

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

BRANKO D. VULIĆEVIĆ

O METODAMA ESKALACIJE I INTERPOLACIJE ZA REŠAVANJE
PROBLEMA KARAKTERISTIČNIH VREDNOSTI MATRICA

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

BEOGRAD 1972

U V O D

Rešavanje problema karakterističnih vrednosti matrica zauzima jedno od najvažnijih mesta u numeričkim metodama uopšte, a posebno u numeričkim metodama linearne algebre.

Za rešavanje toga problema postoji veliki broj različitih numeričkih metoda (što se može videti na pr. u /4/, /18/, /26/, /30/, /31/, /33/, /36/, /37/). I pored toga ovaj problem i dalje privlači na sebe pažnju matematičara i specijalista iz najrazličitijih oblasti. To se objašnjava njegovim vanredno širokim primenama u nauci i tehnici.

Sve metode za rešavanje problema karakterističnih vrednosti, sem metode U.J.J. Le Verrier-a (1840. god.) koja se odnosi na razvoj karakteristične determinante, nastale su, uglavnom, tridesetih godina XX-og veka i kasnije. Te nove metode prvenstveno su se odnosile na razvoj karakteristične determinante i u osnovi su imale za glavni cilj smanjivanje broja aritmetičkih operacija.

Pojava prve monografije posvećene numeričkim metodama linearne algebre od V.N. Faddeeve iz 1952. godine predstavlja trenutak od prvorazredne važnosti za razvoj ovih metoda /31/.

Uvođenje elektronskih računskih mašina u praksu računanja i njihov stalni i brzi razvoj omogućio je rešavanje zadataka linearne algebre sa matricama znatno većeg reda nego ranije. Ipak, brzo je primećeno da su se pojavili novi problemi u vezi sa time. Sa jedne strane mnoge ranije poznate metode nisu se mogle neposredno primeniti za automatska mašinska računanja, a sa druge strane pojavila se nestabilnost algoritama sa obzirom na greške zaokrugljivanja međurezultata. Od toga vremena i počinje nova etapa u razvoju numeričkih metoda linearne algebre.

II

Predmet ovoga rada su metode eskalacije i interpolacije za rešavanje problema karakterističnih vrednosti matrica, kao i uopštenog problema karakterističnih vrednosti matrica.

Rad se sastoji iz četiri glave. Prva glava sadrži postavku problema karakterističnih vrednosti matrica, kao i uopštenog problema karakterističnih vrednosti i neke važnije teoreme koje se odnose na te probleme. U drugoj glavi data je definicija potpunog i delimičnog problema karakterističnih vrednosti matrica, zatim metoda eskalacije i metoda interpolacije, a posebno se razmatra metoda kvadratne interpolacije. Treća glava sadrži metode središne eskalacije za rešavanje problema karakterističnih vrednosti i uopštenog problema karakterističnih vrednosti matrica. U četvrtoj glavi razmatra se problem karakterističnih vrednosti nekih matrica specijalnog oblika, koji je uglavnom sadržan u radu B.D. Vulićevića i V.N. Kublanovske /7/, kao i neka trouglasta razlaganja matrica (videti Đ. Kurepa /15/), koja takođe omogućavaju primene metoda interpolacije.

Ovaj rad je proistekao kao rezultat mojeg rada u Matematičkom institutu im. V.A. Steklova u Lenjingradu, gde sam bio na specijalizaciji (od IX. 1969. do VII. 1970.), zatim radova koje sam u tom vremenu objavio /5/, /7/, kao i mojeg kasnijeg rada.

G L A V A I

KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI I KARAKTERISTIČNI VEKTORI MATRICE

(POSTAVKA PROBLEMA I NEKE VAŽNIJE TEOREME)

1.1. KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI MATRICE

Algebarski problem karakterističnih vrednosti /30/ sastoji se u određivanju onih vrednosti λ , za koje sistem od n homogenih linearnih algebarskih jednačina sa n nepoznatih

$$(A - \lambda I)X = 0 \quad (1.1.1)$$

ima netrivialno rešenje. Za proizvoljno λ taj sistem ima samo rešenje $X = 0$. Iz opšte teorije saglasnih linearnih algebarskih jednačina, poznato je da netrivialno rešenje sistema (1.1.1) postoji ako i samo ako je matrica $(A - \lambda I)$ singularna, t.j. kada je

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (1.1.2)$$

ili

$$f(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (1.1.3)$$

Jednačina (1.1.3) je algebarska, stepena n po $\lambda/2/$

može nalaziti nula samo ako je ta matrica singularna.

Zbir svih elemenata glavne dijagonale kvadratne matrice

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

naziva se trag matrice i obeležava se sa

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii} .$$

Skup svih karakterističnih vrednosti λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) naziva se spektar matrice.

1.2. KARAKTERISTIČNI VEKTORI MATRICE

Realni (ili kompleksni) vektori

$$X_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})^T$$

koji zadovoljavaju jednačine

$$(A - \lambda_i I)X_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.2.1)$$

nazivaju se karakteristični vektori matrice A.

Svakoj karakterističnoj vrednosti λ odgovara, u krajnjem slučaju, bar jedno netrivialno rešenje - karakteristični vektor - X. Ako je rang matrice $(A - \lambda I)$ manji od $(n-1)$, tada postoje bar dva linearno nezavisna vektora koji zadovoljavaju jednačinu (1.1.1), jer je broj linearno nezavisnih rešenja homogenog sistema jednačina jednak $n - r$, gde je r rang matrice koeficijenata sistema, /17/, /28/.

Očigledno je, ako je X rešenje jednačine (1.1.1), da je onda i kX (k - proizvoljna realna konstanta) takođe rešenje te jednačine, zbog toga što je i za $\text{rang}(A - \lambda I) = n - 1$, karakteristični vektor, koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ , određen je sa tačnošću do na proizvoljan množilac. Taj množilac se bira (kada je to potrebno) tako da karakteristični vektor ima željene numeričke osobine. Takvi vektori se nazivaju normirani vektori.

1.3. NEKI STAVOVI O KARAKTERISTIČNIM VREDNOSTIMA I KARAKTERISTIČNIM VEKTORIMA

Iz

$$AX = \lambda X \quad (1.3.1)$$

neposredno sledi da ako je karakteristična vrednost realne matrice kompleksna, biće kompleksne i koordinate njemu odgovarajućeg karakterističnog vektora.

Vektor koji ima konjugovano-kompleksne koordinate sa karakterističnim vektorom realne matrice, karakteristični je vektor i odgovara konjugovano-kompleksnoj karakterističnoj vrednosti te iste matrice. To sledi iz (1.3.1) i iz teoreme 1.

Teorema 1. Polinomi koji imaju konjugovano-kompleksne koeficijente imaju konjugovano-kompleksne korene.

Dokaz. Neka je x_0 koren kompleksnog polinoma $f(x)$, tada je

$$f(x_0) = a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_n. \quad (1.3.2)$$

Kako je za x_k kompleksno $|21|$, $|23|$

$$\overline{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)} = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k, \quad \overline{\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)} = \prod_{k=1}^n \bar{x}_k,$$

to iz (1.3.2) sledi

$$\overline{f(x_0)} = \bar{a}_0 \bar{x}_0^n + \bar{a}_1 \bar{x}_0^{n-1} + \dots + \bar{a}_n = \bar{0},$$

što i dokazuje teoremu.

Posledica. Ako realni polinom ima imaginaran koren reda k , tada je i \bar{x} njegov koren istog reda.

Teorema 2. Karakteristični vektori koji odgovaraju međusobno različitim karakterističnim vrednostima linearno su nezavisni.

Dokaz. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ međusobno različite karakteristične vrednosti matrice A i X_1, X_2, \dots, X_k njima odgovarajući karakteristični vektori. Bez narušavanja opštosti može se smatrati da su vektori X_1, X_2, \dots, X_j , ($j < k$), linearno nezavisni i da su vektori $X_{j+1}, X_{j+2}, \dots, X_k$ njihove linearne kombinacije. Neka je, na pr.,

$$X_k = \sum_{i=1}^j a_i X_i . \quad (1.3.3)$$

Množenjem (1.3.3) sa A , sa obzirom da je $AX_i = \lambda_i X_i$, dobija se

$$AX_k = \sum_{i=1}^j a_i AX_i = \sum_{i=1}^j a_i \lambda_i X_i . \quad (1.3.4)$$

Kako je

$$AX_k = \lambda_k X_k = \sum_{i=1}^j a_i \lambda_k X_i , \quad (1.3.5)$$

to je iz (1.3.4) i (1.3.5)

$$\sum_{i=1}^j (\lambda_k - \lambda_i) a_i X_i = 0 . \quad (1.3.6)$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora X_i , ($i = 1, 2, \dots, j$), svi koeficijenti u (1.3.6) $(\lambda_k - \lambda_i) a_i$ moraju biti jednaki nuli, ali pošto je po pretpostavci $\lambda_k \neq \lambda_i$, ($i = 1, 2, \dots, j$), to je $a_i = 0$, što povlači $X_k = 0$, a to je nemoguće, jer je X_k karakteristični vektor. Time je dokazano tvrđenje da su vektori X_1, X_2, \dots, X_k linearno nezavisni.

Teorema 3. Dve uzajamno transponovane matrice imaju identične karakteristične polinome.

Dokaz.

$$\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I) ,$$

jer determinanta ne menja vrednost ako vrste zamene mesta sa kolonama ne menjajući im poredak /28/.

Posledica. Dve uzajamno transponovane matrice imaju jednake spektre karakterističnih vrednosti.

Teorema 4. Karakteristični vektori X_i i Y_j koji odgovaraju karakterističnim vrednostima λ_i i $\bar{\lambda}_j$ dva međusobno konjugovana linearna operatora \mathcal{A} i \mathcal{A}^* ortogonalni su za $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Dokaz. Operator \mathcal{A}^* je konjugovani operator linearnog operatora \mathcal{A} ako važi jednakost

$$(\mathcal{A} X_i, Y_j) = (X_i, \mathcal{A}^* Y_j) \quad (1.3.7)$$

/1/, odakle je

$$(\mathcal{A} X_i, Y_j) = (X_i, \mathcal{A}^* Y_j) = (X_i, \bar{\lambda}_j Y_j) = \lambda_j (X_i, Y_j). \quad (1.3.8)$$

Sa druge strane je skalarni proizvod

$$(\mathcal{A} X_i, Y_j) = (\lambda_i X_i, Y_j) = \lambda_i (X_i, Y_j). \quad (1.3.9)$$

Iz (1.3.8) i (1.3.9) $(\lambda_i - \lambda_j)(X_i, Y_j) = 0$, a po pretpostavci je $\lambda_i \neq \lambda_j$, te sledi da je $(X_i, Y_j) = 0$, što je i trebalo dokazati.

Posledica. U slučaju da su sve karakteristične vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ operatora \mathcal{A} različite, to za karakteristične vektore X_1, X_2, \dots, X_n i Y_1, Y_2, \dots, Y_n operatora \mathcal{A} i \mathcal{A}^* postoji (n^2-n) relacija ortogonalnosti, t.j.

$$(X_i, Y_j) = 0 \text{ za } i \neq j.$$

Za simetrične matrice uslovi ortogonalnosti se bitno uprošćavaju, jer važi

Teorema 5. Karakteristične vrednosti Hermite-ove matrice su realne.

Ako je $A^* = A$, gde je $A^* = \overline{(A^T)} = (\bar{A})^T$, tada je matrica A Hermite-ova /20/.

Za Hermite-ove matrice je $(AX, X) = (X, A^*X)$.

Dokaz teoreme 5. Neka je λ karakteristična vrednost a X karakteristični vektor Hermite-ove matrice A . Tada je

$$\lambda(X, X) = (\lambda X, X) = (AX, X) = (X, A^*X) = (X, AX) = (X, \lambda X) = \bar{\lambda}(X, X),$$

odavde je zbog $X \neq 0$, $\lambda = \bar{\lambda}$, t.j. λ je realno.

Posledica. Karakteristične vrednosti realne simetrične matrice su realne (jer je realna simetrična matrica Hermite-ova).

1.4. NORMIRANJE KARAKTERISTIČNIH VEKTORA OPERATORA

Neka su sve karakteristične vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ operatora \mathcal{A} različite i X_1, X_2, \dots, X_n njima odgovarajući karakteristični vektori. Operatori \mathcal{A} i \mathcal{A}^* imaju konjugovano kompleksne karakteristične vrednosti (teorema 1.). Neka su Y_1, Y_2, \dots, Y_n karakteristični vektori operatora \mathcal{A}^* , pri čemu je numeracija izabrana tako da X_i i Y_i odgovaraju kompleksno konjugovanim karakterističnim vrednostima. U teoremi 4. je dokazano da je $(X_i, Y_j) = 0$ za $i \neq j$. Važnu osobinu karakterističnih vektora daje

Teorema 6. Ako se karakteristični vektori Y_1, Y_2, \dots, Y_n izaberu na bilo koji način (sa tačnošću do realnog množioca) tada se vektori X_1, X_2, \dots, X_n mogu normirati tako da je $(X_i, Y_i) = 1$.

Dokaz. Vektori X_1, X_2, \dots, X_n su linearno nezavisni (teorema 2.) i, prema tome, čine bazu vektorskog prostora. Razložimo Y_i po toj bazi:

$$Y_i = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \dots + \gamma_n X_n .$$

Iz skalarnog proizvoda (Y_i, Y_i) dobija se

$$(Y_i, Y_i) = \gamma_1 (X_1, Y_i) + \gamma_2 (X_2, Y_i) + \dots + \gamma_i (X_i, Y_i) + \dots \\ \dots + \gamma_n (X_n, Y_i) = \gamma_i (X_i, Y_i),$$

odakle je $(X_i, Y_i) = k_i \neq 0$, jer je $(Y_i, Y_i) > 0$.

Ako se umesto vektora X_1, X_2, \dots, X_n uzmu vektori

$\frac{1}{k_1} X_1, \frac{1}{k_2} X_2, \dots, \frac{1}{k_n} X_n$ dobiće se traženo normiranje,

zaista

$$\left(\frac{1}{k_i} X_i, Y_i\right) = \frac{1}{k_i} (X_i, Y_i) = 1 .$$

1.5. DVE GRUPE RELACIJA ORTOGONALNOSTI I NORMIRANJA KARAKTERISTIČNIH VEKTORA MATRICE

Neka su sve karakteristične vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ matrice A različite i neka su X_1, X_2, \dots, X_n njima odgovarajući karakteristični vektori. Konjugovano transponovana matrica A^* matrice A ima karakteristične vrednosti konjugovano kompleksne karakterističnim vrednostima matrice A (teorema 1.). Neka su Y_1, Y_2, \dots, Y_n karakteristični vektori matrice A^* normirani na način kako je to pokazano u (1.4.)

Uočimo matrice

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} .$$

Kolone matrice X i Y su komponente karakterističnih vektora matrice A i A^* redom.

Ranije izvedene relacije ortogonalnosti (teorema 4.) i normiranja (1.4.) napisane u koordinatnom obliku imaju vid (prva grupa relacija ortogonalnosti i normiranja):

$$\sum_{k=1}^n x_{ki} \bar{y}_{kj} = \delta_{ij} ,$$

gde je δ_{ij} Kronecker-ov simbol $(\delta_{ij} = \begin{matrix} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{matrix})$, što je ekvivalentno matričnoj jednakosti

$$Y^*X = I , \quad (1.5.1)$$

gde je Y^* konjugovano transponovana matrica matrice Y . Primećimo da se i -ta vrsta matrice Y^* sastoji od komponentata karakterističnog vektora matrice A^T (transponovane sa A) koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ_i .

Iz (1.5.1) sledi da su Y^* i X uzajamno inverzne matrice, odakle se dobija (druga grupa relacija ortogonalnosti i normiranja):

$$XY^* = I ,$$

t.j.

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} \bar{y}_{jk} = \delta_{ij} .$$

Primedba. Ako su karakteristične vrednosti matrice višestruke ali svakoj karakterističnoj vrednosti odgovara toliko karakterističnih linearno nezavisnih vektora kolika je njegova višestrukost navedena svojstva karakterističnih vektora ostaju u važnosti /31/.

1.6. SLIČNE MATRICE

Matrica B je slična matrici A ako postoji takva nesingularna matrica C da je

$$B = C^{-1}AC . \quad (1.6.1)$$

Za matricu B, koja je dobijena na taj način kaže se da je dobijena sličnom transformacijom.

Teorema 7. Slične matrice imaju jednake determinante i jednake tragove.

Dokaz. Iz (1.6.1) sledi

$$\det B = \det(C^{-1}AC) ,$$

a kako je determinanta proizvoda matrica jednaka proizvodu determinanata tih matrica (videti na pr. /16/), to je

$$\det B = \det C^{-1} \det A \det C ,$$

odakle i sledi tvrđenje prvog dela teoreme.

Za dokaz drugog dela teoreme označimo proizvod $C^{-1}A$ sa F, pa zbog asocijativnosti matričnog množenja dobija se iz (1.6.1)

$$\operatorname{tr} C^{-1}AC = \operatorname{tr}(C^{-1}A)C = \operatorname{tr} FC .$$

Kako je $\operatorname{tr} FC = \operatorname{tr} CF$ za bilo koje dve kvadratne matrice istog reda, /2/, to je

$$\operatorname{tr} C^{-1}AC = \operatorname{tr} CF = \operatorname{tr} CC^{-1}A = \operatorname{tr} A ,$$

što je i trebalo dokazati.

Teorema 8. Slične matrice imaju identične karakteristične polinome $f(\lambda)$.

Dokaz. Neka je matrica B slična matrici A, t.j. $B = C^{-1}AC$ i ima karakteristični polinom $f(\lambda)$:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(C^{-1}AC - \lambda I) = \\ &= \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}IC) = \det C^{-1}(AC - \lambda C) = \\ &= \det C^{-1} \det(A - \lambda I) \det C = \det(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Posledica. Slične matrice imaju jednake karakteristične vrednosti.

Napomena. Tvrdjenje obrnuto teoremi 8 ne važi. Karakteristični polinomi matrica mogu biti jednaki, ali te matrice nisu obavezno slične (videti na pr. /10/).

1.7. UOPŠTENI PROBLEM KARAKTERISTIČNIH VREDNOSTI MATRICA

Problem određivanja karakterističnih vrednosti matrice može se uopštiti traženjem onih vrednosti λ za koje sistem od n homogenih linearnih algebarskih jednačina sa n nepoznatih

$$(C - \lambda B)X = 0 \quad (1.7.1)$$

ima netrivialno rešenje.

Rešenje λ jednačine

$$\det(C - \lambda B) = 0 \quad (1.7.2)$$

naziva se karakteristična vrednost matrice C u odnosu na matricu B , a rešenje sistema jednačina

$$CX = \lambda BX \quad (1.7.3)$$

- karakteristični vektor matrice C u odnosu na matricu B koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ .

Ovako postavljen problem je uopštenje problema karakterističnih vrednosti matrica (1.1), koji se dobija kada se u (1.7.1) stavi $B = I$.

Jednačina (1.7.1) ekvivalentna je jednačini

$$(QCP - \lambda QBP)Z = 0, \quad (1.7.4)$$

gde je

$$Z = P^{-1}X$$

i Q i P bilo koje nesusingularne matrice, t.j. karakteristične vrednosti matrice C u odnosu na matricu B jednake su karakterističnim vrednostima matrice QCP u odnosu na matricu QBP , a karakteristični vektori tih matrica povezani su relacijom

$$X = PZ.$$

Uopštteni problem karakterističnih vrednosti može se svesti na obični ako se Q i P izaberu tako da je

$$QBP = I ,$$

t.j.

$$B = Q^{-1}P^{-1} .$$

To se može ostvariti, na primer, ako je $Q = B^{-1}$, $P = I$. Takva transformacija je pogodna zbog toga što ona ne menja karakteristične vektore. Zaista, u tom slučaju, jednačina (1.7.4) se svodi na

$$B^{-1}CX = \zeta X . \quad (1.7.5)$$

Jednačina (1.7.2) je algebarska n-og stepena (n - red matrica C i B) kada je matrica B nesingularna. Slobodan član te jednačine je $\det C$, a koeficijent uz ζ^n je $\det B$. To neposredno sledi iz (1.7.5), jer je slobodan član jednačine

$$\det(B^{-1}C - \zeta I) = 0 ,$$

prema (1.1.) jednak

$$\det(B^{-1}C) = \det B^{-1} \det C = \frac{\det C}{\det B} . \quad (1.7.6)$$

Ako je matrica B singularna tada u jednačini (1.7.2) prema (1.7.6) nema člana sa n -tim stepenom. Tada se može desiti da se uz nesingularnu matricu C karakteristični polinom svodi na nezavisan član. U tom slučaju nema karakterističnih vrednosti matrice C u odnosu na B .

Ako je matrica C singularna, a B nesingularna tada je karakteristična jednačina n -og stepena sa slobodnim članom jednakim nuli. U tom slučaju karakteristična vrednost $\zeta = 0$ je višestrukosti $k < n$.

Kada je matrica C nesingularna a B singularna predhodna razmatranja ostaju na snazi, ali treba jednačinu (1.7.3) napisati u obliku

$$BX = \eta CX ,$$

gde je $\eta = \frac{1}{\zeta}$.

U slučaju da su obe matrice C i B singularne može se dogoditi da se karakteristična determinanta identički svodi na nulu, pa se tada može svaka vrednost ζ uzeti za karakterističnu.

Posebno je od interesa za praksu rešavanje uopštenog problema karakterističnih vrednosti gde su C i B - nesingularne kvadratne matrice i B pozitivno definisana. Tako u teoriji oscilacija /2/ važnu primenu nalazi stav:

Ako su matrice C i B realne i simetrične n-og reda i uz to B pozitivno definisana ili nesingularna i komutativna sa C, tada karakteristična jednačina

$$\det(C - \zeta B) = 0$$

matrice C u odnosu na B ima

1. n realnih rešenja ζ_i , ($i = 1, 2, \dots, n$),
2. n karakterističnih linearno nezavisnih vektora X_i
- i 3. karakteristični vektori X_i zadovoljavaju uslove

$$X_i^T B X_j = \delta_{ij} .$$

Iz ortogonalnosti karakterističnih vektora matrice i njene transponovane (1.4. - 1.5.) slede i analogne osobine B - ortogonalnosti /12/ za odgovarajuće karakteristične vektore. Naime, ako je

$$CX = \zeta BX$$

i

$$C^T Y = \zeta B Y ,$$

tada je

$$(X_i, B Y_j) = 0 , \text{ za } i \neq j .$$

G L A V A II

POTPUNI I DELIMIČNI PROBLEM KARAKTERISTIČNIH VREDNOSTI METODA ESKALACIJE I METODA INTERPOLACIJE

2.1. POTPUNI I DELIMIČNI PROBLEM KARAKTERISTIČNIH VREDNOSTI

Pod potpunim problemom karakterističnih vrednosti podrazumeva se problem nalaženja svih rešenja jednačine

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

t.j. nalaženje svih karakterističnih vrednosti matrice A i njima odgovarajućih karakterističnih vektora.

Za određivanje komponentata karakterističnog vektora potrebno je rešiti jedan sistem od n homogenih linearnih algebarskih jednačina sa n nepoznatih, a za određivanje svih karakterističnih vektora matrice A , uopšte govoreći, potrebno je rešiti n sistema oblika

$$(A - \lambda_i I)X_i = 0,$$

gde je $X_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - karakteristični vektor matrice A koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ_i , ($i = 1, \dots, n$).

Koeficijenti p_k karakterističnog polinoma $f(\lambda)$,

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

(1.1.), sa tačnošću do na znak, su zbirovi svih glavnih minora determinante matrice A reda k . Direktno izračunavanje koeficijenata p_k je vanredno teško, jer zahteva veliki broj aritmetičkih operacija. Zato je sasvim prirodno što se pojavljuju specijalne metode koje uprošćavaju numeričko rešavanje pomenutih problema.

Većina metoda za rešavanje potpunog problema karakterističnih vrednosti sastoji se u predhodnom određivanju koeficijenata karakterističnog polinoma zaobilazeći izračunavanja mnogobrojnih minora. Pri tome se karakteristične vrednosti nalaze kao nule karakterističnog polinoma, nekom od poznatih metoda za približno izračunavanje nula polinoma.

U gotovo svim tim metodama karakteristični vektori matrice mogu se odrediti koristeći međurezultate izračunavanja koeficijenata karakterističnog polinoma. Razume se da je za određivanje karakterističnog vektora, koji odgovara nekoj karakterističnoj vrednosti, potrebno da je ta karakteristična vrednost već izračunata. Te metode nazivaju se direktne ili tačne. Naziv "tačne" potiče otuda što, ako se primenjuju na matrice čiji su elementi dati tačno, t.j. racionalni brojevi i ako se računanja vrše tačno (po pravilima za računanja sa običnim razlomcima) - tada će se za koeficijente karakterističnog polinoma dobiti tačne vrednosti. Karakteristični vektori (t.j. njihove komponente), takođe, se nalaze po tačnim formulama uz poznate karakteristične vrednosti. Ali kako su rezultati aritmetičkih operacija u elektronskim računskim mašinama približni brojevi, to naziv "direktne metode" nalazi svoje opravdanje, te je ovde naveden kao alternativan.

Bilo koji numerički proces u linearnoj algebri zasniiva se na formiranju niza matrica

$$A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_k, \dots,$$

polazeći od date matrice A, koji za određeno k (k - konačno ili beskonačno) daje rešenje postavljenog problema.

Prema tome, direktne metode za rešavanje potpunog problema karakterističnih vrednosti sastoje se u tome što se pomoću konačnog broja sličnih transformacija, matricama P_i , ($i = 1, 2, \dots, k$), data matrica A transformiše u matricu A_k prostijeg oblika, čiji se koeficijenti karakterističnog polinoma i karakteristični vektori lako određuju. Matrica A_k dobija se rekurentnim formulama

$$A_0 = A$$
$$A_i = P_i^{-1} A_{i-1} P_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Opšta karakteristika direktnih metoda je njihova široka primena i brzina u radu (prilikom njihove primene) koji vodi rešenju. I pored toga prilikom njihovog korišćenja treba postupati veoma pažljivo, jer su gotovo sve te metode osetljive na greške zaokrugljivanja međurezultata. Povećana osetljivost tih metoda (na zaokrugljivanje) objašnjava se time što se u procesu računanja pojavljuju problemi koji su ekvivalentni rešavanju loše rešivih sistema linearnih algebarskih jednačina. Zato je stvarna oblast primene direktnih metoda veoma uska i u numeričkoj praksi koriste se, uglavnom, iterativne metode.

Kod iterativnih metoda, karakteristične vrednosti se izračunavaju kao granice nekih brojnih nizova, bez predhodnog određivanja koeficijenata karakterističnog polinoma. Po pravilu, pri tome se istovremeno nalaze i karakteristični vektori.

Činjenica da se u iterativnim metodama, uglavnom, karakteristične vrednosti izračunavaju neposredno suštinski uprošćava problem, jer je izračunavanje korena polinoma, čiji su koeficijenti poznati, vrlo teško.

Ipak su iterativne metode bolje (prilagođene) za rešavanje delimičnog problema karakterističnih vrednosti.

Pod delimičnim problemom karakterističnih vrednosti podrazumeva se problem nalaženja jedne ili nekoliko (ali ne svih) karakterističnih vrednosti i njima odgovarajućih karakterističnih vektora.

Potpuni i delimični problem karakterističnih vrednosti potpuno su različiti, kako po metodama za njihovo rešavanje, tako i po oblasti primene. Rešavanje potpunog problema za matrice, čak i ne baš velikog reda, neizbežno je veoma glomazno i mogućnost rešenja delimičnog problema veoma je važno za praksu.

Iterativne metode za rešavanje potpunog (ili delimičnog) problema karakterističnih vrednosti u glavnom sadrže iste elementarne transformacije matrica kao i direktne metode za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina, inverziju matrica i izračunavanja kod determinanata.

Većina iterativnih metoda manje je osetljivo na greške zaokrugljivanja od direktnih metoda, ali zahtevaju mnogo više računskih operacija. Razvitak tih metoda i njihova primena postala je moguća tek posle pojave velikih mašina za računanje.

2.2. METODA ESKALACIJE

Metoda eskalacije (/31/,/32/,/39/,/40/,/41/,/42/) pripada direktnim metodama za rešavanje potpunog problema karakterističnih vrednosti (2.1.). U ovoj metodi se, induktivnim postupkom, formira karakteristična jednačina matrice A_k , koja se dobija uokviravanjem matrice A_{k-1} , ($k = 3, 4, \dots, \dots, n$). Pri tome se nalaze karakteristične vrednosti i karakteristični vektori matrice A_k i njoj transponovane A_k^T , (za svako $k = 3, 4, \dots, n$).

Metoda se zasniva na korišćenju osobina ortogonalnosti karakterističnih vektora dve uzajamno transponovane matrice (1.3. - 1.4.).

Neka su λ_i , ($i = 1, 2, \dots, n-1$), karakteristične vrednosti matrica A_{n-1} i A_{n-1}^T , gde je $A_{n-1} = (a_{ij})$, ($i, j = 1, 2, \dots, n-1$), t.j.

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix},$$

a $X^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_{n-1}^i)^T$ i $Y^i = (y_1^i, y_2^i, \dots, y_{n-1}^i)^T$, ($i = 1, 2, \dots, n-1$), karakteristični vektori tih matrica.

Pretpostavimo da su sve karakteristične vrednosti λ_i , matrice A_{n-1} , realne i različite.

Posmatrajmo matricu $A = A_n = (a_{ij})$, ($i, j = 1, 2, \dots, \dots, n$), koja je dobijena uokviravanjem matrice A_{n-1} . Neka je $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ njen karakteristični vektor, koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ :

$$A_n X = \lambda X. \tag{2.2.1}$$

Jednačina (2.2.1) ekvivalentna je sledećem sistemu jednačina

$$\begin{aligned}
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1,n-1} x_{n-1} + a_{1n} x_n &= \lambda x_1 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2,n-1} x_{n-1} + a_{2n} x_n &= \lambda x_2 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \dots \dots (2.2.2) \\
 a_{n-1,1} x_1 + a_{n-1,2} x_2 + \dots + a_{n-1,n-1} x_{n-1} + a_{n-1,n} x_n &= \lambda x_{n-1} \\
 a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1} + a_{nn} x_n &= \lambda x_n .
 \end{aligned}$$

Množeći prvu jednačinu sistema (2.2.2) sa y_1^i , drugu sa y_2^i , treću sa y_3^i i t.d., (n-1)-vu sa y_{n-1}^i i sabirajući ih dobijamo

$$\begin{aligned}
 &x_1(a_{11}y_1^i + a_{21}y_2^i + \dots + a_{n-1,1}y_{n-1}^i) + \\
 &+ x_2(a_{12}y_1^i + a_{22}y_2^i + \dots + a_{n-1,2}y_{n-1}^i) + \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & (2.2.3) \\
 &+ x_{n-1}(a_{1,n-1}y_1^i + a_{2,n-1}y_2^i + \dots + a_{n-1,n-1}y_{n-1}^i) + \\
 &+ x_n(a_{1n}y_1^i + a_{2n}y_2^i + \dots + a_{n-1,n}y_{n-1}^i) = \\
 &= \lambda(x_1y_1^i + x_2y_2^i + \dots + x_{n-1}y_{n-1}^i).
 \end{aligned}$$

Kako je

$$A_{n-1}^T Y^i = \lambda_i Y^i,$$

to se (2.2.3) može napisati u obliku

$$\begin{aligned}
 &x_1 \lambda_i y_1^i + x_2 \lambda_i y_2^i + \dots + x_{n-1} \lambda_i y_{n-1}^i + \\
 &+ x_n(a_{1n}y_1^i + a_{2n}y_2^i + \dots + a_{n-1,n}y_{n-1}^i) = \\
 &= \lambda(x_1y_1^i + x_2y_2^i + \dots + x_{n-1}y_{n-1}^i)
 \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} & \lambda_i(x_1 y_1^i + x_2 y_2^i + \dots + x_{n-1} y_{n-1}^i) + \\ & + x_n(a_{1n} y_1^i + a_{2n} y_2^i + \dots + a_{n-1,n} y_{n-1}^i) = \\ & = \lambda(x_1 y_1^i + x_2 y_2^i + \dots + x_{n-1} y_{n-1}^i), \end{aligned}$$

odakle je

$$x_1 y_1^i + x_2 y_2^i + \dots + x_{n-1} y_{n-1}^i = - \frac{x_n P_n^i}{\lambda_i - \lambda}, \quad (2.2.4)$$

gde je

$$P_n^i = a_{1n} y_1^i + a_{2n} y_2^i + \dots + a_{n-1,n} y_{n-1}^i.$$

Kako su po pretpostavci svi λ_i različiti brojevi, to su karakteristični vektori X^i i Y^i ortogonalni i mogu se normirati (1.5.), tako da je

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j^i y_j^i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n-1} y_j^i x_j^i = 1, \quad (2.2.5)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} x_j^i y_j^j = 0, \quad \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} y_j^i x_j^j = 0.$$

Množeći (2.2.4) sa x_j^i i sabirajući po i dobija se:

$$x_j = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_n P_n^i}{\lambda_i - \lambda} x_j^i, \quad (j=1, 2, \dots, n-1). \quad (2.2.6)$$

Zamenjujući (2.2.6) u poslednju jednačinu sistema (2.2.2) dobija se

$$(a_{nn} - \lambda)x_n = \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_n^i}{\lambda_i - \lambda} (a_{n1}x_1^i + a_{n2}x_2^i + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^i) \right] x_n,$$

odakle se dobija jednačina iz koje se mogu izračunati karakteristične vrednosti matrice A_n

$$a_{nn} - \lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_n^{i-1}}{\lambda_i - \lambda}, \quad (2.2.7)$$

gde je uvedena oznaka

$$\bar{p}_n^i = a_{n1}x_1^i + a_{n2}x_2^i + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^i.$$

Jednačina (2.2.7) se naziva eskalatorni oblik karakteristične jednačine ili kratko eskalatorna jednačina /33/.

Određujući karakteristične vrednosti matrice A_n iz jednačine (2.2.7), njima odgovarajući karakteristični vektori, sa tačnošću do na proizvoljan realan množilac, određuju se iz (2.2.6), t.j. iz

$$\frac{x_j}{x_n} = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_n^i x_j^i}{\lambda_i - \lambda}, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (2.2.8)$$

Karakteristični vektori matrice A_n^T dobijaju se po formulama

$$\frac{y_j}{y_n} = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\bar{p}_n^i y_j^i}{\lambda_i - \lambda}, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.2.9)$$

koje se dobijaju istim postupkom kojim su dobijene i formule (2.2.6).

Koristeći osobine (2.2.5), karakteristični vektori matrica A_n i A_n^T , dobijeni po formulama (2.2.8) i (2.2.9), mogu se normirati tako da je

$$\frac{\sum_{j=1}^{n-1} x_j y_j}{x_n y_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_n^{i-i}}{(\lambda_i - \lambda)^2},$$

odakle je

$$\frac{\sum_{j=1}^n x_j y_j}{x_n y_n} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_n^{i-i}}{(\lambda_i - \lambda)^2},$$

t.j. uslovi normiranja zadovoljeni su za

$$\frac{1}{x_n y_n} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_n^{i-i}}{(\lambda_i - \lambda)^2}.$$

Ako eskalatornu jednačinu (2.2.7) napišemo u obliku

$$-a_{nn} + \lambda + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_n^{i-i}}{\lambda_i - \lambda} = 0 \quad (2.2.10)$$

i levu stranu (2.2.10) označimo sa $f(\lambda)$, imaćemo

$$f'(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_n^{i-i}}{(\lambda_i - \lambda)^2}, \quad (2.2.11)$$

t.j.

$$f'(\lambda) = \frac{1}{x_n y_n}.$$

Ne narušavajući opštost, može se uzeti da je $x_n = \pm y_n$, gde se znak bira tako da

$$\pm f'(\lambda) = \frac{1}{x_n^2}$$

buće pozitivno, t.j.

$$x_n = y_n = \frac{1}{\sqrt{f'(\lambda)}}, \quad \text{ako je } f'(\lambda) > 0,$$

$$x_n = -y_n = \frac{1}{\sqrt{-f'(\lambda)}}, \quad \text{ako je } f'(\lambda) < 0.$$

Napomenimo još da važe sledeće jednakosti

$$\sum_{i=1}^{n-1} P_n^i x_j^i = a_{jn}, \quad (j=1,2,\dots,n-1), \quad (2.2.12)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} P_n^i y_j^i = a_{nj}, \quad (j=1,2,\dots,n-1), \quad (2.2.13)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr } A_n, \quad (2.2.14)$$

koje služe za kontrolu računanja.

Posle svakog završenog koraka (nalaženja karakterističnih vrednosti i karakterističnih vektora matrica A_k i A_k^T) treba, pored navedenih kontrolnih jednakosti (2.2.12)-(2.2.14), proveriti ortogonalnost karakterističnih vektora

$$X^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_k^i) \quad \text{i} \quad Y^i = (y_1^i, y_2^i, \dots, y_k^i), \quad (i=1,2,\dots,k).$$

Eskaletorni oblik karakteristične jednačine je veoma pogodan za primenu Newton-ove metode, jer se $f(\lambda)$ i $f'(\lambda)$, (2.2.10) - (2.2.11), lako izračunavaju.

Ako uzastopne eskaletorne jednačine imaju jednaka ili kompleksna rešenja, tada opisani proces treba neznatno izmeniti /42/.

Za simetričnu matricu A_n računanja se znatno uprošćavaju, zbog toga što je tada $P_k^i = \bar{P}_k^i$ i eskaletorna jednačina (2.2.7) postaje

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(P_n^i)^2}{\lambda_i - \lambda} - (a_{nn} - \lambda) = 0. \quad (2.2.15)$$

Koeficijenti uz $(\lambda_i - \lambda)^{-1}$, u (2.2.15), su pozitivni. Imajući u vidu tu činjenicu i znake funkcije $f(\lambda)$ u okolini tačkaka $\lambda = \lambda_i$, dolazi se do zaključka da se koren λ nalazi između dva uzastopna korena λ_i, λ_{i+1} i da je jedan koren manji od najmanjeg, a jedan veći od najvećeg λ_i . To znači da se karakteristične vrednosti matrice A_k razdvajaju karakterističnim vrednostima matrice A_{k-1} .

U radu /34/ date su formule koje omogućavaju određivanje karakterističnih vrednosti i karakterističnih vektora matrice A_k koja je dobijena uokviravanjem matrice A_{k-2} ili A_{k-3} , t.j. neposrednim uokviravanjem sa dve ili tri vrste i kolone. U tom radu formule su date za simetričnu matricu A_n . Radi upoređenja sa kasnijim izlaganjem, ovde ćemo navesti, bez izvođenja, formule za slučaj prelaza od matrice A_{k-2} na matricu A_k .

Neka je $A_n = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{ji}$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Pretpostavimo da matrica $A_{k-2} = (a_{ij})$, $(i, j = 1, 2, \dots, k-2)$, ima sve karakteristične vrednosti λ_i različite i da su $X^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_{k-2}^i)$, $(i = 1, 2, \dots, k-2)$, njima odgovarajući karakteristični vektori.

Neka je dalje, $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ - karakteristični vektor matrice A_k , koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ , t.j.

$$A_k X = \lambda X.$$

U ovom slučaju eskalatorni oblik karakteristične jednačine je

$$\left| \begin{array}{cc} \sum_{i=1}^{k-2} \frac{(P_{k-1}^i)^2}{\lambda_i^{-\lambda}} - (a_{k-1,k-1}^{-\lambda}); & \sum_{i=1}^{k-2} \frac{P_k^i P_{k-1}^i}{\lambda_i^{-\lambda}} - a_{k-1,k} \\ \sum_{i=1}^{k-2} \frac{P_k^i P_{k-1}^i}{\lambda_i^{-\lambda}} - a_{k-1,k}; & \sum_{i=1}^{k-2} \frac{(P_k^i)^2}{\lambda_i^{-\lambda}} - (a_{kk}^{-\lambda}) \end{array} \right| = 0, \quad (2.2.16)$$

gde je

$$P_{k-1}^i = a_{1,k-1} x_1^i + a_{2,k-1} x_2^i + \dots + a_{k-2,k-1} x_{k-2}^i$$

$$i \quad P_k^i = a_{1,k} x_1^i + a_{2,k} x_2^i + \dots + a_{k-2,k} x_{k-2}^i .$$

Posle određivanja karakterističnih vrednosti matrice A_k iz jednačine (2.2.16), karakteristični vektori, koji njima odgovaraju, određuju se iz

$$\frac{x_{k-1}}{x_k} = - \frac{\sum_{i=1}^{k-2} \frac{P_k^i P_{k-1}^i}{\lambda_i^{-\lambda}} - a_{k-1,k}}{\sum_{i=1}^{k-2} \frac{(P_{k-1}^i)^2}{\lambda_i^{-\lambda}} - (a_{k-1,k-1}^{-\lambda})}$$

i

$$\frac{x_j}{x_k} = - \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\frac{x_{k-1}}{x_k} P_{k-1}^i + P_k^i}{\lambda_i^{-\lambda}} x_j^i, \quad (j=1,2,\dots,k-2).$$

2.3. METODA INTERPOLACIJE

Za metodu interpolacije specijalni oblik determinante, koja daje karakteristični polinom $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ili determinante $\det(A - \lambda B)$, sa datim matricama A i B, nema značaja. Zato ćemo posmatrati proizvoljnu determinantu

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) & \dots & f_{1n}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) & \dots & f_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(\lambda) & f_{n2}(\lambda) & \dots & f_{nn}(\lambda) \end{vmatrix},$$

čiji su elementi $f_{ij}(\lambda)$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$), polinomi po λ .

Neka je $F(\lambda)$ polinom k -og stepena, tada je on jednoznačno određen sa vrednostima u $(k+1)$ -oj različitoj tački /29/ i može se formirati pomoću bilo koje interpolacione formule /3/, /24/, /27/. U tom cilju treba izračunati vrednosti $(k+1)$ -ne determinante

$$F(\lambda_i) = \begin{vmatrix} f_{11}(\lambda_i) & f_{12}(\lambda_i) & \dots & f_{1n}(\lambda_i) \\ f_{21}(\lambda_i) & f_{22}(\lambda_i) & \dots & f_{2n}(\lambda_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(\lambda_i) & f_{n2}(\lambda_i) & \dots & f_{nn}(\lambda_i) \end{vmatrix},$$

gde su λ_i , ($i = 0, 1, \dots, k$), proizvoljni, različiti brojevi.

Za formiranje karakterističnog polinoma metodom interpolacije potrebno je obaviti veliki broj aritmetičkih operacija. Tako, pre svega, treba naći vrednosti $(n+1)$ -ne determinante n -og reda. Za to je potrebno obaviti

$$\frac{n+1}{3}(n-1)(n^2+n+3)$$

množenja i deljenja zajedno.

Ako se karakteristični polinom formira koristeći Newton-ovu interpolacionu formulu, kada su vrednosti funkcije $F(\lambda)$ izračunate za ekvidistantne vrednosti argumenta λ_i , /19/, /31/ i ako su koeficijenti interpolacione formule uzeti iz tablica /31/, tada za dobijanje koeficijenta karakterističnog polinoma treba obaviti još

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

množenja. Prema tome, ukupan broj množenja i deljenja za izračunavanje koeficijenata karakterističnog polinoma (Newton-ovom) metodom interpolacije iznosi

$$\frac{n+1}{3}(n-1)(n^2+n+3) + \frac{n(n+1)}{2} .$$

Napomenimo, radi upoređenja, da je

$$n^3 - n^2,$$

ukupan broj množenja i deljenja, potreban za izračunavanje koeficijenata karakterističnog polinoma, metodom A.M. Danilevskoga - koja je, sa obzirom na broj operacija, jedna od najpogodnijih poznatih metoda /9/, /33/, (videti, takođe, i /25/). Tako je, na primer, za $n = 9$ broj množenja i deljenja za metodu interpolacije 2525, a za metodu A.M. Danilevskoga 648.

Metoda interpolacije ne dozvoljava ni da se nalaženje karakterističnih vektora na bilo koji način uprosti (kao na primer metoda eskalacije ili metoda A.M. Danilevskoga).

I pored toga metoda interpolacije ima veliki praktični značaj, jer uz prost numerički postupak daje mogućnost za rešavanje opštijih problema. Uz to, metoda interpolacije može se uvek primeniti, specijalno - slučaj kada karakteristični polinom ima višestruke korene ničim se ne razlikuje od drugih slučajeva.

Određivanje karakterističnog polinoma metodama interpolacije za neekvidistantne vrednosti argumenata nije najcelishodnije; u tom slučaju najpodesnije je odrediti koeficijente karakterističnog polinoma metodom neodređenih koeficijenata.

2.4. METODA NEODREĐENIH KOEFICIJENATA

Neka je

$$F(\lambda) = a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k,$$

tada se iz sistema linearnih algebarskih jednačina

$$F(\lambda_i) = a_0 \lambda_i^k + a_1 \lambda_i^{k-1} + \dots + a_k, \quad (i=0,1,2,\dots,k),$$

moгу odrediti koeficijenti a_j , ($j=0,1,2,\dots,k$). Tako je za $\lambda_i = 0,1,2, \dots, k-1$:

$$a_k = F(0)$$

$$a_0 \cdot 1^k + a_1 \cdot 1^{k-1} + \dots + a_k = F(1)$$

$$a_0 \cdot 2^k + a_1 \cdot 2^{k-1} + \dots + a_k = F(2)$$

.....

$$a_0 (k-1)^k + a_1 (k-1)^{k-1} + \dots + a_k = F(k-1),$$

odakle je

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} = F(1) - F(0) - a_0$$

$$2^{k-1} a_1 + 2^{k-2} a_2 + \dots + 2 a_{k-1} = F(2) - F(0) - 2^k a_0$$

.....

$$(k-1)^{k-1} a_1 + (k-1)^{k-2} a_2 + \dots + (k-1) a_{k-1} = F(k-1) - F(0) - (k-1)^k a_0.$$

Ako sa K označimo matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^{k-1} & 2^{k-2} & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)^{k-1} & (k-1)^{k-2} & \dots & k-1 \end{bmatrix},$$

a sa f i a, respektivno, matrice kolone

$$\begin{bmatrix} F(1) - F(0) - a_0 \\ F(2) - F(0) - 2^k a_0 \\ \dots \\ F(k-1) - F(0) - (k-1)^k a_0 \end{bmatrix} \quad i \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix},$$

tađa se sistem (2.4.1) mođe napisati u matričnom obliku

$$Ka = f,$$

odakle je

$$a = K^{-1}f.$$

Matrica K^{-1} (kao i matrica K) zavisi samo od stepena polinoma $F(\lambda)$, pa se samo jedanput računa za dato k , što je od značaja kada treba da se izloženi postupak više puta ponovi za date matrice čije determinante u razvoju daju polinome istog stepena k .

2.5. METODA KVADRATNE INTERPOLACIJE

Metoda interpolacije nalazi svoju primenu i kod nalaženja karakterističnih vrednosti zaobilazeći formiranje karakterističnog polinoma.

Metoda kvadratne interpolacije (metoda Muller-a /43/, metoda parabola /4/) je metoda za određivanje svih korena polinoma

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

ili bilo koje analitičke funkcije. To je u stvari uopštenje metode "lažnog položaja" (Regula Falsi) /13/, /33/ i sastoji se u sledećem. Neka su data tri, međusobno različita, kompleksna broja λ_{i-2} , λ_{i-1} , λ_i . Sa tim brojevima kao čvorovima interpolacije formira se Lagrange-ov interpolacioni polinom drugog stepena za $f(\lambda)$; nalaze se oba njegova korena i za λ_{i+1} uzima se onaj od njegovih korena koji je bliži λ_i . Sledeća trojka brojeva biće λ_{i-1} , λ_i , λ_{i+1} . Sa tim brojevima formira se novi interpolacioni polinom i za λ_{i+2} uzima se onaj njegov koren koji je bliži λ_{i+1} . Tako se dobija nova trojka brojeva λ_i , λ_{i+1} , λ_{i+2} i t.d. Kada je na taj način izračunat jedan od korena on se izdvaja i proces se nastavlja primenom na polinom manjeg stepena.

Konvergenција toga postupka za proizvoljne početne vrednosti nije poznata. Poznata je samo lokalna konvergenција /4/, t.j. konvergenција je dokazana uz pretpostavku da su početne vrednosti dovoljno bliske traženome korenu. Ipak u praksi nije poznat ni jedan slučaj kada taj proces nebi konvergirao!

Izbor interpolacionog polinoma drugog stepena nije slučajajan; on je podoban zbog toga što omogućava prelaz sa realne ose na kompleksnu ravan, čak i za realno $f(\lambda)$ i realne početne vrednosti.

Računanja se obavljaju na sledeći način. Pretpostavimo da su poznate vrednosti funkcije $f(\lambda)$ u tačkama

$\lambda_{i-2}, \lambda_{i-1}, \lambda_i$. Sa tim tačkama formira se Lagrange-ov interpolacioni polinom za $f(\lambda)$.

$$L^{(i-2)}(\lambda) = f(\lambda_{i-2}) \frac{(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_{i-1})}{(\lambda_{i-2} - \lambda_i)(\lambda_{i-2} - \lambda_{i-1})} +$$

$$+ f(\lambda_{i-1}) \frac{(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_{i-2})}{(\lambda_{i-1} - \lambda_i)(\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2})} + f(\lambda_i) \frac{(\lambda - \lambda_{i-1})(\lambda - \lambda_{i-2})}{(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i-2})}. \quad (2.5.1)$$

Sa oznakama

$$h = \lambda - \lambda_i, \quad h_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}, \quad h_{i-1} = \lambda_{i-1} - \lambda_{i-2},$$

$$\xi = \frac{h}{h_i}, \quad \xi_i = \frac{h_i}{h_{i-1}}, \quad \delta_i = 1 + \xi_i$$

i

$$p_i = f(\lambda_{i-2}) \xi_i^2 \delta_i^{-1} - f(\lambda_{i-1}) \xi_i + f(\lambda_i) \xi_i \delta_i^{-1},$$

$$g_i = f(\lambda_{i-2}) \xi_i^2 \delta_i^{-1} - f(\lambda_{i-1}) \delta_i + f(\lambda_i) \xi_i \delta_i^{-1} + f(\lambda_i),$$

$L^{(i-2)}(\lambda)$ dobija prostiji oblik

$$L^{(i-2)}(\xi) = p_i \xi^2 + g_i \xi + f(\lambda_i);$$

odakle je, izjednačavajući $L^{(i-2)}(\xi)$ sa nulom i rešavajući jednačinu po ξ ,

$$\xi = \frac{-2f(\lambda_i)}{g_i \pm \sqrt{g_i^2 - 4p_i f(\lambda_i)}}.$$

Bira se manji (po modulu) od dva ξ i izračunava

$$\xi_{i+1} = \xi, \quad h_{i+1} = \xi_{i+1} h_i, \quad \lambda_{i+1} = \lambda_i + h_{i+1}.$$

Sada se sa brojevima $\lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}$ formira novi interpolacioni polinom Lagrange-a i za λ_{i+2} bira njegov koren bliži λ_{i+1} i t.d.

G L A V A III

METODE SREDIŠNE ESKALACIJE

3.1. METODA SREDIŠNE ESKALACIJE ZA REŠAVANJE PROBLEMA
KARAKTERISTIČNIH VREDNOSTI MATRICA

Ova metoda sastoji se u tome što se induktivnim postupkom nalaze karakteristične vrednosti i karakteristični vektori matrica A_k i njima konjugovanih, pri čemu se A_k dobija središnjim uokviravanjem matrice A_{k-2} /5/, /6/.

Opisaćemo jedan korak metode središnje eskalacije - prelaz od matrice $(n-2)$ -og reda na matricu n -og reda.

Neka su $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}$ karakteristične vrednosti matrica A_{n-2} i A_{n-2}^T , gde je

$$A_{n-2} = (a_{ij}) , \quad (i, j = 2, 3, \dots, n-1) ,$$

$$a \quad X^i = (x_2^i, x_3^i, \dots, x_{n-1}^i)^T \quad i \quad Y^i = (y_2^i, y_3^i, \dots, y_{n-1}^i)^T ,$$

$(i = 2, 3, \dots, n-1)$, karakteristični vektori tih matrica.

Pretpostavimo da su svi brojevi λ_i (karakteristične vrednosti matrice A_{n-2}) realni i različiti.

Označimo sa $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ karakteristični vektor, koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ , matrice $A_n = (a_{ij})$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, koja je dobijena središnjim uokviravanjem matrice A_{n-2} , t.j.

$$A_n X = \lambda X . \quad (3.1.1)$$

Sistem jednačina

iz (3.1.3) dobija se

$$x_2 y_2^i + x_3 y_3^i + \dots + x_{n-1} y_{n-1}^i = - \frac{x_1 P_1^i + x_n P_n^i}{\lambda_i - \lambda} . \quad (3.1.4)$$

Po pretpostavci su sve karakteristične vrednosti λ_i različite, pa sledi da su karakteristični vektori x^i i y^i ortogonalni i da se mogu normirati tako da je

$$\sum_{j=2}^{n-1} x_j^i y_j^i = 1 , \quad \sum_{i=2}^{n-1} y_j^i x_j^i = 1 ,$$

$$\sum_{\substack{j=2 \\ i \neq j}}^{n-1} x_j^i y_j^i = 0 , \quad \sum_{\substack{j=2 \\ i \neq j}}^{n-1} y_j^i x_j^i = 0 .$$

Ako se (3.1.4) množi sa x_j^i i sabiranje, pri tome, vrši po i dobija se

$$x_j = - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{x_1 P_1^i + x_n P_n^i}{\lambda_i - \lambda} x_j^i , \quad (j=2,3,\dots,n-1) . \quad (3.1.5)$$

Iz prve i poslednje jednačine sistema (3.1.2) je

$$a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} = -(a_{11} - \lambda)x_1 - a_{1n}x_n \quad (3.1.6)$$

$$a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1} = -a_{n1}x_1 - (a_{nn} - \lambda)x_n .$$

Zamenjujući (3.1.5) u (3.1.6) dobija se

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{x_1 P_1^i + x_n P_n^i}{\lambda_i - \lambda} (a_{12}x_2^i + a_{13}x_3^i + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1}^i) = \\ = (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{1n}x_n \end{aligned}$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} \frac{x_1 p_{1i}^{i-1} + x_n p_{ni}^{i-1}}{\lambda_i - \lambda} (a_{n2} x_2^i + a_{n3} x_3^i + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1}^i) =$$

$$= a_{n1} x_1 + (a_{nn} - \lambda) x_n ,$$

odakle je

$$\left\{ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_{1i}^{i-1}}{\lambda_i - \lambda} - (a_{11} - \lambda) \right\} x_1 + \left\{ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_{ni}^{i-1}}{\lambda_i - \lambda} - a_{1n} \right\} x_n = 0$$

(3.1.7)

$$\left\{ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_{1i}^{i-1}}{\lambda_i - \lambda} - a_{n1} \right\} x_1 + \left\{ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_{ni}^{i-1}}{\lambda_i - \lambda} - (a_{nn} - \lambda) \right\} x_n = 0 ,$$

gde je

$$\bar{p}_1^i = a_{12} x_2^i + a_{13} x_3^i + \dots + a_{1,n-1} x_{n-1}^i$$

$$i \quad \bar{p}_n^i = a_{n2} x_2^i + a_{n3} x_3^i + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1}^i .$$

Sistem (3.1.7) homogenih linearnih jednačina po x_1 i x_n ima netrivialno rešenje, pa sledi da determinanta toga sistema mora biti jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_{1i}^{i-1}}{\lambda_i - \lambda} - (a_{11} - \lambda) & \sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_{ni}^{i-1}}{\lambda_i - \lambda} - a_{1n} \\ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_{1i}^{i-1}}{\lambda_i - \lambda} - a_{n1} & \sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_{ni}^{i-1}}{\lambda_i - \lambda} - (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 . \quad (3.1.8)$$

Jednačina (3.1.8) je eskalatorni oblik karakteristične jednačine i može se, razvijanjem determinante, napisati u obliku

$$\left\{ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_1^{i-1} p_1^i}{\lambda_i - \lambda} - (a_{11} - \lambda) \right\} \left\{ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_n^{i-1} p_n^i}{\lambda_i - \lambda} - (a_{nn} - \lambda) \right\} -$$

$$- \left\{ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_1^{i-1} p_n^i}{\lambda_i - \lambda} - a_{n1} \right\} \left\{ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_n^{i-1} p_1^i}{\lambda_i - \lambda} - a_{1n} \right\} = 0. \quad (3.1.9)$$

Iz prve jednačine sistema (3.1.7) imamo

$$\frac{x_1}{x_n} = - \frac{\sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_n^{i-1} p_1^i}{\lambda_i - \lambda} - a_{1n}}{\sum_{i=2}^{n-1} \frac{p_1^{i-1} p_n^i}{\lambda_i - \lambda} - (a_{11} - \lambda)}, \quad (3.1.10)$$

a iz (3.1.5) i (3.1.10)

$$\frac{x_j}{x_n} = - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\frac{x_1}{x_n} p_1^i + p_n^i}{\lambda_i - \lambda} x_j^i, \quad (j=2,3,\dots,n-1). \quad (3.1.11)$$

Određujući karakteristične vrednosti matrice A_n iz jednačine (3.1.9) i izračunavajući, potom, $\frac{x_1}{x_n}$ iz (3.1.10), mogu se iz (3.1.11) odrediti odnosi preostale (n-2) koordinate vektora X i njegove koordinate x_n .

U slučaju da je matrica A_n simetrična računanja se uprošćavaju, jer je tada $p_1^i = \bar{p}_1^i$, i $p_n^i = \bar{p}_n^i$.

Jednakosti koje služe za kontrolu računanja su:

$$\sum_{i=2}^{n-1} P_i^i x_j^i = a_{ji} , \quad \sum_{i=2}^{n-1} P_n^i x_j^i = a_{jn} , \quad (j = 2, 3, \dots, n-1),$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} \bar{P}_i^i y_j^i = a_{1j} , \quad \sum_{i=2}^{n-1} \bar{P}_n^i y_j^i = a_{nj} , \quad (j = 2, 3, \dots, n-1),$$

a takođe i

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr} A_K .$$

Broj aritmetičkih operacija, koje je potrebno obaviti, za rešavanje problema karakterističnih vrednosti (za datu matricu) metodom eskalacije nije moguće izraziti formulom, zbog toga što treba na svakom koraku rešavati eskalatornu jednačinu nekom od poznatih iterativnih metoda (na primer Newton-ovom metodom).

Opisali smo jedan korak procesa, kada su poznate karakteristične vrednosti i karakteristični vektori matrice A_{n-2} a treba naći karakteristične vrednosti i karakteristične vektore matrice A_n . Rešenje problema karakterističnih vrednosti za matricu A_{n-2} može se ostvariti na analogan način. Na taj način, čitav proces za rešavanje problema karakterističnih vrednosti matrice A_n sastoji se u rešavanju problema karakterističnih vrednosti za niz matrica neparnog reda $(3, 5, \dots, n)$, ako je n neparno, ili za niz matrica parnog reda $(4, 6, \dots, n)$ ako je n parno.

Potpuno analogno mogu se izvesti formule za određivanje karakterističnih vrednosti i karakterističnih vektora matrice A_K , ako su poznate karakteristične vrednosti i karakteristični vektori matrice A_{K-4} . Navešćemo, bez izvođenja, eskalatorni oblik karakteristične jednačine za taj slučaj:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - (a_{11}^{-\lambda}); & \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - a_{12}; & \sum_{i=3}^{n-2} \frac{\lambda_i - \lambda}{\lambda_i - \lambda} - a_{1, n-1}; & \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - a_{1n} \\
& \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - a_{21}; & \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - (a_{22}^{-\lambda}); & \sum_{i=3}^{n-2} \frac{\lambda_i - \lambda}{\lambda_i - \lambda} - a_{2, n-1}; & \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - a_{2n} \\
& \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - a_{n-1, 1}; & \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - a_{n-1, 2}; & \sum_{i=3}^{n-2} \frac{\lambda_i - \lambda}{\lambda_i - \lambda} - (a_{n-1, n-1}^{-\lambda}); & \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - a_{n-1, n} \\
& \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - a_{n1}; & \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - a_{n2}; & \sum_{i=3}^{n-2} \frac{\lambda_i - \lambda}{\lambda_i - \lambda} - a_{n, n-1}; & \sum_{i=3}^{n-2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} - (a_{nn}^{-\lambda})
\end{aligned}$$

3.2. METODA SREDIŠNE ESKALACIJE ZA REŠAVANJE UOPŠTENOG PROBLEMA KARAKTERISTIČNIH VREDNOSTI MATRICA

Metoda središnje eskalacije može se uopštiti u tom smislu što se može primeniti za rešavanje uopštenog problema karakterističnih vrednosti matrica (videti /12/).

Neka je

$$C_n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & & & & c_{2n} \\ \vdots & & C_{n-2} & & \vdots \\ c_{n-1,1} & & & & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & & & & b_{2n} \\ \vdots & & B_{n-2} & & \vdots \\ b_{n-1,1} & & & & b_{n-1,n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

i neka su $\{\lambda_r, X^r = (x_2^r, x_3^r, \dots, x_{n-1}^r)^T\}$ i $Y^r = (y_2^r, y_3^r, \dots, y_{n-1}^r)^T$, ($r = 2, 3, \dots, n-1$), karakteristične vrednosti i karakteristični vektori matrica C_{n-2} i C_{n-2}^T u odnosu na matricu B_{n-2} . Neka je λ , bilo koja, karakteristična vrednost matrice C_n u odnosu na matricu B_n i $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ - karakteristični vektor koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ :

$$C_n Z = \lambda B_n Z,$$

t. j.

$$\sum_{k=1}^n c_{pk} z_k = \lambda \sum_{k=1}^n b_{pk} z_k, \quad (p = 1, 2, \dots, n). \quad (3.2.1)$$

Ako se druga jednačina sistema (3.2.1) pomnoži sa y_2^r , treća sa y_3^r , ..., (n-1) - va sa y_{n-1}^r i tako dobijene

jednačine sabera, dobija se

$$\sum_{p=2}^{n-1} y_p^r \sum_{k=1}^n (c_{pk} - \lambda b_{pk}) z_k = 0 ,$$

ili menjajući red sumiranja

$$\sum_{k=1}^n z_k \sum_{p=2}^{n-1} (c_{pk} - \lambda b_{pk}) y_p^r = 0 . \quad (3.2.2)$$

Kako je y^r karakteristični vektor matrice C_{n-2}^T u odnosu na matricu B_{n-2} , iz (3.2.2) se dobija

$$(\lambda_r - \lambda) \sum_{k=2}^{n-1} z_k \sum_{p=2}^{n-1} b_{pk} y_p^r + z_1 \sum_{p=2}^{n-1} (c_{p1} - \lambda b_{p1}) y_p^r + z_n \sum_{p=2}^{n-1} (c_{pn} - \lambda b_{pn}) y_p^r = 0 ,$$

ili

$$\sum_{k=2}^{n-1} z_k \sum_{p=2}^{n-1} b_{pk} y_p^r = - \frac{z_1 S_1^r + z_n S_n^r}{(\lambda_r - \lambda)} , \quad (3.2.3)$$

gde je

$$S_1^r = \sum_{p=2}^{n-1} (c_{p1} - \lambda b_{p1}) y_p^r$$

$$S_n^r = \sum_{p=2}^{n-1} (c_{pn} - \lambda b_{pn}) y_p^r .$$

Označimo sa

$$\bar{S}_1^r = \sum_{p=2}^{n-1} (c_{1p} - \lambda b_{1p}) x_p^r \quad (3.2.4)$$

$$\bar{S}_n^r = \sum_{p=2}^{n-1} (c_{np} - \lambda b_{np}) x_p^r . \quad (3.2.5)$$

Množenjem jednačine (3.2.3) sa (3.2.4) i (3.2.5) redom i sa-
biranjem po r od 2 do $n-1$, dobija se

$$\sum_{r=2}^{n-1} \bar{S}_1^r \sum_{k=2}^{n-1} z_k \sum_{p=2}^{n-1} b_{pk} y_p^r = -z_1 \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\bar{S}_1^r \bar{S}_1^r}{\{r-\lambda\}} - z_n \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\bar{S}_1^r \bar{S}_n^r}{\{r-\lambda\}}, \quad (3.2.6)$$

$$\sum_{r=2}^{n-1} \bar{S}_n^r \sum_{k=2}^{n-1} z_k \sum_{p=2}^{n-1} b_{pk} y_p^r = -z_1 \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\bar{S}_n^r \bar{S}_1^r}{\{r-\lambda\}} - z_n \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\bar{S}_n^r \bar{S}_n^r}{\{r-\lambda\}}. \quad (3.2.7)$$

Koristeći svojstva B - ortogonalnosti (1.7), iz le-
ve strane jednačine (3.2.6) imamo

$$\begin{aligned} & \sum_{r=2}^{n-1} \bar{S}_1^r \sum_{k=2}^{n-1} z_k \sum_{p=2}^{n-1} b_{pk} y_p^r = \\ & = \sum_{k=2}^{n-1} z_k \sum_{q=2}^{n-1} (c_{1q} - \lambda b_{1q}) \sum_{r=2}^{n-1} x_q^r \sum_{p=2}^{n-1} b_{pk} y_p^r = \sum_{k=2}^{n-1} z_k (c_{1k} - \lambda b_{1k}). \end{aligned}$$

Isto tako iz leve strane (3.2.7) je

$$\begin{aligned} & \sum_{r=2}^{n-1} \bar{S}_n^r \sum_{k=2}^{n-1} z_k \sum_{p=2}^{n-1} b_{pk} y_p^r = \\ & = \sum_{k=2}^{n-1} z_k \sum_{q=2}^{n-1} (c_{nq} - \lambda b_{nq}) \sum_{r=2}^{n-1} x_q^r \sum_{p=2}^{n-1} b_{pk} y_p^r = \sum_{k=2}^{n-1} z_k (c_{nk} - \lambda b_{nk}). \end{aligned}$$

Iz prve i poslednje jednačine sistema (3.2.1) je

$$\sum_{k=2}^{n-1} z_k (c_{1k} - \lambda b_{1k}) = -(c_{11} - \lambda b_{11}) z_1 - (c_{1n} - \lambda b_{1n}) z_n \quad (3.2.8)$$

$$\sum_{k=2}^{n-1} z_k (c_{nk} - \lambda b_{nk}) = -(c_{n1} - \lambda b_{n1}) z_1 - (c_{nn} - \lambda b_{nn}) z_n. \quad (3.2.9)$$

Iz (3.2.6) i (3.2.8) je

$$-(c_{11} - \lambda b_{11}) z_1 - (c_{1n} - \lambda b_{1n}) z_n = -z_1 \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_1^r S_1^r}{t_{r-\lambda}} - z_n \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_1^r S_n^r}{t_{r-\lambda}},$$

a iz (3.2.7) i (3.2.9)

$$-(c_{n1} - \lambda b_{n1}) z_1 - (c_{nn} - \lambda b_{nn}) z_n = -z_1 \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_n^r S_1^r}{t_{r-\lambda}} - z_n \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_n^r S_n^r}{t_{r-\lambda}},$$

ili zajedno

$$\left\{ \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_1^r S_1^r}{t_{r-\lambda}} - (c_{11} - \lambda b_{11}) \right\} z_1 + \left\{ \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_1^r S_n^r}{t_{r-\lambda}} - (c_{1n} - \lambda b_{1n}) \right\} z_n = 0 \quad (3.2.10)$$

$$\left\{ \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_n^r S_1^r}{t_{r-\lambda}} - (c_{n1} - \lambda b_{n1}) \right\} z_1 + \left\{ \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_n^r S_n^r}{t_{r-\lambda}} - (c_{nn} - \lambda b_{nn}) \right\} z_n = 0.$$

Homogeni sistem linearnih jednačina po z_1 i z_n

(3.2.10) ima netrivialno rešenje, pa je

$$\begin{vmatrix} \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_1^r S_1^r}{t_{r-\lambda}} - (c_{11} - \lambda b_{11}); & \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_1^r S_n^r}{t_{r-\lambda}} - (c_{1n} - \lambda b_{1n}) \\ \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_n^r S_1^r}{t_{r-\lambda}} - (c_{n1} - \lambda b_{n1}); & \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_n^r S_n^r}{t_{r-\lambda}} - (c_{nn} - \lambda b_{nn}) \end{vmatrix} = 0,$$

ili razvijanjem determinante:

$$\left\{ \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_1^r \overline{S}_1^r}{r^{-\lambda}} - (c_{11} - \lambda b_{11}) \right\} \left\{ \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_n^r \overline{S}_n^r}{r^{-\lambda}} - (c_{nn} - \lambda b_{nn}) \right\} -$$

$$- \left\{ \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_1^r \overline{S}_n^r}{r^{-\lambda}} - (c_{n1} - \lambda b_{n1}) \right\} \left\{ \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\overline{S}_1^r \overline{S}_n^r}{r^{-\lambda}} - (c_{1n} - \lambda b_{1n}) \right\} = 0. \quad (3.2.11)$$

Jednačina (3.2.11) je eskalatorni oblik karakteristične jednačine matrice C_n u odnosu na matricu B_n . Po formi ta jednačina je analogna jednačini (3.1.9), za $B_n = I$. Ipak u izrazima \overline{S}_1^r , \overline{S}_n^r i $\overline{S}_1^r \overline{S}_n^r$, $\overline{S}_n^r \overline{S}_1^r$ figurirše λ , zato označimo sa

$$P_1^r = \sum_{p=2}^{n-1} (c_{p1} - \lambda b_{p1}) y_p^r, \quad P_n^r = \sum_{p=2}^{n-1} (c_{pn} - \lambda b_{pn}) y_p^r,$$

$$Q_1^r = \sum_{p=2}^{n-1} b_{p1} y_p^r, \quad Q_n^r = \sum_{p=2}^{n-1} b_{pn} y_p^r,$$

$$\overline{P}_1^r = \sum_{p=2}^{n-1} (c_{1p} - \lambda b_{1p}) x_p^r, \quad \overline{P}_n^r = \sum_{p=2}^{n-1} (c_{np} - \lambda b_{np}) x_p^r,$$

$$\overline{Q}_1^r = \sum_{p=2}^{n-1} b_{1p} x_p^r, \quad \overline{Q}_n^r = \sum_{p=2}^{n-1} b_{np} x_p^r,$$

tada je

$$\overline{S}_1^r = \overline{P}_1^r + (\lambda - \lambda) \overline{Q}_1^r, \quad (3.2.12)$$

$$\overline{S}_n^r = \overline{P}_n^r + (\lambda - \lambda) \overline{Q}_n^r, \quad (3.2.13)$$

$$S_n^r = P_n^r + (\zeta_r - \lambda) Q_n^r, \quad (3.2.14)$$

$$\bar{S}_n^r = \bar{P}_n^r + (\bar{\zeta}_r - \lambda) \bar{Q}_n^r. \quad (3.2.15)$$

Izrazi (3.2.12) - (3.2.15) za S_1^r , \bar{S}_1^r , S_n^r i \bar{S}_n^r zamenjeni u jednačinu (3.2.11) transformišu je u oblik koji je pogodniji za računanje. Tako je:

$$\sum_{r=2}^{n-1} \frac{S_1^r S_n^r}{\zeta_r - \lambda} = \sum_{r=2}^{n-1} \frac{P_1^r P_n^r}{\zeta_r - \lambda} + \sum_{r=2}^{n-1} (P_1^r Q_n^r + P_n^r Q_1^r) + \sum_{r=2}^{n-1} \zeta_r Q_1^r Q_n^r - \lambda \sum_{r=2}^{n-1} Q_1^r Q_n^r,$$

$$\sum_{r=2}^{n-1} \frac{\bar{S}_1^r \bar{S}_n^r}{\bar{\zeta}_r - \lambda} = \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\bar{P}_1^r \bar{P}_n^r}{\bar{\zeta}_r - \lambda} + \sum_{r=2}^{n-1} (\bar{P}_1^r \bar{Q}_n^r + \bar{P}_n^r \bar{Q}_1^r) + \sum_{r=2}^{n-1} \bar{\zeta}_r \bar{Q}_1^r \bar{Q}_n^r - \lambda \sum_{r=2}^{n-1} \bar{Q}_1^r \bar{Q}_n^r,$$

$$\sum_{r=2}^{n-1} \frac{S_1^r \bar{S}_n^r}{\zeta_r - \lambda} = \sum_{r=2}^{n-1} \frac{P_1^r \bar{P}_n^r}{\zeta_r - \lambda} + \sum_{r=2}^{n-1} (P_1^r \bar{Q}_n^r + \bar{P}_n^r Q_1^r) + \sum_{r=2}^{n-1} \zeta_r Q_1^r \bar{Q}_n^r - \lambda \sum_{r=2}^{n-1} Q_1^r \bar{Q}_n^r,$$

$$\sum_{r=2}^{n-1} \frac{\bar{S}_1^r S_n^r}{\bar{\zeta}_r - \lambda} = \sum_{r=2}^{n-1} \frac{\bar{P}_1^r P_n^r}{\bar{\zeta}_r - \lambda} + \sum_{r=2}^{n-1} (\bar{P}_1^r Q_n^r + P_n^r \bar{Q}_1^r) + \sum_{r=2}^{n-1} \bar{\zeta}_r \bar{Q}_1^r Q_n^r - \lambda \sum_{r=2}^{n-1} \bar{Q}_1^r Q_n^r.$$

Za određivanje q-te komponente vektora Z pomoćno jednačinu (3.2.3) q-om komponentom vektora X^r i saberimo po r:

$$\sum_{r=2}^{n-1} x_q^r \sum_{k=2}^{n-1} z_k \sum_{p=2}^{n-1} b_{pk} y_p^r = - \sum_{r=2}^{n-1} \frac{z_1 S_1^r + z_n S_n^r}{\zeta_r - \lambda} \cdot x_q^r.$$

Izmenjujući red sabiranja i koristeći relacije

$$\sum_{r=2}^{n-1} x_q^r \sum_{p=2}^{n-1} b_{kp} y_p^r = \delta_{qk}, \quad (\delta - \text{Kronecker-ov simbol}),$$

imamo

$$z_q = - \sum_{r=2}^{n-1} \frac{z_1 S_1^r + z_n S_n^r}{\hat{q}_r - \lambda} x_q^r, \quad (q = 2, 3, \dots, n-1). \quad (3.2.16)$$

Iz prve jednačine sistema (3.2.10) imamo

$$\frac{z_1}{z_n} = - \frac{\sum_{r=2}^{n-1} \frac{S_1^r S_n^r}{\hat{q}_r - \lambda} - (c_{1n} - \lambda b_{1n})}{\sum_{r=2}^{n-1} \frac{S_1^r S_1^r}{\hat{q}_r - \lambda} - (c_{11} - \lambda b_{11})}, \quad (3.2.17)$$

a iz (3.2.16)

$$\frac{z_q}{z_n} = - \sum_{r=2}^{n-1} \frac{z_1 S_1^r + z_n S_n^r}{\hat{q}_r - \lambda} x_q^r, \quad (q = 2, 3, \dots, n-1).$$

Posle izračunavanja $\frac{z_1}{z_n}$ iz formule (3.2.17) moguće je izračunati odnose ostale n-2 komponente karakterističnog vektora Z (matrice C_n u odnosu na matricu B_n) i komponente z_n .

G L A V A IV

PROBLEM KARAKTERISTIČNIH VREDNOSTI NEKIH MATRICA
SPECIJALNOG OBLIKA I PRIMENA TROUGLASTIH RAZLAGANJA
MATRICA U METODAMA INTERPOLACIJE

4.1. O REŠAVANJU DELIMIČNOG PROBLEMA KARAKTERISTIČNIH
VREDNOSTI NEKIH MATRICA SPECIJALNOG OBLIKA /7/

Neka je data matrica A_m oblika

$$A_m = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 & A_{1r} \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{r-1,r-1} & A_{r-1,r} \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{r,r-1} & A_{rr} \end{bmatrix}, \quad (4.1.1)$$

gde su A_{ij} kvadratne matrice reda $m \geq 1$, ($i, j = 1, 2, \dots, r$),
a 0 nula matrica.

Oblik matrice (4.1.1) omogućava da se u terminima blokova dobiju formule koje omogućavaju primenu Newton-ove metode i metoda interpolacije za rešavanje delimičnog problema karakterističnih vrednosti.

U 4.1.1. izvedene su formule Newton-ove metode za određivanje, sa proizvoljnom tačnošću, izolovane karakteristične vrednosti matrice A_m .

U 4.1.2. izložen je postupak koji omogućava prelaz sa rešavanja karakteristične matrice jednačine na rešavanje skalarne jednačine i rešavanje tako dobijene skalarne jednačine poznatim metodama za određivanje nula skalarne funkcije.

U 4.1.3. date su rekurentne formule za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina

$$A_m X = G ,$$

koje predstavljaju poseban interes i, specijalno, mogu se koristiti za određivanje karakterističnog vektora, koji odgovara izračunatoj karakterističnoj vrednosti matrice A_m .

U 4.1.4. razmatra se uopštenje postupaka izloženih u 4.1.1. - 4.1.3. (/7/). Uopštenje je u tom smislu što se posmatra matrica tipa (4.1.1) sa proizvoljnim kvadratnim matricama A_{ii} , ($i = 1, 2, \dots, r$).

4.1.1. Za određivanje, sa proizvoljnom tačnošću, izolovane karakteristične vrednosti matrice (4.1.1) primenimo Newton-ovu metodu.

Slučaj kada je $m = 1$. Neka je

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & a_{1n} \\ & a_{22} & & 0 & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} , \quad (4.1.2)$$

$$\Delta(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = \det A_1(\lambda).$$

Poznato je /38/, da je

$$\frac{\Delta(\lambda_k)}{\left[\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) \right]_{\lambda=\lambda_k}} = - \left[\text{tr} A_1^{-1}(\lambda_k) \right]^{-1}.$$

Za izračunavanje $\text{tr} A_1^{-1}(\lambda_k)$, ne tražeći inverznu matricu matrice $A_1(\lambda_k)$, nađimo razvoj

$$A_1^{-1}(\lambda_k) = R_k L_k ,$$

gde je R_k desna trouglasta matrica sa jediničnom glavnom dijagonalom, a L_k leva trouglasta matrica.

Zbog oblika matrice (4.1.2), za bilo koje fiksirano $\lambda \neq a_{ii}$, ($i = 1, 2, \dots, n-1$), lako je dobiti razvoj.

$$A_1(\lambda_k) = C_k B_k,$$

gde je

$$C_k = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda_k & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & a_{n-1,n-1}-\lambda_k & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & c_{nn}(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \frac{a_{1n}}{a_{11}-\lambda_k} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}-\lambda_k} \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$c_{nn}(\lambda_k) = a_{nn}-\lambda_k - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni}a_{in}}{a_{ii}-\lambda_k}.$$

Vodeći računa o tome da $R_k = B_k^{-1}$ ima isti oblik kao i matrica B_k i da je matrica L_k

$$L_k = C^{-1} = \begin{bmatrix} (a_{11}-\lambda_k)^{-1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & (a_{n-1,n-1}-\lambda_k)^{-1} & \\ \frac{a_{n1}}{c_{nn}(\lambda_k)(a_{11}-\lambda_k)} & \dots & \frac{a_{n,n-1}}{c_{nn}(\lambda_k)(a_{n-1,n-1}-\lambda_k)} & \frac{1}{c_{nn}(\lambda_k)} \end{bmatrix},$$

nalazimo

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A_1^{-1}(\lambda_k) &= \operatorname{tr}(R_k L_k) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_{ii} - \lambda_k} + \frac{1}{c_{nn}(\lambda_k)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni} a_{in}}{(a_{ii} - \lambda_k)^2} + 1 \right] = \omega_k . \end{aligned}$$

Tada je Newton-ova metoda, za nalaženje približnih vrednosti karakteristične vrednosti λ^* matrice (4.1.2), data formulom

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \frac{1}{\omega_k} , \quad (k = 0, 1, 2, \dots) . \quad (4.1.3)$$

Niz (4.1.3) konvergira ka određenoj karakterističnoj vrednosti λ^* , ako je $a_{ii} - \lambda_k \neq 0$, ($i = 1, 2, \dots, n-1; k = 0, 1, 2, \dots$), i konvergencija je kvadratna, ako je λ_0 dovoljno blisko ka λ^* za primenu Newton-ove metode.

Slučaj kada je $m > 1$. Isto tako, kao i u slučaju kada je $m = 1$ za određivanje, sa proizvoljnom tačnošću, izolovane karakteristične vrednosti λ^* bločne matrice (4.1.1) može se izračunati $\operatorname{tr}(A_m^{-1}(\lambda_k))$, ne tražeći inverznu matricu matrice $A_m(\lambda_k)$. U tom slučaju formule Newton-ove metode su

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \frac{1}{\Omega_k} , \quad (k = 0, 1, 2, \dots) , \quad (4.1.4)$$

gde je

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \operatorname{tr} \left[\sum_{i=1}^{r-1} (A_{ii} - \lambda_k I)^{-1} + C_{rr}^{-1}(\lambda_k) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{r-1} (A_{ii} - \lambda_k I)^{-1} A_{ir} C_{rr}^{-1}(\lambda_k) A_{ri} (A_{ii} - \lambda_k I)^{-1} \right] , \end{aligned}$$

$$C_{rr}(\lambda_k) = A_{rr} - \lambda_k I - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri} (A_{ii} - \lambda_k I)^{-1} A_{ir} ,$$

I - jedinična matrica reda m.

Niz (4.1.4) konvergira ka određenoj karakterističnoj vrednosti λ^* , ako su sve matrice $A_{ii} - \lambda_k I$, ($i = 1, 2, \dots, r-1$; $k = 0, 1, 2, \dots$), nesusingularne i konvergencija je kvadratna (pod uslovima za konvergenciju Newton-ove metode).

4.1.2. Opisaćemo proces za rešavanje delimičnog problema karakterističnih vrednosti matrice (4.1.1), koji dozvoljava primenu poznatih metoda za određivanje nula skalarne funkcije ne pribegavajući, pri tome, traženju koeficijenata karakterističnog polinoma.

Proces se zasniva na primeni elementarnih transformacija Gauss-ovog tipa koje omogućavaju prelaz sa rešavanja jednačine

$$\det(A_m - \lambda I) = 0 \quad (4.1.5)$$

na rešavanje skalarne jednačine

$$f(\lambda) = 0 , \quad (4.1.6)$$

čiji se koreni poklapaju sa različitim korenima jednačine (4.1.5). U tom cilju navedeno je pravilo za određivanje $f(\lambda)$ (a takođe i u kojem slučaju $f'(\lambda)$) za fiksirano λ . Ovdje su korišćene ideje iz rada /11/, primenjujući elementarne transformacije Gauss-ovog tipa, umesto ortogonalnih koje su korišćene u /11/.

Slučaj kada je $m = 1$. Pri prelazu sa k-og koraka na (k+1)-vi korak prvo se, pomoću permutacija prve (n-1)-ne vrste i kolone, matrica

$$A^{(0)} = A_1 - \lambda_k I = (a_{ij}^{(0)}) ,$$

(pretpostavlja se da je $\lambda_k \neq a_{ii}$, ($i = 1, 2, \dots, n-1$)), transformiše u oblik

$$A^{(1)} = P_1 A^{(0)} P_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & & & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(1)} & 0 & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{n-1,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{n,n-1}^{(1)} & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix},$$

gde je

$$|a_{11}^{(1)}| \geq \dots \geq |a_{n-1,n-1}^{(1)}| > 0.$$

Ovde je P_1 rezultujuća matrica permutacija. Očigledno je da se elementi matrice $A^{(1)}$ razlikuju od elemenata matrice $A^{(0)}$ samo rasporedom.

Dalje se od matrice $A^{(1)}$ prelazi na matricu $A^{(2)}$ oblika

$$A^{(2)} = W A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & & & a_{1n}^{(2)} \\ & a_{22}^{(2)} & 0 & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{n-1,n-1}^{(2)} & a_{n-1,n}^{(2)} \\ a_{n1}^{(2)} & 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix},$$

gde je

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, n),$$

$$a_{nn}^{(2)} = a_{nn}^{(1)} - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{a_{ni}^{(1)} a_{in}^{(1)}}{a_{ii}^{(1)}}$$

Odakle se /11/, ako je $|c_{nn}| \leq |a_{n-1,n-1}^{(2)}|$, za $f(\lambda_k)$ može uzeti

$$f(\lambda_k) = \text{sign} \prod_{i=1}^{n-1} a_{ii}^{(2)} c_{nn} .$$

Ako je $|c_{nn}| > |a_{n-1,n-1}^{(2)}|$, onda je potrebno sa matrice $A^{(2)}$ preći na matricu $\bar{A}^{(2)} = KA^{(2)}$, gde je

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{11}^{(2)}}{a_{n1}^{(2)}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

$$\gamma_{n1} = \left| \frac{c_{nn}}{a_{n-1,n-1}^{(2)}} \right| - 1 .$$

Takva transformacija obezbeđuje važnost nejednakosti

$$|\bar{c}_{11}| \geq \dots \geq |\bar{c}_{n-1,n-1}| = |c_{nn}| ,$$

gde je

$$\bar{c}_{11} = \left| \frac{c_{nn}}{a_{n-1,n-1}^{(2)}} \right| a_{11}^{(2)}$$

i

$$\bar{c}_{ii} = a_{ii}^{(2)}, \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) .$$

Ovde su sa \bar{c}_{ii} označeni elementi leve trouglaste matrice

u razvoju $\bar{A}^{(2)} = CB$, gde je B desna trouglasta matrica sa jediničnom glavnom dijagonalom.

Voдеći računa o tome da je $\det A^{(0)} = \det \bar{C}$ moguće je, kao i ranije, za $f(\lambda_k)$ uzeti

$$f(\lambda_k) = \text{sign} \left[\begin{array}{ccc} a_{11}^{(2)} & \dots & a_{n-1,n-1}^{(2)} \\ & & c_{nn} \end{array} \right] \left| a_{n-1,n-1}^{(2)} \right|.$$

Sumirajući izloženo, dobija se pravilo za izračunavanje $f(\lambda_k)$ u bilo kojoj fiksiranoj tački $\lambda_k \neq a_{ii}$, ($i = 1, 2, \dots, n-1$):

1) Dijagonalni elementi a_{ii} date, početne, matrice zamenjuju se elementima $a_{ii} - \lambda_k$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

2) Izračunava se broj

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{nn} &= \left[\text{sign} \prod_{i=1}^{n-1} (a_{ii} - \lambda_k) \right] c_{nn} = \\ &= \left[\text{sign} \prod_{i=1}^{n-1} (a_{ii} - \lambda_k) \right] \left[a_{nn} - \lambda_k - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni} a_{in}}{a_{ii} - \lambda_k} \right] \end{aligned}$$

i uzima se

$$f(\lambda_k) = \begin{cases} \tilde{c}_{nn}, & \text{ako je } \left| \tilde{c}_{nn} \right| \leq \min_i \left| a_{ii} - \lambda_k \right|; \\ \text{sign} \tilde{c}_{nn} \min_i \left| a_{ii} - \lambda_k \right|, & \text{ako je } \left| \tilde{c}_{nn} \right| > \min_i \left| a_{ii} - \lambda_k \right|, \end{cases}$$

gde se minimum uzima po svim $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Sada se za rešavanje jednačine (4.1.6) može primeniti bilo koja od poznatih metoda za određivanje nula funkcije ako su poznate njene vrednosti u pojedinim tačkama, ne znajući eksplicitno zavisnost $f(\lambda)$ od parametra λ , (na primer metoda Muller-a, metoda sečice i druge metode zasnovane na ideji interpolacije /44/).

Neka traženi koren nije jednak ni jednom od elementa a_{ii} , ($i = 1, 2, \dots, n-1$), date matrice i neka je početna približna vrednost λ_0 , (ili približna vrednost dobijena u toku računanja) takva da je $|c_{nn}(\lambda_0)| \leq \min_{i=1, 2, \dots, n-1} |a_{ii} - \lambda_0|$

i znak proizvoda $\prod_{i=1}^{n-1} (a_{ii} - \lambda)$ se stabilizovao za svako $\lambda = \lambda_k$

iz posmatrane okoline.

Tada se za $f(\lambda)$ u (4.1.6) može uzeti

$$f(\lambda) = \left[\text{sign} \prod_{i=1}^{n-1} (a_{ii} - \lambda_0) \right] \left[a_{nn} - \lambda - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni} a_{in}}{a_{ii} - \lambda} \right].$$

Ovde su a_{ij} elementi date, početne, matrice. Odatle sledi da se za dobijanje korena jednačine (4.1.6) mogu primeniti metode, gde treba znati ne samo vrednost funkcije, nego i vrednost njenog izvoda u tački (metoda Newton-a, Laguerre-a i dr.) /30/, /44/.

Slučaj $m > 1$. Sve što je rečeno za $m = 1$ važi i za slučaj kada je $m > 1$.

Postupajući kao i ranije, jednačinu

$$\det(A_m - \lambda I) = 0 \quad (4.1.7)$$

zamenjujemo skalarnom jednačinom

$$\mathcal{F}(\lambda) = 0. \quad (4.1.8)$$

Izračunavanje $\mathcal{F}(\lambda)$, za vrednost $\lambda = \lambda_k$, koja se ne poklapa ni sa jednom od karakterističnih vrednosti matrice A_{ii} , ($i = 1, 2, \dots, r-1$), vrši se na sledeći način:

1) Dijagonalni blokovi A_{ii} , ($i = 1, 2, \dots, r-1$), date, početne, matrice zamenjuju se blokovima $A_{ii} - \lambda_k I$.

2) Izračunava se vrednost tako dobijene determinante

$$\det \tilde{C}_{rr}(\lambda_k) = \left[\text{sign} \prod_{i=1}^{r-1} \det(A_{ii} - \lambda_k I) \right] \det \left[A_{rr} - \lambda_k I - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri} (A_{ii} - \lambda_k I)^{-1} A_{ir} \right]$$

i uzima se

$$\mathcal{F}(\lambda_k) = \begin{cases} \det \tilde{C}_{rr}(\lambda_k), & \text{ako je } \left| \det \tilde{C}_{rr}(\lambda_k) \right| \leq \min_i \left| \det(A_{ii} - \lambda_k I) \right| ; \\ \text{signdet} \tilde{C}_{rr}(\lambda_k) \min_i \left| \det(A_{ii} - \lambda_k I) \right|, & \text{ako je } \left| \det \tilde{C}_{rr}(\lambda_k) \right| > \min_i \left| \det(A_{ii} - \lambda_k I) \right| , \end{cases}$$

gde se minimum uzima po svim $i = 1, 2, \dots, r-1$.

Kao i u slučaju kada je $m = 1$, za rešavanje jednačine (4.1.8), mogu se primeniti sve poznate metode za određivanje nula funkcije ako su poznate njene vrednosti.

Ako se u nekoj okolini korena λ^* , koji se izraču-

nava, $\text{sign} \prod_{i=1}^{r-1} \det(A_{ii} - \lambda I)$ stabilizovao i ako je ispunjena

nejednakost $\det \tilde{C}_{rr}(\lambda_k) = \min_{i=1, 2, \dots, r-1} \det(A_{ii} - \lambda_k I)$, za bilo koje λ_k

iz posmatrane okoline, tada se za $\mathcal{F}(\lambda)$ može uzeti

$$\mathcal{F}(\lambda) = \left[\text{sign} \prod_{i=1}^{r-1} \det A_{ii}^{(0)} \right] \det \mathcal{D}(\lambda) , \quad (4.1.9)$$

gde je $A_{ii}^{(0)} = A_{ii} - \lambda_0 I$, λ_0 tačka iz pomenute okoline i

$$B_m = \begin{bmatrix} I & & & A_{11}^{-1}A_{1r} \\ & I & 0 & A_{22}^{-1}A_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & I \\ 0 & & & A_{r-1,r-1}^{-1}A_{r-1,r} \\ & & & I \end{bmatrix},$$

odakle je $A_m^{-1} = B_m^{-1}C_m^{-1}$, gde je

$$B_m^{-1} = \begin{bmatrix} I & & & -A_{11}^{-1}A_{1r} \\ & I & 0 & -A_{22}^{-1}A_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & I \\ 0 & & & -A_{r-1,r-1}^{-1}A_{r-1,r} \\ & & & I \end{bmatrix}, \quad (4.1.12)$$

$$C_m^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & & & & \\ & A_{22}^{-1} & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_{r-1,r-1}^{-1} & & \\ 0 & & & & & \\ \dots & & & & & \\ -C_{rr}^{-1}A_{r1}A_{11}^{-1} & -C_{rr}^{-1}A_{r2}A_{22}^{-1} & \dots & -C_{rr}^{-1}A_{r,r-1}A_{r-1,r-1}^{-1} & & C_{rr}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.1.13)$$

gde je

$$C_{rr} = A_{rr} - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri} (A_{ii} - \lambda_k I)^{-1} A_{ir}, \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Za početnu približnu vrednost \bar{U}^0 može se uzeti vektor $(1, 1, \dots, 1)^T$ /30/.

Proces po formulama (4.1.15) treba produžavati do poklapanja dve uzastopne aproksimacije sa računom tačnošću (jednu do dve iteracije). Dalje treba obaviti još jedan iterativni postupak izračunavajući skalarni proizvod sa dvos-
trukom tačnošću.

4.1.4. Izloženi postupci u 4.1.1. - 4.1.3. daju se uopštiti u tom smislu što se umesto matrica tipa (4.1.1), čiji su elementi kvadratne podmatrice A_{ij} , reda $m \geq 1$, ($i, j = 1, 2, \dots, r$), posmatraju matrice istog tipa sa proizvoljnim kvadratnim matricama A_{ii} , ($i = 1, 2, \dots, r$). Uopštenje je moguće zbog toga što su sva matrična sabiranja i množenja u tom slučaju definisana.

Tako u opštem slučaju za izraz (4.1.4) Ω_k treba računati po formuli

$$\begin{aligned} \Omega_k = & \text{tr}(A_{11} - \lambda_k I_1)^{-1} + \text{tr}(A_{22} - \lambda_k I_2)^{-1} + \dots + \text{tr}(A_{r-1, r-1} - \lambda_k I_{r-1})^{-1} + \\ & + \text{tr} C_{rr}^{-1}(\lambda_k) + \text{tr} \sum_{i=1}^{r-1} (A_{ii} - \lambda_k I_i)^{-1} A_{ir} C_{rr}^{-1}(\lambda_k) A_{ri} (A_{ii} - \lambda_k I_i)^{-1}, \end{aligned}$$

gde je

$$C_{rr}(\lambda_k) = A_{rr} - \lambda_k I_r - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ri} (A_{ii} - \lambda_k I_i)^{-1} A_{ir},$$

I_i - jedinična matrica čiji je red jednak redu matrice A_{ii} .





Formule iz 4.1.2. za izračunavanje $\mathcal{F}(\lambda)$ i $\mathcal{F}'(\lambda)$, kao i sve formule iz 4.1.3. za rešavanje sistema (4.1.11), ostaju u važnosti, samo treba svaku razliku $A_{ii}-\lambda I$ zaminiti razlikom $A_{ii}-\lambda I_i$, ($i = 1, 2, \dots, r-1$).

Napomena. Sve posmatrane metode u 4.1.1. - 4.1.4. mogu se koristiti za rešavanje uopštenog problema karakterističnih vrednosti matrica tipa (4.1.1) sa proizvoljnim, dijagonalnim, kvadratnim matricama A_{ii} , ($i = 1, 2, \dots, r$). I opštije, sve posmatrane metode mogu se na očevidan način preneti i na slučaj kada su elementi matrica navedenog tipa analitičke funkcije parametra λ (videti /7/).

4.2. PRIMENA NEKIH TROUGLASTIH RAZLAGANJA MATRICA U METODAMA INTERPOLACIJE ZA REŠAVANJE PROBLEMA KARAKTERISTIČNIH VREDNOSTI

Razlaganja matrica na proizvod trouglastih matrica (videti rad B. Kurepe "On triangular matrices" /15/) koriste se za konstrukciju brojnih metoda za rešavanje problema algebre. U 4.1. već je korišćeno jedno trouglasto razlaganje matrice A_m . Ovde ćemo posmatrati neka druga trouglasta razlaganja nesingularnih matrica i njihova primenu u metodama interpolacije.

Matrica $A = (a_{ij})$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$), naziva se :

1. d-matrica ako je $a_{ij} = 0$ za $i < j$, ( - donja leva trouglasta matrica),
2. g-matrica ako je $a_{ij} = 0$ za $i > j$, ( - gornja desna trouglasta matrica),
3. l-matrica ako je $a_{ij} = 0$ za $i+j > n+1$, ( - leva gornja trouglasta matrica),
4. r-matrica ako je $a_{ij} = 0$ za $i+j < n+1$, ( - desna donja trouglasta matrica).

Za d-matrice i g-matrice kaže se da su trouglaste matrice prve vrste, a za l-matrice i r-matrice da su trouglaste matrice druge vrste, /15/.

Trouglaste matrice imaju niz značajnih osobina, tako na primer, zbir trouglastih matrica istog oblika je trouglasta matrica, proizvod trouglastih matrica istog oblika prve vrste je takođe matrica prve vrste, determinanta matrica prve vrste jednaka je proizvodu dijagonalnih elemenata, a determinanta matrica druge vrste jednaka je proizvodu dijagonalnih elemenata sa tačnošću do na znak, karakteristične vrednosti matrica prve vrste poklapaju se sa njihovim dijagonalnim elementima, inverzna matrica trouglaste matrice lako se izračunava i takođe je trouglasta matrica i t. d.

Trouglasto razlaganje matrice A_m u 4.1. dato je proizvodom d-matrice i g-matrice. Sada ćemo posmatrati raz-

laganje kvadratne nesingularne matrice na proizvod r-matrice i d-matrice.

Teorema 9. Matricu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

moguće je predstaviti u obliku proizvoda r-matrice i d-matrice, koje su nesingularne, uz uslov da je

$$a_{1n} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{2,n-1} & a_{2n} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, |A| \neq 0.$$

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti metodom matematičke indukcije. Za $n = 1$ tvrdjenje je tačno, jer je

$$(a_{1n}) = (b_{1n})(c_{nn}),$$

gde se jedan od činilaca može izabrati proizvoljno. Neka je teorema tačna za matricu A_{n-1} , $(n-1)$ -oga reda, pokazaćemo da je ona tačna za matricu A n -oga reda.

Razbijmo matricu A na blokove na sledeći način:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ \vdots & & & \\ & & A_{n-1} & \\ a_{n-1,1} & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & A_{n-1} \\ a_{n1} & V \end{bmatrix}.$$

Tražićemo takav razvoj matrice A da ona bude jednaka proizvodu matrice B i C , (r -matrice i d -matrice respektivno),

razbijajući ih na blokove na sledeći način:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_{n-1} \\ b_{n1} & x \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ y & C_{n-1} \end{bmatrix},$$

odakle je

$$BC = \begin{bmatrix} B_{n-1}y & B_{n-1}C_{n-1} \\ b_{n1}c_{11}+xy & xC_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Traženo razlaganje dobićemo ako je ispunjeno

$$B_{n-1}y = K,$$

$$B_{n-1}C_{n-1} = A_{n-1},$$

$$b_{n1}c_{11} + xy = a_{n1},$$

$$xC_{n-1} = V.$$

Kako je, po pretpostavci, $|A_{n-1}| \neq 0$, to je $|B_{n-1}| \neq 0$ i $|C_{n-1}| \neq 0$, pa se x i y jednoznačno određuju iz

$$x = VC_{n-1}^{-1},$$

$$y = B_{n-1}^{-1}K.$$

Elementi b_{n1} i c_{11} određuju se iz jednakosti

$$b_{n1}c_{11} = a_{n1} - xy,$$

Što je uvek moguće dajući jednome od tih brojeva proizvolj-

nu vrednost različita od nule. Time je teorema dokazana.

Iz dokaza teoreme sledi da se matrica A može razložiti, na jedan jedini način, na proizvod r i d trouglastih matrica ako se unapred fiksiraju dijagonalni elementi jedne od trouglastih matrica. Mi ćemo, ubuduće, za $r - d$ razlaganje uzimati da su dijagonalni elementi d -matrica jednaki jedinici.

Poput ranije uvedenih definicija za d i g matrice (prva vrsta) i l i r matrice (druga vrsta) uvode se definicije i za bločne trouglaste matrice sa kvadratnim dijagonalnim blokovima (kvazitrouglaste matrice) D i G matrice (bločne matrice prve vrste) i L i R matrice (bločne matrice druge vrste).

Mnoge osobine trouglastih matrica prenose se i na kvazi trouglaste matrice. Za nas je od posebnog interesa osobina da je determinanta bločne matrice prve vrste jednaka proizvodu determinanata njenih dijagonalnih blokova, a determinanta bločne matrice druge vrste jednaka proizvodu determinanata njenih dijagonalnih blokova sa tačnošću do na znak.

Za bločne matrice važi analogna teorema teorem 9:

Teorema 10. Matricu

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,n-1} & A_{1n} \\ A_{21} & \cdots & A_{2,n-1} & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \cdots & A_{n,n-1} & A_{nn} \end{bmatrix}$$

moguće je predstaviti u obliku proizvoda kvazitrouglaste R -matrice i D -matrice, koje su nesingularne, uz uslov da je

$$|A_{1n}| \neq 0, \begin{vmatrix} A_{1,n-1} & A_{1n} \\ A_{2,n-1} & A_{2n} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, |A| \neq 0.$$

Dokaz se izvodi po istom postupku kao i dokaz teoreme 9. Pretpostavićemo da je R - D razlaganje ostvareno za matricu $A_{n-1} = B_{n-1}C_{n-1}$ i kako je, po uslovima teoreme, $|A_{n-1}| \neq 0$, to sledi da je $|B_{n-1}| \neq 0$ i $|C_{n-1}| \neq 0$.

Neka je matrica A razbijena na blokove na sledeći način

$$A = \begin{bmatrix} Q & A_{n-1} \\ A_{nl} & W \end{bmatrix}.$$

Neka je dalje

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_{n-1} \\ B_{nl} & X \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ Y & C_{n-1} \end{bmatrix},$$

gde su B i C kvazitrouglaste matrice (R i D matrice respektivno), tada je matricna jednačina $A = BC$ ekvivalentna sledećem sistemu jednačina:

$$B_{n-1}Y = Q,$$

$$B_{n-1}C_{n-1} = A_{n-1},$$

$$B_{nl}C_{11} + XY = A_{nl},$$

$$XC_{n-1} = W,$$

odakle je

$$X = WC_{n-1}^{-1}, \quad Y = B_{n-1}^{-1}Q$$

i

$$B_{nl} = (A_{nl} - XY)C_{11}^{-1}, \quad (\text{ili } C_{11} = B_{nl}^{-1}(A_{nl} - XY)).$$

Za sva R - D razlaganja matrica $A(\lambda_i) = A - \lambda_i I$ kod kojih je A_{n-1} reda manjeg (ili jednakog) od $\left[\frac{N}{2} \right]$, (N - red matrice A i $\left[x \right]$ - ceo deo od x), matrica A_{n-1} ne zavisi od λ_i , što bitno uprošćava izračunavanja vrednosti brojnih determinanata $\det A(\lambda_i) = \det B(\lambda_i)$, potrebnih za primenu metoda interpolacije.

Kako je (zbog izbora dijagonalnih elemenata) $\det C = 1$ i kao posledica toga $\det B_{n-1} = \det A_{n-1}$, to je

$$\det B = \det A_{n-1} \det B_{nr}$$

pa se za svako λ_i inverzna matrica matrice A_{n-1} samo jedanput računa, što nije slučaj u D - G razlaganju.

Za opšteni problem karakterističnih vrednosti razlaganja R - D mogu se primeniti u metodama interpolacije, ali (u opštem slučaju) ne uprošćavaju problem. Specijalno, na matricu oblika

$$\hat{A}_n = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 & A_{1r} \\ A_{21} & 0 & \dots & A_{2,r-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ A_{r-1,1} & A_{r-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{r,r-1} & A_{rr} \end{bmatrix},$$

sa proizvoljnim kvadratnim matricama na kodijagonali, čiji su elementi analitičke funkcije parametra λ , mogu se primeniti sve metode izložene u 4.1., ako se umesto D - G razlaganja primeni R - D razlaganje.

U 4.1. i 4.2. posmatrali smo D - G i R - D razlaganje. Ta razlaganja su pogodna za rešavanje problema karakterističnih vrednosti pojedinih tipova matrica primenom metoda interpolacije. Kako su, pri tome, izračunavanja vrednosti determinanata od bitnog značaja, ostaje još da kaže-

mo nešto više o znaku determinanata tih matrica. Kod D i G matrica determinanta je, kako je već napomenuto, jednaka proizvodu determinanata dijagonalnih blokova, dok je determinanta R - matrice jednaka proizvodu determinanata

dijagonalnih blokova i činioca $(-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$, (ili $(-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$, ako je red matrice - N - paran broj, i $(-1)^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}$, ako je N neparan broj).

To sledi otuda što se permutacijom vrsta (ili kolona) R - matrica transformiše u D - matricu (odnosno G - matricu), pri čemu svaka permutacija menja znak determinante matrice čije se dve vrste (kolone) permutuju.

Sva trouglasta razlaganja nesingularnih matrica na proizvod dve trouglaste (data u radu B. Kurepe /15/):

- 1) $\begin{matrix} \triangle & \nabla \\ & \end{matrix} (D - G)$ razlaganje,
- 2) $\begin{matrix} \triangle & \nabla \\ & \end{matrix} (D - L)$ razlaganje,
- 3) $\begin{matrix} \nabla & \triangle \\ & \end{matrix} (G - D)$ razlaganje,
- 4) $\begin{matrix} \nabla & \triangle \\ & \end{matrix} (G - R)$ razlaganje,
- 5) $\begin{matrix} \nabla & \triangle \\ & \end{matrix} (L - G)$ razlaganje,
- 6) $\begin{matrix} \nabla & \triangle \\ & \end{matrix} (L - L)$ razlaganje,
- 7) $\begin{matrix} \triangle & \nabla \\ & \end{matrix} (R - D)$ razlaganje
- i 8) $\begin{matrix} \triangle & \triangle \\ & \end{matrix} (R - R)$ razlaganje,

moгу se primeniti u metodama interpolacije na način kako je to već pokazano u dva posmatrana razlaganja i mogu se, sa obzirom na znak njihovog proizvoda, podeliti u dve grupe:

I) D - G, G - D, L - L i R - R (prva grupa) - determinanta proizvoda tih matrica jednaka je proizvodu determinanata njihovih dijagonalnih blokova,

II) D - L, G - R, L - G i R - D (druga grupa) - determinanta proizvoda tih matrica jednaka je proizvodu determinanata njihovih dijagonalnih blokova i činioca $(-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$.

Z A K L J U Č A K

Predmet rada su metode eskalacije i interpolacije za rešavanje problema karakterističnih vrednosti matrica, kao i uopštenog problema karakterističnih vrednosti matrica.

Rad se sastoji iz četiri glave. Prva glava sadrži postavku problema karakterističnih vrednosti matrica i uopštenog problema karakterističnih vrednosti matrica, kao i neke važnije teoreme koje se odnose na te probleme. U drugoj glavi date su definicije potpunog i delimičnog problema karakterističnih vrednosti matrica, zatim metoda eskalacije i metoda interpolacije, kao i metoda koja se zasniva na ideji interpolacije - metoda kvadratne interpolacije (metoda Muller-a) i metoda neodređenih koeficijenata.

Treća glava sadrži metode središnje eskalacije za rešavanje problema karakterističnih vrednosti i uopštenog problema karakterističnih vrednosti matrica. U ovim se metodama induktivnim postupkom formira karakteristična jednačina i nalaze karakteristične vrednosti i karakteristični vektori matrica A_k (u odnosu na matricu B_k - za uopšteni problem) i njima transponovanih (konjugovanih) matrica, pri čemu se A_k dobija središnjim uokviravanjem matrice A_{k-2} . Data je i karakteristična jednačina koja odgovara uokviravanju matrice A_{k-4} na matricu A_k .

U četvrtoj glavi razmatra se primena Newton-ove metode i metoda koje se zasnivaju na ideji interpolacije za rešavanje delimičnog problema karakterističnih vrednosti matrica A_m specijalnog oblika, čiji su svi elementi nule izuzev elemenata na glavnoj dijagonali, a takođe i u poslednjoj vrsti i koloni, koji su kvadratne matrice A_{ij} , ($i, j = 1, 2, \dots, r$), istog reda $m \geq 1$. Posmatraju se, takođe, i matrice tipa A_m sa proizvoljnim kvadratnim matricama na

glavnoj dijagonali. Oblik matrice A_m omogućava da se u terminima blokova dobiju formule koje omogućavaju primenu Newton-ove metode i metoda interpolacije, što suštinski ekonomičnije memoriju i mašinsko vreme (pri rešavanju problema karakterističnih vrednosti matrice A_m koristeći elektronske računare). Izvedene su formule Newton-ove metode za određivanje izolovane karakteristične vrednosti matrice A_m (navedeni su uslovi za konvergenciju). Izložen je postupak, zasnovan na korišćenju elementarnih transformacija Gauss-ovog tipa, koji omogućava prelaz sa rešavanja karakteristične matrične jednačine na rešavanje skalarne jednačine i rešavanje tako dobijene skalarne jednačine poznatim metodama za određivanje nula skalarne funkcije. Dane su rekurentne formule za rešavanje sistema linearnih jednačina sa matricom koeficijenata oblika A_m .

Primene trouglastih razlaganja nesingularnih matrica (na proizvod dve trouglaste matrice) u metodama interpolacije izložene su, takođe, u četvrtoj glavi.

Doprinosi ovoga rada dati su u trećoj i četvrtoj glavi.

Metoda središnjeg uokviravanja za inverziju matrica, rešavanje sistema linearnih jednačina i izračunavanje vrednosti determinanata, na kojoj se zasnivaju metode iz treće glave data je u radovima /5/ i /6/ B.D. Vulićevića.

Metode izložene u radu /7/ B.D. Vulićevića i V.K. Kublanovske uopštene su u tom smislu što se umesto matrica na glavnoj dijagonali, koje su kvadratne i istog reda, posmatraju proizvoljne kvadratne matrice.

Pored trouglastog razlaganja korišćenog u radu /7/, trouglasta razlaganja posmatrana u radu /15/ B. Kurepe, mogu se uspešno primeniti na rešavanje uopštenog problema karakterističnih vrednosti matrica oblika \hat{A}_m . Pokazano je, takođe, u kojim slučajevima pomenuta razlaganja uprošćavaju izračunavanje vrednosti determinanata - potrebna u metodama interpolacije.

CITIRANA LITERATURA

1. Aljančić S.: Uvod u funkcionalnu analizu, izd. Građevinarska knjiga, Beograd, 1963., str. 190.
2. Anđelić T.P.: Matrice, izd. Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1965., str. 266.
3. Berezin I.S. i Židkov N.P.: Metody vyčislenij, izd. "Nauka", Moskva, 1966., str. 632.
4. Voevodin V.V.: Čislennye metody algebry, izd. "Nauka", Moskva, 1966., str. 243.
5. Vulićević B.D.: Ob odnom sposobe obraščeniija matriic, Zapiski naučnyh seminarov LOMI im. V.A. Steklova AN SSSR, Tom 18, Leningrad, 1970., str. 96-103, RŽM, 1971., 6B856.
6. Vulićević B.D.: Tačne metode za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina i inverzija matrica, magistarska teza, Beograd, 1970., str. 44.
7. Vulićević B.D. i Kublanovskaja V.N.: K rešeniju častičnoj problemy sobstvennyh značeniij nekotoryh matriic specialjnogo vida, Zapiski naučnyh seminarov LOMI im. V.A. Steklova AN SSSR, Tom 18, Leningrad, 1970., str. 104-115, RŽM, 1971., 6B855.
8. Gantmaher F.R.: Teorija matriic, izd. "Nauka", Moskva, 1967., str. 575.
9. Demidovič B.P., Maron I.A.: Osnovy vyčislitel'noj matematiki, Fizmatgiz, Moskva, 1963., str. 660.
10. Ževeržeev V.F., Kaljnickij L.A., Sapogov N.A.: Special'nyj kurs vysšej matematiki dlja vtuzov, izd. "Vyššaja škola", Moskva, 1970., str. 298.

11. Kublanovskaja V.N.: O primenenii metoda WJjutona k opredeleniju sobstvennyh značenij λ -matrice, DAN SSSR, 1959., 188, 5, str. 1004-1005.
12. Kublanovskaja V.N. i Paddeeva V.N.: Vyčisliteljnye metody dlja rešenija obobščennoj problemy sobstvennyh značenij, Trudy Matem. in-ta AN SSSR, 1962., 66, str. 147-165.
13. Kunc K.S.: Čislennyj analiz, izd. "Tehnika", Kiev, 1964., str. 390.
14. Kurepa Đ.: Viša algebra, izd. Šk. knjiga, Zagreb, 1965., str. 32+765 (I) i 20+764-1432 (II).
15. Kurepa Đ.: On triangular matrices, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Serija II, t. 20, br. 1-2, Zagreb, 1965., str. 3-22.
16. Kurepa S.: Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967., str. 786.
17. Kuroš A.G.: Kurs vysšej algebry, Gos. izd. fiz.-mat. lit., Moskva, 1962., str. 451.
18. Lancoš K.: Praktičeskie metody prikladnogo analiza, Gos. izd. fiz.-mat. lit., Moskva, 1961., str. 524.
19. Mikeladze Š.E.: O razložennii opredelitelja, elementami kotorogo služat polinomy, Prikl. matem. i mehanika, 1948., 12, str. 219-222, MR, 9, 622.
20. Mitrinović D.S. i Đoković D.Ž.: Polinomi i matrice, izd. Naučna knjiga, Beograd, 1966., str. 115.
21. Mitrinović D. i Mihailović D.: Linearna algebra, analitička geometrija, polinomi, izd. Građevinska knjiga, Beograd, 1962., str. 305.
22. Mišina A.P. i Proskurjakov I.V.: Vysšaja algebra, Gos. izd. fiz.-mat. lit., Moskva, 1962., str. 300.

25. Okunev L.J.: Vysšaja algebra, izd. "Prosveščenie", Moskva, 1966., str. 395.
24. Orlov K.: Numerička analiza, izd. Naučna knjiga, Beograd, 1964., str. 120.
25. Orlov K.: Numerical application of the mathematical spectra to the problem of eigenvalues of matrices, Mat. vesnik, 8 (23), sv. 2, Beograd, 1971., str. 139-145.
26. Parodi M.: Lokalizacija karakterističkih čisla matric, izd. Inostr. lit., Moskva, 1960., str. 170.
27. Škarbore Dž.: Čislennye metody matematičeskogo analiza, GFTI, 1954., str. 440.
28. Smirnov V.I.: Kurs viššej matematiki, T.III., čast prva, izd. "Nauka", Moskva, 1967., str. 323.
29. Tureckij A.H.: Teorija interpolirovanija v zadačah, izd. "Vyšejšaja škola", Minsk, 1968., str. 320.
30. Ul'kinson Dž.H.: Algebraičeskaja problema sobstvennyh značenij, izd. "Nauka", Moskva, 1970., str. 564.
31. Faddeeva V.N.: Vyčislitel'nye metody linejnoj algebry, Gos. izd. teh.-teoret. lit., Moskva-Leningrad, 1950., str. 240.
32. Faddeev D.K. i Faddeeva V.N.: Vyčislitel'nye metody linejnoj algebry, Tr. 3-go Vsesojuznogo matem. s'jezda, 1958., 3, str. 434-445, RŽM, 1960, 906.
33. Faddeev D.K. i Faddeeva V.N.: Vyčislitel'nye metody linejnoj algebry, Gos. izd. fiz.-mat. lit., Moskva-Leningrad, 1953., str. 734.
34. Šabl'ickaja L.K.: Ob eskalatornom metode čtyškanija sobstvennyh značenij, Ž. vyč. mat. i mat. fiz., 1961., 1, № 4, str. 711-714, RŽM, 1962., 2B228.

35. Bodewig E.: Matrix calculus, Amsterdam, 1959., str. XI+452.
36. Fox L.: An introduction to numerical linear algebra, Oxford, 1964., str. XI+328.
37. Householder A.S.: The theory of matrices in numerical analysis, Blaisdell, New York, 1964.
38. Lancaster P.: Lambda-matrices and vibrating systems, Pergamon Press, 1966.
39. Morris J.: An escalator process for the solution of linear simultaneous equations, Philos. Mag., 1946., (7) 37, str. 106-120, MR, 8, 287.
40. Morris J.: The escalator process for the solution of damped Lagrangian frequency equations, Philos. Mag., 1947., (7) 38, str. 275-287, MR, 9, 210.
41. Morris J. and Head J.W.: Lagrangian frequency equations. An "escalator" method for numerical solution, Aircraft Engrg, 1942., 14, str. 312-314, 316, MR, 4, 148.
42. Morris J. and Head J.W.: The "escalator" process for the solution of Lagrangian frequency equations, Phil. Mag., 1944., (7) 35, str. 735-759, MR, 7, 84.
43. Muller D.: A method for solving algebraic equations using an automatic computer, Math. Tab., Wash., 1956., 10, str. 208-215.
44. Traub J.F.: Iterative Methods for Solution of Equations, N.J., 1964.

S A D R Ź A J

Stranica

UVOD

I

GLAVA I - KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI I KARAKTERISTIČNI VEKTORI MATRICE (POSTAVKA PROBLEMA I NEKE VAŽNIJE TEOREME)

1.1. Karakteristične vrednosti matrice	1
1.2. Karakteristični vektor matrice	4
1.3. Neki stavovi o karakterističnim vrednostima i karakterističnim vektorima	5
1.4. Normiranje karakterističnih vektora operatora	9
1.5. Dve grupe relacija ortogonalnosti i normiranja karakterističnih vektora matrice	10
1.6. Slične matrice	12
1.7. Uopšteni problem karakterističnih vrednosti matrice	14

GLAVA II - POTPUNI I DELIMIČNI PROBLEM KARAKTERISTIČNIH VREDNOSTI. METODA ESKALACIJE I METODA INTERPOLACIJE

2.1. Potpuni i delimični problem karakterističnih vrednosti	17
2.2. Metoda eskalacije	21
2.3. Metoda interpolacije	29
2.4. Metoda neodređenih koeficijenata	32
2.5. Metoda kvadratne interpolacije	34

GLAVA III - METODE SREDIŠNE ESKALACIJE

3.1. Metoda središne eskalacije za rešavanje problema karakterističnih vrednosti matrice	37
3.2. Metoda središne eskalacije za rešavanje uopštnog problema karakterističnih vrednosti matrice	44

GLAVA IV - PROBLEM KARAKTERISTIČNIH VREDNOSTI NE-
KIH MATRICA SPECIJALNOG OBLIKA I PRIMENA TROUGLAS-
TIH RAZLAGANJA MATRICA U METODAMA INTERPOLACIJE

4.1. O rešavanju delimičnog problema karakterističnih vrednosti nekih matrica specijalnog oblika	51
4.2. Primena nekih trouglastih razlaganja matrica u me- todama interpolacije za rešavanje problema karak- terističnih vrednosti	67
ZAKLJUČAK	74
CITIRANA LITERATURA	76