako je uz to s upravna na α, $\mathcal{I}$ će po definiciji biti rotaciona refleksija. Ako s nije upravna na α obeležimo sa β ravan koja sadrži s i upravna je na α, a sa γ ravan takvu da je $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\gamma$. Ako je p presečena prava ravni α i β biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\alpha \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\gamma = \mathcal{S}_p \mathcal{S}_\gamma$$

Neka je δ ravan koja sadrži p i upravna je na γ, a θ ravan koja sadrži p i upravna je na δ. Tada je $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_\delta \mathcal{S}_\theta$, pa kako su ravni γ i θ upravne na δ i sadrže tačku O biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\delta \mathcal{S}_\theta \mathcal{S}_\gamma = \mathcal{S}_\delta \mathcal{R}_{\delta;t,\varphi}.$$

□

Teorema 1.21. Svaka direktna izometrija prostora može se izraziti kao kompozicija dve osne simetrije.

Teorema 1.22. Kompozicija triju centralnih simetrija prostora je takođe centralna simetrija tog prostora.

Teorema 1.23. **(Šal-Hjelmsleva)**: Središta duži koje spajaju odgovarajuće tačke neke indirektne izometrije prostora pripadaju jednoj ravni.

Dokaz. Neka je P tačka prostora koja se indirektnom izometrijom $\mathcal{I}$ slika u tačku Q i neka je O središte duži PQ. Kompozicija $\mathcal{S}_o\mathcal{I}$ je direktna izometrija u kojoj je tačka P invarijantna, pa je na osnovu Dalamberove teoreme ona ili identičnost ili osna rotacija $\mathcal{R}_{s,\omega}$, pri čemu tačka P pripada pravoj s.

Ako je kompozicija $\mathcal{S}_o\mathcal{I}$ identičnost biće $\mathcal{I} = \mathcal{S}_o$, pa dokaz sledi neposredno.

Ako nije, obeležimo sa π ravan koja sadrži O i upravna je na s, sa X proizvoljnu tačku prostora različitu od P, a sa Y sliku tačke Y u transformaciji $\mathcal{I}$. Dokažimo da središte S duži XY pripada ravni π. Tada važi, $\mathcal{S}_o\mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$ i $\mathcal{I}(X) = Y$. Ako je $\mathcal{S}_o(Y) = Z$, biće $\mathcal{I}\mathcal{R}s,\omega(X) = \mathcal{S}_o\mathcal{I}(X) = \mathcal{S}_o(Y) = Z$, pa medijalna ravan σ duž XZ sadrži pravu s. Prava OS je upravna na σ, pa je upravna i na pravoj s koja joj pripada. Odatle sledi tačka S pripada ravni π. □

Napomenimo još na kraju da se prava koja sadrži centar centralne simetrije slika tom simetrijom u sebe, a prava koja ne sadrži centar simetrije u njoj paralenu pravu. Takođe, ravan koja sadrži centar centralne simetrije tom simetrijom se slika u sebe, a ravan koja ne sadrži centar simetrije se slika u njoj paralelnu ravan.

2 Grupe simetrija pravilnih poliedara

Euklid u svojim *Elementima* govori o jednakim figurama, i to *ako se mogu položiti jedna na drugu*, dok jednakost figura uvodi u geometriju sedmom aksiomom, misleći na geometrijske objekte, i to su *oni koji se mogu poklopiti, jednaki međusobno.* Na taj način je u geometriju, pomoću pojma kretanja koji nije definisan, uveden pojam podudarnosti. Nigde se ne definiše pojam *izometrije*, bijekcije koja čuva podudarnost. Zbog toga Euklidu izmiče definicija prema kojoj će neki likovi biti podudarni ako p[ostoji izometrija koja preslikava jedan na drugi. To je zato što bi pojmu izometrije morao prethoditi pojam preslikavanja, a njega u antičkoj matematici jednostavno nema. Zato se u antičkoj matematici nigde ne javlja problem broja simetrija nekog geometrijskog lika, tj. broju načina na koje je izometrijama moguće taj lik preslikati na samog sebe.

Kako je proizvod dveju simetrija nekog geometrijskog Φ lika takođe simetrija, i njemu inverzno preslikavanje takođe simetrija, skup svih simetrija lika Φ imaće algebarsku strukturu grupe u odnosu na proizvod simetrija. Tu grupu obeležavaćemo sa $\mathcal{G}_\Phi$. Kada je lik Φ pravilni poligon $\{n\}$, red grupe $\mathcal{G}_{\{n\}}$ biće $2n$. Pola izometrija koje pripadaju $\mathcal{G}_{\{n\}}$ biće direktne, a pola njih indirektne. Direktne će biti rotacije, a indirektne refleksije. Kako je prozvod dveju direktnih izometrija takođe direktna izometrija, skup svih rotacija koje pripadaju $\mathcal{G}_{\{n\}}$ biće podgrupa te grupe, upola manjeg reda (biće podgrupa grupe $\mathcal{G}_{\{n\}}$ indeksa 2).

2.1 Osobine pravilnih poliedara

Svaki pravilni poliedar ima sledeća dva svojstva:

- za svaku njegovu pljosan postoji osna rotacija koja ciklično permutuje temena te pljosni, ostavljajući poliedar invarijantnim,
- za svako njegovo teme postoji osna rotacija koja ostavlja poliedar invarijantnim, a ciklično permutuje pljosni poliedra oko tog temena.

Ova svojstva su potreban i dovoljan uslov da neki poliedar bude pravilan.

Ako sa S obeležimo središte pravilnog poliedra $\{p, q\}$, sa A središte jedne njegove pljosni, sa B središte jedne ivice te pljosni i sa C teme te ivice, sa a, b i c prave SA, SB i SC, (poliedar $SABC$ nazivamo *elementarni tetraedar*) tada će rotacije

$$\mathcal{R}^k_{a,2\pi/p}, k = 1, 2, ..., p$$

ciklično permutovati temena pljosni čije je središte tačka A ostavljajući taj poliedar invarijantnim, a rotacije

$$\mathcal{R}^k_{c,2\pi/q}, k = 1, 2, ..., q$$

će ciklično permutovati pljosni oko temena C preslikavajući taj poliedar na samog sebe.

Primetimo takođe da svaka izometrija koja elementarni tetraedar preslikava na jedan od njemu podudarnih elementarnih tetraedara pravilnog poliedra $\{p, q\}$

- ostavljajući invarijantnim teme elementarnog tetraedra koje je podudarno sa središtem tog poliedra,
- preslikavajući teme elementarnog tetraedra istovetnog sa središtem pljosni, na teme koje je opet središte neke pljosni,
- preslikavajući teme elementarnog tetraedra koje je istovetno sa središtem ivice na teme koje je opet središte neke ivice,
- teme elementarnog tetraedra istovetno sa temenom tog poliedra u neko od temena tog poliedra

tako da preslikava poliedar na samog sebe. Stoga je ukupan broj izometrija koje poliedar $\{p, q\}$ preslikavaju na samoga sebe jednak broju elementarnih tetraedara tog poliedra. Kako je polovina ovih elementarnih tetraedara iste orijentacije kao i poledar, polovina simetrija tog poliedra neće menjati njegovu orijentaciju, a kako je druga polovina elementarnih tetraedara suprotne orijentacije druga polovina simetrija će menjati orijentaciju tog poliedra. Jednostavnije, pola simetrija pravilnog poliedra $\{p, q\}$ su direktne, a druga polovina indirektne simetrije. Sve direktne izometrije, koje ostavljaju poliedar invarijantnim biće rotacije. Sada je lako utvrditi broj simetrija pravilnog poliedra.

Pošto skup svih simetrija pravilnog poliedra $\{p, q\}$ ima algebarsku strukturu grupe, $\mathcal{G}_{\{p,q\}}$, njen red će, prema prethodnom, biti 4 puta veci od broja njegovih ivica, tj. ako je I broj ivica tog pravilnog poliedra biće

$$|\mathcal{G}_{\{p,q\}}| = 4I.$$

Opet, kako je broj direktnih izometrija koje $\{p, q\}$ ostavljaju invarijantnim dvostruko manji nego red grupe, red *grupe rotacija* pravilnog poliedra je

$$|\mathcal{G}^{+}_{\{p,q\}}| = 2I.$$

Već smo pokazali da će ose rotacija koje $\{p, q\}$ ostavljaju invarijantnim sadržati:

- središte poliedra i središte jedne njegove pljosni,
- središte poliedra i jedno njegovo teme,
- središte poliedra i jedne njegove ivice.

Svaku pljosan, pored identiteta, ostavljaće invarijantnom i $p-1$ osnih rotacija prostora. Slično, svaki rogalj će invarijantnim ostavljati $q-1$ rotacija, a svaku ivicu, pored identiteta, i jedna rotacija. Osa rotacije pljosni biće i osa rotacije njoj naspramne pljosni ili roglja, a osa rotacije ivice biće i osa rotacije njoj naspramne ivice. Zato, ako sa P označimo brpj pljosni, sa I broj ivica, a sa T broj temena pravilnog poliedra $\{p,q\}$, broj svih njegovih rotacija biće

$$\frac{1}{2}(p-1)P + \frac{1}{2}(q-1)T + \frac{1}{2}I.$$

Ipak, svaka ivica pravilnog tetraedra pripada dvema pljosnima i povezuje dva temena, pa je zato i

$$pP = 2I = qT.$$

S obzirom da je red grupe rotacija tog poliedra jednak $2I$, biće i

$$\frac{p-1}{p}I + \frac{q-1}{q}I + \frac{1}{2}I = 2I,$$

a odavde je

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2},$$

a samim tim i

$$I = \frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)}.$$

Uz prethodno, dobijamo da je

$$|\mathcal{G}^+_{\{p,q\}}| = \frac{4pq}{4-(p-2)(q-2)}, \text{ kao i } |\mathcal{G}^+_{\{p,q\}}| = \frac{8pq}{4-(p-2)(q-2)}.$$

Kako smo I već izrazili pomoću p i q, to isto lako možemo učiniti i za P i T, zato što je $pP = 2I = qT$. Zaista,

$$T = \frac{4p}{4-(p-2)(q-2)} \text{ i } P = \frac{4q}{4-(p-2)(q-2)},$$

pa kombinatorne osobine pet pravilnih poliedara možemo prikazati sledećom tabelom

$\{p,q\}$	T	I	P	$\lvert\mathcal{G}_{\{p,q\}}\rvert$	$\lvert\mathcal{G}^+_{\{p,q\}}\rvert$	*naziv poliedra*
$\{3,3\}$	4	6	4	24	12	pravilan tetraedar
$\{3,4\}$	6	12	8	48	24	pravilan oktaedar
$\{4,3\}$	8	12	6	48	24	pravilan heksaedar
$\{3,5\}$	12	30	20	120	60	pravilan ikosaedar
$\{5,3\}$	20	30	12	120	60	pravilan dodekaedar

Primetimo da iz jednakosti $|\mathcal{G}^+_{\{p,q\}}| = 2I = pP = qT$ sledi da je

$$P = \frac{|\mathcal{G}^+_{\{p,q\}}|}{p},\ I = \frac{|\mathcal{G}^+_{\{p,q\}}|}{2} \text{ i } T = \frac{|\mathcal{G}^+_{\{p,q\}}|}{q}.$$

Kako je i

$$\frac{1}{I} = \frac{2}{|\mathcal{G}^+_{\{p,q\}}|}$$

tvrđenje

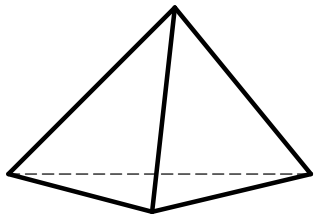
$$\frac{1}{I} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$$

ekvivalentno je Ojlerovoj teoremi za pravilne poliedre prema kojoj je $P - I + T = 2$.

Prema prethodnoj tabeli, jasno je da svaki pravilan poliedar $\{p, q\}$ ima istu grupu simetrija kao i njegov dualni poliedar $\{q, p\}$, jer rotacije koje ciklično permutuju temena neke pljosni jednog od ova dva poliedra istovremeno ciklično permutuju pljosni oko jednog temena njemu dualnog poliedra. Zbog toga će i elementarni tetraedri međusobno dualnih poliedara biti slični, pa postoje samo tri različite grupe simetrija pravilnih poliedara. To su tetraedarska grupa, oktaedarska (ili heksaedarska) i ikosaedarska (ili dodekaedarska) grupa simetrija.

2.2 Pravilan tetraedar

Pravilan tetraedar ima 24 simetrije od kojih jedna polovina menja njegovu orijentaciju, a druga ne.



Slika 3.

Direktne transformacije bile bi: 8 osnih rotacija reda tri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene visinama tog tetraedra. Tri osne simetrije reda dva definisane su u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica.

Indirektne transformacije kod pravilnog tetraedra bile bi: 6 ravanskih refleksija definisanih bisektralnim ravnima α unutrašnjih diedara, 6 rotacionih

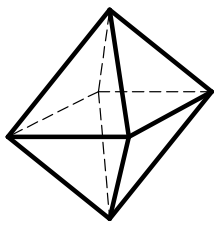
refleksija reda četiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica o i ravan W. To je i jedina rotaciona refleksija kojom raspolaže, jer pravilan tetraedar nema ni naspramnih pljosni ni naspramnih temena.

2.3 Pravilan oktaedar

Pravilan oktaedar ima 48 simetrija od kojih jedna polovina menja, a druga polovina ne menja njegovu orijentaciju. To su sledece transformacije: 8 osnih simetrija reda tri, definisanih u oba smera u odnosu na prave određene sredistima naspramnih pljosni;

6 osnih simetrija reda dva, definisanih u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica;

6 osnih simetrija reda četiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima, kao i tri osne simetrije reda dva definisane u odnosu na iste prave. Uz koincidenciju, to su sve direktne izometrijske trnsformacije kojima oktaedar raspolaze.



Slika 4.

Indirektne transformacije su: 3 ravanske refleksije definisane bisektralnim uglovima; 6 ravanskih refleksija definisanih medijalnim ravnima ivica; 8 rotacionih simetrija reda šest, definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni; 6 rotacionih simetrija reda cetiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima. Oktaedar raspolaže i centralnom simetrijom.

2.4 Pravilan ikosaedar

Pravilan ikosaedar ima 120 simetrija od kojih jedna polovina menja njegovu orijentaciju, a druga ne. To su sledece simetrije:

20 simetrija reda tri , definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni;

15 osnih simetrija reda dva , definisanih središtima naspramnih ivica;

12 osnih simetrija reda 5/2 (u oba smera), u odnosu na prave određene naspramnim temenima i naravno identično preslikavanje.

Indirektne transformacije su:

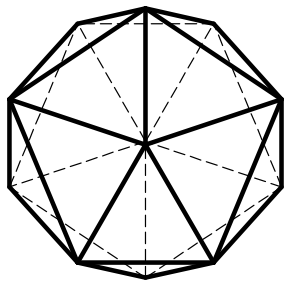
15 ravanskih simetrija koje su definisane bisektralnim ravnima unutrašnjih diedara;

20 rotacionih refleksija reda tri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni;

12 rotacionih simetrija reda pet, definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima;

12 rotacionih simetrija reda 5/2, definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima.

Pravilan ikosaedar raspolaže i centralnom simetrijom.



Slika 5

Svaki pravilan poliedar ima istu grupu simetrija kao njegov dualni poliedar, jer rotacije koje ciklično permutuju temena neke pljosni jednog od ovih dvaju poliedara, istovremeno ciklično permutuju pljosni oko jednog temena njemu dualnog poliedra.

3 Poligoni i poliedri

U elementarnoj geometriji *politopi* su geometrijski objekti sa ravnim stranama. Jednodimenzioni politop nazivamo temenom; dvodimenzioni politopi nazivaju se poligonima, o njima ćemo govoriti u prvom delu poglavlja; trodimenzioni politopi nazivaju se poliedrima; o njima ćemo govoriti u drugom delu poglavlja, a definicije ćemo koristiti i u daljim razmatranjima. Treći deo poglavlja daje nam Euklidovu verziju dokaza da ne postoji više od pet pravilnih tela, kao i jednostavnu konstrukciju koja pokazuje da svako od tih pet tela zaista postoji. Ostatak poglavlja se uglavnom svodi na topologiju: pravilan poliedar naziva se mapom, a kasnije i konfiguracijom. U petom delu je lagani osvrt na rekreacionu matematiku, kao uvod u *drvo ivica* u fon Štatovom[5] dokazu Ojlerove[6] formule.

3.1 Pravilni poligoni

Svako od nas do sada se upoznao sa nekim od pravilnih poligona: jednakostraničnim trouglom koji je Euklid konstruisao u svom prvom poglavlju; kvadrat sa kojim se susrećemo na svakom koraku u današnjem svetu, petouglom u amblemu Krajslerovih automobila, šestouglom u obliku pahuljice... Petougao i devetougao koristili su se kao osnova za izgradnju Pentagona[7] i Baha'i hrama blizu Čikaga. Dvanaestougaone kovanice bile su u upotrebi u Engleskoj i Kanadi.

Preciznije, p-poligon definišemo kao kolo od p segmenata A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,..., $A_{p-1}A_p$, A_pA_1 koji povezuju redom parove tačaka A_1, A_2,..., A_p. Segmente i tačke redom nazivamo stranicama i temenima, i insistiramo na tome da stranice ne prelaze jedna preko druge. Ako su mu temena koplanarna, poligon je ravanski, u protivnom, to je prostorni poligon.

Ravanski poligon deli ravan na dva dela, od kojih je jedan, koji nazivamo unutrašnjost, konačan. Često ćemo smatrati da se p-poligon sastoji iz svoje unutrašnjosti, stranica i temena. Tako ga možemo redefinisati kao jednostavno povezanu regiju ograničenu sa p posebnih segmenata. (Jednostavno povezana oblast znači da svaka prosta zatvorena kriva nacrtana u toj regiji može da se skupi u tačku bez napuštanja te regije (tj. oblast nema rupe.).)

Najvažniji je slučaj kada ni jedna od stranica ne ulazi u regiju. Tada razmatramo *konveksni* p-poligon, koji se koristeći Dekartov koordinatni sistem, može opisati kao sistem od p linearnih nejednačina:

$$a_kx + b_ky \leq c_k, (k = 1, 2, \cdots, p).$$

Ove nejednačine moraju biti konzistentne a ne suvišne, i moraju da obezbede

[5] *Karl Georg Kristijan fon Štat, (1798. - 1867.)*, nemački matematičar.
[6] *Leonard Ojler, (1707. - 1783.)*, švajcarski matematičar i fizičar.
[7] Pentagon, upravni centar ministarstva odbrane SAD.

granice za konačan integral

$$\iint dxdy$$

(koji nam daje meru te oblasti).

Za poligon kažemo da je jednakostraničan ako su mu sve stranice jednake; jednakougaon ako su mu svi uglovi jednaki. Ako je $p > 3$, p-poligon može biti jednakostraničan iako nije jednakougaon, i obrnuto: romb je jednakostraničan, ali nije jednakougaon, a pravougaonik je jednakougaon, ali nije jednakostraničan. Ako je obeležen sa $\{p\}$, to je: za $\{3\}$ jednakostraničan trougao, za $\{4\}$ kvadrat, $\{5\}$ pravilan petougao, i tako dalje.

Lako je primetiti da regularan poligon ima i *centar*, od koga su sva temena jednako udaljena za R_0, a sve stranice na pođednakoj udaljenosti R_1. To znači da tu egzistiraju dva koncentrična kruga, spoljni i unutrašnji, koji redom, prolaze kroz temena i dodiruju stranice regularnog poligona.

Nekada je korisno posmatrati stranice p-poligona kao vektore čija je suma 0. Tada se mogu posmatrati kao p segmenata koji polaze iz iste tačke, a ugao između dva uzastopna segmenta je jednak spoljašnjem uglu p-poligona. to znaži da je suma spoljašnjih uglova ceo krug, ili 2π. Tako je i spoljašnji ugao kod svakog od temena $\{p\}$ jednak $2\pi/p$, pa je unutrašnji ugao kod svakog od temena njegova dopuna do punog ugla

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi.$$

Ovo se može primeiti na desno-ugaonom trouglu $O_2O_1O_0$ sa slike 1.1., gde je O_2 centar, O_1 sredina stranice, a O_0 jedno od temena te stranice. Desni ugao se pojavljuje kod temena O_1, a primećuje se da je ugao kod temena O_2 π p. Ako je $2l$ dužina stranice, tada je

$$O_0O_1 = l, O_0O_2 = R_0, O_1O_2 = R_1;$$

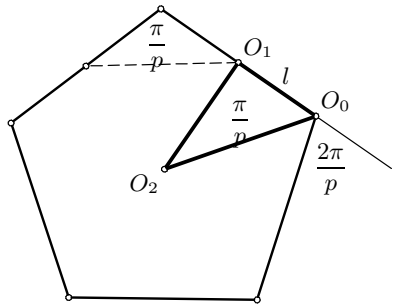
kao i

$$R_0 = l \csc \frac{\pi}{p}, R_1 = l \cot \frac{\pi}{p}.$$

Površina oblasti $\{p\}$, koja je sastavljena od dvanaest takvih trouglova je

$$C_p = plR_1 = pl^2 \cot \frac{\pi}{p}.$$

Obim je, naravno, $S = 2pl$.



Slika 1.1.

Ako se p neograničeno povećava, odnosi S/R_0 i S/R_1 teže ka 2π, kao što smo i očekivali (ovako je Arhimed procenio π, uzevši $p = 96$).

Takođe, možemo uzeti da Dekartove koordinate svakog od temena budu

$$(R_0 \cos \frac{2k\pi}{p}, R_0 \sin \frac{2k\pi}{p}), (k = 0, 1, ..., p-1).$$

Još nešto, u kompleksnom dijagramu temena $\{P\}$ u krugu spoljašnjeg prečnika $R_1 = 1$ su kompleksni brojevi

$$e^{\frac{2k\pi i}{p}}$$

koji predstavljaju korene jednačine

$$z^p = 1.$$

Nekada je potrebno proširiti definiciju p-poligona dozvolivši da mu stranice budu zakrivljene, to jest u nekim slučajevima možemo posmatrati sferične poligone, čije su stranice lukovi velikih krugova sfere. Ovaj dodatak definicije omogućava nam da imamo, za $p = 2$, *digon*, koji ima dva temena i dve (različite) zakrivljene stranice.

3.2 Poliedri

Poliedarsku površ možemo definisati kao konačan povezan skup ravanskih poligona, takav da svaka stranica svakog od poligona pripada tačno jednom od ostalih poligona, uz uslov da su poligoni koji okružuju svako teme pripadaju jednom kolu (da bismo izbegli anomalije kao što su dve piramide sa zajedničkim bazama). Poligoni se nazivaju stranama, a njihove stranice ivicama poliedra. Takođe, insistiramo da se stranice ne preklapaju među sobom. Kako poliedar formira jednu zatvorenu površinu, on deli prostor na dva dela, od kojih je jedan, unutrašnji, konačan. Često ćemo nailaziti na slučajeve kada se poliedar sastoji od unutrašnjosti, kao i od N_2 strane, N_1 ivice i N_0 temena.

Najvažniji nam je slučaj kada ni jedna od ravni koje sadrže strane poliedra ne ulazi u njegovu unutrašnjost. U tom slučaju imamo konveksni poliedar, koji se u Dekartovim koordinatama može predstaviti sistemom nejednačina

$$a_k x + b_k y + c_k z \leq d_k, (k = 1, 2, ..., N_2).$$

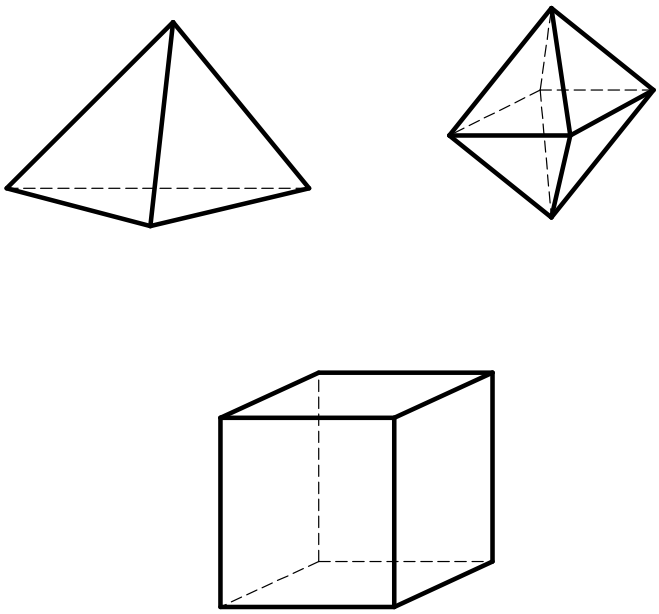
Ove nejednačine moraju biti konzistentne, a ne suvišne, i moraju da obezbede granice za konačan integral

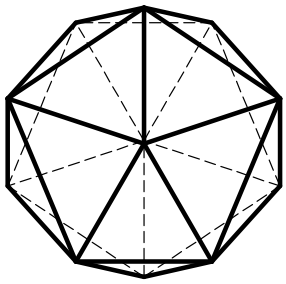
$$\iiint dxdydz$$

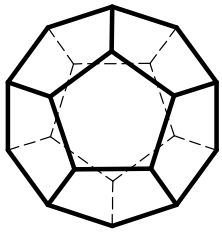
(koji određuje zapreminu poliedra).

Izvesni poliedri su skoro slični poligonima koji ih generišu. Svi znamo kako tačka i p-poligon mogu da se povežu sa p trouglova u oblik piramide, kako dva jednaka p-poligona mogu da se povežu sa p pravougaonika u pravilnu prizmu. Rotirajući jedan od ta dva p-poligona u svojoj ravni za ugao π p oko njegovog centra, možemo ih spojiti sa $2p$ trouglova i tako dobiti antiprizmu, čije stranice izgledaju cik-cak.

Tetraedar je piramida čija je osnova trougao. Njegova površina sastoji se od četiri trougla, od kojih jedan mora biti imenovan za bazu (osnovu). Ako su mu sve stranice jednakostranični trouglovi, u pitanju je pravilan tetraedar. Tetraedar je najjednostavnije Platonovo telo. Ostala su oktaedar, heksaedar (kocka), ikosaedar i (pentagonalni) dodekaedar.







3.3 Pet Platonovih tela

Konveksni poliedar je pravilan ako su sve njegove strane pravilni poligoni, i sva njegova temena izgledaju isto (kasnije ćemo videti da regularnost strana može da izazove ništa više od blagog izobličenja, kao i malo ekonomičniju definiciju). Ako su njegove stranice p-poligoni, kakvih q okružuje jedno teme, poliedar ćemo obeležavati sa $\{p, q\}$.

Sve moguće vrednosti za p i q mogu se nabrojati na sledeći način. Rogalj kod jednog od temena ima q uglova koji ga čine, svaki od njih $(1 - 2/p)\pi$. Poznata teorema nam govori o tome da ovih q uglova mora u zbiru biti manje od 2π. Kako je $(1 - 2/p)\pi < 2/q$, tako je i

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2},$$

ili $(p - 2)(q - 2) < 4$. Zbog toga, $\{p, q\}$ ne može imati druge vrednosti sem

$$\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 3\}.$$

Tetraedar, $\{3, 3\}$, smo vec pominjali. Da bismo pokazali da ostale četiri rešenja stvarno postoje, konstruisaćemo preostala četiri Platonova tela, redom.

Spajanjem dve jednake piramide bazom na bazu, dobijamo dipiramidu sastavljenu od $2p$ trouglova. Ako je baza piramide p-poligon, visine piramida se mogu podesiti tako da sve stranice piramida budu jednakostranični trouglovi. Ako je $p = 4$, svako teme je okruženo sa četiri trougla, a dva suprotna temena mogu biti vrhovi dipiramide. To je *oktaedar*, $\{3, 4\}$.

Podešavajući visinu prave prizme sa pravilnom bazom, možemo postići da joj ostale ivice budu kvadrati. Ako je baza takođe kvadrat, dobili smo kocku, $\{4, 3\}$, kod koje svaka strana može biti uzeta za bazu.

Slično, podešavanjem visine antiprizme, možemo namestiti da njenih $2p$ trouglova budu jednakostranični. za $p = 3$ ponovo dobijamo oktaedar. za $p = 4$ ili 5 možemo položiti piramide na njene osnove, i tako dobijamo ukupno

$4p$ jednakostraničnih trouglova. Ako je $p = 5$, svako teme je okruženo sa po 5 trouglova, i dobili smo *ikosaedar*, $\{3, 5\}$.

Ne postoji tako jednostavan način da konstruišemo i peto Platonovo telo. Ali, ako 6 petouglova povežemo tako da je jedan okružen sa preostalih pet, dobijamo svojevrsnu činiju čije su ivice stranice prostornog desetougla. Dve takve činije možemo spojiti desetougao na desetougao, tako da formiraju *dodekaedar*, $\{5, 3\}$.

3.4 Grafovi i mape

Ivice i temena poliedra formiraju specijalan slučaj grafova, koji su sastavljeni od N_0 tačaka, ili čvorova, spojenih u parovima sa N_1 segmenata ili grana (koje ne moraju da budu prave). Ako čvor pripada q grana, očigledno je da je

$$\sum q = 2N_1,$$

gde sumiramo po N_0 čvorova. Za povezan graf, (graf u jednom komadu) mora biti

$$N_1 \geqslant N_0 - 1.$$

Za graf kažemo da sadrži drugi graf ako ga možemo proizvesti iz drugog grafa tako što mu dodajemo grane, ili grane i čvorove zajedno. Graf može imati i krug od p grana i p čvorova, p-poligon ($p \geqslant 2$). Graf koji ne sadrži ni jedan krug nazivamo šuma, a ako je povezan, drvo. U slučaju drveta, prethodna jednačina se zamenjuje sa

$$N_1 = N_0 - 1;$$

drvo se može dobiti iz bilo kog čvora dodavanjem uzastopnih grana, od kojih svaka vodi ka novom čvoru.

Teorija grafova pripada topologiji, geometriji sa gumenog lista, koja se bavi načinom na koji su figure povezane, bez obzira na njihovu pravilnost i meru. U ovom duhu, krucijalna stvar koju poliedar poseduje je da njegove stranice formiraju jedninstvenu nepovezanu površinu. Ivice su obično krive nacrtane na površini, koje do temena dolaze u skupovima od po tri ili više krivih.

Drugim rečima, poliedar sa N_2 strane, N_1 ivicom N_0 čvorova može se posmatrati kao mapa, kao deo nepovezane površine u N_2 poligonalne oblasti kojima N_1 kriva povezuje parove od N_0 tačaka. Jedna takva mapa može se videti kada se ivice kocke radijalno projektuju na njenu opisanu sferu; u tom slučaju je $N_0 = 8$, $N_1 = 12$ i $N_2 = 6$, a oblasti su sferni četvorouglovi.

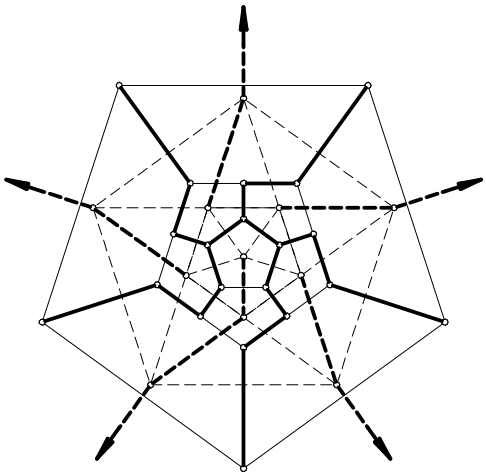
Iz novodobijene mape možemo prizvesti i drugu mapu, na istoj površini. Ta druga mapa ima N_2 temena, po jedno u unutrašnjosti svake od površi mape od koje smo krenuli, N_1 ivicu, jednu koja prelazi svaku od ivica polazne mape, i N_0 strana, jednu koja okružuje svako teme polazne mape. U vezi

sa p-poligonalnom stranom početne mape, dualna mapa će imati teme gde p ivica i p strana utiču zajedno (slika 1.2.). Dualnost je simetrična relacija: svaka mapa je dual svog duala.

Brojeći stranice svih površi (bilo na poliedru, bilo na mapi) dolazimo do formule

$$\sum p = 2N_1,$$

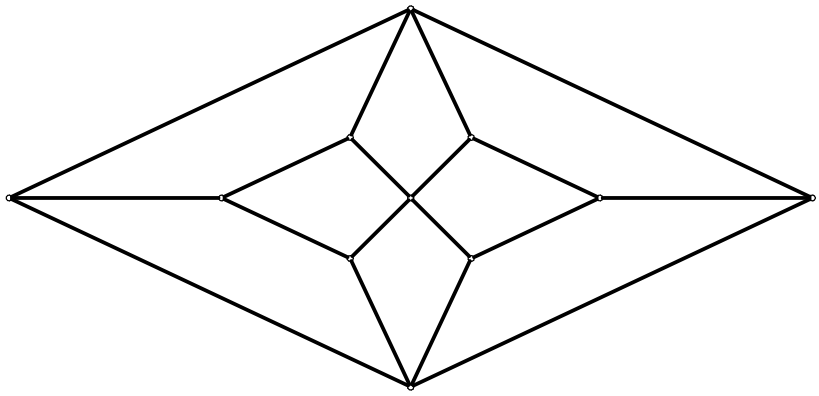
gde sumiramo po N_2 površi. Takođe, brojeći po ivicama koje ističu iz svih temena, dobijamo $\sum q = 2N_1$. To proizilazi iz prethodne jednačine, zbog činjenice da broj neparnih strana (p-poligonalne površi gde je p neparno) mora biti jednak. Tako, ako su sve sem jedne strane parne, onda i ona mora biti parna.



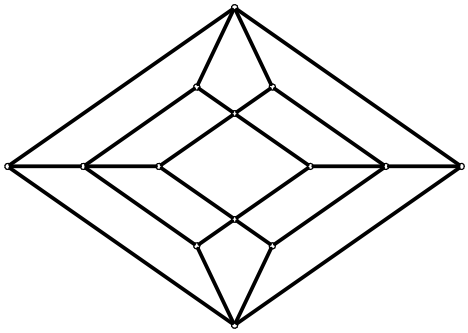
Slika 1.2.

3.5 Put oko sveta

Pretpostavimo da temena poliedra (ili mape) predstavljaju mesta koja želimo da posetimo, dok ivice predstavljaju jedine raspoložive puteve između tih mesta. Onda pokušajmo da rešimo problem posete svih mesta na karti, bez ponavljanja, jednom jedninom putanjom.



Slika 1.3.



Slika 1.4.

Slika 1. daje nam rešenje ovog problema u specijalnom slučaju koji je interesantan zato što je to najjednostavniji primer slučaja u kome putovanje ne može biti zaokruženo. Na slici 1.5. prikazana je mapa kod koje je ovaj problem nerešiv čak iako nam je dozvoljeno da pođemo iz bilo kog temena i završimo na bilo kom drugom.

Iako nije uvek moguće uključiti sva temena poliedra u prost lanac ivica, sigurno je moguće uključiti sve čvorove u drvo čijih se N_0-1 grana pojavljuje među N_1 ivica. Ovo samo zahteva ponovljenu primenu principa da bilo koja dva temena mogu biti povezana lancem ivica. U stvari, svaki povezani graf ima svoje drvo za skelarenje, i povezanost grafa je definisana kao broj njegovih grana koje je potrebno ukloniti da bi taj graf postao drvo, naime $1 - N_0 + N_1$.

3.6 Ojlerova formula

Kada smo definisali poliedar, nismo isključili mogućnost da bude višestruko (u obliku prstena, perece, ili komplikovanije). Specijalna odlika koja određuje prosto-povezani poliedar je to da svaka jednostavna zatvorena kriva nacrtana na njegovoj površini može da se skupi u tačku, ili da svako kolo njegovih ivica čini regiju (koja se sastoji od jedne ili više strana). Za takav poliedar broj njegovih elemenata zadovoljava Ojlerovu formulu

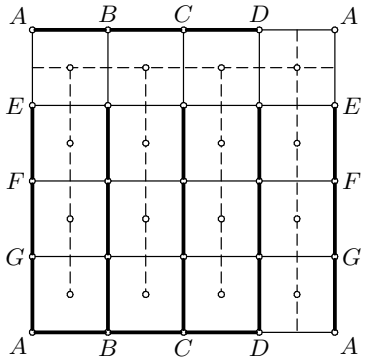
$$N_0 - N_1 + N_2 = 2,$$

koja se može dokazati na razne načine. Za sledeći dokaz zahvalni smo fon Štatu.

Ako analiziramo drvo koje za čvorove ima N_0 temena, a za grane $N_1 - 1$ od N_1 ivica (ili skele od temena i ivica grafa). Umesto preostalih ivica, uzmimo odgovarajuće ivice dualne mape (na slici 1.3. to su podebljane ivice). Ove ivice dualne mape formiraju graf sa N_2 čvora, po jedan unutar svake od strana poliedra. Njegove grane su potpuno odvojene od grana koje pripadaju drvetu. On je povezan, jer jedini način da neki od njegovih čvorova bude nepristupačan sa nekog drugog je kolo sa drveta koje dolazi između čvorova grafa, ali drvo nema ni jedno kolo. Sa druge strane, kolo sa grafa bi rastavilo površ na dva odvojena dela, od kojih svaki od njih sadrži neke od čvorova drveta, što je nemoguće. U stvari, graf je drugo drvo, koje poseduje $N_2 - 1$ grana. Ali, svaka stranica poliedra odgovara jednoj od grana prvog ili drugog drveta. Otuda

$$(N_0 - 1) + (N_2 - 1) = N_1.$$

Ovi argumenti padaju u vodu kada su u pitanju više-povezane površi, zato što graf ivica dualne mape sadrži kola (iako ona ne rastavljaju površ). Na primer, cele linije na slici 1.5. formiraju odvijenu mrežu mape sastavljene od šesnaest četvorouglova na porvši u obliku prstena; podebljane linije formiraju skelu, a isprekidane linije prelaze preko preostalih stranica. Ovde možemo primetiti dva kola isprekidanih linija: jedno kroz središnju tačku duži AD, i drugu kroz središnju tačku duži AE.



Slika 1.5.

Svaka orijentisana nepovezana površ (npr. svaka zatvorena površ u običnom prostoru koja ne prelazi samu sebe) može se smatrati *sferom sa p ručki* (tako je za $p = 0$ sfera ili bilo koja prosto povezana površ, za $p = 1$ prsten, za $p = 2$ površ tela(-od-osam)). Broj p naziva se *rod* površi. Može se pokazati da je prikladna generalizacija Ojlerove formule

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2 - 2p.$$

Cele linije sa slike 1.2. su *Šlegelov dijagram* za dodekaedar: jedna strana je specijalizovana, a ostatak površi je predstavljen u unutrašnjosti te strane (kao što projektujemo poliedar na tu stranu iz tačke izvan njega). Takav dijagram se može napraviti za svaki prosto povezan poliedar. Možemo smatrati da cela ravan predstavlja celu površ poliedra, tako što dopustimo da spoljna oblast ravni predstavlja unutrašnjost njene spacijalne strane.

Ako prosto povezana mapa ima samo parne strane (slike 1.3. i 1.4.), možemo pokazati da se svako kolo ivica sastoji od parnog broja ivica. Takvo kolo, od npr. N ivica, rastavlja mapu na dve regije koje koje za zajedničku granicu imaju to kolo. Ako izmenimo mapu, menjajući jednu od te dve regije sa jednom N-stranom površi, tada su ostale površi (koje pripadaju drugoj regiji) sve parne. Otuda , po odeljku 1.4., N mora biti parno.

To sledi iz činjenice da alternativno teme bilo koje parno-strane prosto povezane mape možemo izabrati na konzistentan način (tako da svaka ivica spaja dva temena različitih tipova). Na primer, alternativna temena kocke se nalaze u dva ucrtana tetraedra.

3.7 Regularne mape

Za mapu kažemo da je regularna, tipa $\{p, q\}$, ako ima p temena i p ivica na svakoj strani, q ivica i q strana sustiču se u svakom temenu, postavljenih simetrično tako da može lako da se napravi. Tako je pravilan poliedar

specijalan slučaj regularne mape. Uz blagi osvrt na odeljak 2.4, imamo da je

$$qN_0 = 2N_1 = pN_2.$$

Za svaku mapu tipa $\{p, q\}$, postoji njoj dualna mapa tipa $\{q, p\}$; npr. mapa tipa $\{4, 4\}$ dualna samoj sebi dobija se kada se torus podeli na n^2 kvazi-kvadrata tako što se na njega ucrta n krugova sa centrom u centru torusa, i n krugova po torusu koji su normalni na njih (Na slici 1.5. je prikazan slučaj za $n = 4$. Površ je sečena duž krugova $ABCD$ i $AEFG$, po jedan od oba tipa).

Ovaj primer otpada ako ograničimo razmišljanje na prosto povezane poliedre. Tada su moguće vrednosti za p i q zadate nejednakošću $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$, i za svaki prihvatljiv par njihovih vrednosti postoji tačno jedan poliedar $\{p, q\}$. U stvari, prethodna jednačina zajedno sa Ojlerovom formulom proizvodi sledeću jednakost:

$$\frac{1}{N_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2},$$

koja izražava N_1 u preko p i q. Nejednakost $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ je očigledna posledica prethodne jednakosti. Rešenja

$$\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 3\}$$

daju nam tetraedar, oktaedar, kocku, ikosaedar i dodekaedar. Kod mapa imamo još i diedar $\{p, 2\}$, i neimenovani $\{2, p\}$ koji se sastoji od p digona.

3.8 Konfiguracije

Konfiguracija u ravni je skup on N_0 tačaka i N_1 linija sa N_{01} koje prolaze kroz sve tačke, i N_{10} tačaka koje pripadaju svakoj od linija. Jasno je

$$N_0 N_{01} = N_1 N_{10}.$$

Na primer, N_1 linija iz ošte pozicije sa svih njihovih $\frac{1}{2}N_1(N_1 - 1)$ tačaka preseka, formiraju konfiguraciju gde je $N_{01} = 2$ i $N_{10} = N_1 - 1$. Opet, p-poligon je konfiguracija u kojoj je $N_0 = N_1 = p$, $N_{01} = N_{10} = 2$.(Udaljene tačke preseka, koje strane proizvode, nisu uključene u ovo brojanje.)

Analogno tome, konfiguracija u prostoru je skup od N_0 tačaka, N_1 linija i N_2 ravni, ili kratko N_j ravni ($j = 0, 1, 2$), gde je svako od j-mesta identično sa N_{jk}, $j \neq k$. Jasno je

$$N_j N_{jk} = N_k N_{kj}.$$

Ovi konfiguracioni brojevi pogodno formiraju matricu

$$\begin{Vmatrix} N_{00} & N_{01} & N_{02} \\ N_{10} & N_{11} & N_{12} \\ N_{20} & N_{21} & N_{22} \end{Vmatrix}$$

gde je N_{jj} broj koji smo ranije nazvali N_j.

Pojam konfiguracije suštinski pripada projektivnoj geometriji, u kojoj nam princip dualnosti omogućava da sačuvamo relaciju incidencije smenjivanja tačaka i ravni. Takođe, za bilo koju konfiguraciju postoji i njoj dualna, čija se matrica dobija *centralnom inverzijom* (zamenivši N_{jk} sa $N_{j'k'}$, gde je $j + j' = k + k' = 2$). Posebno, za svako Platonovo telo $\{p, q\}$ dobijamo konfiguraciju

$$\begin{Vmatrix} N_0 & q & q \\ 2 & N_1 & 2 \\ p & p & N_2 \end{Vmatrix}$$

Sada nam relacije $qN_0 = 2N_1 = pN_2$ i $N_jN_{jk} = N_kN_{kj}$ daju odnos $N_0 : N_1 : N_2$, a zajedno sa $N_0 - N_1 + N_2 = 2$ dobijamo precizne vrednosti

$$N_0 = \frac{4p}{4-(p-2)(q-2)}, N_1 = \frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)}, N_2 = \frac{4q}{4-(p-2)(q-2)}.$$

3.9 Istorijske primedbe

Ser Darsi W. Tompson[8], kao i Proklo mnogo vekova pre njega, dao je primedbu da Euklid nikada nije sanjao da napiše *Elementarnu geometriju*: ono što je stvarno želeo je da napiše izvrsno (do sitnih detalja) objašnjenje za *Pet pravilnih tela* koje bi koristili početnici.

Rana istorija ovih poliedara je izgubljena u senkama starine. Pitati ko ih je prvi konstruisao je jednako uzaludno kao i pitanje ko je prvi koristio vatru. Tetraedar, kocka i oktaedar pojavljuju se u prirodi kao kristali (u različitim supstancama, kao što su sodijum sulfantimonijat, kuhinjska so, stipsa hroma, tim redom). Druga dva preostala Euklidova pravilna tela, ikosaedar i dodekaedar, ne formiraju kristale, i zato im je potrbno udahnuti život da bi se pojavili. Hekel[9] je primetio da su skeleti mikropskopskih morskih životinja radiolarija izvanredni primeri *Circogonia icosahedra* i *Circorrhegma dodecahedra*. Ako se okrenemo ljudskoj istoriji, iskopavanja na Monte Lofi, blizu Padove, su otkrila Etrurski dodekaedar koji je služio kao igračka pre najmanje 2500 godina. Danas nije neki problem napraviti bilo koje od Platonovih tela, koristeći malo tvrđi papir, lepak, i igrajući se sa pravilnim mnogouglovima. Verovatno ih je na taj način i sam Platon napravio (oko 400.g.p.n.e.), a moguće je i da je to pre njega učinio neko od pristalica Pitagorejske škole, dok je Timej[10] izmislio mističnu vezu između četiri lako konstruktibilna tela (tetraedra, oktaedra, kocke i ikosaedra) sa četiri prirodna elementa (vatra, vazduh, voda i zemlja). Dodekaedru je dodelio ulogu univerzuma, oblika koji spaja sve ostale.

[8] *Darsi Ventvort Tompson, 1860. - 1948.*, škotski biolog i matematičar.

[9] *Ernst Hekel, (1834. - 1919.)*, nemački biolog, filozof, fizičar i umetnik.

[10] *Timej od Lokrija, (420.p.n.e. - 380.p.n.e.)*, grčki filozof.

Svih pet Platonovih tela matematički su obrađena od strane Teteja[11] u knjigama XIII, XIV i XV Euklidovih elemenata. Piramide i prizme su mnogo starije, dok antiprizme, mnogo kasnije, pominje Kepler[12].

Stari Grci su znali da je neke od pravilnih poligona moguće konstruisati lenjirom i šestarom, a neke ne. Ovo je sve bilo nejasno do 1796. godine, kada je Gaus[13], istražujući ciklotomičnu jednačinu, došao do zaključka da jedini p-poligoni koji se mogu euklidski (lenjirom i šestarom) konstruisati su oni kojima je neparan prost faktor različit od Fermaovih[14] prostih $2^{2^2}+1$. Ovo praktično znači da p mora biti delitelj

$$3.5.17.257.65537 = 2^{2^2} - 1,$$

pomnožen bilo kojim stepenom broja dva. Najjednostavnija pravila za konstruisanje $\{5\}$ i $\{17\}$ dali su Dadni[15] i Ričmond. Rišelot[16] i Švendenhajm konstruisali su $\{257\}$ u XIX veku, dok je Hermes[17] potrošio deset godina svog života na konstrukciju $\{65537\}$. Njegov rukopis čuva se na Univerzitetu u Getingenu.

Teorija grafova (koju je tako nazvao Silvester[18]) počela je sa Ojlerovim problemom Mostova u Kenigsbergu, a smislili su je Kejli[19], Hamilton[20] i ostali. Ojler je svoju formulu $qN_0 = N_1 = pN_2$ otkrio 1752. godine. Šezdeset godina kasnije L'Ulije[21] je primetio da ta formula pada u vodu kada se primeni na više-povezane poliedre. Predmetu Topologije tada počinju da streme Listing[22], Mebijus[23], Riman[24], Poenkare[25], koji su nakupili dosta literature o datoj temi.

Teorija mapa dobila je ogroman stimulans kada je Mebijus pronašao rešenje problema najmanjeg broja boja koji je dovoljan za bojenje svih mogućih mapa. Pitanje da li je taj broj (za prosto-povezanu površ) 4 ili 5, odgovor su tražili Kejli, Kempi[26], Tejt[27], Hejvud[28] i drugi, ali su ostali

[11] *Tetej od Atine, (417.p.n.e. - 369.p.n.e.)*, antički matematičar.
[12] *Johan Kepler, (1571. - 1630.)*, nemački matematičar, astronom i astrolog.
[13] *Johan Karl Fridrih Gaus, (1777. - 1855.)*, nemački matematičar i fizičar.
[14] *Pjer de Ferma, (1601. - 1665.)*, francuski matematičar-amater.
[15] *Henri Ernest Dadni, (1857. - 1930.)*, engleski matematičar.
[16] *Fridrih Julije Rišelot, (1808. - 1875.)*, nemački matematičar.
[17] *Johan Gustav Hermes, (1846. - 1912.)*, nemački matematičar.
[18] *Džejms Džozef Silvester, (1814. - 1897.)*, engleski matematičar.
[19] *Artur Kejli, (1821. - 1895.)*, britanski matematičar.
[20] *Vilijem Hamilton, (1805. - 1865.)*, irski fizičar, matematičar i astronom.
[21] *Simon L'Ulije, (1750. - 1840.)*, švajcarski matematičar.
[22] *Johan Benedikt Listing, (1808. - 1882.)*, nemački matematičar.
[23] *August Ferdinand Mebijus, (1790. - 1868.)*, nemački matematičar i teoretičar astronomije.
[24] *Bernard Riman, (1826. - 1866.)*, nemački matematičar.
[25] *Anri Poenkare, (1854. - 1912.)*, francuski matematičar.
[26] *Alfred Brej Kempi, (1849. - 1922)*, engleski matematičar.
[27] *Piter Gatri Tejt, (1831. - 1901.)*, škotski matematičar i fizičar.
[28] *Persi Džon Hejvud, (1861. - 1955.)*, britanski matematičar.

bez odgovora. Očigledno je da je za oktaedar potrebno dve boje, tri za kocku i ikosaedar, četiri za tetraedar i dodekaedar.

Veoma poznata figura dva perspektivna trougla koji sa njihovim centrom i osom perspektive čine konfiguraciju (kao što je prikazano u prethodnom odeljku) sa $N_0 = N_1 = 10$ i $N_{01} = N_{10} = 3$, koju je prvi otkrio Dezarg[29] 1636. godine. Za korišćenje simbola $\{p, q\}$ (za pravilan poliedar sa p-poligonalnim stranama, po q se sustiču u svakom temenu) zahvalni smo Šlefliju[30], i zato taj simbol nazivamo Šleflijev simbol. Jednakosti

$$N_0 = \frac{4p}{4-(p-2)(q-2)}, N_1 = \frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)}, N_2 = \frac{4q}{4-(p-2)(q-2)}$$

takođe dugujemo njemu.

[29] *Žerar Dezarg, (1591. - 1661.)*, francuski matematičar, jedan od tvoraca projektivne geometrije.

[30] *Ludvig Šlefli, (1814. - 1895.)*, švajcarski geometar i matematičar.

4 Pravilni poliedri

Definicija regularnosti u odeljku 1.3. uključuje tri stavke: pravilne strane, jednake strane i jednake prostorne uglove (koji se mogu smatrati posledicom prethodne dve stavke). Sve tri stavke su potrebne. Na primer: trostrana dipiramida sastavljena od dva pravilna tetraedra ima jednake, pravilne strane; prizma i anti-prizma skladnih visina imaju pravilne strane i iste prostorne uglove; izvesni nepravilan tetraedar, disfenoid, ima jednake strane i jednake prostorne uglove. (Ako bismo želeli da napravimo disfenoid, to bismo uradili tako što bismo oštrougli trougao savili po linijama koje određuju središnje tačke njegovih stranica. Za disfenoid kažemo da je *tetragonalan* ili *romičan*, u zavisnosti od toga da li je taj početni trougao jednakokrak ili raznostrani.)

Zanimljivo je i to što dolazimo do taga da je i druga definicija, koja uključuje samo dve stavke, dovoljno jaka da ima isti efekat: videćemo da su pravilne strane i pravilni prostorni uglovi dovoljni. Da pojednostavimo, zamenićemo pojam prostornih uglova (koji je prilično problematičan) sa pojmom *figure temena*.

Figura temena kod temena O poligona je duž koja spaja središnje tačke strana koje u to teme utiču; za $\{p\}$ stranice $2l$ ovo je duž dužine

$$2l\cos\frac{\pi}{p}.$$

(Isprekidana linija sa slike 1.1.) Figura temena kod temena O poliedra je poligon čije su stranice figure temena svih ravni koje se sustiču u tački O; njegova temena su u stvari sve središnje tačke strana koje se sustiču u tački O. Na primer, figura temena kocke (u svakom od temena)je (jednakostranični) trougao.

Tako je, prema prethodnom, poliedar pravilan ako ima pravilne strane i pravilne figure temena.

Pošto su sve strane jednake, i stranice moraju biti jednake, recimo $2l$. Slično, pošto su mu figure temena jednake, sve strane mu moraju biti jednake. U suprotnom, neki parovi različitih strana sa zajedničkim temenom O, gde figura temena ne bi imala jednake strane, koje isznose $2l\cos\frac{\pi}{p}$, za dve različite vrednosti p. I više, diedarskii uglovi (određeni parovima susednih stranica) su svi među sobom jednaki, kao na primer oni kod bilo kog od temena prave piramide čija je osnova pravilan poligon. Svaka bočna strana ove piramide je jednakokraki trougao sa stranicama l, l i $2l\cos\frac{\pi}{p}$. Broj ivica osnove ne može se menjati a da se pritom ne promeni diedarski ugao. Otuda taj broj, recimo q, je isti za sva temena, i figure temena moraju biti iste.

Takođe imamo i pravilan poliedar $\{p,q\}$. Njegova strana je $\{p\}$ stranice $2l$, a figura temena $\{q\}$ stranice $2l\cos\frac{\pi}{p}$.

Lako se da primetiti da normala na ravan u kojoj leži strana sadrži centar te strane i seče normalu na ravan u kojoj se nalazi figura temena koja prolazi kroz centar figure temena u tački O_3, koja je centar tri sfere: jedne spolja

opisane sfere koja prolazi kroz sva temena i sadrži sve spolja opisane krugove strana, jedne srednje sfere, koja dodiruje sve ivice i sadrži sve upisane krugove strana, i jedne upisane sfere koja dodiruje sve ravni u njihovim centrima. Njihove prečnike obeležićemo redom sa R_0, R_1 i R_2.

Neka je O_2 centar strane, O_1 središnja tačka stranice koja pripada datoj strani i O_0 jedno od temena te stranice. Kako je trougao $O_iO_jO_k$ $(i < j < k)$ pravougli, koristeći Pitagorinu teoremu dobijamo

$$R_0^2 = l^2 + R_1^2 = (l \csc \frac{\pi}{p})^2 + R_2^2,$$
$$R_1^2 = (l \cot \frac{\pi}{p})^2 + R_2^2.$$

4.1 Grupe

Predmet istraživanja teorije grupa je već objašnjen, pa će nam biti potrebno da istaknemo samo neke njene bitnije delove, u pokušaju da ovaj rad učinimo dovoljnim samom sebi.

Za skup elemenata, ili *operacija* kažemo da formira *apstraktnu grupu* ako je zatvoren za neku vrstu *asocijativnosti*, sadrži *identitet*, i neku operaciju koja ima *inverz*. Preciznije, grupa sadrži, za svake dve njene operacije R i S, i njihov proizvod RS, a sa trećom operacijom T važi i $(RS)T = R(ST)$; sadrži i identitet 1 (jedinicu), takav da je $1R = R$ za svako R; svako R ima svoj inverz, R^{-1} takav da je $RR^{-1} = 1$. Lako je zaključiti da je i $R1 = R$ i $R^{-1}R = 1$.

Broj različitih operacija (uključujući i identitet) naziva se *red grupe*. Broj grupe ne mora da bude konačan.

Podskup elemenata grupe čiji proizvodi formiraju celu grupu naziva se *skup generatora*. Posebno, jedna operacija R formira grupu koja se sastoji od svih njenih stepena, uključujuć i $R^0 = 1$. Ovakva grupa naziva se *ciklična grupa*; konačna je ako je R periodična, i njen red je jednak periodu od R. Kažemo da je ciklična grupa reda p definisana relacijom

$$R_p = 1,$$

uz prećutni dogovor da je $R^n \neq 1$, $0 < n < p$. Opštije, bilo koja grupa je generisana pogodnim skupom generišućih relacija; npr. relacije

$$R_1^2 = R_2^2 = (R_1R_2)^3$$

definišu grupu reda 6 čije su operacije 1, R_1, R_2, R_1R_2, R_2R_1 i $R_1R_2R_1 = R_2R_1R_2$.

Podskup grupe koji sam za sebe formira grupu naziva se *podgrupa*. (Zbog kompletnosti objašnjenja, dozvoljeno je da u podgrupe grupe uključimo kako celu tu grupu, tako i grupu reda jedan koja se sastoji samo od 1.) Posebno, svaka operacija u grupi formira jednu njenu cikličnu podgrupu.

Ako se dobijena podgrupa sastoji od T_1, T_2,..., a S je bilo koja operacija te grupe, skup operacija ST_i nazivamo *levim kosetom* podgrupe, dok je skup operacija T_iS *desni koset* te podgrupe. Može se dokazati da bilo koja dva leva (ili desna) koseta imaju ili potpuno iste ili potpuno različite članove. Otuda podgrupa utiče na distribuciju svih operacija u grupi u nekoliko potpuno različitih levih (ili desnih) koseta. Taj broj se naziva *indeks podgrupe*. Kada je grupa konačna, njen indeks je količnik reda grupe i reda podgrupe.

Za dve operacije T i T' kažemo da su *konjugovane* ako se jedna može transformisati u drugu, to jest u grupi postoji operacija S takva da je $T' = T^S$, ili $ST' = TS$. Relacija konjugovano je, lako je primetiti, refleksivna, simetrična i tranzitivna. Za podgrupu T_1, T_2,... kažemo da je samokon jugovana ako za svako S iz grupe, važi da su levi koset ST_i i desni koset T_iS jednaki(bez obzira na uređenje skupa). Posebno, svaka grupa reda 2 je samokonjugovana.

Ako dve grupe $\mathbf{G_1}$ i $\mathbf{G_2}$ nemaju ni jednu zajedničku operaciju osim identiteta, i ako svaka operacija iz $\mathbf{G_1}$ komutira sa svakom operacijom iz $\mathbf{G_2}$, tada grupu generisanu grupama $\mathbf{G_1}$ i $\mathbf{G_2}$ nazivamo *direktnim proizvodom*, $\mathbf{G_1} \times \mathbf{G_2}$ (koja očito sadrži $\mathbf{G_1}$ i $\mathbf{G_2}$ kao samokonjugovane podgrupe). Na primer, ciklična grupa reda pq gde su p i q uzajamno prosti brojevi, je direktan proizvod cikličnih grupa reda p i q (generisanih sa R^p i R^q, pod uslovom da R geenriše celu grupu).

Kada operacije predstavimo kao transformacije, dobijamo apstraktnu grupu kao *grupu transformacija*. Kako transformacije automatski zadovoljavaju zakon asocijativnosti, možemo reći da skup transformacija formira grupu ako sadrži inverz svakog člana i proizvod svakog para. Posebno, grupa se može sastojati od nekih permutacija n objekata; tada se ona naziva grupom permutacija stepena n. Za grupu permutacija kažemo da je tranzitivna (na n objekata) ako su njene operacije dovoljne da zamene jedan objekat svim ostalima u okretanju. Tri najvažnije tranzitivne grupe su:

(i) Simetrična grupa reda $n!$, koja se sastoji od svih permutacija od n objekata;

(ii) Alternirajuća grupa reda $\frac{n!}{2}$, koja se sastoji od parnih permutacija;

(iii) Ciklična grupa reda n, koja se sastoji od cikličnih permutacija.

Lako možemo dokazati da je alternirajuća grupa podgrupa reda 2 simetrične grupe. Za $n = 2$ (i) i (iii) su iste, a za $n = 3$ (ii) i (iii) su iste.

Šest operacija ciklične grupe na elementima a, b, c su

$$1, (ab), (ac), (bc), (abc), (acb).$$

Ako su $R_1 = (ab)$ i $R_2 = (ac)$ dva generatora, to bi izgledalo

$$1, R_1, R_2, R_1R_2R_1, R_1R_2, R_2R_1.$$

Poučno je ovo uporediti sa grupom koja se sastoji od sledećih šest transformacija promenljive x

$$x' = x, x' = 1 - x, x' = \frac{1}{x}, x' = \frac{x}{x-1}, x' = \frac{1}{1-x}, x' = \frac{x-1}{x}.$$

Za takve dve grupe kažemo da su izomorfne, jer imaju istu *tablicu množenja* i zbog toga obe pripadaju istoj apstraktnoj grupi.

Neka grupa $\mathbf{G}$ sadrži samokonjugovanu grupu $\mathbf{T}$. Tada bilo koja operacija S iz $\mathbf{G}$ definiše jedan koset $\langle S \rangle = S\mathbf{T} = \mathbf{T}S$. Različiti koseti mogu se smatrati operacijama neke druge grupe, gde su proizvod, identitet, i inverz definisani sa

$$\langle R \rangle \langle S \rangle = \langle RS \rangle, \langle 1 \rangle = \mathbf{T}, \langle S \rangle^{-1} = \langle S^{-1} \rangle.$$

Ova novodobijena grupa naziva se *faktor grupa* od $\mathbf{G}$, ili preciznije *količnička grupa* $\mathbf{G}/\mathbf{T}$. Ukoliko je konačna, njen red jednak je redu grupe $\mathbf{T}$ u grupi $\mathbf{G}$.

Može se dogoditi i da $\mathbf{G}$ sadrži podgrupu $\mathbf{S}$ čije operacije $\mathcal{S}_j$ predstavljaju kosete od $\mathbf{T}$, u smislu da su posebni koseti baš $\langle \mathcal{S}_j \rangle$. Tada je $\mathbf{S}$ izomorfna sa $\mathbf{G}/\mathbf{T}$. Na primer, ako je $\mathbf{G}$ simetrična grupa $R_1^2 = R_2^2 = (R_1R_2)^3$, a $\mathbf{T}$ ciklična podgrupa generisana sa R_1R_2, tada $\mathbf{S}$ može sastojati od 1 i R_1. Opet, ako je $\mathbf{G}$ kontinualna grupa svih pomeranja, dok je $\mathbf{G}/\mathbf{T}$ ista grupa za koju smatramo da *radi na korpama i paralelnim zracima*, tada je $\mathbf{T}$ grupa svih translacija, a $\mathbf{S}$ grupa svih rotacija koja jednu tačku ostavlja invarijantnom.

Može se dogoditi i da je podgrupa $\mathbf{S}$ samokonjugovana, kao i $\mathbf{T}$. Tada je $T_i\mathcal{S}_j = \mathcal{S}_jT_i$ i $\mathbf{G} = \mathbf{S} \times \mathbf{T}$. Na primer, ako je $\mathbf{G}$ ciklična grupa reda 6, definisana sa $R^6 = 1$, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{T}$ mogu biti ciklične podgrupe definisane sa R^2 i R^3, redom.

4.2 Simetrijske operacije

Kada kažemo da je figura *simetrična*, mislimo na to da postoji transformacija podudarnosti koja je ostavlja celu nepromenjenu, pritom izvršivši permutaciju njenih elemenata. Kada kažemo da zonoedar ima centralnu simetriju, mislimo na to da postoji inverzija koja ga ostavlja invarijantnim. Takva transformacija podudarnosti naziva se *simetrijskom operacijom.* Jasno je da sve simetrijske operacije jedne figure zajedno čine grupu (dozvoljeno nam je da uključimo i identitetu). Ova grupa naziva se *simetrijska grupa* te figure.

Obrnuto, ako nam je data grupa transformacija podudarnosti, možemo konstruisati simetričnu figuru tako što izvršimo sve te transformacije na jednoj tački. Ta grupa je podgrupa simetrijske grupe te figure; u stvari, najčešće je ona i cela grupa simetrija. Ako je data grupa konačna, figura se sastoji od konačnog broja tačaka koje transformacije permutuju. Ove tačke imaju centroid (ili *centar gravitacije*) koji se transformiše u samog sebe. Zato

Svaka grupa transformacija podudarnosti ostavlja bar jednu invarijantnu tačku.

Ovo proizilazi iz činjenice da transformacija bilo koje tačke jednom takvom grupom leži na sferi.

Grupa transformacija može biti *diskretna* i bez toga da bude konačna. Ovo znači da svaka tačka ima diskretan set transformacija, na primer, da bilo koja data tačka u svom komšiluku ne sadrži ni jednu koja je od nje transformisana (čuva samo datu tačku).

U slučaju ciklične grupe generisane jednom transformacijom podudarnosti S, transformacije tačke A_0 od početne pozicije su

$$..., A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, ...$$

gde je $A_n = A_0^{S^n}$. Ove tačke možemo smatrati temenima generalizovanog poligona.

Različite vrste transformacija podudarnosti nas vode ka različitim vrstama poligona. Ako je S refleksija, polu-obrt, ili inverzija, poligon postaje digon, $\{2\}$. Ako je S rotacija, stranice su mu jednake tetive kruga, ako je ugao rotacije $\frac{2\pi}{p}$, dobijamo pravilan poligon $\{p\}$. Ako je S translacija imamo granični slučaj kada p postaje beskonačno, duži pođednake dužine na pravoj, *apeirogon*, $\{\infty\}$. Ako je S klizna refleksija, poligon je cik-cak površ. Ako je S rotaciona refleksija, dobijamo iskošenu cik-cak površ, čija temena leže u dva koncentrična kruga koji leže u međusobno paralelnim ravnima; ako je ugao rotacije $\frac{\pi}{p}$ strane su mu bočne ivice antiprizme. Na kraju, ako je S zavojno kretanje, dobijamo helikoidni poligon, čije su stranice tetive heliksa.

U svakom od ovih slučajeva, osim kod digona, ciklična grupa generisana sa S nije cela simetrijska grupa uopštenog poligona (postoje simetrije koje menjaju A_{-n} i A_n za sve vrednosti n, odjednom). U slučaju običnog poligona $\{p\}$, prava koja sadrži centar i bilo koje teme ili središnju tačku stranice sadrži, sadrži još jedno teme ili središnjicu stranice; tako postoji p takvih pravih. p-poligon je simetričan u polu-obrtu oko bilo koje od njih, pored toga što je simetričan sa svakom svojom rotacijom za svaki umnožak od $\frac{2\pi}{p}$ oko ose poligona. Tako je i simetrijska grupa $\{p\}$ reda $2p$, sastoji se od p poluokreta oko konkurentnih pravih u ravni poligona i p rotacija za različite uglove oko prave koja je normalna na ravan poligona.

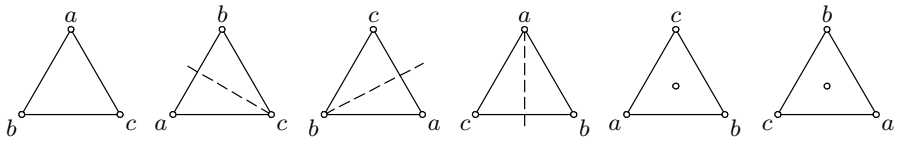
Simetrijske operacije figure su ili sve direktne, ili ih je pola direktno, a pola indirektno. Ako se pojavi indirektna operacija, njen proizvod sa svakom direktnom operacijom daje indirektnu operaciju, a sa svakom indirektnom operacijom direktnu operaciju. Kako je grupa rotacija generisana direktnim operacijama, ona je ili cela grupa, ili podgrupa reda 2. U narednim slučajevima indirektne operacije generišu jedan poseban koset ove podgrupe.

Kompletna simetrijska grupa od p, kao što je objašnjeno, je rotaciona grupa diedra $\{p, 2\}$, i poznata je pod imenom *diedarska grupa* reda $2p$. Sa druge strane, cela simetrijska grupa $\{p, 2\}$ je reda $4p$, i takođe sadrži rotacije

kombinovane sa refleksijom koja zamenjuje dve ravni diedra. Kao simetrijska operacija $\{p\}$, refleksija se u njegovoj ravni ne ponaša drugačije nego kao identiteta. Ostalih p poluokreta možemo zameniti njihovim proizvodima sa refleksijom, koje su refleksije u p koaksijalnih ravni.

Situacija postaje mnogo jasnija kada to sve pokažemo u dve dimenzije, razmatrajući rotacije oko tačaka i refleksije u odnosu na prave. Tada se simetrijska grupa p sastoji od p refleksija (u odnosu na linije koje sadrže centar, teme i sredinu naspramne stranice) i p rotacija (oko centra); grupa rotacija je ciklična.

Interesantno je da je diedarska grupa reda 6 izomorfna sa simetrijskom grupom reda 3. U stvari, šest simetrijskih operacija na jednakostraničnom trouglu permutuje temena a, b i c kao što se vidi na slici 3.1. Transpozicije se javljaju kao refleksije, a ciklične permutacije kao rotacije.



Slika 3.1.

4.3 Poliedarske grupe

Najzanimljivije konačne grupe grupe rotacija su grupe rotacija pravilnih poliedara, koje cemo nadalje istraživati.

Svaka rotacija koja se pojavljuje u konačnoj grupi ima konačan period; zato njen ugao mora biti srazmeran sa π. U stvari, najmanji ugao rotacije oko date ose mora biti činilac od 2π, i svi ostali uglovi rotacije oko iste ose su umnošci najmanjeg od njih. Na primer, ako su j i p uzajamno prosti, možemo naí proizvod broja $\frac{j}{p}$ koji se razlikuje od $\frac{1}{p}$ za ceo broj; ako je $\frac{2j\pi}{p}$ najmanji ugao rotacije koji se pojavljuje, mora biti $j = 1$. Rotacije oko ove ose formiraju cikličnu grupu reda p, a datu osu nazivamo je *osom p-puta rotacije*. Kada je $p = 2$, 3,4 ili 5, za osu kažemo da je *digonalna, trigonalna, tetragonalna* ili *pentagonalna*.

Dva recipročna poliedra očito imaju istu grupu simetrija, i isto tako istu grupu rotacija. Centar $\{p, q\}$ je spojen sa temenima, središtima stranica i centrima strana sa osama q-puta, 2-puta i p-puta rotacija. Jasno je, ni jedna druga osa rotacije ne egzistira u ovom poliedru. Drugim rečima, direktne simetrične operacije poliedra sastoje se od rotacija za uglove $\frac{2k\pi}{q}$, $\frac{2j\pi}{p}$ redom oko ovih pravih. Ako isključimo identitet, ove rotacije obuhvataju $q - 1$ vrednost za k, i $p - 1$ vrednost za j. Ali, temena, središta stranica i centri strana pojavljuju se u dijametralno suprotnim parovima (u slučaju tetraedra svako teme je suprotno jednoj od strana). Pošto je ukupan broj rotacija bez

identiteta jednak

$$\frac{1}{2}[N_0(q-1)+N_1+N_2(p-1)] = \frac{1}{2}[N_0q-2+N_2p] = 2N_1-1$$

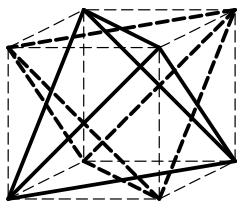
tako je i red grupe rotacija jednak $2N_1$.

Isti rezultat možemo dobiti na sledeći način. Neka smisao smera bude dodeljen jednoj posebnoj stranici. Tada je rotaciona simetrična operacija određena njenim učinkom na ovoj usmerenoj stranici. Kako postoji po jedna takva rotacija za svaku od stranica, određena bilo kojim od smerova: postoji $2N_1$ rotacija. Još jednostavnije, red grupe rotacija jednak je broju ivica $\{p,q\}$; ako je grupa tranzitivna na ovim ivicama, tada je podgrupa koja ostavlja invarijantnom jednu od njih reda 1.

Posebno, postoje *tetraedarska grupa* reda 12, *oktaedarska grupa* reda 24 (koja je takođe i grupa rotacija kocke) i *ikosaedarska grupa* reda 60 (koja je takođe i grupa rotacija dodekaedra). U narednom odeljku napravićemo paralelu između ovih grupa i grupa permutacija reda 4 ili 5.

4.4 Pet pravilnih sastava

Sastavljeni poliedar (ili kraće *sastav*) definišemo kao skup jednakih pravilnih poliedara sa zajedničkim centrom. Za sastav kažemo da je *pravilan u smislu temena* ako su temena njegovih komponenti ujedno i temena pravilnog poliedra, a *pravilan u smislu strana* ako su njegove strane strane pravilnog poliedra. Na primer, dijagonale strana kocke formiraju dva suprotna tetraedra. Ovo formira sastav, Keplerovu *stella octangula*, koja je kako pravilna u smislu temena, tako pravilna u smislu strana. Njegova temena pripadaju kocki (slika 3.2.), a strane oktaedru.



Slika 3.2.

Naći ćemo za shodno da definišemo zapis sastava. Ako d različitih $\{p,q\}$ zajedno imaju temena $\{m,n\}$, njih c, ili strana $\{s,t\}$, njih e, ili i jedno i drugo, sastav obeležavamo sa

$$c\{m,n\}[d\{p,q\}] \text{ ili } [d\{p,q\}]e\{s,t\} \text{ ili } c\{m,n\}[d\{p,q\}]e\{s,t\}.$$

Jasno je da su njima suprotni sastavi

$$[d\{q,p\}]c\{n,m\} \text{ ili } e\{t,s\}[d\{q,p\}] \text{ ili } e\{t,s\}[d\{q,p\}]c\{n,m\}.$$

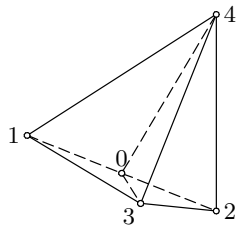
Broj temena $\{m, n\}$ i $\{p, q\}$ su u odnosu $d : c$, a broj strana $\{s, t\}$ i $\{p, q\}$ u odnosu $d : e$. Na primer, *stella octangula* se obeležava sa

$$\{4, 3\}[2\{3, 3\}]\{3, 4\}$$

(gde je $c = e = 1$). Ostale sastave obrđivaćemo kasnije.

U želji da otkrijemo tetraedarsku grupu sa alternirajućom podgrupome reda 4, posmatrajmo činjenicu da su četiri temena tetraedra ustvari četiri tačke čija su sva zajednička rastojanja jednaka.

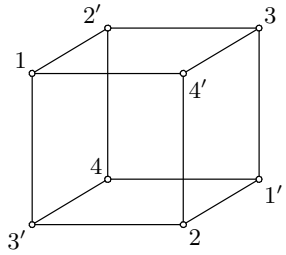
Ova činjenica uključuje sve te četiri tačke simetrično, pa možemo očekivati da svih 24 permutacije simetrične grupe budu predstavljene simetričnim operacijama tetraedra. U suštini, transpozicija (12) je prestavljena kao refleksija u odnosu na ravan 034, gde je 0 središnja tačka stranice 12 (slika 3.3).



Slika 3.3.

Ali, svaka parna permutacija, koja je proizvod dve transpozicije, može se predstaviti jednom rotacijom. Zato je tetraedarska grupa (koju smo formulisali tako da se sastoji samo od rotacija) alternirajuća grupa stepena 4.

Za stelu oktangulu, svaka simetrična operacija na bilo kom od tetraedara je takođe simetrična operacija na kocki; ali, kocka ima dodatne operacije koje zamenjuju ta dva tetraedra. Rotaciona grupa tetraedra 1234 jednako permutuje četiri dijagonale $11'$, $22'$, $33'$ i $44'$ kocke (slika 3.4.). Ali neparne permutacije ovih dijagonala se takođe pojavljuju kao rotacije; npr., $11'$ i $22'$ menjaju mesta u poluokretu oko prave određene središtima duži $12'$ i $21'$. Tako je oktaedarska grupa (koja je ujedno i grupa rotacija kocke) simetrična grupa reda 4.



Slika 3.4.

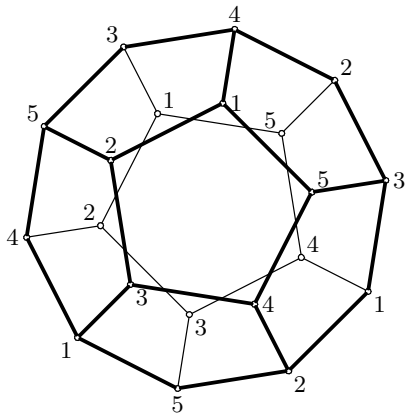
Ako su $ABCDE$ i $AEFGH$ dve dodirne stranice dodekaedra, temena B, D, F i H formiraju kvadrat, čije stranice spajaju ta četiri temena. Još više, te "etiri stranice sa svojim antipodima, čine kocku, a naizmenična temena te kocke formiraju tetraedar. Lako je primetiti da rotacije ovog tetraedra u samof sebe čine rotacije celog dodekaedra, kao i da se tetraedarska grupa pojavljuje kao podgrupa ikosaedarske grupe (kao i oktaedarske grupe). Preostale operacije ikosaedarske grupe transformišu taj tetraedar u druge istog tipa, tvoreći sastav od pet tetraedara upisanih u dodekaedar. Drugim rečima, dvadeset temena dodekaedra su raspoređena u skupove od po četiri duž pet tetraedara. Centralna inverzija transformiše ovaj sastav u drugi sastav od pet tetraedara, koji je recipročan prvom. Dva takva sastava formiraju sastav od deset tetraedara, od kojih svaki par recipročnih može da se zameni kockom. U ovom sastavu svako teme dodekaedra pripada paru tetraedara i paru kocki.

Na ovaj način dobili smo tri pravilna, u smislu temena, sastava čija temena pripadaju dodekaedru. S druge strane, dobili smo da su sastavi tetraedra takođe regularni u smislu strana, ravni njihovih strana pripadaju stranama ikosaedra. Ali ravni strana pet kocki pripadaju triakontaedru, pa je sastav recipročan njemu ravnomerno protivan i regularan, u smislu strana, sastav od pet oktaedara čija temena pripadaju ikosidodekaedruȯdgovarajući zapisi ovih sastava su

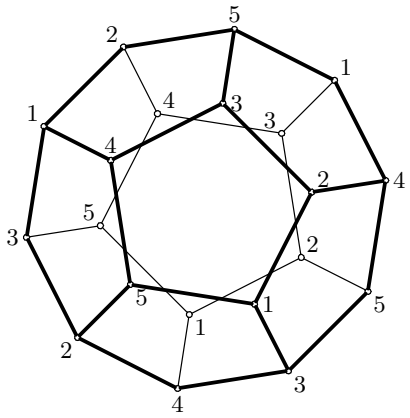
$$\{5,3\}[5\{3,3\}]\{3,5\},\ 2\{5,3\}[10\{3,3\}]2\{3,5\}$$
$$2\{5,3\}[5\{4,3\}] \text{ i } [5\{4,3\}]2\{3,5\}.$$

Veoma lepi efekti dobijaju se kada se prave modeli ovih sastava, koristeći različite boje za svaku komponentu. Bojenje pet kocki određuje obojenost triakontaedra u pet boja, tako da svaka strana, i sve četiri njoj susedne strane budu različitih boja. Ovu shemu koristio je Kovalevski.

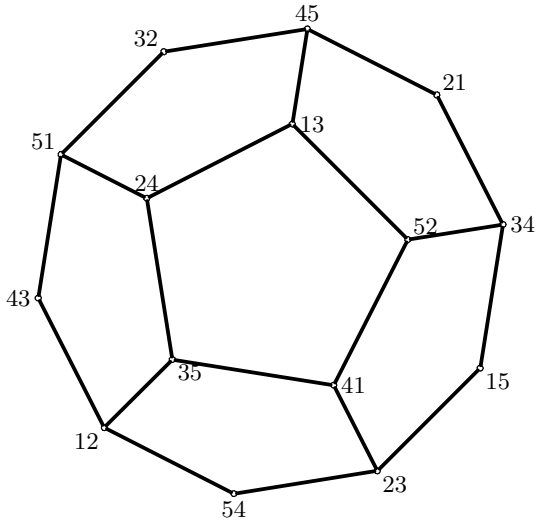
Dva ravnomerno protivna sastava od pet tetraedara mogu se istaći kao *levo* i *desno*. Oni stvaraju pogodnan opis za dvadeset temena dodekaedra (ili dvadeset strana ikosaedra). Možemo izbrojati pet tetraedara na levo sastavu (slika 3.5.); temena na desno sastavu (slika 3.6.) uzimaju iste brojeve u odnosu na centralnu inverziju. Tada su temena dodekaedra obeležena parovima 12, 21, 13, 31,..., 45, 54 na način da je ij teme i-tog tetraedra u laevu, i j-tog tetraedra u dekstru. (Zbog jednostavnosti, dodekaedar sa slike 3.7. je nacrtan kao neprozirno telo. Simbole na nevidljivim temenima je lako kompletirati,jer je ij suprotno od ji.)



Slika 3.5.



Slika 3.6.



Slika 3.7.

Svaka direktna simetrična operacija dodekaedra može se predstaviti permutacijom pet cifara; npr. permutacija (123) je trigonalna rotacija oko prečnika koji spaja naspramna temena 45 i 54, (14)(35) je digonalna rotacija oko prave koja spaja središnje tačke stranica 1345 i 3154, a (12345) je pentagonalna rotacija oko prave koja prolazi kroz središta dve naspramne strane. Pošto su ovo sve parne permutacije, dokazali smo da je ikosaedarska grupa alternirajuća grupa reda 5.

Da zaključimo: simetrične grupe reda 3 i 4 su grupe rotacija $\{3, 2\}$ i $\{3, 4\}$, a alternirajuće grupe reda 4 i 5 su grupe rotacija $\{3, 3\}$ i $\{3, 5\}$.

4.5 Izomorfizmi

Poliedar možemo apstraktno opisati tako što njegovim temenima dodelimo određene simbole, i zapišemo cikle temena koja pripadaju jednoj strani.

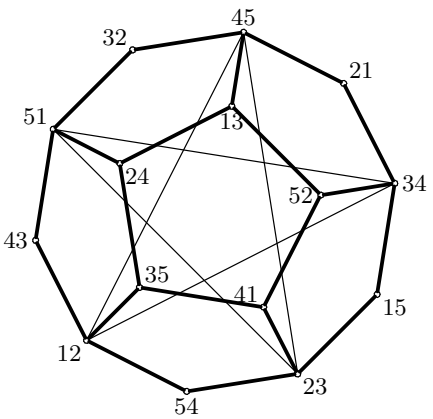
Na primer, kocku sa slike 3.4. možemo opisati sa

$$12'34',\ 2'31'4,\ 31'24',\ 1'23'4,\ 23'14',\ 3'12'4.$$

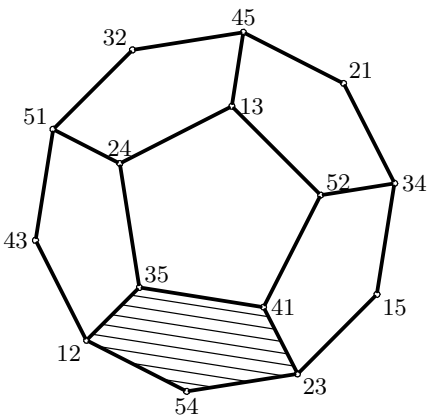
Dva poliedra koja imaju isti apstraktni opis, npr. kocku i paralelpiped, nazivamo izomorfnim. To znači da su topološki ekvivalentni, ili da formiraju istu mapu; npr. zonoedar je izomorfan sa jednakostraničnim zonoedrom. Dva izomorfna poliedra očigledno imaju isti rod, i njihovi uzajamni su takođe izomorfni.

Cikl od pet temena može biti pentagram, kao i pentagon. Takođe, $\{5,3\}$ i $\{\frac{5}{2},3\}$ imaju iste numeričke karakteristike (osim gustine), i oba su prosto povezani. Zato i nije čudno što smo otkrili da su dodekaedar i zvezdasti dodekaedar izomorfni. Ovo se najbolje vidi na slikama 6.1 i 6.2. Prvi od njih nastao je od tela sa slike 3.7. a drugi je proizišao iz njega tako što smo nekim od temena 1, 2, 3, 4, 5, recimo 4 i 5 zamenili mesta. Sa aspekta prvog dodekaedra dolazimo do $\{\frac{5}{2},3\}$ koji ima isti apstraktni opis kao i drugi dodekaedar; npr. pentagram 12 34 51 23 45 iz prvog se pojavljuje kao strana u drugom.

Videli smo da je grupa rotacija pravilnog dodekaedra alternativna grupa nad elementima 1, 2, 3, 4, 5. (Cela grupa $[3,5]$, reda 120, je dobijena od ove, pridruživanjem centralne inverzije koja zamenjuje svaki par ij sa parom ji.) Transpozicija kao što je (45) nije simetrična transformacija, iako transformiše grupu rotacija na samu sebe; npr., transformiše ikosaedarsku grupu prema *spoljnom automorfizmu*. Zanimljivo je da se ovaj automorfizam opisuje kao promena od $\{5,3\}$ ka $\{3,\frac{5}{2}\}$, i obrnuto.



Slika 6.1.



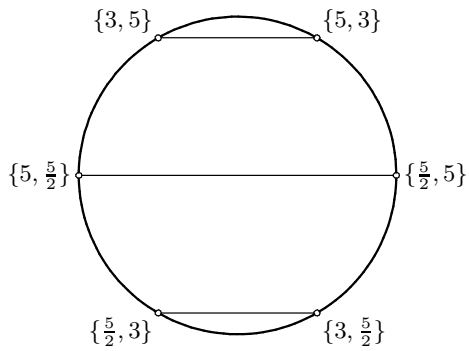
Slika 6.2

Takođe, ikosaedar $\{3,5\}$ i veliki ikosaedar $\{3,\frac{5}{2}\}$ su izomorfni; mali zvezdasti dodekaedar $\{\frac{5}{2},\}$ i veliki dodekaedar $\{5,\frac{5}{2}\}$ su takođe izomorfni. Uzastopne stranice strana ovih poliedara su naizmenične stranice $\{5,3\}$ i $\{\frac{5}{2},3\}$, tim redom. Sa druge strane, kvazi-pravilni poliedri $\left\{\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right\}$ i $\left\{\begin{smallmatrix}3\\5/2\end{smallmatrix}\right\}$ su izomorfni,

dok su $\left\{ {}^{5/2}_{5} \right\}$ ili $\left\{ {}^{5}_{5/2} \right\}$ *automorfni* u smislu da se njihovi pentagrami i pentagoni mogu zameniti bez menjanja njihovih apstraktnih opisa.

Da zaključimo: svaki pentagonalni poliedar dovodi nas do njemu izomorfnog poliedra kada se 5 i $\frac{5}{2}$ zamene sa $\frac{5}{2}$ i 5 kad god se ovi brojevi pojave u Šleflijevom simbolu. Sledi da se metričke osobine dva ovakva poliedra dobijaju jedna iz druge tako što se zamene $\tau = 2\cos\frac{\pi}{5}$ i $\tau^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$.

Slika 6.3. je shema šest pentagonalnih poliedara, poređanih u krug. Uzajamni poliedri su spojeni horizontalnim linijama, dok su izomorfni poliedri dijametralno suprotni jedni drugima.



Slika 6.3.

4.6 Koliko ima pravilnih poliedara?

Pored pet Platonovih tela i četiri Kepler-Poansoovih poliedara, postoje li i neki drugi, kao što su $\{\frac{5}{2},4\}$, $\{\frac{5}{2},\frac{5}{2}\}$, ili $\{\frac{7}{2},3\}$? Opisaćemo tri metode za odgovor na ovo pitanje.

Prva, i najočiglednija metoda, počinje dokazom da *svaki pravilan poliedar ima ista temena kao Platovo telo* (i iste ravni strana kao Platonovo telo). U tu svrhu posmatraćemo činjenicu da grupa rotacija $\{p,q\}$ mora imati osu n_q-puta rotacije kroz svako svoje teme (kao i n_p-puta rotaciju kroz centar svake strane). Kao što smo videli ranije, samo konačne grupe rotacija imaju više od jedne od više od dve 2-puta rotacije, i to su tetraedarska, oktaedarska i ikosaedarska grupa. Zbog toga grupa rotacija $\{p,q\}$ mora biti jedna od ove tri.

Pošto smo ustanovili ovo tvrđenje, okrenimo se svim *regularnim* poliedrima koji imaju temena kao Platonova tela. Pošto $\{\frac{5}{2},4\}$, $\{\frac{5}{2},\frac{5}{2}\}$ i $\{\frac{7}{2},3\}$ ne pripadaju ovim telima, ona otpadaju. Možemo početi i sa konstrukcijom takvog poliedra, ali je nikada necemo završiti. Drugim rečima, gustina je beskonačna, a grupa rotacija nije diskretna.

Slično razmatranje nam dozvoljava nam da tvrdimo da *ne postoji ni jedna pravilna zvezdasta teselacija.* U stvari, takve teselacije kao što su $\{\frac{5}{2},10\}$ ili $\{\frac{8}{3},8\}$ mogle bi imati i druge centre rotacije osim digonalnih, trigonalnih, tetragonalnih i heksagonalnih.

Ovaj metod je proizišao iz prvih razmišljanja o Platonovim telima i njihovim grupama rotacija, kada se odbije aspekt Kepler-Poansoovih tela. Ovo nam daje dva skupa poliedara različitih kategorija. Drugi metod, koji sledi, prelazi preko ovih razlika, ne dajući prednost konveksnosti; u stvari, devet poliedara se pokazuje kao $3+6$, umesto $5+4$.

Ako $\{p,q\}$ ima konačan broj ivica, njegov Petrijev poligon mora imati konačan broj strana; zbog toga, h, kao i p i q, mora biti racionalan. Umesto h, koristićemo drugi racionalan broj r, takav da je

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{h}=\frac{1}{2}.$$

Ovakva notacija omogućava nam da formulu $\cos^2\frac{\pi}{h}=\cos^2\frac{\pi}{p}+\cos^2\frac{\pi}{q}$ zapišemo kao

$$\cos^2\frac{\pi}{p}+\cos^2\frac{\pi}{q}+\cos^2\frac{\pi}{r}=1.$$

Svaki pravilan poliedar $\{p,q\}$ odgovara jednom rešenju ove jednačine racionalnim brojem većim od 2. Postoje i diedri, $\{p,2\}$ $(h=p)$ za sve racionalne vrednosti p; ali oni nisu pravilni poliedri, pa ih ne računamo u ovih devet. Postoje i ravanske teselacije, za koje je $r=2$ i $h=\infty$; ali tu ovaj metod pada u vodu jer nam ne pomaže da otkrijemo one sa beskonačnom gustinom. U stvari, prethodna jednakost je potreban, ali i očito nedovoljan uslov da $\{p,q\}$ imaju konačnu gustinu, i samo je dobra sreća razlog da ne postoje irelevantna rešenja za $r>2$.

Žordan je davno pokazao da su jednina rešenja ove jednačine

$$1+\cos\phi_1+\cos\phi_2+\cos\phi_3=0$$

$(0<\phi_i<\pi)$ kada su u pitanju uglovi samerljivi sa π, permutacije $(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ i $(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5})$. Zamenivši $\phi_1=\frac{2\pi}{p}$, $\phi_2=\frac{2\pi}{q}$ i $\phi_3=\frac{2\pi}{r}$, dobijamo, kao rešenja prethodne jednačine, tri permutacije $(3,3,4)$ i šest permutacija $(3,5,\frac{5}{2})$. One formiraju devet poliedara, i to

PE	$\{3,3\}$	$\{3,4\}$	$\{4,3\}$	$\{3,5\}$	$\{5,3\}$	$\{3,\frac{5}{2}\}$	$\{\frac{5}{2},3\}$	$\{5,\frac{5}{2}\}$	$\{\frac{5}{2},5\}$
r	4	3	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	5	5	3	3
h	4	6	6	10	10	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	6	6

Uprkos svojoj eleganciji, ovaj drugi metod ima i mana: prvo, zavisi od teške teoreme po kojoj Žordanova formula nema daljih rešenja; drugo, beskorisna je za analogne probleme sa pravilnim teselacijama u ravni. Sledeći, treći metod, kao i prvi, valjan je kako za ravanske, tako i za sferne teselacije. Štaviše, zavisi samo od enumeracije grupa generisanih refleksijama, koje je jednostavnije nego poznato obeležavanje grupa rotacija.

Razmotrimo bilo koji poliedar $\{p,q\}$, gde su p i q različiti od 2. Projektujmo njegove stranice na sferu, $(d_{p,q})$ puta, i podelimo svaki od sferičnih $\{p\}$ na n_p jednakokrakih trouglova. Podelimo sada svaki od tih jednakokrakih trouglova na dva jednaka pravougla trougla 012 gde je 0 teme, 1 središnja tačka projektovane ivice, a 2 centar projektovane strane. jasno je da su uglovi u tom trouglu $\frac{\pi}{q}$, $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{p}$, i njihove stranice su prave simetrije sferične teselacije. Simetrična grupa $\{p,q\}$ generisana je refleksijama tih stranica, i ta operacija transformiše jedan od tih trouglova u ceo skup od $4N_1$ trouglova, koji pokrivaju sferu $d_{p,q}$ puta. Drugim rečima, smatramo da grupa dejstvuje na Rimanovoj površi; ako su p i q razlomci, postoji ogranak reda d_p-1 ili d_q-1, kad god se pojavi ugao od $\frac{\pi}{p}$ ili $\frac{\pi}{q}$. U ovom smislu, trougao je osnovna oblast za grupu kad god je $d_{p,q}>1$. Ista grupa, posmatrana iz ugla jednolisne sfere, generisana je refleksijama na stranicama manjeg trougla čiji su uglovi višestrukosti od π; u stvari, to mora biti jedna od grupa

$$[2,n],\ [3,3],\ [3,4],\ [3,5],$$

recimo $[m,n]$. Ali $4N_1$ malih trouglova (sa uglovima $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{n}$) pokrivaju sferu samo jednom, dok ih isti broj većih trouglova (sa uglovima $\frac{\pi}{q}$, $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{p}$) pokrivaju tu istu sferu $d_{p,q}$ puta. Otuda je svaki veliki trougao seciran (*virtuelnim ogledalima*) na tačno $d_{p,q}$ manjih trouglova.

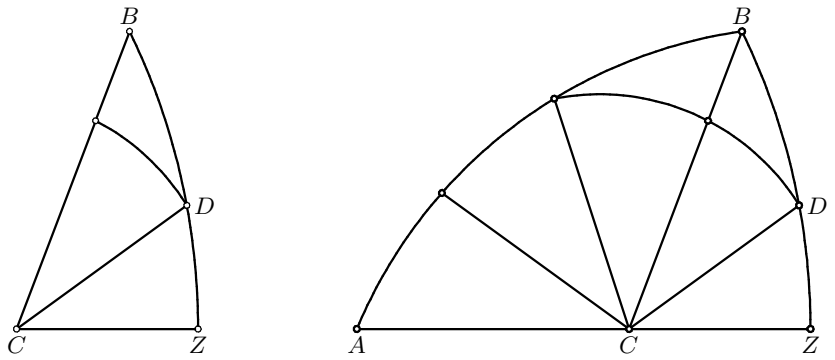
Obeležimo za $(x\ \ y\ \ z)$ trougao sa uglovima $\frac{\pi}{x}$, $\frac{\pi}{y}$ i $\frac{\pi}{z}$. U ovom zapisu, trougao $(p\ \ 2\ \ q)$ izdeljen je na $d_{p,q}$ trouglova $(m\ \ 2\ \ n)$, te pišemo

$$(p\ \ 2\ \ q) = d_{p,q}(m\ \ 2\ \ n).$$

Dva slučaja

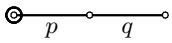
$$(\tfrac{5}{2}\ \ 2\ \ 5) = 3(3\ \ 2\ \ 5) \text{ i } (\tfrac{5}{2}\ \ 2\ \ 3) = 7(3\ \ 2\ \ 5),$$

prikazani su na slici 6.4. To je najlakši način da se vidi da su gustine $\{\frac{5}{2},5\}$ i $\{\frac{5}{2},3\}$, 3 i 7.



Slika 6.4.

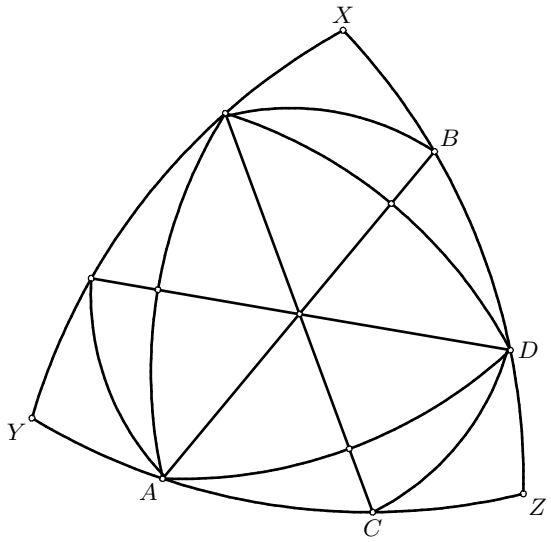
Umesto izdvajanja trougla $(p\ \ 2\ \ q)$ iz datog poliedra $\{p, q\}$, isto tako možemo da konstruišemo poliedar (Vitofovom[31] konstrukcijom). Tada $\{p, q\}$ obeležavamo sa



čak i kada su p ili q razlomci. Ostaje nam da vidimo koji razlomci mogu biti p i q.

Pošto ponavljanja jednog od manjih uglova u malom trouglu $(m\ \ 2\ \ n)$ mora da se ukopi u u svaki od uglova velikog trougla $(p\ \ 2\ \ q)$, uglovi π/p i π/q moraju biti višestrukosti bilo od π/m bilo od π/n. Drugim rečima, imenioci racionalnih brojeva p i q moraju biti delitelji bilo od m bilo od n. Sada, ako su m i n veći od 2, jedan od njih mora biti 3, a drugi neki od brojeva 3, 4 ili 5. Otuda, pošto po strani ostavljamo diedar $\{p, 2\}$, koji se evidentno pojavljuje za svaki poligon p, jednini mogući pravilni zvezdasti poliedri mogu biti $\{\frac{5}{2}, 5\}$, $\{\frac{5}{2}, 3\}$, njima recipročni poliedri, i $\{\frac{5}{2}, \frac{5}{5}\}$. Poslednja mogućnost otpada, jer bi u tom slučaju središnje tačke njegovih ivica bile temena $\{{}^{5/2}_{5/2}\} = \{\frac{5}{2}, 4\}$. Drugim rečima, mogli bi smo bisekcijom pravouglog trougla $(\frac{5}{2}\ \ 2\ \ \frac{5}{2})$ dobiti trougao $(\frac{5}{2}\ \ 2\ \ 4)$, što je nedopustivo.

Zašto je slučaj $\{\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\}$ nemoguć može se videti i iz sledećeg.



Slika 6.5.

Petnaest simetrija pravih (ili ravanskih simetrija) ikosaedra dele sferu na 120 trouglova $(3\ \ 2\ \ 5)$, i petnaest njih formira oktant (ili tropravougaoni trougao) XYZ, kao na slici 6.5. Ako bilo koji skup trouglova $(3\ \ 2\ \ 5)$ formira trougao $(p\ \ 2\ \ q)$, gde su p i q racionalni brojevi veći od 2, možemo izabrati dve

[31] *Viljem Abraham Vitof, (1865. - 1939.),* holandski matematičar.

normalne stranice trougla (p 2 q) koje leže duž ZX i ZY. Trouglovi ABZ i BCZ sa slike 6.4. su jednine mogućnosti. Zbog toga, tri luka AB, BC i CD, njihove slike reflekcijama u odnosu na YZ, ZX i XY, i ostali lukovi, čine svih petnaest velikih krugova.

Isti metod može se primeniti i za ravanske teselacije $\{p, q\}$, koristeći ravanske umestyo sfernih trouglova. Ovde grupa može biti samo $[3, 6]$ ili $[4, 4]$, pa p i q moraju biti neki od brojeva 3, 4 ili 6. Tako ni jedan od brojeva p iq ne može biti razlomak, i opet vidimo da ne postoje pravilne zvezdaste teselacije.

Možemo koristiti sličan argument da dokažemo da *ne postoje pravilna zvezdasta saća.* Ali jednostavnije je uvideti da, ako saće $\{p, q, r\}$ ima za ćelije $\{p, q\}$, i figure temena $\{q, r\}$, onda je diedralni ugao ćelije $\frac{2\pi}{r}$, gde je $r = 3$, 4, 5 ili $\frac{5}{2}$. Od svih pravilnih poliedara, jedino kocka ima dakav diedralni ugao. Dakle, $\{p, q, r\}$ mora biti $\{3, 4, 3\}$.

4.7 Grupa simetrija opšteg pravilnog politopa

Ako nam je data pozicija jedne ćelije i jedna figura temena, možemo izgraditi ceo politop, ćeliju po ćeliju, na određeni način. Različite ćelije nisu samo ravnopravne, nego i ekvivalentne; npr. postoji grupa simetrija koja je tranzitivna na ćelijama, i isto tako tranzitivna na temenima. U suštini, simetrična grupa pravilnog simpleksa a_n je simetrična grupa reda $n + 1$, naime, grupa svih permutacija $n + 1$ temena (ili $n + 1$ ćelija).

Svaki pravilan politop ima svoj centar, O_n, oko koga možemo nacrtati sferu prečnika R_j koja sadrži centre svih delova Π_j, za svaku vrednost parametra j od 0 do $n - 1$. Prva i poslednja od ovih sfera su svakako spolja opisana i upisana sfera.

Nastavimo dalje, sa opisom *jednostavne razloženosti* pravilnog politopa, počevši od jednodimenzionog slučaja. Duž Π_1 podeljena je na dva jednaka dela svojim centrom O_1. Poligon $\Pi_2 = \{p\}$ podeljen je svojim pravama simetrije na $2p$ pravouglih trouglova, koji spajaju centar O_2 sa jednostavno podeljenim stranicama. Poliedar $\Pi_3 = \{p, q\}$ podeljen je ravnima simetrije na g pravouganih tetraedara, koji spajaju centar O_3 sa jednostavno razloženim stranama. Analogno, opšti pravilan politop Π_n razložen je na više podudarnih simpleksa (specijalnog tipa) koji spajaju centar O_n sa jednostavno razloženim ćelijama. Tipičan simpleks je $O_0O_1O_2...O_n$, gde je O_j centar ćelije politopa Π_{j+1}čiji je centar O_{j+1} ($j = 0, 1, ..., n - 1$). Drugim rečima, O_{n-1} je centar ćelije Π_{n-1}, O_{n-2} je centar ćelije te ćelije,..., O_1 se središnja tačka stranice, a O_0 kraj te stranice. Ivica je tako podeljena na $N_{10} = 2$ duži, ravan strane $\{p\}$ na $N_{21}N_{10}$ trouglova, poliedar na $N_{32}N_{21}N_{10}$ tetraedara, a ceo politop $\{p, q, ..., v, w\}$ na

$$g_{p,q,...,v,w} = N_{n-1}N_{n-1,n-2}...N_{21}N_{10}$$

simpleksa. (Element Π_j pripada N_{jk} Π_k-ova, za svako $k > j$, i sadrži N_{jk} Π_k-ova za $k < j$.)

Broj $g_{p,q,...,v,w}$ je jako bitna odlika politopa $\{p, q, ..., v, w\}$. U stvari, to je red simetrične grupe $[p, q, ..., v, w]$. Ovu indukciju smo dokazali, počevši od činjenice da je red grupe simetrija jednodimenzionog politopa $\{\}$ $N_0 = 2$. Pretpostavimo odgovarajući rezultat u $n-1$ dimenzija, tako da grupa simetrija ćelije $\{p, q, ..., v\}$ bude reda

$$\begin{aligned} g_{p,q,...,v} &= N_{n-1,n-2}...N_{21}N_{10} \\ &= g_{p,q,...v,w}/N_{n-1} \end{aligned}$$

U simetričnoj grupi celog politopa, ona se pojavljuje kao podgrupa reda N_{n-1}, tj. podgrupa koja O_{n-1} ostavlja invarijantnim. (N_{n-1} koseta odgovara N_{n-1} ćeliji.). Otuda je $g_{p,q,...,v,w}$ red cele grupe simetrija politopa.

Drugačiji izraz za ovaj broj dobija se kada se krene od podgrupe reda N_0 koja teme O_0 ostavlja invarijantnim. To znači da je red grupe simetrija figure temena $\{q, ..., v, w\}$ jednak

$$g_{q,...,v,w} = g_{p,q,...,v,w}/N_0.$$

Ponavljanjem ovog postupka dobijamo da je

$$g_{p,q,...,v,w} = N_0N_{01}N_{12}...N_{n-2,n-1},$$

gde je naravno $N_{n-2,n-1} = 2$.

Kao što figura temena $\{q, r, ..., v, w\}$ opisuje način na koji teme okruženo, tako druga figura temena $\{r, ..., v, w\}$ (koja je figura temena figure temena) opisuje način na koji je okružena *ivica*. Tako je podgrupa ciklične grupe $[p, q, r, ..., v, w]$ koja u potpunosti ostavlja ivicu invarijantnom reda $g_{r,...,v,w}$. Takođe postoji i podgrupa reda 2 koja zamenjuje krajeve stranice (tj. podgrupa izomorfna sa simetrijom same te stranice). Cela grupa koja teme O_1 ostavlja invarijantnim je direktan proizvod ove dve. Otuda je

$$2g_{r,...,v,w} = g_{p,q,r,...,v,w}/N_1.$$

Opšti slučaj je sada jasan: broj elemenata $\{p, ..., r\}$ pravilnog politopa $\{p, ..., r, s, t, u, ..., w\}$ je

$$\frac{g_{p,...,r,s,t,u,...,w}}{g_{p,...,r}g_{u,...,w}}.$$

Zato je podgrupa koja ostavlja ceo jedan takav element invarijantnim direktan proizvod

$$[p, ..., r] \times [u, ..., w],$$

gde je prvi činilac izomorfan sa grupom simetrija tog elementa, dok drugi taj element ostavlja invarijantnim. U slučaju a_n, g-ovi su faktorijeli, i zbog toga je

$$N_k = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!},$$

u saglasnosti sa $N_k = \binom{n+1}{k+1}$.

Kada je $n = 2$, 3 ili 4, imamo redom:

$$N_1 = N_0 = g_p/2, \text{ gde je } g_p = 2p,$$
$$N_2 = \frac{g_{p,q}}{g_p},\ N_1 = \frac{g_{p,q}}{4} \text{ i } N_0 = \frac{g_{p,q}}{g_q}, \text{ gde je } g_{p,q} = \frac{4}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}},$$

i

$$N_3 = \frac{g_{p,q,r}}{g_{p,q}},\ N_2 = \frac{g_{p,q,r}}{2g_p},\ N_1 = \frac{g_{p,q,r}}{g_q} \text{ i } N_0 = \frac{g_{p,q,r}}{g_{q,r}}.$$

Ne postoji jednostavan način da izrazimo $g_{p,q,r}$ u funkciji od p, q i r.

Trodimenzionalni slučaj možemo zapisati i kao

$$N_2 : N_1 : N_0 : 2 = \frac{1}{p} : \frac{1}{2} : \frac{1}{q} : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2},$$

uz saglasnost sa Ojlerovom formulom $N_2 + N_0 - N_1 = 2$. Zamenivši

$$\frac{1}{N_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$$

u ćeliju i figuru temena četvorodimenzionog politopa $\{p, q, r\}$, dobijamo

$$\frac{1}{N_{31}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \text{ i } \frac{1}{N_{02}} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2}.$$

Pošto je $N_{13} = r = N_{12}$ i $N_{21} = p = N_{20}$, možemo dokazati da je

$$N_3 N_{31} = N_1 r = N_2 p = N_0 N_{02},$$

odakle je

$$N_3 : N_2 : N_1 : N_0 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 2 : \frac{1}{p} : \frac{1}{q} : \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2}.$$

Odatle sledi da je

$$N_3 + N_1 = N_2 + N_0,$$

ali je ova jednačina homogena, i ne omogućava nam da izrazimo $g_{p,q,r}$.

U stvari, najpraktičniji način da odredimo N_0 ili N_3 (a odatle i $g_{p,q,r}$) je da ustvari prebrojimo temena ili ćelije svakog četvorodimenzionog politopa. Ovo nije neki mukotrpan posao, ako ih brojimo u dovoljno velikim serijama. Sa druge strane, matematički je pravilnije da ih izračunamo nego da ih prebrojimo.

Grupe simetrija pravilnih simpleksa i krstastih politopa može se razmatrati odvojeno od ovoga. Pošto je grupa simetrija α_n ili $\{3^{n-1}\}$ reda $n + 1$, odatle je

$$g_{3^{n-1}} = (n + 1)!.$$

Pošto β_n ili $\{3^{n-2}, 4\}$ ima 2^n ćelija α_{n-1}, sledi da je

$$g_{3^{n-2},4} = 2^n g_{3^{n-2}} = 2^n n!.$$

U stvari, grupa simetrija β_n (ili γ_n) je grupa simetrija kostura ortogonalnih Dekartovskih osa, i kao takva, sastoji se iz 2^n mogućih promena znaka n koordinata, kombinovanih sa $n!$ permutacija osa.

4.8 Nabrajanje mogućih pravilnih figura

Kada je $n = 4$ Šleflijev simbol je $\{p, q, r\}$, gde i $\{p, q\}$ i $\{q, r\}$ moraju biti neka od Platonovih tela

$$\{3,3\},\ \{3,4\},\ \{4,3\},\ \{5,3\},\ \{3,5\}.$$

Po kriterijumu

$$\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r} \geq \cos\frac{\pi}{q}$$

dolazimo do zaključka da ti politopi mogu biti

$$\{3,3,3\},\ \{3,3,4\},\ \{4,3,3\},\ \{3,4,3\},\ \{3,3,5\} \text{ i } \{5,3,3\},$$

kao i jedno saće $\{4,3,4\}$, dok sa liste otpadaju

$$\{3,5,3\},\ \{4,3,5\},\ \{5,3,4\} \text{ i } \{5,3,5\}.$$

Kriterijum

$$\frac{\cos^2\frac{\pi}{q}}{\sin^2\frac{\pi}{p}} + \frac{\cos^2\frac{\pi}{r}}{\sin^2\frac{\pi}{s}} \leq 1$$

dozvoljava postojanje sledećih politopa

$$\alpha_5 = \{3,3,3,3\},\ \beta_5 = \{3,3,3,4\} \text{ i } \gamma_5 = \{4,3,3,3\}$$

kao i tri saća

$$\{3,3,4,3\},\ \{3,4,3,3\} \text{ i } \{4,3,3,4\}$$

(neka poslednje bude δ_5), ali odbacuje

$$\{3,3,3,5\},\ \{5,3,3,3\},\ \{4,3,3,5\},\ \{5,3,3,4\} \text{ i } \{5,3,3,5\}.$$

Pošto su u pet dimenzija jednini pravi politopi α_5, β_5 i γ_5, indukcijom sledi da bi jedini pravi politopi u više od pet dimenzija bili α_n, β_n i γ_n, kao i jedino pravilno saće δ_{n+1}.

Kako je $\Delta_{p,q,\ldots,v,w} \geq 0$ samo potreban uslov, ostaje nam da dokažemo da četvoro-dimenzionalni politopi $\{3,4,3\}$, $\{3,3,5\}$, $\{5,3,3\}$, kao i saća $\{3,3,4,3\}$ i $\{3,4,3,3\}$ stvarno postoje. Ovo se obično radi tako što se ti politopi grade ćeliju po ćeliju, što je izuzetno naporan posao u slučaju $\{3,3,5\}$ ili $\{5,3,3\}$.

Literatura

[1] Dragomir Lopandić, Geometrija, Naučna knjiga, Beograd 1980.

[2] Zoran Lučić, Euklidska i hiperbolička geometrija, Matematički fakultet, Beograd 1994.

[3] Zoran Lučić, Ogledi iz istorije anticke geometrije, JP Službeni glasnik, Beograd 2009.

[4] Dragomir Lopandić, Geometrija, Naučna knjiga, Beograd 1988.

[5] www.wikipedia.com

[6] Ljiljana S. Jovašević, Magistarski rad *Grupe simetrija ravanskih i prostornih likova sa primenama u srednjoškolskoj nastavi matematike*

[7] Euklid, Elementi, Naučna knjiga, Beograd 1957.

[8] H.S.M. Coxeter, Regular polytopes, Methuen and Co. 1948.

[9] H.S.M. Coxeter, Introduction to geometry, John Wileu and Sons Inc. 1969.

[10] B.L. Van der Waerden, Science awakening, Oxford University Press 1961.

[11] sir Thomas Heath, History of Greek math I, Dover Publications 1981.

[12] David Eugene Smith, History of matematics, Ginn and company 1923