Универзитет у Београду

Математички факултет

Примена хеуристичке методе у настави геометрије у VII разреду

- мастер рад –

Јелена М. Ивановски

Београд, септембар 2012.

ЦИЉЕВИ И МЕТОДЕ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

Циљеви наставе математике

Настава је сврховити, двосмерни, плански и рационално организован процес у којем се обавља преношење искустава старијих генерација на млађе. Свакако, сврха тог процеса је и оспособљавање тих млађих генерација за самостално и успешно сналажење у животном окружењу. Због тога је и несумњива потреба да се унапреди наставна пракса, садашња "предавачка" настава којом се преносе знања до степена репродукције, замени наставом која ће ученике оспособљавати за самостално стицање знања и његову стваралачку примену у животним питањима.

Циљеви наставе математике у основној школи су:

- да ученици усвоје елементарна математичка знања која су потребна за разумевање појава и законитости у природи и друштву
- да ученици стекну шире образовне основе потребне за лакше разумевање и решавање разноврсних задатака из животне праксе
- да оспособи ученике за наставак математичког образовања и самообразовања и за поступно савладавање основних елемената математичког језика, да развије способност изражавања општих идеја математичким језиком, да развије појмовно и апстрактно мишљење и логичко закључивање
- да доприноси развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет и свестраном развитку ученикове личности

Васпитно-образовни процес подразумева стицање знања, развијање способности и стицање васпитних навика, па ћемо нешто рећи и о тим категоријама.

Знање

Знање је систем или логички преглед чињеница и генерализација о објективној стварности које је човек усвојио и трајно задржао у својој свести. Чињенице су конкретности, односно појединости о објективној стварности које човек упознаје перцептивним путем. Поред чињеница, знање обухвата и познавање генерализација или апстракција као што су појмови, правила, методи, закони, дефиниције, докази, теореме, аксиоме, теорије, мисли, идеје, симболи, алгоритми, једначине...

Знање разликујемо по квалитету, па тако имамо:

а) Присећање (ученик се сећа неких садржаја, али ништа више не зна о томе, па га и не можемо назвати знањем)

б) Препознавање (ученик препознаје неке садржаје, зна на шта се они односе, али не уме да их објасни и образложи што и није знање)

в) Знање репродукције (ученик је у стању да понови односно репродукује неке садржаје, али га не уме да употреби у некој другој ситуацији)

г) Оперативно знање (ученик потпуно влада наставним садржајем, зна да га објасни и образложи, односно да га употреби у свакодневном раду, било у школи или ван ње) д) Креативно или стваралачко знање је највиши степен квалитета знања (ученик на темељу већ стеченог знања ствара нова)

За време школовања ученици треба да постигну оперативно знање, а неки ће кренути и степен више, односно постићи највећи степен знања. Стицање знање о објективној стварности која се проучава у настави називамо материјални задатак наставе.

До поткрај 19. века владало је мишљење да је материјални задатак основни и једини задатак наставе; сматрало се да ће млада генерација бити боље припремљена за живот ако усвоји што већу количину знања. То је дидактички материјализам. У школама су се непрестано ширили наставни садржаји, а само учење се свело на меморисање чињеница и генерализација.Таква механички меморисања знања била су на степену репродукције што значи да су ученицима недостајале способности примене тих знања.

Способности

Способност је део личности која је тако формирана да човек може успешно да обавља неку делатност. Способности нису дате рођењем него се развијају зависно о наслеђеној анатомско-физиолошкој и психичкој структури човека, спољној средини у којој човек живи и ради, као и о самој човековој активности.

Развијање разних и бројних људских способности и умећа чини тзв. функционални задатак наставе. То су на прелазу из 19. века на 20. век и у првим десетљећима 20. века истицали представници нове школе који су појам образовања сводили на развијање психофизичких функција (дидактички функционализам). У савременом образовању наглашава се значење и материјалног и функционалног задатка наставе, а не да се истиче један, а запоставља други.

Најважнији појмови у припремама за материјални задатак су: уочити, упознати, показати, увидети, разумети, схватити, научити, а појмови везани за функционални задатак су: развити, оспособити, увежбати, утврдити, навикавати, изражавати, мислити, изграђивати.

У настави математике, поред математичких садржаја, ученик учи писану и усмену математичку реч са свим њеним својствима као што су једноставност, јасноћа, прецизност, тачност.... Такође, развија се способност примене добијених знања, умеће кориштења математичког прибора као и способност самосталног стицања знања помоћу стручне и научне литературе те се оспособљава за решавања проблема везаних за живот.

Васпитање

Настава је процес у којем се усвајају и васпитне вредности (иако је то првенствено задатак породице) као што су морал, естетика, радне и физичке навике. Рецимо, код ученика се негује интерес за учење математике, развија се математичко мишљење, склоност према истраживању, креативност...

Настава математике доприноси развитку концентрације, навике јасног, прецизног и сажетог изражавања, развитку мисаоне активности, навике суделовања у тимском раду, а свакако је то и развијање позитивног става према математици.

У настави математике много више наставним методама и избором задатака за вежбање се доприноси развијању способности и стварању навика, а много мање садржајем и програмом наставе математике.

Иако рад у школи пружа знатне могућности за развијање радних навика код ученика и њихово оспособљавање за самосталан рад, са доста сигурности се може рећи да постоје разни и значајни проблеми у свакодневном раду у настави.

Свакако, то је у првом реду (не)успех ученика као директна последица неразвијености радних навика и неспособности за самосталан рад. Несумњиво, ако се постави питање како оспособити ученике за самосталан рад у настави математике, онда ће многи одговори да буду и одговори на питања како оспособити ученике за самосталан рад у настави уопште, јер су наставне методе, поступци, облици рада на часовима, домаћи за ученике и проблеми у вези с тим карактеристични и за све друге наставне предмете.

Квалитет самосталног рада ученика несумњиво добрим делом зависи од квалитета наставног рада. Зашто? Јер ученик на наставном часу учи од наставника да ради и како да ради. Заиста је велико питање да ли је баш увек оправдано приговарање ученицима како су незаинтересовани односно да их ништа не занима и како не умеју да образложе неки део наставне материје, посебно ако ученик нема добар пример излагања и образлагања на самом часу на који може да се угледа. Кад се разматра проблематика везана за оспособљавање ученика за самосталан рад потребно је нагласити да усвајање поступака и стварање навика настају искључиво као резултат дуготрајног и добро организованог вежбања ученика на часовима у школи и код куће. Да би се остварили позитивни резултати треба рећи да та реализација овиси и од личности наставника, система његовог рада, примене рада у савременим облицима и методама рада.

Методе

Методе наставе математике су начини и средства помоћу којих се преносе одређена математичка знања, умећа и реализација циљева наставе математике.
Неке од метода су:

Предавачка метода

Метода дијалога

Хеуристичка метода

Проблемска метода

Програмирана метода

Метода рада са текстом

Експериментална метода

Демонстрација

Наравно, наставник мора у потпуности да познаје карактеристике методе или неког облика наставе да би се она успешно применила. То подразумева:

1. разумевање методе и способност њене примене у различитим конкретним ситуацијама
2. познавање форми исказивања те методе које се најчешће појављују у наставном процесу
3. познавање позитивних и негативних страна тих метода
4. сазнање које садржаје школске математике можемо прикладно да подучавамо том методом

5. умеће да оспособи ученике да раде том методом у процесу обраде одређеног математичког садржаја

Овде ћемо се бавити хеуристичком методом односно хеуристичком наставом.

ХЕУРИСТИЧКА МЕТОДА

Термин ХЕУРИСТИКА је грчког порекла, а значи проналазити. Свима је познато чувено Архимедово ЕУРЕКА (пронашао сам) када је открио главни закон хидростатике. Хеуристичко је оно што је проналазачко, што води открићима. Уобичајено, то је метод наставе и учења који се састоји од низа задатака, а ученици решавајући их сами откривају принципе.

Суштина хеуристичке наставе је у наставниковим " развојним " питањима помоћу којих се ученици подстичу да на основу онога што већ знају, самостално закључују и тако савладавају задатке. Хеуристичка настава ученицима не даје знање него ствара услове да они стекну знање. П. Ф. Каптерјов у императивној форми препоручује наставнику:

Не саопштавај деци опште појмове, општа правила, опште законе и формуле на догматски начин; терај их да сама упоређују и проналазе међу њима сличности и разлике и на основу тога их групишу у врсте, формирају о њима представе и дефиниције; научи их да сама посматрају везе и односе међу предметима и пронађене сталне односе међу њима изражавају општим формулама и законима. Немој им саопштавати ове формуле и законе, него само посматрај да ли их ученици правилно изводе и усмеравај их да не би скренули са правог пута.

Каптерјов тражи да наставникова питања буду углавном "наводећа". Ученик, слушајући та питања у почетку схвата шта и колико не зна, што је подстицајна основа у тражењу решења за постављене задатке. Да би хеуристичка настава дала што боље резултате, врло је важно да однос наставник – ученик буде сараднички, наравно тиме се не нарушава ауторитет самог наставника који свакако мора да постоји.

У традиционалној настави користе се термини: усвајање знања, изучавање садржаја, али не одражавају специфичност хеуристичке наставе којој много више одговарају термини: упознавање, истраживање, стварање, делање, разрада. Етапе у хеуристичкој настави су разноврсне, предлаже се да се настава одвија у неколико корака:

- постављање и одређивање задатака
- сагледавање могућих путева деловања
- реализација решења
- оценивање постигнутог резултата

Помоћу хеуристичке методе ученицима треба постепено развијати форме мисаоне активности, односно да упоређују, да анализирају, да синтетизирају, да конкретизују, да апстрахују, да логично повезују, да индукују, да оцењују одлике нових стања и да откривају путеве за решавање постављених задатака, без обзира да ли ће се они у животу озбиљније бавити математиком или не. Математички начин мишљења је драгоцена тековина математичког образовања који је применљив и у многим другим делатностима.

Почетак хеуристичке наставе налази се почетком 20. века, током времена се развијала и усавршавала. Њен развојни пут најбоље оцењују смернице за њену примену из прве половине 20. века:

- задржати привидност игре, уважавати ученикову слободу и подржати привид његовог мисаоног проналажења математичке истине

- избегавати напорне вежбе памћења у почетном образовању ученика, јер потискује његове урођене особине, предавати ослањајући се на интерес према математичком садржају који се проучава

- да се део математике не излаже у потпуности јер се таквим поступком долази у раскорак с основним принципима наставе – да се развија размишљање,а не учење напамет.

- развијање стваралачких способности ученика је основни и главни задатак математике

- хеуристичка метода је наставна метода у којој наставник не саопштава готове чињенице и истине, него их наводи на самостално откривање одговарајућих тврђења и правила.

- Хеуристичка метода се састоји у томе да наставник пред целим разредом поставља проблем,а заједнички, помоћу одговарајућих питања води ученике до коначног решења.

Карактеристике хеуристичке методе

Као и код свих наставних метода тако и хеуристичка метода има своје добре и лоше стране. Важно је да добре стране превладавају и хеуристичку методу сврставају међу више и савременије наставне методе.

Добре стране:

1.Самосталан рад и активност ученика је основа за стицање знања и способности, притом ја важно наставниково предавање математичког садржаја и његов начин рада као својеврсна помоћ ученицима.

2.Образовно значење имају само они математички садржаји који ученици потпуно схватају, у супротности ученици оно што не разумеју брзо и заборављају, а то је образовни промашај. Због тога је битна особина хеуристичке методе да наставник својим подучавањем ученике води и доводи до разумевања и схватања математичког садржаја.

3.Хеуристичка настава претпоставља непосредну комуникацију између наставника и ученика. Наставник својим питањима упућује ученике да у изворима налазе чињенице на основу којих наставниковим мисаоним вођењем долазе да схватања уопштења. Слободан разговор, као и расправа, дају могућност ученицима да без сустезања постављају питања и то посебно кад им недостаје нека значајна и важна информација.

4.Ученици су мисаоно активни и у одређеној мери су и субјекти наставе без обзира што хеуристичка настава (за разлику од проблемске) не доводи ученике још до потпуног самосталног рада у откривању математичких истина, већ их до те спознаје води наставник на основу хеуристичког модела. Хеуристичка настава мора да доведе ученике до потпуног схватања и разумевања.

Слабе стране :

1.Немогућност мисаоног вођења баш свих ученика, што због помањкања времена, што због различитих брзина схватања.

2.Немогућност непосредне комуникације са свим ученицима.

3.С повученим ученицима је отежана комуникација па онда изостају њихова питања

4. Као и спорост, ово је веома споро за 13-годишњаке, нарочито што је она примењена просечним ученицима тако да је натпросечним ученицима она веома спора, такође изискује и много времена што може да отежа испуњење наставног плана и програма.

5.Непотпуна повратна информација о проученом математичком садржају.

Примери примене хеуристичке методе из геометрије у 7. разреду основне школе

Хеуристичка настава, за разлику од проблемске наставе, може да се примени у потпуности или делимично на сваком наставном часу. Све овиси о самом наставнику и о његовој вештини извођења наставе. Кроз рад са децом увидела сам да често или не разумеју математички садражај који се само испредаје и о њему не расправља или га не примењују при решавању неких конкретних задатака. То је била и покретачка и мотивациона снага за примену неке од метода која ће им помоћи да лакше и боље схвате неки математички садржај. У тој потрази за што примеренијом методом највише ме привукла хеуристичка метода, коју највише примењујем при обради садржаја из геометрије у 7. разреду.

Пример 1. **Број дијагонала из једног темена многоугла са *n* страница**

1) Предзнање ученика

ПИТАЊЕ : Колики је број дијагонала четвороугла из једног темена?

ОДГОВОР : 1

ПИТАЊЕ : Колико има укупно дијагонала у четвороуглу ?

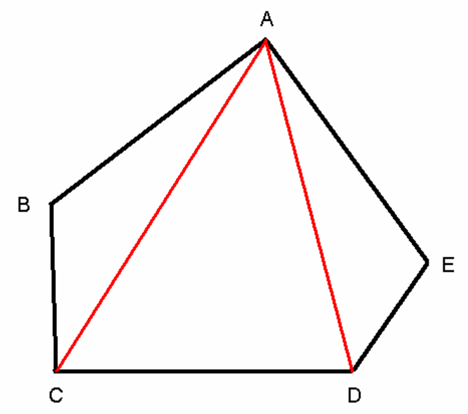
ОДГОВОР : 2

ПИТАЊЕ : Колико четвороугао има страница ?

ОДГОВОР : 4

2) Наставак индуктивног поступка :

Петоугао : усмерава се мишљење ученика на следећи многоугао и и повлачење дијагонала из једног темена



Сл. 1.

ПИТАЊЕ : Колики је број дијагонала из једног темена петоугла ?

ОДГОВОР : 2

ПИТАЊЕ : Колики је број страница ?

ОДГОВОР : 5

3) Аналогија

Шестоугао :

ПИТАЊЕ : Колики је број дијагонала из једног темена шестоугла?

ОДГОВОР : 3

ПИТАЊЕ : Колики је број страница ?

ОДГОВОР : 6

4) Генерализација :

Повезати број страница са бројем дијагонала из једног темена многоугла .

Низ индуктивних закључивања води мишљење ученика на исказивање следеће опште изреке :

Број дијагонала из једног темена многоугла са *n* темена је

$D_1 = n - 3$

***Пример 2.* Укупан број дијагонала многоугла са n страница**

1) Предзнање ученика

ПИТАЊА : Колико дијагонала има четвороугао из једног темена колики је укупан број дијагонала и колико има страница ?

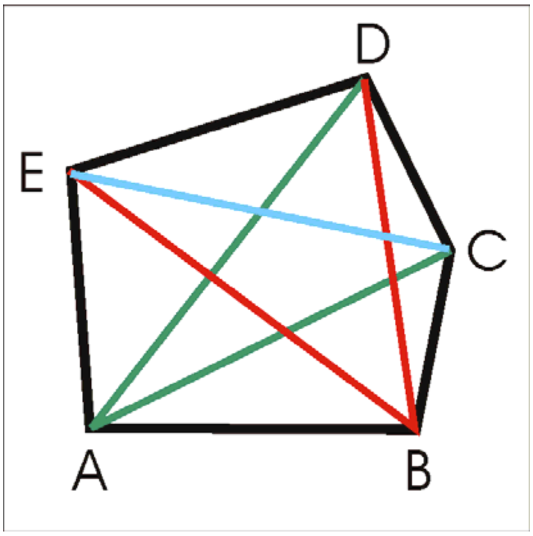
ОДГОВОРИ : $D_1 = 1$

2

n = 4

2) Наставак индуктивног поступка уз обавезан цртеж :

Нацртајмо нови петоугао *ABCDE* али овог пута са свим његовим дијагоналама. Пребројмо их !



Сл. 2.

Укупно их има 5. То су редом, према слици: *AC, AD, BD, BE, CE.*

ПИТАЊЕ : Ако се из сваког темена повлаче по две дијагонале, зашто их нема 5 ·2 =10, односно зашто их има два пута мање ?

Ученици се упућују да одговор проналазе на слици.
Када бројимо дијагонале из темена *A* онда су то *AC* и *AD,*а када бројимо из темена *C,*онда имамо само *CE* ,али не и *CA* , јер смо је већ рачунали као *AC.*
Дакле, ако бисмо рачунали да дијагонала има 5 · 2 (по 2 из сваког темена), онда би се свака дијагонала рачунала *по два пута.* Због тога у петоуглу има

$$\frac{5 \cdot 2}{2} = 5 \text{ дијагонала.}$$

где је број темена $n = 5$, а број дијагонала из једног темена $D_1 = 2$

3) Аналогија

Шестоугао :

ПИТАЊА : Колико је број темена шестоугла, колики је број дијагонала из једног темена,а колики укупан број дијагонала ?

ОДГОВОРИ : $n = 6$

$D_1 = 3$,

укупан број дијагонала је $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$

4) Генерализација

Већи део ученика већ увиђа повезаност броја темена и броја дијагонала из једног темена многоугла са укупним бројем дијагонала, односно исказују тврђење :

$$D_n = \frac{n \cdot D_1}{2},$$

односно : $$D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Пример 3. Збир унутрашњих углова многоугла

Обрада ове наставне јединице темељи се на низу једноставних индуктивних закључивања. Овде се на природан начин рашчлањује наставна јединица на кораке и лако се осмишљава хеуристични приступ њезине обраде. Откривање креће од ранијих познатих чињеница.

1) Предзнање ученика

Овде се ученици подсећају на њихово знање о троуглу и четвороуглу.
Прва од тих чињеница је о збиру свих унутрашњих углова троугла, а друга о збиру свих унутрашњих углова четвороугла.

ПИТАЊЕ : Колики је збир унутрашњих углова троугла ?

ОДГОВОР : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

ПИТАЊЕ : Колики ја збир унутрашњих углова четвороугла ?

ОДГОВОР : $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0 = 2 \cdot 180^0$

ПИТАЊЕ : Како смо дошли до те чињенице ?

ОДГОВОР : Поделили смо четвороугао дијагоналом на два троугла.

2) Наставак индуктивног поступка

Размишљање ученика се усмерује на следећи многоугао и упућују се на повлачење дијагонала из једног темена петоугла.
Следећи многоугао је петоугао *ABCDE* са унутрашњим угловима $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. Његове дијагонале *AC* и *AD* из темена *A* деле угао α на три угла α_1, α_2 и α_3, а угао γ на два угла γ_1 и γ_2, угао δ на два угла δ_1 и δ_2, а петоугао *ABCDE* на три троугла *ABC, ACD* и *ADE.*
Затим ученици сами уочавају унутрашње углове сваког од ова три троугла и исписују њихове збирове.

За троугао *ABC* : $\alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180^0$

За троугао *ACD* : $\alpha_2 + \gamma_2 + \delta_1 = 180^0$

За троугао *ADE* : $\alpha_3 + \delta_2 + \varepsilon = 180^0$

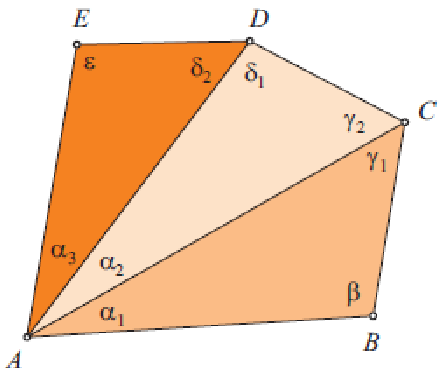
Наставник их упућује да саберу ове једнакости и у том случају од ученика се може очекивати следећи самосталан рад :

$$(\alpha_1 + \beta + \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2 + \delta_1) + (\alpha_3 + \delta_2 + \varepsilon) = 180^0 + 180^0 + 180^0$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \beta + (\gamma_1 + \gamma_2) + (\delta_1 + \delta_2) + \varepsilon = 180^0 + 180^0 + 180^0$$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540°$, па је

$$S_5 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540° = 3 \cdot 180^0$$



Сл. 3.

3) Аналогија :

Шестоугао, седмоугао....

Води се разговор о следећим многоугловима, односно уочава се одређена законитост међу добијеним једнакостима.

ПИТАЊЕ : На колико троуглова делимо шестоугао када повучемо дијагонале из једног његовог темена?

ОДГОВОР : на 4 троугла

ПИТАЊЕ : Да ли већ сад можемо да одредимо колики је збир његових унутрашњих углова ?

ОДГОВОР : $S_6 = 4 \cdot 180°$

ПИТАЊЕ : А код седмоугла ?

ОДГОВОР : $S_7 = 5 \cdot 180°$

4) Генерализација :

Ученици увиђају да се из једног темена многоугла са n темена може повући n – 3 дијагонале, које деле многоугао на n – 2 троугла. То сазнање их води да сами искажу формулу за израчунавање збира унутрашњих углова многоугла са n темена :

$$S_n = (n - 2) \cdot 180°$$

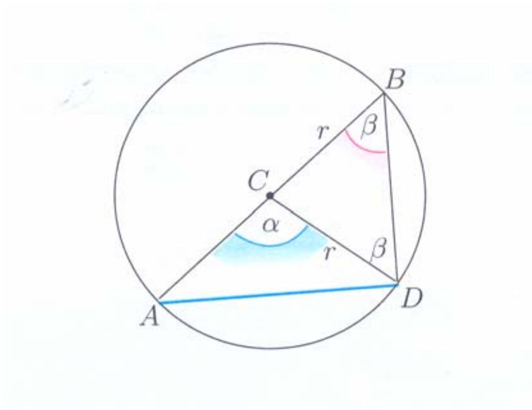
Пример 4. Теорема о периферијском и централном углу

1) Предзнање ученика

Познавање појма периферијског угла над тетивом и њему одговарајућег централног угла, познавање врсте троуглова као и тврђење да је спољашњи угао троугла једнак збиру несуседних унутрашњих углова.

2) Наставак поступка

Наставник упућује ученике да су задати углови, $\alpha = \sphericalangle ACD$ и $\beta = \sphericalangle ABD$, такви да центар круга C припада тетиви *AB*.



Сл. 4.

Ученици се наводе да уоче троугао *BCD*.

ПИТАЊЕ : Којој врсти троуглова припада наш уочен троугао?

ОДГОВОР : Једнакокрак

ПИТАЊЕ : Које су му странице,односно углови једнаки ?

ОДГОВОР : $BC = DC = r$

$\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC = \beta$

ПИТАЊЕ : Какав је угао α у односу на троугао *BCD* ?

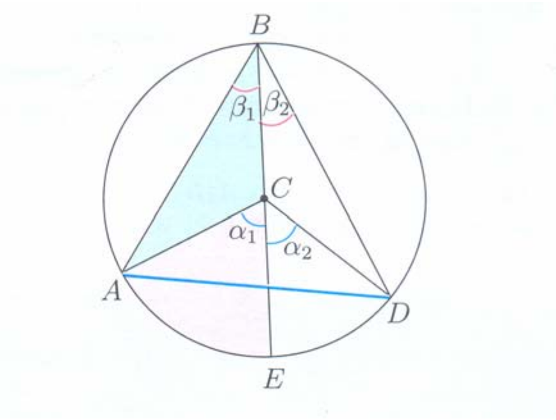
Очекује се да ученици увиде да је угао α спољашњи угао за троугао *BCD*, а тиме да уоче да је $\alpha = \sphericalangle CBD + \sphericalangle BDC = \beta + \beta$, односно да је $\alpha = 2\beta$.

Сада сами могу да искажу теорему о централном и периферијском углу :

Ако је α централни угао и β периферијски угао над истим луком, онда је централни угао два пута већи од периферијског угла.

3) Готово увек, бар један од ученика се запита да ли ће теорема важити и кад центар *C* не припада тетиви *AB*, па ученици покушавају сами уз малу помоћ наставника да докажу и тај случај (који се своди на претходни).

Наставник им нацрта слику и укаже да је $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ и $\beta = \beta_1 + \beta_2$.



Сл. 5.

Ученици уочавају да је троугао *ABC* једнакокрак, тј. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB = \beta_1$, а $\alpha_1 = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CAB$, односно $\alpha_1 = 2\beta_1$.

Такође троугао *BCD* је једнакокрак где је $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC = \beta_2$,

па је $\alpha_2 = \sphericalangle CBD + \sphericalangle BDC$, тј. $\alpha_2 = 2\beta_2$.

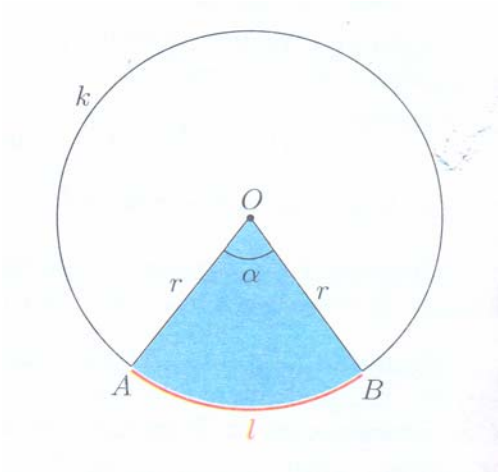
Опет, наставник наводи ученике да саберу ове једнакости и од њих се очекује да то сами и ураде, односно да је

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 \quad \text{тј.}$$
$$\alpha = 2\,(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta.$$

На тај начин ученици су готово самостално доказали ову теорему, код већине се и виде и чују знаци одушевљења и задовољства.

Пример 5. **Дужина кружног лука**

Величина кружног лука директно је повезана са величином одговарајућег централног угла. О томе је било речи још и у петом разреду, као и на почетку обраде наставне теме везане за круг. Ученици се још једном на то подсећају.



Сл. 6.

1) Предзнање ученика

ПИТАЊЕ : Размислите, да ли једнаким централним угловима одговарају једнаки кружни лукови, а то значи лукови једнаких дужина ?

Очекује се да ће ученици потврдно одговорити, јер је то уочено још у петом разреду.

ПИТАЊЕ : Сложићете се да пуном углу (360^0) одговара цела кружница. Колика ја онда дужина кружног лука који одговара пуном углу ?

ОДГОВОР : Цео обим, односно $2r\pi$ (r је полупречник кружнице)

ПИТАЊЕ : Ако централни угао смањимо (повећамо) неколико пута, шта се догађа са дужином лука ?

ОДГОВОР : Дужина лука се за исто толико пута смањи односно повећа.

ПИТАЊЕ : Из ових запажања, шта можемо да закључимо, какве су величине величина централног угла и дужина кружног лука који му одговара ?

ОДГОВОР : У сваком кругу величина централног угла и дужина кружног лука су узајамно зависне величине, и то директно пропорционалне.

Сада ће ученици једноставно извести формулу за израчунавање дужине лука, који је на датој кружници одређен одговарајућим централним углом.

2) При извођењу те формуле користићемо искуства из рада са пропорционалним величинама.

Нека је r полупречник дате кружнице на којој је лук дужине l одређен централним углом α^0. Од ученика се очекује следећи самосталан рад :

Дужини кружнице	$2r\pi$	одговара централни угао	360^0
Дужини лука	$\uparrow\ l$	одговара централни угао	$\uparrow\ \alpha^0$

(Стрелице одговарају директно пропорционалним величинама, црвену постављамо поред l јер се тражи лук)

Састављу одговарајућу пропорцију :

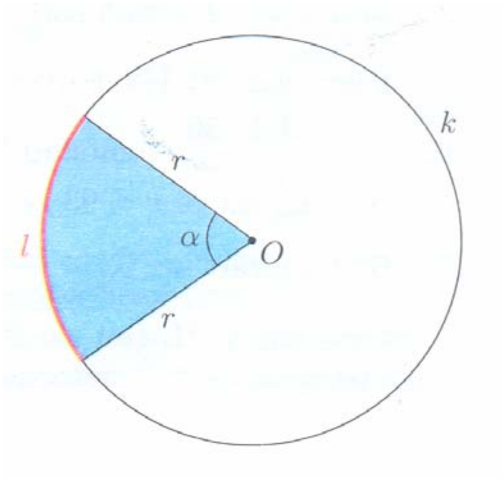
$$l : 2r\pi = \alpha : 360, \text{ одакле је } l = \frac{2r\pi\alpha}{360^0},$$

након скраћивања добијамо тражену формулу

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^0}$$

Пример 6. **Површина кружног исечка**

Пре обраде ове наставне јединице ученици се упознају са појмом кружног исечка односно да је то део круга ограничен са два полупречника.



Сл. 7.

1) Предзнање ученика

ПИТАЊЕ : Уочите, гледајући слику да ли ће исечак захватати већи део површине кружне површи ако је одговарајући централни угао α што већи ?

ОДГОВОР : Већина ученика ће то увидети и потврдно одговорити.

ПИТАЊЕ : Сетићемо се шта смо радили на часу пар дана раније када смо изводили формулу за израчунавање дужине кружног лука, и тада као и сада долазимо до истих закључака, којих ?

ОДГОВОР : Да је повећавање (смањивање) површине кружног исечка директно пропорционално промени одговарајућег централног угла.

Користећи се овим запажањима и спознајама, ученици ће лако и готово самостално одредити формулу за израчунавање површине кружног исечка у ознаци P_i.

2) Нека је r полупречник датог круга, на коме је кружни исечак одређен централним углом α. Ученици ће сами поставити пропорцију :

Површини $r^2\pi$ круга одговара централни угао 360^0

Површини $\uparrow$ P_i исечка одговара централни угао $\uparrow$ α^0 ,

затим $P_i : r^2\pi = \alpha : 360°$, одакле је

$$Pi = \frac{r^2\pi}{360^0}.$$

3) Наставник наводи ученике да упореде формуле за израчунавање површине кружног исечка и дужине кружног лука.

ПИТАЊЕ : Будући да лук одређује исечак и обрнуто да ли постоји зависност између P_i и l ?

Ученици увиђају позитиван одговор и наставник им указује да трансформишу формулу за израчунавање површине кружног исечка и да ће се тада лако уочити та зависност. Од њих се очекује следећи рад :

$$P_i = \frac{r \cdot r\pi\alpha}{2 \cdot 180^0} = \frac{r}{2} \cdot \frac{r\pi\alpha}{180^0} = \frac{r}{2} \cdot l$$

Дакле, добијамо везу :

$$P_i = \frac{r \cdot l}{2}.$$

Пример 7. Питагорина теорема

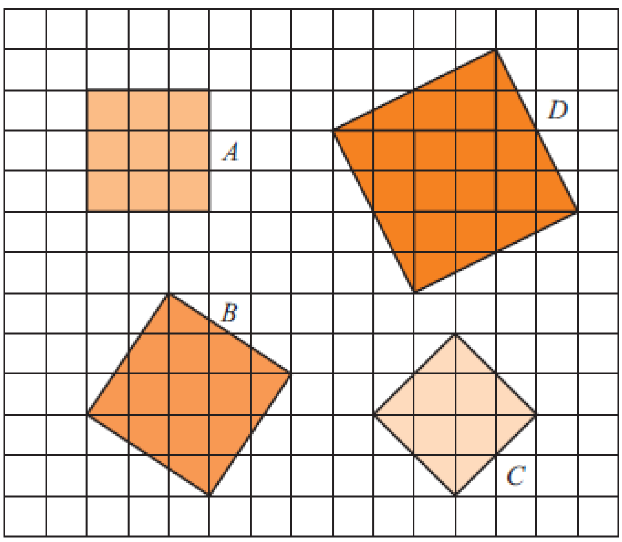
Досадашња, традиционална обрада ове наставне теме има један изразито методички недостатак: најчешће почиње тако што се одмах на почетку излагања искаже својство дужина *a, b* и *c* страница правоуглог троугла у облику Питагорине теореме, $c^2 = a^2 + b^2$. Често се изоставља и доказ и одмах се прелази на примену теореме на разне геометријске ликове. Наравно, то свакако није погрешно, ученици ће и на тај начин усвојити теорему, она ће постати њихово трајно знање, поготово што ће је примењивати и током даљег школовања. Међутим, при овој обради запостављен је поступак откривања, јер је ученицима већ сервиран исказ Питагорине теореме.

За хеуристичко откривање Питагорине теореме сасвим су довољна само два корака. Након кратког наставниковог увођења у проблемску ситуацију, сваки корак омогућује самосталан рад ученика. Треба рећи да су оба корака врло погодна за примену још једне корисне методе у настави математике у основној школи – методе демонстрације.

1) први корак :

Израчунавање површина квадрата у квадратној мрежи. Наставник укаже ученицима да темена неког од квадрата поставе у пресеке квадратне мреже, на тај начин квадрат се дели на троуглове и мање квадрате чије се површине лако израчунавају пребројавањем јединичних квадратића. Наравно, наставник то и сам демонстрира након ученикових делања.

Сл. 8.

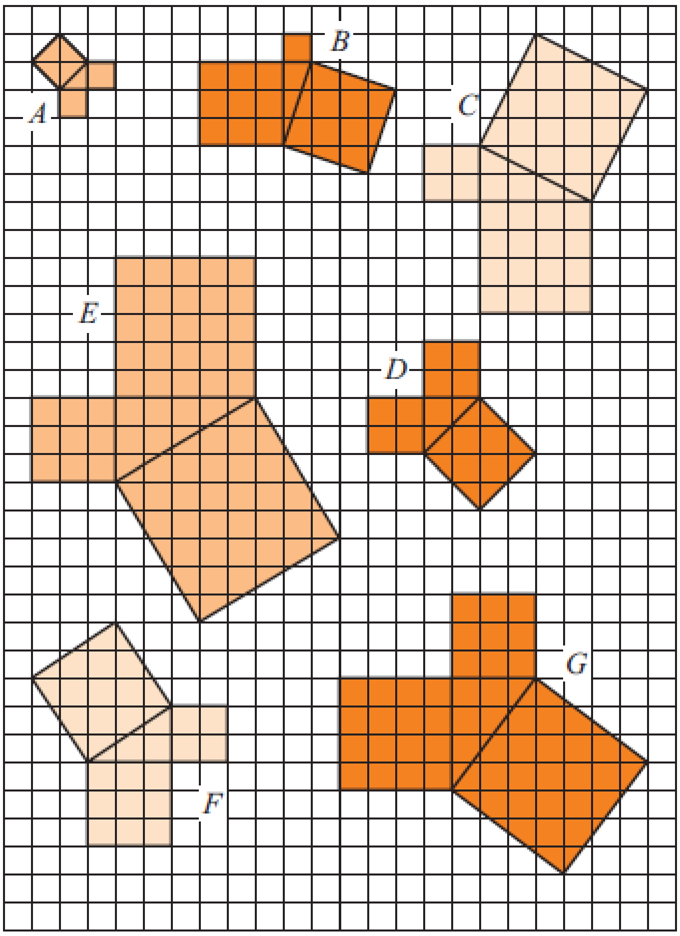


КВАДРАТ	A	B	C	D
ПОВРШИНА				20

Табела 1.

2) други корак :

Проучавање различитих Питагориних фигура у квадратној мрежи, а затим и састављање таблица вредности a^2, b^2, c^2. Након попуњавања таблице од ученика се очекује да уоче везу међу квадратима и након тога лако исказују Питагорину теорему.



Сл. 9.

	A	B	C	D	E	F	G
a^2							9
b^2							16
c^2							25

Табела 2.

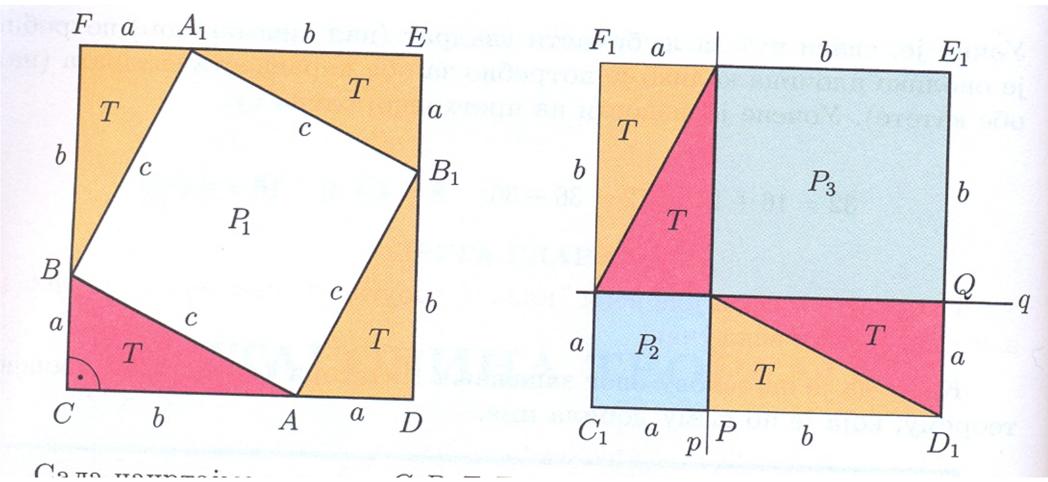
Питагорина теорема :

Збир квадрата дужина катета a *и* b *сваког правоуглог троугла једнак је квадрату дужине хипотенузе* c.

Питагорина теорема (други доказ)

1) први корак :

Наставник укаже ученицима да нацртају правоугли троугао *ABC* са правим углом код темена *C,* са катетама *a* и *b* и хипотенузом *c*, а затим их упути да продуже катету *CA* до *D*, тако да је *AD* = *a*. Ученици увиђају да имају дуж *CD* = *a*+*b*, а затим их наставник упућује на конструкцију квадрата *CDEF* као и тачака A_1 и B_1 на страницама *EF* и *DE* тако да је $DB_1 = b = EA_1$



Сл. 10.

ПИТАЊЕ : Шта смо овим добили ?

ОДГОВОР : Добили смо три правоугла троугла B_1AD, A_1B_1E и BA_1F.

ПИТАЊЕ : Посматрајући та три троугла са почетним троуглом ABC шта уочавамо?

ОДГОВОР : Уочавамо да су они подударни датом троуглу ABC, па је притом $AB = c = AB_1 = A_1B_1 = A_1B$ и $\measuredangle BAB_1 = 180° - (\measuredangle BAC + \measuredangle B_1AD) = 90°$, односно ABA_1B_1 је квадрат странице c.

2) други корак :

Сада наставник упућује ученике да конструишу квадрат $C_1D_1E_1F_1$, једнак квадрату $CDEF$, као и да на страници C_1D_1 одреде тачку P и на страници D_1E_1 тачку Q тако да је $C_1P = D_1Q = a$. Већина ученика увиђа да је $PD_1 = b = QE_1$.Даље их наставник упућује да конструишу кроз тачку P праву p паралелну са C_1F_1 и кроз тачку Q праву q паралелну са C_1D_1.

ПИТАЊЕ : Шта смо добили овим конструкцијама ?

ОДГОВОР : Добили смо квадрат странице $C_1P = a$, квадрат странице $QE_1 = b$ и два једнака правоугаоника страница a и b.

ПИТАЊЕ : Ако конструишемо дијагонале правоугаоника на које фигуре смо их поделили ?

ОДГОВОР : На правоугле троуглове који су подударни са датим правоуглим троуглом ABC .

3) трећи корак :

Означимо са P_1 површину квадрата странице c, са P_2 површину квадрата странице a, са P_3 површину квадрата странице b и са Т површину датог правоуглог троугла.

ПИТАЊЕ : Шта примећујемо, како ћемо изразити површину квадрата $CDEF$?

ОДГОВОР : $P(CDEF) = P_1 + 4T$

ПИТАЊЕ : А како ћемо изразити површину квадрата $C_1D_1E_1F_1$?

ОДГОВОР : $P (C_1D_1E_1F_1) = P_2 + P_3 + 4T.$

ПИТАЊЕ : Будући да су квадрати $CDEF$ и $C_1D_1E_1F_1$ једнаки , шта закључујемо ?

ОДГОВОР : $P_1 + 4T = P_2 + P_3 + 4T$, одакле следи тврђење Питагорине теореме :

$$P_1 = P_2 + P_3 \quad \text{или } c^2 = a^2 + b^2.$$

Пример 8. Површина многоугла

1) Предзнање ученика

ПИТАЊЕ : Како гласи формула за израчунавање површине једнакостраничног троугла коју смо извели помоћу Питагорине теореме ?

ОДГОВОР : $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

ПИТАЊЕ : На колико карактеристичних троуглова можемо да поделимо правилан шестоугао и какви су ти троуглови ?

ОДГОВОР : На 6 карактеристичних троуглова који су при томе и једнакостранични.

2) Наставак поступка

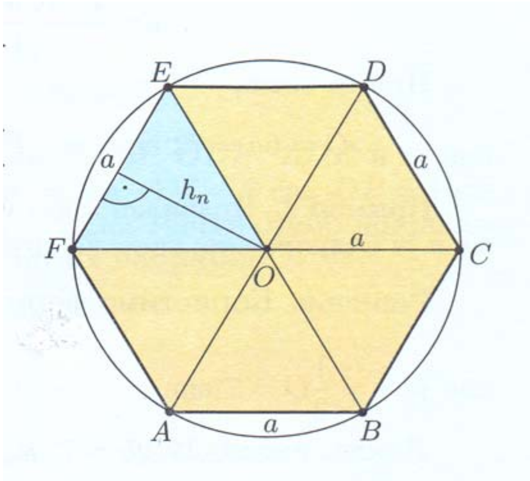
ПИТАЊЕ : Да ли ће нам то сазнање помоћи да изведемо формулу за израчунавање површине правилног многоугла ?

Већина ученика је и без овог питања увидела и изложила формулу за израчунавање површине правилног шестоугла.

$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ односно}$$

$$P = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

3) Очекује се да ће бар један од ученика да се запита како да израчуна површину било ког правилног многоугла. Наставник их упућује да се послуже сликом сматрајући да је то неки правилни *n*-тоугао.



Сл. 11.

ПИТАЊЕ: Видели смо да је површина шестоугла једнака 6 површина једакостраничних троуглова, па на колико подударних карактеристичних троуглова можемо да поделимо правилни седмоугао, осмоугао .... и како ћемо израчунавати њихове површине ?

ОДГОВОР : на 7 односно 8 подударних карактеристичних троуглова,

па је $P_7 = 7 \cdot P_\triangle$,

$P_8 = 8 \cdot P_\triangle$

4) генерализација

Ученици сами увиђају да је површина n-тоугла $P_n = n \cdot P_\triangle$,

односно $P_\triangle = \frac{1}{2} a \cdot h_n$,

притом, висине карактеристичних троуглова, дуж h_n на слици, представљају полупречник уписане кружнице.

Од ученика се очекује да ће сами исписати да је $P_n = n \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_n$, а наставник их упућује на трансформацију претходне формуле тако да повежу површину и обим правилног n-тоугла, па следи да је

$P_n = \frac{1}{2} n \cdot a \cdot h_n$, а $n \cdot a$ је обим правилног многоугла, односно $O = n \cdot a$

или $n \cdot a = 2s$, коначно $P_n = \frac{1}{2} O \cdot h_n$ или $P_n = s \cdot h_n$.

***Пример 9*. Површина фигуре**

Проучавајући до сада троуглове и четвороуглове, првенствено смо се бавили особинама и међусобним односима њихових основних елемената, страница и углова, као и неких других линија и углова. Сада ћемо се бавити овим фигурама као целинама,

1) Предзнање ученика

ПИТАЊЕ : Шта представља унија затворене линије у равни и њене унутрашње области ?

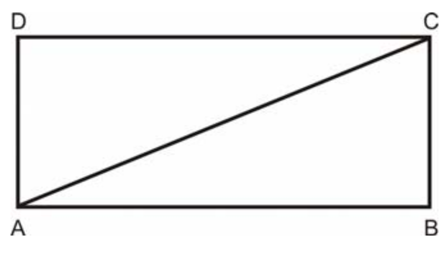
ОДГОВОР : Представља геометријску фигуру (или краће фигуру) у равни.

ПИТАЊЕ : Како се назива величина дела равни коју захвата контура геометријске фигуре ?

ОДГОВОР : Назива се **површином** те фигуре.

2) Наставак поступка

Наставник упућује ученике да правоугаоник *ABCD* поделе дијагоналом *AC* на два правоугла троугла *ABC* и *ACD* и да исецањем једног од троуглова упореде њихове површине.



Сл. 12.

ПИТАЊЕ : У каквом су међусобном односу ова два троугла ?

ОДГОВОР : Они су подударни.

ПИТАЊЕ : Да ли ова два троугла покривају једнаке делове равни ?

ОДГОВОР : Да њихове површине су једнаке.

ПИТАЊЕ : А да ли су та два троугла дисјунктна ?

ОДГОВОР : Да, они су раздвојени.

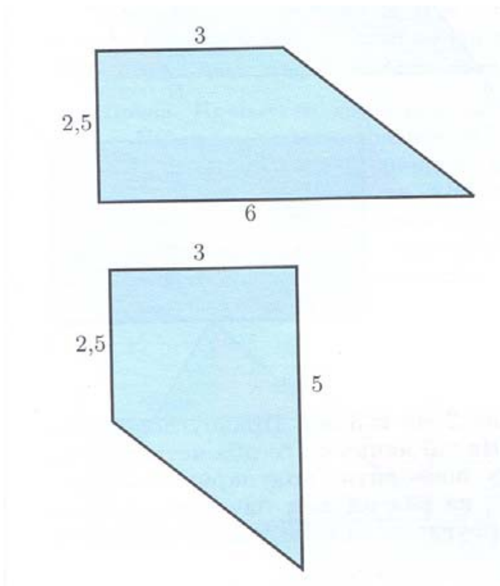
На основу овог разматрања од ученика се очекује да закључе :

1˚) Површине подударних фигура су међусобно једнаке

2˚) Ако је једна фигура унија две дисјунктне фигуре, онда је њена површина једнака збиру површина тих фигура.

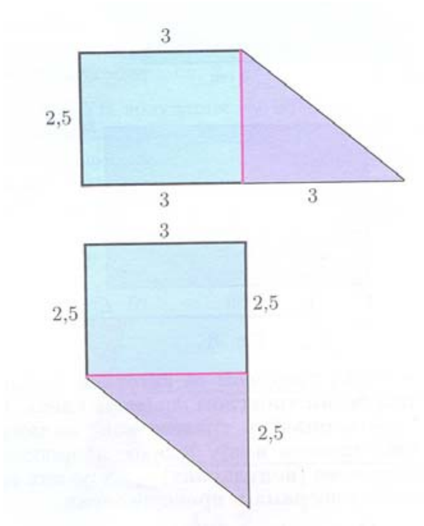
3) Сваки наставник се нада да ће бар један ученик да се запита: **Могу ли две неподударне фигуре имати једнаке површине?**

Наставник им нацрта слику са два правоугла трапеза са означеним димензијама који очигледно нису подударни, али уверићемо се да имају једнаке површине.



Сл.13.

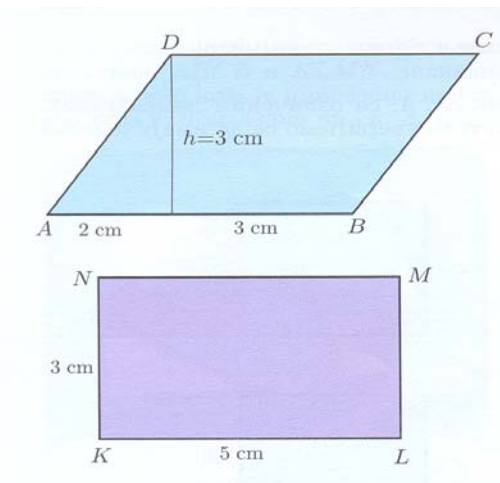
Наставник упућује ученике да означе висине ових трапеза, које деле трапезе на правоугаоник и правоугли троугао, затим их упућује да одреде и њихове димензије.



Сл. 14.

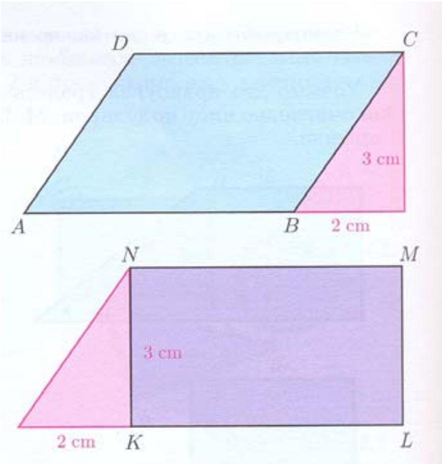
Ученици сами закључују да су правоугаоници подударни као и правоугли троуглови, па су површине ова два трапеза једнаке, као збирови једнаких површина.
Такође, наставник им указује да смо једнакост површина у наведеном случају показали ***разлагењем*** неподударних фигура на подударне делове, односно да се често једнакост површина двеју фигура може утврдити и ***допунавањем*** датих фигура подударним фигурама тако да од њих начинимо подударне фигуре. Затим, наставник им наводи пример.

На слици су паралелограм *ABCD* и правоугаоник *KLMN*, са назначеним димензијама.



Сл. 15.

У следећем кораку наставник наводи ученике да паралелограм здесна допунимо правоуглим троуглом са катетама дужина 2см и 3см, а онда они сами увиђају да правоугаоник са истим троуглом допуне слева.



Сл. 16.

ПИТАЊЕ : Које геометријске фигуре смо добили овим допуњавањима ?

ОДГОВОР : Два правоугла трапеза.

ПИТАЊЕ : Да ли су они подударни?

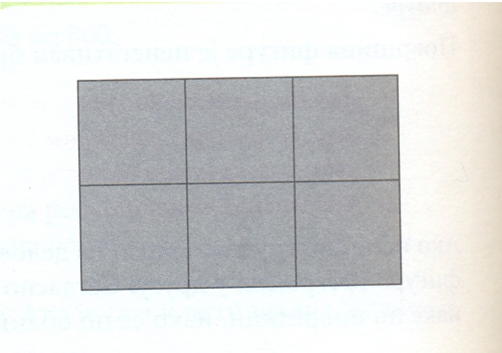
ОДГОВОР : Да, подударни су, а тиме су им и површине једнаке, па кад од њих одузмемо једнаке површине (подударних) правоуглих троуглова, остаће једнаке површине паралелограма и правоугаоника.

Пример 10. Површина правоугаоника

Пре обраде ове јединице наставник напомиње ученицима да основна јединица мере за површину је квадрат чија је страница дужине 1м и назива се квадратни метар, а означава се 1м^2.

1) први корак :

Израчунавање површине правоуганика страница дужина 3 и 2.



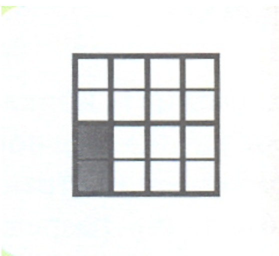
Сл. 17.

Наставник упућује ученике да правоугаоник разложе на јединичне квадрате, на тај начин правоугаоник се разлаже на 6 јединичних квадрата па је његова површина 6 = 2 · 3

2) други корак :

Наставник поставља питање колика је површина правоугаоника чије су димензије $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$?

У овом случају упућује ученике да разлажу јединични квадрат.



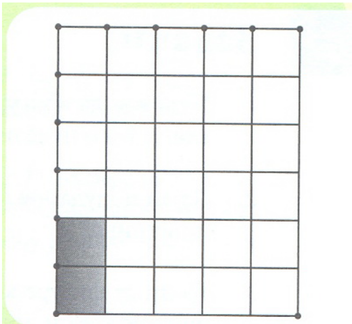
Сл. 18.

Деца уочавају да се јединични квадрат састоји од 8 оваквих правоугаоника па је и његова површина $\frac{1}{8}$ јединичног квадрата, односно $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$.

3) трећи корак

Колика је површина правоугаоника чије су димензије $\frac{3}{2}$ и $\frac{5}{4}$?

Такође, наставник упућује ученике да искористе претходни пример.



Сл. 19.

Већина ученика увиђа да се овај правоугаоник може разложити на $3 \cdot 5 = 15$ правоугаоника димензија $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ површине $\frac{1}{8}$. Зато је његоова површина $15 \cdot \frac{1}{8}$

4) генерализација

Ученици увиђају повезаност површине правоугаоника са дужинама његових суседних страница, односно исказују следеће тврђење :

Површина правогаоника једнака је производу дужина његових страница.

Пример 11. **Површина паралелограма**

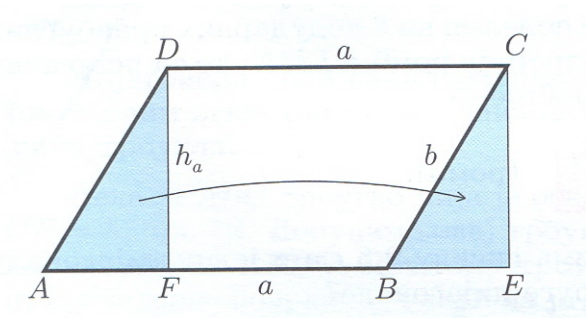
1) Предзнање ученика

Да је површина правоугаоника $P = a \cdot b$ где су a и b дужине његових страница.
Претварање једне фигуре у другу истих површина.

2) Наставак поступка

Наставник упућује ученике да користе претварање паралелограма у правоугаоник исте површине, па ће тако доћи до формуле за површину паралелограма.

Нека је *ABCD* паралелограм чија је страница *AB* дужине *a,* претворићемо овај паралелограм у правоугаоник коме је једна страница дужине *a*. Са *E* и *F* означимо подножја висина из темена *C* и *D* на страницу *AB*.



Сл. 20.

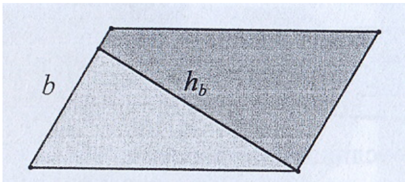
ПИТАЊЕ : Какви су троуглови *ADF* и *BCE*?
ОДГОВОР : Они су подударни (став УСУ , *AD* = *BC* и углови са паралелним крацима)
ПИТАЊЕ : Шта ће се догодити ако одсечемо троугао *ADF* и пребацимо га десно, у положај троугла *BCE*?
ОДГОВОР : Претворићемо паралелограм *ABCD* у правоугаоник *FECD*, исте површине.
ПИТАЊЕ : Које су странице тог правоугаоника ?

ОДГОВОР : $FE = CD = a$ и $F = EC = h_a$.

ПИТАЊЕ : Како ћемо онда исказати формулу за израчунавање површине правоугаоника, односно паралелограма ?

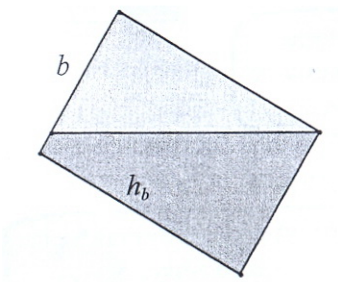
ОДГОВОР : $P = a \cdot h_a$, где је a основица и h_a одговарајућа висина.

Наставник упућује ученике да на сличан начин претворе паралелограм *ABCD* чија је страница *BC* дужине *b* у правоугаоник коме је једна страница такође дужине *b* .



Сл. 21.

Ученици увиђају да се висином h_b паралелограм разлаже на троугао и четвороугао и да се преслагањем делова добија правоугаоник



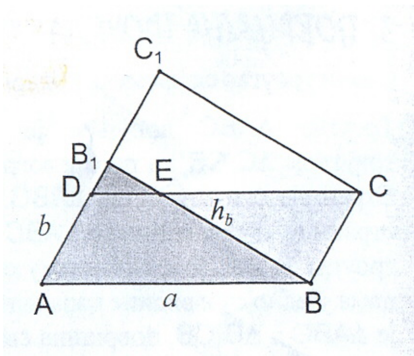
Сл. 22.

страница b и h_b, односно да се површина паралелограма исказује и формулом

$P = b \cdot h_b$.

3) Бар један од ученика се запита шта се догађа ако подножја ниједне од висина које одговарају истој страници, не припадају тој страници.

Наставник им нацрта паралелограм *ABCD* такав да подножја B_1 и C_1 висина h_b које одговарају страници *AD,* не припадају тој страници.



Сл.23.

Ученици увиђају подударност троуглова ABB_1 и DCC_1 (став подударности УСУ, $AB = DC$ и углови са паралелним крацима), знају да су и њихове површине једнаке, а на основу тога закључују да су и површине четвороуглова *ABED* и ECC_1B_1 једнаке.

Наставник наводи ученике да сами увиде које две фигуре су састављене од фигура које имају исте површине.

Они врло брзо закључују да су то паралелограм *ABCD* и правоугаоник BCC_1B_1 па су тиме и њихове површине једнаке.

Како је површина правоугаоника BCC_1B_1, $P = BB_1 \cdot BC$, онда је површина паралелограма *ABCD*, $P = b \cdot h_b$.

Аналогно, и у случају када подножја висине h_a које одговарају страници *a* не припадају тој страници, површина паралелограма је $P = a \cdot h_a$.

Претходним закључивањем доказано је тврђење наредне теореме :

Површина паралелограма једнака је производу странице паралелограма и дужине њој одговарајуће висине.

$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

Пример 12. **Површина ромба**

1) Предзнање ученика

ПИТАЊЕ : Каква је геометријска фигура ромб, односна која су његова својства ?

ОДГОВОР : Ромб је паралелограм који има једнаке странице и такође једнаке висине.

ПИТАЊЕ : Како је ромб паралелограм како се онда израчунава његова површина?

ОДГОВОР : Па као и површина паралелограма $P = a \cdot h_a$.

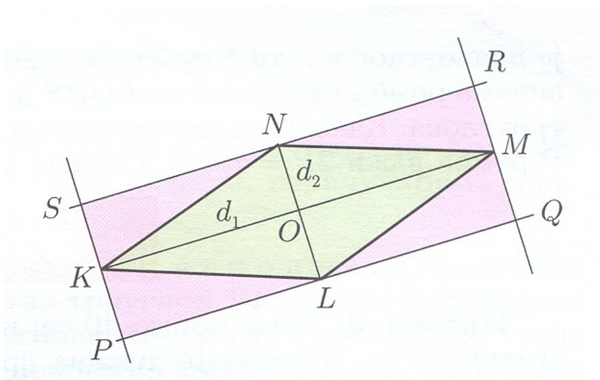
ПИТАЊЕ : Поред тога што је ромб паралелограм са једнаким страницама, које својство има ромб, а везано је за његове дијагонале?

ОДГОВОР : Дијагонале ромба нормалне су међусобом и полове се.

Циљ нам је да пронађемо везу између површине ромба и његових дијагонала.

2) Наставак поступка

Наставник нацрта ромб *KLMN* и укаже ученицима да кроз темена ромба поставе праве паралелне дијагоналама и тиме се добије четвороугао *PQRS.*



Сл. 24.

ПИТАЊЕ : Какав је четвороугао *PQRS*?

ОДГОВОР : То ја правоугаоник коме су странице дужина d_1 и d_2.

ПИТАЊЕ : Шта примећујете, дијагоналама и страницама ромба на колико је троуглова подељен правоугаоник *PQRS* и кави су то троуглови ?

ОДГОВОР : На 8 подударних правоуглих троуглова.

ПИТАЊЕ : А колико таквих троуглова садржи ромб ?

ОДГОВОР : 4 оваква троугла одређују ромб *KLMN*, па за површину ромба важи $2P = d_1 \cdot d_2$.

Одавде добијамо $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

ПИТАЊЕ : Да ли познајемо, осим ромба још неки четвороугао коме су дијагонале међусобно нормалне ?

ОДГОВОР : Да, то је квадрат.

ПИТАЊЕ : Како гласи формула за израчунавање површине квадрата ?

ОДГОВОР : $P = a^2$

ПИТАЊЕ : Какве су дијагонале у квадрату и како ћемо израчунати његову површину преко дијагонала?

ОДГОВОР : Дијагонале су једнаке па ће површина бити

$P = \frac{d \cdot d}{2}$, односно $P = \frac{d^2}{2}$.

Пример 13. **Површина троугла**

1) Предзнање ученика

ПИТАЊЕ : Дијагонала паралелограма дели паралелограм на које две фигуре?

ОДГОВОР : На два троугла.

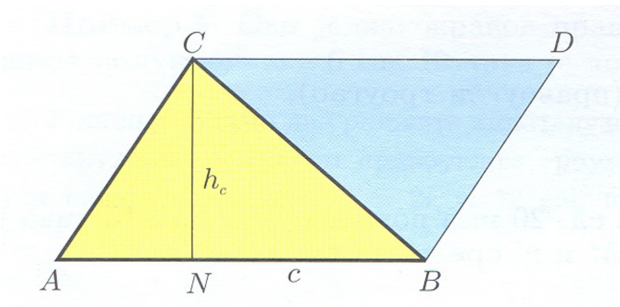
ПИТАЊЕ : Какви су то троуглови ?

ОДГОВОР : Очекује се да ће ученици знати да су међусобно подударни и да знају да докажу ту подударност.

Користећи се овим искуством и површином паралелограма, израчунаћемо површину троугла.

2) Наставак поступка

Наставник наводи ученике да нацртају троугао *ABC* чија је основица *AB* = c и одговарајућа висина *CN* = h_c и да допуне овај троугао троуглом *BDC*, тако да добијамо паралелограм *ABCD.*



Сл. 25.

Како ученици знају да су ови троуглови подударни, дакле знају да су им и површине једанке.

Ученици сами увиђају да је површина паралелограма два пута већа од површине троугла, односно сами изводе формулу за површину троугла,

Дакле $2P = c \cdot h_c$, а одавде је

$$P = \frac{1}{2} c \cdot h_c \quad (\text{троугао})$$

Наставник их упита шта ће се десити ако узмемо другу страницу за основицу и они позивајући се на аналогију закључују да ако је основица страница *AC* = *b* и одговарајућа висина h_b или основица *BC* = *a* и висина h_a добијају формуле:

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a, \qquad P = \frac{1}{2} b \cdot h_b.$$

Претходним закључивањем доказали су тврђење наредне теореме :

Површина троугла једнака је половини производа дужине странице троугла и дужине њој одговарајуће висине.

Површина правоуглог троугла

1) Предзнање ученика

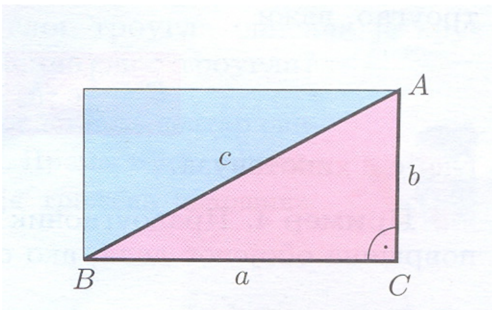
ПИТАЊЕ : Како гласи формула за израчунавање површине Правоугаоника ?

ОДГОВОР : P = *a* ·*b* , a,b – странице правоугаоника,

P -- површина правоугаоника

2) Наставак поступка

Наставник указује ученицима да повуку дијагоналу правоугаоника.



Сл. 26.

ПИТАЊЕ : Шта смо добили ?

ОДГОВОР : Два правоугла троугла.

ПИТАЊЕ : Шта је заједничко тим троугловима ?

ОДГОВОР : Заједничка је хипотенуза.

ПИТАЊЕ : Какве су основице у тим троугловима ?

ОДГОВОР : Једнаке су и одговарају једној од страница правоугаоника.

ПИТАЊЕ : Какве су висине у тим троугловима ?

ОДГОВОР : И оне су једнаке и одговарају другој страници правоугаоника.

ПИТАЊЕ : Шта представља један троугао у том правоугаонику и шта имају заједничко ?

ОДГОВОР : Представља половину правоугаоника а имају заједничку основицу и висину.

ПИТАЊЕ : Познавајући формулу за површину правоугаоника како би израчунали површину правоуглог троугла ?

ОДГОВОР : $P = \frac{1}{2} a \cdot b$

Пример 14. **Површина трапеза**

На претходном часу пре обраде ове наставне јединице, договорено је да сваки ученик донесе маказе, по пет подударних картонских модела неједнакокраког трапеза на коме ће бити педантно извучена средња линија и прецизно измерене дужине основица, висине и средње линије.
1) Предзнање ученика

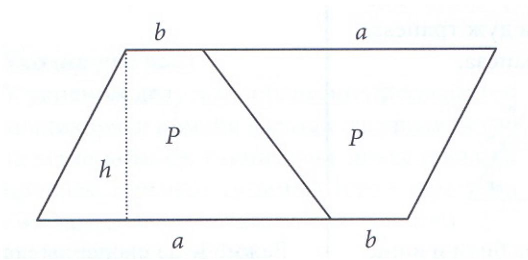
ПИТАЊЕ : Како дефинишемо трапез ?
ОДГОВОР : Трапез је четвороугао са паром паралелних страница.
ПИТАЊЕ : Како називамо тај пар паралелних страница, а како други пар ?
ОДГОВОР : Паралелне странице су основице, друге две су краци трапеза.
ПИТАЊЕ : Шта је висина трапеза ?
ОДГОВОР : Дуж чије крајње тачке припадају правама које садрже основице трапеза и која је нормална на основице.
ПИТАЊЕ : Шта је средња линија трапеза и која је њена особина ?
ОДГОВОР : Средња линија је дуж одређена средиштима кракова трапеза, паралелна је основицама и једнака је полузбиру основица.
ПИТАЊЕ : Углови трапеза испуњавају један важан услов, који?
ОДГОВОР : Углови на крајевима једног крака трапеза су суплементни, код једнакокраког трапеза углови на основицама су једнаки.

2) Наставак поступка

Ако знамо како се израчунава површина правоугаоника, паралелограма и троугла, да ли се погодном трансформацијом (резањем, додавањем и састављањем делова), он може претворити у троугао, правоугаоник или паралелограм једнаке површине ? Дакле, можемо ли и како израчунати површину трапеза ?

Очекује се да ученици препознају неке од идеја :

1.) У првом кораку може се забранити коришћење маказа, односно навести ученике да саставе два трапеза по неком заједничком елементу. Углавном, ученици ће саставити два трапеза по заједничком краку.



Сл. 27.

ПИТАЊЕ : Коју фигуру смо добили?

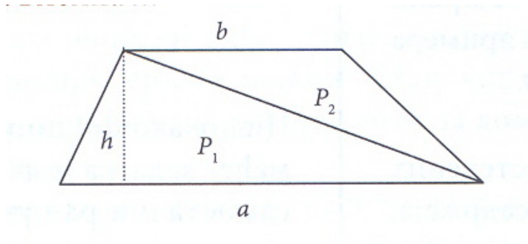
ОДГОВОР : Добије се паралелограм.

ПИТАЊЕ : Шта чини основицу паралелограма, односно висину ?

ОДГОВОР : Основица паралелограма је збир основица трапеза, дакле *a + b,* а висина паралелограма је висина трапеза *h*.

Ученици увиђају да је површина паралелограма (*a* + *b*) · *h*, а како се састоји од два подударна трапеза, површина трапеза је $P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$.

2.) Разрезивање трапеза по дијагонали.



Сл. 28.

ПИТАЊЕ : Које фигуре смо добили ?

ОДГОВОР : Добили смо два троугла.

ПИТАЊЕ : Шта су основице, односно висине ових троуглова ?

ОДГОВОР : Основице ових троуглова су основице трапеза, а висина је заједничка и то је висина трапеза.

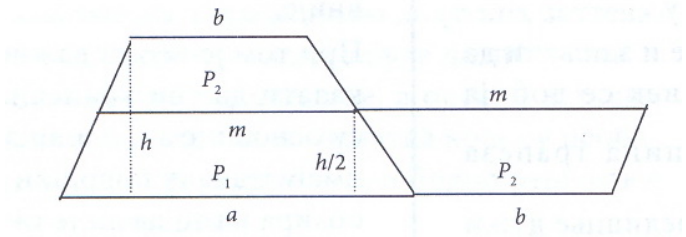
ПИТАЊЕ : Како ћемо израчунати површину трапеза?

ОДГОВОР : То ће бити збир површина добијених троуглова, односно

$P = \frac{1}{2}a \cdot h + \frac{1}{2}b \cdot h$, односно

$P = \frac{1}{2} \cdot h(a+b)$

3) Разрезивање трапеза *ABCD* по средњој линији *MN*, трапез *MNCD* обрнемо око тачке N.



Сл. 29.

ПИТАЊЕ : Коју геометријску фигуру смо добили?

ОДГОВОР : Паралелограм.

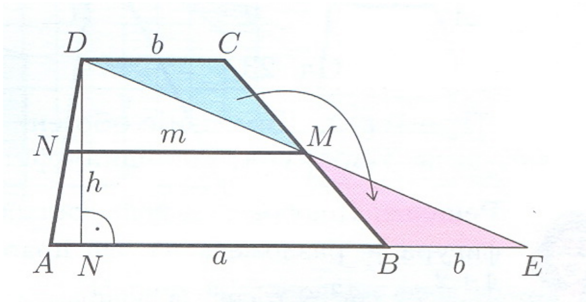
ПИТАЊЕ : Шта је основица, а шта висина тог паралелограма?

ОДГОВОР : Основица је збир основица трапеза a+b, а висина је половина висине добили трапеза $\frac{h}{2}$.

ПИТАЊЕ : Колика је онда површина паралелограма?

ОДГОВОР : $P = (a+b) \cdot \frac{h}{2}$

4) Дат је трапез *ABCD* и средња линија *MN.* Кроз тачке *D* и *M* повучена је права до пресека *E* са правом *AB.* Троугао *CDM,* обрнемо око тачке *M* и додамо четвороуглу *ABMD*.



Сл. 30.

ПИТАЊЕ : Да ли су троуглови *CDM* и *BME* подударни ?

ОДГОВОР : Да, подударни су по ставу УСУ (*BM = CM,* углови код темена *M* су унакрсни, а $\sphericalangle EBM = \sphericalangle DCM$ као углови са паралелним крацима), што значи да су им површине једнаке.

ПИТАЊЕ : Коју фигуру смо добили овом трансформацијом ?

ОДГОВОР : Добили смо троугао *AED* .

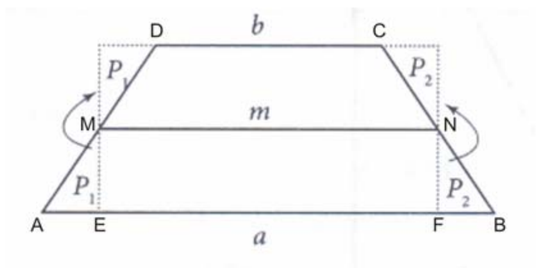
ПИТАЊЕ : Шта је основица, а шта висина овог троугла?

ОДГОВОР : Основица је збир основица трапеза a+b, а висина је висина трапеза h.

ПИТАЊЕ : Колика је површина троугла ?

ОДГОВОР : Дакле, површина трапеза једнака је површини троугла *AED*, односно $P = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h$

5) Дат је трапез *ABCD* и средња линија *MN.*Од трапеза се одрезује један правоугли троугао *AME,* а потом и други *BNF* (чија су темена крајња тачка средње линије, подножје нормале из те тачке на већу основицу и крајња тачка веће основице) и ротационо додавање тих делова горњем делу трапеза.



Сл. 31.

ПИТАЊЕ : Да ли су трогулови *AME* и *MDG*, однсно троуглови *BNF* и *NHC* подударни ?

ОДГОВОР : Да, подударни су по ставу ССУ (*AM=MD,* углови код темена *M* су унакрсни, $\sphericalangle AEM = \sphericalangle MGD = 90^\circ$), аналогно и за други пар троуглова.

ПИТАЊЕ : Коју фигуру смо добили овом трансформацијом ?

ОДГОВОР : Добили смо правоугаоник *MNHG.*

ПИТАЊЕ : Шта су странице тог правоугаоника ?

ОДГОВОР : Једна страница је средња линија трапеза *м*, а друга страница је висина трапеза *h*.

ПИТАЊЕ : Како ћемо израчунати површину овог правоугаоника ?

ОДГОВОР : Површина добијеног правоугаоника је $P = m \cdot h$, односно

$$P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$$

3) Генерализација

Понекад се дешава да ће добрих идеја бити и више него што је набројано, што треба уважити, констатовати одговарајућом скицом на табли и записати колика је површина у том случају.

Следећи корак је да ученици закључе да ма који модел користили увек се добија да је $P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$, тј. да је површина трапеза једнака производу дужине средње линије и висине трапеза.

Закључак

Подстицање ученика на самостално уочавање битних елемената у дефинисању појмова као и навикавање ученика на самосталност и самокритичност јесте заиста један од главних задатака наставника. Наравно, није то нимало лако ни једноставно јер није увек лако подстаћи ученика на стваралачку активност. Треба имати и стрпљења и времена за ученичке покушаје и промашаје, а при томе их не треба пожуривати преураним нуђењем решења. Хеуристичка настава представља један облик рада на часу где наставник својим поучавањем мисаоно води ученика до схватања новог наставног садржаја, а затим и до његовог усвајања. У својој пракси највише је примењујем на математичким садржајима овде изложеним јер сам приметила да те садржаје ученици лакше усвајају кад су овако обрађени, али такође морам рећи да у 8. разреду ову методу не примењујем јер је исувише спора за њихов узраст. Већ је речено да образовну важност имају само они наставни садржаји које су ученици потпуно разумели. Без обзира што хеуристичка настава има своје недостатке, нарочито што је изузетно тешко мисаоно заинтересовати и водити баш све ученике и што су бољи ученици доминантнији, а слабији се при томе и запостављају ипак се примењујући овакву наставу развија интерес и мотивација за рад, развија се и самосталност, и радозналост, и истрајност, и оригиналност и продуктивно мишљење. Мишљење игра централну улогу. Или како каже Никола Рот, наш познати психолог : ″ Мишљење обично почиње проблемом или питањем. ″

Литература

Владимир Стојановић : МАТЕМАТИКА за 6.разред и 7.разред основне школе

Ђ.Дугошија, В.Андрић, В.Јоцковић, В.Мићић : Приручник уз уџбеник из математике за 6. разред основне школе

Здравко Курник : Из рјечника методике, часопис Математика и школа, година VII, бр.34, 2006.

др Младен Вилотијевић и др Нада Вилотијевић : Хеуристичка настава

Садржај