Универзитет у Београду
Математички факултет

СЕРИЈЕ УЗАСТОПНИХ БРОЈЕВА СА ИСТИМ БРОЈЕМ ДЕЛИЛАЦА

– Мастер рад –

аутор: Реља Ћурчин

ментор: др Миодраг Живковић

Београд
2012.

Садржај

Предговор

Постоје природни бројеви који су узастопни и имају исти број делилаца. Постоје парови узастопних природних бројева са истим бројем делилаца, као на пример 2 и 3, са по два делиоца. Постоје и серије узастопних бројева са овом особином. На пример бројеви 242, 243, 244 и 245 имају по шест делилаца.

Предмет рада је ефективно проналажење првих серија од 8, односно 9 узастопних природних бројева са истим бројем делилаца. Најједноставнији алгоритам омогућава да се на обичном PC рачунару пронађе серија од седам узастопних бројева са истим бројем делилаца. За проналажење дужих серија мора се применити усавршени поступак претраге.

У уводу је дат опис појмова који се користе у раду, као и преглед литературе. У другом поглављу су објашњене функције које су у вези са проблемом претраге. У трећем поглављу приказан је поступак тражења решења: најједноставнији алгоритам, запажања која омогућују бржу претрагу и примењени поступак просејавања. У наредном поглављу описана је реализација програма. Програм је саставни део овог рада. На крају се наводе нека могића усавршавања развијеног програма.

Поглавље 1

Увод

Функција броја делилаца

Нека је $d : \mathrm{Z}^+ \to \mathrm{Z}^+$ пресликавање, дефинисано са

$$d(n) := \left|\{a \in \mathrm{Z}^+ : a \mid n\}\right|. \tag{1}$$

где $|A|$ означава кардиналност скупа A. Тада је d ***функција броја делилаца***.

Бројеви са једнаким бројем делилаца

Серија је било који коначан низ позитивних узастопних целих бројева .

Први рад на тему бројева са једнаким бројем делилаца објавила је К. Спиро (*C. Spiro, [1]*) са универзитета у Илиноису. Она је доказала да једначина

$$d(n) = d(n+5040)$$

има бесконачно много решења по $n \in \mathrm{Z}^+$.

На основу њених резултата Р. Хит-Браун (*R. Heath-Brown, [1]*) доказао је да тврђење важи и за узастопне бројеве, тј. да једначина $d(n) = d(n+1)$ такође има бесконачно много решења. После њега К. Пинер (*C. Pinner, [1]*) доказује општије тврђење да

$$d(n) = d(n+a)$$

има бесконачно много решења по n, за сваки број $a \in \mathrm{Z}^+$.

Многа решења једначине $d(n) = d(n+1)$ одговарају узастопним бројевима који су производ два међусобно различита проста броја. Такође *[4]*, постоји бесконачно много тројки узастопних бројева : n, $n+1$, $n+2$ који су производ два различита проста броја, а за које важи једначина

$$d(n) = d(n+1) = d(n+2)\,.$$

На пример за $n = 33$, 85, 93, 141, 201, 213, 217, 301, 393, 445, 633, 697, 921, ...

Није могуће направити четворку од оваквих бројева зато што је један од њих дељив квадратом броја 2. Међутим, могуће су дуже секвенце узастопних бројева са једнаким бројем делилаца. На пример секвенца дужине четири почиње бројем 242 и задовољава: $d(242)=d(243)=d(244)=d(245)=6$, зато што је $242=2\cdot 11^2$, $243=3^5$, $244=2^2\cdot 61$, $245=2\cdot 7^2$. Даље, серија дужине пет која почиње бројем 40311 задовољава. Поставило се следеће питање : колико може бити дугачка оваква секвенца?

Најмању серију дужине седам пронашла је 1987. године С. Вандемергел (*S. Vandemergel, [4]*). Серију чине бројеви : $171893=19\cdot 83\cdot 109$, $171894=2\cdot 3\cdot 28649$, $171895=5\cdot 31\cdot 1109$, $171896=2^3\cdot 21487$, $171897=3\cdot 11\cdot 5209$, $171898=2\cdot 61\cdot 1409$ и $171899=7\cdot 13\cdot 1889$, сваки са по осам делилаца.

Серију дужине осам пронашла је почетком 2002. године Џ. Мек Крејни (*J. McCranie, [4]*). Серија почиње бројем 1043710445721, сваки број има тачно 24 делиоца. После ње Д. Васерман (*D. Wasserman, [4]*) у јануару 2006. проналази 2197379769820 као најмањи број којим почиње серија дужине девет. Број делилаца у овој серији такође је 24.

Поглавље 2

Функције и скупови бројева у Z+

Особине функције d

Нека је P скуп простих бројева и нека $p^{\alpha} \| n$ означава чињеницу да $p^{\alpha} \mid n$ и $p^{\alpha+1} \nmid n$. Тада за сваки цео број $n \geq 0$ важи

$$d(p^{\alpha}) = \alpha + 1, \text{ за свако } p \in \mathrm{P}.$$

Функција броја делилаца d (1) је мултипликативна аритметичка функција и, ако је $n = \prod_{p^{\alpha} \| n} p^{\alpha}$, онда је :

$$d(n) = \prod_{p^{\alpha} \| n} d(p^{\alpha}) = \prod_{p^{\alpha} \| n} (\alpha + 1) \text{ , за свако } p \in \mathrm{P}. \tag{2}$$

Непосредна последица овога је :

Последица 1 $d(n)$ је непарно ако и само ако је и потпуни квадрат.

Скуп *D(k)*

Серија $n, n+1, \ldots, n+m-1$ је максимална серија бројева са по k делилаца ако је $d(n) = d(n+1) = \ldots = d(n+m-1) = k$, $d(n-1) \neq k$ и $d(n+m) \neq k$. За свако $k \in \mathrm{Z}^{+}$, $k \geq 2$, нека је $D(k)$ скуп почетака (n у горњем изразу) максималних серија бројева са по k делилаца, тј.

$$D(k) := \{a \in \mathrm{Z}^{+} : d(a) = k, d(a-1) \neq k\}.$$

На пример $d(n) = 2$ ако и само ако је n прост број. Одатле следи да је $D(2) = \mathrm{P} \setminus \{3\}$. Даље, пошто је $d(n) = 3$ ако и само ако је n квадрат простог броја, и како не постоје два узастопна квадрата у Z^{+} следи да је $D(3) = \{p^2 : p \in \mathrm{P}\}$.

Теорема 1 За сваки природан број $k \geq 2$ скуп $D(k)$ је бесконачан.

Доказ. Ако је p прост број, онда је $d(p^{k-1}) = k$. Према томе, постоји бесконачно много позитивних целих бројева са тачно k делилаца, из чега следи тврђење теореме. □

Скуп *D(k,m)*

Скуп $D(k)$ се може разложити на дисјунктне подскупове према дужини серија бројева са тачно k делилаца (а које почињу неким елементом скупа $D(k)$). Прецизније, за свако $k,m \in Z^+$ нека је :

$$D(k,m) := \{a \in D(k) : d(a+i) = k \text{ за } 0 \le i < m,\ d(a+m) \ne k\}.$$

Према томе $D(k) = \bigcup_{m \ge 1} D(k,m)$.

Лема 1 За свако $k \in Z^+$, свака серија од 2^k узастопних позитивних целих бројева садржи најмање један број који има више од k делилаца.

Доказ. Свака серија позитивних целих бројева дужине 2^k садржи тачно један умножак броја 2^k. Сваки такав број има више од k делилаца, с обзиром да је $d(r \cdot 2^k) \ge d(2^k) = k+1$, за свако $r \in Z^+$. □

Директна последица ове леме је следећа теорема :

Теорема 2 $D(k,m) = \emptyset$ за сваки број $m \ge 2^k$, $k \in Z^+$.

Према томе, $D(k)$ је унија коначно много непразних подскупова облика $D(k,m)$. Тако, на пример, $D(2)$ можемо да раставимо на следећи начин : $D(2) = D(2,1) \cup D(2,2)$, $D(2,1) = P \setminus \{2,3\}$, $D(2,2) = \{2\}$.

Максимална дужина серије

За свако $k \in Z^+$, нека је $M(k)$ најдужа могућа серија бројева са k делилаца, односно

$$M(k) = \max\{m \in Z^+ : D(k,m) \ne \emptyset\}.$$

На основу *Теореме 2* важи $M(k) \le 2^k$ за свако $k \in Z^+$.

Теорема 3 Ако је $k \in Z^+$ непаран, онда

1. $D(k) = D(k,1)$
2. $M(k) = 1$

Доказ. Као што је речено у *Последици 1*, $d(n)$ је непаран број ако и само ако је n потпуни квадрат. Тврђење теореме следи из чињенице да никоја два квадрата нису узастопни бројеви . □

Особине функције *M(k)*

Непаран умножак броја 2^r, $r \in Z^+$, је број $2^r \cdot s$, где је s непаран број.

Лема 2 Нека је $k \in Z^+$, и нека је $r \in Z^+$ најмањи неделилац (број који није делилац) броја k. Тада не постоји непаран умножак броја 2^{r-1} који има тачно k делилаца.

Доказ. Број r је чинилац броја $d(2^{r-1} \cdot s)$ за свако s. Једнакост $k = d(2^{r-1} \cdot s)$ је тада немогућа, јер r дели њену десну страну, а не дели леву страну. □

Теорема 4 Нека је $k \in Z^+$, и нека је $r \in Z^+$ најмањи неделилац k. Тада је $M(k) \le 2^{r-1}$.

Доказ. Свака серија од 2^r узастопних бројева садржи тачно један непаран умножак броја 2^{r-1}. Према томе она садржи (на основу *Леме 2*) бројеве чији је број делилаца различит од k. Због тога је $M(k) \le 2^{r-1}$. □

Претходна теорема нам говори да је дугачка серија узастопних бројева са једнаким бројем делилаца могућа само када је број делилаца умножак свих целих бројева из неког (почетног) интервала у Z^+.

Нека је $L_n := lcm[1,n]$. Тада важи следећа последица :

Теорема 5 За свако $n \in Z^+$ неједнакост $M(k) \ge 2^n$ важи само ако $L_n \mid k$.

Доказ. Ако $r \nmid k$ за неки природни број $r \le n$ онда $M(k) < 2^k - 1$. □

Теорема 6 Нека је $k \in Z^+$ било који број. Ако је $M(k) \ge 8$, онда $12 \mid k$.

Доказ. Ако је $M(k) \ge 8$, на основу *Теореме 5* важи $6 \mid k$. Довољно је још доказати да $4 \mid k$. Ако је $r \in Z^+$ неки непаран број, онда $d(2r) = 2 \cdot d(r)$. Према томе $4 \mid d(2r)$ осим ако r није потпун квадрат. Међутим, како у Z^+ не постоје два квадрата чија је разлика 2, било која два узастопна непарна умношка броја 2 у Z^+ укључују барем једног који је умножак броја са 4 делиоца. Наравно, у серији од 8 узастопних природних бројева увек можемо наћи два узастопна непарна умношка броја 2. Због тога, ако сви бројеви из те серије имају тачно k делилаца, онда $4 \mid k$. Одатле важи и цело тврђење. □

Функција *F(k)*

За свако $k \in \mathrm{Z}^{+}$ нека је $F(k)$ најмањи природан број којим почиње серија од k узастопних бројева са једнаким бројем делилаца. Прецизније записано :

$$F(k) := \{ i \in \mathrm{Z}^{+} : d(i) \neq d(i) = d(i+1) = ... = d(i+k-1) \neq d(i+k) \}.$$

Непосредно се проверава да је $F(1)=1, F(2)=2$, $F(3)=33$.

i	1	2	3	4	5	6	…	31	32	33	34	35	36
d(i)	1	2	2	3	2	4		2	6	3	3	3	9

На основу *Теореме 6* важи :

$$k \geq 8 \ \Rightarrow 12 \mid d(F(K)).$$

Поглавље 3

Серије бројева са истим бројем делилаца

Најједноставнији алгоритам

Написан на псеудокоду, алгоритам тражења серије узастопних бројева који имају исти број делилаца има следећи изглед :

```
Algoritam Serije(N,k)
//stampa serije od k uzastopnih brojeva
//sa istim brojem delilaca do N
begin
        d ← 1 //d(n-1)
        s ← 1 //duzina serije sa d(n-1) delilaca do n-1
        for n← 2 to N do
                if d(n)=d then
                        s ← s+1
                        if s=k then
                                print n-k+1
                else
                        d ← d(n)
                        s ← 1
end
```

```
Algoritam Eratosten(n)
//odredjivanje prostih brojva <=n
begin
        for i ← 1 to n do
                num[i] ← 1
        i ← 2 //tekuci prosti broj
        while i ≤ n do
                //precrtavsnje umnozaka i
                for j←2i to n step i do
                        num[j-1]  ← 0
                push(prime,i)
                i ← i + 1
                while i ≤ n and  num[i]=0 do
                        i ← i + 1
        return prime
end

Algoritam d(k)
//odredjivanje broja delilaca broja k
begin
        prime ← Eratosten(√k)
        d ← 1
        for i←0 to size of prime do
                m ← 0
                while k mod prime[i] = 0 do
                        m ← m + 1
                        k ← k / prime[i]
                d ← d·(m+1)
        if k ≠ 1 then
                d ← d·2
        return d
end
```

Алгоритам тачно проналази бројеве којима почињу серије задате дужине $k \geq 3$. Алгоритам је реализован програмом на језику $C++$. За израчунавања бројева делилаца за сваки број n потребно је било дефинисати функцију d која, растављући број n на просте чиниоце, рачуна број делилаца по формули (2). У том поступку неопходна је за рад и таблица простих бројева. Таблицу генеришемо позивом функције *Eratosten*. Ова функција је дефинисана одмах након главног алгоритма, а сама таблица простих бројева саставља се применом Ератостеновог сита - прецртавањем умножака свих претходних простих бројева из низа сачињеног од узастопних природних бројева од 1 до $\sqrt{n}$.

Запажања која убрзавају претрагу

Унутар претходног алгоритма могу да се примете и неки недостатци. Постоји почетно ограничење, да дужина тражене серије мора бити $k \geq 3$. То не представља проблем пошто се без помоћи рачунара лако проверава да је $F(1)=1$, и $F(2)=2$.

Ако се покрене програм, и затим унесу за k вредности 3, 4, 5, 6 или 7, добија се : $F(3)=33$, $F(4)=242$, $F(5)=11605$, $F(6)=28374$ и $F(7)=171893$.

Овај прогам не може да израчуна $F(8)$ из више разлога. Најпре, $F(8)$ је веће од $2^{31}-1$. У програму се сви цели бројеви чувају у променљивим типа int. Величина броја који може успешно да се забележи у оваквој променљивој, у програму написаном на програмском језику $C++$ је $2147483647 = 2^{31}-1$. С обзиром је да број $F(8)$ већи, потребно је да се природни бројеви чувају у неком другом формату.

Проблем записа великог броја није и једини проблм због којег програм не би дошао до броја $F(8)$. Почетни алгоритам ради све спорије што је тражени број већи. Број делилаца се у програму рачуна за узастопне бројеве, а таблице простих бројева у том случају остају исте, или ће се разликовати само за један број. Према томе, нема потребе да се функција *Eratosten* позива унутар функције d . Најбоље би било позвати је минималан број пута из *main* функције а сам низ простих бројева као аргумент проследити функцији d .

Постоји још један, много очигледнији, разлог зашто програм ради споро. Ако погледамо у *for* циклус који се налази у алгоритму *Serije* можемо видети да се број делилаца тражи за сваки број, од 1 до $F(k)$. Већ за $k=7$ може да се осети спорост овог поступка - извршава се велики број дељења. За успешно проналажење дужих серија неопходна је темељна промена алгоритма.

Приликом претраге потребно је прескочити рачунање броја делилаца за све оне бројеве за које можемо бити сигурни да не припадају серији тражене дужине k. Што мање пута будемо позивали функцију, мање ћемо времена трошити, а претрага ће самим тим бити ефикаснија.

Који бројеви се могу прескочити? Одговор на ово питање даје нам *Теорема 6* из другог поглавља. Ако је $k \geq 8$, онда смо на основу теореме сигурни да број делилаца за бројеве из серије мора бити дељив са 12. Другим речима, бројеви за које оваква дељивост не важи не могу припадати траженој серији па их због тога не треба ни проверавати.

Побољшани поступак просејавања

Примењени поступак просејавања је поступак који омогућује успешно проналажење серија са дужинама већим од 7. Уместо провере број по број (као што је радио најједноставнији алгоритам) побољшани поступак предвиђа проверу интервал по интервал. Интервали су сви једнаке величине *T*, облика [*iT, (i+1)T*]. Током провере једног интервала довољно је једном позвати функцију *Eratosten* и при томе генерисати просте бројеве до $\sqrt{(i+1)T}$.

Значајо је да се у овом поступку минимизује и број позива функције *d*. Познато је, на основу *Теореме 6*, да приликом претраге можемо да занемаримо све бројеве n, за које $12 \nmid d(n)$. Уместо тог услова у побољшаном поступку просејавања проверава се слабији, али ефективно провермљивији услов $3 \nmid d(n)$.

За сваки интервал може да се направи табела, у којој ће сваки број n из интервала имати своје место $Tabela[n]$. Сваком оваквом броју се у табели придружује цифра 1, ако му је број делилаца дељив са 3 . Ако није, у табели му се придружује нула.

Број делилаца $d(n)$ може да се прикаже као производ бројева облика $d(p^{\alpha})$. Бројеви $p^{\alpha}, \alpha \geq 1$ могу се добити ако број n разложимо на просте чиниоце. Пошто је број 3 прост, следи да је $d(n)$ дељив са 3 само ако је неки од бројева $d(p^{\alpha})$ такође дељив са 3.

Пре поступка просејавања потребно је у програму дефинисати границе интервала на којем се тражи број. Потребно је и креирање табеле са информацијом о дељивости. Поступак предвиђа кретање по степенима свих простих бројева редом. У табели су у почетку све вредности постављене на нулу. Ако је степен простог броја облика $\alpha = 3k+2$ онда $3 \mid d(p^{\alpha})$, самим тим $3 \mid d(n)$. У том случају се вредност у табели поставља на 1.

```
Algoritam KreirajTabelu
begin
        prime ← Eratosten(√nl )
        il ← size of prime
        for i←1 to il do
                p ← Prime[i]
                jmax ← floor( log(nl) / log(p) )
                q ← 2
                for j←2 to jmax step 3 do
                        a ← p^j
                        umax ← floor(nl / a) //granice za umnoske p^j
                        umin ← floor(nf / a)
                        if umin·a<nf then umin ←  umin + 1
                        if umin·a ≤nl then
                                umodp ← umin mod p
                                mt ← umin · a – nf + 1
                                if (mt+nf-1)≤nl then for u←umin to umax do
                                        if umodp≠0 then
                                                Tabela[mt] ← 1
                                        umodp ← umodp +1
                                        if umodp≥p then umodp ← 0
                                        mt ← mt + a

end
```

Након завршетка поступка просејавања програм проверава табелу. Читање табеле се обава реч по реч (16 бита). Укупо има 2^{16} различитих речи од по 16 бита. За читање се користе и готови низови : *maksimalna[a]*, *krajnja[a]*, *pocetna[a]* , $0 \le a < 2^{16}$. Низови садрже целобројни податак о најдужој серији јединица у речи a, дужини последње и дужини почетне серије јединица у овој речи. На основу њих програм препознаје места у табели где се јавља серија јединица довољне дужине. Низови се попуњавају само једном – пре провере табеле за први интервал. Смишљени су тако да им се приступи са неозначеним целим бројем у којем чувамо информацију од 16 бита. На пример нека је реч $a = 1100001111000001$, тада важи следеће : *pocetna[a]*=1, *maksimalna[a]*=4 и *krajnja[a]=2.*

Функција d се позива само за оне бројеве који у табели сачињавају ниску јединица довољне дужине. Таквих места у табели има веома мало у односу на дужину интервала. Ако је успешно пронађена серија бројева са једнаким бројем делилаца, даље просејавање се прекида и програм објављује решење. У супротном се интервал помера за целу своју дужину, а затим се поступак понавља докле год се решење не појави.

```
Algoritam Serije
begin
        pronadjen ← 0
        nf ← 1
        nl ← 2^15 · 3^5 · 5^3
        dim ← floor( (nl-nf+1) / 32 + 1 )

        KreirajTabelu

        while true do
                KreirajTabelu //precrtavanje brojeva kroz ceo interval
                leva ← desna ← 0
                for i←1 to dim do
                        ProveriRec //provera da li postoji dovoljno dugacka serija
                nf ← nf + 2^15 · 3^5 · 5^3
                nl ← nl + 2^15 · 3^5 · 5^3
end
```

Поглавље 4

Програмска реализација претраге

Структура програма

Главна функција се састоји из три дела. У делу првом се дефинишу променљиве, неопходни низови и табеле. Том приликом се дефинишу и границе интервала. У другом делу се дешава просејавање степенима простих бројевима. На крају, у трећем делу, програм обрађује табелу за интервал и проналази решење. Други и трећи поступак се понављају, један за другим, уз стално померање интервала све док се не дође до решења.

Да би се што ефикасниије применило поступак просејавања потребно је користити што је могуће дуже интервале. Уз сваки интервал програм користи и табелу исте димензије у којој су смештене нуле и јединице. Како је меморијски простор на персоналним рачунарима ограничен, користимо интервале величине 10^9. Заправо, интервал има дужину $995328000 = 2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^3$. Овакави интервали имају згодну особину да су на њему умношци степена до 15, 5 и 3, за просте бројеве 2, 3 и 5 распорђени увек на исти начин. То значи да је довољно да се једном направи њихово прецртавање у табели. Касније се табела само копира, а просејавање не креће из почетка него код оних степена код којих смо стали.

Поред оваквог начина просејавања, горе наведени програм има и још неке специфичности. Ефикасније је било користити низ са неозначеним бројевима (*unsigned int*), чија димензија је 32 пута мања од низа којем би директно приступали, са $Tabela[n]$. Та измена је помало наружила изглед програмског кода, али је значајно убрзала рад програма. Тако да, ако на пример желимо да упишемо да је број дељив са 3 ($Tabela[n] = 1$), сада то радимо на следећи начин : $Tabela[n1] = (Tabela[n1] \mid elementi[n2])$. При томе су бројеви $n1$ и $n2$ такви да се број n може представити као $n = 32 \cdot n1 + n2$, где је $0 \le n2 \le 31$. Низ $elementi[32]$ дефинисан је тако да садржи само неозначене целе бројеве који су сачињени од нула на свим позицијама сем на циљној (на пример $elementi[3] = 00000000000000000000000000001000$).

Када програм заврши просејавање на интервалу, и када дође ред да се он провери, то се чини директно користећи три низа. Речи које читамо из табеле (32 бита свака реч) морамо пре тога делити на два дела. Згодније би било де се речи не деле, али није могуће оформити низове са 2^{32} уместо 2^{16} елемената (немамо довољно меморије). Бројеви делилаца проверавају се у следећа два случаја :

1. Ако је $Maksimalana[i] \geq k$

2. Ако је $Pocetna[i] + Krajnja[i-1] \geq k$

Том приликом се проверавају сви бројеви (укупно их има k) који имају своју цифру 1 у тој пронађеној ниски јединица из табеле. Ако су бројеви делилаца једнаки за све бројеве у серији, програм прекида рад и јавља да је пронашао број којим почиње најмања серија дужине k.

```
Algoritam ProveriRec
//provera 16-bitne reci iz tabele
begin
        j ← Tabela[i]
        if  leva + pocetna[j] > 7 then
                desna ← leva + pocetna[j]
                serija ← 1
                d0 ← d( nf + 32 · i – leva – 1)
                for k←nf+32·i-leva to nf+32·i-leva+desna do
                        if d(k) ≠ d0 then serija←0
                if serija=1 then
                        print  nf + 32 · i – leva – 1
                        pronadjen ← pronadjen + 1
        leva ← krajnja[j]
        if maksimalna[j]>7 then
                jeste_serija ← 1
                d0 ← d( nf + 32 · i – 1)
                for k←nf+32·i to nf+32·i+14 do
                        a2←d(k)
                        if a2≠d0 then jeste_serija ← 1
                        else jeste_serija ←  jeste_serija + 1
                        if jeste_serija>7 then
                                print k-7
                                pronadjen ← pronadjen + 1
                        d0 ← a2
end
```

Добијени резултати

Програм је успешно пронашао бројеве 1043710445721 и 2197379769820 тако што је пошао од интервала [1 ,995328000] и тражио прву серију бројева са једнаким бројем делилаца дужине 8, односно 9. Тиме је доказао да су то и најмање такве серије, тј. да су то бројеви $F(8)$ и $F(9)$. На рачунару са процесором `AMD Athlon XP 2200+ са меморијом од 2GB` прва серија дужине 8 пронађена је за 4 сата и 36 минута, а прва серија дужине 9 за 11 сати и 10 минута. Након тога програм је пронашао и наредних неколико серија бројева дужине барем осам.

број којим почиње серија	дужина серије
1043710445721	8
2048634640921	8
2197379769820	9
4082702520543	8
4458620760921	8
5280134620448	8
5841946725145	8
6487241256346	8
7135254111400	8
9576312741344	8
12080672874848	8
12492319076571	8
12622902379545	8
13130193711968	8
14208389795168	8
15632026122975	8
15638027885721	8
15702406735769	8
16566690587225	8
17071925414047	8
18497376815071	8
20819640281945	8
20926520214170	8

Друга верзија истог програма реализована је са 64-битним целим бројевима. Показала се нешто бржом у проналажењу резултата на 64-битној машини. На рачунару са процесором AMD Llano X3 A6-3500 са меморијом од 8GB прва серија дужине 8 пронађена је за 3 сата и 52 минута. Код машина са 32-битним процесором ради спорије од основне верзије.

Закључак и правци даљег рада

Пронађене су серије узастопних бројева са једнаким бројем делилаца дужине 8 и 9 закључно до 20926520214170. До тог резултата дошло се развојем посебног програма који је омогућио да се успешно претражи тако дугачак интервал природних бројева. Програм се базира на примени правила из теорије бројева који је описан у другом поглављу, *Теорема 6*.

Као правац даљег рада вреди да се напомене могућност паралелизације поступка. Програм је погодан за овакву врсту рада пошто се базира на претрази по интервалима. Њихова обрада не зависи једна од друге па је довољно прецизирати који интервал ће се на којем процесору обрадити. На овај начин могу се знатно брже проверити сви бројеви од 1 до 2^{52}, колико дозвољава мантиса броја у децималном запису. Уколико се покаже да је за проналажење серије дужине 10 потребно ићи даље, бројеви се морају чувати у некој другом типу података.

Литература

(1) Richard K. Guy ,,Unsolved Problems in Number Theory", Springer-Verlag, 2004, New York

(2) Ivo Düntsch, Roger B. Eggleton ,,Equidivisible consecutive integers", Dar-us-Salam, 1989, Brunei

(3) Tony Forbes ,,Fifteen consecutive integers with exactly four prime factors" ,Mathematics of computation, Volume 71, 2001, Pages 449-452

(4) The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (www.oeis.org)