

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Viktor Radović

**ODREĐIVANJE RELATIVNIH KOORDINATA
VIZUELNO DVOJNIH ZVEZDA PRIMENOM
FURIJEVIH TRANSFORMACIJA**

master rad

Beograd, 2012

Zahvalnica

Želim da se zahvalim mentorima dr Zorici Cvetković i dr Radetu Pavloviću na ideji i savetovanjima tokom izrade ovog rada. Takođe, želim da se zahvalim prof. dr Nadeždi Pejović i dr Bojanu Novakoviću na pomoći i korisnim sugestijama.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Dvojne zvezde	3
2.1	Opšte o dvojnim zvezdama	3
2.2	Vizuelno dvojne zvezde	4
2.3	Katalozi dvojnih zvezda	7
3	CCD detektor	9
3.1	Karakteristike CCD detektora	9
3.2	Odnos signal-šum	12
4	Furijeova transformacija	13
4.1	Dvodimenziona Furijeova transformacija	16
4.2	Diskretna Furijeova transformacija (DFT)	17
4.2.1	Brza Furijeova transformacija (FFT)	18
4.3	Konvolucija, korelacija i autokorelacija	19
4.3.1	Furijeova transformacija i konvolucija (korelacija)	20
5	Obrada CCD snimaka dvojnih zvezda	21
6	Rezultati i diskusija	26
7	Analiza rezultata	35
8	Zaključak	36
A	Rezultati određivanja relativnih koordinata	38
B	Program	43

1 Uvod

Dvojne i višestruke zvezde su dominantne u univerzumu (pretpostavlja se da više od 60% zvezda u Galaksiji čine ove zvezde), pa samim tim njihovo izučavanje omogućava bolje razumevanje i otkivanje tajni kosmosa. Posmatranje dvojnih zvezda započelo je u 17. veku sa razvojem teleskopa, što je omogućilo njihovo vizuelno razdvajanje. Među prvim otkrivenim dvojim zvezdama su ζ UMa, α Cen, α Gem i druge. Termin "dvojna zvezda" prvi put je upotrebljen 1802. godine i označavao je sistem od dve zvezde koje se kreću oko zajedničkog centra mase. Prvo su otkrivene vizuelno dvojne zvezde, a kasnije je došlo do otkrivanja dvojnih zvezda primenom drugih metoda (spektroskopija, fotometrija, astrometrija).

Proučavanje dvojnih zvezda omogućava precizno određivanje masa, paralakse, temperature, radijusa i magnituda komponenti, što je dovelo do otrića važnih karakteristika zvezda npr. relacija masa-sjaj. Osim toga, dvojne zvezde su dale značajni doprinos proćavanju problema dva tela.

Zadatak i cilj

Zadatak ovog rada je određivanje relativnih koordinata vizuelno dvojnih zvezda (pozicioni ugao θ i uglovno rastojanje ρ) primenom Furijeovih transformacija na CCD snimcima parova. Prilikom pisanja ovog rada razvijan je program koji omogućava računanje traženih koordinata. U programu se prvo ućitava odgovarajući CCD snimak u formatu FITS, nad kojim se vrši Furijeova transformacija i prelazi se u frekventni domen. Zatim se primenjuje autokorelacija i iz odgovarajućeg rezultata dobijaju tražene koordinate.

Cilj rada je da se omogući automatizovano određivanje relativnih koordinata što bi omogućilo smanjenje vremena potrebnog za obradu dobijenih snimaka, čime bi se više vremena moglo potrošiti na analizu dobijenih rezultata. Takođe, ispituju se i mogućnosti i ograničenja programa razvijenog za realizaciju postavljenog zadatka, kao i karakteristike same metode koja se primenjuje.

Istraživanja su rađena na uzorku od 179 CCD snimaka koje je tim sa Astronomske opservatorije u Beogradu (AOB) snimio 2-m teleskopom u oktobru 2011. godine na NAO Rozhen u Bugarskoj.

Sadržaj glava

U glavi Dvojne zvezde dat je pregled osnovnih karakteristika dvojnih zvezda, njihova podela, a zatim su posebno razmatrane vizuelno dvojne zvezde jer su one tema ovog rada. Na kraju ovog poglavlja dat je pregled kataloga dvojnih zvezda.

U trećoj glavi opisuju se osnovne karakteristike CCD detektora, kao i predstavljanje podataka dobijenih preko CCD kamera u FITS formatu.

Furijeova analiza je objašnjena u četvrtoj glavi. U njoj je opisana Furijeova transformacija, Furijev integral, DFT i FFT. Osim toga prikazani su i pojmovi konvolucije, korelacije i autokorelacije.

U narednoj, petoj glavi, opisana je metoda za obradu CCD snimaka i dobijanje relativnih koordinata.

Šesta glava sadrži prikaz izdvojenih dvojnih zvezda, njihovih karakteristika i analiza dobijenih rezultata.

U poslednjoj glavi je prikazan zaključak i osvrt na ceo rad.

U dodacima se nalazi tabelarni prikaz rezultata određivanja relativnih koordinata (Dodatak A) i prikaz programa i opis načina rada i upotrebe (Dodatak B).

2 Dvojne zvezde

2.1 Opšte o dvojnim zvezdama

Dvojnim zvezdama nazivamo fizički sistem koji čine dve zvezde koje vrše kretanje oko zajedničkog centra mase. Sjajniju, masivniju, zvezdu nazivamo primarnom komponentom, a drugu zvezdu sekundarnom komponentom sistema. One su veoma značajne za proučavanje jer je samo kod dvojnih zvezda moguće precizno odrediti mase komponenti, kao i rastojanje (dinamička paralaksa) i apsolutne magnitude. Prema načinu detektovanja i fizičkim karakteristikama dvojne zvezde se mogu podeliti na nekoliko osnovnih tipova:

- *Vizuelno dvojne zvezde*

Vizuelno dvojnim zvezdama nazivamo one čije se komponente nalaze na dovoljno velikom međusobnom rastojanju da se mogu razdvojiti pomoću teleskopa ili uz pomoć dodatne opreme.

- *Astrometrijski dvojne zvezde*

Kod astrometrijskih dvojnih zvezda nije moguće neposrednim posmatranjima uočiti postojanje pratioca, već se on uočava zahvaljujući periodičnoj promeni nebeskih ekvatorskih koordinata zvezde. Do promene koordinata dolazi usled kretanja zvezde oko centra mase, pa samim tim njeno kretanje ne prati jednu liniju, već ima sinusoidni oblik. Razlike u rektascenziji i deklinaciji možemo otkriti samo kod bližih zvezda.

- *Spektroskopski dvojne zvezde*

Kod spektroskopski dvojnih zvezda zapaža se periodični pomak spektralnih linija koji nastaje zbog Doplerovog efekta, usled orbitalnog kretanja komponenti. Analizom spektra spektroskopski dvojnih zvezda moguće je odrediti orbitalne parametre sistema, kao i mase komponenti, ali pomnožene sa faktorom $\sin^3 i$, gde je i - nagib orbitalne ravni.

- *Eklipsno dvojne zvezde*

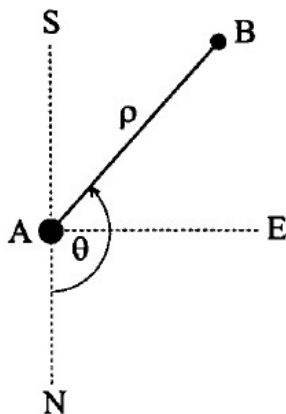
Eklipsno dvojne zvezde se drugačije nazivaju fotomerijski dvojne zvezde jer se njihova dvojnost otkriva praćenjem krive sjaja. Usled kretanja pratioca oko primarne komponente dolazi do periodičnih pomračenja zbog čega se menja kriva sjaja primarne komponente. Kod eklipsno dvojnih zvezda moguće je dobiti radijuse komponenti kao i odnos njihovih efektivnih temperatura.

- *Tesno dvojni sistemi*

Kod tesno dvojnih sistema (TDS) komponente se nalaze na dovoljno malom rastojanju da mogu da utiču na njihovu strukturu i evoluciju jer dolazi do pretakanja masa među njima. Usled velike bliskosti komponentata dolazi do uzajamnog pomračenja, pa se ove zvezde najčešće otkrivaju fotometrijskim ili spektroskopskim putem.

2.2 Vizuelno dvojne zvezde

Kako je već rečeno, vizuelno dvojnim zvezdama nazivamo one čije komponente se mogu razdvojiti teleskopom. U početku su merenja ovih zvezda rađena mikrometrom koga su zamenile fotografske ploče, CCD kamere, adaptivna optika i različite vrste interferometrije. U dvojnem sistemu, masivniju, sjajniju komponentu nazivamo primarnom, a drugu sekundarnom. Pri merenju pratimo položaj jedne komponente u odnosu na drugu (i to uglavnom kretanje sekundarne oko primarne komponente). Relativne koordinate su položajni ugao θ i uglovno rastojanje ρ (Slika 1). Položajni ugao θ se po konvenciji meri od pravca ka severu preko istoka do pravca između komponenti. Vremenom položajni ugao i uglovno rastojanje se menjaju usled orbitalnog kretanja sekundarne komponente oko primarne. Kretanje kod koga položajni ugao raste sa vremenom nazivamo direktnim, a ako opada retrogradnim. Relativne koordinate (ρ, θ) se mogu lako transformisati u pravouglo koordinate (x, y) primenom formula $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.



Slika 1: Položajni ugao θ i uglovno rastojanje ρ .

Kako se dvojne zvezde kreću jako sporo, potrebna su merenja njihovih relativnih koordinata u veoma dugom periodu, radi preciznog određivanja njihove orbite. Pošto je svako merenje izvršeno za određenu epohu, neophodno je merenja redukovati na neku standardnu epohu, kao što je npr. J2000.0 . Ako je t epoha kada je izvršeno merenje izražena u godinama, α i δ nebeske ekvatorske koordinate zvezde, tada ugao θ svodimo na epohu t_0 pomoću formule:

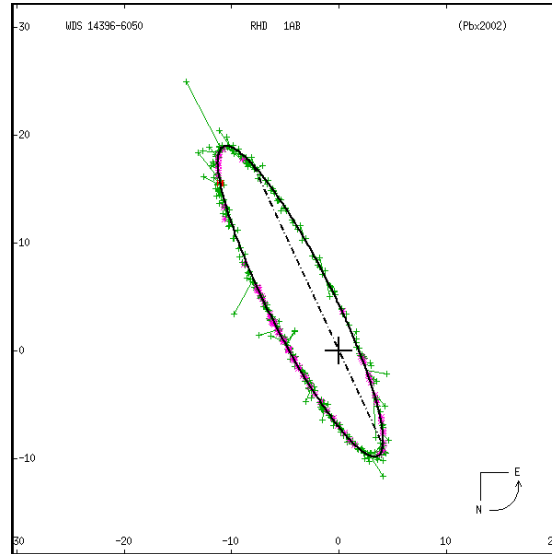
$$\theta_{t_0} = \theta_t + 0^{\circ}00557(t_0 - t) \sin \alpha \sec \delta$$

Dvojne zvezde se oko centra mase kreću saglasno Keplerovim zakonima. Ako uzmemo da je centar mase početak koordinatnog sistema tada važi:

$$\mathcal{M}_1 \vec{r}_1 + \mathcal{M}_2 \vec{r}_2 = 0$$

gde su \mathcal{M}_1 i \mathcal{M}_2 mase komponentata, a \vec{r}_1 i \vec{r}_2 njihovi radijus-vektori. Iz ove jednačine dobijamo da je odnos masa sistema i njihovog rastojanja od centra mase obrnuto proporcionalan. Kako komponente opisuju eliptične putanje oko centra mase, odnosu radijus-vektora odgovara i odnos velikih poluosa

$$\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2} = \frac{a_2}{a_1}$$



Slika 2: Relativna orbita dvojne zvezde WDS 14396-6050 (αCen).

Kada projektujemo sve relativne koordinate na tangentnu ravan dobijamo prividnu relativnu orbitu koja predstavlja elipsu po kojoj se sekundarna komponenta kreće oko primarne (Slika 2). Prividna relativna orbita predstavlja projekciju prave relativne orbite na ravan normalnu na vizuru posmatrača. Centar prividne relativne orbite se poklapa sa centrom prave orbite, dok žiže ne moraju da se poklope. Velika poluosa relativne orbite jednaka je zbiru poluosa putanja po kojima se kreću komponente : $a = a_1 + a_2$. Ako sa P označimo period obilaska komponenti oko zajedničkog centra mase, i primenimo Njutnov zakon gravitacije na kretanje sekundarne komponente oko primarne, tada dobijamo opšti oblik trećeg Keplerovog zakona:

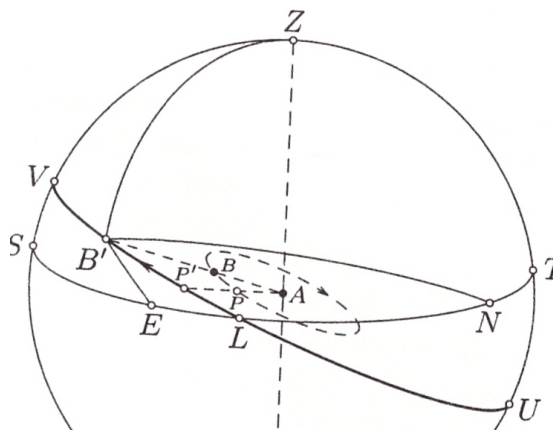
$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2}(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2).$$

Ukoliko a izrazimo u AJ, period P u godinama a mase zvezda u masama Sunca, dobijamo da je količnik $G/(4\pi^2)$ jednak jedinici. Ako su poznati orbitalni parametri a i P moguće je izračunati zbir masa komponentata, a u određenim slučajevima i mase pojedinačnih komponenti ukoliko je poznat odnos poluosa putanja a_1 i a_2 .

Kako je već spomenuto, zahvaljujući posmatranjima vizuelno dvojnih zvezda moguće je odrediti njihovu masu, što je dovelo do empirijske relacije $\mathcal{M} - \mathcal{L}$, odnosno relacije masa-sjaj koja važi za zvezde glavnog niza. Iz ove relacije možemo odrediti masu neke zvezde glavnog niza ukoliko nam je poznata njena luminoznost.

Da bi bila određena prava orbita potrebno je odrediti sedam putanjskih elemenata ($a, e, i, \omega, \Omega, P, T$). Putanjski elementi kojima je određena pozicija ravni u kojoj se nalazi orbita su i - nagib (inklinacija) između ravni putanje i tangencijalne ravni i Ω - longituda uzlaznog čvora. Položaj same putanje u ravni određen je uglom ω - longituda periastrona (ugao između linije čvorova i pravca ka periastronu), a - velika poluosa orbite, e - ekscentricitet orbite, T - trenutak prolaza kroz periastron i P - orbitalni period.

Na Slici 3 prikazani su putanjski elementi. Na njoj je pravac severa i istoka označen tačkama N i E . Veliki



Slika 3

krug ULV predstavlja ravan putanje koja preseca tangencijalnu ravan u dva čvora. Tačka L je uzlazni čvor. Luk NL je longituda uzlaznog čvora Ω . Inklinacija i je ugao VLS na sferi. Sa P je označen položaj sekundarne zvezde u trenutku kada je njeno rastojanje najbliže primarnoj, odnosno u periastronu, a sa B njen položaj u trenutku t . Ugao koji odgovara luku LP' , gde je P' projekcija periastrona na nebesku sferu, predstavlja longitudu periastrona ω .

Za određivanje pravih orbita vizuelno dvojnih zvezda razvijen je veliki broj metoda kao što su metode Til-Inesa, Dokoba, Kovalskog i mnoge druge.

2.3 Katalozi dvojnih zvezda

Katalozi dvojnih zvezda kao što su BDS, ADS i SDS su pokrivali samo određeni deo neba, sve dok se oni nisu objedinili u IDS katalog iz koga se kasnije razvio WDS katalog.

BDS (Burnham Double Star catalogue) je katalog koji sadrži oko 13 000 zvezda čija je deklinacija veća od -30° . ADS (Aitken Double Star Catalogue) katalog je nastao iz BDS kataloga, a objavljen je početkom dvadesetog veka i sadrži oko 4 000 zvezda više nego BDS. SDS (Southern Double Star Catalogue) sadrži zvezde čija se deklinacija nalazi u intervalu od -19° do -90° . Svi katalozi su objedinjeni u IDS (Index Catalogue of Visual Double Stars) koji je objavila Lick opservatorija 1963. godine i sadrži podatke za preko 64 000 sistema koji pokrivaju celo nebo. Njegov naslednik je Washington Double Star Catalogue (WDS)¹ koji održava Naval opservatorija. WDS katalog sadrži podatke: koordinate za epohu J2000.00, oznaku otkrivača, komponente para, broj merenja, epohe prvog i poslednjeg merenja, ρ i θ za epohu prvog i poslednjeg merenja, magnitude komponenti itd. U WDS katalogu se nalaze podaci za preko 110 000 parova. Svaki sistem u WDS katalogu se odlikuje svojim identifikatorom koji sadrži u sebi i podatke vezane za rektascenziju i deklinaciju odgovarajućeg objekta. Tako npr. identifikator WDS 00033+8239 označava objekat čije su koordinate $\alpha = 0^h03.3^m$ i $\delta = +82^\circ39'$ određenih za epohu J2000.

Osim ovih postoje i katalozi posmatranja dvojnih zvezda dobijenih speklinterferometrijskom tehnikom, kao što je četvrti katalog interferometrijskih merenja dvojnih zvezda - INT4² (Fourth Catalog of Interferometric Measures of Binary Stars) koji postoji od 1982. godine i sadrži merenja za preko 170 000 parova.

Takođe, postoje i katalozi orbita vizuelno dvojnih zvezda kao što je Šesti katalog orbita (ORB6 - Sixth Catalog of Orbits of Visual Binary stars)³ vizuelno

¹<http://www.usno.navy.mil/USNO/astrometry/optical-IR-prod/wds/WDS>

²<http://www.usno.navy.mil/USNO/astrometry/optical-IR-prod/wds/int4>

³<http://www.usno.navy.mil/USNO/astrometry/optical-IR-prod/wds/orb6>

dvojnih zvezda koji je danas u upotrebi. On sadrži orbitalne parametre za preko 2000 parova. U njemu se nalaze putanjski elementi, koordinate svedene na epohu J2000.0, magnitude komponenti, ime autora orbite kao i slike samih orbita.

3 CCD detektor

Na samom početku osmatranja su vršena golim okom, što je omogućavalo da se vide objekti do šeste magnitute. Veliki pomak je počeo upotrebom optičkih instrumenata u XVII veku (Galileo Galilej), nakon čega su se optički instrumenti sve više usavršavali i omogućavali detekciju objekata manjeg sjaja, sa većom razdvojnomoći. U XIX veku dolazi do razvoja fotografskog filma, kojim je omogućeno vršenje merenja na fotografskoj ploči, a time je olakšana provera rezultata za razliku od direktnog merenja primenom mikrometra. Sledeći napredak je predstavio razvoj CCD kamere. CCD (Charge Coupled Device) kamera je proizvedena početkom 1970. godine u Belovim laboratorijama. CCD kamera u sebi sadrži silikonski čip koji se sastoji od velikog broja fotoosetljivih ćelija, koje zovemo pikselima. Piksel predstavlja poluprovodnik (MOS - Metal Oxide Semi-conductor) i uglavnom su kvadratnog ili pravougaonog oblika. U okviru CCD detektora na jednom silikonskom čipu moguće je smestiti nekoliko hiljada poluprovodnika (piksela) čija se veličina kreće od 5μ do 30μ . Pri prolasku fotona kroz jedan piksel dolazi do oslobađanja elektrona koji se na izlazu detektuju kao razlika u naponu između referentnog i pobuđenog nivoa. Do oslobađanja elektrona dolazi zahvaljujući fotoelektričnom efektu.

U zavisnosti od načina na koji su pikseli raspoređeni razlikujemo dva tipa CCD detektora: 1-D i 2-D CCD detektore. Kod 1-D detektora pikseli su postavljeni isključivo u jednom nizu, dok kod 2-D detektora su pikseli postavljeni u formi matrice dimenzije $n \times m$. U astronomiji se uglavnom koriste 2-D detektori jer omogućavaju dobijanje cele slike za razliku od 1-D detektora.

3.1 Karakteristike CCD detektora

Osetljivost CCD detektora (quantum efficiency - QE) se definiše kao odnos između prosečnog broja detektovanih fotona i broja dospelih fotona. U slučaju da je CCD savršeni detektor vrednost za QE bi bila 1, odnosno po jednom primljenom fotonu generisao bi se jedan elektron. QE CCD detektora je u intervalu od 40% do 80% (za razliku od fotografskih ploča čija je QE u intervalu od 2% do 4%). Takođe, osetljivost CCD detektora se razlikuje i po talasnim dužinama. Najveća osetljivost je u crvenom delu spektra (600nm - 700nm). Na samu osetljivost CCD kamere utiču i mnogobrojni faktori od kojih ćemo navesti samo neke.

Debljina silikona u MOS poluprovodniku utiče na osetljivost CCD detektora na određene talasne dužine. Zavisnost od fluksa F i debljine silikona z možemo predstaviti relacijom:

$$F(z) = F(o)e^{-\alpha z}$$

gde je α koeficijent apsorpcije silikona, $F(o)$ je upadni fluks fotona. U Tabeli 1 su date vrednosti za apsorpciju silikona α u zavisnosti od talasnih dužina i temperature. Iz nje možemo da vidimo da je silikon najosetljiviji na plavi deo spektra ($\lambda = 400\text{nm}$), pa stoga da bi poboljšali osetljivost u ovom delu spektra, debljina silikona mora da bude redukovana.

$\lambda(\text{nm})$	$\alpha(\mu\text{m}^{-1})$	
	T = 300K	T = 77K
400	5.0	4.0
600	0.5	0.25
800	0.1	0.005
1000	0.01	0.002

Tabela 1: Vrednost koeficijenta apsorpcije α silikona u MOS poluprovodniku u zavisnosti od λ i T

Još jedan problem kod CCD detektora jeste zadržavanje uhvaćenih elektrona, pošto je moguće da uhvaćeni elektron pređe u susedni piksel. Načini da se ova situacija izbegne jesu upotreba veće voltaže, korišćenje silicijuma sa većim otporom, korišćenje piksela manje veličine itd. Takođe, ni kapacitet pojedinačnog piksela nije beskonačan, on zavisi prvenstveno od veličine samog piksela. Ukoliko se pređe maksimalni kapacitet piksela dolazi do prelaska elektrona u susedne piksele koji se nalaze u istoj koloni. To se manifestuje karakterističnom belom trakom koja polazi od zvezde (gde se i nalazi piksel čiji je kapacitet premašen), a ta pojava se naziva blooming.

Osim samih karakteristika silikona i piksela, do pojave dodatnih elektrona može doći i usled transfera podataka na izlaz, temperature CCD kamere, itd. Šum čitanja (readout noise) predstavlja broj elektrona koji se dodaju pikselima na već postojeću vrednost, usled nekonzistentnosti električnih uređaja koji vrše njihovo merenje. Šum čitanja možemo razložiti na dve komponente. Prva komponenta je vezana za konverziju analognog u digitalni signal koja u slučaju identičnih ulaznih vrednosti daje male varijacije na izlazu. Drugu komponentu čini ostala elektronika koja može da izazove pojavu dodatnih elektrona u konačnom rezultatu. Ako CCD kamera ima šum čitanja reda 20, na finalnom izlazu će sadržati 20 dodatnih elektrona u svakom pikselu. Kod modernih CCD kamera red ovog šuma je veoma nizak i ne prelazi 10 elektrona po pikselu.

Osim šuma čitanja, postoji i tzv. struja mraka (dark current) do koje dolazi kada silikon u CCD poluprovodnicima usled temperature oslobodi elektron koji biva pokupljen od strane kolektora i nakon čitanja podataka oni bivaju uključeni u konačni rezultat. Kako struja mraka dominantno zavisi od temperature,

rešenje ovog problema leži u sistemima hlađenja CCD detektora. Struja mraka se predstavlja kao broj elektrona generisanih po sekundi po pikselu. Na sobnoj temperaturi ona u proseku iznosi oko 2.5×10^4 .

Svaka CCD kamera poseduje spostveni softver koji omogućava da se podaci na ulazu prikazuju korisniku u čitljivom formatu. Po konvenciji, kao format za čuvanje CCD snimaka koristi se FITS format (Flexible Image Transport System). FITS format je prvi put standardizovan 1981. godine, i njegova najnovija verzija je 3.0 koja datira iz jula 2008. godine. FITS standard omogućava čuvanje podataka u formatu zgodnom za obradu. U programu koji je razvijen za potrebe ovog rada korišćena je biblioteka u Javi⁴ koja je prvobitno napravljena za potrebe NASA-inog HEASARC projekta.

FITS fajl se sastoji iz dva osnovna dela: zaglavlje i deo sa podacima. Moguće je da FITS fajl sadrži više zaglavlja kao i više sekcija sa podacima. U zaglavlju FITS fajla nalaze se informacije vezane za podatke koje slede iza zaglavlja. Sve informacije u zaglavlju su definisane odgovarajućom rezervisanom reči. U Tabeli 2 dati su podaci o nekim rezervisanim rečima koje se mogu pojaviti u zaglavlju, a bile su značajne prilikom pisanja programa u toku izrade ovog master rada.

Rezervisana reč	Značenje
BITPIX	Broj bitova kojim su predstavljeni podaci
DATE-OBS	Datum posmatranja objekta
TIME-OBS	Vreme posmatranja objekta
FOCALLEN	Žižna daljina teleskopa
APERTURE	Prečnik ogledala
TELESCOP	Informacije o teleskopu
BZERO i BSCALE	Koriste se za preračunavanje vrednosti intenziteta piksela u FITS fajlu u njihovu odgovarajuću vrednost: $VAL = BZERO + BSCALE \times FITSVAL$ VAL = stvarna vrednosti intenziteta piksela FITSVAL = upisan intenzitet Podrazumevana vrednost za BSCALE je 1, a za BZERO je 0
XPIXSZ	Veličina piksela duž x ose
YPIXSZ	Veličina piksela duž y ose

Tabela 2: Izabrani članovi zaglavlja FITS fajla

⁴<http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/heasarc/fits/java/v1.0/>

3.2 Odnos signal-šum

Odnos signala i šuma predstavlja najznačajniju jednačinu koja se naziva i CCD jednačina:

$$\frac{S}{N} = \frac{N_*}{\sqrt{N_* + n_{pix}(N_S + N_D + N_R^2)}}$$

U datoj jednačini signal predstavlja N_* , odnosno ukupan broj fotona koji su prikupljeni od strane CCD kamere. N_* možemo da posmatramo na nivou jednog piksela, cele slike ili određene oblasti. Šum je predstavljen u zavisnosti od n_{pix} - broja piksela od interesa, N_S - ukupnog broja fotona po pikselu, N_D - ukupnog broj elektrona nastalih usled tamne struje po pikselu i N_R - broj elektrona koji nastaju kao posledica šuma čitanja. Kako izraz pod korenom dominantno zavisi od N_* možemo ga drugačije zapisati i kao:

$$\frac{S}{N} \sim \frac{N_*}{\sqrt{N_*}} = \sqrt{N_*}$$

4 Furijeova transformacija

Furijeova transformacija predstavlja vrstu srednjekvadratne aproksimacije u prostoru funkcija $\mathcal{L}_2[a, b]$ gde je skalarni proizvod definisan na sledeći način:

$$(f, g) = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$$

Sama aproksimacija se zasniva na određivanju funkcije $A_o(x)$ koja ima minimalno odstupanje od funkcije koju aproksimiramo. U slučaju srednjekvadratne aproksimacije potrebno je da bude minimalno odstupanje u površinama između funkcija (jer smo tako uveli normu).

$$\|f - A_o\| = \inf_A \|f - A\|$$

Funkcija $p(x) > 0$ predstavlja težinsku funkciju i pomoću nje možemo određenim delovima dati veću težinu pri aproksimaciji, jer njome množimo razliku $f(x) - A_o(x)$.

Potrebno je da pronađemo element aproksimacije sa najmanjim odstupanjem, a s obzirom da je $\mathcal{L}_2[a, b]$ Hilbertov prostor znamo da element najbolje aproksimacije po ortonomiranom sistemu funkcija a_k konvergira ka našoj funkciji koju aproksimiramo. Sam taj element najbolje aproksimacije nazivamo Furijeovim redom po ortonomiranom sistemu a_k :

$$a = c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_na_n + \dots,$$

koeficijente c_k nazivamo Furijeovim koeficijentima funkcije f . Uzećemo da sistem funkcija a_k bude sistem trigonometrijskih funkcija $\sin nx, \cos mx$, koji je ortogonalan na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Kako znamo da je element najbolje aproksimacije u Hilbertovom prostoru sa ortonomiranim sistemom funkcija dat sa [7]:

$$A_o = \sum_{i=1}^n (f, a_i)a_i$$

imamo da je on jednak:

$$A_o = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Ovakav red nazivamo trigonometrijskim Furijeovim redom, a a_k i b_k nazivamo trigonometrijskim Furijeovim koeficijentima funkcije f . Furijeovi koeficijenti su dati izrazima:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, k = \overline{0, n}$$

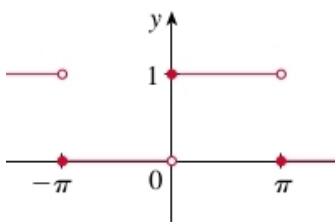
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, k = \overline{1, n}$$

Ukoliko je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i 2π periodična i neka postoji izvod f' te funkcije koji je deo-po-deo neprekidan na intervalu $[-\pi, \pi]$, tada Furijeov red funkcije f apsolutno i ravnomerno na \mathbb{R} konvergira ka toj funkciji (dokaz teoreme pogledati u [8]). To znači da svaku glatku, 2π periodičnu funkciju možemo predstaviti kao linearnu kombinaciju čistih harmonika $\sin kx$ i $\cos kx$ čija je učestalost oscilovanja 2π .

Kao primer Furijeove transformacije, navešćemo transformaciju funkcije date sa:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Funkcija $f(x)$ je očigledno 2π periodična i njen grafik je dat na Slici 4.



Slika 4: Grafik funkcije $f(x)$.

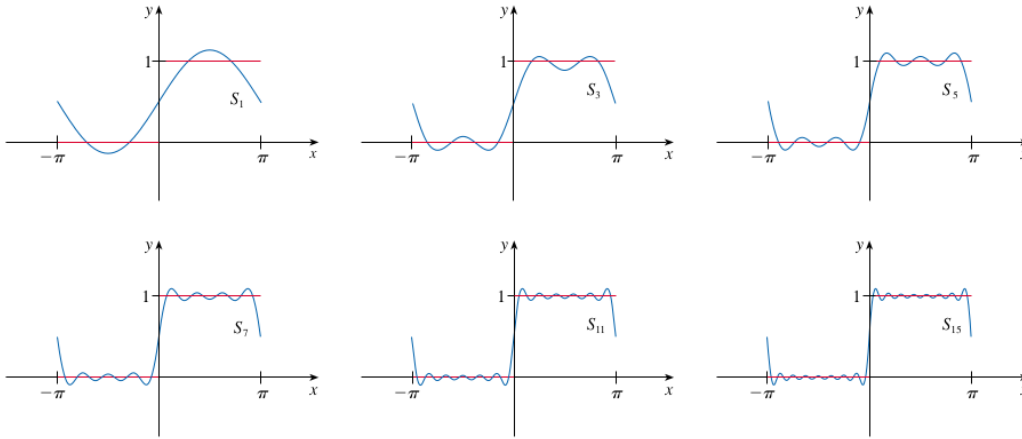
Furijeovi koeficijenti funkcije $f(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_n = 0, b_n = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n \text{ parno} \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{ako je } n \text{ neparno} \end{cases}$$

a samu funkciju $f(x)$ možemo predstaviti njenom aproksimacijom, Furijeovim redom oblika:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x.$$

Na Slici 5 prikazana je izgled parcijalnih suma Furijeovog reda funkcije $f(x)$.



Slika 5: Grafik Furijeove transformacije funkcije $f(x)$.

Do sada je razmatran samo slučaj realnih funkcija koje su 2π periodične, međutim moguće je pod određenim uslovima razviti i neperiodične funkcije u odgovarajući oblik Furijeovog reda. Prvo ćemo preći u kompleksni zapis Furijeovog reda koji se dobija zamenom izraza za $\cos kx$ i $\sin kx$:

$$\sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}), \quad \cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$$

Nakon izvršene zamene dobijamo da je kompleksni zapis Furijeovog reda po ortogonalnom sistemu funkcija e^{ikx} :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Pomoću smene $x = \frac{2\pi}{T}t$ prevodimo interval $[-\pi, \pi]$ u interval $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, pa kada to zamenimo u prethodne formule dobijamo:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{iKt} dt$$

$$f_T(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{-iKt} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{iKt} dt \right)$$

gde je $f_T(t) = f(\frac{2\pi}{T}t)$, $K = k\frac{2\pi}{T} = k\Delta K$. Pustićemo da T teži beskonačnosti radi prelaska na neperiodični interval i tada prethodni izraz za $f_T(x)$ postaje:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dK}{2\pi} e^{-iKt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iKt} dt \right)$$

Izraz u zagradi nazivamo Furijeovom transformacijom funkcije $f(t)$, odnosno Furijeovim integralom funkcije $f(x)$:

$$F(K) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iKt} dt$$

a inverznom Furijeovom transformacijom, koja vraća funkciju $F(K)$ u $f(t)$ nazivamo izraz:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(K) e^{-iKt} dK$$

Furijeova transformacija ima nekoliko važnih karakteristika:

- *Linearnost*

Ako važi da je $f(x) = ag(x) + bh(x)$ i neka su $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ njihove Furijeove transformacije, a a i b konstante tada:

$$F(K) = aG(K) + bH(K)$$

- *Translacija* Neka je $h(x) = f(x + \epsilon)$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, tada:

$$H(K) = e^{-iK\epsilon} F(K)$$

- *Skaliranje* Neka je $h(x) = f(x\epsilon)$, $\epsilon \neq 0 \in \mathbb{R}$, tada:

$$H(K) = \frac{1}{\epsilon} F\left(\frac{K}{\epsilon}\right)$$

4.1 Dvodimenziona Furijeova transformacija

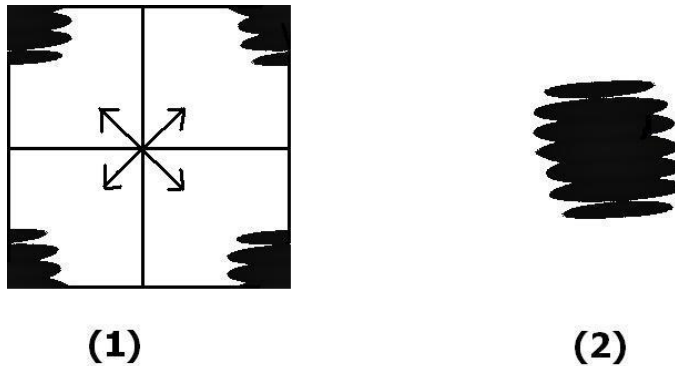
Dvodimenziona Furijeova transformacija funkcije $f(x, y)$ je data izrazom:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(xu+yv)} dx dy$$

Inverzna dvodimenziona Furijeova transformacija određena je sa:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{-i(xu+yv)} du dv$$

Drugačije možemo reći da se dvodimenziona Furijeova transformacija dobija tako što računamo Furijeovu transformaciju po vrstama, a zatim na dobijeni rezultat primenimo Furijeovu transformaciju po kolonama ili obrnuto. Prilikom 2D Furijeove transformacije kao rezultat se dobija matrica kompleksnih vrednosti, gde prvi element matrice odgovara nultoj frekvenciji, pa je zato neophodno da transliramo podmatrice tako da prvi element dođe u njen centar. Na Slici 6 prikazan je izgled dvodimenzione Furijeove transformacije dvojne zvezde STF 783, pre i nakon rotacije.



Slika 6: Izgled dvodimenzione Furijeove transformacije zvezde STF 783 (1) pre translacije podmatrice i (2) nakon translacije tako da se nulta frekvencija prenosi u centar slike.

4.2 Diskretna Furijeova transformacija (DFT)

Diskretna Furijeova transformacija (DFT) se zasniva na određivanju koeficijenata parcijalne sume kompleksnog zapisa Furijeovog reda tako da je u datih n ekvidistantnih tačaka ova suma jednaka vrednostima funkcije f u tim tačkama :

$$f(x_j) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-ik \frac{2\pi j}{n}}, j = 0, \dots, n-1$$

Time dobijamo sistem od n jednačina sa n nepoznatih koeficijenata c_k . Napisaćemo sistem u vektorskom obliku uvodeći vektor $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_{n-1})^T$ gde su $f_i = f(x_i)$, i $W = e^{i \frac{2\pi}{n}}$

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \overline{W}^{kj}, j = \overline{0, n-1}$$

$$\mathbf{F}^* \mathbf{c} = \mathbf{f}$$

Matricu sistema nazivamo Furijeovom matricom :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & W^2 & \dots & W^{n-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W^{n-1} & W^{2(n-1)} & \dots & W^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

Zbog osobine matrice \mathbf{F} : $\mathbf{F}\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^*\mathbf{F} = n\mathbf{I}$ imamo da je rešenje jednačine vektor :

$$\mathbf{c} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{f} \cdot \frac{1}{n}$$

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{i \frac{2jk\pi}{n}}$$

DFT ima široku primenu, najviše u analizi signala. U analizi signala uglavnom nam je poznat niz $\{x_n\}$ koji predstavlja vrednosti nekog signala koji nam pokazuje kako se vrednost signala menja sa vremenom. Primenom DFT na signal prelazimo u frekvencijski domen koji omogućava da vidimo kako se vrednost signala menja sa frekvencijom.

4.2.1 Brza Furijeova transformacija (FFT)

Zbog široke primene DFT pojavio se sve veći problem brzine njenog izvršavanja na računarima, koji je jednak $\mathcal{O}(n^2)$, što je veoma nepogodno u slučaju velike količine podataka. Danielson i Lanczos su u radu iz 1942. godine pokazali da se diskretna Furijeova transformacija reda n može predstaviti sumom dve diskretne Furijeove transformacije reda $\frac{n}{2}$. Odnosno, ako je $n = 2m$ imamo:

$$W_n^2 = (e^{i \frac{2\pi}{n}})^2 = e^{i \frac{2\pi}{\frac{n}{2}}} = e^{i \frac{2\pi}{m}} = W_m$$

Na taj način Furijeovu transformaciju reda n izražavamo pomoću transformacija reda $\frac{m}{2}$ itd. Kada koristimo FFT broj operacija je skoro linearan sa n , odnosno iznosi $\mathcal{O}(n \log_2 n)$. U programu za implementaciju FFT je korišćena Java biblioteka JTransforms⁵.

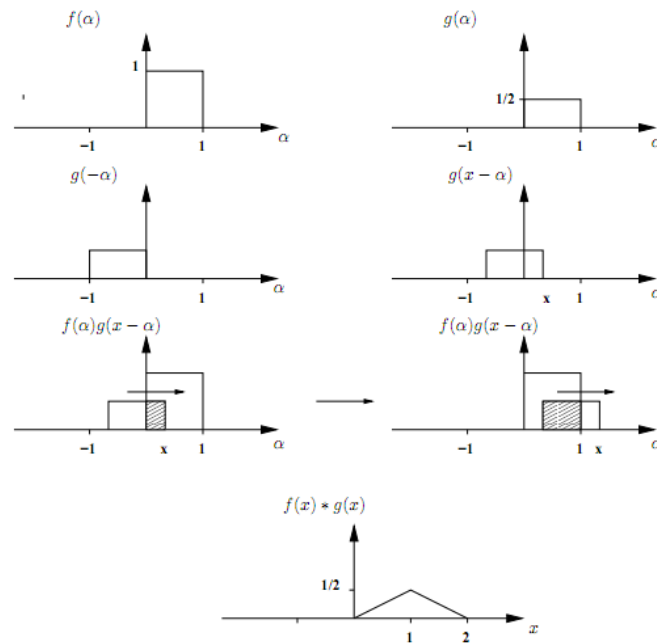
⁵<https://sites.google.com/site/piotrwendykier/software/jtransforms>

4.3 Konvolucija, korelacija i autokorelacija

Konvolucija dve funkcije $f(x)$ i $g(x)$ u oznaci $f(x) * g(x)$ se definiše kao:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)d\tau,$$

gde $f(x)$ predstavlja funkciju na koju primenjujemo odgovarajući filter $g(x)$. Neformalno rečeno, konvolucija predstavlja površinu između funkcija $f(x)$ i $g(x)$ (Slika 7).



Slika 7: Konvolucija funkcija $f(x)$ i $g(x)$.

Ukoliko je funkcija $f(x)$ definisana na diskretnom skupu tačaka, konvoluciju zapisujemo kao :

$$f(x) * g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(x - k).$$

Funkcija konvolucije zadovoljava osobine asocijativnosti i distributivnosti. Takođe važi da je površina ispod rezultata konvolucije jednaka proizvodu površina funkcija $f(x)$ i $g(x)$, odnosno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * g) dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \right).$$

Korelacija signala $x(t)$ i $y(t)$ predstavlja meru njihove sličnosti. Kvantitativna mera njihove sličnosti definisana je preko koeficijenta korelacije. Ukoliko je koeficijent korelacije veći tada je i sličnost signala u tom delu veća. Funkcija korelacije kontinuiranog signala data je sa :

$$f(x) \circ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\tau)} g(\tau + x) d\tau,$$

gde $\overline{f(\tau)}$ predstavlja konjugovanu vrednost funkcije $f(\tau)$. U slučaju realnih, simetričnih filtera, vrednost korelacije i konvolucije je identična, a ako je filter nesimetričan, vrednost konvolucije će biti negativna vrednost korelacije. U slučaju diskretnog signala, korelaciju zapisujemo kao :

$$f(x) \circ g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{x(k)} y(k + x)$$

Ukoliko upoređujemo isti signal govorimo o *autokorelaciji*.

4.3.1 Furijeova transformacija i konvolucija (korelacija)

Vežu između Furijeovih transformacija i konvolucije daje teorema o konvoluciji:

$$(f * g)(t) = F^{-1}(F(v)G(v))(t),$$

gde su $F(v)$ i $G(v)$ Furijeove transformacije redom funkcija $f(x)$ i $g(x)$, a F^{-1} predstavlja inverznu Furijeovu transformaciju. Na sličan način, vežu između auto-korelacije i Furijeove transformacije daje nam teorema Wiener-Khinchin[10]:

$$f(x) \circ f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(K)|^2 e^{-iKt} dK$$

5 Obrada CCD snimaka dvojnih zvezda

Na noćnom nebu, mi u određenom pravcu merimo intenzitet elektromagnetnog zračenja koje pada na prijemnik. Slika koju dobijamo prilikom snimanja CCD kamerom sadrži raspodelu elektromagnetnog zračenja po pikselima na određenom delu neba, što može biti iskazano relacijom (prema [11]):

$$I(\rho, \alpha, \delta) = \int_{\Delta S} I_S(\theta) d\theta$$

gde je $I_S(\theta)$ intenzitet u pravcu $\theta(\alpha, \delta)$.

Na kvalitet snimka utiču osim zračenja posmatranog objekta i drugi faktori, kao što su temperatura, turbulencije u atmosferi itd. Ti uticaji mogu biti veoma značajni prilikom posmatranja vizuelno dvojnih zvezda, jer njihovo međusobno rastojanje može biti malo, pa samim tim i podložnije uticajima. Zbog toga sliku analiziramo primenom Furijeove transformacije pomoću koje iz domena slike prelazimo u frekventni domen. Osim lakše obrade, Furijeova transformacija nam omogućava i analizu istog para dvojnih zvezda na različitim snimcima, bez obzira na njihov položaj, jer se dobija isti rezultat prilikom prelaska u frekventni domen. Razlog tome jeste njena invarijantnost u odnosu na translaciju posmatranog objekta.

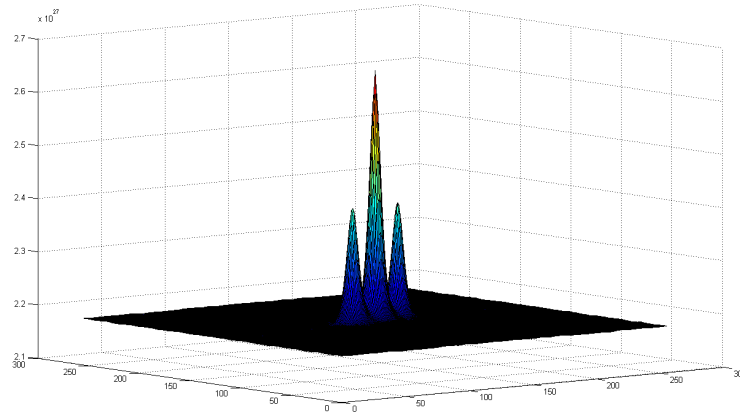
Prelazak u frekventni domen vršimo na sledeći način:

$$A^2(u, v) = \text{Re}(F(u, v))^2 + \text{Im}(F(u, v))^2$$

gde je $F(u, v)$ vrednost Furijeove transformacije za piksel (u, v) .

Da bismo iz rezultata dobijenog Furijeovom transformacijom izdvojili jasno pikove koji predstavljaju našu dvojni zvezdu potrebno je da izvršimo autokorelaciju čime će se dominantni pikovi još više istaći. Prema Wiener-Khinchin teoremi autokorelaciju možemo predstaviti kao proizvod dve Furijeove transformacije:

$$\begin{aligned} AC &= F(u, v) \overline{F(u, v)} = \\ &= (\text{Re}(F(u, v)) + i\text{Im}(F(u, v)))(\text{Re}(F(u, v)) - i\text{Im}(F(u, v))) \\ &= \text{Re}^2(F(u, v)) + \text{Im}^2(F(u, v)) = A^2(u, v) \end{aligned}$$



Slika 8: 3D izgled auto-korelacije dvojne zvezde A 2321.

Nakon izračunate Furijeove transformacije i autokorelacije možemo da pređemo na određivanje rastojanja i pozicionog ugla date dvojne zvezde. Na Slici 8 je prikazan 3D izgled auto-korelacije kod dvojne zvezde A 2321. Da bi odradili relativne koordinate potrebno je da izdvojimo sekundarne pikove i da odredimo njihove centre. Njihov centar određujemo traženjem centroida tih pikova, odnosno oblasti oko odgovarajućeg pika. Težina pojedinačnog piksela je određena njegovim intenzitetom. Koordinate centroida (x, y) računamo pomoću formula:

$$x = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m i \cdot (AC(i, j) - \bar{s})}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m AC(i, j) - \bar{s}}$$

$$y = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m j \cdot (AC(i, j) - \bar{s})}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m AC(i, j) - \bar{s}}$$

gde je $AC(i, j)$ vrednost autokorelacije na pikselu (i, j) , n i m su veličine koje određuju pravougaonik u čijoj se unutrašnjosti nalazi pik čiji centar određujemo, a \bar{s} je aritmetička sredina intenziteta svih piksela u oblasti oko pika:

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m AC(i, j)}{n \cdot m}$$

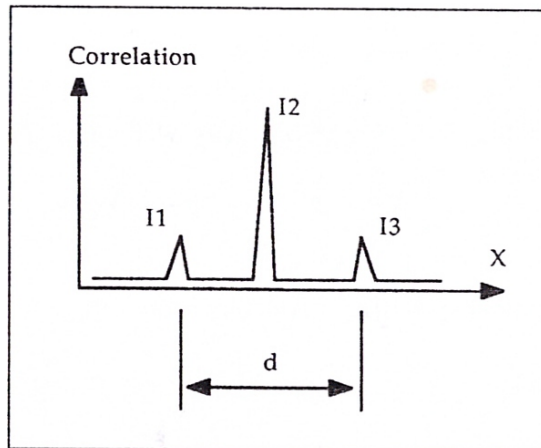
U programu, nakon izvršene autokorelacije određivanje pika, a samim tim i njegovog centroida rešeno je na taj način što se pikovi lociraju pomoću matrica dimenzije 3×3 . Ideja je da vrh pika predstavlja njegov maksimum i svi njegovi susjedni pikseli imaju manju vrednost. Zato matricom 3×3 prolazimo duž cele slike i tražimo njihove maksimume. Ukoliko je maksimum u centru matrice, u pitanju je neki pik i položaj te matrice čuvamo. Na kraju od sačuvanih matrica uzimamo tri najveće i one predstavljaju tražene pikove. Okolinu pika u kojoj tražimo centroid nalazimo tako što uzmemo polovinu visine pika, i okolinu predstavljaju sve vrednosti koje su veće od vrednosti na polovini pika.

Nakon što odredimo centar sekundarnih pikova $C_1(x_1, y_1)$ i $C_2(x_2, y_2)$ možemo odrediti uglovno rastojanje i ugao u odnosu na koordinatni sistem slike:

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

Na Slici 9 je prikazan linijski presek pikova i označen način računanja uglovnog rastojana ρ .



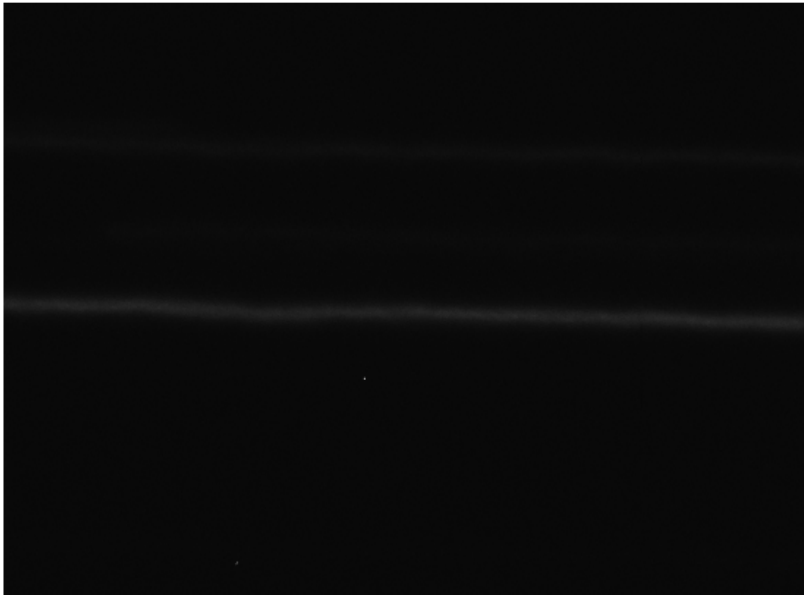
Slika 9: Određivanje uglovnog rastojanja ρ .

Potrebno je voditi računa o tome da ρ predstavlja rastojanje u pikselima i da je potrebno pretvoriti njegovu vrednost u lučne sekunde, uzimajući u obzir veličinu piksela i žižnu daljinu (F) teleskopa:

$$\rho ["] = \frac{3600 \cdot 180}{F\pi} \sqrt{(p_{xsz} \cdot (x_2 - x_1))^2 - (p_{ysz} \cdot (y_2 - y_1))^2}$$

gde p_{xsz} i p_{ysz} predstavljaju širinu i dužinu piksela.

Kako je već rečeno u prvom poglavlju relativne koordinate dvojnih zvezda su uglovno rastojanje ρ i položajni ugao θ . Uglovno rastojanje ρ je moguće direktno odrediti, dok ugao φ koji se ovom metodom dobija mora da bude sveden na pravac ka severu da bi se dobio položajni ugao θ . Ugao θ se određuje tako što se prvo odredi pravac istok-zapad koji dobijamo prateći trag neke zvezde. Trag neke zvezde dobijamo nakon što zaustavimo kretanje teleskopa čime se dobija odgovarajući trag zvezde kojim je i predstavljen pravac istok-zapad (Slika 10).



Slika 10: Trag određen prilikom snimanja na Rozhen opservatoriji.

Linija normalna na pravac istok-zapad, predstavlja pravac sever-jug. Potrebno je još odrediti gde je pravac ka severu, što se vrši identifikacijom bliskih zvezda u vidnom polju čije koordinate znamo, pa na taj način pronalazimo pravac ka severu.

Odgovarajući račun obavljamo vršenjem transformacija koordinatnog sistema. Prvo odredjujemo ugao ϕ koji pravac istok-zapad pravi sa x osom. Njega dobijamo pomoću poznate formule iz analitičke geometrije:

$$\tan \phi = k,$$

gde je k koeficijent pravca prave istok-zapad. Zatim vršimo rotaciju koordinatnog sistema za dobijeni ugao ϕ , što možemo uraditi pomoću matrica rotacije:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Na taj način se dobija položajni ugao θ sveden na pravac ka severu.

Za snimke dobijene na NAO Rozhen, koji se koriste u ovom radu, za ugao ϕ dabijena je vrednost $\phi = 271^\circ.24$.

6 Rezultati i diskusija

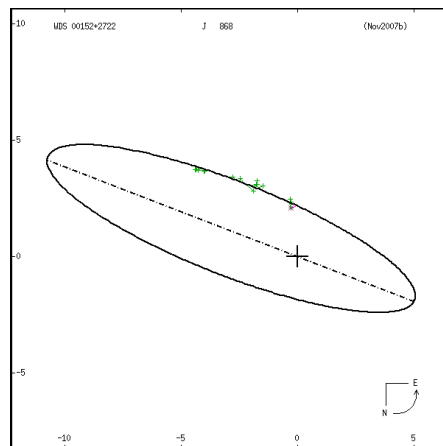
Rezultate dobijene primenom FT i mogućnosti programa pokazaćemo na obrađenom uzorku dvojnih zvezda čija je CCD snimanja uradio tim sa Astronomske opservatorije u Beogradu u oktobru 2011. godine na NAO Rozhen u Bugarskoj. Posmatranja su vršena pomoću 2m Ritchey-Chretien-Coude (RCC) reflektora, a snimanja su obavljena pomoću CCD kamere VersArray 1300 B. Kamera VersArray ima 1340×1300 kvadratnih piksela dimenzije 20μ . Na osnovu podataka o kameri i teleskopu izračunato je da vrednost jednog piksela iznosi $0''.261$.

Relativne koordinate ρ i θ su poređene sa odgovarajućim vrednostima koje su dobijene na AOB korišćenjem AIP4WIN (Berry & Burnell) programa. U narednim tabelama u ovom poglavlju dati su podaci o prvom i poslednjem merenju relativnih koordinata preuzeti iz WDS kataloga, zatim ρ i θ dobijeni u ovom radu koji su označeni sa VR (Viktor Radović), ρ i θ dobijeni na AOB koji su označeni sa AO, i sa Δ je označena apsolutna vrednost razlike između vrednosti VR i AO.

Prikaz svih merenja dat je u Dodatku A, dok će u ovom poglavlju biti prikazani neki izabrani sistemi sa različitim: separacijama, razlikama magnituda komponenti i brojem komponenti. Daće se komentari o prednostima i problemima na koje sam naišao primenjujući FT i program.

WDS 00152+2722 = J 868

Par WDS 00152+2722 je otkrio R. Jonckheere 1907. godine. Do 2006. obavljeno je 19 merenja ovog para. Za tih 100 godina separacija se povećala sa $2.1''$ na $5.8''$ (Tabela 3). Magnitude komponenti su veoma bliske: 12.42 primarna i 12.62 sekundarna. U Tabeli 3 prikazani su rezultati merenja koordinata ρ i θ . Iz tabele se vidi da su odstupanja u odnosu na podatke koji su dobijeni na AOB relativno mala $0''.04$ za ρ i $0^\circ.38$ za θ . Bitno je spomenuti da su za ovu zvezdu izračunati orbitalni elementi koji su dati u Šestom katalogu orbita (Novaković 2007). Na Slici 11 data je orbita para WDS 00152+2722.

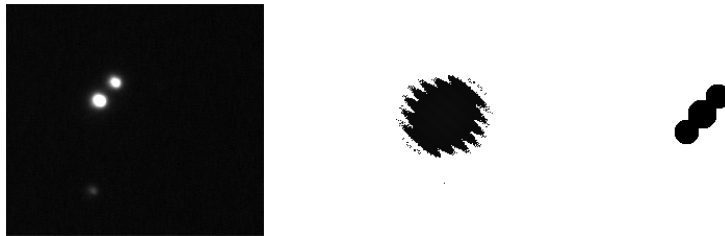


Slika 11: Pravidna orbita dvojne zvezde WDS 00152+2722.

Ovaj dvojni sistem je izabran kao primer šireg para, kod koga su automatski dobijene vrednosti relativnih koordinata, odnosno FT se jasno razdvajaju komponente para.

	Prvo	Poslednje	VR	AO	Δ
$\rho['']$	2.1	5.8	5.97	6.02	0.04
$\theta[^\circ]$	187	230	230.01	230.38	0.37

Tabela 3: Rezultati merenja relativnih koordinata za par WDS 00152+2722.



Slika 12: CCD snimak dvojne zvezde WDS 00152+2722 (levo), zatim rezultat njene FFT (sredina) i na kraju autokorelacije (desno).

Kako za zvezdu WDS 00152+2722 postoji izračunata orbita, možemo da uporedimo dobijene rezultate za ρ i θ sa njenim efemeridama. U Tabeli 4 date su efemeridske vrednosti relativnih koordinata za 2011. i 2012. godinu.

2011		2012	
$\rho['']$	$\theta[^\circ]$	$\rho['']$	$\theta[^\circ]$
5.937	228.8	5.974	229.0

Tabela 4: Efemeride zvezde WDS 00152+2722 za 2011. i 2012. godinu.

Kako su merenja obavljena u oktobru 2011. godine možemo ih porediti sa podacima datim za 2012. godinu. Iz Tabele 3 vidimo da je odstupanje rezultata dobijenih pomoću programa neznatno u odnosu na efemeride za 2012. godinu.

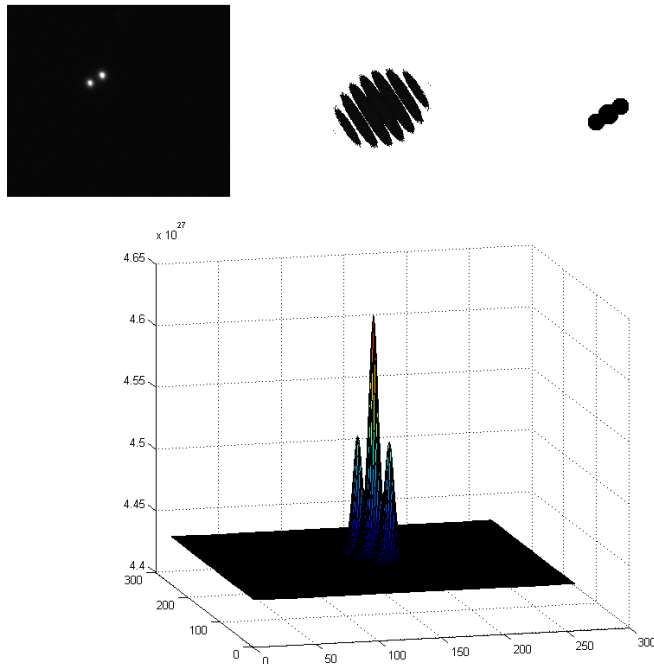
WDS 00538+4731 = ES 1297

E.T. Espin je 1893. otkrio dvojni zvezde WDS 00538+4731. Do 2010. izvršeno je 9 merenja ovog para čije su magnitudo komponenti 10.9 (primarna) i 11.0 (sekundarna). U Tabeli 5 su dati rezultati merenja ove zvezde, a na Slici 13 njen CCD snimak, izgled FFT i 2D i 3D autokorelacije.

Ovaj par je sa manjom separacijom (oko $4''$) nego kod prethodnog primera i kod njega su programom automatski dobijeni rezultati. Jedan od razloga koji to omogućava je vrlo mala razlika u sjaju komponenti ($\Delta m = 0.1$).

	Prvo	Poslednje	VR	AO	Δ
$\rho['']$	5.6	4.3	4.13	4.36	0.23
$\theta[^\circ]$	249	214	213.79	213.75	0.04

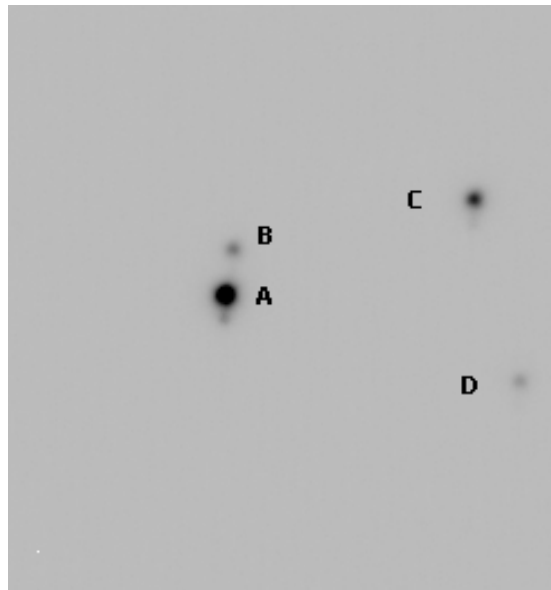
Tabela 5: Rezultati merenja relativnih koordinata para WDS 00538+4731.



Slika 13: CCD snimak dvojne zvezde WDS 00538+4731 (gore levo), zatim rezultata njene FFT (gore sredina), autokorelacije (gore desno) i 3D grafik autokorelacije (dole).

WDS 23317+1956

Višestruka zvezda WDS 23317+1956 predstavlja sistem koji se sastoji od 4 komponente. Na Slici 14 prikazan je CCD snimak sistema. Par AB je otkrio Wirtanen 1941. godine i on nosi oznaku WIR 1AB. Do 2010. izvršeno je 53 merenja ovog para, a osim toga izračunata je i njegova orbita. Parove AC i AD je otkrila Lampens 1953. godine i oni imaju oznake LMP 24AC i LMP 24AD. Njihovih merenja ima znatno manje: 4 za par AC i 3 za par AD. U Tabeli 6 dati su rezultati merenja za ove parove, a u Tabeli 7 efemeride para AB za 2011. i 2012. godinu.



Slika 14: CCD snimak višestrukog sistema WDS 23317+1956.

Kako je u pitanju višestruki sistem, merenja za odgovarajuće parove su dobijena tako što je korišćena uvedena opcija u program kojom se omogućava isecanje odgovarajućeg dela slike. Ovim je postignuto da se izbegne uticaj ostalih komponenti na rezultat.

Par	Prvo		Poslednje		ρ ["]		θ [°]		Δ	
	ρ ["]	θ [°]	ρ ["]	θ [°]	VR	AO	VR	AO	ρ	θ
AB	3.5	183	5.3	82	5.33	5.38	80.04	81.33	0.05	1.29
AC	49.0	60	30.8	23	31.13	31.18	22.42	22.14	0.09	0.28
AD	38.5	35	35.2	346	35.96	35.92	344.78	344.86	0.04	0.08

Tabela 6: Rezultati merenja relativnih koordinata višestruke zvezde WDS 23317+1956.

2011		2012	
ρ ["]	θ [°]	ρ ["]	θ [°]
5.498	82.9	5.503	81.2

Tabela 7: Efemeride za par AB sistema WDS 23317+1956 za 2011. i 2012. godinu.

Kako se vidi iz Tabela 7 i 6 dobijeni rezultati malo odstupaju od efemerida.

Ova zvezda je izabrana kao primer obrade višestrukog sistema. Nedostatak kod višestrukih sistema je u tome što zbog dobijanja rezultata za sve parove potrebno je posebno isecati deo slike za svaki par, tj. rezultati se ne dobijaju automatski za sve parove sistema. U narednim verzijama programa i ova opcija će biti implementirana. Ovaj sistem ima pogodnu konfiguraciju komponenti (velike separacije) što je omogućilo isecanje odgovarajućeg dela slike i dobijanje rezultata, što kod manjih separacija između komponenti nije moguće.

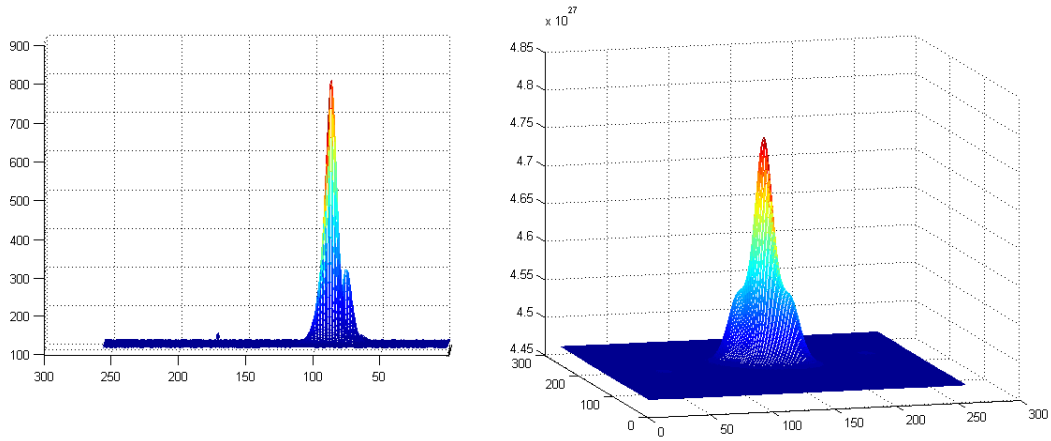
WDS 06179+0919 = OPI 9

Dvojnu zvezdu WDS 01269+0332 otkrio je E. Opik 1901. godine. Od prvog merenja do 1945. izvršeno je svega 6 posmatranja ove zvezde. Pomoću autokorekcije nije bilo moguće izdvajanje sekundarnih pikova, pa je za računanje relativnih koordinata bilo neophodno izvršiti logaritamsko skaliranje. Ovo je moguće zato što Furijeove transformacije imaju osobinu da su invarijantne na skaliranje. Razlog za skaliranje je veća razlika u sjaju komponenata ($\Delta m = 1.32$). Na slici 15 levo se vidi profil zvezde, gde se uočava da je sekundarna komponenta manjeg sjaja u odnosu na primarnu, a na desnoj slici se vidi rezultat autokorelacije bez jasno definisanih sekundarnih pikova.

	Prvo	Poslednje	VR	AO	Δ
$\rho['']$	5.4	5.0	5.78	5.64	0.13
$\theta[^\circ]$	334	230	241.21	240.92	0.29

Tabela 8: Rezultati merenja relativnih koordinata para WDS 06179+0919.

Uvođenje logaritamskog skaliranja je imalo efekta jer je u pitanju širi par, dok kod parova sa manjim separacijama i većom razlikom magnituda ovo ne bi dovelo do rezultata (Dodatak A).



Slika 15: CCD snimak dvojne zvezde WDS 06179+0919 i auto-korelacije izvršene nad njim.

WDS 22013+2751 = ES 527

WDS22013+2751 je otkrio T. E.Espin krajem 19. veka (1897) i do 2010. godine izvršeno je 12 merenja. Razlika magnituda komponenti je mala ($\Delta m = 0.1$). Rezultati merenja za ovaj par dati su u Tabeli 9. Međutim, pomoću programa nije bilo moguće da se automatski odrede relativne koordinate ovog para, već je kao i kod WDS 06179+0919 bilo neophodno primeniti logaritamsko skaliranje. Iako ovaj par ima malu razliku u magnitudi, njegovo separacija je manja što utiče na primenu Furijeove transformacije.

	Prvo	Poslednje	VR	AO	Δ
$\rho ['']$	2.1	3.5	3.48	3.42	0.06
$\theta [^\circ]$	187	214	212.96	213.66	0.70

Tabela 9: Rezultati merenja relativnih koordinata zvezde WDS 22013+2751.

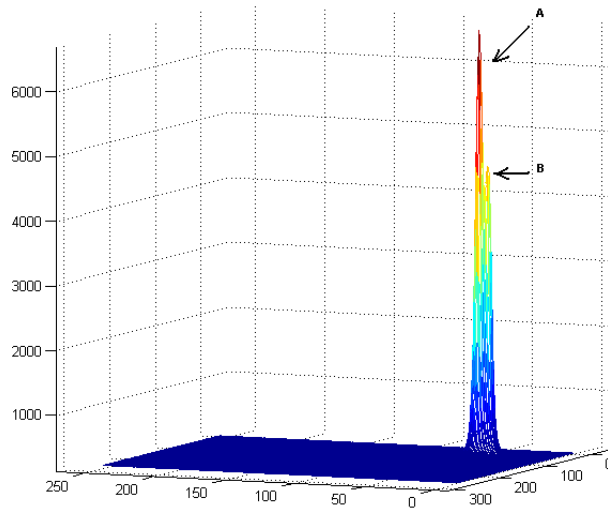
WDS 05474+2939 = BU 560

Ovu dvojni zvezdu je 1877. godine otkrio S.W. Burnham. Ona je do 2010. godine posmatrana 139 puta. Komponente ovog sistema su približnih magnituda ($\Delta m = 0.47$). Za ovu zvezdu je izračunata orbita i ona je data u Šestom katalogu orbita. U Tabeli 10 dati su rezultati merenja za WDS 05474+2939. Zbog male udaljenosti između komponenti korišćeno je logaritamsko skaliranje pa su na taj način dobijeni rezultati.

	Prvo	Poslednje	VR	AO	Δ
ρ ["]	0.9	1.6	1.31	1.49	0.18
θ [°]	208	126	125.24	127.4	1.31

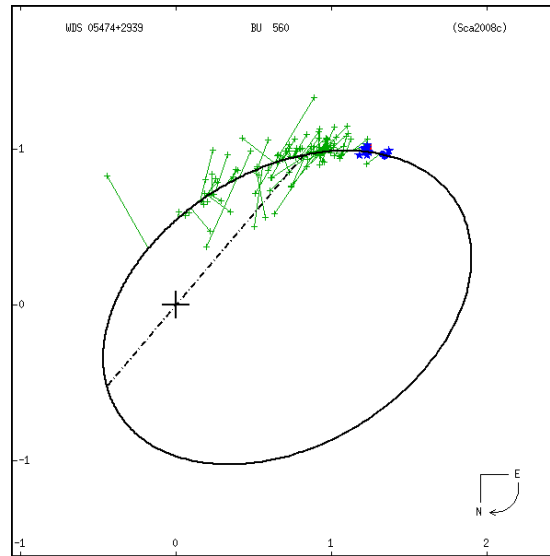
Tabela 10: Rezultati merenja relativnih koordinata zvezde WDS 05474+2939.

Ovaj par je izabran zbog malog rastojanja i njegov profil se može videti na Slici 16.



Slika 16: Profil para WDS 05474+2939.

Na Slici 17 dat je orbita dvojne zvezde WDS 05474+2939. Efemeride za 2011. godinu su $\theta = 125^{\circ}3$ i $\rho = 1''664$, a za 2012. $\theta = 125^{\circ}1$ i $\rho = 1''668$.



Slika 17: Prividna orbite zvezde WDS 05474+2939.

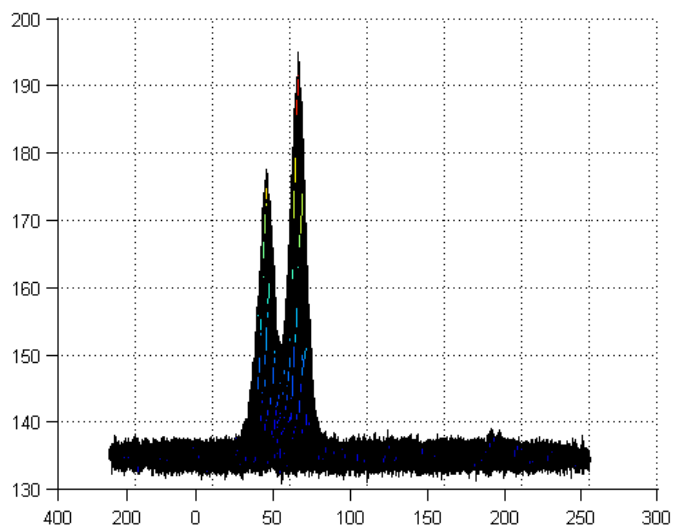
WDS 19500+0637 = J 1336

Ovaj trojni sistem je otkrio R. Jonckheere, prvo par AB 1914. godine, a 38 godina kasnije i par AC. Do 2012. godine izvršeno je 12 merenja para AB, a 7 za par AC. U Tabeli 11 dati su rezultati merenja za par AB, a u Tabeli 12 za par AC.

Kod para AB se primećuje mala razlika pikova u odnosu na pozadinski šum (pogledati Sliku 18 gde je dat profil para AB), što utiče na rezultat i otežanu primenu FT. Zato je odrađeno logaritamsko skaliranje koje je i pored lošeg odnosa signal/šum dalo dobre rezultate zbog velike separacije (oko 5''55).

	Prvo	Poslednje	VR	AO	Δ
ρ ['']	2.7	5.4	5.55	5.5	0.05
θ [°]	50	58	58.89	58.08	0.81

Tabela 11: Merenja relativnih koordinata za par AB sistema WDS 19500+0637.



Slika 18: Profil para AB sistema WDS 19500+0637.

Kod para AC nije bilo potrebno primeniti logaritamsko skaliranje zbog velikog uglovnog rastojanja između komponenti (oko $23''8$).

	Prvo	Poslednje	VR	AO	Δ
$\rho[']$	22.5	23.5	23.81	23.89	0.08
$\theta[^\circ]$	221	220	220.00	220.00	0.00

Tabela 12: Merenja relativnih koordinata za par AC sistema WDS 19500+0637.

7 Analiza rezultata

U prethodnoj glavi obrađeni su sistemi sa različitim karakteristikama (različite separacije, razlike magnituda i broj komponenti) pomoću kojih su prikazane mogućnosti i granice aplikacije za određivanje relativnih koordinata kao i same metode.

Prvo ćemo razmotriti uticaj separacije i magnituda na primenu programa i FT pri određivanju relativnih koordinata. Kod parova sa velikim separacijama između komponenti ($\rho = 6''02$ kod WDS 00152+2722, $\rho > 30''$ kod WDS 23317+1956 AC i AD, $\rho = 23''89$ kod WDS 19500+0637 AC) izračunavanje koordinata ρ i θ je moguće automatskim putem, bez vršenja skaliranja ili neke druge intervencije. Kod manjih separacija, bitnu ulogu igra i razlika magnituda komponenti Δm . U slučaju velike razlike magnituda dešava se da ne uspe razdvajanje komponenti, pa samim tim se i ne dobijaju tražene koordinate (WDS 04076+3804). Međutim kod manjih razlika u sjaju, primenom logaritamskog skaliranja mogu se izračunati ρ i θ (WDS 06179+0919). U slučaju veoma malih separacija ($\rho < 3''$) uglavnom je potrebno primeniti logaritamsko skaliranje, jer velika blizina komponenti utiče na njihovo razdvajanje.

Osim uglovnog rastojanja i magnituda na primenu FT utiče i kvalitet samog snimka. Kod parova kod kojih je loš odnos signal-šum za izračunavanje koordinata moraju se koristiti dodatne opcije u aplikaciji (WDS 19500+0637).

Upravo opisani problemi se takođe mogu objasniti i karakteristikama Furijevih transformacija. U slučaju velike razlike u sjaju komponenti sistema pri primeni FT, doći će do gubljenja zvezde manjeg sjaja, jer je pik zvezde većeg sjaja znatno veći. U slučaju kada je signal blizak okolnom šumu prilikom primene FT može se dogoditi da on ne može da se odvoji od okolnog šuma. Kada su u pitanju veoma male separacije, problem nastaje zbog "stapanja" pikova pa nije moguće njihovo razdvajanje pomoću FT.

Kod višestrukih sistema (WDS 23317+1956) važe iste napomene navedene u prethodnim paragrafima, s tim što je određivanje relativnih koordinata otežano zbog potrebe da se odgovarajući deo slike iseca, da bi se izbegao uticaj ostalih komponenti na rezultat. U zavisnosti od prostornog rasporeda komponenata isecanje svih parova neće uvek biti moguće.

8 Zaključak

Predmet ovog rad odnosio se na određivanju relativnih koordinata (θ i ρ) vizuelno dvojnih zvezda. Njihovo merenje je vršeno pomoću aplikacije koja je razvijena i opisana u Dodatku B. Programom se računaju koordinate primenom Furijeovih transformacija. Furijeove transformacije, zbog svojih karakteristika, omogućavaju nam da se zvezde razdvoje i da se na taj način izračuna njihovo uglovno rastojanje i pozicioni ugao.

U Dodatku A prikazani su rezultati svih merenja koja su izvršena. Prikaz karakterističnih slučajeva dat je u poglavlju 6, a njihova analiza u poglavlju 7. Osnovna ograničenja programa su u slučaju velike razlike magnituda komponenti, male separacije i lošeg snimka. Neki od ovih problema se mogu izbeći primenom logaritamskog skaliranja koje omogućava bolje razdvajanje sekundarnih pikova.

Cilj ovog rada bio je automatizacija merenja relativnih koordinata dvojnih zvezda, čime bi se smanjilo vreme koje se troši na obradu CCD snimaka, a povećalo vreme za analizu rezultata. U prethodnom poglavlju dati su osnovni problemi prilikom određivanja relativnih koordinata, pa oni treba da budu smernice kod upotrebe programa.

Buduća dorada programa bi trebala da omogući lakše izračunavanje relativnih koordinata kod višestrukih sistema. To bi moglo da se uradi pomoću već implementiranog postupka sa matricama dimenzije 3×3 , jer primenom Furijeove transformacije na višestruki sistem dobija se više sekundarnih pikova koji odgovaraju parovima sistema. Program trenutno može automatski da odredi samo najveće sekundarne pikove, ali će u kasnijim verzijama biti omogućeno određivanje i ostalih. Takođe, potrebno je proučiti i osmisliti načine da se reše problemi koji su navedeni u poglavlju Analiza rezultata (računanje koordinata kod manjih separacija itd.).

Literatura

- [1] Buil C., 1991, *CCD Astronomy*, Willmann-Bell Inc.
 - [2] Howell S., 2006, *Handbook of CCD astronomy*, Cambridge.
 - [3] Martinez P., Klotz A., 2000, *A practical guide to CCD astronomy*, Cambridge.
 - [4] Grin R., 1998, *Astronomija, klasika u novom ruhu*, Vesta Co.
 - [5] Vukićević-Karabin M., Atanacković-Vukmanović O., 2010, *Opšta astrofizika*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
 - [6] Vujnović V., 2005, *Astronomija 1*, Školska knjiga .
 - [7] Radunović D., 2006, *Numeričke metode*, Akademska misao.
 - [8] Kadelburg Z., Adnađević D., 2007, *Analiza 2*, Matematički fakultet.
 - [9] Heintz W.D., *Double stars*, D. Reidel Publishing Company
 - [10] <http://mathworld.wolfram.com/Wiener-KhinchinTheorem.html>
 - [11] I. Stojanović, S. Šegan, P. Glišović, R. Pavlović, *DepAstro – An Original Astrometric Tool*, 2006, Serban Astronomical Journal, **173**, 107
 - [12] Novakovic, B., 2007, Baltic Astron. **16**, 435
-

A Rezultati određivanja relativnih koordinata

U tabeli je dat prikaz merenja na snimcima prikupljenim u oktobru 2011. godine na opservatoriji NAO Rozhen. Oznake u tabeli su: WDS - broj sistema u WDS katalogu, Par - par višestrukog sistema, Δm - razlika magnituda komponenti ($\Delta m = m_A - m_B$), θ - položajni ugao određen korišćenjem programa razvijenog prilikom pisanja ovog rada (VR) i na Astronomskoj opservatoriji u Beogradu (AO), ρ - uglovno rastojanje određeno u ovom radu i tima sa AOB, $\Delta\theta$ - apsolutna razlika između rezultata za položajni ugao (VR - AO), $\Delta\rho$ - apsolutna razlika između rezultata za uglovno rastojanje (VR- AO). Takođe, oznaka * pored WDS broja označava par kod koga je pri traženju pikova korišćeno logaritamsko skaliranje svih podataka radi njihovog boljeg uočavanja. WDS brojevi bez * označavaju parove čiji su rezultati određeni bez ikakve intervencije.

WDS	Par	Δm	$\theta[^\circ]$		$\rho['']$		$\Delta\theta$	$\Delta\rho$
			VR	AO	VR	AO		
00017+6309	AB	2.20	277.55	277.01	7.10	7.30	0.54	0.20
00057+4549	AB	0.17	186.22	186.56	6.04	6.04	0.34	0.00
00059+1805	AB	0.33	136.12	134.45	3.32	3.39	1.67	0.07
00152+2722		0.20	230.01	230.38	5.97	6.02	0.37	0.05
00159+5233	AB	0.23	102.55	102.26	4.00	4.17	0.29	0.17
00159+5233	BC	0.53	53.37	53.59	8.94	8.85	0.22	0.09
00169+4427		1.62	58.15	58.87	7.18	7.18	0.72	0.00
00187+2545	AB	1.17	290.51	289.55	5.54	5.43	0.96	0.11
00251+1824		1.20	5.35	5.46	5.33	5.33	0.11	0.00
00321+6715	AB	1.58	177.47	179.38	3.93	3.96	1.91	0.03
00336+4509	AB	1.29	204.31	203.73	15.35	15.41	0.58	0.06
00458+5459	AD	3.61	93.38	93.27	41.87	41.80	0.11	0.07
00492+2150		0.31	180.08	180.12	6.83	6.85	0.04	0.02
00535+2536		0.77	297.80	297.50	5.26	5.71	0.30	0.45
00538+4731		0.10	213.79	213.75	4.13	4.36	0.04	0.23
00569+6152		1.82	177.55	177.13	8.13	8.24	0.42	0.11
00570+5729		2.02	264.72	265.46	9.21	9.33	0.74	0.12
01054+3204		0.46	117.78	116.52	3.51	3.58	1.26	0.07
01088+6145		0.27	165.28	164.25	3.81	3.76	1.03	0.05
01098+3704		0.02	6.44	7.12	2.89	3.11	0.68	0.22
01184+1529	AB	0.40	210.29	210.07	2.69	2.97	0.22	0.28
01269+0332		2.86	328.86	328.28	5.86	5.91	0.58	0.05
01393+5257	AB	0.38	39.40	39.41	9.31	9.29	0.01	0.02
01411+1817		2.70	235.03	234.90	7.09	7.21	0.13	0.12

WDS	Par	Δm	$\theta[^{\circ}]$		$\rho[^{\prime\prime}]$		$\Delta\theta$	$\Delta\rho$
			VR	AO	VR	AO		
01485+2811		0.40	73.82	73.94	5.24	5.29	0.12	0.05
01535+1918	AB	0.06	1.18	0.85	7.33	7.42	0.33	0.09
02118+6529		0.74	239.07	239.12	8.75	8.75	0.05	0.00
02180+3116	AC	4.26	309.19	309.26	52.73	52.68	0.07	0.05
02246+5959		1.15	1.23	1.21	6.80	6.79	0.02	0.01
02291+6724	AC	4.42	114.98	116.09	7.14	7.17	1.11	0.03
02332+3554		0.20	83.64	83.13	3.96	4.48	0.51	0.52
02338+4252		0.21	0.77	0.77	6.02	6.10	0.00	0.08
02410+6539	AB	0.03	293.91	294.97	6.79	6.68	1.06	0.11
02489+3823		0.30	257.21	257.18	3.23	3.26	0.03	0.03
03069+3952		0.30	10.27	10.34	5.29	5.34	0.07	0.05
03088+2758		0.00	239.24	240.22	4.93	4.83	0.98	0.10
03088+3528		1.85	361.00	359.93	3.62	3.87	1.07	0.24
03122+3713		0.27	125.01	125.81	2.71	2.84	0.80	0.13
03162+5810	AB	0.39	4.25	3.55	4.98	5.02	0.70	0.04
03207+1736	AD	1.64	223.95	224.48	9.25	9.34	0.53	0.09
03267+4110		0.00	68.05	69.79	1.99	2.34	1.74	0.35
03384+6033		0.00	119.90	122.56	3.28	3.35	2.66	0.07
03435+2935	AB	0.54	356.48	356.05	3.14	3.21	0.43	0.07
03492+3651		0.61	356.03	354.15	2.89	2.88	1.88	0.01
04384+1900		1.30	181.24	180.97	3.66	3.79	0.27	0.13
04385+2656	AB	0.15	188.80	189.26	4.26	4.33	0.46	0.07
04404+6830		0.00	322.08	322.11	8.98	8.96	0.03	0.02
04448+0517		0.14	278.33	277.35	4.21	4.57	0.98	0.36
04495+3914		1.70	332.24	331.82	9.25	9.21	0.42	0.04
04562+0304	AB	0.55	248.04	248.23	5.98	6.23	0.19	0.25
05013+5015		0.37	159.39	158.38	4.22	4.21	1.01	0.01
05233+3445		0.12	178.66	178.50	6.98	6.96	0.16	0.02
05345+3726		1.85	140.23	140.18	7.97	8.02	0.05	0.05
05364+2200		0.38	274.71	274.30	4.16	4.08	0.41	0.08
05446+2901		1.65	0.95	0.93	8.36	8.33	0.02	0.03
05456+2141		0.35	266.04	264.93	5.78	5.87	1.11	0.09
05458+2130	AB	0.90	42.15	41.51	5.19	5.11	0.64	0.08
05458+2130	AC	0.02	246.80	247.13	6.32	6.29	0.33	0.03
05563+4353	AB	0.40	302.85	303.35	4.00	4.29	0.50	0.29
05565+5256		0.39	245.75	246.85	2.41	2.73	1.10	0.31
06092+6424		0.30	26.52	27.58	5.62	5.64	1.06	0.02
06206+2327		1.35	3.46	3.48	6.81	6.90	0.02	0.09
06220+1440		1.50	2.28	3.21	7.32	7.44	0.93	0.12

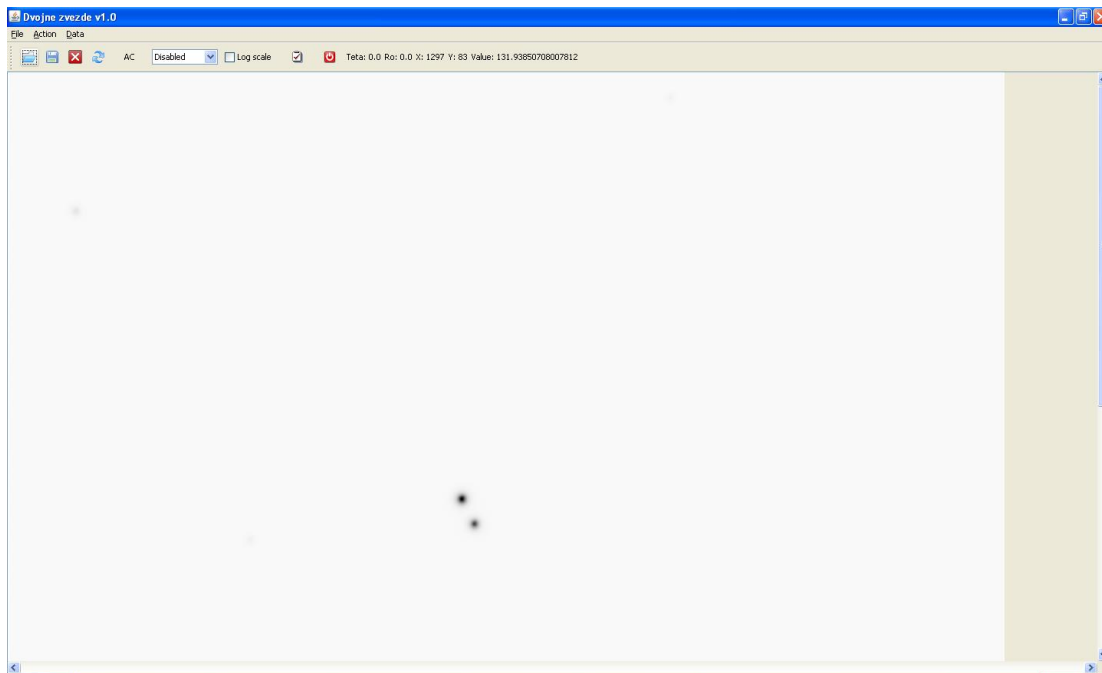
WDS	Par	Δm	$\theta[^{\circ}]$		$\rho['']$		$\Delta\theta$	$\Delta\rho$
			VR	AO	VR	AO		
06241+3733		0.17	289.68	290.00	9.10	9.20	0.32	0.10
06284+0834		0.77	1.26	1.26	4.30	4.85	0.00	0.55
06277+2249	AB	0.90	226.24	226.73	6.66	6.63	0.49	0.03
06325+0820		0.48	309.12	309.93	5.96	6.01	0.81	0.05
06571+5438		2.03	198.17	197.84	6.29	6.41	0.33	0.12
07106+1543		1.97	293.86	293.67	10.20	10.26	0.19	0.06
07154+1221		0.90	6.74	8.03	3.27	3.05	1.29	0.22
18080+2406		0.20	66.13	66.49	9.24	9.35	0.36	0.11
18278+2415	AB	1.84	35.37	35.06	9.79	9.90	0.31	0.11
18278+2415	AC	0.84	245.19	244.83	13.10	13.26	0.36	0.16
18438+2309		0.99	35.53	36.39	6.95	6.96	0.86	0.01
19028+3123	AB	1.93	263.51	264.17	5.80	6.14	0.66	0.34
19030+3729	AC	1.30	176.72	176.39	16.66	16.3	0.33	0.07
19054+3803		0.52	30.71	29.97	6.91	7.04	0.74	0.13
19060+4549	AB	1.73	359.69	359.85	9.67	9.69	0.16	0.02
19060+4549	AC	3.83	279.86	279.84	24.21	24.39	0.02	0.17
19069+2210	AB	2.02	27.79	27.06	9.35	9.36	0.73	0.01
19079+3043	AB	1.89	309.61	309.40	8	8	0.21	0.00
19079+3656		0.19	154.18	154.14	9.74	9.73	0.04	0.01
19197+4422	AC	0.88	147.83	147.58	29.45	29.36	0.25	0.09
19197+4422	BC	1.28	105.28	105.58	6.47	6.42	0.30	0.05
19246+2131	AB	1.81	137.21	138.77	5.63	5.82	1.56	0.19
19266+2530	AB	0.38	82.71	82.70	5.29	5.39	0.01	0.10
19323+3417		1.72	214.93	214.76	8.48	8.52	0.17	0.04
19383+2542		0.36	213.90	214.05	4.93	4.98	0.15	0.05
19500+0527	AB	0.40	58.89	58.08	5.55	5.50	0.81	0.05
19500+0527	AC	0.20	220.00	220.00	23.81	23.89	0.00	0.08
20066+1147		1.10	265.23	265.62	5.00	5.53	0.39	0.53
20087+1223		0.55	72.32	72.43	9.68	9.68	0.11	0.00
20210+1028		0.48	117.81	118.07	6.43	6.52	0.26	0.09
20346+2914	AC	3.50	89.34	88.97	15.70	15.92	0.37	0.22
20462+1554	AB	0.66	11.50	11.10	5.85	6.06	0.40	0.21
20520+4346		0.30	118.18	118.17	9.36	9.49	0.01	0.13
21066+3436	AC	1.24	15.88	15.79	30.00	29.94	0.09	0.06
21070+4125	AC	0.18	6.02	6.94	9.45	9.48	0.92	0.03
21121+4543	BC	0.20	24.59	24.44	6.27	6.38	0.15	0.11
21174+3203		1.14	356.60	356.60	9.96	9.98	0.00	0.02
21199+3957		0.50	61.85	61.58	7.48	7.47	0.27	0.01
21401+2928		0.10	316.24	316.66	4.81	5.00	0.42	0.19

WDS	Par	Δm	$\theta[^{\circ}]$		$\rho['']$		$\Delta\theta$	$\Delta\rho$
			VR	AO	VR	AO		
21462+2817	AC	0.08	143.13	142.44	8.48	8.71	0.69	0.23
21555+2942	AB	0.30	176.05	176.17	2.89	3.26	0.12	0.37
21558+3716	AB	0.37	334.68	334.77	7.60	7.61	0.09	0.01
21559+3141		0.10	226.24	227.76	4.07	4.10	1.52	0.03
21564+3156		1.67	351.63	351.03	9.52	9.46	0.60	0.06
21565+2900		0.99	260.81	261.33	9.85	9.95	0.52	0.10
22042+3806		0.03	179.19	178.73	7.33	7.32	0.46	0.01
22092+4734		0.06	165.59	164.77	6.79	6.72	0.82	0.07
22112+5347	AB	1.11	171.80	172.11	6.36	6.31	0.31	0.05
22138+4520		0.30	232.58	233.66	4.19	4.41	1.08	0.22
22166+5831		0.39	309.90	309.65	5.02	5.22	0.25	0.20
22265+3837	AB	2.50	221.09	221.60	4.07	4.19	0.51	0.20
22280+5742	AB	3.97	265.67	265.61	53.87	53.78	0.06	0.09
22284+3533		0.02	286.31	285.41	6.97	6.92	0.90	0.05
22423+1116		1.60	263.25	263.16	8.26	8.29	0.09	0.03
22455+1112	AB	1.18	350.99	349.77	2.46	2.50	1.22	0.04
22513+2914	AB	2.46	71.52	71.75	14.72	14.59	0.23	0.13
22547+1812	AC	0.61	105.74	105.55	15.67	15.79	0.19	0.12
23212+3526	AB	0.79	151.03	151.70	7.26	7.24	0.67	0.02
23317+1021		0.80	75.71	76.04	9.77	9.78	0.33	0.01
23317+1956	AB	1.88	80.04	81.33	5.33	5.38	1.29	0.05
23317+1956	AC	1.71	22.42	22.14	31.13	31.18	0.28	0.05
23317+1956	AD	2.54	344.78	344.86	35.99	35.92	0.08	0.07
23356+2816		0.15	6.00	5.81	3.15	3.17	0.19	0.02
23372+5633		0.29	292.01	291.26	8.11	8.11	0.75	0.00
23375+4832	BC	0.10	81.78	83.74	3.17	3.34	1.96	0.17
23390+5640		0.43	334.67	334.25	4.68	4.91	0.42	0.23
23479+1703	AB	0.70	357.75	357.67	60.24	60.18	0.08	0.08
23479+1703	BC	0.13	356.78	356.42	3.39	3.45	0.36	0.06
23556+2137		1.22	184.06	184.08	7.49	7.54	0.02	0.05
23581+2840		2.50	126.98	126.39	8.06	8.10	0.59	0.04

WDS	Par	Δm	$\theta[^\circ]$		$\rho['']$		$\Delta\theta$	$\Delta\rho$
			VR	AO	VR	AO		
00424+0410*	AB	1.85	209.50	208.75	1.49	1.89	0.75	0.40
01017+4635*		0.81	8.10	8.12	2.36	2.36	0.02	0.00
01246+2450*		0.40	126.15	125.02	4.82	4.78	1.13	0.04
01467+3310*	AB	0.44	270.38	20.04	2.15	2.20	0.34	0.05
01579+3310*		0.58	235.07	236.67	1.49	1.66	1.60	0.17
02446+2928*		0.19	313.99	315.77	3.08	3.00	1.78	0.08
02475+1922*	AB	0.73	307.02	307.46	3.52	3.49	0.44	0.03
03086+6028*		0.42	75.44	76.17	2.13	2.07	0.73	0.06
03247+2033*		0.20	80.35	79.83	4.74	4.65	0.52	0.09
05378+2322*	AB	0.18	359.94	358.91	3.61	3.39	1.03	0.22
05474+2939*		0.47	125.24	127.40	1.31	1.49	2.16	0.18
06179+0919*		1.32	241.21	240.92	5.78	5.64	0.29	0.14
06324+0329*		0.50	214.34	215.90	3.13	3.01	1.56	0.12
06583+1341*		0.15	349.38	349.69	2.45	2.42	0.31	0.03
07018+6637*		1.07	143.91	143.96	3.46	3.31	0.05	0.15
07023+1030*		0.61	275.64	274.85	3.22	3.19	0.79	0.03
07142+0533*		0.00	201.35	201.28	2.30	2.25	0.07	0.05
18443+3940*	AB	0.95	78.71	80.23	2.26	2.16	1.52	0.10
19021+1253*		0.00	350.19	348.83	3.00	2.72	1.36	0.28
19030+3729*	AB	0.60	0.50	1.65	2.95	2.89	1.15	0.06
19111+3847*	A,BC	0.08	19.91	20.08	4.56	4.58	0.17	0.02
20306+2158*		0.10	296.24	297.21	3.60	3.35	0.97	0.25
21068+3408*	AB	0.84	33.19	32.61	4.85	4.68	0.58	0.17
21111+4530*		0.10	347.45	345.98	2.66	2.31	1.47	0.35
21208+3227*	AB	0.27	21.55	20.42	2.42	2.14	1.13	0.28
21330+2043*	AB	0.34	357.01	356.81	3.32	3.22	0.20	0.10
21363+2917*		0.10	306.87	306.64	3.06	2.99	0.23	0.07
22013+2751*		0.10	212.96	213.66	3.48	3.42	0.70	0.06
22190+4107*		0.10	302.22	300.94	4.17	4.16	1.28	0.01
22449+5035*		0.51	48.87	50.25	2.41	2.38	1.38	0.03
23148+2447*		0.32	196.87	195.83	2.74	2.75	1.04	0.01

B Program

U ovom delu će biti predstavljena upotreba i osnovne karakteristike programa koji je razvijen za potrebe ovog master rada. Pomoću njega moguće je gledati FITS fajlove, vršiti isecanje njihovih delova, računanje direktne FT, inverzne FT, auto-korelacije, merenje relativnih koordinata (ručno i automatski), skaliranje podataka (za sada samo pomoću logaritamske funkcije), podečavanje boja itd.



Slika 19: Osnovni ekrani.

Izgled osnovnog sa učitanim FITS fajlom je prikazan na Slici 19. Osnovnim operacijama programa moguće je upravljati pomoću menija ili pomoću dugmića na toolbar-u. Na Slici 20 prikazan je toolbar sa dugmićima čije je značenje redom: otvaranje fajla, snimanje, zatvaranje fajla, vraćanje na početni FITS fajl (korisni u slučaju kada hoćemo da ponovimo merenje), auto-korelacija celog snimka, mod selektovanja (nema selektovanja, kvadrat i slobodno selektovanje), logaritamsko skaliranje (aktivirano ili deaktivirano), prolazak kroz više fajlova odjednom, izlazak iz programa i informacije.



Slika 20: Toolbar.

Svim ovim opcijama moguće je i pristupiti preko menija. U meniju *File* se nalaze standardne opcije *Open*, *Save*, *Close* i *Exit*. Prilikom snimanja fajla se snimaju tekući podaci u FITS formatu. Nakon što se klikne na *Save* opciju (bilo u meniju ili pritiskom na dugmence u toolbar-u), potrebno je uneti ime fajla i on će biti snimljen sa ekstenzijom *.fits*.

U meniju *Action* se pored auto-korelacije, nalazi i mogućnost posebnog računanja FT, inverzne FT i relativnih koordinata. Potrebno je razlikovati *AC-all* i ovičnu auto-korelaciju. Prilikom pritiska na *AC-all* nad slikom se prvo izvršava FFT pa zatim auto-korelacija, dok u slučaju *Auto-correlation* opcije, auto-korelacija se izvršava nad trenutnim podacima.

Slika 21: *Manual set* opcija iz menija *Data*.

U meniju *Data* nalazi se *Color scale*, *Manual set*, *Parameters*, *Data* i *Header* opcije. *Color scale* se koristi prilikom podešavanja nivoa crne i bele boje što omogućava bolje izdvajanje komponenti ukoliko je njihova inicijalna vidljivost slaba. Takođe, ova opcija ima mogućnost invertovanja boja. *Manual set* se koristi prilikom ručnog određivanja pikova i njen izgled je prikazan na Slici 21. Tu je potrebno podešavati najmanju vrednost i postepeno je povećavati dok se ne dobije željena slika. Slika se iscrta pritiskom na dugme *Paint*, a ukoliko je podešavanje završeno pomoću dugmeta *Calculate* računamo relativne koordinate. *Parameters* služi za upisivanje parametara kao što su veličina piksela, žižna daljina teleskopa, ili veličina piksela u lučnim sekundama. *Data* nam omogućava da u zasebnom prozoru vidimo podatke u tabelarnom formatu sa njihovim numeričkim vrednostima. *Header* opcija nam omogućava da izlistamo sadržaj header-a učitanoj FITS fajla.

Ceo program je urađen u programskom jeziku Java. Kao što je već spomenuto u tekstu, za rad sa FITS fajlovima je korišćena biblioteka *nom.tam.fits*

(projekat HEASARC) a za implementaciju Furijeove transformacije (FFT) korišćena je biblioteka JTransforms. Grafički interfejs je urađen pomoću paketa Swing i AWT. Ceo kod programa je podeljen u više klasa od kojih su najznačajnije klase *mWindow*, *FFT2* i *MyFits*. Klasa *mWindow* predstavlja osnovnu klasu od koje počinje startovanje programa i ona upravlja njegovim izvršavanjem. Klasa *FFT2* sadrži funkcije koje omogućavaju izvršavanje direktne i inverzne FT, auto-korelacije, iscrtavanje FT i AC, automatsko određivanje pikova i njihovih centroida. Klasa *MyFits* omogućava efikasno učitavanje FITS fajlova i njihovo iscrtavanje.

Budući razvoj programa će se odnositi na poboljšavanje tačnosti prilikom merenja i boljoj automatizaciji. U poglavlju 6 prikazani su osnovni problemi prilikom automatizacije. Osim toga potreban je rad na unapređivanju GUI-ja, dodavanju različitih skaliranja (ne samo pomoću logaritma).