U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

Dr DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ
UZ SARADNJU
JOŽA ULČARA i dr VLADIMIRA DEVIDEA

ZBORNIK MATEMATIČKIH PROBLEMA

SA PRILOZIMA I NUMERIČKIM TABLICAMA

III

U OPŠTOJ REDAKCIJI
Dr D. S. MITRINOVIĆA

ZAVOD ZA IZDAVANJE UDŽBENIKA
NARODNE REPUBLIKE SRBIJE
BEOGRAD

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

Dr DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ
UZ SARADNJU
JOŽA ULČARA i Dr VLADIMIRA DEVIDEA

ZBORNIK MATEMATIČKIH PROBLEMA

SA PRILOZIMA I NUMERIČKIM TABLICAMA

III

U OPŠTOJ REDAKCIJI
Dr D. S. MITRINOVIĆA

ZAVOD ZA IZDAVANJE UDŽBENIKA
NARODNE REPUBLIKE SRBIJE
BEOGRAD
1960

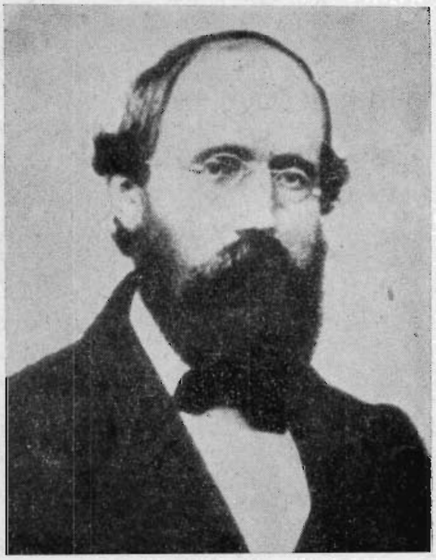
Rešenjem Rektora Univerziteta u Beogradu broj 958 od 16 aprila 1960 godine, a na osnovu predloga Univerzitetske komisije za udžbenike i druge stručne i naučne publikacije, ova knjiga je primljena kao stalan univerzitetski udžbenik.

ZBORNIK MATEMATIČKIH PROBLEMA III

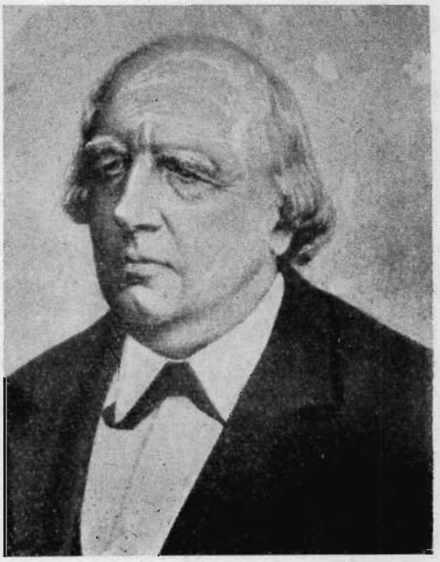
KOMPLEKSNI BROJEVI I KOMPLEKSNE FUNKCIJE
SPECIJALNE FUNKCIJE
APSTRAKTNA ALGEBRA
PROJEKTIVNA GEOMETRIJA
PROBLEMI IZ RAZNIH OBLASTI
PRILOZI
NUMERIČKE TABLICE
GRAFICI NEKIH SPECIJALNIH FUNKCJJA

OSNIVAČI TEORIJE FUNKCIJA KOMPLEKSNE PROMENLJIVE

A. Cauchy (1789—1857)



B. Riemann (1826—1866)



K. Weierstrass (1815—1897)

Newton

Exempla docent non minus quam praecepta.

Leonardo da Vinci

Nessuna umana investigazione si può denominare vera scienza s'essa non passa per le matematiche dimostrazioni.

H. Poincaré

Il n'y a pas de problèmes résolus, il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus.

G. Cantor

Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.

Boltzmann

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie.

H. Bouasse

Il est plus facile d'apprendre les Mathématiques que de s'en passer.

SADRŽAJ

Strana

NUMERIČKE TABLICE

GRAFICI NEKIH SPECIJALNIH FUNKCIJA

oblasti matematike u obliku problema, a namenjena je uglavnom naučnim radnicima. *Zbornik* ima daleko manje pretenzija. Njemu je cilj između ostalog da podstakne na naučni rad one koji tek počinju da studiraju matematiku na prirodno-matematičkim i tehničkim fakultetima, ili bar da probudi interes za matematiku kod izvesnog broja mladih. Prvi uspesi su već postignuti. To pokazuje lep broj elegantnih i interesantnih rešenja težih problema koja su objavljena u ovom *Zborniku* i čiji su autori studenti i mladi asistenti.

Navešćemo jedan primer koji nije usamljen, iz koga se vidi kako naši mladi matematičari imaju naklonosti prema stvaralačkom radu. D. Adamović izradio je za *Zbornik* jednu grupu problema iz kompleksne analize i među njima problem 355 na str. 124 — 125. Ovaj problem formulisao je F. Denk (Erlangen), a objavljen je u časopisu: *Glasnik matematičko-fizički i astronomski,* serija II, knjiga 11, 1956, str. 87, problem 191. Rešenje ovog problema dali su T. Leko i D. Blanuša. Redaktor *Zbornika* dao je posebno D. Tošiću, a posebno D. Đokoviću da pregledaju varijantu rešenja T. Leka koju je dao D. Adamović. Tošić i Đoković dobili su nova rešenja Denk-ovog problema, koja su elegantnija i prostija od rešenja T. Leka i D. Blanuše. Osim toga, oni su našli interesantne generalizacije Denk-ovog problema. Ova rešenja i generalizacije objavljeni su u ovom *Zborniku* na str. 278 — 280 (problemi 90 i 91).

U proveravanju rešenja svesrdno su učestvovali u većoj ili manjoj meri: D. Đoković, S. Prešić, D. Adamović, D. Tošić, P. Vasić, S. Fempl, Z. Pop-Stojanović, R. Lučić, K. Milošević i Ž. Pantić. Prva trojica kritički su pročitali najveće poglavlje, *Kompleksni brojevi i kompleksne funkcije.* D. Đoković pročitao je još i poglavlja *Specijalne funkcije* i *Prilozi,* a D. Adamović poglavlje *Prilozi.* Sugestije navedenih matematičara doprinele su da se na nekim mestima dadu bolje formulacije nego što su bile u prvobitnom tekstu.

Kao recenzent, M. Popadić pažljivo je pročitao rukopis i učinio nekolike korisne primedbe koje su uzete u obzir prilikom definitivnog redigovanja rukopisa. T. Anđelić bio je recenzent za poglavlje *Projektivna geometrija.*

Literatura koja je korišćena pri izradi ovog *Zbornika* navedena je u *Zborniku* I, drugo izdanje. Posebno ističemo časopise:

1. *Elemente der Mathematik*, Basel,
2. *The American Mathematical Monthly*, Menasha (USA),
3. *The Mathematical Gazette*, London,
4. *Revue de Mathématiques spéciales*, Paris,
5. *Mathematics Magazine*, Los Angeles (USA),
6. *Mathesis*, Mons (Belgija),
7. *Gazeta Matematică şi Fizică*, Bucureşti,
8. *Matematika ve škole*, Praha,
9. *Matematyka*, Warszawa,
10. *Matematisk Tidsskrift*, Kobenhavn,
11. *Wiskundige Opgaven*, Amsterdam,
12. *Intermédiaire des Mathématiciens*, Paris,
13. *Intermédiaire des Recherches mathématiques*, Paris,
14. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Tübingen,

15. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public*, Paris,
16. *Математика в школе*, Moskva,
17. *Математическое просвещение*, Moskva,
18. *Успехи математических наук*, Moskva—Leningrad,
19. *Vesnik Društva matematičara i fizičara Narodne Republike Srbije*, Beograd,
20. *Glasnik matematičko-fizički i astronomski*, Zagreb,
21. *Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od Narodna Republika Makedonija*, Skopje,
22. *Periodico di Matematiche*, Bologna,
23. *Bollettino del' Unione matematica italiana*, Bologna,
24. *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*,
25. *Matematikai Lapok*, Budapest.

Numeričke tablice koje su navedene u ovom *Zborniku* uzete su iz knjiga:

J. Peters — J. Stein: *Anhang zum ersten Bande der zehnstelligen Logarithmentafel von J. Peters*, Berlin, 1922;

G. Petiau: *La théorie des fonctions de Bessel*, Paris, 1955;

A. Angot: *Compléments de mathématiques*, troisième édition, Paris, 1957.

U opštoj i jezičkoj redakciji učestvovala je Olga Mitrinović.

Jedan deo skica za crteže izradili su: D. Tošić, Ž. Pantić, S. Pavlović, D. Đoković, D. Kubat i P. Cibin.

Na tehničkoj pripremi rukopisa sa puno volje založila se Olga Aleksić. Ona je, kao i za ranije *Zbornike*, pravilnim rasporedom formula pri kucanju znatno olakšala posao slagačima.

Velika pažnja posvećena je tome da *Zbornik* i sa grafičke strane bude na potrebnoj visini. Specijalno za *Zbornik* izrađeni su simboli $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\in$, $\notin$, $\oint$, $\oint\!\!\oint$ i drugi, od kojih se neki prvi put sada pojavljuju u našoj štampanoj knjizi. Za ovo je pokazao veliko razumevanje Bogdan Ćurčin iz Beogradskog grafičkog zavoda.

Grafički radnici Miodrag Đukić, Kosta Petrović, Nikola Pop-Konstantinović i Branko Rakić svesrdno su se založili da slog dobije umetnički oblik.

U štamparskim korekturama piscima i redaktoru pomogli su: Olga Mitrinović, Ružica Mitrinović, Petar Vasić i Mihailo D. Mitrinović.

Oktobra 1960 *Redaktor*

SIMBOLI I SKRAĆENICE*

1. $\dfrac{ab}{cd} \equiv (ab)/(cd) \equiv ab/(cd) \equiv ab/cd \ (cd \neq 0)$; $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d} \equiv (a/b)+(c/d) \equiv a/b+c/d \quad (bd \neq 0)$;

$\dfrac{a}{b+c} \equiv a/(b+c) \quad (b+c \neq 0)$; $\dfrac{a+b}{c+d} \equiv (a+b)/(c+d) \quad (c+d \neq 0)$;

$\sqrt{a+b+c} \equiv \sqrt{(a+b+c)}$.

2. $\therefore$ znači : iz prethodnog izlazi;

$\ldots$ znači : itd.

$\nearrow$ raste; $\searrow$ opada.

3. $\Rightarrow$ logički simbol : *implikacija.*

$P \Rightarrow Q$ znači: iz P sleduje Q; $P \Leftarrow Q$ znači : iz Q sleduje P;

$P \Leftrightarrow Q$ znači: iz P sleduje Q, i obrnuto: iz Q sleduje P.

4. $n! \equiv \underline{|n} \equiv \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n & (n \text{ prirodan broj}), \\ 1 & (n=0). \end{cases}$

$(2n)!! \equiv 2 \cdot 4 \cdots (2n)$; $(2n+1)!! \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$.

$\dbinom{a}{k} \equiv \dfrac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$ (k prirodan broj, a ma kakvo); $\dbinom{a}{0} \equiv 1$ (a ma kakvo).

5. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$; $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n$.

$\sum\limits_{abcd} ab \equiv ab+ac+ad+bc+bd+cd$; $\sum\limits_{abc} a^2 b \equiv a^2 b + ab^2 + a^2 c + ac^2 + b^2 c + bc^2$.

Katkada se umesto $\sum\limits_{abcd} ab$, $\sum\limits_{abc} a^2 b$ piše samo $\sum ab$, $\sum a^2 b$.

$\prod\limits_{abc} (b+c) \equiv (b+c)(c+a)(a+b)$; $\prod\limits_{abc} \dfrac{b+c}{b^2+c^2} \equiv \dfrac{b+c}{b^2+c^2} \cdot \dfrac{c+a}{c^2+a^2} \cdot \dfrac{a+b}{a^2+b^2}$.

Kratkoće radi piše se i $\prod (b+c)$ umesto $\prod\limits_{abc} (b+c)$.

6. $a \neq b \neq c \neq a$ označava da su brojevi a, b, c različiti.

To se označava i sa $|(b-c)(c-a)(a-b)| > 0$.

7. Relacija $a_1, a_2, \ldots, a_k \geqslant 0$ zamenjuje skup relacija

$$a_1 \geqslant 0, \quad a_2 \geqslant 0, \quad \ldots, \quad a_k \geqslant 0.$$

Ako je $\alpha \leqslant \beta$, tada relacija

$$\alpha \leqslant a_1, \ldots, a_k \leqslant \beta$$

zamenjuje skup relacija

$$\alpha \leqslant a_1 \leqslant \beta; \quad \alpha \leqslant a_2 \leqslant \beta; \quad \ldots; \quad \alpha \leqslant a_k \leqslant \beta,$$

tj. skup relacija

$$\alpha \leqslant a_\nu \leqslant \beta \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Relacija k, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ znači:

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

---

* Obrađeno prema normama društva *L'Association française de normalisation*, Paris, kao i prema drugim izvorima.

8. Ako su a i b prirodni brojevi, tada relacija $(a, b)=1$ označava da su a i b relativno prosti brojevi.

9. $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) označuju skup realnih brojeva, recimo x, za koje je redom
$$a \leqslant x \leqslant b, \quad a \leqslant x < b, \quad a < x \leqslant b, \quad a < x < b.$$
Četiri navedena simbola pišu se i u obliku
$$[a, b], \quad [a, b[, \quad]a, b], \quad]a, b[.$$

10. Ako je E jedan skup, relacija $x \in E$ kazuje da je x element skupa E, tj. da x pripada skupu E. Relacija $x \notin E$ kazuje da x ne pripada skupu E.
Ako su E_1 i E_2 dva skupa, relacija $E_1 \subset E_2$ ili $E_2 \supset E_1$ kazuje da svaki element skupa E_1 pripada skupu E_2 ($\subset$ znak *inkluzije*).
Relacija $E_1 \cap E_2$ (*presek* skupova E_1 i E_2) označava skup svih elemenata koji istovremeno pripadaju i skupu E_1 i skupu E_2.
Relacija $E_1 \cup E_2$ (*unija* skupova E_1 i E_2) označava skup svih elemenata koji pripadaju bilo skupu E_1 bilo skupu E_2.
$E_1 \setminus E_2$ (*diferencija*, razlika skupova E_1 i E_2) označava skup svih elemenata E_1 koji ne pripadaju skupu E_2.

11. $\max(a_1, \ldots, a_n)$ označava onaj (ili one) od n realnih brojeva $a_1, \ldots, a_n$ koji nije premašen ni od jednog od ostalih brojeva iz ovog skupa. Na analogni način definiše se $\min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
$\operatorname{med}(a_1, a_2, a_3)=a_2$ $\quad (a_1 < a_2 < a_3$ ili $a_1 > a_2 > a_3)$.

12. Ako su brojevi a i b ($\neq 0$) celi brojevi, relacija $b \mid a$, tj. $a \equiv 0 \pmod{b}$ kazuje da se b sadrži u a bez ostatka.
Ako su $P(x)$ i $Q(x)$ dva polinoma, relacija $Q \mid P$ izražava činjenicu da je $P \equiv QR$, gde je R treći polinom.

13. Ako je a realno, tada je
$$|a| \equiv a \operatorname{sgn} a \equiv \begin{cases} a & (a \geqslant 0), \\ -a & (a \leqslant 0); \end{cases} \qquad \operatorname{sgn} a \equiv \begin{cases} 1 & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -1 & (a < 0). \end{cases}$$

14. δ_{ik} *Kronecker*-ov simbol (*Kronecker*-ova delta)
$$\delta_{ik} \equiv \delta_k^i \equiv \delta^{ik} \equiv \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k). \end{cases}$$

15. U realnom području $\sqrt[n]{a} \equiv a^{1/n}$ $(a \geqslant 0)$; (n prirodan broj) označava samo nenegativnu vrednost, tj.
$$\sqrt[n]{a} = \left|\sqrt[n]{a}\right|.$$

16. Ako je a realan broj, tada $[a]$ odnosno $\mathrm{E}(a)$ označava najveći ceo broj koji ne premašuje a.

17. $H(t)$ *Heaviside*-ova funkcija:
$$H(t) \equiv \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ \frac{1}{2} & (t = 0), \\ 1 & (t > 0). \end{cases}$$

18. $\approx$ (približno jednako) upotrebljava se u slučaju kada se eksplicitno ne daje ocena greške.
Relacija $a \ll b$ između pozitivnih brojeva a i b kazuje da je a veoma malo u poređenju sa b.
Relacija $a \gg b$ $(a, b > 0)$ kazuje da je a veoma veliko u poređenju sa b.

19. i imaginarna jedinica (da bi se izbegle konfuzije, u elektrotehnici umesto i upotrebljava se j).
$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re} z$ realni deo kompleksnog broja z;
$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im} z$ imaginarni deo kompleksnog broja z;
$\bar{z}$ konjugovana vrednost kompleksnog broja z;
$\cos\theta + i\sin\theta = \operatorname{cis}\theta = e^{i\theta}$.

20. $\exp x \equiv e^x$ (e osnova prirodnih logaritama); $\exp_a x \equiv a^x \, (a>0)$; $\mathrm{pot}_a x \equiv x^a \, (x>0)$;
$\log x = \log_e x \quad (x>0)$; $\quad \mathrm{ch}_a x = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$, $\quad \mathrm{sh}_a x = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$.

21. Pod arc sin x, arc cos x, arc tg x, arc cotg x podrazumeva se, u realnom području, *glavna* vrednost odgovarajuće multiformne funkcije:

Arc sin x, Arc cos x, Arc tg x, Arc cotg x.

22. $\sin^k x \equiv (\sin x)^k$, $\mathrm{sh}^k x \equiv (\mathrm{sh}\, x)^k$.

23. $\dot{x} \equiv \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\quad \ddot{x} \equiv \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2, \ldots$;
$y' \equiv \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, $\quad y'' \equiv \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2, \ldots$; $\quad \mathrm{D}^k \equiv \mathrm{d}^k/\mathrm{d}x^k \quad (k=1, 2, \ldots)$, $\quad \mathrm{D}^0 \equiv 1$.
$\dfrac{\partial z}{\partial x} \equiv \partial z/\partial x \equiv z_x' \equiv z_x$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} \equiv \partial z/\partial y \equiv z_y' \equiv z_y$.
$p \equiv \partial z/\partial x$, $\quad q \equiv \partial z/\partial y$, $\quad r \equiv \partial^2 z/\partial x^2$, $\quad s \equiv \partial^2 z/\partial x\, \partial y$, $\quad t \equiv \partial^2 z/\partial y^2$ (*Monge*-ove oznake).

24. $[f(x)]_a^b \equiv f(x)\Big|_a^b \equiv f(b) - f(a)$.
$[f(x, y)]_{x=a}^{x=b} = f(x, y)\Big|_{x=a}^{x=b} = f(b, y) - f(a, y)$.

25. v. p. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ili P $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ glavna (*Cauchy*-eva) vrednost integrala $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

26. $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$ integral kompleksne funkcije $f(z)$ duž zatvorene putanje Γ.
$\int\limits_{\Gamma+} f(z)\,\mathrm{d}z$ integral duž putanje uzet u smislu protivnom kretanju kazaljke na satu.

27. $f(x) = o(g(x)) \; (x \to a)$ označava $f(x)/g(x) \to 0 \quad (x \to a)$;
$f(x) = O(g(x)) \; (x \to a)$ označava da je izraz $f(x)/g(x)$ ograničen kada $x \to a$.
$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \{f(x)/g(x)\} = 1$.

28. area P = veličina površine P.
Ako su A i B dve tačke, tada $\overline{AB}$ označava dužinu duži AB.

29. Pod krugom (O, r) podrazumeva se krug poluprečnika r čiji je centar u tački O.

30. Kvadratna matrica reda n označava se sa

$$\left\Vert \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{matrix} \right\Vert \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

U upotrebi su i oznake: $\Vert a_{ik} \Vert \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$ i $\Vert a_{ik} \Vert_1^n$.
Jedinična matrica I_n ili E_n (odnosno I ili E) je matrica

$\Vert \delta_{ik} \Vert_1^n \quad$ (δ_{ik} *Kronecker*-ova delta).

31. $\mathrm{tr}\, \Vert a_{ik} \Vert_1^n = \mathrm{sp}\, \Vert a_{ik} \Vert_1^n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\nu\nu}$.

32. $(a_{pq}\, a_{rs}) = \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} \\ a_{rq} & a_{rs} \end{vmatrix}$, $\quad (a_{pq}\, a_{rs}\, a_{uv}) = \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} & a_{pv} \\ a_{rq} & a_{rs} & a_{rv} \\ a_{uq} & a_{us} & a_{uv} \end{vmatrix}$, itd.

Determinanta reda n označava se sa det $\Vert a_{ik} \Vert_1^n = | a_{ik} |_1^n$

$$\text{ili sa} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ili sa} \; \sum \pm a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}.$$

33. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori *Dekartovih* koordinatnih osa Ox, Oy, Oz.

34. Ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tri vektora, tada je:

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ skalarni proizvod; $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorski proizvod; $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ mešoviti proizvod.

Vektori se često označavaju slovima gotske azbuke ili, na primer, sa $\overrightarrow{AB}$, gde je A početak i B kraj vektora.

35. $\vec{\nabla} = \nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$. Operator $\vec{\nabla}$ zove se *nabla*.

36. Ako je U skalarna funkcija tačke $M(x, y, z)$, tada je

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} U} = \operatorname{grad} U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

37. Ako je $\vec{F} = \{X, Y, Z\}$ vektor-funkcija tačke $M(x, y, z)$, tada je

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla}\vec{F} = \nabla \vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

38. Ako je $\vec{F} = \{X, Y, Z\}$ vektor-funkcija tačke $M(x, y, z)$, tada je

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

39. Ako je U skalarna funkcija tačke $M(x, y, z)$, tada je

$$\Delta U = \vec{\nabla}^2 U = \nabla^2 U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Operator $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ zove se *laplasijan*.

40. Ako je U skalarna funkcija tačke $M(x, y, z)$ i vremena t, tada je

$$\Box U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad (c = \text{const}).$$

Operator $\Box = \Delta - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ zove se *dalambertijan*.

41. Oznaka $n = a\,(b)\,c$ upotrebljava se za opisivanje numeričkih tablica i znači da n uzima sve vrednosti članova aritmetičke progresije čiji je prvi član a, razlika b i poslednji član $\leqslant c$.

GRČKA AZBUKA

α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ, ϑ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω
Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω

GOTICA

𝔞	𝔟	𝔠	𝔡	𝔢	𝔣	𝔤	𝔥	𝔦	𝔧	𝔨	𝔩	𝔪	𝔫	𝔬	𝔭	𝔮	𝔯	ſ, 𝔰, ß	𝔱	𝔲	𝔳	𝔴	𝔵	𝔶	𝔷
𝔄	𝔅	ℭ	𝔇	𝔈	𝔉	𝔊	ℌ	ℑ	𝔍	𝔎	𝔏	𝔐	𝔑	𝔒	𝔓	𝔔	ℜ	𝔖	𝔗	𝔘	𝔙	𝔚	𝔛	𝔜	ℨ

KOMPLEKSNI BROJEVI I KOMPLEKSNE FUNKCIJE

I. KOMPLEKSNI BROJEVI

1. Ako su a i b realni brojevi, pokazati da je

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}+a}{2}} + i\operatorname{sgn} b\sqrt{\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-a}{2}}\right\},$$

gde je $\operatorname{sgn} b = 1$ $(b \geqslant 0)$ i $\operatorname{sgn} b = -1$ $(b < 0)$.

Ispred svih korena na desnoj strani treba uzeti znak *plus*.

Primeri: $\sqrt{(3+4i)} = \pm(2+i)$, $\sqrt{(-7+24i)} = \pm(3+4i)$, $\sqrt{i} = \pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2. Pokazati da kubni koren iz $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ ima ove tri vrednosti:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)i,$$

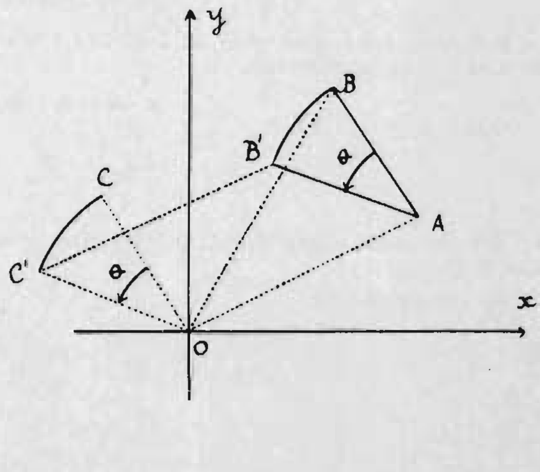
$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)i,$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,i.$$

3. Pokazati da $\sqrt[4]{i}$ ima sledeće četiri vrednosti:

$$\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right),\quad \pm\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).$$

4. U kompleksnoj ravni date su tačke A i B čiji su afiksi a i b. Ako $\overrightarrow{AB}$ izvrši rotaciju oko A za ugao θ u pozitivnom smislu, dobija se nov vektor $\overrightarrow{AB'}$. Odrediti afiks tačke B'.



Rešenje.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{OC'}$.

Afiks tačke C je $b-a$.

Afiks tačke C' je $(b-a)\,e^{i\theta}$.

Afiks tačke B' je $a+(b-a)e^{i\theta}$.

Ovaj se rezultat često primenjuje.

5. Ako između kompleksnih brojeva

$$z_k \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

postoji relacija

$$z_2-z_1=i(z_4-z_3),$$

pokazati da je

$$\overline{M_1M_2}=\overline{M_3M_4}$$

i

$$M_1M_2 \perp M_3M_4,$$

gde je M_k slika kompleksnog broja z_k.

Polazeći od ovog, odrediti afiks m vrha M ravnokrako-pravouglog trougla čija je osnovica AB (afiksi tačaka A i B su kompleksni brojevi α i β), pod uslovom da je smisao AMB suprotan kretanju kazaljke na satu.

Ako se na stranama ma kakvog četvorougla $ABCD$ konstruišu ravnokrako-pravougli trouglovi AMB, BNC, CPD, DQA navedene orijentacije, gde su M, N, P, Q vrhovi trouglova, pokazati da je

$$\overline{MP}=\overline{NQ} \quad \text{i} \quad MP \perp NQ.$$

Rešenje. Pođimo od relacije

$$z_2-z_1=i(z_4-z_3). \tag{1}$$

Odavde izlazi

$$|z_2-z_1|=|i(z_4-z_3)|=|i|\cdot|z_4-z_3|=|z_4-z_3|,$$

odnosno

$$\overline{M_1M_2}=\overline{M_3M_4}.$$

Iz (1) takođe sleduje

$$\arg(z_2-z_1)=\arg[i(z_4-z_3)]=\arg i+\arg(z_4-z_3),$$

odnosno

$$\arg(z_2-z_1)=\arg(z_4-z_3)+\frac{\pi}{2},$$

što kazuje da je

$$M_1M_2 \perp M_3M_4.$$

Potražimo sada afiks tačke M. Duži MA i MB su jednake i ortogonalne, pa za afikse tih tačaka mora važiti relacija (1)

$$\alpha-m=i(\beta-m).$$

Odatle je

$$m=\frac{\alpha-i\beta}{1-i}. \tag{2}$$

Neka su afiksi tačaka A, B, C, D kompleksni brojevi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, a m, n, p, q afiksi tačaka M, N, P, Q.

Na osnovu (2) je

$$m=\frac{\alpha-i\beta}{1-i}, \quad n=\frac{\beta-i\gamma}{1-i}, \quad p=\frac{\gamma-i\delta}{1-i}, \quad q=\frac{\delta-i\alpha}{1-i}. \tag{3}$$

Da bismo pokazali da je $\overline{MP}=\overline{NQ}$ i $MP \perp NQ$, dovoljno je dokazati da relacija

(4) $$n-q=i(m-p)$$

važi za vrednosti (3). Zamenom izraza (3) u (4) dobijamo jedno za drugim:

$$\frac{\beta-i\gamma}{1-i}-\frac{\delta-i\alpha}{1-i}=i\left(\frac{\alpha-i\beta}{1-i}-\frac{\gamma-i\delta}{1-i}\right),$$

$$\beta-\delta+i(\alpha-\gamma)=i[\alpha-\gamma+i(\delta-\beta)],$$

$$\beta-\delta+i(\alpha-\gamma)=\beta-\delta+i(\alpha-\gamma),$$

čime je relacija (4) dokazana.

6. Ako su z_0 i z_1 afiksi dva susedna temena pravilnog poligona od n strana, odrediti afikse ostalih temena ovog poligona.

Rešenje. Neka su z_{k-2}, z_{k-1}, z_k afiksi tri susedna temena pravilnog poligona, koja su poređana tako da čine pozitivan smisao.

Prema problemu 4 ovog odeljka biće

(1) $$z_{k-2}-z_{k-1}=(z_k-z_{k-1})\,e^{\theta i},$$

gde je

$$\theta=\frac{n-2}{n}\pi.$$

Iz (1) dobijamo

(2) $$z_k-z_{k-1}=(z_{k-2}-z_{k-1})\,e^{-\theta i}.$$

Polazeći od (2), možemo obrazovati sledeće relacije:

$$z_2-z_1=(z_0-z_1)\,e^{-\theta i},$$

$$z_3-z_2=(z_1-z_2)\,e^{-\theta i},$$

$$\vdots$$

$$z_{k-1}-z_{k-2}=(z_{k-3}-z_{k-2})\,e^{-\theta i},$$

$$z_k-z_{k-1}=(z_{k-2}-z_{k-1})\,e^{-\theta i}.$$

Posle množenja izraza koji se nalaze na levim stranama, odnosno na desnim stranama u ovim relacijama, dobijamo

(3) $$\begin{aligned} z_k-z_{k-1}&=(-1)^{k-2}(z_0-z_1)\exp\{-(k-1)\,\theta i\}\\ &=(-1)^k(z_0-z_1)\exp\left\{-(k-1)\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)i\right\}\\ &=(z_1-z_0)\exp\left\{(k-1)\frac{2\pi i}{n}\right\},\end{aligned}$$

jer je

$$\exp\{-(k-1)\pi i\}=(-1)^{k-1}.$$

Na osnovu (3) je

$$\sum_{\nu=2}^{k}(z_\nu-z_{\nu-1})=(z_1-z_0)\sum_{\nu=2}^{k}\exp\left\{(\nu-1)\frac{2\pi i}{n}\right\}.$$

Odavde izlazi

(4) $$z_k-z_1=(z_1-z_0)\sum_{\nu=2}^{k}\exp\left\{(\nu-1)\frac{2\pi i}{n}\right\},\quad \text{tj.}\quad z_k-z_0=(z_1-z_0)\sum_{\nu=1}^{k}\exp\left\{(\nu-1)\frac{2\pi i}{n}\right\}.$$

Kako je $\sum_{\nu=1}^{k}\exp\left\{(\nu-1)\frac{2\pi i}{n}\right\}$ geometriska progresija, čiji je prvi član 1 i količnik $\exp\frac{2\pi i}{n}$, dobija se

(5) $$\sum_{\nu=1}^{k}\exp\left\{(\nu-1)\frac{2\pi i}{n}\right\}=\frac{\left(\exp\frac{2\pi ik}{n}\right)-1}{\left(\exp\frac{2\pi i}{n}\right)-1}=\frac{\left(\exp\frac{\pi ik}{n}\right)\left\{\exp\frac{\pi ik}{n}-\exp\left(-\frac{\pi ik}{n}\right)\right\}}{\left(\exp\frac{\pi i}{n}\right)\left\{\exp\frac{\pi i}{n}-\exp\left(-\frac{\pi i}{n}\right)\right\}}.$$

Formula (4), na osnovu (5), postaje

$$(6)\qquad z_k - z_0 = (z_1 - z_0)\exp\left\{(k-1)\frac{\pi i}{n}\right\}\frac{\sin\frac{\pi k}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Ostaje još da se, na analogni način, odredi drugo rešenje, kada tri susedna temena z_{k-2}, z_{k-1}, z_k obrazuju negativan smisao. Da li se drugo rešenje može napisati neposredno, polazeći od rešenja (6)?

Drugo rešenje glasi:

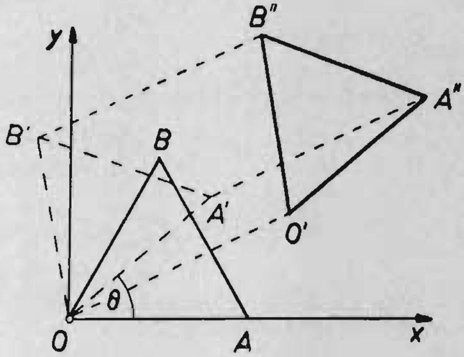
$$z_k' = z_0 + (z_1 - z_0)\left\{\exp\left(-\frac{k-1}{n}\pi i\right)\right\}\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)\Big/\left(\sin\frac{\pi}{n}\right).$$

7. Ako su tačke z_1, z_2, z_3 temena jednog ravnostranog trougla, pokazati da postoji relacija

$$(1)\qquad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 .$$

Rešenje. I. Uočimo ravnostrani trougao OAB. Afiksi njegovih temena su:

$0,\ a,\ a\exp(\pi i/3)\quad (\overline{OA} = a > 0).$



Ako trougao OAB izvrši rotaciju za ugao θ, dobija se trougao $OA'B'$. Afiksi njegovih temena su:

$0,\ a\exp(\theta i),\quad a\exp[(\pi/3+\theta)i].$

Ako ovaj trougao izvrši translaciju, definisanu vektorom $b\exp(\omega i)$, gde je $b>0$, dobija se trougao $O'A''B''$. Afiksi njegovih temena su:

$$(2)\qquad b\exp(\omega i),\quad a\exp(\theta i) + b\exp(\omega i),$$

$$a\exp[(\pi/3+\theta)i] + b\exp(\omega i).$$

Parametrima a, b, θ, ω definisan je proizvoljan ravnostran trougao u kompleksnoj ravni.

Ako se vrednosti (2) zamene u (1), dobija se identitet, čime je dokazana relacija (1)

II. Navešćemo sada drugo rešenje ovog zadatka, polazeći od identiteta

$$(3)\qquad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 - z_1 z_2 \equiv (z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3)(z_1 + \alpha^2 z_2 + \alpha z_3),$$

gde je $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

Ako su z_1, z_2, z_3 afiksi temena jednog ravnostranog trougla, kojima je određen pozitivan smisao obilaženja oko trougla, tada postoji relacija (videti problem 4 ovog odeljka)

$$z_1 = z_2 + (z_3 - z_2)\, e^{\pi i/3},$$

odnosno

$$z_1 = z_2 + (z_3 - z_2)(\alpha + 1),$$

jer je

$$e^{\pi i/3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = \alpha + 1.$$

Prema tome dobijamo

$$(4)\qquad z_1 + \alpha z_2 + \alpha^2 z_3 = 0,$$

jer je $\alpha + 1 = -\alpha^2$.

Ako je smisao obilaženja oko trougla negativan, tada važi relacija

$$(5)\qquad z_1 + \alpha^2 z_2 + \alpha z_3 = 0.$$

Dakle, ako su z_1, z_2, z_3 afiksi temena jednog ravnostranog trougla, tada važi relacija (4), odnosno (5) i one, s obzirom na (3), povlače za sobom relaciju (1).

Važi i obratno, tj. ako između z_1, z_2, z_3 postoji veza (1), tada su z_1, z_2, z_3 afiksi temena ravnostranog trougla.

S obzirom na (3), relacija (1) je ispunjena ako je bar jedan od faktora

$$z_1+\alpha z_2+\alpha^2 z_3 \quad \text{i} \quad z_1+\alpha^2 z_2+\alpha z_3$$

jednak nuli.

Svaka od relacija

$$z_1+\alpha z_2+\alpha^2 z_3=0 \quad \text{ili} \quad z_1+\alpha^2 z_2+\alpha z_3=0$$

izražava uslov da su z_1, z_2, z_3 afiksi temena jednog ravnostranog trougla.

Prema tome, u slučaju kada važi uslov (1), tada su z_1, z_2, z_3 temena jednog ravnostranog trougla.

8. Pokazati da su tačke A i B, čiji su afiksi respektivno $a-b$ i b, simetrične u odnosu na tačku C čiji je afiks $\frac{1}{2}a$ (a, b kompleksni brojevi).

9. Ako je $|z_1|=1$, $|z_2|=1$ i $z_1 z_2 \neq -1$, pokazati da je $(z_1+z_2)/(1+z_1 z_2)$ realan broj.

10. Ako su A i B slike kompleksnih brojeva a i b, i ako je broj $(a+b)^2/(ab)$ realan, tada su tačke O (koordinatni početak), A, B ili kolinearne, ili temena jednog ravnokrakog trougla. Dokazati.

11. Ako su z_1 i z_3 dva naspramna temena jednog kvadrata u kompleksnoj ravni, odrediti položaj ostalih temena.

Rezultat. $\frac{1}{2}(z_1+z_3) \pm i\frac{1}{2}(z_1-z_3)$.

12. Ako tri tačke z_1, z_2, z_3 leže na jediničnom krugu i ako je

$$z_1+z_2+z_3=0, \tag{1}$$

tada su te tri tačke temena jednog ravnostranog trougla.

Rešenje. Prema pretpostavci je

$$|z_1|=1, \quad |z_2|=1, \quad |z_3|=1. \tag{2}$$

Veličine strana trougla $z_1 z_2 z_3$ su:

$$|z_2-z_1|, \quad |z_3-z_1|, \quad |z_3-z_2|.$$

Na osnovu (1) i (2) biće

$$|z_3-z_1|^2=|2z_1+z_2|^2=(2z_1+z_2)(2\overline{z_1}+\overline{z_2})=5+2(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2),$$

$$|z_3-z_2|^2=|2z_2+z_1|^2=(2z_2+z_1)(2\overline{z_2}+\overline{z_1})=5+2(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2),$$

odakle proističe

$$|z_3-z_1|=|z_3-z_2|. \tag{3}$$

Na osnovu (1) i (2) dobijamo

$$|z_2-z_1|^2=|2z_1+z_3|^2=5+2(z_1\overline{z_3}+\overline{z_1}z_3),$$

$$|z_3-z_2|^2=|2z_3+z_1|^2=5+2(z_1\overline{z_3}+\overline{z_1}z_3),$$

odakle sleduje

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_2|. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) izlazi

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_3-z_2|,$$

što znači da je trougao čija temena imaju afikse z_1, z_2, z_3 zaista ravnostran.

13. Ako su ispunjeni uslovi

(1) $$z_1+z_2+z_3=0,$$

(2) $$|z_1|=|z_2|=|z_3|=r,$$

tada su z_1, z_2, z_3 afiksi temena ravnostranog trougla koji je upisan u krugu poluprečnika r sa centrom u koordinatnom početku.

Rešenje. Jednačina trećeg stepena, čiji su koreni z_1, z_2, z_3, ima oblik

(3) $$z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0,$$

gde su:

$$a_1=-(z_1+z_2+z_3), \qquad a_2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3, \qquad a_3=-z_1z_2z_3.$$

Prema uslovu (1) je $a_1=0$. Takođe je $a_2=0$, kao što će niže biti pokazano. Koeficijent a_2 može se napisati u obliku

$$a_2=z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=\frac{z_1z_2z_3}{r^2}(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}),$$

jer je, na osnovu (2),

$$z_k\overline{z_k}=r^2 \qquad (k=1,\ 2,\ 3).$$

Prema relaciji (1) je $\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=0$, pa je zaista $a_2=0$.

Jednačina (3) svodi se na oblik

(4) $$z^3-z_1z_2z_3=0.$$

Slike korena z_1, z_2, z_3 binomne jednačine (4) leže na krugu $|z|=r$ i one su temena jednog ravnostranog trougla.

Primedba. Da li su uopšte slike korena binomne jednačine

$$z^n=A \qquad (n \text{ prirodan broj; } A \text{ kompleksan broj})$$

temena jednog pravilnog poligona od n strana?

Napomena. Videti prethodni zadatak.

14. Dokazati relaciju $|a+b|^2+|a-b|^2\equiv 4|a|^2 \quad (|a|=|b|)$.

15. Dokazati identitet

(1) $$|z_1+z_2|+|z_1-z_2|\equiv|z_1+\sqrt{(z_1^2-z_2^2)}|+|z_1-\sqrt{(z_1^2-z_2^2)}|$$

$$(z_1,\ z_2 \text{ kompleksni brojevi}).$$

Rešenje. Ako se digne na kvadrat izraz na levoj strani datog identiteta, dobija se

$$2\{|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1^2-z_2^2|\}.$$

Isti izraz se dobija za

$$\{|z_1+\sqrt{(z_1^2-z_2^2)}|+|z_1-\sqrt{(z_1^2-z_2^2)}|\}^2.$$

Prema tome, identitet (1) je dokazan.

16. Dokazati identitet

(1) $$|a|+|b|\equiv\left|\frac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab}\right|+\left|\frac{1}{2}(a+b)+\sqrt{ab}\right|$$

$$(a,\ b \text{ kompleksni brojevi}).$$

Rešenje. Da bismo pokazali da je relacija (1) tačna, dovoljno je pokazati da je

$$\{|a|+|b|\}^2 \equiv \left|\frac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab}\right|^2+\left|\frac{1}{2}(a+b)+\sqrt{ab}\right|^2+2\left|\frac{1}{4}(a+b)^2-ab\right|.$$

Ovo je zaista identitet, kao što ćemo pokazati.

Izraz na desnoj strani može se svesti na oblik

$$\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}-\overline{\sqrt{ab}}\right)+\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}+\overline{\sqrt{ab}}\right)+\frac{1}{2}|a-b|^2$$

$$\equiv \frac{1}{2}[(a+b)(\overline{a}+\overline{b})+(a-b)(\overline{a}-\overline{b})]+2|ab|\equiv a\overline{a}+b\overline{b}+2|ab|\equiv\{|a|+|b|\}^2.$$

Prema tome, relacija (1) je tačna.

Primedba. Identitet (1) može se dokazati polazeći od identiteta

$$(2) \qquad 2\{|A|^2+|B|^2\}\equiv|A+B|^2+|A-B|^2$$

$$\equiv|A^2+B^2+2AB|+|A^2+B^2-2AB| \qquad (A, B \text{ kompleksni brojevi}).$$

Ako se ovde stavi $A^2=a$, $B^2=b$, tada poslednji identitet postaje

$$|a|+|b|=\left|\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}\right|+\left|\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right|.$$

Ako se tu stavi $a=z_1+z_2$, $b=z_1-z_2$, dobija se

$$|z_1+z_2|+|z_1-z_2|=|z_1+\sqrt{(z_1^2-z_2^2)}|+|z_1-\sqrt{(z_1^2-z_2^2)}|.$$

Relaciji (2) dati geometrisku interpretaciju.

17. Proveriti identitet

$$|a|^2+|b|^2+|c|^2+|a+b+c|^2\equiv|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2$$

$(a, b, c$ kompleksni brojevi).

Da li se ova relacija može generalisati?

18. Dokazati identitet

$$|1-\overline{a}b|^2-|a-b|^2\equiv(1+|ab|)^2-(|a|+|b|)^2$$

$(a, b$ kompleksni brojevi).

Uputstvo. Koristiti osobinu $|z|^2=z\overline{z}$.

19. Dokazati identitete:

1° $\left|a+\frac{1}{2}\right|^2+i\left|a+\frac{i}{2}\right|^2-(1+i)|a|^2-\frac{1}{4}(1+i)\equiv a$ $\qquad$ (a kompleksan broj);

2° $|a+b|/|1+(\overline{b}/a)|=a$ $\qquad \{a>0;\ b(\neq -a)$ kompleksan broj$\}$.

20. Da li važi relacija

$$|b-a|^2+|c-b|^2+|d-c|^2+|a-d|^2\equiv|c-a|^2+|d-b|^2+|a-b+c-d|^2$$

$(a, b, c, d$ kompleksni brojevi)?

21. Polazeći od razvoja izraza

$$(1+i)^n \quad (i \text{ imaginarna jedinica; } n \text{ prirodni broj ili nula}),$$

izvesti relacije koje zadovoljavaju binomni koeficijenti.

Rešenje. Najpre imamo

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} + i \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \binom{n}{2k+1}.$$

Kako je

$$1+i = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right),$$

biće

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} = 2^{n/2} \cos\frac{n\pi}{4}; \qquad \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} = 2^{n/2} \sin\frac{n\pi}{4}.$$

22. Ako je $|a| = 1$ ili $|b| = 1$, pokazati da je

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1.$$

Koji izuzetak treba učiniti ako je $|a| = |b| = 1$?

23. U kompleksnoj ravni date su tačke $A(a)$ i $B(b)$. Ako je tačka $P(z)$ ma koje rešenje jednačine

$$(z-a)^4 + (z-b)^4 = 0,$$

tada je $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}|$.

Dokazati ovo i generalisati.

24. Dati su kompleksni brojevi

$$a = 1 + i\lambda, \quad b = 1 - i/\lambda \qquad (\lambda \text{ realan parametar} \neq 0).$$

Za koje je vrednosti parametra λ tačka a bliža koordinatnom početku nego tačka b?

25. Tačke z_1, z_2, z_3 kolinearne su tada i samo tada ako je

$$(z_3 - z_1)/(z_2 - z_1) = a \qquad (a \text{ realno}).$$

26. Dokazati *Lagrange*-ov identitet u kompleksnoj formi

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 - \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} |a_k \bar{b}_j - \bar{a}_j b_k|^2.$$

27. Ako su x, y, z kompleksni brojevi, pokazati da je

$$|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 = 3\{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2\},$$

gde je

$$A = x + y + z, \quad B = x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z, \quad C = x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z$$

(ε jedno rešenje kvadratne jednačine $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$).

Generalizacija. Dati su brojevi:

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n} \qquad (n \text{ ceo pozitivan broj}),$$

$$A_k=x_1+x_2\,\varepsilon^k+x_3\,\varepsilon^{2k}+\cdots+x_n\,\varepsilon^{(n-1)k} \qquad (k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1)$$

($x_1, x_2, \ldots, x_n$ proizvoljni kompleksni brojevi).

Pokazati da je

$$\sum_{k=0}^{n-1}|A_k|^2=n\sum_{k=0}^{n-1}|x_{k+1}|^2.$$

28. Rešavanjem jednačine

(1) $\quad z^5-1=0,\quad$ odnosno $\quad$ (2) $\quad (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

izračunati:

$$\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right),\quad \sin\left(\frac{2}{5}\pi\right),\quad \sin\left(\frac{1}{5}\pi\right),\quad \cos\left(\frac{1}{5}\pi\right).$$

Uputstvo. Ako se pođe od binomne jednačine (1), dobija se

$$z_k=\exp\left(\frac{2}{5}k\pi i\right) \qquad (k=0,\,1,\,2,\,3,\,4).$$

Ako se pođe od jednačine (2), rešenja su:

$$1,\quad \frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i}{4}(10+2\sqrt{5})^{1/2},\quad -\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{i}{4}(10-2\sqrt{5})^{1/2}.$$

Rezultat.

$$\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1),\quad \sin\left(\frac{2}{5}\pi\right)=\frac{1}{4}(10+2\sqrt{5})^{1/2}.$$

Ostaje još da se odrede

$$\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right),\quad \cos\left(\frac{1}{5}\pi\right).$$

29. Kompleksni brojevi a, b, c zadovoljavaju uslov

$$|a|=|b|=|c|=r>0.$$

Dokazati relaciju

$$|(ab+bc+ca)/(a+b+c)|=r.$$

Uputstvo. Koristiti relaciju $|a|^2=a\bar{a}$.

Generalizacija. H. L. Schug (The American Mathematical Monthly, vol. 40, 1933, p. 180) dao je sledeće uopštenje navedene relacije.

Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kompleksni brojevi jednakih modula, tj. ako je

$$|a_1|=|a_2|=\cdots=|a_n|=r>0,$$

biće

(1) $$|(\sum a_1 a_2\cdots a_s)/(\sum a_1 a_2\cdots a_{n-s})|=r^{2s-n} \qquad (s<n),$$

gde prva *sigma* označava elementarnu simetričnu funkciju reda s od $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dok druga *sigma* pretstavlja elementarnu simetričnu funkciju reda $n-s$ od istih elemenata.

Schug je dokazao relaciju (1) na elegantan način koji ćemo navesti.

Izrazi $\sum a_1 a_2\cdots a_s$ i $\sum a_1 a_2\cdots a_{n-s}$ imaju jednak broj sabiraka, jer je $\binom{n}{s}=\binom{n}{n-s}$.

Kompleksni brojevi a_k mogu se napisati u obliku

$$a_k=r\exp(i\theta_k) \qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Posmatrajmo $\binom{n}{s}$ relacija:

$$\exp\{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\}\times\exp\{-i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-s})\}=\exp\{i(\theta_{n-s+1}+\theta_{n-s+2}+\cdots+\theta_n\},$$
$$\vdots$$
$$\exp\{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\}\times\exp\{-i(\theta_{s+1}+\theta_{s+2}+\cdots+\theta_n)\}=\exp\{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_s)\}.$$

Iz ovih relacija, posle sabiranja, sleduje

$$\left\{\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)\right\}\sum\exp\{-i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-s})\}=\sum\exp\{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_s)\}.$$

Stoga se izraz $(\sum a_1 a_2\cdots a_s)/(\sum a_1 a_2\cdots a_{n-s})$ može napisati u obliku

$$(2)\qquad r^{2s-n}\cdot\frac{\left\{\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)\right\}\sum\exp\{-i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-s})\}}{\sum\exp\{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-s})\}}.$$

Kako je $|z|=|\bar z|$ i $|\exp(i\theta)|=1$, biće

$$\left|\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)\right|=1,$$

$$\left|\sum\exp\{-i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-s})\}\right|=\left|\sum\exp\{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-s})\}\right|.$$

Prema tome, modul izraza (2) svodi se na r^{2s-n}, čime je dokazana relacija (1). *Schug*-ovo rešenje objavljeno je u malo sažetijoj formi.

30. Ako su dva od tri broja

$$\frac{a-b}{c-d},\ \frac{b-c}{a-d},\ \frac{c-a}{b-d}\qquad (a,\ b,\ c,\ d \text{ kompleksni brojevi; } a\neq d;\ b\neq d;\ c\neq d)$$

čisto imaginarni, pokazati da je to slučaj i sa trećim.

Rešenje. Stavimo $a=a_1+ia_2$, $b=b_1+ib_2$, $c=c_1+ic_2$, $d=d_1+id_2$. Tada je

$$p^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{a-b}{c-d}\right)=(a_1-b_1)(c_1-d_1)+(a_2-b_2)(c_2-d_2),$$

$$q^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{b-c}{a-d}\right)=(b_1-c_1)(a_1-d_1)+(b_2-c_2)(a_2-d_2),$$

$$r^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{c-a}{b-d}\right)=(c_1-a_1)(b_1-d_1)+(c_2-a_2)(b_2-d_2),$$

gde je

$$p^2=|c-d|^2,\quad q^2=|a-d|^2,\quad r^2=|b-d|^2.$$

Iz gornjih jednačina sabiranjem dobija se

$$p^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{a-b}{c-d}\right)+q^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{b-c}{a-d}\right)+r^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{c-a}{b-d}\right)\equiv 0.$$

Odavde neposredno sleduje iskazano tvrđenje.

31. Data je funkcija

$$f(z)\equiv(a_0z^2+a_1z+a_2)/(\bar a_2z^2+\bar a_1z+\bar a_0)\qquad (a_0,\ a_1,\ a_2 \text{ kompleksni brojevi}).$$

Ako je $|z|=1$, pokazati da je $|f(z)|=1$.

Da li ovaj rezultat važi i za funkciju

$$F(z) \equiv (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)/(\bar{a}_n z^n + \bar{a}_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_0).$$

Uputstvo. Koristiti jednakost $|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$.

32. Pokazati da jednačina prave kroz tačke z_1 i z_2 ima oblik

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

33. Pokazati da je

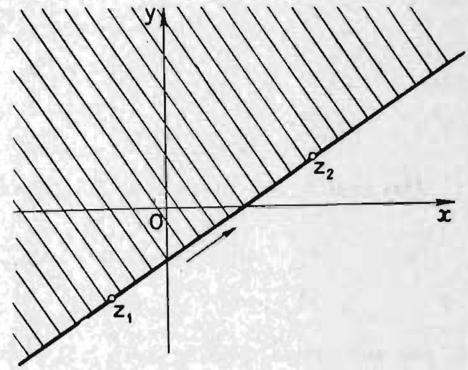
(1) $$\operatorname{Im}\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right) = 0$$

jednačina prave koja prolazi kroz fiksne tačke z_1 i z_2 $(\neq z_1)$.

Pokazati takođe da relacija

(2) $$\operatorname{Im}\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right) > 0$$

definiše šrafiranu oblast na slici.



34. Pokazati da jednačina

(1) $$z\bar{z} + \bar{A}z + A\bar{z} + B = 0,$$

gde je B realna konstanta i A kompleksna konstanta, određuje krug u kompleksnoj ravni.

Uputstvo. Poći od jednačine kruga

$$x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$$

tu smeniti $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$.

Može se tako isto poći od jednačine

(2) $$|z-\alpha| = r, \quad \text{tj.} \quad |z-\alpha|^2 = r^2.$$

$$\therefore \quad (z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) = r^2.$$

$$\therefore \quad z\bar{z} - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z + \alpha\bar{\alpha} - r^2 = 0.$$

Ako se sada uporede jednačine (1) i (2), zaključuje se da su centar i poluprečnik kruga (1) određeni formulama:

$$\alpha = -A, \quad r^2 = \alpha\bar{\alpha} - B = |\alpha|^2 - B.$$

Krug je realan ako je $|\alpha|^2 > B$. Za $|\alpha|^2 = B$ krug se svodi na tačku $z = \alpha$.

35. Ispitati da li je

$$|z-p| = 2|z|$$

jednačina kruga čiji je centar u tački $-\frac{1}{3}p$, a poluprečnik $\frac{2}{3}|p|$.

36. Pokazati da jednačina kruga kroz tri tačke z_k $(k=1, 2, 3)$ ima oblik

$$\begin{vmatrix} z\bar{z} & z & \bar{z} & 1 \\ z_1\bar{z}_1 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2\bar{z}_2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3\bar{z}_3 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rešenje. Jednačina kruga, u kompleksnoj ravni, glasi

(1) $$az\bar{z}+bz+\bar{b}\bar{z}+c=0 \qquad (a, c \text{ realni brojevi}).$$

Kako se tačke $z_k=x_k+iy_k$ $(k=1, 2, 3)$ nalaze na krugu (1), imaćemo tri jednačine

(2) $$az_k\bar{z}_k+bz_k+\bar{b}\bar{z}_k+c=0.$$

Da bi skup jednačina (1) i (2) imao po a, b, $\bar{b}$, c i drugih rešenja osim trivijalnih, mora biti

(3) $$\begin{vmatrix} z\bar{z} & z & \bar{z} & 1 \\ z_1\bar{z}_1 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2\bar{z}_2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3\bar{z}_3 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ova relacija, kao što će dalje biti pokazano, pretstavlja jednačinu kruga ako je

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

tj. pod uslovom da tačke z_k $(k=1, 2, 3)$ ne budu kolinearne.

Jednačina (3) može se napisati u obliku

(4) $$D_1z\bar{z}+D_2z+D_3\bar{z}+D_4=0,$$

gde je

$$D_1=\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2=-\begin{vmatrix} z_1\bar{z}_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2\bar{z}_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3\bar{z}_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} z_1\bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ z_2\bar{z}_2 & z_2 & 1 \\ z_3\bar{z}_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_4=-\begin{vmatrix} z_1\bar{z}_1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2\bar{z}_2 & z_2 & \bar{z}_2 \\ z_3\bar{z}_3 & z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}.$$

Determinanta D_1 može se transformisati na oblik

$$D_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1+\bar{z}_1 & \bar{z}_1-z_1 & 1 \\ z_2+\bar{z}_2 & \bar{z}_2-z_2 & 1 \\ z_3+\bar{z}_3 & \bar{z}_3-z_3 & 1 \end{vmatrix} = -2i\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Na sličan način dobija se

$$D_4=2i\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Ako se jednačini (4) da oblik

$$iD_1z\bar{z}+iD_2z+iD_3\bar{z}+iD_4=0,$$

zaključuje se da su koeficijenti iD_1 i iD_4 realni brojevi.

Koeficijenti iD_2 i iD_3 su konjugovano-kompleksni brojevi.

Prema tome, ako je $D_1\neq 0$, jednačina (3) definiše krug kroz tačke z_k $(k=1, 2, 3)$.

37. Dat je kompleksan broj

(1) $$z=(a+bt)/(c+dt)$$

(t realan parametar; a, b, c, d dati kompleksni brojevi).

Pokazati da tačka z, kada t varira od $-\infty$ do $+\infty$, opisuje krug, osim u slučaju koji treba navesti.

Rešenje. Broj z se može izraziti u obliku

$$z=\frac{b\bar{c}-a\bar{d}}{\bar{c}d-c\bar{d}}+\frac{ad-bc}{\bar{c}d-c\bar{d}}\,\frac{\bar{c}+\bar{d}t}{c+dt}\qquad(\bar{c}d-c\bar{d}\neq 0),$$

odakle sleduje

(2) $$\left|z-\frac{b\bar{c}-a\bar{d}}{\bar{c}d-c\bar{d}}\right|=\left|\frac{ad-bc}{\bar{c}d-c\bar{d}}\right|,$$

jer je

$$|(\bar{c}+\bar{d}t)/(c+dt)|=1.$$

Jednačinom (2) definisan je krug čiji je centar u tački $(b\bar{c}-a\bar{d})/(\bar{c}d-c\bar{d})$, dok njegov poluprečnik ima vrednost $|(ad-bc)/(\bar{c}d-c\bar{d})|$.

Ovim smo pokazali da se tačka z nalazi na krugu. Da z zaista opisuje ceo krug, može se zaključiti na osnovu neprekidnosti i uniformnosti funkcije $z=z(t)$ $(\bar{c}d-c\bar{d}\neq 0)$ i na osnovu toga što je $z(-\infty)=z(+\infty)$, tj. što je kriva zatvorena.

Primedba. Rešiti ovaj zadatak i nekim drugim načinom. Takođe treba ispitati šta će nastupiti ako je $\bar{c}d-c\bar{d}=0$.

38. Ako su α, β, γ realni brojevi i a, b, c kompleksni brojevi, tada jednačina

$$z=x+iy=(a+2\,bt+ct^2)/(\alpha+2\,\beta t+\gamma t^2)\qquad(t\ \text{realan parametar})$$

definiše jedan konusni presek.

39. Koju krivu definiše jednačina

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\,|z-z_k|^2=b\qquad(a_k,\ b\ \text{realne konstante};\ z\ \text{kompleksan broj})$$

u kompleksnoj ravni?

Odgovor. Ova jednačina definiše krug ili pravu prema tome da li je

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\neq 0\quad\text{ili}\quad\sum_{k=1}^{n}a_k=0.$$

40. Ispitati krivu

(1) $$|\sin z|=c\qquad(c\geqslant 0).$$

Primedba. Stavi li se $z=x+iy$, jednačina (1) dobija oblik

$$e^{-2y}+e^{2y}=4c^2+2\cos 2x.$$

41. Ispitati da li je tačna relacija

$$a\,\mathrm{Im}\,(\bar{b}c)+b\,\mathrm{Im}\,(\bar{c}a)+c\,\mathrm{Im}\,(\bar{a}b)=0,$$

gde su a, b, c kompleksni brojevi.

42. Odrediti nule polinoma

$$\operatorname{Re}\{(1+ix)^n\}-\operatorname{Im}\{(1+ix)^n\} \qquad (n \text{ prirodan broj; } x \text{ realno}).$$

Primedba. Sve njegove nule su realne.

43. Odrediti geometrisko mesto tačaka čiji afiksi z zadovoljavaju uslov

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z-1}\right)^6=0. \tag{1}$$

Generalizacija. Odrediti geometrisko mesto tačaka čiji afiksi z zadovoljavaju uslov

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n=0 \qquad (n \text{ prirodan broj; } a,\ b \text{ različiti kompleksni brojevi}). \tag{2}$$

Rešenje. I. Kako je

$$\frac{z}{z-1}=\frac{x+iy}{x-1+iy}=\frac{(x^2+y^2-x)-iy}{(x-1)^2+y^2},$$

uslov (1) postaje

$$\operatorname{Im}\{(x^2+y^2-x)-iy\}^6=0,$$

odnosno

$$y\,(x^2+y^2-x)\,\{3\,(x^2+y^2-x)^4-10\,(x^2+y^2-x)^2y^2+3\,y^4\}=0.$$

Iz jednačine

$$3\,(x^2+y^2-x)^4-10\,(x^2+y^2-x)^2y^2+3\,y^4=0$$

dobija se

$$(x^2+y^2-x)^2=3\,y^2 \quad \text{i} \quad (x^2+y^2-x)^2=\frac{1}{3}\,y^2.$$

Prema tome, traženo geometrisko mesto ako se izuzme tačka $(1,0)$ sačinjavaju:

1° x-osa;

2° krug $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$;

3° krug $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$;

4° krug $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$;

5° krug $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$;

6° krug $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

II. Posmatrajmo sada opšti slučaj. Kako je

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n=\frac{1}{2i}\left[\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n-\left(\frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{z}-\overline{b}}\right)^n\right],$$

uslov (2) postaje

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n=\left(\frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{z}-\overline{b}}\right)^n, \quad \text{tj.} \quad \left[\frac{(z-a)\,(\overline{z}-\overline{b})}{(z-b)\,(\overline{z}-\overline{a})}\right]^n=1.$$

Odavde izlazi

$$\frac{(z-a)\,(\overline{z}-\overline{b})}{(z-b)\,(\overline{z}-\overline{a})}=\alpha^k \qquad \left(\alpha=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n};\quad k=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n-1\right).$$

Ova se relacija može napisati u obliku

$$(1-\alpha^k) z\bar{z} + (\bar{a}\alpha^k - \bar{b}) z + (b\alpha^k - a)\bar{z} + (a\bar{b} - \alpha^k \bar{a} b) = 0.$$

Odavde, posle množenja sa $1+\bar{\alpha}^k$, dobija se

$$\left(-2\,i\,\sin\frac{2k\pi}{n}\right) z\bar{z} + (\bar{a}\alpha^k - \bar{b} + \bar{a} - \bar{b}\bar{\alpha}^k) z + (b\alpha^k - a + b - a\bar{\alpha}^k)\bar{z}$$

$$+ (a\bar{b} - \alpha^k \bar{a} b + a b\,\bar{\alpha}^k - \bar{a} b) = 0.$$

Ova jednačina može se napisati u obliku

$$\left(2\sin\frac{2k\pi}{n}\right) z\bar{z} + i\,[(\bar{a}-\bar{b}) + (\bar{a}\alpha^k - \bar{b}\bar{\alpha}^k)]\,z - i\,[(a-b) + (a\bar{\alpha}^k - b\alpha^k)]\,\bar{z} \tag{3}$$

$$+ i\,[(a\bar{b} - \bar{a}b) + (a\bar{b}\bar{\alpha}^k - \alpha^k \bar{a} b)] = 0.$$

Koeficijenti uz z i $\bar{z}$ su konjugovano-kompleksni brojevi. Koeficijent uz $z\bar{z}$ je realan broj. Kako je

$$\operatorname{Re}\{(a\bar{b} - \bar{a}b) + (a\bar{b}\bar{\alpha}^k - \alpha^k \bar{a} b)\} = 0,$$

nezavisan član u jednačini (3) takođe je realan broj.

Prema tome, za $k=1, 2, \ldots, n-1$ jednačina (3) određuje krugove. Svi oni prolaze kroz tačke čiji su afiksi a i b.

Za $k=0$ jednačina (3) dobija oblik

$$(\bar{a}-\bar{b})\,z - (a-b)\,\bar{z} + (a\bar{b} - \bar{a}b) = 0.$$

To je jednačina prave koja prolazi kroz tačke čiji su afiksi a i b.

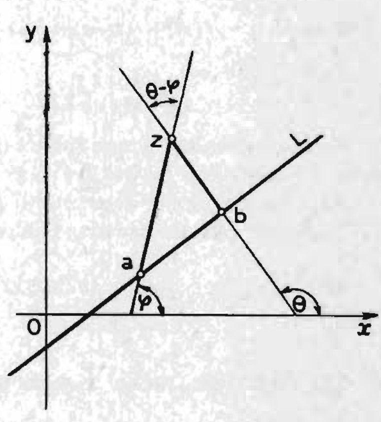
Geometrisko mesto tačaka z za koje važi uslov (2) sastoji se iz navedene prave i skupa krugova. Tačka $z=b$ ne pripada geometriskom mestu.

III. *D. Đoković* je dao sledeće rešenje.

Stavimo: $z-a=\rho e^{i\theta}$, $z-b=re^{i\varphi}$. Uslov (2) tada postaje

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\rho^n}{r^n}\,e^{in(\theta-\varphi)}\right)=0, \quad \text{tj.} \quad n(\theta-\varphi)=k\pi.$$

$$\therefore \quad \theta-\varphi=\frac{k\pi}{n} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, 2n-1).$$



Za $k=0$ dobijamo delove prave L izvan segmenta ab.

Za $k=n$ dobijamo segment ab prave L.

Za $k=\nu$ $(0<\nu<n)$ dobijamo deo kruga koji leži sa leve strane prave L, kad idemo po njoj od b ka a.

Za $k=n+\nu$ $(0<\nu<n)$ dobijamo drugi deo onog kruga koji smo imali za $k=\nu$.

Delovi geometriskog mesta tačaka koji se dobijaju za $k=\nu$ i $k=n+\nu$ $(0<\nu<n)$ čine krug. Ako pravu L shvatimo kao krug sa beskonačnim radijusom, ovo će važiti i za $\nu=0$.

Dakle, traženo geometrisko mesto tačaka sastoji se iz n krugova koji prolaze kroz tačke a i b i iz kojih se duž, čiji su krajevi a i b, vidi pod jednim od uglova:

$$\frac{k\pi}{n} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

Tačka a pripada, dok tačka b ne pripada traženom geometriskom mestu.

44. Odrediti geometrisko mesto tačaka čiji afiksi z zadovoljavaju uslov

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)^n=0 \quad \text{ili} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)^n=0$$

$\left(\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ kompleksni brojevi; } n \text{ prirodan broj}\right).$

Uputstvo. Videti prethodni zadatak.

45. Ako je t realan parametar, odrediti skup tačaka čiji je afiks

(1) $$z=(t^2+8it+3)/(t^2-2it+3) \qquad (t \text{ realno}).$$

Uputstvo i rezultat. Iz jednačine (1) i

$$\bar{z}=(t^2-8it+3)/(t^2+2it+3)$$

eliminisati t.

Traženo geometrisko mesto je krug

$$z\bar{z}+\frac{3}{2}(z+\bar{z})-4=0.$$

46. Šta pretstavlja jednačina

$$(a\bar{z}+\bar{a}z)^2=2(b\bar{z}+\bar{b}z)+c \qquad (a, b \text{ kompleksni brojevi; } c \text{ realan broj})$$

u kompleksnoj ravni?

47. Nacrtati krivu koju u kompleksnoj ravni definiše jednačina

$$|z-a|=\lambda|z-b| \qquad (a, b \text{ kompleksni brojevi; } \lambda\geqslant 0).$$

48. Ako je

$$f(z)=\{(z-a)/(z-\bar{a})\}^2 \qquad (a=p+iq;\ p, q \text{ realne konstante}),$$

na kojim je krivama $|f(z)|=c^2$ (c realna konstanta)?

Rešenje. $|f(z)|=|(z-a)/(z-\bar{a})|^2=\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}\cdot\dfrac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}-a}=\dfrac{z\bar{z}-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}}{z\bar{z}-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}}$.

Prema tome je

(1) $$(c^2-1)z\bar{z}+(\bar{a}-ac^2)z+(a-\bar{a}c^2)\bar{z}+|a|^2(c^2-1)=0.$$

Ovo je jednačina kruga (uključujući i prave), jer su: 1° koeficijenti c^2-1 i $|a|^2(c^2-1)$ realni; 2° koeficijenti $\bar{a}-ac^2$ i $a-\bar{a}c^2$ konjugovano-kompleksni.

Za $c=\pm 1$ krug (1) degeneriše u pravu.

Čitalac će odrediti centar i poluprečnik kruga (1).

49. Ako je z jedna tačka kruga $x^2+y^2=a^2$, tada je

$$|kz-a^2|=a|z-k| \qquad (a>0;\ k \text{ realan broj}).$$

50. Gde leže tačke z u kompleksnoj ravni za koje je

$$|z-a|<r, \quad |\arg(z-a)|<\theta \qquad (a \text{ kompleksan broj; } r>0;\ 0<\theta<\pi)?$$

51. Posmatrati niz kompleksnih brojeva

$$z_1, z_2, \ldots, z_n,$$

koji se formiraju pomoću relacije

$$z_k=(1/z_{k-1})^2 \qquad (k=2, 3, \ldots, n).$$

1° Ako je $z_1=1+i$, odrediti $z_2, z_3, \ldots, z_n$.

2° Koji argument treba da ima z_1 da bi z_n bilo realno počev od $N\,(2\leqslant N\leqslant n)$?

3° Odrediti z_1 tako da bude $z_3=z_1$.

4° Pokazati da se tačke M_k, čiji su afiksi z_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, nalaze na krivoj čija jednačina ima oblik $r=e^{a\theta}$ (r, θ polarne koordinate). Da li je ova kriva određena ako je M_1 dato?

52. U z-ravni dat je krug $|z|=r$. Neka su A_k i z_k $(k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ respektivno temena i afiksi temena pravilnog šestougla, koji je upisan u datom krugu.

Ako je z_0 afiks ma koje tačke kruga $|z|=r$, ispitati da li važe relacije

$$\prod_{k=1}^{6}(z_0-z_k)=z_0^6-r^6; \qquad \prod_{k=1}^{6}|z_0-z_k|\leqslant 2\,r^6.$$

53. Odrediti brojeve z koji zadovoljavaju sledeća dva uslova:

$$\left|\frac{z-12}{z-8\,i}\right|=\frac{5}{3}, \qquad \left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1.$$

54. Odrediti potreban i dovoljan uslov koji moraju zadovoljavati realni parametri a i b da bi jednačina

$$(1) \qquad \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=a+ib \qquad (n \text{ prirodan broj})$$

imala samo realna rešenja.

Rešenje. Pretpostavimo da jednačina (1) ima bar jedno realno rešenje $z=x$. Tada je prema (1) $|a+ib|=1$, tj. $a^2+b^2=1$, jer je $|1+ix|=|1-ix|$.

Prema tome, uslov

$$(2) \qquad a^2+b^2=1$$

je potreban.

Pokazaćemo da je ovaj uslov i dovoljan, ako utvrdimo da jednačina (1), pri uslovu (2), ima n realnih rešenja.

Zaista, ako je $a+ib=e^{\theta i}$ (θ realno), tada iz (1) sleduje

$$\frac{1+iz}{1-iz}=\exp\left(i\,\frac{\theta+2\,k\pi}{n}\right) \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

odakle se dobija

$$z_k=\operatorname{tg}\left(\frac{\theta+2\,k\pi}{2\,n}\right) \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

55. Odrediti sva rešenja z_k jednačine

$$(z+a)^n=z^n \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

Ako je a realan broj, tada se svi koreni z_k nalaze na jednoj pravoj koja je paralelna imaginarnoj osi.

Rezultat. $z_k=-(a/2)\,\{1+i\operatorname{cotg}(k\pi/n)\}$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$.

56. Pokazati da su koreni jednačine $z^4=i\,(z-2\,i)^4$ dati formulom

$$z_k=i+\operatorname{cotg}\,(4\,k+1)\,\frac{\pi}{16} \qquad (k=0, 1, 2, 3).$$

Tako isto odrediti korene jednačine $z^4=i\,(z+2)^4$.

57. Rešiti jednačinu $z^4+z^3+2z^2+2z+4=0$ kada je poznato da ona ima jedan kompleksan koren čiji je realni deo jednak imaginarnom delu.

Rezultat. Rešenje sa navedenom osobinom je: $z_1=-1-i$, pa je rešenje i $z_2=-1+i$. Ostala rešenja su $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{7})$.

58. Ako su a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ realni brojevi i ako je $\exp(i\theta)$ rešenje jednačine

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

pokazati da je

$$a_1\sin\theta+a_2\sin 2\theta+\cdots+a_n\sin n\theta=0.$$

59. Rešiti po z jednačine:

$$1^\circ \quad az+b\bar{z}+c=0; \qquad 2^\circ \quad az\bar{z}+bz+c\bar{z}+d=0$$

(a, b, c, d kompleksni brojevi).

60. Po θ rešiti jednačinu

$$\prod_{k=1}^{n}(\cos k\theta+i\sin k\theta)=1.$$

Rezultat. $\theta=4m\pi/\{n(n+1)\}$ $(m=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

61. Data je kvadratna jednačina

(1) $$az^2+bz+c=0$$

(a, b, c kompleksni brojevi; $a\neq0$, $a\bar{a}\neq c\bar{c}$).

Pokazati da između koeficijenata a, b, c postoji uslov

(2) $$|\bar{a}b-\bar{b}c|=|a\bar{a}-c\bar{c}|,$$

ako je $|z_1|=1$, gde je z_1 jedan koren jednačine (1).

Rešenje. Budući da je z_1 koren jednačine (1), biće $az_1^2+bz_1+c=0$, odakle je

(3) $$az_1+b+c\bar{z}_1=0, \quad \text{jer iz } |z_1|=1 \text{ sleduje } z_1\bar{z}_1=1.$$

$$\therefore \quad \bar{a}\bar{z}_1+\bar{b}+\bar{c}z_1=0.$$

Iz (3) i poslednje jednačine dobijamo redom

$$z_1=-(\bar{a}b-\bar{b}c)/(a\bar{a}-c\bar{c}) \quad \text{i} \quad |z_1|=|\bar{a}b-\bar{b}c|/|a\bar{a}-c\bar{c}|.$$

Kako je $|z_1|=1$, iz poslednje jednakosti neposredno sleduje relacija (2).

Primedba. Ispitati da li važi obrnuto:

Ako je $|\bar{a}b-\bar{b}c|=|a\bar{a}-c\bar{c}|$, tada jednačina $az^2+bz+c=0$ ima jedan koren z_1 takav da je $|z_1|=1$.

62. Rešiti jednačinu

$$\sqrt[3]{z^2-2}=\sqrt{2-z^3}$$

u oblasti: 1° realnih brojeva; 2° kompleksnih brojeva.

63. Odrediti sva rešenja jednačine

(1) $$\bar{z} = z^{n-1} \quad (n \text{ prirodan broj} > 1).$$

Rešenje. Stavimo li $z = \rho e^{i\theta}$, jednačina (1) postaje

$$\rho e^{-i\theta} = \rho^{n-1} e^{(n-1)i\theta}.$$

$$\therefore \quad \rho(\rho^{n-2} - 1) = 0, \quad \theta = 2k\pi/n \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Sva rešenja jednačine (1) su:

$$z = 0 \quad \text{i} \quad z_k = \exp(2k\pi i/n) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Primedba. Za slučajeve $n = 0, 1$ i $n = -N$ (N prirodan broj) takođe odrediti rešenje jednačine $\bar{z} = z^{n-1}$.

64. Rešiti jednačinu

$$(\bar{z})^{\nu} = a z^n \quad (\nu, n \text{ prirodni brojevi; } a \text{ kompleksan broj}).$$

65. Ako su A, B, C, D četiri tačke koje leže u jednoj ravni, pokazati da postoji relacija

(1) $$\overline{AD} \cdot \overline{BC} \leqslant \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB}.$$

Dokaz. Neka su afiksi tačaka A, B, C, D u kompleksnoj ravni respektivno označeni sa z_1, z_2, z_3, z_4.

Kako je

$$(z_1 - z_4)(z_2 - z_3) + (z_2 - z_4)(z_3 - z_1) + (z_3 - z_4)(z_1 - z_2) \equiv 0,$$

dobija se

$$|(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| \equiv |(z_2 - z_4)(z_3 - z_1) + (z_3 - z_4)(z_1 - z_2)|,$$

odakle izlazi

$$|z_1 - z_4|\,|z_2 - z_3| \leqslant |z_2 - z_4|\,|z_3 - z_1| + |z_3 - z_4|\,|z_1 - z_2|.$$

To je upravo relacija (1) koju je trebalo dokazati.

66. Ako je $x > 1$, dokazati da je

(1) $$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \quad (z = x + iy).$$

Rešenje. I. Pretpostavimo da nije tačna relacija (1), nego da za neko $x > 1$ važi

(2) $$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Iz relacije (2) sleduje

$$\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{2} \right) \geqslant \frac{1}{4},$$

odnosno

$$\frac{1 - x}{x^2 + y^2} \geqslant 0, \quad \text{tj.} \quad x \leqslant 1$$

Dobijena protivurečnost potvrđuje tačnost relacije (1) za $x > 1$.

II. *Erik Dux (Matematikai Lapok*, t. VIII, fasc. 1—2, 1957, p. 148) dao je sledeće rešenje Umesto $x > 1$ može se pisati $4 - 4x < 0$, tj.

(3) $$4 - 4x + x^2 + y^2 \equiv (2 - x)^2 + y^2 < x^2 + y^2.$$

Odavde izlazi

(4) $$|(2-x)-iy|<|x+iy|, \quad \text{tj.} \quad |2-z|<|z|$$

i najzad

(5) $$\left|\frac{2-z}{z}\right|<1, \quad \text{tj.} \quad \left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}.$$

Primedba. Polazeći od relacije (3), dobija se

(6) $$|(2-x)\pm iy|<|x\pm iy|,$$

gde treba uzeti sve četiri kombinacije znakova *plus* i *minus*.

Relacija (4) sadržana je u relaciji (6).

67. Dokazati nejednakost

(1) $$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z| \qquad (z=x+iy).$$

Uputstvo. Pretpostaviti da za neko z data nejednakost nije tačna, već

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}>|z|.$$

Znak jednakosti u relaciji (1) važi tada i samo tada ako je $|x|=|y|$.

68. Dokazati nejednakosti

$$\left|\frac{|a|-|b|}{|c|+|d|}\right|\leqslant\left|\frac{a+b}{c+d}\right|\leqslant\left|\frac{|a|+|b|}{|c|-|d|}\right| \qquad (a,\ b,\ c,\ d \text{ kompleksni brojevi}).$$

Kada će biti

$$\left|\frac{|a|-|b|}{|c|+|d|}\right|=\left|\frac{|a|+|b|}{|c|-|d|}\right|?$$

69. Ako je $|z_k|<1$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, pokazati da je

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1-z_k)\right|\geqslant 1-\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

70. Dati geometrisku interpretaciju relaciji

$$|1-z|^2\leqslant 1-|z|^2 \quad (z \text{ kompleksan broj}).$$

Uputstvo. Ova relacija ekvivalentna je relaciji

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

71. Dokazati relaciju

(1) $$|1+z|\geqslant\frac{1+|z|}{\sqrt{2}} \qquad \{\operatorname{Re}(z)\geqslant 0\}.$$

Rešenje. Pretpostavimo da bar za neko z iz oblasti $\operatorname{Re}(z)\geqslant 0$ važi

$$|1+z|<\frac{1+|z|}{\sqrt{2}}.$$

Tada važi i relacija

$$(1+z)(1+\bar{z})<\frac{(1+|z|)^2}{2},$$

odnosno

$$2(z+\bar{z})<-(|z|-1)^2,$$

odnosno

$$4\,\mathrm{Re}(z)<-(|z|-1)^2.$$

Poslednja relacija nije moguća ni za jedno z za koje je $\mathrm{Re}(z)\geqslant 0$. Prema tome, relacija (1) je tačna.

72. Ako je $a>0$ i $b>1$, pokazati da nejednakost

(1) $$|a+z|\geqslant\frac{a+|z|}{b}$$

važi za svako z koje zadovoljava uslov

(2) $$\mathrm{Re}(z)\geqslant\frac{(2-b^2)a}{2(b^2-1)}.$$

Rešenje. Ako važi relacija (1), tada važi i relacija

$$(a+z)(a+\bar{z})\geqslant\frac{a^2+2a|z|+|z|^2}{b^2},$$

odnosno

(3) $$(b^2-1)|z|^2-2a|z|+a^2(b^2-1)+2ab^2\,\mathrm{Re}(z)\geqslant 0.$$

Po pretpostavci je $b>1$, pa je i $b^2-1>0$ (koeficijent uz $|z|^2$). Ako je

(4) $$a^2-a^2(b^2-1)^2-2ab^2(b^2-1)\,\mathrm{Re}(z)\leqslant 0,$$

tada važi relacija (3).

Relacija (4) ekvivalentna je relaciji (2). Ovim je dokazano navedeno tvrđenje.

Primedba. Da li relacija (1) važi za još neke vrednosti z koje nisu obuhvaćene uslovom (2)?

73. Ako tačke A, B, C, D, čiji su afiksi respektivno z_1, z_2, z_3, z_4, leže na jediničnom krugu i ako je

$$z_1+z_2+z_3+z_4=0,$$

pokazati da je $ABCD$ pravougaonik.

Rešenje. Kvadrati dužina strana četvorougla $ABCD$ su:

$$|z_1-z_2|^2,\quad |z_2-z_3|^2,\quad |z_3-z_4|^2,\quad |z_4-z_1|^2.$$

Kvadrati dužina dijagonala su:

$$|z_1-z_3|^2,\quad |z_2-z_4|^2.$$

Kako se tačke A i B nalaze na krugu $|z|=1$, biće

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2).$$

Na analogni način nalazi se:

$$|z_2-z_3|^2=2-(z_2\bar{z}_3+\bar{z}_2z_3),\quad |z_3-z_4|^2=2-(z_3\bar{z}_4+\bar{z}_3z_4),$$

$$|z_4-z_1|^2=2-(z_4\bar{z}_1+\bar{z}_4z_1),\quad |z_1-z_3|^2=2-(z_1\bar{z}_3+\bar{z}_1z_3).$$

$$|z_2-z_4|^2=2-(z_2\bar{z}_4+\bar{z}_2z_4).$$

Iz uslova (1) izlazi

$$z_1+z_2=-(z_3+z_4),\quad \bar{z}_1+\bar{z}_2=-(\bar{z}_3+\bar{z}_4),$$

odakle se, posle množenja, dobija

$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2=z_3\bar{z}_4+\bar{z}_3 z_4.$$

Prema tome je

$$|z_1-z_2|=|z_3-z_4|.$$

Na isti način se utvrđuje da je

$$|z_2-z_3|=|z_4-z_1|,\quad |z_1-z_3|=|z_2-z_4|.$$

Posmatrani četvorougao ima jednake po dve i dve naspramne strane i jednake dijagonale. To je pravougaonik, kao što je i trebalo pokazati.

Primedba. Da li je bilo potrebno dokazivati da su dijagonale jednake?

74. U krugu C čiji je poluprečnik *jedinica* upisan je pravilan poligon od n strana: $P_1 P_2 \dots P_n$. Ako je P jedna proizvoljna tačka na periferiji kruga C, izračunati $\sum_{k=1}^{n} \overline{PP_k}^2$.

Dokazati takođe relaciju $\sum_{k=1}^{n} \overline{PP_k}^2=n(1+\overline{OP}^2)$, gde je O centar kruga koji je opisan oko poligona $P_1 P_2 \dots P_n$, a P jedna proizvoljna tačka u ravni ovog poligona.

Rešenje. Neka je centar kruga koordinatni početak i neka x-osa ima pravac i smer vektora $\overrightarrow{OP_1}$. Označimo sa z_k afiks tačke P_k, a sa z afiks tačke P. Tada je

$$\overline{PP_k}=|z-z_k|,\quad \overline{PP_k}^2=|z-z_k|^2=(z-z_k)(\overline{z-z_k})=z\bar{z}+z_k\bar{z}_k-z\bar{z}_k-\bar{z}z_k.$$

Budući da se tačke z i z_k nalaze na jediničnom krugu $|z|=1$, poslednja relacija postaje

$$\overline{PP_k}^2=2-z\bar{z}_k-\bar{z}z_k,$$

te je

$$\sum_{k=1}^{n}(2-z\bar{z}_k-\bar{z}z_k)=2n-z\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k-\bar{z}\sum_{k=1}^{n}z_k.$$

Kako je $z_k=\exp\{(k-1)(2\pi i)/n\}$ $(k=1, 2, \dots, n)$, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} e^{(k-1)\frac{2\pi i}{n}}=0,\quad \sum_{k=1}^{n} e^{-(k-1)\frac{2\pi i}{n}}=0.$$

Prema tome je $\sum_{k=1}^{n}\overline{PP_k}^2=2n.$

Ostaje da se reši drugi deo zadatka.

U čemu se menjaju dobijeni rezultati ako je poluprečnik kruga r umesto *jedinice?*

75. U krugu $(O;\ r)$ upisan je pravilan poligon $P_1 P_2 \dots P_n$. Dokazati da

1° zbir kvadrata svih strana i svih dijagonala ovog poligona iznosi $n^2 r^2$;

2° zbir svih strana i svih dijagonala iznosi $nr\operatorname{cotg}(\pi/2n)$;

3° proizvod svih strana i svih dijagonala iznosi $n^{n/2}\, r^{n(n-1)/2}$.

Rešenje. 1° Posmatrajmo krug $(O;\ r)$ u kompleksnoj ravni. Neka se koordinatni početak nalazi u centru kruga O i neka x-osa ima smer vektora $\overrightarrow{OP_1}$, pod uslovom da x-osa i $\overrightarrow{OP_1}$ leže na istoj pravoj. Ako sa z_k označimo afiks temena P_k, tada je

$$(1)\qquad z_k=r\exp\{(k-1)\,2i\pi/n\}\qquad (k=1, 2, \dots, n).$$

Prema prethodnom zadatku imamo:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{P_1 P_k}^2 = 2\,n\,r^2, \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{P_2 P_k}^2 = 2\,n\,r^2, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{P_n P_k}^2 = 2\,n\,r^2.$$

Budući da je ovde svaka strana i svaka dijagonala računata dva puta, zbir kvadrata svih strana i svih dijagonala pravilnog poligona od n strana iznosi

$$S = \frac{1}{2}\, n \cdot 2\, n\, r^2 = n^2 r^2. \tag{2}$$

Odredićemo sada zbir S drugim putem. Zbir kvadrata strana i dijagonala poligona $P_1 P_2 \ldots P_n$ dat je sledećim izrazom od $\binom{n}{2}$ sabiraka:

$$\begin{aligned} S = {} & |z_1 - z_2|^2 + |z_1 - z_3|^2 + \cdots + |z_1 - z_n|^2 \\ & + |z_2 - z_3|^2 + \cdots + |z_2 - z_n|^2 \\ & + \cdots \\ & + |z_{n-1} - z_n|^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Uzmimo jedan od tih sabiraka, recimo $|z_p - z_q|^2$. On je identički jednak izrazu

$$(z_p - z_q)(\overline{z_p} - \overline{z_q}) = 2\,r^2 - \overline{z_p}\, z_q - z_p\, \overline{z_q}.$$

Vodeći računa o formuli (1), izraz $\sum_{p,\,q} (\overline{z_p}\, z_q + z_p\, \overline{z_q})$, gde je sumacija proširena na sve kombinacije druge klase (bez ponavljanja) od elemenata $p, q \in \{1, 2, \ldots, n\}$, postaje:

$$\begin{aligned} 2\,r^2 \Big[& \cos\frac{2\pi}{n} + \cos 2\cdot\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos(n-2)\frac{2\pi}{n} + \cos(n-1)\frac{2\pi}{n} \\ & + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos 2\cdot\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos(n-2)\frac{2\pi}{n} \\ & + \cdots \\ & + \cos\frac{2\pi}{n} \Big]. \end{aligned}$$

Ovaj se zbir kraće može napisati u obliku $2\,r^2\,\sigma$, gde je

$$\sigma = (n-1)\cos\left(1\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + (n-2)\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + 1\cdot\cos\left\{(n-1)\frac{2\pi}{n}\right\}.$$

Prema tome, zbir S dat je novim izrazom

$$S = 2\,r^2\binom{n}{2} - 2\,r^2\,\sigma.$$

Upoređenjem ovog izraza sa (2) dobija se formula

$$\sigma \equiv \sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu)\cos\left(\nu\cdot\frac{2\pi}{n}\right) = -\frac{1}{2}\,n. \tag{4}$$

Primedba I. *D. Đoković* je izveo formulu (4) na sledeći način:

$$\sigma \equiv \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\cos\left[(n-\nu)\cdot\frac{2\pi}{n}\right] \equiv \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\cos\left(2\pi - \nu\cdot\frac{2\pi}{n}\right) \equiv \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\cos\left(\nu\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\equiv \frac{n}{2\pi}\left[\frac{d}{dx}\sum_{\nu=1}^{n-1}\sin\left(\nu\cdot\frac{2\pi}{n}\,x\right)\right]_{x=1} \equiv \frac{n}{2\pi}\left[\frac{d}{dx}\left\{\frac{\sin\pi x}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\,x\right)}\sin\left(\frac{n-1}{n}\,\pi x\right)\right\}\right]_{x=1} \equiv -\frac{1}{2}\,n.$$

Istim postupkom *D. Đoković* je izveo i formulu:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu)\sin\left(\nu\cdot\frac{2\pi}{n}\right) \equiv \frac{n}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.$$

Zaista, analogno prethodnom biće

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)\sin\left(\nu\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\equiv\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu\sin\left[(n-\nu)\cdot\frac{2\pi}{n}\right]\equiv-\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu\sin\left(\nu\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\equiv\frac{n}{2\pi}\left[\frac{d}{dx}\sum_{\nu=1}^{n-1}\cos\left(\nu\cdot\frac{2\pi}{n}x\right)\right]_{x=1}\equiv\frac{n}{2\pi}\left[\frac{d}{dx}\left\{\frac{\sin\pi x}{\sin\left(\frac{\pi}{n}x\right)}\cos\left(\frac{n-1}{n}\pi x\right)\right\}\right]_{x=1}\equiv\frac{1}{2}\,n\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.$$

Primedba II. *V. Janekoski* primećuje da je *J. Ulčar (Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od NR Makedonija,* Skoplje, 1951, str. 41, zad. 8) postavio zadatak da se dokaže formula (4). *Janekoski* takođe navodi da je navedenom časopisu dostavio rešenje ovog zadatka, ali da ono nije objavljeno. Evo njegovog rešenja:

Pođimo od izraza

$$G(\theta)=\sum_{\nu=0}^{n-1}(n-\nu)\cos\nu\theta+i\sum_{\nu=0}^{n-1}(n-\nu)\sin\nu\theta \tag{1'}$$

$$=n\sum_{\nu=0}^{n-1}e^{i\nu\theta}-\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu e^{i\nu\theta}.$$

Budući da je

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu e^{i\nu\theta}=\frac{1}{i}\frac{d}{d\theta}\sum_{\nu=0}^{n-1}e^{i\nu\theta},\qquad \sum_{\nu=0}^{n-1}e^{i\nu\theta}=\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}$$

$$(\theta\neq 2k\pi;\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\ ),$$

posle sređivanja, izraz $G(\theta)$ postaje

$$G(\theta)=\frac{n}{2}\left(1+i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)+e^{i\theta}\,\frac{e^{in\theta}-1}{(e^{i\theta}-1)^2}. \tag{2'}$$

Stavljajući $\theta=\frac{2\pi}{n}\lambda$ (λ i n proizvoljni celi brojevi) u (1′) i (2′), dobijamo

$$G\left(\frac{2\pi}{n}\lambda\right)=\sum_{\nu=0}^{n-1}(n-\nu)\cos\frac{2\pi\nu\lambda}{n}+i\sum_{\nu=0}^{n-1}(n-\nu)\sin\frac{2\pi\nu\lambda}{n}$$

$$G\left(\frac{2\pi}{n}\lambda\right)=\frac{n}{2}\left(1+i\operatorname{cotg}\frac{\pi\lambda}{n}\right).$$

Upoređivanjem ovih formula imamo:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}(n-\nu)\cos\frac{2\pi\nu\lambda}{n}=\frac{n}{2},$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}(n-\nu)\sin\frac{2\pi\nu\lambda}{n}=\frac{n}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi\lambda}{n}.$$

Specijalno za $\lambda=1$ je

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}(n-\nu)\cos\frac{2\pi\nu}{n}=\frac{n}{2},$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}(n-\nu)\sin\frac{2\pi\nu}{n}=\frac{n}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.$$

76. Na krugu $(O; r)$, opisanom oko pravilnog poligona $P_1 P_2 \ldots P_n$, uočiti jednu proizvoljnu tačku P.

Dokazati: Ako je n parno, tada je zbir kvadrata rastojanja od tačke P do temena poligona sa parnim indeksima jednak zbiru kvadrata rastojanja od tačke P do ostalih temena.

Rešenje. Uočimo poligon u kompleksnoj ravni. Neka je O koordinatni početak, a x-osa neka leži na nosaču vektora $\overrightarrow{OP_1}$ (smerovi x-ose i vektora $\overrightarrow{OP_1}$ su isti). Označimo sa z_k afiks tačke P_k, a sa z afiks tačke P. Tada je

$$z_k = r \exp\{(k-1) i\pi/m\} \qquad (n = 2m;\ k = 1, 2, \ldots, 2m),$$

$$z = r e^{i\theta}.$$

Treba dokazati

$$\sum_{k=1}^{m} |z - z_{2k}|^2 = \sum_{k=1}^{m} |z - z_{2k-1}|^2. \tag{1}$$

Budući da je

$$\sum_{k=1}^{m} |z - z_{2k}|^2 = 2mr^2 - \bar{z} \sum_{k=1}^{m} z_{2k} - z \sum_{k=1}^{m} \bar{z}_{2k} = 2mr^2,$$

$$\sum_{k=1}^{m} |z - z_{2k-1}|^2 = 2mr^2 - \bar{z} \sum_{k=1}^{m} z_{2k-1} - z \sum_{k=1}^{m} \bar{z}_{2k-1} = 2mr^2,$$

relacija (1) je dokazana.

Ovde su uzete u obzir formule:

$$\sum_{k=1}^{m} \exp\{(2k-1) i\pi/m\} = 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \exp\{(2k-2) i\pi/m\} = 0.$$

77. Posmatrati pravilan poligon od n strana koji je upisan u krugu poluprečnika r. Dokazati da zbir svih dijagonala ovog poligona, povučenih iz jednog njegovog temena, ima vrednost

$$2r \sin\frac{(n-3)\pi}{2n} \Big/ \left(\sin\frac{\pi}{2n}\right).$$

78. Neka su $P_1, P_2, \ldots, P_n$ temena pravilnog poligona od n strana koji je upisan u krugu poluprečnika r. Neka je P ma koja tačka kružnog luka $P_1 P_n$. Dokazati da izraz

$$\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2} + \overline{PP_2} \cdot \overline{PP_3} + \cdots + \overline{PP_{n-1}} \cdot \overline{PP_n} - \overline{PP_n} \cdot \overline{PP_1}$$

ima konstantnu vrednost koja ne zavisi od položaja tačke P.

II. CAUCHY—RIEMANN-OVI USLOVI

79. Svaka analitička funkcija $f(z) = f(x+iy)$ zadovoljava uslov

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2. \tag{E}$$

Dokaz. Neka je funkcija $f(z)$ data u obliku $u(x, y) + i v(x, y)$. Tada je $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ a zatim:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2 + v^2) = 2(u_x^2 + v_x^2 + u u_{xx} + v v_{xx}), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2+v^2)=2(u_y^2+v_y^2+u\,u_{yy}+v\,v_{yy}), \tag{2}$$

$$(u_x=\partial u/\partial x, \quad u_{xx}=\partial^2 u/\partial x^2, \ldots).$$

Budući da je $f'(z)=u_x+i v_x=v_y-i u_y$, imamo

$$|f'(z)|^2=u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2.$$

Izraz na levoj strani relacije (E) postaje $4|f'(z)|^2$, jer je $u_{xx}+u_{yy}=0$ i $v_{xx}+v_{yy}=0$. Ovim je dokaz završen.

80. Ako je $f(z)$ analitička funkcija, pokazati da je

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\log\{1+|f(z)|^2\}=\frac{4|f'(z)|^2}{\{1+|f(z)|^2\}^2}.$$

81. Ako je $f(z)\{\equiv u+iv\}$ analitička funkcija promenljive $z\,(\equiv x+iy)$, ispitati da li su tačne relacije

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^p\equiv p^2|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2;$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|u|^p\equiv p(p-1)|u|^{p-2}|f'(z)|^2.$$

82. Ako su funkcije $u(x,y)$ i $f(x,y)$ rešenja *Laplace*-ove parcijalne jednačine u dve dimenzije, tada su njena rešenja i funkcije

$$u_x,\ xu_x+yu_y,\ yu_x-xu_y,\ f(u_x,u_y),\ x^2u_{xx}+2xy\,u_{xy}+y^2u_{yy} \qquad \left(u_x=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\ldots\right).$$

83. Ispitati da li je tačno ovo tvrđenje:

Ako su $Z=P(x,y)+i\,Q(x,y)$ i $\zeta=u(x,y)+i\,v(x,y)$ dve analitičke funkcije promenljive $z=x+iy$, tj. $Z=f(z)$, $\zeta=g(z)$, tada je funkcija $Z=h(\zeta)$, koja se dobija eliminacijom z iz poslednjih dveju relacija, takođe analitička funkcija.

84. Ako je u harmoniska funkcija, pokazati da je

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

takođe harmoniska funkcija.

85. Da li postoji funkcija oblika $u=f\{(\cos 2x)/(\operatorname{ch} 2y)\}$ koja zadovoljava *Laplace*-ovu parcijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0?$$

86. Ako je $v\equiv 1+x-2xy$ koeficijent uz i analitičke funkcije $f(z)\,(\equiv u+iv)$, odrediti $f(z)$.

87. Ako je $u\equiv(x+y)/(x^2+y^2)$ realni deo analitičke funkcije $f(z)\,(\equiv u+iv)$, odrediti $f(z)$.

Rezultat. $v=(x-y)/(x^2+y^2)+c$ (c realna konstanta); $f(z)=(1+i)/z+ic$.

88. Transformisati izraz $\Delta f \equiv \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2$ smenom promenljivih

$$x = u/(u^2+v^2), \quad y = v/(u^2+v^2),$$

gde su u i v nove nezavisno promenljive.

Na osnovu dobijenog rezultata dokazati: Ako je funkcija $f(x, y)$ jedno rešenje *Laplace*-ove jednačine $\Delta f = 0$, tada je funkcija $f\{x/(x^2+y^2),\ y/(x^2+y^2)\}$ takođe jedno rešenje iste jednačine.

89. Data je funkcija $u(x, y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$. Odrediti funkciju $v(x, y)$ koja zadovoljava uslove

$$\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y, \quad \partial v/\partial y = \partial u/\partial x, \quad v(0, 0) = 0.$$

Pokazati da se $u(x, y) + iv(x, y)$ može izraziti u obliku $f(z)$, gde je $z = x + iy$.

Rezultat. $v(x, y) \equiv e^x(x\sin y + y\cos y)$, $f(z) \equiv z\, e^z$.

90. Odrediti analitičke funkcije $w\,(\equiv u + iv)$ kompleksne promenljive $z\,(\equiv x + iy)$ ako:

1° u zavisi samo od $x\cos a + y\sin a$ (a data realna konstanta);

2° $u^2 + v^2$ zavisi samo od x;

3° u/v zavisi samo od x.

91. Da li postoji analitička funkcija $f(z)\{\equiv u(x, y) + iv(x, y)\}$ koja ima osobine:

$$f(0) = 0, \quad u(x, y) \equiv \frac{x(1+x^2+y^2)}{1+2(x^2-y^2)+(x^2+y^2)^2}\,?$$

Rezultat. $f(z) \equiv z/(1+z^2)$.

92. Da li postoji realna funkcija realne promenljive y, tj. $g(y)$ koja se anulira za $y = 0$ i koja ima osobinu da je funkcija

$$u(x, y) \equiv (1-x)/\{(1-x)^2 + g(y)\}$$

realni deo jedne analitičke funkcije kompleksne promenljive $z\,(\equiv x + iy)$?

93. Odrediti realne parametre A, B, C, D tako da funkcije:

1° $\quad w = x^2 + Axy + By^2 + i(Cx^2 + Dxy + y^2)$;

2° $\quad w = \cos x \operatorname{ch} y + A\cos x \operatorname{sh} y + i(B\sin x \operatorname{sh} y + \sin x \operatorname{ch} y)$

budu analitičke; zatim ih izraziti u obliku $w = \,.\,(z)$.

94. Ispitati da li je funkcija

$$w = |x^2 - y^2| + 2i\,|xy|$$

analitička u domenima z-ravni koji su definisani relacijom

$$xy(x^2 - y^2) > 0. \tag{1}$$

Na grafiku šrafirati domene koji su definisani relacijom (1).

95. Da li postoji analitička funkcija

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

za koju važe relacije:

$$u+v=(x-y)(\sin 2x-\operatorname{ch} 2y)/(\cos 2x+\operatorname{ch} 2y), \quad v(0,0)=0?$$

96. Ako su u i v dve konjugovano-harmoniske funkcije, pokazati da su funkcije

$$au-bv, \qquad av+bu \qquad (a,\ b \text{ realne konstante})$$

takođe konjugovano-harmoniske.

Primedba. Za dve funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ kaže se da su konjugovano-harmoniske funkcije ako su one realni deo i imaginarni deo jedne iste analitičke funkcije.

Za rešenje ovog zadatka treba primeniti *Cauchy—Riemann*-ove uslove.

97. Ako su u i v dve konjugovano-harmoniske funkcije, isti će slučaj biti i sa funkcijama $u/(u^2+v^2)$, $-v/(u^2+v^2)$.

Dokazati ovo tvrđenje.

98. Ako je $f(z)\{\equiv u(x,y)+iv(x,y)\}$ analitička funkcija kompleksne promenljive $z\,(\equiv x+iy)$, tada su izrazi

$$e^v(\cos u\,dx+\sin u\,dy), \quad e^v(\sin u\,dx-\cos u\,dy)$$

dva totalna diferencijala.

99. Ako je funkcija $u(\rho,\theta)=(\cos\theta+\sin\theta)/\rho$ realni deo jedne analitičke funkcije $f(z)$ $\{z=\rho\exp(i\theta)\}$, odrediti $f(z)$.

100. Neka je $f(z)\,(\equiv u+iv)$ jedna analitička funkcija kompleksne promenljive $z\,\{\equiv x+iy\equiv\rho\exp(i\theta)\}$.

Ako je u funkcija samo od ρ, tada je v funkcija samo od θ. Dokazati ovo i odrediti sve funkcije $f(z)$ koje imaju navedenu osobinu.

101. Da li postoji analitička funkcija $f(z)\,(\equiv P+iQ)$ za koju važi relacija

(1) $$2xyP+(y^2-x^2)\,Q+2xy\,(x^2+y^2)^2=0?$$

Rešenje. Ako se pređe na polarne koordinate $(x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta)$, relacija (1) dobija oblik

(2) $$P=Q\operatorname{cotg}2\theta-\rho^4.$$

Budući da se traži analitička funkcija

$$f(z)=P(\rho,\theta)+iQ(\rho,\theta),$$

funkcije P i Q moraju zadovoljavati *Cauchy—Riemann*-ove uslove

(3) $$\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}=\frac{\partial Q}{\partial\theta}, \qquad -\rho\frac{\partial Q}{\partial\rho}=\frac{\partial P}{\partial\theta}.$$

Uzimajući u obzir relaciju (2), poslednje dve relacije postaju

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial Q}{\partial\theta}=\frac{\partial Q}{\partial\rho}\operatorname{cotg}2\theta-4\rho^3, \qquad -\rho\frac{\partial Q}{\partial\rho}=\frac{\partial Q}{\partial\theta}\operatorname{cotg}2\theta-\frac{2}{\sin^2 2\theta}\,Q.$$

Posle eliminacije parcijalnog izvoda $\partial Q/\partial\theta$ dobija se

$$\frac{\partial Q}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho}Q=2\rho^3\sin 4\theta,$$

odakle je

$$Q=\rho^2[C(\theta)+\rho^2\sin 4\theta]$$

$\{C(\theta)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija promenljive $\theta\}$.

Funkcija $Q(\rho,\theta)$ mora da zadovoljava *Laplace*-ovu parcijalnu jednačinu

(4) $$\rho^2\frac{\partial^2 Q}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial Q}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 Q}{\partial\theta^2}=0.$$

U posmatranom slučaju jednačina (4) dobija oblik

$$\frac{d^2 C}{d\theta^2}+4C=0.$$

Posle integracije nalazi se

$$C(\theta)=A\cos 2\theta+B\sin 2\theta \qquad (A,\ B \text{ realne konstante}).$$

Iz (2) sleduje

$$P(\rho,\theta)=\rho^2\operatorname{cotg}2\theta\,(A\cos 2\theta+B\sin 2\theta+\rho^2\sin 4\theta)-\rho^4.$$

Funkcija $P(\rho,\theta)$ mora da zadovoljava *Laplace*-ovu jednačinu (4), pa se dobija $A=0$, dok B ostaje proizvoljno.

Prema tome, funkcije

$$P(\rho,\theta)=\rho^2(B\cos 2\theta+2\rho^2\cos^2 2\theta)-\rho^4,$$

$$Q(\rho,\theta)=\rho^2\sin 2\theta\,(B+2\rho^2\cos 2\theta)$$

su konjugovano-harmoniske funkcije i zadovoljavaju uslov (1).

Pređemo li na *Dekartove* koordinate, dobijamo

$$P(x,y)=(x^2-y^2)\,[B+2(x^2-y^2)]-(x^2+y^2)^2,$$

$$Q(x,y)=2xy\,[B+2(x^2-y^2)].$$

Tražena analitička funkcija $f(z)$ ima oblik

$$f(x+iy)=\{B(x^2-y^2)+y^4-6x^2y^2+x^4\}+i\{2Bxy+4xy(x^2-y^2)\}.$$

Ako se umesto y stavi 0 i umesto x stavi z, dobija se

$$f(z)=Bz^2+z^4 \qquad (B \text{ realna konstanta}).$$

Ovo je rešenje *Kovine Milošević*.

Primedba. Videti u ovom *Zborniku* prilog: *Jedan problem o analitičkim funkcijam*

102. Pokazati da funkcija

$$v(x,y;t)\equiv\frac{y}{(x-t)^2+y^2} \qquad (t \text{ realan parametar})$$

zadovoljava *Laplace*-ovu parcijalnu jednačinu za svako $(x,y)\neq(t,0)$.

Odrediti analitičku funkciju

$$f(z,t)\equiv u(x,y;t)+i\,v(x,y;t)$$

koja ispunjava uslov

$$|f(z,t)|\to 0 \qquad (|z|\to\infty).$$

103. Odrediti sve analitičke funkcije $f(z)\,(\equiv u+iv)$ kompleksne promenljive $z\,(\equiv x+iy)$, tako da je

$$u(x,y)=g(x)+h(y),$$

gde su $g(x)$, $h(y)$ realne neprekidne funkcije po x odnosno y, i to takve da su njihovi izvodi

$$g'(x),\quad g''(x),\quad h'(y),\quad h''(y)$$

neprekidni.

104. Odrediti analitičku funkciju čiji je realni deo

$$\frac{x\cos y+y\sin y}{x^2+y^2}\,e^x.$$

105. Odrediti analitičku funkciju $w=f(z)$ za koju je

$$|w|=(x^2+y^2)\,e^{xy}.$$

106. Odrediti sve analitičke funkcije $f(z)=u+iv$ kompleksne promenljive $z=x+iy$ koje imaju osobinu da im je realni deo u oblika $g(x)\,h(y)$, gde su $g(x)$ i $h(y)$ realne funkcije promenljive x odnosno y, čiji su izvodi prvog i drugog reda neprekidni.

Rešenje. Da bi funkcija $u=g(x)\,h(y)$ bila realni deo neke analitičke funkcije, ona mora zadovoljavati *Laplace*-ovu jednačinu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \text{tj.}\quad g''(x)\,h(y)+g(x)\,h''(y)=0.$$

Odavde izlazi

(1) $$\frac{g''(x)}{g(x)}=-\frac{h''(y)}{h(y)}.$$

Kako se na levoj strani jednačine (1) nalazi funkcija koja zavisi samo od x, a na desnoj funkcija koja zavisi samo od y, zaključujemo da je jednakost (1) moguća samo pod uslovom da su i leva i desna strana jednake jednoj istoj realnoj konstanti k.

Razlikovaćemo tri slučaja.

1° $k=C^2$ (C realno $\neq 0$).

Iz (1) dobijamo sledeće dve jednačine:

$$g''(x)=C^2\,g(x),\qquad -h''(y)=C^2\,h(y).$$

Opšta rešenja ovih jednačina su respektivno:

$$g(x)=A'\operatorname{sh}Cx+B'\operatorname{ch}Cx,$$
$$h(y)=D'\sin Cy+E'\cos Cy$$

(A', B', D', E' realne konstante).

Prema tome, funkcija u ima sledeći oblik

(2) $$u=(A'\operatorname{sh}Cx+B'\operatorname{ch}Cx)\,(D'\sin Cy+E'\cos Cy).$$

Funkciju v nalazimo pomoću *Cauchy—Riemann*-ovih uslova:

(3) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

(4) $$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Jednačina (3), na osnovu (2), postaje

$$\frac{\partial v}{\partial y}=C\,(A'\operatorname{ch}Cx+B'\operatorname{sh}Cx)\,(D'\sin Cy+E'\cos Cy).$$

Odavde se, posle integracije, dobija

$$v=(A' \operatorname{ch} Cx+B' \operatorname{sh} Cx)(-D' \cos Cy+E' \sin Cy)+\varphi(x). \tag{5}$$

Da bismo odredili funkciju $\varphi(x)$, unesimo izraze (2) i (5) u jednačinu (4), pa nalazimo

$$-C(A' \operatorname{sh} Cx+B' \operatorname{ch} Cx)(D' \cos Cy-E' \sin Cy)$$
$$=C(A' \operatorname{sh} Cx+B' \operatorname{ch} Cx)(-D' \cos Cy+E' \sin Cy)+\varphi'(x).$$

Odavde izlazi

$$\varphi'(x)=0 \quad \text{i} \quad \varphi(x)=C' \qquad (C'=\text{const}).$$

Funkcija $f(z)$ ima sledeći oblik

$$f(z)=(A' \operatorname{sh} Cx+B' \operatorname{ch} Cx)(D' \sin Cy+E' \cos Cy)$$
$$+i[C'+(A' \operatorname{ch} Cx+B' \operatorname{sh} Cx)(-D' \cos Cy+E' \sin Cy)]. \tag{6}$$

2° $k=-C^2$ (C realno $\neq 0$).

Ovaj slučaj tretira se potpuno analogno kao i prethodni i zbog toga ćemo navesti samo krajnji rezultat koji glasi

$$f(z)=(A'' \sin Cx+B'' \cos Cx)(D'' \operatorname{sh} Cy+E'' \operatorname{ch} Cy)$$
$$+i[C''+(A'' \cos Cx-B'' \sin Cx)(D'' \operatorname{ch} Cy+E'' \operatorname{sh} Cy)], \tag{7}$$

gde su A'', B'', C'', D'', E'' realne konstante.

3° $k=0$.

Iz (1) u ovom slučaju dobijamo dve jednačine:

$$g''(x)=0, \qquad h''(y)=0.$$

Opšta rešenja ovih jednačina su:

$$g(x)=Ax+B, \quad h(y)=Dy+E \qquad (A, B, D, E \text{ integracione realne konstante}).$$

Prema tome, funkcija u ima oblik

$$u=(Ax+B)(Dy+E). \tag{8}$$

Zamenom funkcije u iz (8) u (3) dobijamo

$$\frac{\partial v}{\partial y}=A(Dy+E).$$

Odavde se, posle integracije, dobija

$$v=\frac{1}{2}A(Dy^2+2Ey)+\psi(x). \tag{9}$$

Da bismo odredili funkciju $\psi(x)$, unesimo izraze (8) i (9) u (4), te nalazimo

$$-D(Ax+B)=\psi'(x),$$

odakle je

$$\psi(x)=C-\frac{1}{2}D(Ax^2+2Bx) \qquad (C \text{ realna konstanta}).$$

Funkcija ima sledeći oblik

$$f(z)=(Ax+B)(Dy+E)+i\left[C-BDx+AEy+\frac{1}{2}AD(y^2-x^2)\right]. \tag{10}$$

Na kraju možemo reći da sve analitičke funkcije sa navedenom osobinom moraju imati jedan od oblika (6), (7) ili (10).

107. Odrediti u tački $z=a$ izvod po pravcu funkcija

$$\bar{z}, \quad \operatorname{Re}(z), \quad z \operatorname{Re}(z), \quad |z|^2, \quad \sin \bar{z}, \quad \cos \bar{z},$$

kada z teži ka a duž polu-prave koja je određena uglom θ.

Da li postoji za neku od ovih funkcija izvod nezavisan od pravca θ? Da li su navedene funkcije analitičke?

III. PRESLIKAVANJE

108. Data je funkcija

$$w(z) \equiv u(x, y) + i v(x, y) \equiv z^2.$$

U ravni tačke z posmatrati mrežu pravih

$$x=a, \quad y=b \quad (a, b \text{ realni brojevi}).$$

Šta ovoj mreži odgovara u ravni tačke w?

Rešenje. 1° Pravama $x=a$ odgovaraju u ravni tačke w krive

$$u=a^2-y^2, \quad v=2ay.$$

Posle eliminacije parametra y dobija se

(1) $$u=a^2-v^2/(4a^2).$$

To je skup konfokalnih i koaksijalnih parabola čija je žiža koordinatni početak. Osa simetrije svih ovih parabola je x-osa.

Teme ove parabole nalazi se u tački $(a^2, 0)$.

2° Pravama $y=b$ odgovaraju u ravni tačke w krive

$$u=x^2-b^2, \quad v=2bx.$$

Posle eliminacije parametra x dobija se

(2) $$u=v^2/(4b^2)-b^2.$$

I ovo je skup konfokalnih i koaksijalnih parabola koje imaju istu žižu i istu osu simetrije kao i kriva (1).

Teme ove parabole je u tački $(-b^2, 0)$.

Mreži kvadrata u z-ravni odgovara mreža krivoliniskih četvorouglova u w-ravni.

Budući da se preslikavanje ortogonalnih krivih u ravni z vrši pomoću analitičke funkcije $w=z^2$, ono je konformno. Krivoliniski četvorougli imaju prave uglove (to su uglovi koje grade tangente povučene na parabole u tačkama preseka). Jedino se kvadrat, čije se jedno teme nalazi u početku, preslikava na krivoliniski trougao, jer je u tački $z=0$ izvod dw/dz jednak nuli.

Primedba. Navešćemo *Ivory*-ev stav koji glasi: Kada je

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \quad b_1 \leqslant y \leqslant b_2,$$

tada je oblast u kojoj se nalazi tačka w krivoliniski četvorougao, čije su strane luci konfokalnih parabola. Dijagonale ovog četvorougla su jednake.

Dokaz. Parametrima

$$a=a_1, \ a_2; \quad b=b_1, \ b_2$$

odgovaraju u w-ravni ove četiri konfokalne parabole:

$$u=a_1^2-v^2/(4a_1^2), \quad u=a_2^2-v^2/(4a_2^2);$$

$$u=v^2/(4b_1^2)-b_1^2, \quad u=v^2/(4b_2^2)-b_2^2$$

Ove četiri parabole seku se u četiri tačke M_1, M_2, M_3, M_4 čije su koordinate respektivno:

$(a_1^2-b_1^2,\ 2a_1b_1)$, $(a_2^2-b_1^2,\ 2a_2b_1)$, $(a_2^2-b_2^2,\ 2a_2b_2)$, $(a_1^2-b_2^2,\ 2a_1b_2)$.

Veličine dijagonala četvorougla $M_1M_2M_3M_4$ date su formulama:

$$\overline{M_1M_3}^2=\{(a_1^2-a_2^2)-(b_1^2-b_2^2)\}^2+4\{a_1b_1-a_2b_2\}^2,$$

$$\overline{M_2M_4}^2=\{(a_1^2-a_2^2)+(b_1^2-b_2^2)\}^2+4\{a_1b_2-a_2b_1\}^2.$$

Jednostavnim računom dokazuje se da je $\overline{M_1M_3}=\overline{M_2M_4}$.

Dakle, pravougaonik određen jednačinama

$$x=a_1,\quad x=a_2,\quad y=b_1,\quad y=b_2$$

u z-ravni preslikava se u w-ravni na krivoliniski četvorougao čije su dijagonale jednake, a takođe i uglovi.

109. Data je transformacija $w=z+1/z$.

1° Ako tačka z opisuje krug $|z|=r$ $(r>0)$, šta opisuje tačka w?

2° Ako tačka z opisuje pravu $y=mx$, šta opisuje tačka w?

Rezultat. 1° Tačka w $(\equiv u+iv)$ opisuje elipsu

$$\frac{u^2}{(r+1/r)^2}+\frac{v^2}{(r-1/r)^2}=1 \qquad (r\neq 1).$$

Šta će biti ako je $r=1$?

110. Transformacijom $w=4/(z+1)^2$ preslikati krug $|z|=1$. Na šta se preslikava unutrašnjost ovog kruga?

111. Ako tačka z opisuje u svojoj ravni prave paralelne koordinatnim osama, šta opisuje tačka

$$w=(a-be^z)/(1-e^z) \qquad (a,\ b \text{ kompleksni brojevi})?$$

112. Na koju će se oblast u w-ravni preslikati oblast

$$|x|<1,\quad |y|<1$$

pomoću transformacije $w=4iz+2-i$?

113. Ako tačka z opisuje jedinični krug u svojoj ravni, šta opisuje u svojoj ravni tačka $w=(z^2-az)/(az-1)$, gde je a realna konstanta?

Rešenje. Kako je $|z|^2=z\bar{z}=1$, $w=\dfrac{z^2-az}{az-1}$, $\bar{w}=\dfrac{\bar{z}^2-a\bar{z}}{a\bar{z}-1}$, biće

$$w\bar{w}=\frac{1-a\bar{z}-az+a^2}{a^2-a\bar{z}-az+1}=1.$$

Dakle, ako z opisuje krug $|z|=1$, tačka w takođe opisuje krug $|w|=1$.

114. Ako tačka z opiše krug $|z|=1$, šta je trajektorija tačke

$$w=(a+b)z^2+(a-b)z^{-2} \qquad (a,\ b \text{ realni parametri})?$$

115. Ako tačka z opisuje x-osu u z-ravni, šta opisuje tačka

$$w=(1-iz)/(z-i)$$

u w-ravni?

116. Proveriti da li je istinito ovo tvrđenje: Transformacija

(T) $$w=(az+b)/(cz+d) \qquad (a,\ b,\ c,\ d \text{ realni}),$$

1° ako je $ad-bc>0$, preslikava poluravan $y>0$ na poluravan $v>0$;

2° ako je $ad-bc<0$, preslikava poluravan $y>0$ na poluravan $v<0$.

Na šta preslikava transformacija (T) u w-ravni: 1° krug $|z|=|d/c|$ 2° unutrašnjost ovog kruga; 3° spoljašnju oblast istog kruga?

117. 1° Ako tačka z opisuje pravu $y=x$, šta opisuje tačka

(T) $$w=(z^2-1)/(z^2+1)?$$

2° Ako tačka z opisuje pravu $y=-x$, šta opisuje tačka w?

3° Na šta se preslikava transformacijom (T) deo ravni definisan relacijom $y^2-x^2>0$, a na šta deo ravni definisan relacijom $y^2-x^2<0$?

118. Data je funkcija

(1) $$w=(z^2-iz-1)/(2iz),$$

gde je $z=\exp(i\theta)$ (θ realno).

1° Pokazati da je w realna funkcija od θ.

2° Ako θ uzima sve vrednosti iz segmenta $[0,\ \pi/2]$, koju putanju opisuje tačka w?

Rešenje. 1° S obzirom da je $|z|=1$, tj. $z\bar{z}=1$, iz (1) sleduje

$$w=\frac{(z\bar{z})\,z-i\,(z\bar{z})-\bar{z}}{2iz\bar{z}}=\frac{z-i-\bar{z}}{2i}=y-\frac{1}{2}.$$

Prema tome je

$$x=\cos\theta, \quad y=\sin\theta, \quad u=y-1/2=\sin\theta-1/2, \quad v=0.$$

2° Za $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ relacije

$$u=\sin\theta-1/2, \quad v=0$$

definišu otsečak $[-1/2,\ +1/2]$ na u-osi.

119. Neka je

(1) $$z=a+r\,(i-t)/(i+t) \quad \{r\,(>0) \text{ i } a \text{ konstante}; \ t\in(-\infty,\ +\infty)\}.$$

Koju krivu opisuje tačka z kad se t menja?

Rešenje. Iz (1) sleduje

$$|z-a|^2=r^2\left|\frac{i-t}{i+t}\right|^2=r^2\frac{i-t}{i+t}\cdot\frac{-i-t}{-i+t}=r^2.$$

Odavde izlazi

$$|z-a|=r.$$

Trajektorija tačke z je krug poluprečnika r sa centrom u tački a.

120. Koju krivu opisuje tačka

$$z=(1+\cos 2t)+i\sin 2t$$

kada t varira na segmentu $[-\pi/2,\ +\pi/2]$?

121. Na šta se transformacijom $w=(1-i)z$ preslikava u w-ravni oblast $\operatorname{Im}(z) \geqslant 0$?

Rezultat. Na oblast $\operatorname{Re}(w)+\operatorname{Im}(w) \geqslant 0$.

122. Ako tačka z opiše duž čije su krajnje tačke $(-1, 0)$, $(+1, 0)$, koja je trajektorija tačke $w=(1-iz)/(z-i)$?

Rezultat. Tražena trajektorija je polukrug $|w|=1$, $v \geqslant 0$.

123. Potreban i dovoljan uslov da bi transformacija $z=(aw+b)/(cw+d)$ preslikavala krug $|z|=1$ u pravu je $|a|=|c|>0$. Dokazati.

124. Ako tačka z opisuje u svojoj ravni krug $|z|=1$, šta je trajektorija tačke (T) $w=z(2z-1)/(2-z)$?

Na šta se preslikava transformacijom (T) područje $|z|<1$, a na šta područje $|z|>1$?

125. Na koju se oblast G preslikava oblast

$$1 \leqslant |z| \leqslant 2, \qquad -\pi/4 \leqslant \arg z \leqslant +\pi/4$$

transformacijom $w=z^2$?

Odrediti veličinu površine oblasti G.

Rezultat. area $G=15\,\pi/2$.

126. Na šta se preslikava oblast $\operatorname{Im}(z)>0$ transformacijom

$$w=e^{ai}\,\frac{z-i}{z+i} \qquad (a \text{ realna konstanta})?$$

127. Data je bilinearna transformacija

$$\text{(T)} \qquad w=a\,\frac{bz+1}{z+c} \qquad \{a\,(\neq 0),\ b,\ c\,(bc \neq 1) \text{ kompleksni brojevi}\}.$$

1° Odrediti uslove pod kojima će se unutrašnjost kruga $|z|=1$, pomoću transformacije (T), preslikati na unutrašnjost kruga $|w|=1$.

2° Pod kojim se uslovima, transformacijom (T), oblast $|z|<1$ preslikava na oblast $|w|>1$?

Rešenje. 1° Iz (T) sleduje

$$z=\frac{a-cw}{w-ab}.$$

Uslovu $|z|<1$, odnosno uslovu $z\bar{z}<1$ odgovara relacija

$$\text{(1)} \qquad (c\bar{c}-1)\,w\bar{w}-(\bar{a}c-\bar{a}\bar{b})\,w-(a\bar{c}-ab)\,\bar{w}<a\bar{a}(b\bar{b}-1).$$

Ako su ispunjeni uslovi

$$\text{(2)} \qquad \bar{a}c-\bar{a}\bar{b}=0, \quad a\bar{c}-ab=0, \quad c\bar{c}-1>0,$$

relacija (1) postaje

$$\text{(3)} \qquad w\bar{w}<\frac{a\bar{a}(b\bar{b}-1)}{c\bar{c}-1}.$$

Prve dve relacije u skupu (2) svode se na $b=\overline{c}$, dok treća relacija kazuje da je $|c|>1$. S obzirom na uslov $b=\overline{c}$ izlazi da je i $|b|>1$.

Prema ovome relacija (3) dobija oblik

(4) $$w\overline{w}<a\overline{a}.$$

Postavljeno je pitanje pod kojim će se uslovom oblast $|z|<1$ preslikati u oblast $|w|<1$ pomoću transformacije (T). Prema (4) zaključuje se da već navedenim uslovima treba pridružiti nov uslov $a\overline{a}=1$, odnosno $|a|=1$.

Prema tome, transformacija

$$w=a\frac{bz+1}{z+c} \qquad (|a|=1;\ b=\overline{c};\ \ |b|>1)$$

preslikava oblast $|z|<1$ na oblast $|w|<1$.

Primedba. Zadržavajući transformaciju (T), odrediti uslove pod kojima se unutrašnjost kruga $|z|=r$ preslikava u unutrašnjost kruga $|w|=R$ (razlikovati slučajeve: $R>r$; $R=r$; $R<r$).

128. Data je bilinearna transformacija

(1) $$w=a\frac{z+b}{z+c} \qquad \{a(\neq 0),\ b(\neq c),\ c \text{ kompleksni brojevi}\}$$

i krug

(2) $$|z-A|=R.$$

1° Krug (2) transformacijom (1) preslikava se na drugi krug u w-ravni ako je $|A+c|\neq R$. Naći centar i poluprečnik tog kruga. Na šta se preslikava pri tome unutrašnjost kruga (2)?

2° Krug (2) transformacijom (1) preslikava se na pravu u w-ravni ako je $|A+c|=R$. Naći jednačinu te prave. Na koju se polu-ravan pri tome preslikava unutrašnjost kruga (2)?

Rezultat. 1° Centar A' kruga i poluprečnik R' dati su formulama:

$$A'=a\left\{1+\frac{(b-c)(\overline{A}+\overline{c})}{|A+c|^2-R^2}\right\} \quad \text{i} \quad R'=\left|\frac{Ra(b-c)}{|A+c|^2-R^2}\right|.$$

Oblast u kojoj se nalazi tačka $-c$ preslikava se uvek na spoljašnjost kruga — slike.

$$2^\circ \qquad \left|w-a\frac{A+b}{A+c}\right|=|w-a|.$$

Unutrašnjost kruga (2) preslikava se na onu polu-ravan koja ne sadrži tačku a.

129. Odrediti najopštiju bilinearnu transformaciju kojom se krug $|z|=$ preslikava na realnu osu w-ravni.

Rezultat. $w=\dfrac{az+\overline{a}e^{i\alpha}}{z+e^{i\alpha}}$ ($a\neq 0$ proizvoljan kompleksan broj; α realan broj).

130. Data je transformacija $w=(az+b)/(cz+d)$ ($c\neq 0$; $ad-bc\neq 0$).

Ispitati: 1° da li z opisuje pravu koja prolazi kroz tačku $z=-d/c$, ako w opisuje ma koji krug ili ma koju pravu koja prolazi kroz tačku $w=a/c$;

2° da li z opisuje krug ako w opisuje pravu ili krug koji ne prolaze kroz tačku $w=a/c$.

Ako je $a=d$, šta opisuje tačka w kada z opiše krug $x^2+y^2+2x=0$?

131. Kompleksni brojevi $z(\equiv x+iy)$ i $w(\equiv u+iv)$ vezani su jednačinom

$$w=(a+z)/(a-z) \quad (a \text{ realno } \neq 0).$$

Kad tačka z opisuje y-osu, šta je putanja tačke w?

Rezultat. Krug $|w|=1$.

132. Pokazati da transformacija (T) $w=z/(1-z)$ preslikava područje $\operatorname{Im}(z)\geqslant 0$ u z-ravni na područje $\operatorname{Im}(w)\geqslant 0$ u w-ravni.

Na šta se transformacijom (T) preslikava u w-ravni: 1° krug $|z|=1$; 2° unutrašnja oblast ovog kruga; 3° spoljašnja oblast ovog kruga?

133. Data je bilinearna transformacija

$$w=(z+2i)/(2iz-1).$$

Ako tačka w opiše krug $|w|=1$, šta opisuje tačka z?

Rešenje. Jednačina kruga $|w|=1$ može se pisati u obliku $w\bar{w}=1$. Stoga je

$$\frac{z+2i}{2iz-1}\cdot\frac{\bar{z}-2i}{-2i\bar{z}-1}=1 \tag{1}$$

tražena trajektorija.

Kada se u (1) izvrše naznačene operacije, dobija se $z\bar{z}=1$, što znači da je tražena trajektorija jedinični krug.

134. Odrediti najopštiju transformaciju

$$w=(az+b)/(cz+d)$$

pomoću koje tačke z_1 i z_2 ostaju invarijantne.

Na šta se preslikava prava koja prolazi kroz tačke z_1 i z_2 pomoću tako dobijene transformacije?

135. Pokazati da se transformacijom:

1° $w=z^2$ prvi kvadrant ravni z preslikava na oblast $v>0$ ravni w;

2° $w=e^z$ pojas $0<y<\pi/2$ ravni z preslikava na prvi kvadrant ravni w;

3° $w=\cos z$ pojas $-\pi/2<x<\pi/2$ ravni z preslikava na oblast $u>0$ ravni w;

4° $w=1/(z+i)$ oblast $y\geqslant 0$ ravni z preslikava na oblast $u^2+v^2+v\leqslant 0$ ravni w;

5° $w=(i-z)/(i+z)$ prvi kvadrant z-ravni preslikava na oblast $|w|<1$, $v>0$ u w-ravni.

136. Na koju se oblast w-ravni, pomoću transformacije $w=z^2$, preslikava trougao čija su temena tačke $z=0$, $z=1$, $z=i$?

137. Preslikati na w-ravan pojas, definisan u z-ravni relacijama $0<x<\pi$, $y>0$, pomoću transformacije $w=-ik\operatorname{cotg}(z/2)$ (k realno).

138. Ako tačka z opiše jednu elipsu (E_1), čije su žiže u tačkama $z_1=2$ i $z_2=-2$, tada tačka $w=z^3-3z$ opisuje u istoj ravni drugu elipsu (E_2). Pokazati da su elipse (E_1) i (E_2) konfokalne.

Rešenje. Tačka z koja opisuje elipsu (E_1) u kompleksnoj ravni može se prikazati izrazom

(1) $$z=a\cos t+ib\sin t \qquad (a^2-b^2=4;\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Tačka $w=z^3-3z$, na osnovu (1), definisana je izrazom

(2) $$w=a\cos t\,(a^2\cos^2 t-3b^2\sin^2 t-3)+ib\sin t\,(3a^2\cos^2 t-b^2\sin^2 t-3).$$

Kako je $a^2-b^2=4$, biće:

$$a^2\cos^2 t-3b^2\sin^2 t-3\equiv(a^2-3)(1-4\sin^2 t);$$

$$3a^2\cos^2 t-b^2\sin^2 t-3\equiv(b^2+3)(4\cos^2 t-1).$$

Prema tome, ako tačka z opisuje elipsu (E_1), tada tačka $w\ (\equiv u+iv)$ opisuje krivu

$$\begin{aligned} u&=(a^3-3a)\cos t\,(1-4\sin^2 t)\\ v&=(b^3+3b)\sin t\,(4\cos^2 t-1)\end{aligned} \qquad (a^2-b^2=4;\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

tj.

(3) $$\begin{aligned} u&=(a^3-3a)\cos 3t\\ v&=(b^3+3b)\sin 3t\end{aligned} \qquad (a^2-b^2=4;\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Budući da je

$$(a^3-3a)^2-(b^3+3b)^2\equiv 4 \qquad (\text{zbog } a^2-b^2=4),$$

zaključuje se da je kriva (3) elipsa konfokalna sa elipsom (E_1).

Dok tačka z opiše jedanput elipsu (E_1), dotle tačka w opiše tri puta elipsu (3).

139. Oblast prvog kvadranta z-ravni, koja je ograničena lucima krugova

$$(x-a)^2+y^2=a^2, \qquad (x-2a-b)^2+y^2=b^2,$$

$$(x-a-b)^2+y^2=(a+b)^2,$$

preslikati na w-ravan transformacijom $w=1/z$.

140. Na šta se transformacijom

$$w=(z-i)^2/(z+i)^2$$

preslikava u w-ravni oblast

$$|z|\leqslant 1, \qquad \operatorname{Re} z\geqslant 0?$$

Rezultat. $\operatorname{Im}(w)\geqslant 0$.

141. Na koju oblast w-ravni funkcija $w=\operatorname{tg} z$ preslikava pojas

$$-\frac{1}{4}\pi<\operatorname{Re} z<\frac{1}{4}\pi?$$

Rezultat. $|w|<1$.

142. Ako tačka

$$w=u+iv=a/(x+iy) \qquad (a\neq 0)$$

opisuje prave

$$u=\alpha, \quad v=\beta \qquad (\alpha \text{ i } \beta \text{ realne konstante, } \alpha\beta\neq 0),$$

pokazati da tačka $z\ (\equiv x+iy)$ opisuje dva kruga koji se seku ortogonalno.

143. Kompleksni brojevi $z\,(\equiv x+iy)$ i $w\,(\equiv u+iv)$ vezani su relacijom

$$w=(z-1)/(z+1).$$

Pokazati da pravama $u=2$ i $v=2$ u w-ravni odgovaraju u z-ravni dva kruga koji se seku pod pravim uglom.

144. Kad argument θ tačke z varira na segmentu $\left[-\frac{1}{2}\pi,\ +\frac{1}{2}\pi\right]$, koju krivu opisuje tačka

$$z=(1+\cos 2\theta)+i\,(1-\sin 2\theta)?$$

145. Ako tačka z u svojoj ravni opiše krug $|z|=2$, šta opisuje tačka $w=z+z^{-1}-2i$ u svojoj ravni?

146. Na šta transformacija $w=(1-i)\,z$ preslikava oblast $y\geqslant 1$ ravni tačke z?

147. Ako z opiše duž čije su krajnje tačke $(-1,\ -1)$ i $(+1,\ -1)$, koju putanju opisuje tačka $w=(1+iz)/(z+i)$?

148. Ako tačka z opisuje krug $|z|=r$, koju krivu opisuje tačka $w=z+k^2/z$ (k realna konstanta)?

149. U kompleksnoj ravni tačke z uočiti tačke $z_1=-1$ i $z_2=+1$ i nad duži $z_1 z_2$ kao nad prečnikom (u poluravni $y>0$) konstruisati polukrug.

Na šta se preslikava taj polukrug u w-ravni pomoću transformacije

$$w=(z-1)/(z+1)?$$

150. Pokazati da se transformacijom

$$w=[(1+z)/(1-z)]^2 \tag{1}$$

oblast $|z|\leqslant 1$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ preslikava na oblast $\operatorname{Im} w\geqslant 0$.

Rešenje. Umesto transformacije (1) posmatrajmo dve transformacije

$$\zeta=(1+z)/(1-z), \quad (2) \qquad\qquad w=\zeta^2. \quad (3)$$

Transformacijom (2) oblast $|z|\leqslant 1$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ preslikava se u ζ-ravni u oblast

$$\operatorname{Re}\zeta\geqslant 0, \qquad \operatorname{Im}\zeta\geqslant 0. \tag{4}$$

Ako se upotrebe polarne koordinate $\{\zeta=r\exp(\theta i)\}$, tada se oblast (4) definiše relacijom

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi.$$

Transformacija (3), odnosno

$$w=r^2\exp(2\theta i),$$

preslikava oblast $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi$ na sledeću oblast w-ravni

$$0\leqslant\arg w\leqslant\pi,$$

tj. na oblast $\operatorname{Im} w\geqslant 0$, kao što je i trebalo pokazati.

151. Preslikati

1° $|z|\leqslant 1$, $\operatorname{Re} z\leqslant 0$ transformacijom $w=[(z+i)/(z-i)]^2$;

2° $|z|\leqslant 1$, $\operatorname{Im} z\leqslant 0$ transformacijom $w=[(z-1)/(z+1)]^2$.

Uputstvo. 1° Posmatrati transformacije $\zeta=(z+i)/(z-i)$, $w=\zeta^2$.

152. Na šta se preslikava kružni kvadrant

$$|z| \leqslant 1, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0$$

funkcijom

$$f(z) = 1 / \sqrt{1+z^2}\,?$$

Za $\sqrt{1+z^2}$ uzeti granu koja za $z=0$ dobija vrednost 1.

153. Ako tačka z opisuje y-osu od $-\infty$ do $+\infty$, tada tačka

$$w = (2+z)/(2-z)$$

opisuje krug u pozitivnom smislu.

Proveriti ovo.

154. Ispitati da li se transformacijom

$$w = (z^2 - i)/(z^2 + i)$$

oblast $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ preslikava na oblast $|w| \leqslant 1$.

155. Odrediti jednu transformaciju kojom se šrafirani u $z-$ ravni ugao preslikava na oblast $|w| \leqslant 1$.

Rešenje. Transformacijom

$$w_1 = z\, e^{-\frac{1}{12}\pi i}$$

šrafirana oblast z-ravni postaje šrafirana oblast w_1-ravni.

Transformacijom $w_2 = w_1^{12}$ šrafirana oblast w_1-ravni preslikava se na oblast $\operatorname{Im} w_2 \geqslant 0$.

Šrafirana oblast w_2-ravni, transformacijom

$$w = \frac{w_2 - i}{w_2 + i},$$

preslikava se na oblast $|w| \leqslant 1$.

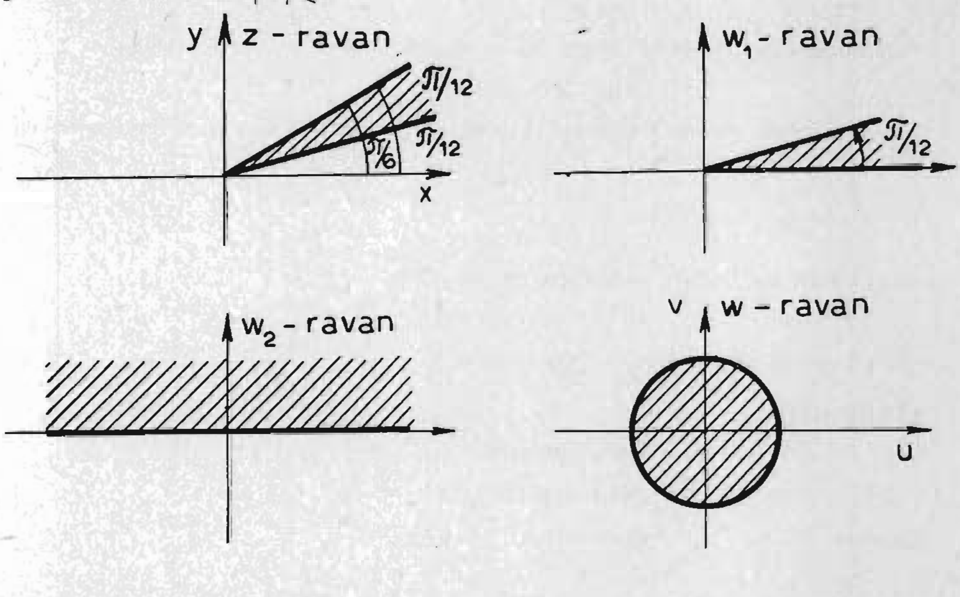
Prema tome, oblast

$$\frac{1}{12}\pi \leqslant \arg z \leqslant \frac{1}{6}\pi,$$

transformacijom

$$w = \frac{z^{12} + i}{z^{12} - i},$$

preslikava se na oblast $|w| \leqslant 1$.



156. Dati su krugovi:

$$|z-\alpha|=|\alpha-a|, \quad |z-\beta|=|\beta-a|,$$

gde su a, α, β kompleksni brojevi koji zadovoljavaju uslov

$$|\alpha-a|=|\alpha-\beta|+|\beta-a|.$$

Oblast koju ograničavaju dati krugovi preslikati transformacijom $w=1/(z-a)$.

157. Preslikati oblast

$$|z|\leqslant r, \quad \operatorname{Re} z\geqslant 0$$

funkcijom

$$w=\frac{z^2-r^2+2rz}{z^2-r^2-2rz}.$$

Uputstvo. Posmatrati jedno za drugim preslikavanja:

$$w_1=iz, \quad w_2=\left(\frac{w_1+r}{w_1-r}\right)^2, \quad w=i\,\frac{w_2-i}{w_2+i}$$

ili pak

$$\zeta=\frac{1}{2r}\,z-\frac{r}{2}\,\frac{1}{z}, \quad w=\frac{\zeta+1}{\zeta-1}.$$

158. Na šta se preslikava duž

$$\operatorname{Re} z=p, \quad -\pi\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant\pi \quad (p \text{ realno})$$

pomoću transformacije

$$w=\frac{4e^z-3i}{5e^z+6i}?$$

159. Sektor

$$|z|\leqslant 1, \quad 0\leqslant \arg z\leqslant\frac{1}{3}\,\pi$$

preslikati pomoću transformacije

$$w=\frac{(1+z^3)^2-i(1-z^3)^2}{(1+z^3)^2+i(1-z^3)^2}.$$

Uputstvo. Koristiti uzastopne transformacije

$$w_1=z^3, \quad w_2=\left(\frac{w_1+1}{w_1-1}\right)^2, \quad w=\frac{w_2-i}{w_2+i}.$$

160. Zajedničku oblast dva kruga

$$|z-\alpha|=|a-\alpha|, \quad |z-\beta|=|b-\beta|$$

$$(|a-\alpha|=|b-\alpha|, \quad |b-\beta|=|a-\beta|)$$

preslikati funkcijom

$$w=\frac{z-a}{z-b}.$$

161. Na šta se preslikava oblast $|z|<1/2$ transformacijom

$$w(z)=(1-4z)^2/(1-z)^2?$$

162. Na šta se preslikava oblast

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right) > 0$$

(z_1 i z_2 različiti fiksni kompleksni brojevi)

transformacijom $w=(az+b)/(cz+d)$, gde je $ad-bc \neq 0$?

163. Odrediti jednu analitičku funkciju $w=f(z)$ koja ispunjava uslov $f(0)=1$ i preslikava oblast

$$|z|<1, \quad -\frac{1}{3}\pi < \arg z < +\frac{1}{3}\pi$$

na oblast $|w|<1$.

164. Obrazovati jednu analitičku funkciju $w=f(z)$ koja preslikava oblast

$$|z|<1, \quad 0<\arg z<\frac{1}{2}\pi$$

na oblast $\operatorname{Im} w>0$, pod uslovom da je $f(0)=0$.

165. Transformacijom $w=e^z$ preslikati oblast

$$|\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)| \leqslant 1, \quad |\operatorname{Re}(z)-\operatorname{Im}(z)| \leqslant 1$$

na w-ravan.

166. Transformacijom

$$w=\frac{2z}{1-z^2}$$

preslikati na w-ravan oblast, definisanu relacijama

$$|z-1| \leqslant \sqrt{2}, \quad |z+1| \leqslant \sqrt{2}.$$

167. Transformacijom

$$w=\frac{1}{a-e^{-iz}} \qquad (a>1)$$

preslikati na w-ravan oblast z-ravni

$$0 \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant \log a.$$

168. Transformacijom

$$w=\exp\left\{-\pi i \frac{z+1}{z-1}\right\}$$

preslikati na w-ravan oblast

$$|z|<1, \quad \left|z-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}.$$

169. Ako tačka z opisuje krug $|z|=1$, šta opisuje tačka

$$w=\frac{1}{2}(az+bz^{-1}) \qquad (a,\ b \text{ kompleksni brojevi})?$$

Rezultat. Ako je $|a| \neq |b|$, tada tačka w opisuje elipsu čije su ose

$$|a|+|b| \quad \text{i} \quad \big||a|-|b|\big|.$$

Žiže ove elipse su tačke određene jednačinom $w^2 = ab$.

Ako je $|a| = |b|$, tada w opisuje otsečak prave čije su krajnje tačke određene jednačinom $w^2 = ab$.

170. Ako tačka z opisuje krug $|z| = 1$, šta opisuje tačka

$$w = az^2 + 2bz + c \qquad (a,\ b,\ c \text{ kompleksni brojevi})?$$

171. Ako tačka z opisuje krug $|z| = 1$, šta opisuje tačka

$$w = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+1} + c \qquad (a,\ b,\ c \text{ kompleksni brojevi})?$$

172. Šta opisuje tačka

$$w = \frac{a}{(z-1)^2} + \frac{b}{z+1} + c \qquad (a,\ b,\ c \text{ kompleksni brojevi}),$$

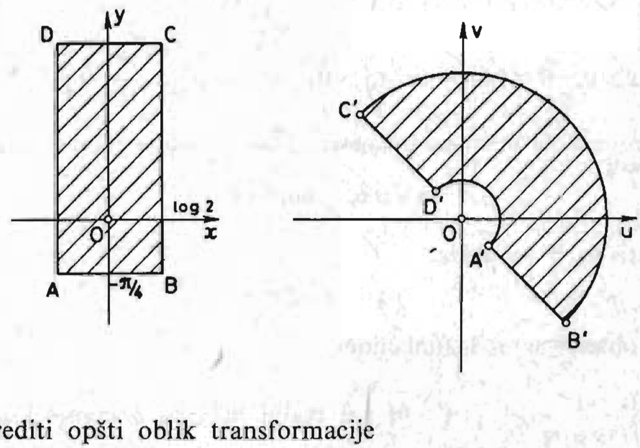
ako tačka z opisuje krug $|z| = 1$?

173. Na šta se preslikava pravougaonik

$$|x| \leqslant \log 2, \qquad -\frac{1}{4}\pi \leqslant y \leqslant \frac{3}{4}\pi$$

pomoću transformacije $w = e^z$?

Rezultat. Pravougaonik $ABCD$ preslikava se na polovinu kružnog prstena prikazanog na slici.



174. Odrediti opšti oblik transformacije

(1) $$w = (az + b)/(cz + d)$$

prema kojoj je oblast

$$|z - i - 1| \leqslant 2$$

invarijantna.

Navesti nekoliko takvih homografija w i specijalno one za koje je tačka $3 + 7i$ fiksna.

175. Svaku od navedenih oblasti z-ravni preslikati na w-ravan pomoću funkcije koja je navedena u vitičastim zagradama:

1° $\operatorname{Im} z > 1, \quad |z| < 2$ $\qquad \left\{ w = -\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i} \right)^3 \right\};$

2° $|z| > 2, \quad |z-\sqrt{2}| < \sqrt{2}$ $\qquad \left\{ w = \left(\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)} \right)^4 \right\};$

3° $|z| < 1, \quad |z+i| > 1$ $\qquad \left\{ w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i} \right)^3 \right\};$

4° $|z| > 1, \quad |z+i| < 1$ $\qquad \left\{ w = \left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i} \right)^3 \right\};$

5° $|z| < 2, \quad 0 < \arg z < \frac{1}{4}\pi$ $\qquad \left\{ w = \left(\frac{z^4+16}{z^4-16} \right)^2 \right\};$

6° $|z| < 2, \quad |z-1| > 1$ $\qquad \left\{ w = \exp \frac{2\pi i z}{z-2} \right\};$

7° $\left| z - \frac{1}{2} i \right| > \frac{1}{2}, \quad \left| z - \frac{3}{2} i \right| > \frac{1}{2}$ $\qquad \left\{ w = \exp \frac{\pi i z}{z-i} \right\};$

8° $|z| > 2; \quad |z-3| > 1$ $\qquad \left\{ w = \exp\left(\frac{2}{3} \pi i \frac{z-4}{z-2} \right) \right\};$

9° $a < \operatorname{Re} z < b \quad (a, b \text{ realni})$ $\qquad \left\{ w = \exp\left(\frac{\pi i}{b-a} (z-a) \right) \right\};$

10° $\operatorname{Re} z > 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < a \quad (a > 0)$ $\qquad \left\{ w = \left(\frac{e^{-\pi z/a} - 1}{e^{-\pi z/a} + 1} \right)^2 \right\}.$

Primedba. Proveriti da li se navedene oblasti pomoću odgovarajuće funkcije preslikavaju na jednu od oblasti

$$\operatorname{Im} w > 0, \quad \operatorname{Im} w < 0.$$

176. Ispitati da li se oblast

$$|z - ir| \leqslant r$$

preslikava na oblast $|w| \leqslant 1$ funkcijom

$$w = \frac{r e^{i\theta}(z-a)}{r^2 - (z-ir)(\overline{a}+ir)} \qquad \{r\,(>0) \text{ i } \theta \text{ realni brojevi; } a \text{ kompleksan broj}\}.$$

Da li se na osnovu navedenog rezultata može obrazovati funkcija $w = f(z)$ koja preslikava oblast $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ na $|w| \leqslant 1$?

Odgovor. Ako $r \to \infty$, dobija se tražena funkcija

$$f(z) = b \frac{z-a}{z-\overline{a}} \qquad (|b| = 1).$$

IV. REDOVI I OSTACI

177. Proveriti da li je tačan razvoj:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}+\frac{a}{z^2}+\cdots+\frac{1}{b}+\frac{z}{b^2}+\cdots\right) \qquad (|a|<|z|<|b|),$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a-b}{z^2}+\frac{a^2-b^2}{z^3}+\cdots\right) \qquad (|z|>|b|,$$

$$(a\neq 0, \quad |a|<|b|).$$

Rešenje. Iz identiteta

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}\equiv\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}+\frac{1}{b-z}\right)\equiv\frac{1}{a-b}\left\{\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-(a/z)}+\frac{1}{b}\,\frac{1}{1-(z/b)}\right\}$$

sleduje razvoj koji je već naveden u tekstu zadatka.

Za $|z|>|b|$ dobija se

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}\equiv\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)\equiv\frac{1}{a-b}\left(\frac{a-b}{z^2}+\frac{a^2-b^2}{z^3}+\cdots\right).$$

178. Razviti funkciju $1/\{(z-a)(z-b)\}$ po stepenima osnove: $1°$ $z-a$ i $2°$ $z-b$.

179. Proveriti da li su u važnosti razvoji:

$1°$ $$\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (|z|<2); \qquad \frac{1}{z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} \quad (|z|>2);$$

$2°$ $$(z-1)^{-1}(z-2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-2^{-n-1})z^n \qquad (|z|<1);$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}z^n-\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n} \qquad (1<|z|<2);$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(2^{n-1}-1)/z^n \qquad (|z|>2);$$

$3°$ $$\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \qquad (|z|<1);$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)z^{-n} \qquad (|z|>1);$$

$4°$ $$\frac{1}{(z-a)^m}=(-a)^{-m}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}\,\frac{z^n}{a^n}\right] \qquad (|z|<|a|),$$

$$=\frac{1}{z^m}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}\,\frac{a^n}{z^{m+n}} \qquad (|z|>|a|)$$

(m prirodan broj).

Uputstvo.

$1°$ Za $|z|<2$ poći od $1/(z-2)\equiv-1/\{2(1-z/2)\}$.

Za $|z|>2$ poći od $1/(z-2)\equiv 1/\{z(1-2/z)\}$.

180. Funkciju $f(z)=1/(1+z^2)$ razviti u *Taylor*-ov red u okolini tačaka:

$$1^\circ \quad z=0; \quad 2^\circ \quad z=1/2; \quad 3^\circ \quad z=-1.$$

Takođe razviti u red funkciju $f(z)$ u okolini njenih polova.
U svim slučajevima odrediti poluprečnik konvergencije reda.

181. Proveriti i obrazložiti rezultate:

$$1^\circ \quad \frac{\operatorname{sh} z}{z^2}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}z^{2k-1} \qquad (|z|>0);$$

$$2^\circ \quad \frac{e^z}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}+1-\frac{1}{2}z-\frac{5}{6}z^2+\cdots \qquad (0<|z|<1);$$

$$3^\circ \quad \frac{1}{z^2(1-z)}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{k-2} \qquad (0<|z|<1);$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k-3} \qquad (|z|>1);$$

$$4^\circ \quad \frac{z-1}{z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)(z-1)^{k+1} \qquad (|z-1|<1).$$

182. Po stepenima osnove z dati sve *Laurent*-ove razvitke funkcije

$$1/\{(z-a)(z-b)(z-c)\} \qquad (|a|<|b|<|c|).$$

183. Razviti funkcije:

$$1^\circ \quad \frac{1}{z^2+a^2}; \qquad 2^\circ \quad \frac{1}{1+2z-z^2} \qquad (a \text{ kompleksan broj})$$

u redove oblika

$$\sum A_k z^k, \quad \sum A_k (z-\alpha)^k \qquad (\alpha \text{ kompleksan broj})$$

i odrediti njihove poluprečnike konvergencije.

184. Ako je $z=a$ pol uniformne funkcije $f(z)$, kakva je priroda te tačke za funkciju

$$\frac{f'''}{f''}+\frac{f'}{f}-2\frac{f''}{f'}\,?$$

185. Odrediti ostatke funkcije

$$f(z)=1/\{a+(az+b)\operatorname{tg} z\}^2$$

za njene polove.

Rešenje. Označimo sa θ jedan pol funkcije $f(z)$. To znači da je θ jedna nula funkcije

$$g(z)=a+(az+b)\operatorname{tg} z.$$

Stavimo $z=t+\theta$ i razvijmo $g(t+\theta)$ u okolini tačke $t=0$ u potencijalni red

$$g(t+\theta)=g'(\theta)\,t+\frac{g''(\theta)}{2!}t^2+\cdots.$$

Tada je
$$f(t+\theta)=1/\{g(t+\theta)\}^2$$
$$=\frac{1}{t^2}\frac{1}{\left\{g'(\theta)+\dfrac{g''(\theta)}{2}t+\cdots\right\}^2}$$
$$=\frac{1}{t^2\{g'(\theta)\}^2}\frac{1}{\left\{1+\dfrac{1}{2}\dfrac{g''(\theta)}{g'(\theta)}t+\cdots\right\}^2}$$
$$=\frac{1}{t^2\{g'(\theta)\}^2}\left\{1-\frac{1}{2}\frac{g''(\theta)}{g'(\theta)}t+\cdots\right\}^2$$
$$=\frac{1}{t^2\{g'(\theta)\}^2}\left\{1-\frac{g''(\theta)}{g'(\theta)}t+\cdots\right\}$$
$$=-\frac{g''(\theta)}{\{g'(\theta)\}^3}\frac{1}{t}+\frac{1}{\{g'(\theta)\}^2}\frac{1}{t^2}+\{A_0+A_1t+\cdots\}.$$

Prema tome, ostatak je $-g''(\theta)/\{g'(\theta)\}^3$.

Iz relacija
$$g'(z)=(az+b)(1+\mathrm{tg}^2 z)+a\ \mathrm{tg}\ z,$$
$$g''(z)=2\{a+(az+b)\ \mathrm{tg}\ z\}(1+\mathrm{tg}^2 z)=2g(z)(1+\mathrm{tg}^2 z)$$
sleduje $g''(\theta)=0$, što znači da je ostatak za svaki pol funkcije $f(z)$ jednak nuli.

Da li se može dogoditi da istovremeno bude
$$g'(\theta)=0 \quad \text{i} \quad g''(\theta)=0?$$

Kad je $a\neq 0$, funkcije $g'(z)$ i $g''(z)$ ne mogu imati zajedničkih nula, jer između njih postoji veza
$$g''(z)-2g'(z)\ \mathrm{tg}\ z=2a.$$

Ako je $a=0$, funkcija $g(z)$ dobija jednostavan oblik $g(z)=b\ \mathrm{tg}\ z$.

186. Neka su $P(z)$ i $Q(z)$ dva polinoma koji nemaju zajedničkih nula. Odrediti vrednosti promenljive z koje bi mogle da budu polovi funkcije
$$f(z)=\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dz^2}, \text{ gde je } u=\frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Ako je a nula reda k polinoma $P(z)$, šta je a za funkciju $f(z)$?

187. Odrediti ostatke funkcije
$$F(z)=\frac{e^{1/z}z^n}{1+z} \quad (n \text{ prirodan broj})$$
za njene polove i esencijalne singularitete u proširenoj kompleksnoj ravni.

Rešenje. Tačka $z=0$ je esencijalni singularitet, a $z=-1$ pol prvog reda funkcije $F(z)$. Stavimo li $z=1/t$, dobijamo
$$F(z)=F(1/t)=\frac{e^t}{t^{n-1}(1+t)}.$$

Tačka $t=0$, odnosno $z=\infty$, je pol reda $n-1$ $(n>1)$ funkcije $F(z)$.

Da bismo dobili ostatak za singularitet $z=0$, pođimo od redova
$$e^{1/z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{z^k} \qquad (z\neq 0),$$
$$\frac{1}{z+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k \qquad (|z|<1).$$

Proizvod ovih redova je jedan *Laurent*-ov red, konvergentan za $|z|<1$ $(z \neq 0)$. Koeficijent uz $1/z^{n+1}$ je

$$\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}-\cdots,$$

odnosno

(1) $$\frac{1}{e}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+\frac{1}{n!} \quad (n \text{ neparno});$$

(2) $$-\frac{1}{e}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \quad (n \text{ parno}).$$

Prema tome, ostatak funkcije $F(z)$ za $z=0$ je (1), odnosno (2).

Ostatak za pol $z=-1$ je $(-1)^n e^{-1}$.

Ostatak za pol $z=\infty$ funkcije $F(z)$, po definiciji, pretstavlja koeficijent uz $1/t$ u razvoju

$$F(z)=F(1/t)=\sum A_k t^k,$$

uzet sa znakom *minus*, tj. $-A_{-1}$.

Da bismo odredili ostatak za pol $z=\infty$, uzmimo redove:

$$e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k, \quad \frac{1}{1+t}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k.$$

Koeficijent uz t^n je

$$\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2!}-(-1)^n\frac{1}{1!}+(-1)^n.$$

Prema tome, ostatak za pol $z=\infty$ je

$$A_{-1}=-\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n-2)!}+\cdots-(-1)^n\frac{1}{2!}+(-1)^n\frac{1}{1!}-(-1)^n.$$

188. Neka su $f(z)$ i $g(z)$ dve holomorfne funkcije i neka je $z=a$ nula drugog reda funkcije $g(z)$, i uz to $f(a)\neq 0$. Pokazati da je

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\{f(z)/g(z)\}=[6f'(a)g''(a)-2f(a)g'''(a)]/[3g''^2(a)].$$

Ako je $z=a$ prosta nula funkcije $g(z)$ i ako je $f(a)\neq 0$, tada je

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\{f(z)/g^2(z)\}=[f'(a)g'(a)-f(a)g''(a)]/g'^3(a).$$

189. Odrediti ostatak funkcije

$$(z+a)\,e^z/z^4 \quad (a \text{ konstanta})$$

za pol $z=0$.

190. Data je funkcija

$$g(z)=\frac{(c-a)^k(c-b)^\nu f(z)}{(z-a)^k(z-b)^\nu(c-z)} \quad (k,\ \nu \text{ prirodni brojevi}),$$

gde je $f(z)$ holomorfna funkcija i gde su a, b, c tri različite konstante, takve da je $f(a)f(b)f(c)\neq 0$.

Odrediti ostatak funkcije $g(z)$ u tačkama $z=a$ i $z=b$.

191. Odrediti ostatak funkcije

$$\frac{1}{z}\left\{1+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(z+1)^n}\right\}$$

u tački $z=-1$.

Rezultat. $-n$.

192. Odrediti polove funkcije

$$f(z) \equiv (\operatorname{cotg} \pi z)/(z-a)^2 \qquad (a \text{ parametar})$$

kao i ostatke funkcije $f(z)$ za te polove.

193. Odrediti ostatke meromorfne funkcije $f(z) = 1/(\sin z)^2$ za njene polove.

Rešenje. Polovi funkcije $f(z)$ su $z_k = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. To su polovi drugog reda. Da bismo našli ostatak funkcije $f(z)$ za pol $z_k = k\pi$, razvijmo funkciju $f(t+k\pi)$ u *Taylor*-ov red u okolini tačke $t=0$.

Kako je $1/\{\sin(t+k\pi)\}^2 = 1/(\sin t)^2$, posmatrajmo

$$\frac{1}{(\sin t)^2} \equiv \frac{1}{\left(t-\dfrac{t^3}{3!}+\cdots\right)^2} \equiv \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{\left(1-\dfrac{t^2}{3!}+\dfrac{t^4}{5!}-\cdots\right)^2} \equiv \frac{1}{t^2}\left(1+\frac{t^2}{3!}+\cdots\right)^2.$$

Odavde se vidi da su svi ostaci jednaki nuli.

Ostatak se može odrediti i primenom formule

$$\lim_{z\to k\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z-k\pi}{\sin z}\right)^2.$$

194. Uniformna funkcija $f(z)$ ima tačku $z=a$ kao pol reda n. Koji uslov treba da bude ispunjen, pa da integral $\int f(z)\,\mathrm{d}z$ bude uniformna funkcija u okolini tačke $z=a$?

Rešenje. Kad razvijemo funkciju $f(z)$ u *Laurent*-ov red, dobijamo

$$f(z) = [A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots] + \frac{A_{-1}}{z-a} + \cdots + \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} \qquad (A_{-n} \neq 0).$$

Funkcija $\int f(z)\,\mathrm{d}z$ biće uniformna ako je $A_{-1}=0$, tj. ako je ostatak za pol $z=a$ jednak nuli. Taj ostatak ima vrednost

$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}.$$

195. Odrediti singularitete funkcije

$$f(z) \equiv (2z+1)/\{1-\cos(z-a)\} \qquad (a \text{ ma kakva konstanta})$$

i ostatke funkcije $f(z)$ za njene polove.

V. KOMPLEKSAN INTEGRAL I RAČUN OSTATAKA

196. Izračunati krivoliniski integral

$$\oint_{|z|=r} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2} \qquad (|a| \neq r;\ a \text{ i } z \text{ kompleksni brojevi}).$$

197. Izračunati kompleksan integral

$$J = \int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z$$

ako je C:

1° duž čije su krajnje tačke -1 i $+1$, tj. $z=t$ $(-1\leqslant t\leqslant 1)$;

2° polukrug $z=\exp(it)$ $(\pi\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

3° luk parabole $z=t+i(t^2-1)$ $(-1\leqslant t\leqslant +1)$.

Rezultat. 1° 0; 2° πi; 3° $8i/3$.

198. Izračunati kompleksan integral

$$\oint_{|z|=r} \frac{z^3}{z+1} e^{1/z}\,\mathrm{d}z.$$

199. Izračunati krivoliniski integral

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt} z}{(z+a)(z-b)^2}\,\mathrm{d}z \qquad (t,\ a,\ b \text{ parametri}),$$

gde je C krug $|z|=r$ $(r>|a|,\ r>|b|)$.

Proveriti da li je, za slučaj $b\neq -a$, rezultat

$$\frac{e^{bt}(bt+1)}{a+b}-\frac{ae^{-at}+be^{bt}}{(a+b)^2}.$$

Šta će biti ako je $b=-a$?

200. Proveriti rezultat

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}=-\frac{1}{2}\pi i, \qquad (C)\ x^2+y^2-2x-2y=0.$$

201. Izračunati krivoliniski integral

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{z^p(1+z+z^2)} \qquad (p \text{ prirodan broj}).$$

202. Izračunati $\oint_C \{f(z)\}^2\,\mathrm{d}z$, gde je

$f(z)=z(2z-1)/(z-2)$ i (C) krug čija je jednačina $x^2+y^2-4x+3=0$.

Rezultat. $168\,\pi i$.

203. Izračunati krivoliniske integrale:

$$1^\circ \oint_{\left|z-\frac{1}{2}i\right|=1} \frac{e^{2iz}-5z}{z+2i}\,\mathrm{d}z; \qquad 2^\circ \oint_{|z|=r} \frac{z(2z^2-1)}{(z^2+1)\sin(\pi/z^2)}\,\mathrm{d}z;$$

$$3^\circ \oint_{|z|=r} \frac{z}{(e^z-1)^2(e^{-z}-1)^2}\,\mathrm{d}z.$$

204. Proveriti rezultate:

$$1^\circ \quad \oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{cotg} z}{z(z-1)}\, dz = 2\pi i(\operatorname{cotg} 1 - 1);$$

$$2^\circ \quad \oint\limits_{C} \frac{dz}{1+z^4} = \frac{-1+i}{2\sqrt{2}}\pi, \quad (C) \quad x^2 - xy + y^2 + x + y = 0.$$

205. Izračunati integrale:

$$1^\circ \quad \oint\limits_{|z|=1} e^{-z} z^{-n-1}\, dz; \qquad 2^\circ \quad \oint\limits_{|z|=2} e^z (z-1)^{-n}\, dz;$$

$$3^\circ \quad \oint\limits_{|z|=3/2} z\, dz / \{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)\}$$

(n prirodan broj).

Rezultat. 1° $2(-1)^n \pi i / n!$; 2° $2\pi i e/(n-1)!$; 3° $(-1)^{n-1} 2\pi i/(n-1)!$.

Generalizacija. Izračunati krivoliniski integral

$$\oint\limits_{\substack{|z|=r \\ \nu < r < \nu+1}} \frac{f(z)}{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}\, dz,$$

gde je ν prirodan broj i $f(z)$ uniformna funkcija koja nema singulariteta u krugu

$$|z| = r \qquad (\nu < r < \nu + 1).$$

Mogle bi se navesti i druge generalizacije, ali se to prepušta čitaocu.

206. Izračunati krivoliniski integral

$$\int\limits_{C} \frac{dz}{2 - \cos z},$$

gde je C segment prave koji spaja tačke $i \log 3$ i $\frac{1}{2} i \log 2$.

Uputstvo. Staviti $\exp(iz) = t$.

207. Izračunati $\oint\limits_{|z|=n} \operatorname{tg} \pi z\, dz \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Rezultat. $-4ni$.

208. Izračunati krivoliniski integral $\oint\limits_{|z|=r} dz / \operatorname{sh} z$, gde pozitivan broj r nije oblika $N\pi$ (N prirodan broj).

209. Tačka z opisuje krug (C) poluprečnika r sa centrom u tački $z = 1$. Odrediti sliku ovog kruga pri preslikavanju funkcijom $f(z) = (3+z)/(1-z)$ i ispitati kako varira ova slika kad r varira.

Ispitati da li integral $\oint\limits_{C} f(z)\, dz$ zavisi od r.

Rezultat. Vrednost integrala je $-8\pi i$.

210. Izračunati krivoliniski integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{1+z+z^2+z^3}\,\mathrm{d}z.$$

211. Izračunati krivoliniski integral

$$I=\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)^n} \qquad (n \text{ prirodan broj})$$

u slučajevima:

$$1^\circ \quad |a|<|b|<1; \qquad 2^\circ \quad |a|<1<|b|; \qquad 3^\circ \quad 1<|a|<|b|.$$

Rezultat.

$$1^\circ \quad I=0; \qquad 2^\circ \quad I=(-1)^{n-1}\frac{2\pi i(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!\,(a-b)^{2n-1}}; \qquad 3^\circ \quad I=0.$$

Generalizacija. Ako je $r \neq a$ i $r \neq b$, izračunati dati integral duž kruga $|z|=r$.

212. Izračunati krivoliniski integral

$$J=\oint_{|z|=r} P(z)\left\{\exp\frac{1}{z}+\exp\frac{1}{z-1}+\cdots+\exp\frac{1}{z-k}\right\}\mathrm{d}z,$$

gde je

$$P(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots+a_k z^k,$$

i gde je $r=\text{const} \neq N(=1, 2, \ldots, k)$.

Rešenje. 1° Ako je $0<r<1$, tada se u konturi nalazi samo jedan singularitet funkcije

$$f(z)=P(z)\sum_{\nu=0}^{k}\exp\frac{1}{z-\nu},$$

i to je esencijalni singularitet $z=0$.

Ostatak funkcije $f(z)$ za $z=0$ je koeficijent uz $1/z$ u razvoju

$$(a_0+a_1 z+\cdots+a_k z^k)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

i njegova vrednost je

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\,\{f(z)\}=a_0+\frac{a_1}{2!}+\cdots+\frac{a_k}{(k+1)!}.$$

Prema tome je

$$\oint_{|z|=r}\left\{P(z)\sum_{\nu=0}^{k}\exp\frac{1}{x-\nu}\right\}\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{\nu=0}^{k}\frac{a_\nu}{(\nu+1)!} \qquad (0<r<1).$$

2° Integral J može se napisati u obliku

$$J=\sum_{\nu=0}^{k}J_\nu, \qquad J_\nu=\oint_{|z-\nu|=\rho} P(z)\exp\frac{1}{z-\nu}\,\mathrm{d}z \qquad (0<\rho<1).$$

Integral J_ν ima vrednost

$$J_\nu=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\nu}\left\{P(z)\exp\frac{1}{z-\nu}\right\}.$$

Da bismo odredili ostatak, stavimo $z-\nu=t$ u $P(z)\exp\dfrac{1}{z-\nu}$, pa dobijamo

$$e^{1/t}P(t+\nu)=\left\{P(\nu)+\frac{P'(\nu)}{1!}t+\frac{P''(\nu)}{2!}t^2+\cdots+\frac{P^{(k)}(\nu)}{k!}t^k\right\}\times\left\{1+\frac{1}{1!}\,\frac{1}{t}+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{t^2}+\cdots\right\}.$$

Koeficijent uz $1/t$ je

$$P(\nu)+\frac{1}{1!}\,\frac{1}{2!}P'(\nu)+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{3!}P''(\nu)+\cdots+\frac{1}{k!}\,\frac{1}{(k+1)!}P^{(k)}(\nu).$$

Iz ovog sleduje

$$J_\nu=2\pi i\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{s!}\,\frac{1}{(s+1)!}P^{(s)}(\nu).$$

Ako je $\nu<r<\nu+1$, tada je

$$J=2\pi i\sum_{p=0}^{\nu}\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{s!}\,\frac{1}{(s+1)!}P^{(s)}(p).$$

Ako je $r>k$, tada je

$$J=2\pi i\sum_{p=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{s!}\,\frac{1}{(s+1)!}P^{(s)}(p).$$

Generalizacija. Izračunati integral

$$\oint\limits_{|z|=r}\left(\sum_{\nu=0}^{m}a_\nu z^{m-\nu}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{k}b_\nu\exp\frac{1}{z-\nu}\right)dz,$$

gde je r pozitivna konstanta $\neq 1,2,\ldots,k$.

213. Izračunati krivoliniski integral

(1) $$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}z^{n-1}|f(z)|^2\,dz,$$

gde je

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n.$$

Rešenje. Izračunajmo prethodno sledeći integral

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}z^p\,\bar z^q\,dz.$$

Posle smene $z=re^{i\theta}$ taj integral postaje

(2) $$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}z^p\,\bar z^q\,dz=\frac{r^{p+q+1}}{2\pi i}\int_0^{2\pi}e^{(p+1-q)i\theta}i\,d\theta=r^{p+q+1}\cdot\delta_q^{p+1},$$

gde je δ_q^p *Kronecker*-ov simbol.

Integral (1), na osnovu (2), postaje

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}z^{n-1}|f(z)|^2\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}z^{n-1}\left(\sum_{p=0}^{n}a_p z^p\right)\left(\sum_{q=0}^{n}\bar a_q\,\bar z^q\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}\left(\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n}a_p\bar a_q\,z^{n+p-1}\bar z^q\right)dz$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} \left\{ a_p \overline{a_q} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} z^{n+p-1} \overline{z}^q \, dz \right\}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} \left\{ a_p \overline{a_q} \, r^{n+p+q} \delta_q^{n+p} \right\}$$

$$= a_0 \overline{a}_n r^{2n}.$$

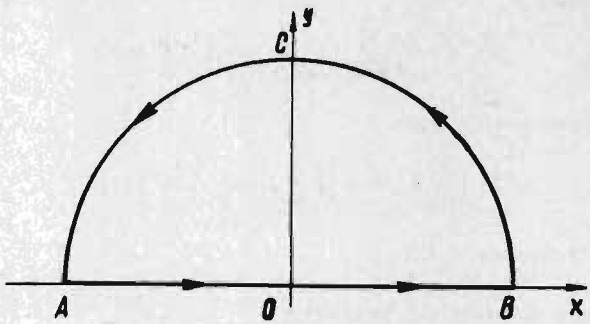
214. Pomoću računa ostataka izračunati integral

$$J(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+a^2)^2} \qquad (a>0).$$

Rešenje. Posmatrajmo krivoliniski integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z^4+1)(z^2+a^2)^2}$$

duž konture Γ naznačene na slici.



Poluprečnik kruga r treba uzeti dovoljno velik da u ovoj konturi budu polovi

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \qquad z_3 = ia,$$

odnosno poluprečnik kruga r treba da je veći od $\max(1, a)$.

Prema teoremi o ostacima je

$$(1) \qquad \int_{-r}^{+r} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+a^2)^2} + \int_0^{\pi} \frac{ire^{\theta i} d\theta}{(r^4 e^{4\theta i}+1)(r^2 e^{2\theta i}+a^2)^2}$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{3} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left\{ \frac{1}{(z^4+1)(z^2+a^2)^2} \right\}.$$

Kako je

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{ire^{\theta i} d\theta}{(r^4 e^{4\theta i}+1)(r^2 e^{2\theta i}+a^2)^2} \right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{r \, d\theta}{|r^4 e^{4\theta i}+1| \, |r^2 e^{2\theta i}+a^2|^2},$$

posle primene formule

$$\frac{1}{|z_1+z_2|} \leqslant \frac{1}{||z_1|-|z_2||},$$

biće

$$\int_0^{\pi} \frac{r \, d\theta}{|r^4 e^{4\theta i}+1| \, |r^2 e^{2\theta i}+a^2|^2} \leqslant \frac{\pi r}{(r^4-1)(r^2-a^2)^2} \to 0 \qquad (r \to \infty).$$

Prema tome, ako $r\to\infty$, formula (1) postaje

$$J(a)=2\pi i\sum_{k=1}^{3}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left\{\frac{1}{(z^4+1)(z^2+a^2)^2}\right\}.$$

Ostaci su:

$$\frac{z_2}{-4i(i+a^2)^2},\quad \frac{z_1}{4i(-i+a^2)^2},\quad -\frac{1}{4a^2(1+a^4)}\left(\frac{4ia^3}{1+a^4}-\frac{1}{ia}\right),$$

se, na kraju, dobija

$$J(a)=\frac{5a^4+1+a^3\sqrt{2}(a^4-2a^2-1)}{2a^3(1+a^4)^2}\pi.$$

Primedba. Kolika je vrednost integrala $J(a)$ kada je $a<0$?

215. Primenom računa ostataka izračunati integral

$$\int_0^\infty \frac{x^3+5x^2+4x+45}{(x^2+4)(x^2+9)^2}\,dx.$$

216. Izračunati integral

$$I=\int_0^\infty \frac{x^6}{x^8+1}\,dx.$$

Rešenje. Posmatrajmo krivoliniski integral

$$\oint_C \frac{z^6}{z^8+1}\,dz,$$

gde je kontura C sastavljena od otsečka x-ose od $-r$ do $+r$ i od polukruga

$$|z|=r\quad (y\geqslant 0).$$

Modul integrala duž polukruga ima vrednost $(z=re^{i\theta})$

$$\left|i\int_0^\pi \frac{r^7e^{7\theta i}}{r^8e^{8\theta i}+1}\,d\theta\right|\leqslant\int_0^\pi\frac{r^7}{r^8-1}\,d\theta=\frac{\pi r^7}{r^8-1}\qquad (r>1).$$

Prema tome, dobijamo

$$\oint_C \frac{z^6}{z^8+1}\,dz=\int_{-r}^{+r}\frac{x^6}{x^8+1}\,dx+o(1).$$

Kad $r\to\infty$, poslednja relacija postaje

$$\text{(1)}\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^6}{x^8+1}\,dx=2\pi i\sum\{\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\},$$

gde se sumiranje odnosi na polove koji leže u konturi C.

U konturi C ima četiri pola i oni su definisani formulom

$$z_k=\exp\left(\frac{2k+1}{8}\pi i\right)\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Ovim polovima odgovaraju ostaci

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)=\frac{1}{8}\exp\left(-\frac{2k+1}{8}\pi i\right)$$

i njihov zbir je

$$\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$-\frac{1}{8}i\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}\right).$$

Kako je

$$\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}=0 \quad \text{i} \quad \cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}=0,$$

zbir ostataka je

$$-\frac{1}{8}i\left[\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}\right)+\left(\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}\right)\right],$$

tj.

$$-\frac{1}{4}i\left(\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{1}{4}i\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cdot$$

Na osnovu ovog relacija (1) postaje

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^6}{x^8+1}\,dx=\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}},$$

te je

$$I=\frac{\pi}{4}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}.$$

Generalizacija. Izračunati integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{x^{2n}+1}\,dx \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

217. Dokazati formulu

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}=\frac{2\pi\operatorname{sgn} c}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \qquad (a,\ b,\ c \text{ realni brojevi};\ c^2-a^2-b^2>0).$$

Rešenje. 1° Ako se stavi $e^{ix}=z$, dati integral dobija oblik

$$J=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{P(z)},$$

gde je

$$P(z)=(a-ib)z^2+2cz+(a+ib).$$

Nule polinoma $P(z)$ su:

$$z_{1,2}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a-ib}.$$

Kako je $z_1 z_2=(a+ib)/(a-ib)$, biće $|z_1|\,|z_2|=1$, što znači da se samo jedna od nula z_1 i z_2 nalazi u krugu $|z|=1$.

Prema *Cauchy*-evoj teoremi je

$$J=4\pi \operatorname*{Res}_{z=z_k}\{1/P(z)\},$$

gde je z_k ona nula polinoma $P(z)$ koja se nalazi u krugu $|z|=1$.

2° Neka je $|z_1|<1$, tj.

(1) $$\left|\frac{-c+\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a-ib}\right|<1.$$

Ako je $c>0$, tada poslednja relacija postaje

$$c-\sqrt{c^2-a^2-b^2}<\sqrt{a^2+b^2}.$$

Zbog $c^2>a^2+b^2$ je $c-\sqrt{c^2-a^2-b^2}>0$, te se, posle dizanja na kvadrat, dobija

$$(c^2-a^2-b^2)-c\sqrt{c^2-a^2-b^2}<0.$$

Odavde sleduje

$$\sqrt{c^2-a^2-b^2}<c, \quad \text{tj.} \quad -a^2-b^2<0.$$

Ova nejednakost uvek je ispunjena ako je $c>0$.

Ako je $c<0$, tada je

$$-c+\sqrt{c^2-a^2-b^2}<a^2+b^2.$$

Budući da su izrazi koji se nalaze na obadve strane poslednje nejednakosti pozitivni, posle dizanja na kvadrat dobija se

$$\sqrt{c^2-a^2-b^2}<c,$$

što je apsurd ako je $c<0$.

Prema tome, ako je pol $z=z_1$ u krugu $|z|=1$, tada je $c>0$. Važi i obrnuto: Ako je $c>0$, tada je pol $z=z_1$ u krugu $|z|=1$.

3° Ako $|z_2|<1$, tada je $c<0$, što se pokazuje kao pod 2°.

4° Kako je

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}\{1/P(z)\}=\frac{1}{a-ib}\,\frac{1}{z_1-z_2},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2}\{1/P(z)\}=\frac{1}{a-ib}\,\frac{1}{z_2-z_1},$$

dobija se formula koju je trebalo dokazati.

Primedba. Do činjenica dobijenih u tačkama 2° i 3° dolazi se jednostavnije ako se dokaže da je

$$|z_1|<|z_2| \qquad (c>0),$$

$$|z_1|>|z_2| \qquad (c<0),$$

što nije teško učiniti.

218. Dokazati formulu

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(a\cos x+b\sin x+c)^2}=\frac{2\pi|c|}{(c^2-a^2-b^2)^{3/2}} \qquad (a,\ b,\ c \text{ realni; } c^2-a^2-b^2>0).$$

219. Izračunati integral

$$J=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Rešenje. Uporedo sa integralom J uočimo integral

$$I=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

i njihovu kombinaciju

(1) $$J+iI=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\,e^{nxi}\cos(\sin x)\,dx.$$

Izraz $e^{\cos x}\cos(\sin x)$ može se napisati u obliku

$$\frac{1}{2}\{e^{\cos x+i\sin x}+e^{\cos x-i\sin x}\}, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{2}\{\exp(e^{xi})+\exp(e^{-xi})\}.$$

Ako se stavi $e^{xi}=z$, kompleksni integral (1) postaje

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} z^{n-1}(e^z+e^{1/z})\,dz.$$

Kako je $n\geqslant 1$, integral (2) ima vrednost

$$\pi \operatorname*{Res}_{z=0}\{z^{n-1}e^{1/z}\}.$$

Budući da je

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+\cdots,$$

ostatak je $1/n!$.

Prema tome $J=\pi/n!$ i $I=0$ $\quad (n=1,2,3,\ldots)$.

Primedba. Izračunati integral J za $n=0$. Takođe izračunati integral

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\sin(\sin x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Bez teškoće se izračunavaju i nešto opštiji integrali:

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x)\cos nx\,dx, \qquad \int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\sin(a\sin x)\sin nx\,dx \qquad (a=\text{const}).$$

220. Dokazati formulu

$$J=\int_0^{\pi}(2\cos t)^{n+k}\cos(n-k)t\,dt=\binom{n+k}{k}\pi \qquad (n,\ k \text{ prirodni brojevi}).$$

Polazeći od navedene formule, izvesti

$$I=\int_{-1}^{+1}\frac{x^{2n}}{(1-x^2)^{1/2}}\,dx=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

Rešenje. Ako se stavi $\exp(2it)=z$, izraz

$$J+i\int_0^{\pi}(2\cos t)^{n+k}\sin(n-k)t\,dt, \quad \text{tj.} \quad \int_0^{\pi}(2\cos t)^{n+k}\{\exp(n-k)ti\}\,dt,$$

postaje

$$J^*=\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}(z+1)^{n+k}\,dz/z^{k+1}.$$

Ostatak za pol $z=0$ reda $k+1$ funkcije $(z+1)^{n+k}/z^{k+1}$ je

$$\binom{n+k}{k} \quad \text{odnosno} \quad \binom{n+k}{n}.$$

Prema tome je $J^*=\binom{n+k}{k}\pi$ i $J=\binom{n+k}{k}\pi$.

Primedba I. Da li poslednja formula važi ako je $n=0$ i $k\neq 0$, ili $k=0$ i $n\neq 0$, ili $n=0$ i $k=0$?

Primedba II. Izračunati J polazeći od

$$2J=\int_{-\pi}^{+\pi}(2\cos t)^{n+k}\cos(n-k)\,t\,\mathrm{d}t$$

i stavljajući $\exp(it)=z$.

221. Dokazati formulu

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(2\cos\frac{1}{2}t\right)^n\cos\left(\frac{1}{2}n-k\right)t\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\binom{n}{k} & (n\geqslant k)\\ 0 & (n<k)\end{cases}\qquad (n,\ k \text{ prirodni brojevi}).$$

Uputstvo. Ako se pođe od identiteta

$$\left(2\cos\frac{1}{2}t\right)^n=\left(e^{\frac{1}{2}it}+e^{-\frac{1}{2}it}\right)^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\left(e^{\frac{1}{2}it}\right)^{n-\nu}\left(e^{-\frac{1}{2}it}\right)^{\nu}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}e^{i\left(\frac{1}{2}n-\nu\right)t},$$

dobija se

$$\left(2\cos\frac{1}{2}t\right)^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\cos\left(\frac{1}{2}n-\nu\right)t.$$

222. Izračunati integral

$$\int_0^{2\pi}\frac{(1+2\cos t)^n\cos nt}{1-a-2a\cos t}\,\mathrm{d}t\qquad\left(-1<a<\frac{1}{3};\ n \text{ nula ili prirodan broj}\right).$$

Rešenje. Posmatrajmo integral

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{(1+2\cos t)^n e^{nti}}{1-a-2a\cos t}\,\mathrm{d}t$$

i stavimo $e^{it}=z$. Tada se dobija

$$J=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+z+1)^n}{(1-a)z-a(z^2+1)}\,\mathrm{d}z.$$

Racionalna funkcija $(z^2+z+1)^n/[(1-a)z-a(z^2+1)]$ ima polove:

$$z_{1,2}=\frac{1}{2a}\left[1-a\pm\sqrt{(1-a)^2-4a^2}\right]\qquad(a\neq 0),$$

$$=0\qquad(a=0).$$

Kako je

$$(1-a)^2-4a^2\equiv 3(1+a)\left(\frac{1}{3}-a\right),$$

i kako je, prema pretpostavci, $-1<a<1/3$, navedeni polovi su realni.

Budući da je $z_1 z_2=1$, zaključuje se da se jedan od polova nalazi u krugu $|z|=1$, a drugi van ovog kruga. Pol

$$z_2=\frac{1}{2a}\left[1-a-\sqrt{(1-a)^2-4a^2}\right]$$

leži u krugu $|z|=1$.

Ostatak za pol $z=z_2$ je

$$\left(\frac{1-a-\sqrt{1-2a-3a^2}}{2a^2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{1-2a-3a^2}} \quad (a\neq 0).$$

Za $-1<a<1/3$ ostatak je realan, pa se primenom *Cauchy*-eve teoreme na integral J dobija

$$\text{(1)} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos t)^n \cos nt}{1-a-2a\cos t}\, dt = \frac{2\pi}{\sqrt{1-2a-3a^2}} \left(\frac{1-a-\sqrt{1-2a-3a^2}}{2a^2}\right)^n$$

$$\left(a\neq 0;\ -1<a<\frac{1}{3}\right).$$

Za $a=0$ integral J postaje

$$\frac{1}{i} \oint_{|z|=1} (z^2+z+1)^n \frac{dz}{z}.$$

Vrednost ovog integrala je 2π, pa je stoga

$$\text{(2)} \qquad \int_0^{2\pi} (1+2\cos t)^n \cos nt\, dt = 2\pi.$$

Primedba. Ako se pođe od (1) i pusti da $a\to 0$, dobija se formula (2). — Proveriti ovaj rezultat.

223. Pomoću računa ostataka izračunati

$$J\equiv \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx\, dx \qquad (n \text{ nula ili prirodan broj}).$$

Rešenje. Kako je funkcija $\cos^n x \cos nx$ parna, integral J može se izraziti u obliku

$$J\equiv \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^n x \cos nx\, dx.$$

Smenom $x+\frac{1}{2}\pi=t$ integral J postaje

$$\text{(1)} \qquad J\equiv \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^n t \left(\cos nt \cos \frac{1}{2} n\pi + \sin nt \sin \frac{1}{2} n\pi\right) dt.$$

Razlikovaćemo slučajeve: 1° $n=2k$ i 2° $n=2k+1$ (k prirodan broj ili nula).

1° Budući da je $\cos k\pi=(-1)^k$ i $\sin k\pi=0$, integral J postaje

$$J_{2k}\equiv \frac{(-1)^k}{2} \int_0^{\pi} \sin^{2k} t \cos 2kt\, dt.$$

Kako je $\sin^{2k} t \cos 2kt$ parna funkcija po t, poslednji integral može se napisati u obliku

$$J_{2k}\equiv \frac{(-1)^k}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^{2k} t \cos 2kt\, dt.$$

Uporedo sa ovim integralom uočimo integral

$$I_{2k}\equiv \frac{(-1)^k}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^{2k} t \sin 2kt\, dt$$

i kombinaciju

$$J_{2k}+iI_{2k}=\frac{(-1)^k}{4}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^{2k}t\; e^{2kti}\,dt.$$

Ako se stavi $e^{it}=z$, poslednji integral svodi se na

$$J_{2k}+iI_{2k}=-i\cdot 2^{-2k-2}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^{2k}}{z}\,dz.$$

Ostatak za pol $z=0$ je 1, pa je stoga

$$J_{2k}+iI_{2k}=2^{-2k-1}\pi.$$

Odavde se dobija

$$J_{2k}=\pi/2^{2k+1},\qquad I_{2k}=0.$$

2° Za $n=2k+1$, integral J, definisan relacijom (1), postaje

$$J_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{2}\int_0^{\pi}\sin^{2k+1}t\,\sin(2k+1)t\,dt,$$

jer je $\cos\frac{1}{2}(2k+1)\pi=0$ i $\sin\frac{1}{2}(2k+1)\pi=(-1)^k$.

Dalje je

$$J_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{4}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^{2k+1}t\,\sin(2k+1)t\,dt,$$

budući da je integrand parna funkcija po t.

Ako se formira kombinacija

$$I_{2k+1}+iJ_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{4}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^{2k+1}t\; e^{(2k+1)ti}\,dt,$$

gde je

$$I_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{4}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^{2k+1}t\,\cos(2k+1)t\,dt,$$

tada se, posle smene $\exp(it)=z$, dobija

$$I_{2k+1}+iJ_{2k+1}=-2^{-2k-3}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}(z^2-1)^{2k+1}\,dz.$$

Ostatak funkcije $(z^2-1)^{2k+1}/z$ za pol $z=0$ je $(-1)^{2k+1}$. Na osnovu *Cauchy*-ove teoreme je

$$I_{2k+1}+iJ_{2k+1}=\pi\, i\cdot 2^{-2k-2}.$$

$$\therefore\quad I_{2k+1}=0,\qquad J_{2k+1}=\pi/2^{2k+2}.$$

Prema tome, dati integral J ima vrednost $\pi/2^{n+1}$ (n nula ili prirodan broj).

Generalizacija. Navedenim postupkom izračunati integral

$$J_{nr}=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\cos rx\,dx\qquad (n, r\in\{0,1,2,\ldots\}).$$

224. Izračunati integral

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{(1-2a\cos x+a^2)(1-2b\cos x+b^2)}\,dx\qquad (a\neq b;\; ab\neq 1).$$

Rešenje. Smenom $e^{ix}=z$ integral

$$J\equiv\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2 x\,dx/\{(1-2a\cos x+a^2)(1-2b\cos x+b^2)\}$$

svodi se na kompleksan integral

$$-\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z(az-1)(z-a)(bz-1)(z-b)}\,dz.$$

Funkcija $f(z)\equiv(z^2-1)^2/\{z(az-1)(z-a)(bz-1)(z-b)\}$, ako je $ab\neq 0$, $ab\neq 1$, $a\neq b$, ima pet polova prvog reda: 0, a, $1/a$, b, $1/b$.

Ostaci funkcije $f(z)$ za ove polove imaju sledeće vrednosti:

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\{f(z)\}=1/(ab);$$

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\{f(z)\}=(a^2-1)/[a(ab-1)(a-b)];$$

$$\operatorname*{Res}_{z=b}\{f(z)\}=(b^2-1)/[b(ab-1)(b-a)];$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1/a}\{f(z)\}=(1-a^2)/[a(b-a)(1-ab)];$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1/b}\{f(z)\}=(1-b^2)/[b(a-b)(1-ab)].$$

Primenom *Cauchy*-ove teoreme o ostacima, ako je $ab\neq 0$, $ab\neq 1$, $a\neq b$, dobija se:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{(1-2a\cos x+a^2)(1-2b\cos x+b^2)}\,dx\equiv\frac{\pi}{2(1-ab)}\qquad(|a|<1,\ |b|<1);$$

$$\equiv\frac{\pi}{2a(a-b)}\qquad(|a|>1,\ |b|<1);$$

$$\equiv\frac{\pi}{2b(b-a)}\qquad(|a|<1,\ |b|>1);$$

$$\equiv\frac{\pi}{2ab(ab-1)}\qquad(|a|>1,\ |b|>1).$$

Treba još proučiti slučajeve koji su isključeni iz posmatranja.

225. Izračunati integral

$$I_n\equiv\int_0^{\pi}\sin^{2n}x\,dx\qquad(n \text{ nula ili prirodan broj}).$$

Rešenje. I. Ako se pođe od formule

$$\sin^{2n}x\equiv\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\left\{\cos 2nx-\binom{2n}{1}\cos(2n-2)x+\binom{2n}{2}\cos(2n-4)x+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right\}.$$

neposredno se dobija

$$I_n=\frac{\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

II. Ovaj se integral može izračunati pomoću računa ostataka. U tom cilju posmatrajmo integral

$$J_n+2iI_n=\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^{2n-1}x(\cos x+i\sin x)\,dx=\int_{-\pi}^{+\pi}e^{ix}\sin^{2n-1}x\,dx.$$

Ako se stavi $e^{ix}=z$, dobija se

$$J_n+2i\,I_n=\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\oint\limits_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^{2n-1}}{z^{2n-1}}\,dz.$$

Koeficijent uz $1/z$ u izrazu $(z^2-1)^{2n-1}/z^{2n-1}$ ima oblik $(-1)^n\binom{2n-1}{n}$, jer je

$$(z^2-1)^{2n-1}=z^{4n-2}-\binom{2n-1}{1}z^{4n-4}+\cdots+(-1)^n\binom{2n-1}{n}z^{2n-2}+\cdots+(-1)^{2n-1}.$$

Prema tome je

$$J_n+2i\,I_n=\frac{i\pi}{2^{2n-2}}\binom{2n-1}{n}.$$

Odavde izlazi

$$J_n=0,\quad I_n=\frac{\pi}{2^{2n-1}}\binom{2n-1}{n}.$$

Dobili smo, dakle, isti rezultat kao ranije, jer je

$$2\binom{2n-1}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

III. Integral I_n možemo izračunati i na sledeći način. Smenom $e^{ix}=z$, integral $2I_n$ postaje

$$2I_n=\frac{(-1)^n}{2^{2n}i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}\,dz.$$

Ostatak za pol $z=0$ je $(-1)^n\binom{2n}{n}$, jer je

$$(z^2-1)^{2n}=z^{4n}-\binom{2n}{1}z^{4n-2}+\cdots+(-1)^n\binom{2n}{n}z^{2n}+\cdots+1.$$

Prema tome $I_n=\frac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$. To je isti rezultat koji smo ranije dobili, samo sada u drugoj formi.

IV. Formula

$$(1)\qquad I_n=\int_0^{\pi}\sin^{2n}x\,dx=\frac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\qquad \{n(\geqslant 0)\text{ ceo broj}\}$$

može se dokazati matematičkom indukcijom.

Pretpostavimo da je formula (1) tačna za neko n, pa posmatrajmo integral

$$\begin{aligned}I_{n+1}&=\int_0^{\pi}\sin^{2n+2}x\,dx=\int_0^{\pi}\sin^{2n+1}x\,(\sin x\,dx)\\&=-\sin^{2n+1}x\cos x\Big|_0^{\pi}+(2n+1)\int_0^{\pi}\sin^{2n}x\cos^2x\,dx\\&=(2n+1)\,I_n-(2n+1)\,I_{n+1}.\end{aligned}$$

Odavde se dobija

$$I_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}\,I_n.$$

Na osnovu (1) biće

$$I_{n+1}=\frac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{\pi}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}.$$

Dakle, formula (1) je tačna za $n+1$ ako je tačna za n.

Formula (1) je tačna za $n=0$.

Ovim je završen induktivni dokaz.

226. Izračunati integral

$$I_{np} = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{(\cos x + \operatorname{ch} a)^p} \, dx$$

(a realna konstanta $\neq 0$; n i p prirodni brojevi).

Rezultat. $I_{n1} = (-1)^n \dfrac{\pi e^{-na}}{\operatorname{sh} a}$; $\quad I_{n2} = (-1)^n \dfrac{\pi e^{-na}}{\operatorname{sh}^3 a} (n \operatorname{sh} a + \operatorname{ch} a)$;

$$I_{n3} = (-1)^n \frac{\pi e^{-na}}{2 \operatorname{sh}^5 a} [(n^2 - 1) \operatorname{sh}^2 a + 3 \operatorname{ch}^2 a + 3n \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a].$$

227. Proveriti rezultat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m} - x^{2n}}{1 - x^{2p}} \, dx = \frac{\pi}{p} \left\{ \operatorname{cotg} \frac{2m+1}{2p} \pi - \operatorname{cotg} \frac{2n+1}{2p} \pi \right\}$$

(m, n, p prirodni brojevi; m, $n < p$).

228. Izračunati integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^m (x^2 + b^2)^n} \qquad (m, n \text{ prirodni brojevi}).$$

229. Kada su m i n prirodni brojevi, dokazati formulu

$$I \equiv \int_0^{\pi} \cos^m x \cos nx \, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2^m} \dbinom{m}{\frac{1}{2}(m+n)} & (m+n \ (m \geqq n) \text{ parno}), \\ 0 & (\text{u ostalim slučajevima}). \end{cases}$$

Rešenje. I. Primetimo najpre da je $2I \equiv \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^m x \cos nx \, dx$ i formirajmo kompleksni integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (\cos^m x \cos nx + i \cos^m x \sin nx) \, dx \qquad \left(J = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^m x \sin nx \, dx \right),$$

odnosno

$$2I + iJ = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{inx} \cos^m x \, dx.$$

Ako stavimo $e^{ix} = z$, dobijamo

$$2I + iJ = \frac{1}{i \cdot 2^m} \oint_{|z|=1} z^{n-m-1} (z^2 + 1)^m \, dz.$$

Ako je $n - m - 1 > -1$, tj. $n - m > 0$, prema *Cauchy*-evoj teoremi o ostacima biće

$$2I + iJ = 0, \quad \text{tj.} \quad I = 0, \quad J = 0,$$

Ako je $n - m - 1 \leqslant -1$, tj. $n - m \leqslant 0$, tada je tačka $z = 0$ pol reda $m - n + 1$ funkcije

$$(z^2 + 1)^m / z^{m-n+1}.$$

Ako je $m-n$ parno, tada polinom $(z^2+1)^m$ ima oblik

$$z^{2m}+\binom{m}{1}z^{2m-2}+\binom{m}{2}z^{2m-4}+\cdots+\binom{m}{\frac{1}{2}(m+n)}z^{2m-(m+n)}+\cdots+\binom{m}{m-1}z^2+1.$$

Prema tome, kada je $m-n$ parno, ostatak za pol $z=0$ ima vrednost

$$\binom{m}{\frac{1}{2}(m+n)},$$

te je

$$2I+iJ=\frac{\pi}{2^{m-1}}\binom{m}{\frac{1}{2}(m+n)}.$$

Odavde sleduje

$$I=\frac{\pi}{2^m}\binom{m}{\frac{1}{2}(m+n)} \quad \text{i} \quad J=0.$$

Za $m=n$ dobija se $I=\pi/2^n$.

II. Integral I možemo takođe izračunati, polazeći od formule

$$\cos^m x\equiv\frac{1}{2^{m-1}}\left\{\cos mx+\binom{m}{1}\cos(m-2)x+\binom{m}{2}\cos(m-4)x+\cdots\right\},$$

odnosno

$$\cos^m x\equiv\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{k\leqslant\frac{1}{2}m}\binom{m}{k}\cos(m-2k)x.$$

Iz ove formule se vidi da se $\cos^m x\cos nx$ može pretstaviti kao linearna kompozicija izraza oblika $\cos px\cos qx$ (p, q prirodni brojevi; jedan od ovih brojeva može biti jednak i nuli).

Ako se zatim svaki od ovih izraza napiše u obliku

$$\cos px\cos qx\equiv\frac{1}{2}[\cos(p-q)x+\cos(p+q)x]$$

i ima na umu da je

$$\int_0^\pi\cos rx\,\mathrm{d}x=0 \qquad (r\neq0); \qquad \int_0^\pi\cos rx\,\mathrm{d}x=\pi \qquad (r=0),$$

zaključuje se da je od interesa samo onaj član $\cos rx$ gde je $r=0$.

Uočimo izraz

(1) $$\binom{m}{s}\cos(m-2s)x\cos nx\equiv\frac{1}{2}\binom{m}{s}[\cos(m-n-2s)x+\cos(m+n-2s)x].$$

Ako je $m-n-2s=0$, tj. $s=(m-n)/2$, izraz (1) postaje

$$\frac{1}{2}\binom{m}{\frac{1}{2}(m-n)}(1+\cos 2nx).$$

Izraz $\binom{m}{\frac{1}{2}(m-n)}$ ima smisla ako je $m\geqslant n$ i ako su m i n iste parnosti.

Međutim, ako bi se uzelo, polazeći opet od (1), da je $m+n-2s=0$, dobilo bi se

$$s=\frac{1}{2}(m+n)>\frac{1}{2}m,$$

što je nemogućno, budući da s zadovoljava uslov $0\leqslant s\leqslant\frac{1}{2}m$.

Ako je $m<n$, integral I je jednak nuli bez obzira na to da li su m i n iste ili različite parnosti. Ovaj integral jednak je nuli i kada je $m\geqslant n$, ali su m i n različite parnosti.

Na osnovu izloženog, ako je $m-n$ $(m\geqslant n)$ parno, dobijamo

$$I=\frac{\pi}{2^m}\binom{m}{\frac{1}{2}(m-n)}=\frac{\pi}{2^m}\binom{m}{\frac{1}{2}(m+n)}.$$

Bolje je upotrebiti $\binom{m}{\frac{1}{2}(m-n)}$ nego $\binom{m}{\frac{1}{2}(m+n)}$, jer u prvom slučaju izračunavanje iziskuje manji broj operacija.

230. Izračunati integrale:

$$\int_0^\pi \frac{\cos mx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx, \quad \int_0^\pi \frac{\sin x\sin mx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{1-a\cos x}\,dx,$$

$$\int_0^\pi (\sin mx)\log(1-2a\cos x+a^2)\,dx, \quad \int_0^\pi (\cos mx)\log(1-2a\cos x+a^2)\,dx$$

(m prirodan broj, a realan broj).

Rešenje. 2° Pođimo od kompleksnog integrala

$$J_1+iJ_2\equiv\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin x\cos mx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx+i\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin x\sin mx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx\equiv\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin x\, e^{imx}}{1-2a\cos x+a^2}\,dx.$$

Ako se stavi $e^{ix}=z$, poslednji integral postaje

$$J_1+iJ_2\equiv\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)\,z^{m-1}}{(az-1)(z-a)}\,dz.$$

Vrednost ovog krivoliniskog integrala je

$$\pi i\operatorname*{Res}_{z=a}\{f(z)\} \qquad (|a|<1),$$

ili

$$\pi i\operatorname*{Res}_{z=a^{-1}}\{f(z)\} \qquad (|a|>1),$$

gde je $f(z)=(z^2-1)\,z^{m-1}/\{(az-1)(z-a)\}$.

Kako je

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\{f(z)\}=a^{m-1}, \quad \operatorname*{Res}_{z=a^{-1}}\{f(z)\}=a^{-m-1},$$

dobijamo

$$\int_0^\pi\frac{\sin x\sin mx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{2}\pi a^{m-1} & (|a|<1),\\[4pt] \frac{1}{2}\pi a^{-m-1} & (|a|>1)\end{cases}$$

$(m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

231. Pomoću računa ostataka izračunati integral

$$J \equiv \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \cos 2rx \, dx \qquad (n, \; r=0, \; 1, \; 2, \ldots).$$

Rešenje. Najpre je

$$J \equiv \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^{2n} x \cos 2rx \, dx,$$

$$J+iI \equiv \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^{2n} x \{\exp 2rxi\} \, dx \qquad \left(I \equiv \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^{2n} x \sin 2rx \, dx \right).$$

Ako se stavi $e^{2ix}=z$, dobija se

$$J+iI \equiv \frac{-i}{2^{2n+2}} \oint_{|z|=1} \frac{(z+1)^{2n}}{z^{n-r+1}} \, dz.$$

Kada je $n-r \geqslant 0$, ostatak funkcije $(z+1)^{2n}/z^{n-r+1}$ za pol $z=0$ je $\binom{2n}{n-r}$. Za taj slučaj dobijamo

$$J \equiv \pi \binom{2n}{n-r} \Big/ 2^{2n+1} \equiv \pi \binom{2n}{n+r} \Big/ 2^{2n+1}.$$

Ako je $n-r<0$, tada je $J=0$.

Prema tome, imamo rezultat

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \cos 2rx \, dx \equiv \begin{cases} \pi \binom{2n}{n-r} \Big/ 2^{2n+1} & (n \geqslant r), \\ 0 & (n \leqslant r-1). \end{cases}$$

Generalizacija. Izračunati integral

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos px \, dx \qquad (m, \; p=0, 1, 2, \ldots; \quad m+p \text{ parno}).$$

232. Ako su a i b realni, tada je

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a-ib\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (a>0),$$

$$= -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (a<0).$$

Rešenje. Stavi li se $e^{it}=z$, dati integral postaje

$$\oint_{|z|=1} \frac{2\,dz}{bz^2+2aiz+b}.$$

Nule funkcije $bz^2+2aiz+b$ su

$$z_{1,2}=i(-a \pm \sqrt{a^2+b^2})/b.$$

Ako je $a>0$, tada se jedino nula z_1 nalazi u krugu $|z|=1$. Ako je $a<0$, tada se jedino nula z_2 nalazi u ovom krugu.

Primenom *Cauchy*-eve teoreme o ostacima neposredno se dobijaju napred navedene formule. Interesantno je da je vrednost integrala realna, ma da je podintegralna funkcija imaginarna.

Primedba I. Izračunati ovaj integral bez primene računa ostataka.

Primedba II. Izračunati integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+ib\cos t}$ $(a, \; b$ realni).

233. Integraleći $e^{iz}/(z-ia)$ duž podesno izabrane konture, ispitati da li je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\cos x + x\sin x}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi e^{-a} \qquad (a>0).$$

234. Pomoću računa ostataka izračunati određeni integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)x}{(1-2a\cos x+a^2)^n}\,dx \qquad \{n=1,2,3,\ldots;\ a\,(|a|\neq 1)\ \text{realna konstanta}\}.$$

Rešenje. Uporedo sa ovim integralom posmatrajmo integrale:

$$J_1=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(n-1)x}{(1-2a\cos x+a^2)^n}\,dx, \qquad J_2=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin(n-1)x}{(1-2a\cos x+a^2)^n}\,dx,$$

kao i kompleksan integral

$$J_1-iJ_2=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{-i(n-1)x}}{(1-2a\cos x+a^2)^n}\,dx.$$

Ako stavimo $e^{ix}=z$, dobijamo

$$J_1-iJ_2=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z^{-n}\,dz}{[1-a(z+z^{-1})+a^2]^n}=\frac{1}{i(-a)^n}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-a^{-1})^n}.$$

Ostaci funkcije $f(z)=1/\{(z-a)^n(z-a^{-1})^n\}$ za polove a i $1/a$ imaju vrednosti:

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\{f(z)\}=\left\{\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z-\frac{1}{a}\right)^{-n}\right\}_{z=a}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}(a-a^{-1})^{-2n+1}$$

$$=(-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}\frac{a^{2n-1}}{(a^2-1)^{2n-1}};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1/a}\{f(z)\}=(-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}\frac{a^{2n-1}}{(1-a^2)^{2n-1}}.$$

Prema tome, ako je $|a|<1$, biće

$$J_1-iJ_2=-2\pi\binom{2n-2}{n-1}\frac{a^{n-1}}{(a^2-1)^{2n-1}}.$$

Odavde se dobija

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(n-1)x}{(1-2a\cos x+a^2)^n}\,dx=\binom{2n-2}{n-1}\frac{\pi a^{n-1}}{(1-a^2)^{2n-1}} \qquad (|a|<1).$$

Ako je $|a|>1$, tada je

$$J_1-iJ_2=2\pi\binom{2n-2}{n-1}\frac{a^{n-1}}{(a^2-1)^{2n-1}},$$

te je

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(n-1)x}{(1-2a\cos x+a^2)^n}\,dx=\binom{2n-2}{n-1}\frac{\pi a^{n-1}}{(a^2-1)^{2n-1}}.$$

Rezultat se može sažeti formulom

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)x}{(1-2a\cos x+a^2)^n}\,dx = \binom{2n-2}{n-1}\frac{\pi a^{n-1}}{|1-a^2|^{2n-1}} \qquad (a^2 \neq 1;\ n=1, 2, 3, \ldots).$$

Primedba I. Da se prilikom izračunavanja datog integrala pošlo od kombinacije J_1+iJ_2, a ne od J_1-iJ_2, stvar bi se komplikovala. Zaista, tada je

$$J_1+iJ_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i(n-1)x}}{(1-2a\cos x+a^2)^n}\,dx.$$

Smenom $e^{ix}=z$ dobija se integral

$$J_1+iJ_2 = \frac{1}{i(-a)^n}\oint_{|z|=1} \frac{z^{2n-2}}{(z-a)^n(z-a^{-1})^n}\,dz,$$

koji je teže izračunati nego J_1-iJ_2.

Primedba II. *R. Lučić* je primetio da se navedeni postupak uspešno primenjuje i na izračunavanje integrala oblika

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n-1)x}{(a+b\cos x+c\sin x)^n}\,dx, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n-1)x}{(a+b\cos x+c\sin x)^n}\,dx$$

(a, b, c realne konstante takve da je $|a|+|b|+|c|>0$; $n=1, 2, 3, \ldots$).

Primedba III. Videti sledeći zadatak.

235. Izračunati integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos mx}{(1-2a\cos x+a^2)^n}\,dx \qquad \{a\ (|a| \neq 1) \text{ realna konstanta; } m \text{ i } n \text{ prirodni brojevi}\}.$$

Rešenje. Ako dati integral označimo sa J i uzmemo u obzir da je funkcija

$$\frac{\sin mx}{(1-2a\cos x+a^2)^n}$$

neparna, dobićemo

$$J = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{imx}}{(1-2a\cos x+a^2)^n}\,dx.$$

Posle zamene $e^{ix}=z$ ovaj integral postaje

$$J = \frac{1}{i(-a)^n}\oint_{|z|=1} \frac{z^{m+n-1}}{(z-a)^n\left(z-\frac{1}{a}\right)^n}\,dz \qquad (a \neq 0).$$

Ako podintegralnu funkciju označimo sa $f(z)$, onda pomoću *Cauchy*-eve teoreme dobijamo

(1) $$J = \frac{2\pi}{(-a)^n}\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z),$$

gde je z_0 onaj pol funkcije $f(z)$ koji se nalazi u konturi integracije.

Polazeći od (1), izračunaćemo dati integral na dva različita načina i uporediti rezultate.

I. Neka je $|a|<1$ i $z_0=a$. Na osnovu *Leibniz*-ove formule za izvod proizvoda je

$$J=\frac{2\pi}{(-a)^n}\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{2\pi}{(-a)^n}\left\{\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{z^{m+n-1}}{\left(z-\frac{1}{a}\right)^n}\right]\right\}_{z=a}$$

$$=\frac{2\pi}{(-a)^n(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}\frac{(m+n-1)!}{(m+n-\nu-1)!}\,a^{m+n-\nu-1}\,(-1)^{n-\nu-1}\,\frac{(2n-\nu-2)!}{(n-1)!}\,\frac{1}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^{2n-\nu-1}}$$

$$=\frac{2\pi}{(-a)^n}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n-\nu-1}\binom{m+n-1}{\nu}\binom{2n-\nu-2}{n-1}\frac{a^{m+3n-2\nu-2}}{(a^2-1)^{2n-\nu-1}}.$$

Poslednjem izrazu možemo dati oblik

$$(2)\qquad J=\frac{2\pi a^{m+2n-2}}{(1-a^2)^{2n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{m+n-1}{\nu}\binom{2n-\nu-2}{n-1}\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)^{\nu}\qquad(|a|<1).$$

Potpuno analogno dobijamo

$$(3)\qquad J=\frac{2\pi}{a^m(a^2-1)^{2n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{m+n-1}{\nu}\binom{2n-\nu-2}{n-1}(a^2-1)^{\nu}\qquad(|a|>1).$$

II. Uzmimo opet slučaj $|a|<1$ i $z_0=a$. Posmatrajmo funkciju

$$h(z)=\frac{z^{m+n-1}}{(z-a)^n(z-b)^n}.$$

Da bismo izračunali $\operatorname*{Res}_{z=a} h(z)$, razvićemo $h(z)$ u *Taylor*-ov red u okolini tačke $z=a$. Stavimo li $z=a+u$, dobijamo

$$h(z)=g(u)=\frac{(u+a)^{m+n-1}}{(-1)^n u^n(b-a-u)^n}.$$

Odavde sleduje

$$(4)\qquad g(u)=\frac{1}{(-1)^n u^n(b-a)^n}\sum_{s=0}^{m+n-1}\binom{m+n-1}{s}u^s a^{m+n-s-1}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n-1+i}{n-1}\left(\frac{u}{b-a}\right)^i.$$

Kako je $\operatorname*{Res}_{z=a} h(z)$ koeficijent uz $1/u$ u redu (4), dobijamo

$$\operatorname*{Res}_{z=a} h(z)=\frac{1}{(-1)^n(b-a)^n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{m+n-1}{\nu}\binom{2n-\nu-2}{n-1}\frac{a^{m+n-\nu-1}}{(b-a)^{n-\nu-1}}.$$

Stavljajući $b=1/a$, dobijamo

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{a^{m+3n-2}}{(-1)^n(1-a^2)^{2n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{m+n-1}{\nu}\binom{2n-\nu-2}{n-1}\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)^{\nu}.$$

Na osnovu (1) odavde sleduje

$$(5)\qquad J=\frac{2\pi a^{m+2n-2}}{(1-a^2)^{2n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{m+n-1}{\nu}\binom{2n-\nu-2}{n-1}\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)^{\nu}\qquad(|a|<1).$$

Formula (5) je istovetna sa formulom (2). Na sličan način dolazi se i do formule (3). Redigovano prema rešenju *D. Đokovića* i *R. Lučića.*

Primedba. Pokazati da se do rezultata navedenog u zadatku 234 dolazi ako se u formulama (2) i (3) stavi $m=n-1$

236. Integraliti funkciju e^{-z^2} duž pravougaonika koji formiraju prave

$$y=0, \quad y=b, \quad x=+r, \quad x=-r \quad (r>0; \ b \text{ realna konstanta})$$

i, puštajući da $r \to +\infty$, izvesti relaciju

$$(*) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \sqrt{\pi}\, e^{-b^2}.$$

Rešenje. Uzećemo najpre da je $b>0$. Prema *Cauchy*-evoj teoremi o ostacima je

$$(1) \qquad \int_{-r}^{+r} e^{-x^2} dx + \int_0^b e^{-(r+iy)^2} i\, dy + \int_{+r}^{-r} e^{-(x+ib)^2} dx + \int_b^0 e^{-(-r+iy)^2} i\, dy = 0.$$

Budući da je

$$\int_0^b e^{-(r+iy)^2} i\, dy = \int_0^b e^{-(r^2-y^2)} \cdot e^{-2riy} i\, dy,$$

dobija se

$$(2) \qquad \left| \int_0^b e^{-(r+iy)^2} i\, dy \right| < e^{-r^2} \int_0^b e^{y^2} dy.$$

Kako je $\int_0^b e^{y^2} dy$ konačno ako je b konačno, iz (2) sleduje

$$\left| \int_0^b e^{-(r+iy)^2} i\, dy \right| \to 0 \qquad (r \to +\infty).$$

Analognim postupkom dokazuje se

$$\left| \int_b^0 e^{-(-r+iy)^2} i\, dy \right| \to 0 \qquad (r \to +\infty).$$

Kako integrali $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ i $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ib)^2} dx$ postoje kao nesvojstveni, relacija (1), kada $r \to \infty$, postaje

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ib)^2} dx = 0.$$

Budući da je $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, relacija (3) dobija oblik

$$e^{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (\cos 2bx - i \sin 2bx)\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Odavde izlazi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (\cos 2bx)\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{-b^2}; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (\sin 2bx)\, dx = 0.$$

Kako je $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx$ parna funkcija od b za ma kakvo realno b, dobija se formula (*) koju je trebalo dokazati.

237. Dokazati

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+a} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx \qquad (a>0).$$

Rešenje. Integralimo funkciju $e^{iz}/(z+a)$ duž kvadrata koji obrazuju prave

$$x=0, \quad y=0, \quad x=r, \quad y=r.$$

Prema *Cauchy*-evoj teoremi o ostacima biće

$$\int_0^r \frac{e^{ix}}{x+a}\,\mathrm{d}x+\int_0^r \frac{e^{ri-y}}{r+iy+a}\,i\,\mathrm{d}y+\int_r^0 \frac{e^{ix-r}}{x+ir+a}\,\mathrm{d}x+\int_r^0 \frac{e^{-y}}{iy+a}\,i\,\mathrm{d}y=0. \tag{2}$$

Pretpostavlja se da je $r\,(>0)$ dovoljno veliko.
Bez teškoće dolazi se do sledećih relacija:

$$\left|\int_0^r \frac{e^{ri-y}}{r+iy+a}\,i\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_0^r \frac{e^{-y}\,\mathrm{d}y}{[(r+a)^2+y^2]^{1/2}} < \int_0^r \frac{e^{-y}}{r+a}\,\mathrm{d}y < \frac{1}{r}\,(1-e^{-r}) \to 0 \qquad (r\to+\infty);$$

$$\left|\int_0^r \frac{e^{ix-r}}{x+a+ir}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^r \frac{e^{-r}\,\mathrm{d}x}{[(x+a)^2+r^2]^{1/2}} < \frac{e^{-r}}{r}\int_0^r \mathrm{d}x=e^{-r}\to 0 \qquad (r\to+\infty).$$

Prema tome, kad $r\to+\infty$, relacija (2) postaje

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x+a}\,\mathrm{d}x-\int_0^\infty \frac{i e^{-y}}{iy+a}\,\mathrm{d}y=0.$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{x+a}\,\mathrm{d}x+i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+a}\,\mathrm{d}x-\int_0^\infty \frac{(ia+y)\,e^{-y}}{y^2+a^2}\,\mathrm{d}y=0.$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{x+a}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty \frac{y\,e^{-y}}{y^2+a^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+a}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty \frac{a\,e^{-y}}{y^2+a^2}\,\mathrm{d}y.$$

Stavi li se $y=ax$, poslednja relacija dobija oblik

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+a}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \qquad (a>0).$$

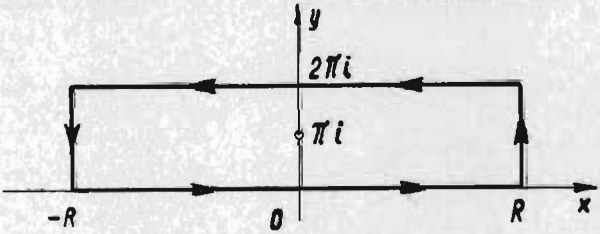
238. Pomoću računa ostataka izračunati određeni integral

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \qquad (0<a<1).$$

Rešenje. Posmatrajmo kompleksan integral

$$\oint_C \frac{e^{az}}{1+e^z}\,\mathrm{d}z \qquad (0<a<1),$$

uzet u pozitivnom smislu duž pravougaonika C koji je nacrtan na slici.



Funkcija $f(z)=e^{az}/(1+e^z)$ ima samo jedan singularitet u pravougaoniku: pol $z=\pi i$. Ostatak funkcije za taj pol je $-\exp(a\pi i)$.

Prema *Cauchy*-evoj teoremi je

$$(1) \qquad \oint_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\,d(R+iy)$$

$$+\int_{+R}^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^x}\,d(x+2\pi i) + \int_{2\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\,d(-R+iy) = -2\pi i e^{\pi i a}.$$

Kako je

$$1/|z_1+z_2| \leqslant 1/\big||z_1|-|z_2|\big|,$$

dobijamo

$$\left| i\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\,dy \right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{|1-e^R|}\,dy = \frac{2\pi e^{aR}}{e^R-1}.$$

Na sličan način nalazimo

$$\left| i\int_{2\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\,dy \right| \leqslant \frac{2\pi e^{-aR}}{1-e^{-R}}.$$

Kad $R \to +\infty$, tada je

$$\frac{e^{aR}}{e^R-1} \to 0, \text{ jer je } 0<a<1.$$

Kad $R \to +\infty$, tada je

$$\frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}} \to 0, \text{ jer je } 0<a<1.$$

Kako integral J postoji kao nesvojstven, relacija (1) kad $R \to +\infty$ postaje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx - e^{2\pi i a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = -2\pi i e^{\pi i a}.$$

Odavde izlazi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Primedba I. Ako se ovde stavi $e^x = t$, dobija se

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi a} \qquad (0<a<1).$$

Primedba II. Da li ovaj rezultat važi ako je a kompleksan broj takav da je $0<\operatorname{Re} a<1$?

239. Ispitati da li je

$$\int_0^1 \frac{x^a+x^{-a}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{a\pi}{2} \qquad (-1<a<+1).$$

Rešenje. Pođimo od integrala (videti prethodni zadatak)

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \qquad (0<a<1).$$

Stavimo li ovde $e^x = t^2$, dobijamo

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2a-1}}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2\sin \pi a} \qquad (0<a<1).$$

Ako ovde umesto $2a-1$ stavimo a, biće

(2) $$\int_0^\infty \frac{t^a}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\sin\pi\frac{a+1}{2}} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi a}{2}} = \frac{\pi}{2}\sec\frac{\pi a}{2} \qquad (-1<a<+1).$$

Rezultatu (2) daćemo sledeći oblik

(3) $$\int_0^1 \frac{t^a}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{t^a}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sec\frac{\pi a}{2} \qquad (-1<a<+1).$$

Drugi integral u poslednjoj relaciji, posle zamene $t=1/x$, postaje

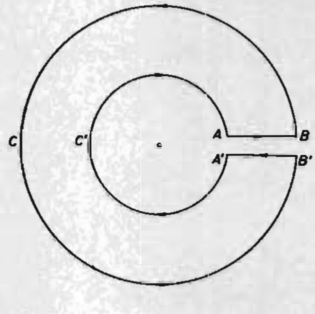
$$\int_1^\infty \frac{t^a}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 \frac{x^{-a}}{1+\frac{1}{x^2}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Na osnovu ovog rezultata, iz (3) sleduje

$$\int_0^1 \frac{x^a+x^{-a}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sec\frac{\pi a}{2} \qquad (-1<a<+1).$$

240. Primenom računa ostataka izračunati

$$J=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \qquad (0<a<1).$$



Rešenje. Posmatrajmo kompleksnu funkciju

$$g(z)=z^{a-1}/(1+z).$$

Jedini njeni singulariteti na konačnoj daljini su: $z=-1$ (pol) i $z=0$ (kritički singularitet). Pretpostavićemo da argument promenljive z varira od 0 do 2π. Ovako odabrana grana funkcije $g(z)$ je uniformna u i na konturi naznačenoj na slici, gde je $R\,(>1)$ poluprečnik većeg kruga i $r\,(<1)$ poluprečnik manjeg kruga. Označimo sa $f(z)$ izabranu uniformnu funkciju.

Prema *Cauchy*-evoj teoremi je

(1) $$\int_{AB} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z + \int_{BCB'} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z + \int_{B'A'} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z + \int_{A'C'A} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1}\{f(z)\}.$$

Za $0<a<1$, biće

$$\left|\int_{BCB'} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{R^{a-1}e^{(a-1)\theta i}}{1+Re^{\theta i}}\,Rie^{\theta i}\,\mathrm{d}\theta\right| < \int_0^{2\pi}\frac{R^a}{R-1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi R^a}{R-1}\to 0 \qquad (R\to\infty).$$

Analogno ovome dokazuje se

$$\left|\int_{A'C'A} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \to 0 \qquad (r\to 0).$$

Integraliti duž duži AB znači staviti $z=x$ (x realno) i uzeti z od r do R. Dakle

$$\int_{AB} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z = \int_r^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}z.$$

Kad tačka z, polazeći od B, stigne u B', njen argument u tački B' je 2π.

Prema tome duž otsečka $B'A'$ je

$$z^{a-1}=e^{(a-1)(\log|z|+2\pi i)}=e^{2\pi i(a-1)}e^{(a-1)\log|z|}$$
$$=\rho^{a-1}\cdot e^{2\pi i(a-1)} \qquad (|z|=\rho).$$

Stoga je

$$\int_{B'A'}\frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz=e^{2\pi i(a-1)}\int_R^r\frac{\rho^{a-1}}{1+\rho}\,d\rho.$$

Ostatak funkcije $f(z)$ za pol $z=-1$ je

$$\lim_{z\to-1}z^{a-1}=(e^{\pi i})^{a-1}=e^{\pi i(a-1)},$$

jer je argument, po učinjenoj konvenciji, jednak π u tački $z=-1$.

Ako sada pustimo da $R\to\infty$ i $r\to0$, relacija (1) postaje

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx+e^{2\pi i(a-1)}\int_\infty^0\frac{x^{a-1}}{1+x}=2\pi i\,e^{\pi i(a-1)},$$

odakle je

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=2\pi i\frac{e^{\pi i(a-1)}}{1-e^{2\pi i(a-1)}}=\frac{-\pi}{\sin(a-1)\pi}.$$

Kako je $\sin(a-1)\pi=-\sin a\pi$, poslednja formula postaje

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0<a<1).$$

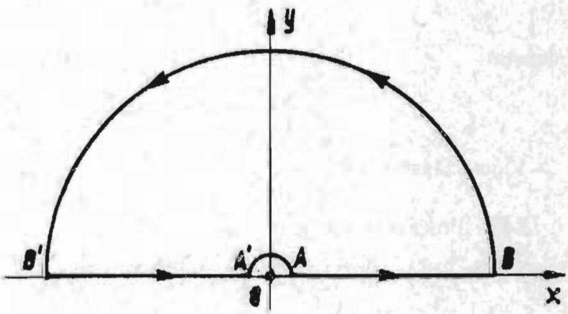
Primedba I. Videti zadatak 238.

Primedba II. Da li ovaj rezultat važi ako je a kompleksno tako da je $0<\operatorname{Re}a<1$?

241. Primenom računa ostataka izračunati

$$\int_0^\infty\frac{x^a}{1+x^2}\,dx \qquad (-1<a<+1).$$

Rešenje. Posmatrajmo funkciju $g(z)=z^a/(1+z^2)$ kompleksne promenljive z. Jedini njeni singulariteti na konačnoj daljini su $z=\pm i$ (polovi) i $z=0$ (kritički singularitet).



Funkcija $g(z)$ je multiformna, jer je

$$g(z)=e^{a\operatorname{Log}z}/(1+z^2).$$

Ako argument promenljive z varira od 0 do 2π, tada se dobija uniformna funkcija

$$\log z=\log|z|+i\theta$$
$$(0\leqslant\theta<2\pi).$$

Prema tome, funkcija

$$f(z)=e^{a(\log|z|+i\arg z)}/(1+z^2) \qquad (0\leqslant\arg z<2\pi)$$

uniformna je u i na konturi Γ (videti sliku).

Tačka z opisuje konturu Γ u direktnom smislu polazeći od tačke A. Duž otsečka AB je $r\leqslant z\leqslant R$ (r i R poluprečnici krugova i to $r<1$ i $R>1$).

Argument tačke z kad stigne u B' je π. Stoga je, duž otsečka $B'A'$,

$$f(z)=e^{a(\log|z|+\pi i)}/[1+(|z|e^{\pi i})^2]$$
$$=e^{a\pi i}\rho^a/(1+\rho^2) \qquad (\rho=|z|).$$

Ostatak funkcije $f(z)$ za pol $z=i$ je

$$\lim_{z\to i}\frac{e^{a(\log|z|+i\arg z)}}{z+i} \qquad (0\leqslant\arg z<2\pi).$$

U posmatranom slučaju je $|z|=1$, $\arg z=\pi/2$, te je

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\{f(z)\}=\frac{1}{2i}e^{a\pi i/2}.$$

Prema *Cauchy*-evoj teoremi biće

(1) $$\int_{AB} f(z)\,dz+\int_{\widehat{BB'}} f(z)\,dz+\int_{B'A'} f(z)\,dz+\int_{\widehat{A'A}} f(z)\,dz=\pi e^{a\pi i/2}.$$

Uočimo modul

$$\left|\int_{\widehat{BB'}} f(z)\,dz\right|=\left|\int_0^\pi \frac{R^a e^{a\theta i}}{1+R^2e^{2\theta i}}Rie^{\theta i}\,d\theta\right|\leqslant\int_0^\pi\frac{R^{a+1}}{R^2-1}\,d\theta=\frac{R^{a+1}}{R^2-1}\pi.$$

Kad $R\to\infty$, količnik $R^{a+1}/(R^2-1)$ ponaša se kao R^{a-1}. Ako je $a<1$, tada

$$\left|\int_{\widehat{BB'}} f(z)\,dz\right|\to 0 \quad \text{ako } R\to\infty.$$

Na analogni način utvrđuje se da za $-1<a$ važi

$$\left|\int_{\widehat{A'A}} f(z)\,dz\right|\to 0 \quad \text{ako } r\to 0.$$

Relacija (1), ako $R\to\infty$ i $r\to 0$, postaje

(2) $$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx-e^{a\pi i}\int_\infty^0\frac{x^a}{1+x^2}\,dx=\pi e^{a\pi i/2},$$

jer duž otsečka $B'A'$ imamo $z=e^{\pi i}|z|=-\rho=-x$.

Iz (2) izlazi

$$\int_0^\infty\frac{x^a}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi e^{ai\pi/2}}{1+e^{a\pi i}},$$

odnosno

$$\int_0^\infty\frac{x^a}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\sec\frac{a\pi}{2} \qquad (-1<a<+1).$$

Videti zadatak 239.

242. Pokazati da je

$$J=\int_0^\infty\frac{\log x}{(1+x^3)\sqrt[4]{x}}\,dx=-\frac{1}{9}\pi^2\sqrt{2}.$$

Rešenje. I. Posle smene $x=e^y$ dobijamo

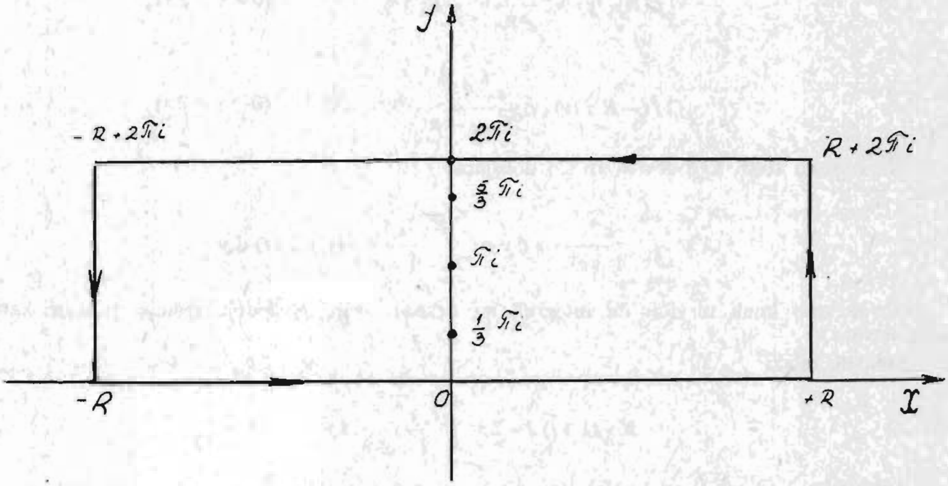
(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{3}{4}y}}{1+e^{3y}}\,y\,dy.$$

Posmatrajmo kompleksne integrale:

$$X=\oint_C \frac{e^{\frac{3}{4}z}}{1+e^{3z}}\,z\,\mathrm{d}z=\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{2}$$

$$Y=\oint_C \frac{e^{\frac{3}{4}z}}{1+e^{3z}}\,\mathrm{d}z=\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z, \tag{3}$$

gde je C pravougaonik pretstavljen na slici.



Jedini singulariteti na konačnoj daljini funkcija $f(z)$ i $g(z)$ su polovi, određeni jednačinom

$$e^{3z}=-1,$$

tj.

$$z_k=(2k+1)\frac{\pi i}{3} \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Interesuju nas samo oni polovi funkcija $f(z)$ i $g(z)$ koji se nalaze u konturi C. Postoje samo tri takva pola koji se dobijaju iz (4) za $k=0,\ 1, 2$.

Jednostavnim izračunavanjem ostataka funkcija $f(z)$ i $g(z)$ za ta tri pola, dolazi se do sledećih rezultata:

polovi	$\frac{\pi i}{3}$	πi	$\frac{5\pi i}{3}$
Res $f(z)$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{18}(1-i)$	$\frac{3\pi\sqrt{2}}{18}(1+i)$	$\frac{5\pi\sqrt{2}}{18}(-1+i)$
Res $g(z)$	$\frac{\sqrt{2}}{6}(-1-i)$	$\frac{\sqrt{2}}{6}(1-i)$	$\frac{\sqrt{2}}{6}(1+i)$

Na osnovu *Cauchy*-eve teoreme nalazimo:

$$X=2\pi i\sum \operatorname{Res} f(z)=2\pi i\,(1-i+3+3i-5+5i)\frac{\pi\sqrt{2}}{18}=-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{9}(7+i), \tag{5}$$

$$Y=2\pi i\sum \operatorname{Res} g(z)=2\pi i\,(-1-i+1-i+1+i)\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}(1+i). \tag{6}$$

S druge strane je

(7) $$X=\int_{-R}^{+R}\frac{e^{\frac{3}{4}y}}{1+e^{3y}}y\,\mathrm{d}y+\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{\frac{3}{4}(R+iy)}}{1+e^{3(R+iy)}}(R+iy)\,i\,\mathrm{d}y$$
$$-\int_{-R}^{+R}\frac{e^{\frac{3}{4}(y+2\pi i)}}{1+e^{3y}}(y+2\pi i)\,\mathrm{d}y-\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{\frac{3}{4}(-R+iy)}}{1+e^{3(-R+iy)}}(-R+iy)\,i\,\mathrm{d}y.$$

Važe sledeće procene:

$$|f(R+iy)|<\frac{e^{\frac{3}{4}R}}{e^{3R}-1}\sqrt{R^2+4\pi^2}\qquad(0<y<2\pi),$$

$$|f(-R+iy)|<\frac{e^{-\frac{3}{4}R}}{1-e^{-3R}}\sqrt{R^2+4\pi^2}\qquad(0<y<2\pi).$$

Na osnovu toga, kad $R\to\infty$, iz (7) dobijamo

$$X=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{3}{4}y}}{1+e^{3y}}y\,\mathrm{d}y+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{3}{4}y}}{1+e^{3y}}(y+2\pi i)\,\mathrm{d}y.$$

(Ovde smo imali u vidu da integrali na desnoj strani poslednje relacije postoje kao nesvojstveni.)

Odavde izlazi

(8) $$X=(1+i)\,J-2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{3}{4}y}}{1+e^{3y}}\,\mathrm{d}y.$$

Slično postupamo pri izračunavanju integrala Y i nalazimo

(9) $$Y=\int_{-R}^{+R}\frac{e^{\frac{3}{4}y}}{1+e^{3y}}\,\mathrm{d}y+\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{\frac{3}{4}(R+iy)}}{1+e^{3(R+iy)}}\,i\,\mathrm{d}y$$
$$-\int_{-R}^{+R}\frac{e^{\frac{3}{4}(y+2\pi i)}}{1+e^{3y}}\,\mathrm{d}y-\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{\frac{3}{4}(-R+iy)]}}{1+e^{3(-R+iy)}}\,i\,\mathrm{d}y.$$

Ovde važe procene:

$$|g(R+iy)|\leqslant\frac{e^{\frac{3}{4}R}}{e^{3R}-1},$$

$$|g(-R+iy)|\leqslant\frac{e^{-\frac{3}{4}R}}{1-e^{-3R}}.$$

Na osnovu toga, kad $R\to\infty$, iz (9) dobijamo

$$Y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{3}{4}y}}{1+e^{3y}}\,\mathrm{d}y-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{3}{4}(y+2\pi i)}}{1+e^{3y}}\,\mathrm{d}y.$$

Odavde izlazi

(10) $$Y=(1+i)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{3}{4}y}}{1+e^{3y}}\,\mathrm{d}y.$$

Iz (6) i (10) sleduje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{3}{4}y}}{1+e^{3y}}\,dy = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}. \tag{11}$$

Iz relacija (5), (8) i (11) dobijamo

$$J = -\frac{1}{9}\pi^2\sqrt{2}.$$

Ovo je rešenje dao *D. Đoković*. Ono se može znatno uprostiti.

II. *Ž. Pantić* naveo je sledeće rešenje:

Polazeći od formule

$$I(m) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} \qquad (n > m > 0),$$

posle diferenciranja, dobija se

$$\frac{dI}{dm} = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\log x}{1+x^n}\,dx = -\frac{\pi^2}{n^2}\,\frac{\cos\frac{m\pi}{n}}{\left(\sin\frac{m\pi}{n}\right)^2}.$$

Stavi li se ovde $m=3/4$ i $n=3$, nalazi se integral J.

Ostaje još da se obrazloži osnovanost diferenciranja pod znakom integrala.

243. Pomoću računa ostataka izračunati integral

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{1+2x\cos a+x^2}\,dx$$

za one vrednosti parametara a i p za koje on ima smisla.

244. Pomoću računa ostataka izračunati integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2(1+x^2)}\,dx.$$

Uputstvo. Umesto $\sin^2 x$ staviti $\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

Rezultat. $I = \frac{1}{4}\pi(1+e^{-2})$.

245. Primenom računa ostataka proveriti formulu

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{\pi e^{-1}}{n!\,2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\,\frac{(2n-k)!}{(n-k)!}.$$

Takođe izračunati opštiji integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(b^2+x^2)^{n+1}}\,dx \qquad (a,\, b \text{ realne konstante}).$$

246. Pomoću računa ostataka proveriti rezultate:

$$1^\circ \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos nx}{a+b\sin x}\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n=2\nu+1),$$

$$= \frac{(-1)^\nu 2\pi (a-\sqrt{a^2-b^2})^n}{b^n\sqrt{a^2-b^2}} \qquad (n=2\nu)$$

$$(a>b>0;\ \nu=0,1,2,\ldots);$$

$$2^\circ \quad \int_0^{\pi} \sin^m x \cos(2n+1)x\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m,n=0,1,2,\ldots);$$

$$3^\circ \quad \int_0^{2\pi} (1-2a\cos x+a^2)^m \sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m,n=1,2,3,\ldots);$$

$$4^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi e^{-kb}\cos ka}{b} \qquad (k>0;\ b>0);$$

$$5^\circ \quad \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad (n=1,2,3,\ldots);$$

$$6^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+2bx+c)^{n+1}} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{a}{ac-b^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+2bx+c)^n}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi a^n}{(ac-b^2)^{n+1/2}}$$

$$(a>0;\ ac-b^2>0;\ n \text{ prirodan broj});$$

$$7^\circ \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{(a-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{(a^2-1)^{3/2}} \qquad (a>1).$$

Primedba. Kako će glasiti formula 4° ako ne važe ograničenja $b>0$ i $k>0$, već samo $b\neq 0$.

247. Izračunati određeni integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^5+1}\,\mathrm{d}x.$$

Uputstvo. Izvršiti smenu $x=t^2$, pa primeniti račun ostataka na novi integral.

Rezultat. $I = \frac{1}{5}\pi(\sqrt{5}-1)$.

248. Proveriti rezultate:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{32}; \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{2}}{4};$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = 8\pi\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right); \qquad \int_0^{\infty} \frac{\log^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\pi^3;$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{1-2a\cos 2x+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi(1-a+a^2)}{1-a} \qquad (|a|<1;\ a \text{ realan broj}).$$

249. Pomoću računa ostataka izračunati određeni integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Uputstvo. Prethodno izvršiti smenu $x=t^2$.

Rezultat. $\frac{1}{8}\pi\sqrt{2}$.

250. Pomoću računa ostataka izračunati integral

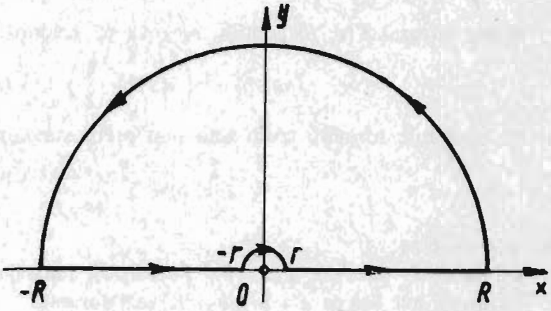
$$I(a,b)=\int_0^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (a,\ b \text{ realne konstante}).$$

Rešenje. 1° Pretpostavićemo najpre da je $a>0$ i $b>0$ i posmatraćemo integral

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \left(f(z)=\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,\frac{e^{iaz}}{z}\right),$$

gde je Γ kontura označena na slici.

Pretpostavimo da je $r<b$ i $R>b$. Funkcija $f(z)$ ima na konačnoj daljini samo tri singulariteta: $z=0$, $z=\pm ib$. Svi su oni polovi i samo se jedan ($z=ib$) nalazi u konturi.



Prema *Cauchy*-evoj teoremi je

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ib}\{f(z)\}$$

odnosno

$$(1) \qquad \int_{-R}^{-r} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\gamma_1^-} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{r}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\gamma_2^+} f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i e^{-ab}.$$

Integral duž konture γ_1 (tj. duž malog polukruga) uzet je u negativnom smislu. Integral duž konture γ_2 (tj. duž velikog polukruga) uzet je u pozitivnom smislu.

Kako je

$$(2) \qquad \left|\int_{\gamma_2^+} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{R^2+b^2}{R^2-b^2}\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

posle primene *Jordan*-ove nejednakosti

$$\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta<\frac{\pi}{aR}(1-e^{-aR})$$

dobija se

$$\left|\int_{\gamma_2^+} f(z)\,\mathrm{d}z\right|<\frac{\pi}{aR}\,\frac{R^2+b^2}{R^2-b^2}(1-e^{-aR})\to 0 \qquad (R\to+\infty).$$

Posmatrajmo sada integral $\int\limits_{\gamma_1^-} f(z)\,dz$. Tačka $z=0$ je pol I reda funkcije $f(z)$. U okolini te tačke funkcija $f(z)$ može se razviti u *Laurent*-ov red

$$f(z)=-\frac{1}{z}+A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots$$

Polazeći od ovog oblika funkcije $f(z)$, može se izračunati integral

$$\int\limits_{\gamma_1^-} f(z)\,dz=-\int\limits_{\pi}^{0} i\,d\varphi+\sum_{k=0}^{\infty}\{A_k r^{k+1} i\int\limits_{\pi}^{0} e^{i\varphi(k+1)}\,d\varphi\}.$$

Ako $r\to 0$, tada $\int\limits_{\gamma_1^-} f(z)\,dz\to\pi i$.

Kad $R\to+\infty$ i $r\to 0$, relacija (1) postaje

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\left\{\int\limits_{-R}^{-r}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\exp(iax)}{x}\,dx+\int\limits_{r}^{R}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\exp(iax)}{x}\,dx\right\}=2\pi i\,e^{-ab}-\pi i.$$

Odavde izlazi

$$\text{v. p.}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx=\pi\left(e^{-ab}-\frac{1}{2}\right)\qquad(a>0,\ b>0).$$

Kako integral $I(a,b)$ postoji, njegova je vrednost

$$I(a,b)=\pi\left(e^{-ab}-\frac{1}{2}\right)\qquad(a>0,\ b>0).$$

2° Poslednju formulu izveli smo pod pretpostavkom da je $a>0$ i $b>0$. Integral

$$I(a,b)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx$$

ima ove osobine:

$I(-a,b)=-I(a,b)$; $I(a,-b)=I(a,b)$, tj. funkcija $I(a,b)$ je neparna po a, parna po b. Stoga za ma kakvo a i b $(ab\neq 0)$ važi formula

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx=\pi(\operatorname{sgn} a)\left(e^{-|ab|}-\frac{1}{2}\right).$$

Za slučaj $a=0$ biće $I=0$. Za $b=0$ integral I se svodi na $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx$.

Vrednost ovog integrala je $(\operatorname{sgn} a)\,\frac{1}{2}\pi$.

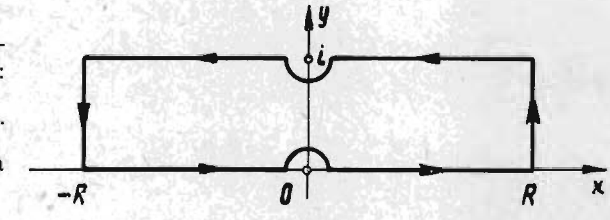
251. Ako je $-\pi<a<+\pi$, pokazati da je

$$J=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh}\pi x}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}.$$

Rešenje. Integralimo funkciju

$f(z)=e^{az}/\operatorname{sh}\pi z$

duž konture označene na slici.



Jedini singulariteti na konačnoj daljini funkcije $f(z)$ su polovi:

$z_k=ki\qquad(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$

U posmatranoj konturi nema singulariteta.

Prema *Cauchy*-evoj teoremi je

$$(1)\quad \int_{-R}^{-r} \frac{\exp(ax)}{\sin \pi x}\,dx + \int_{\gamma_1^-} f(z)\,dz + \int_r^R \frac{\exp(ax)}{\operatorname{sh} \pi x}\,dx + \int_0^1 \frac{\exp\{a(R+iy)\}}{\operatorname{sh}\pi(R+iy)}\,i\,dy$$

$$+\int_R^r \frac{\exp\{a(x+i)\}}{\operatorname{sh}\pi(x+i)}\,dx + \int_{\gamma_2^-} f(z)\,dz + \int_{-r}^{-R} \frac{\exp\{a(x+i)\}}{\operatorname{sh}\pi(x+i)}\,dx + \int_1^0 \frac{\exp\{a(-R+iy)\}}{\operatorname{sh}\pi(-R+iy)}\,i\,dy = 0.$$

Integrali $\int_{\gamma_1^-} f(z)\,dz$ i $\int_{\gamma_2^-} f(z)\,dz$ uzeti su u negativnom smislu duž polukrugova γ_1 i γ_2, čiji je poluprečnik r vrlo mali.

Za module integrala

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\exp\{a(R+iy)\}}{\operatorname{sh}\pi(R+iy)}\,i\,dy,\qquad I_2 = \int_1^0 \frac{\exp\{a(-R+iy)\}}{\operatorname{sh}\pi(-R+iy)}\,i\,dy,$$

dobijamo sledeće formule

$$|I_1| \leqslant \frac{2\,e^{aR}}{e^{\pi R}-e^{-\pi R}} \to 0 \text{ ako je } a<\pi \text{ i } R\to+\infty;$$

$$|I_2| \leqslant \frac{2\,e^{-aR}}{e^{\pi R}-e^{-\pi R}} \to 0 \text{ ako je } -\pi<a \text{ i } R\to+\infty.$$

Ako $R\to\infty$ i $r\to 0$, tada relacija (1) postaje

$$(2)\quad \text{v. p.}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ax)}{\operatorname{sh}\pi x}\,dx\right\}(1+e^{ai}) = \pi i\,[\operatorname*{Res}_{z=0}\{f(z)\} + \operatorname*{Res}_{z=i}\{f(z)\}].$$

Ustvari, integrali duž polukrugova γ_1 i γ_2, uzeti u pozitivnom smislu, jednaki su proizvodu iz $2\pi i$ i polovine ostatka za pol $z=0$, odnosno za pol $z=i$.

Budući da integral J postoji kao nesvojstven, na osnovu (2), dobija se

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh}\pi x}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}\qquad(-\pi<a<+\pi).$$

252. Integraleći $e^{az}/\operatorname{ch}\pi z$ duž pravougaonika koji obrazuju prave: $x=\pm r$, $y=0$, $y=1$, pokazati da je

$$(1)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch}\pi x}\,dx = \sec\frac{1}{2}a\qquad(-\pi<a<+\pi).$$

Ako se umesto x stavi $-x$, dobija se nov integral koji, kombinovan sa (1), daje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch}\pi x}\,dx = \sec\frac{1}{2}a\qquad(-\pi<a<+\pi).$$

Rešenje. Funkcija $f(z)=e^{az}/\operatorname{ch}\pi z$ u datom pravougaoniku ima samo jedan singularitet: pol $z=\frac{1}{2}i$. Ostatak za taj pol je

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}i}\{f(z)\} = \frac{1}{\pi i}\,e^{\frac{1}{2}ia}.$$

Prema *Cauchy*-evoj teoremi je

$$(2)\qquad \int_{-r}^{+r} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} \pi x} dx + \int_{0}^{1} \frac{e^{a(r+iy)}}{\operatorname{ch} \pi (r+iy)} i dy + \int_{+r}^{-r} \frac{e^{a(x+i)}}{\operatorname{ch} \pi (x+i)} dx + \int_{1}^{0} \frac{e^{a(-r+iy)}}{\operatorname{ch} \pi (-r+iy)} i dy = 2 e^{\frac{1}{2} ia}.$$

Posmatrajmo module drugog (II) i četvrtog (IV) integrala u relaciji (2) i procenimo njihove vrednosti.

Za modul integrala II važi majorantna formula

$$|\mathrm{II}| \leqslant \int_{0}^{1} \frac{2 e^{ar} dy}{e^{\pi r} - e^{-\pi r}} = \frac{2 e^{ar}}{e^{\pi r} - e^{-\pi r}}.$$

Kad $r \to +\infty$, tada $|\mathrm{II}| \to 0$, jer je po pretpostavci $a < \pi$.

Za modul integrala IV važi majorantna formula

$$|\mathrm{IV}| \leqslant \frac{2 e^{-ar}}{e^{\pi r} - e^{-\pi r}}.$$

Kad $r \to +\infty$, tada $|\mathrm{IV}| \to 0$, jer je po pretpostavci $-\pi < a$.

Kako integral (1) postoji kao nesvojstven, relacija (2), kad $r \to +\infty$, postaje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} \pi x} dx = \frac{2 e^{\frac{1}{2} ia}}{e^{ia} + 1}.$$

Prema tome dobijamo

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} \pi x} dx = \sec \frac{1}{2} a \qquad (-\pi < a < +\pi).$$

Ako se u (3) umesto x stavi $-x$, biće

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{\operatorname{ch} \pi x} dx = \sec \frac{1}{2} a.$$

Iz relacija (3) i (4) sabiranjem dobijamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} a x}{\operatorname{ch} \pi x} dx = \sec \frac{1}{2} a \qquad (-\pi < a < +\pi).$$

253. Izračunati integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^2 + b^2} dx \qquad (a, b > 0).$$

Rešenje. Pođimo od kompleksne funkcije $f(z) = e^{aiz}/(z^2 + b^2)$ i integralimo je duž konture označene na slici (str. 54). Funkcija $f(z)$ ima samo dva singulariteta na konačnoj daljini: to su polovi $z_1 = bi$ i $z_2 = -bi$.

Neka je $r\,(> b)$ poluprečnik polukruga. Prema *Cauchy*-evoj teoremi biće

$$(1)\qquad \int_{0}^{\pi} \frac{\exp\{iar(\cos\theta + i \sin\theta)\}}{r^2 e^{2\theta i} + b^2} i r e^{\theta i} d\theta + \int_{-r}^{+r} \frac{\exp(iax)}{x^2 + b^2} dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ib} \{f(z)\}.$$

Za modul prvog integrala $(\equiv I)$ u poslednjoj relaciji važi majorantna formula

$$|I| \leqslant \frac{r}{r^2 - b^2} \int_{0}^{\pi} \{\exp(-ar \sin\theta)\} d\theta.$$

Ako se primeni *Jordan*-ova nejednakost, tada je

$$|I| < \frac{1}{a}\,\frac{\pi}{r^2-b^2}\,(1-e^{-ar}) \to 0 \qquad (r \to +\infty).$$

Kad $r \to +\infty$, relacija (1) postaje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(iax)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{b}\,e^{-ab}.$$

Odavde sleduje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{b}\,e^{-ab}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Primedba I. Da li se diferenciranjem po b leve i desne strane jednakosti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{b}\,e^{-b}$$

može izračunati integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,\mathrm{d}x/(x^2+1)^{n+1}\,?$$

Legitimnost diferenciranja treba obrazložiti.
Primedba II. Videti primedbu II u zadatku 254.

254. Pomoću računa ostataka izračunati integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Rešenje. Posmatrajmo krivoliniski integral

$$J = \oint_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}\,\mathrm{d}z,$$

gde je Γ kontura naznačena na slici u zadatku 214 ($\overline{OA} = \overline{OB} = r > 1$).
Prema *Cauchy*-evoj teoremi može se pisati:

$$(1) \qquad J \equiv \int_{-r}^{+r} \frac{e^{ir}}{(1+r^2)^3}\,\mathrm{d}r + \int_{BCA} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i}\left\{\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}\right\}.$$

Pokazaćemo da je

$$(2) \qquad |J^*| \equiv \left|\int_{BCA} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{ir(\cos\theta+i\sin\theta)}\,rie^{\theta i}}{(1+r^2e^{2\theta i})^3}\,\mathrm{d}\theta\right|$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} \frac{re^{-r\sin\theta}}{(r^2-1)^3}\,\mathrm{d}\theta < \frac{\pi}{(r^2-1)^3}\,(1-e^{-r}) \to 0 \quad (r \to \infty).$$

Iz relacije

$$\int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\left(\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \text{ smenom } \theta = \pi - t \text{ postaje } -\int_{\pi/2}^{0} e^{-r\sin t}\,\mathrm{d}t, \text{ odnosno } \int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right),$$

posle primene *Jordan*-ove nejednakosti

$$\frac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin\theta \leqslant \theta \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi\right),$$

dobijamo

$$\int_0^{\pi/2} \exp(-r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta < \int_0^{\pi/2} \exp(-2\theta r/\pi)\,\mathrm{d}\theta = (\pi/2r)(1-e^{-r}).$$

Ovim je formula (2) dokazana.

Ako u relaciji (1) pustimo da $r \to \infty$, tada relacija (1) postaje

$$\text{(3)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ir}}{(1+r^2)^3}\,\mathrm{d}r = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \left\{\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}\right\}.$$

U konturi se nalazi pol III reda $z=i$. Ostatak ima vrednost

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to i} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\frac{e^{zi}}{(z+i)^3}\right] = -\frac{7i}{16e}.$$

Prema tome, iz relacije (3) sleduje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos r}{(1+r^2)^3}\,\mathrm{d}r = \frac{7\pi}{8e}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin r}{(1+r^2)^3}\,\mathrm{d}r = 0.$$

Primedba I. Ostatak se može naći i razvijanjem funkcije $f(z) = e^{zi}/(1+z^2)^3$ u okolini tačke $z=i$. Ako se stavi $z=i+t$, funkcija $f(z)$ postaje

$$f(i+t) = \frac{e^{-1}e^{ti}}{t^3(t+2i)^3} = \frac{1}{et^3}\,\frac{e^{it}}{(2i)^3(1+t/2i)^3}$$

$$= \frac{i}{8et^3}\left(1+it-\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3 i}{3!}+\cdots\right)\left(1+\frac{ti}{2}-\frac{t^2}{4}-\frac{t^3 i}{8}+\cdots\right)^3.$$

Odavde sleduje da je $-(7i)/(16e)$ koeficijent uz $1/t$.

Primedba II. Integral J^* može se majorirati bez primene *Jordan*-ove nejednakosti na sledeći način:

$$|J^*| \leqslant \frac{r}{(r^2-1)^3}\int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta < \frac{\pi r}{(r^2-1)^3} \to 0 \quad (r\to\infty),$$

jer za $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ važi

$$0 < e^{-r\sin\theta} \leqslant 1 \quad (r>0).$$

255. Pomoću računa ostataka izračunati integrale:

$$1^\circ \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^4-1}\,\mathrm{d}x; \quad 2^\circ \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x; \quad 3^\circ \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax^2)-\sin(ax^2)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \quad (a>0).$$

Uputstvo. 1° Izvršiti smenu $x-1=t^2$.

Rezultat. 2° $-\pi^2/(8\sqrt{2})$.

256. Pomoću računa ostataka izračunati integrale:

$$1^\circ \int_0^{\pi} \frac{\cos 3x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x; \quad 2^\circ \int_0^{\pi} \frac{1}{(4\cos x+5)^2}\,\mathrm{d}x; \quad 3^\circ \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x;$$

$$4^\circ \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(13-5\cos x)^2}\,\mathrm{d}x; \quad 5^\circ \int_0^{\pi} \frac{1}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Rezultat. 1° $\pi(15-26/\sqrt{3})$; 2° $5\pi/27$; 3° $\pi\sqrt{2}$; 4° $\pi/48$; 5° $\pi/3$.

257. Pomoću računa ostataka izračunati integrale:

$$1^\circ \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x; \qquad 2^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x.$$

Rezultat. 1° $\pi/3$; 2° $\pi/3$.

258. Pomoću računa ostataka izračunati integral

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a-b\cos x}\,\mathrm{d}x \qquad (a>b>0).$$

Pokazati da važi relacija

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{a-bx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}J \qquad (a>b>0).$$

Rezultat. $J=(2\pi/b^2)(a-\sqrt{a^2-b^2})$.

259. Izračunati određeni integral

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x - nx)\,\mathrm{d}x \qquad (n \text{ prirodan broj; } a \text{ realna konstanta}).$$

Uputstvo. Obrazovati kompleksan integral

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)\,\mathrm{d}x + i\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\sin(a\sin x-nx)\,\mathrm{d}x$$

i ovde staviti $e^{ix}=z$.

Rezultat. $2\pi a^n/n!$

260. Neka je data racionalna funkcija

$$f(x)=(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)/(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$$

$$(a_k,\ b_k \text{ realni brojevi; } a_m b_n \neq 0;\ n \geqslant m+2)$$

pod uslovom da polinom $b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ nema realnih nula; tada je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z=\alpha_k} \operatorname{Res}\{f(z)\},$$

gde je $\sum\limits_{z=\alpha_k} \operatorname{Res}\{f(z)\}$ zbir ostataka za sve polove funkcije $f(z)$ koji se nalaze u poluravni $y>0$. — Dokazati.

Primedba. Da li ovo važi ako su a_k, b_k kompleksni brojevi?

261. Data je funkcija

$$f(z)=3\,z/(z^3+1).$$

Neka su:

(C_1) polukrug $\{|z|=R\}\cap\{\operatorname{Im} z\geqslant 0\}$;

(C_2) duž $\{-R\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant -1-r\}\cap\{\operatorname{Im} z=0\}$;

(C_3) polukrug $\{|z+1|=r\}\cap\{\operatorname{Im} z\geqslant 0\}$;

(C_4) duž $\{-1+r\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant R\}\cap\{\operatorname{Im} z=0\}$.

Izračunati:

1° $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (C=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4)$;

2° $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z$;

3° $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{C_3} f(z)\,\mathrm{d}z$.

Na osnovu dobijenih rezultata izračunati *Cauchy*-evu glavnu vrednost integrala

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x.$$

Rezultat. 1° $\pi(\sqrt{3}+i)$; 2° 0; 3° πi.

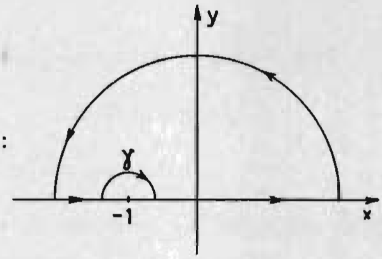
$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x=\pi\sqrt{3}.$$

262. Izračunati integral

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^5+1}\,\mathrm{d}x.$$

Rešenje. Integralimo funkciju $f(z)=z^2/(z^5+1)$ duž konture naznačene na slici. Jedini singulariteti funkcije $f(z)$ su polovi. Njih ima pet:

$$z_k=\exp\left(\frac{2k+1}{5}\pi i\right)\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$



Od ovih polova u konturi se nalaze samo dva: z_0 i z_1. Ostaci za ove polove su:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k}\{f(z)\}=\frac{1}{5}z_k^{-2}\qquad (k=0,\ 1).$$

Prema teoremi o ostacima možemo pisati relaciju $(r>1)$

$$(1)\qquad \int_0^{\pi}\frac{r^2e^{2\theta i}}{r^5e^{5\theta i}+1}\,ire^{\theta i}\,\mathrm{d}\theta+\int_{-r}^{-1-\rho}\frac{x^2}{x^5+1}\,\mathrm{d}x+\int_{\gamma^-}f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$+\int_{-1+\rho}^{r}\frac{x^2}{x^5+1}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\pi i\,(z_0^{-2}+z_1^{-2})\qquad (\rho \text{ malo})$$

(duž malog polukruga γ integracija je u negativnom smislu).

Za prvi integral I u relaciji (1) važi

$$|I| \leqslant \frac{\pi r^3}{r^5-1} \to 0 \qquad (r \to \infty).$$

Ako pustimo da $r \to +\infty$ i $\rho \to 0$, relacija (1) postaje

$$\lim_{\rho\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-1-\rho}\frac{x^2}{x^5+1}\,dx+\int_{-1+\rho}^{+\infty}\frac{x^2}{x^5+1}\,dx\right\}=\frac{2}{5}\pi i\,(z_0^{-2}+z_1^{-2})+\pi i\operatorname*{Res}_{z=-1}\{f(z)\},$$

odnosno

$$\text{(2)} \qquad \text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^5+1}\,dx=\frac{1}{5}\pi i+\frac{2}{5}\pi i\left(-\frac{1}{2}-2i\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\right),$$

jer je

$$z_0^{-2}+z_1^{-2}=e^{-\frac{2\pi i}{5}}+e^{-\frac{6\pi i}{5}}=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}\right)-i\left(\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}\right)$$

$$=2\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}-2i\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$=-\frac{1}{2}-2i\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}.$$

Formula (2) postaje

$$\text{(3)} \qquad \text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^5+1}\,dx=\frac{4\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$=\frac{4\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}.$$

263. Dokazati formulu

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{a^2+2b^2x^2+c^2x^4}=\frac{\pi}{2^{3/2}a\sqrt{b^2+ac}} \qquad (a, b, c>0;\ b^2-ac>0).$$

264. Izračunati integral

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)^2(x^2+c^2)^2}.$$

265. Dokazati formulu

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(a^4+x^4)^3}\,dx=\frac{5\pi\sqrt{2}}{128a^9} \qquad (a>0).$$

Kako će glasiti ova formula ako je $a(\neq 0)$ ma kakav realan broj?

266. Dokazati formulu

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2+x^4}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}\pi\right)\exp\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{3}\right) \qquad (a>0).$$

Kako će glasiti ova formula ako je a proizvoljan realan broj?

267. Dokazati formulu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin m(x-a)}{x-a} \frac{\sin n(x-b)}{x-b} \, dx = \pi \frac{\sin n(a-b)}{a-b} \qquad (m>n>0\,; \quad a, b \text{ realni}).$$

268. Izračunati integrale:

$$\int_0^{\infty} \log \frac{e^x+1}{e^x-1} \, dx; \qquad \int_0^{\infty} \frac{\log(1+x)}{x^{a+1}} \, dx \qquad (0<a<1).$$

269. Data je kompleksna funkcija $F(z)$ koja zadovoljava sledeće uslove: $F(z)/z=0$ za $z=0$; $F(z)$ je realno za z realno; $F(z)$ je analitička funkcija i nema singulariteta za $|z| \leqslant 1$.

Ako je $f(x, y) = \operatorname{Im} F(z)$, dokazati da je, za $|x|<1$,

$$(1) \qquad I = \int_0^{2\pi} \frac{x \sin\theta}{1-2x\cos\theta + x^2} f(\cos\theta, \sin\theta) \, d\theta = \pi F(x).$$

Rešenje. Najpre imamo

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} \operatorname{Im}\{F(e^{i\theta})\} \, d\theta = \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \frac{x \sin\theta \, F(e^{i\theta})}{1-2x\cos\theta+x^2} \, d\theta.$$

Izvršimo li smenu $e^{i\theta}=z$, dobijamo

$$I = \operatorname{Im} \oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{2\left\{z^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)z+1\right\}} \frac{F(z)}{z} \, dz.$$

Jedini singularitet podintegralne funkcije koji se nalazi u jediničnom krugu je pol $z=x$, pa je na osnovu *Cauchy*-eve teoreme

$$I = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \frac{x^2-1}{2\left(x-\frac{1}{x}\right)} \frac{F(x)}{x}\right\} = \operatorname{Im}\{i\pi F(x)\} = \pi F(x),$$

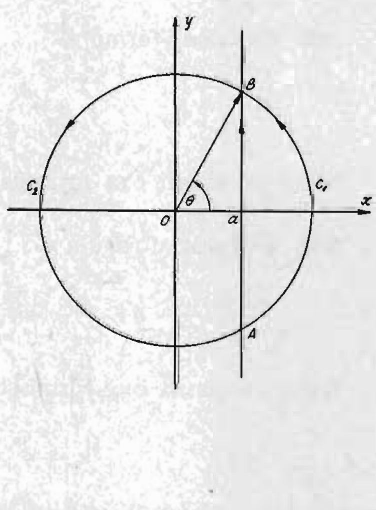
jer je na osnovu pretpostavke $F(x)$ realno.

Redigovano prema rešenju *D. Tošića* i *D. Đokovića.*

270. Pokazati da integral

$$J(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{\alpha z}}{z^2} \, dz,$$

uzet duž prave $x=a$ $(a>0)$ od $a-i\infty$ do $a+i\infty$, ima smisla za sve realne vrednosti promenljive α i izračunati njegovu vrednost za $\alpha>0$, $\alpha=0$, $\alpha<0$.



Rešenje. Prava $x=a$ deli periferiju nacrtanog kruga poluprečnika r na dva luka

$$AC_1B \quad \text{i} \quad BC_2A.$$

Uvedimo oznake:

$$I_1(\alpha, r) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{AC_1B}\frac{e^{\alpha z}}{z^2}\,dz, \qquad I_2(\alpha, r) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{BC_2A}\frac{e^{\alpha z}}{z^2}\,dz, \qquad I(\alpha, r) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{AaB}\frac{e^{\alpha z}}{z^2}\,dz.$$

Funkcija $\dfrac{e^{\alpha z}}{z^2}$ ima u konačnosti samo jedan singularitet, i to pol $z=0$ drugog reda kome odgovara ostatak α. Zato je:

$$I_1(\alpha, r) - I(\alpha, r) = 0, \tag{1}$$

$$I(\alpha, r) + I_2(\alpha, r) = \alpha. \tag{2}$$

Važe sledeće majorantne formule:

za $\alpha \leqslant 0$

$$|I_1(\alpha, r)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{AC_1B}\frac{e^{\alpha x}|dz|}{r^2} \leqslant \frac{e^{\alpha a}}{2\pi r^2}\cdot 2r\theta \to 0 \qquad (r\to\infty);$$

za $\alpha > 0$

$$|I_2(\alpha, r)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{BC_2A}\frac{e^{\alpha x}|dz|}{r^2} < \frac{e^{\alpha a}}{2\pi r^2}\cdot 2r(\pi-\theta) \to 0 \qquad (r\to\infty).$$

Stoga iz (1) i (2), kada $r\to\infty$, dobijamo:

$$I(\alpha, \infty) = \lim_{r\to\infty} I(\alpha, r) = J(\alpha) = 0 \qquad (\alpha\leqslant 0);$$

$$I(\alpha, \infty) = \lim_{r\to\infty} I(\alpha, r) = J(\alpha) = \alpha \qquad (\alpha > 0).$$

Dakle, došli smo do sledećeg rezultata:

$$J(\alpha) = 0 \quad (\alpha \leqslant 0),$$
$$= \alpha \quad (\alpha > 0).$$

271. Izračunati integral

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{A_1\cos a_1 x + A_2\cos a_2 x + \cdots + A_k\cos a_k x}{x}\,dx,$$

gde su $A_\nu\left(\sum\limits_{\nu=1}^{k} A_\nu = 0\right)$ i a_ν (>0) $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ realne konstante.

Rešenje. Ako integralu I_1 dodamo iI_2, gde je

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{A_1\sin a_1 x + A_2\sin a_2 x + \cdots + A_k\sin a_k x}{x}\,dx,$$

dobijamo

$$I_1 + iI_2 = \int_0^\infty \frac{A_1 e^{ia_1 x} + A_2 e^{ia_2 x} + \cdots + A_k e^{ia_k x}}{x}\,dx.$$

Posmatrajmo integral

$$J = \oint\limits_C \frac{A_1 e^{ia_1 z} + A_2 e^{ia_2 z} + \cdots + A_k e^{ia_k z}}{z}\,dz,$$

gde je C kvadrat čija su temena $(0, 0)$, $(R, 0)$, (R, R), $(0, R)$ $(R>0)$.

Na osnovu *Cauchy*-eve teoreme je

$$J=\int_0^R \frac{A_1 e^{ia_1 x}+A_2 e^{ia_2 x}+\cdots+A_k e^{ia_k x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^R \frac{A_1 e^{ia_1 (R+iy)}+A_2 e^{ia_2 (R+iy)}+\cdots+A_k e^{ia_k (R+iy)}}{R+iy}\,i\mathrm{d}y$$

$$+\int_R^0 \frac{A_1 e^{ia_1 (x+iR)}+A_2 e^{ia_2 (x+iR)}+\cdots+A_k e^{ia_k (x+iR)}}{x+iR}\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_R^0 \frac{A_1 e^{-a_1 y}+A_2 e^{-a_2 y}+\cdots+A_k e^{-a_k y}}{y}\,\mathrm{d}y=0,$$

jer funkcija $z^{-1}\sum\limits_{\nu=1}^{k} A_\nu e^{ia_\nu z}$ nema singulariteta na konačnoj daljini. Tačka $z=0$ je njen prividni singularitet zbog uslova $\sum\limits_{\nu=1}^{k} A_\nu=0$.

Ako $R\to\infty$, iz poslednje relacije sleduje

$$I_1+i\,I_2=\int_0^\infty \frac{A_1 e^{ia_1 x}+A_2 e^{ia_2 x}+\cdots+A_k e^{ia_k x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\infty \frac{A_1 e^{-a_1 y}+A_2 e^{-a_2 y}+\cdots+A_k e^{-a_k y}}{y}\,\mathrm{d}y,$$

jer integral duž strane kvadrata koja spaja tačke $(R, 0)$ i (R, R) teži nuli kada $R\to\infty$, kao i integral duž strane koja spaja tačke (R, R) i $(0, R)$. Da bismo ovo pokazali, pođimo od nejednakosti

$$\left|\int_0^R \frac{A_1 e^{ia_1 (R+iy)}+\cdots+A_k e^{ia_k (R+iy)}}{R+iy}\,i\,\mathrm{d}y\right|<\int_0^R \frac{|A_1|\,e^{-a_1 y}+\cdots+|A_k|\,e^{-a_k y}}{(R^2+y^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}y$$

$$<\frac{1}{R}\int_0^R (|A_1|\,e^{-a_1 y}+\cdots+|A_k|\,e^{-a_k y})\,\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{R}\left(\frac{|A_1|}{a_1}e^{-a_1 R}+\cdots+\frac{|A_k|}{a_k}e^{-a_k R}\right)+\frac{1}{R}\left(\frac{|A_1|}{a_1}+\cdots+\frac{|A_k|}{a_k}\right).$$

Ako $R\to\infty$, poslednji izraz teži 0. Slično je i za drugi integral.

S obzirom na uslov $\sum\limits_{\nu=1}^{k} A_\nu=0$, biće

$$I_1+i\,I_2=\int_0^\infty \frac{A_1(e^{-a_1 y}-e^{-y})}{y}\,\mathrm{d}y+\cdots+\int_0^\infty \frac{A_k(e^{-a_k y}-e^{-y})}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Stavimo li

$$\alpha_1=\int_0^\infty \frac{(e^{-a_1 y}-e^{-y})}{y}\,\mathrm{d}y,$$

dobija se[1]

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}a_1}=\int_0^\infty -e^{-a_1 y}\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{a_1},$$

[1] Legitimnost diferenciranja obrazložiti.

te je $\alpha_1=-\log a_1+C_1$. Za $a_1=1$ dobija se

$$C_1=\int_0^\infty \frac{e^{-y}-e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}\,y=0.$$

Isto je i za α_ν, tj.

$$\alpha_\nu=-\log a_\nu \qquad (\nu=1,\,2,\,\ldots,\,k).$$

Na osnovu toga je

$$I_1+i\,I_2=-A_1\log a_1-\cdots-A_k\log a_k,$$

pa je

$$I_1=-A_1\log a_1-\cdots-A_k\log a_k,\quad I_2=0.$$

Tako je, na primer,

$$\int_0^\infty \frac{\cos a\,x-\cos b\,x}{x}\,\mathrm{d}\,x=\log\frac{b}{a} \qquad (a>0,\quad b>0).$$

Generalizacija. Izračunati

$$\int_0^\infty \frac{A_1\sin a_1\,x+\cdots+A_k\sin a_k\,x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x, \qquad \int_0^\infty \frac{A_1\cos a_1\,x+\cdots+A_k\cos a_k\,x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

pod uslovom

$$\sum_{\nu=1}^{k} A_\nu=0 \quad \text{i} \quad \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu\,A_\nu=0 \qquad (a_\nu>0;\ \nu=1,\,2,\,\ldots,\,k).$$

Da li se i ovaj zadatak može dalje generalisati?

Ovo je rešenje *D. Tošića.*

272. Dokazati formulu

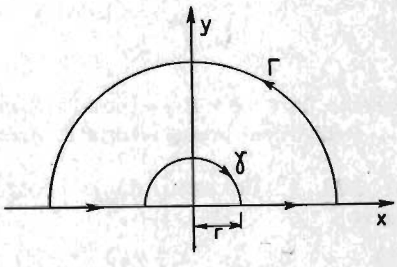
$$(1) \qquad J=\int_0^\infty \left(\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\sin a_\nu\,x}{x}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}\cos b_k\,x\right)\frac{\sin b\,x}{x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\,\pi\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu,$$

ako su a_ν, b_k, b takvi realni brojevi da je

$$(2) \qquad b>\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|+\sum_{k=1}^{m}|b_k|.$$

Dokaz. Pođimo od funkcije

$$F(z)=\left(\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\sin a_\nu\,z}{z}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}\cos b_k\,z\right)\frac{e^{bzi}}{z}$$



i izračunajmo $\oint_C F(z)\,\mathrm{d}\,z$, gde je C kontura prikazana na slici (γ i Γ su polukrugovi poluprečnika r i R).

Funkcija $F(z)$ u oblasti koju ograničava C nema singulariteta, pa je $\oint_C F(z)\,\mathrm{d}\,z=0$.

Kako je $z=0$ pol prvog reda funkcije $F(z)$, biće

$$\lim_{r\to 0}\int_\gamma F(z)\,\mathrm{d}\,z=-\pi\,i\,\operatorname*{Res}_{z=0}\{F(z)\}=-\pi\,i\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu.$$

Pokažimo da je $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma} F(z)\,\mathrm{d}z=0$. Zaista, za $z\in\Gamma$ možemo staviti $z=Re^{ti}$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$, pa je

$$\left|\int\limits_{\Gamma} F(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int\limits_{0}^{\pi}\left(\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\sin(a_\nu Re^{ti})}{Re^{ti}}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}\cos(b_k Re^{ti})\right)\frac{e^{ibRe^{ti}}}{Re^{ti}}\,Rie^{ti}\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{R^n}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\prod_{\nu=1}^{n}|\sin(a_\nu Re^{ti})|\right)\left(\prod_{k=1}^{m}|\cos(b_k Re^{ti})|\right)|e^{ibRe^{ti}}|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{1}{R^n}\left(\int\limits_{0}^{\pi}\prod_{\nu=1}^{n}e^{|a_\nu|R\sin t}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}e^{|b_k|R\sin t}\right)e^{-bR\sin t}\,\mathrm{d}t,$$

jer je

$$|\sin(a_\nu Re^{ti})|\leqslant e^{|a_\nu|R\sin t},\quad |\cos(b_k Re^{ti})|\leqslant e^{|b_k|R\sin t},\quad |e^{ibRe^{ti}}|=e^{-bR\sin t}.$$

Uslov (2) može se ovako napisati

$$\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|+\sum_{k=1}^{m}|b_k|-b=\alpha\qquad(\alpha<0).$$

Budući da je

$$\sin t\geqslant\frac{2}{\pi}t\quad\text{za}\quad t\in[0,\pi/2],$$

dobija se

$$\left|\int\limits_{\Gamma} F(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{1}{R^n}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\prod_{\nu=1}^{n}e^{|a_\nu|R\sin t}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}e^{|b_k|R\sin t}\right)e^{-bR\sin t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{R^n}\int\limits_{0}^{\pi/2}\exp\left\{\left(\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|+\sum_{k=1}^{m}|b_k|-b\right)R\sin t\right\}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{2}{R^n}\int\limits_{0}^{\pi/2}e^{\frac{2\alpha R}{\pi}t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\alpha R^{n+1}}(e^{\alpha R}-1).$$

Odavde sleduje $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma} F(z)\,\mathrm{d}z=0$.

Ako u jednakosti

$$\oint\limits_{C} F(z)\,\mathrm{d}z=\int\limits_{\gamma} F(z)\,\mathrm{d}z+\int\limits_{r}^{R}\left(\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\sin a_\nu x}{x}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}\cos b_k x\right)\frac{e^{bxi}}{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\Gamma} F(z)\,\mathrm{d}z$$

$$+\int\limits_{R}^{r}\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\sin a_\nu x}{x}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}\cos b_k x\right)\frac{e^{-bxi}}{x}\,\mathrm{d}x=0$$

pustimo da $r\to 0$ i $R\to\infty$, posle svođenja, dobijamo (1), što je i trebalo dokazati.

Redigovano prema rešenju *B. Aničina* i *S. Prešića.*

273. 1° Pokazati da je $|\operatorname{cotg}\pi z|<2$ ako se tačka $(z=x+iy)$ nalazi na krivoj.

(1) $$|x+y|+|x-y|=2n+1\qquad(n\ \text{prirodan broj}).$$

2° Integraleći funkciju

$$\frac{\pi\operatorname{cotg}\pi z}{z^{2l}+a^{2l}}\qquad\{a\,(>0)\ \text{konstanta};\ l\ \text{prirodan broj}\}$$

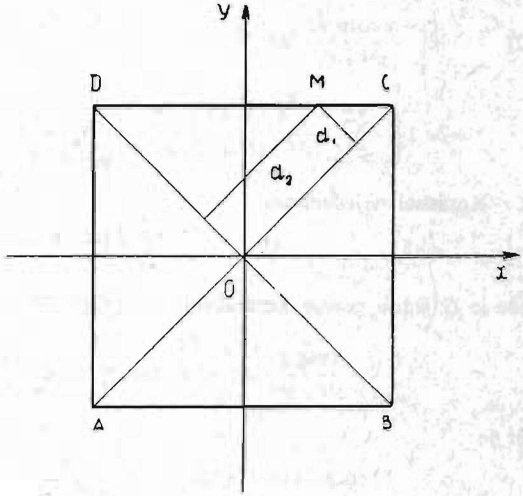
duž konture Γ i puštajući da $n \to \infty$, izračunati

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2l}+a^{2l}}.$$

3° Da li se iz dobijenog rezultata može naći $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$?

Rešenje. 1° Kriva Γ je kvadrat čija su temena u tačkama

$$\pm\left(n+\frac{1}{2}\right) \pm i\left(n+\frac{1}{2}\right).$$



Za ma koju tačku M ovog kvadrata je $d_1+d_2=\overline{OC}$, tj.

$$\left|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right|=\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$$

ili

$$|x-y|+|x+y|=2n+1.$$

Ako je $|x-y|+|x+y|=2n+1$, onda se tačka $M(x, y)$ nalazi na nacrtanom kvadratu, što se pokazuje bez teškoće.

U dokazivanju nejednakosti koristićemo identitet

$$\operatorname{cotg}(\alpha+i\beta)=i\,\frac{e^{\alpha i}\cdot e^{-\beta}+e^{-\alpha i}\cdot e^{\beta}}{e^{\alpha i}\cdot e^{-\beta}-e^{-\alpha i}\cdot e^{\beta}}.$$

Ako se z nalazi na strani AB kvadrata, onda je

$$z=x-i\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad \text{gde je} \quad -\left(n+\frac{1}{2}\right)\leqslant x\leqslant\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

U ovom slučaju biće

$$|\operatorname{cotg}\pi z|=\left|i\,\frac{e^{\pi x i}\cdot e^{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}+e^{-\pi x i}\cdot e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{e^{\pi x i}\cdot e^{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}-e^{-\pi x i}\cdot e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\right|\leqslant\frac{e^{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}+e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{e^{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}-e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}<2.$$

Ako se z nalazi na strani BC kvadrata, onda je

$$z=n+\frac{1}{2}+iy, \quad \text{gde je} \quad -\left(n+\frac{1}{2}\right)\leqslant y\leqslant\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

U ovom slučaju je

$$|\operatorname{cotg}\pi z|=\left|\operatorname{cotg}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+i\pi y\right)\right|=|-\operatorname{tg}(i\pi y)|=\left|\frac{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}\right|\leqslant 1<2.$$

Na osnovu jednakosti $|\operatorname{cotg}\pi(-z)|=|\operatorname{cotg}\pi z|$ zaključujemo da je $|\operatorname{cotg}\pi z|<2$ za $z\in CD$ i $z\in DA$.

Znači za $z\in\Gamma$ je $|\operatorname{cotg}\pi z|<2$, pa je tvrđenje dokazano.

2° Funkcija $f(z)=\dfrac{\pi\operatorname{cotg}\pi z}{z^{2l}+a^{2l}}\left(n>a-\dfrac{1}{2}\right)$ ima u unutrašnjosti kvadrata Γ polove prvog reda u tačkama $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, kao i u tačkama

$$z_k=a\,e^{\frac{2k+1}{2l}\pi i} \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\overline{l-1}, -l).$$

Ostaci su:

$$\operatorname*{Res}_{z=\nu} f(z)=\frac{1}{\nu^{2l}+a^{2l}}, \quad \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)=-\frac{\pi}{2\,l\,a^{2l-1}}\, e^{\frac{2k+1}{2l}\pi i} \operatorname{cotg}\Big(\pi a e^{\frac{2k+1}{2l}\pi i}\Big)$$

$$(\nu=0,\ \pm 1, \ldots, \pm n;\quad k=0,\ \pm 1, \ldots, \pm \overline{l-1},\ -l).$$

Prema *Cauchy*-evoj teoremi o ostacima je

$$(2)\qquad \oint_{z\in\Gamma} \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^{2l}+a^{2l}}\,dz$$

$$=2\pi i\left\{\sum_{\nu=-n}^{+n} \frac{1}{\nu^{2l}+a^{2l}}-\frac{\pi}{2\,l\,a^{2l-1}} \sum_{k=-l}^{l-1} e^{\frac{2k+1}{2l}\pi i} \operatorname{cotg}\Big(\pi a e^{\frac{2k+1}{2l}\pi i}\Big)\right\} \quad \Big(n>a-\frac{1}{2}\Big).$$

Koristeći nejednakost

$$\Big|\oint_{z\in\Gamma} f(z)\,dz\Big| \leqslant GL,$$

gde je G jedno gornje ograničenje za $|f(z)|\ (z\in\Gamma)$ i L dužina luka krive Γ, dobijamo

$$\Big|\oint_{\Gamma} \frac{\operatorname{cotg} z}{z^{2l}+a^{2l}}\,dz\Big| \leqslant 4(2n+1) \max_{z\in\Gamma} \Big|\frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^{2l}+a^{2l}}\Big| \leqslant \frac{8\pi(2n+1)}{\big(n+\frac{1}{2}\big)^{2l}-a^{2l}},$$

jer je

$$|\operatorname{cotg} \pi z|<2 \quad (z\in\Gamma) \quad \text{i} \quad \Big|\frac{1}{z^{2l}+a^{2l}}\Big| \leqslant \frac{1}{|z|^{2l}-a^{2l}} \leqslant \frac{1}{\big(n+\frac{1}{2}\big)^{2l}-a^{2l}}.$$

Kako je $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{8\pi(2n+1)}{\big(n+\frac{1}{2}\big)^{2l}-a^{2l}}=0$, zaključujemo

$$\lim_{n\to\infty} \oint_{\Gamma} \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^{2l}+a^{2l}}\,dz=0.$$

Ako sada u jednakosti (2) pustimo da $n\to\infty$, dobijamo relaciju

$$(3)\qquad \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\nu^{2l}+a^{2l}}=\frac{\pi}{2\,l\,a^{2l-1}} \sum_{k=-l}^{l-1} e^{\frac{2k+1}{2l}\pi i} \operatorname{cotg}\Big(\pi a e^{\frac{2k+1}{2l}\pi i}\Big).$$

Kako je $\displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\nu^{2l}+a^{2l}}=2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2l}+a^{2l}}+\frac{1}{a^{2l}}$, relacija (3) postaje

$$(4)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2l}+a^{2l}}=\frac{\pi}{4\,l\,a^{2l-1}} \sum_{k=-l}^{l-1} e^{\frac{2k+1}{2l}\pi i} \operatorname{cotg}\Big(\pi a e^{\frac{2k+1}{2l}\pi i}\Big)-\frac{1}{2a^{2l}}.$$

3° Iz (4) za $l=1$ dobijamo

$$(5)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2}+a^{2}}=\frac{\pi}{2a} \coth(a\pi)-\frac{1}{2a^{2}}.$$

Ova relacija prema navedenom dokazu važi za $a>0$; međutim, zbog parnosti funkcije $\displaystyle\Phi(a)=\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2}+a^{2}}$, ona važi i za $a<0$.

Potražimo granične vrednosti leve i desne strane jednakosti (4) kad $a\to 0$.

Red $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2+a^2}$ je neprekidna funkcija nezavisno promenljive a na segmentu $[-M, M]$, gde je $M(>0)$ proizvoljna konstanta, jer su članovi reda $\frac{1}{\nu^2+a^2}$ neprekidne funkcije i red $\sum \frac{1}{\nu^2+a^2}$ uniformno konvergira na segmentu $[-M, M]$, jer je $\frac{1}{\nu^2+a^2} \leqslant \frac{1}{\nu^2}$.

Koristeći neprekidnost u tački $a=0$, nalazimo da je

$$\lim_{a\to 0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2+a^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}.$$

Kako je

$$\lim_{a\to 0} \left(\frac{\pi}{2a} \frac{\operatorname{ch} a\pi}{\operatorname{sh} a\pi} - \frac{1}{2a^2} \right) = \lim_{a\to 0} \frac{a\pi \operatorname{ch} a\pi - \operatorname{sh} a\pi}{2a^2 \operatorname{sh} a\pi}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{a\pi \left\{ 1 + \frac{a^2\pi^2}{2} + o(a^2) \right\} - \left\{ a\pi + \frac{a^3\pi^3}{6} + o(a^3) \right\}}{2a^2 \{ a\pi + o(a) \}}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{\frac{1}{3} a^3\pi^3 + o(a^3)}{2a^3\pi + o(a^3)} = \frac{\pi^2}{6},$$

relacija (5) u graničnom slučaju postaje

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Primedba I. Navedenim metodom mogli smo naći $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$, integraleći duž konture Γ funkciju $\frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^2}$ i puštajući da u dobijenoj jednakosti $n\to\infty$. Osnovna razlika je sada u tome što je $z=0$ pol trećeg reda.

Primedba II. Redigovao *S. Prešić.*

VI. RAZNI PROBLEMI

274. Ako je

$$x+iy=(u+iv)^n \quad (n \text{ ceo broj; } x, y, u, v \text{ realni brojevi}),$$

pokazati da je $x^2+y^2=(u^2+v^2)^n$.

275. Gde leže tačke z u kompleksnoj ravni za koje važe relacije:

$$1^\circ \quad |z-i| \leqslant 1, \quad |z-1| \leqslant 1;$$

$$2^\circ \quad \pi/6 \leqslant \arg(z-1-i) \leqslant \pi/3\,?$$

276. Odrediti $z\,(=x+iy)$ iz uslova

$$|z/(z+1)|=1, \quad z/\bar{z}=i.$$

277. Data je funkcija

$$w(z) = u(x, y) + e^{i\theta} v(x, y)$$

{θ realna konstanta; $u(x, y)$ i $v(x, y)$ funkcije od x i y, i to takve da $w(z)$ ima izvod}.

Pod kojim se uglom seku krive

$$u(x, y) = \text{const}, \qquad v(x, y) = \text{const}?$$

Rezultat. Pod uglom θ.

278. Odrediti singularitete funkcija

$$e^z/(z \sin az); \quad z e^z/(\sin az) \quad (a \text{ parametar})$$

u proširenoj kompleksnoj ravni.

279. Dokazati identitet

$$(e^{it} + e^{i\theta})^n + (e^{-it} + e^{-i\theta})^n \equiv 2^{n+1} \cos^n \frac{\theta - t}{2} \cos n \frac{\theta + t}{2}$$

(t, θ realni brojevi; n ceo broj).

280. Polazeći od identiteta

$$i \operatorname{tg} \theta \equiv -1 + \frac{e^{i\theta}}{\cos \theta} \qquad (\cos \theta \neq 0),$$

sumirati

$$S \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\cos k\theta}{(\cos \theta)^k}.$$

Rezultat. $S = 0$ (n neparan broj);

$S = (-1)^{n/2} \operatorname{tg}^n \theta$ (n paran broj).

281. Odrediti realni i imaginarni deo sledećih funkcija:

1° $(ae^{it} + be^{i\theta})/(ae^{it} - be^{i\theta})$ (a, b, t, θ realni brojevi);

2° $1/(1 - e^z)$; 3° $1/\sin z$.

282. Ako se realan parametar t menja, odrediti geometrisko mesto tačke z koja je definisana relacijama:

1° $z = \exp(it)$; 2° $z = t \exp(\pi i/6)$; 3° $z = t + \exp(it)$;

4° $z = a + b \exp(it)$; 5° $z = a + bt + ct^2$

(a, b, c kompleksni brojevi).

283. Rešiti jednačinu $\sin z = 2$.

284. Odrediti nule funkcija:

1° $\operatorname{sh} z$; 2° $\operatorname{ch} z$; 3° $\operatorname{ch} z - \frac{1}{2}$; 4° $\operatorname{sh} z - i$.

285. Na kojim je krivim u z-ravni funkcija $f(z) = \operatorname{ch} z$ 1° realna; 2° čisto imaginarna?

286. Koju trajektoriju treba da opiše tačka z da bi funkcija e^z bila: 1° realna; 2° čisto imaginarna?

Rezultat. 1° $y = k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;
2° $y = (2k+1)\pi/2 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

287. Pokazati da je:

$$|\sin(x+iy)| = |\sin x + \sin iy|, \qquad |\operatorname{sh}(x+iy)| = |\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} iy|$$

(x, y realni brojevi).

Primedba. R. M. Robinson (*The American Mathematical Monthly*, vol. 64, 1957, p. 83—85) dokazao je sledeću teoremu:

Ako je funkcija $f(z)$ regularna za $|z| < r$ i zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$|f(x+iy)| = |f(x) + f(iy)| \qquad (x,\ y \text{ realni brojevi}),$$

tada funkcija $f(z)$ ima jedan od oblika

$$Az, \quad A \sin bz, \quad A \operatorname{sh} bz,$$

gde je A ma kakva kompleksna konstanta i b ma kakva realna konstanta.

U vezi sa ovim videti i članak:

E. Hille: A Pythagorean functional equation (*Annals of Mathematics*, vol. 24, 1922, p. 175—180).

Hille je došao do istog zaključka za funkcionalnu jednačinu

$$|f(x+iy)|^2 = |f(x)|^2 + |f(iy)|^2.$$

288. Proveriti da li je

$$(1) \qquad |z_1| + |z_2| = \frac{\sqrt{2}}{|a|} \sqrt{|b^2| + |ac| + |b^2 - ac|},$$

gde su z_1 i z_2 koreni kvadratne jednačine

$$az^2 + 2bz + c = 0.$$

Rešenje. Ako se identitet (videti ovaj *Zbornik*, str. 6, zad. 16)

$$|u+v| + |u-v| = |u + (u^2 - v^2)^{1/2}| + |u - (u^2 - v^2)^{1/2}|$$

primeni na korene

$$z_{1,2} = \frac{1}{a}[-b \pm (b^2 - ac)^{1/2}],$$

dobija se

$$|z_1| + |z_2| = \frac{1}{|a|}[|b + (ac)^{1/2}| + |b - (ac)^{1/2}|].$$

Ako se leva i desna strana kvadriraju, biće

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = \frac{1}{|a|^2}[(b + \sqrt{ac})(\overline{b} + \overline{\sqrt{ac}})$$
$$+ (b - \sqrt{ac})(\overline{b} - \overline{\sqrt{ac}}) + 2|b^2 - ac|]$$
$$= \frac{2}{|a|^2}[|b|^2 + |ac| + |b^2 - ac|].$$

Odavde izlazi relacija (1).

289. Nacrtati geometrisko mesto tačke z za koju je

$$|e^{iz}+1|=1.$$

290. Odrediti u obliku $a+ib$ (a, b realni brojevi) sva rešenja jednačine

$$\cos^2 z=\frac{1}{2}(1+i).$$

291. Pokazati da jednačina $e^z=z$ ima beskonačno mnogo imaginarnih rešenja.

292. Po z rešiti jednačinu

(1) $$(z+1)^n=e^{2nai} \quad (a \text{ realan broj; } n \text{ prirodan broj}).$$

Izračunati $\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+k\frac{\pi}{n}\right)$, odredivši prethodno $\prod_{k=0}^{n-1} z_k$, gde su z_k koreni jednačine (1).

293. Odrediti singularitete funkcija:

1° $(1+\sqrt{z})^2+(1-\sqrt{z})^2$, 2° $\cos\sqrt{z}$,

3° $\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{z}}$, 4° $\sqrt{z}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$.

Primedba. Tačka $z=0$ nije kritički singularitet ni za jednu od funkcija pod 1°, 2°, 3°. Obrazložiti ovu činjenicu.

294. Odrediti singularitete funkcija:

1° $\sqrt{\mathrm{Arc}\sin z-1}$; 2° $1/\mathrm{Log}\,(z-i)$; 3° $\sqrt[n]{\mathrm{Arg}\,\mathrm{sh}\,z}$ (n prirodan broj).

Ispitati prirodu tačke $z=\infty$.

295. Sumirati izraze:

$$s_n=1+\frac{\sin x}{\sin x}+\frac{\sin 2x}{\sin^2 x}+\cdots+\frac{\sin nx}{\sin^n x},$$

$$\sigma_n=1+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}+\cdots+\frac{\cos nx}{\sin^n x},$$

gde je $\sin x\neq 0$.

Rešenje. Ako se obrazuje $\sigma_n+i(s_n-1)$, dobija se

$$\sigma_n+i(s_n-1)=1+\frac{\cos x+i\sin x}{\sin x}+\frac{\cos 2x+i\sin 2x}{\sin^2 x}+\cdots+\frac{\cos nx+i\sin nx}{\sin^n x}$$

$$=1+\frac{e^{ix}}{\sin x}+\frac{e^{2ix}}{\sin^2 x}+\cdots+\frac{e^{nix}}{\sin^n x}$$

$$=\frac{\dfrac{e^{(n+1)ix}}{\sin^{n+1}x}-1}{\dfrac{e^{ix}}{\sin x}-1}=\frac{1}{\sin^n x}\,\frac{e^{(n+1)ix}-\sin^{n+1}x}{e^{ix}-\sin x}.$$

Odavde je

$$\sigma_n = \frac{1}{\sin^n x} \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{(n+1)ix} - \sin^{n+1} x}{e^{ix} - \sin x}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^n x}\left\{\frac{e^{(n+1)ix} - \sin^{n+1} x}{e^{ix} - \sin x} + \frac{e^{-(n+1)ix} - \sin^{n+1} x}{e^{-ix} - \sin x}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sin^n x}\;\frac{\sin^{n+2} x - \sin^{n+1} x \cos x - \sin x \cos(n+1)x + \cos nx}{1 - 2\sin x \cos x + \sin^2 x};$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sin^n x} \operatorname{Im}\left\{\frac{e^{(n+1)ix} - \sin^{n+1} x}{e^{ix} - \sin x}\right\}$$

$$= \frac{2\sin^{n+2} x - 2\sin^{n+1} x \cos x + \sin^n x - \sin(n+1)x \sin x + \sin nx}{\sin^n x\,(\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 1)}.$$

296. Ako tačka z opisuje putanju

$$\left| z + \frac{b}{z} \right| = a \qquad (a > 0;\ b \text{ kompleksno}),$$

kolika je najveća i najmanja vrednost modula $|z|$?

Rezultat. Ako je $b = 1$, tada je

$$\max|z| = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4} + a),$$

$$\min|z| = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4} - a).$$

Primedba. U časopisu *Математическое просвещение* (№ 5, 1960, str. 265—266) postavljen je i rešen gornji problem za slučaj kada je $b = 1$.

Do rešenja se može takođe doći ako se pođe od relacije

$$|z| = \left| z + \frac{b}{z} - \frac{b}{z} \right| \leqslant \left| z + \frac{b}{z} \right| + \frac{|b|}{|z|} = a + \frac{|b|}{|z|}.$$

D. Đoković je naveo sledeće rešenje.

Stavimo li $z = \rho e^{i\theta}$, $b = Be^{i\beta}$ $(\rho,\ B > 0)$, jednačina putanje postaje

$$\left| \rho\cos\theta + \frac{B}{\rho}\cos(\beta - \theta) + i\left\{\rho\sin\theta + \frac{B}{\rho}\sin(\beta-\theta)\right\}\right| = a$$

ili

(1) $$\rho^2 + \frac{B^2}{\rho^2} = a^2 - 2B\cos(\beta - 2\theta).$$

Nacrtajmo dijagrame funkcija

(2) $$y = f(x) = x + \frac{B^2}{x} \qquad (x > 0),$$

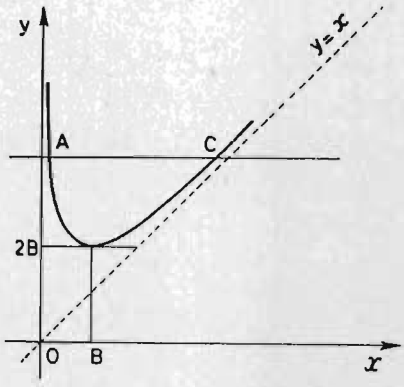
(3) $$y = a^2 - 2B\cos(\beta - 2\theta).$$

Funkcija $f(x)$ ima dve asimptote: y-osu i pravu $y = x$ i ima samo jedan minimum $f_{\min} = 2B$ za $x = B$.

Jednačina (3) pretstavlja pravu paralelnu sa x-osom, čije se rastojanje od x-ose u funkciji parametra θ menja između $a^2 - 2B$ i $a^2 + 2B$.

Za izabrano θ apscise presečnih tačaka krivih (2) i (3) daju kvadrate odgovarajućih vrednosti ρ. Sa slike se vidi da se za x, pri određenom θ, dobijaju dve vrednosti koje odgovaraju tačkama A i C.

Ekstremne vrednosti za x (pa prema tome i za ρ) dobijaju se kad je prava (3) najudaljenija od x-ose. U tom slučaju njena jednačina glasi:



(4) $$y=a^2+2B.$$

Izjednačavanjem desnih strana jednačina (2) i (4) i zamenom $x=\rho^2$ dobijamo jednačinu

$$\rho^2+\frac{B^2}{\rho^2}=a^2+2B,$$

koja određuje ekstremne vrednosti za ρ.

Pozitivni koreni ove jednačine su:

$$\rho=\frac{+\sqrt{a^2+4B}\pm a}{2}.$$

Prema tome je

$$\min|z|=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4|b|}-a\right),$$

$$\max|z|=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4|b|}+a\right).$$

Ostavlja se čitaocu da detaljnijom analizom nacrtanog dijagrama izvuče potrebne zaključke o obliku krive $\left|z+\frac{b}{z}\right|=a$ za različite vrednosti parametara a i b.

297. Dokazati *Pompeïu*-ov stav:

Ako je u ravni dat fiksni ravnostrani trougao ABC i ako je I proizvoljna tačka u toj ravni, pomoću duži IA, IB, IC može se uvek konstruisati trougao.

Dokaz. Navešćemo dokaz samog autora stava. U kompleksnoj ravni tačke z posmatrajmo identitet

(1) $$z_1(z_2-z_3)+z_2(z_3-z_1)+z_3(z_1-z_2)\equiv 0,$$

gde su z_1, z_2, z_3 afiksi triju tačaka A, B, C u z-ravni. Posmatrajmo još jednu tačku I čiji je afiks z_0. Za nju važi relacija

(2) $$z_0(z_2-z_3)+z_0(z_3-z_1)+z_0(z_1-z_2)\equiv 0.$$

Iz (1) i (2) oduzimanjem dobija se

(3) $$(z_0-z_1)(z_2-z_3)+(z_0-z_2)(z_3-z_1)+(z_0-z_3)(z_1-z_2)\equiv 0.$$

Ako je trougao ABC ravnostran, tada je

(4) $$|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=|z_1-z_2|.$$

U ovom slučaju iz (3) sleduje

$$|z_0-z_1|\leqslant|z_0-z_2|+|z_0-z_3|,$$

$$|z_0-z_1|\geqslant|z_0-z_2|-|z_0-z_3|.$$

Analogne nejednakosti mogu se izvesti za module

$$|z_0-z_2| \quad \text{i} \quad |z_0-z_3|.$$

Prema tome, navedeni stav je dokazan.

Ovaj stav (formulisan 1936) izazvao je veliko interesovanje matematičara i inspirisao mnogobrojne članke rumunskih matematičara (*E. Abason, A. Angelesco, H. Popa, D. Barbilian, G. Bratu* i dr.), kao i drugih matematičara (*N. Obreškov, P. Montel, M. Zacharias, M. Petrović, S. V. Pavlović* i dr.). *Pompeiu* je jedan od najistaknutijih matematičara u Rumuniji.

Primedba I. *Đoković* je dao sledeći dokaz *Pompeiu*-ovog stava.

Neka su z_1, z_2, z_3 afiksi temena A, B, C jednog direktno orijentisanog ravnostranog trougla. Ako sa z_g označimo afiks težišta tog trougla i uvedemo oznaku $z=z_1-z_g$, tada je

(1) $$z_1=z_g+z, \quad z_2=z_g+z\varepsilon, \quad z_3=z_g+z\varepsilon^2 \qquad \left(\varepsilon=\exp\frac{2\pi i}{3}\right).$$

Neka je z_0 afiks tačke I. Pokazaćemo da važi relacija

(2) $$(z_0-z_1)+(z_0-z_2)\,\varepsilon+(z_0-z_3)\,\varepsilon^2=0.$$

Zaista, zamenom izraza (1) u (2) dobijamo identitet

$$(z_0-z_1)+(z_0-z_2)\,\varepsilon+(z_0-z_3)\,\varepsilon^2=(z_0-z_g-z)\,(1+\varepsilon+\varepsilon^2)=0,$$

jer je $\varepsilon^3=1$ i $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$.

Posmatrajmo sada trougao čija su temena u tačkama

$$0, \quad z_0-z_1, \quad -(z_0-z_2)\,\varepsilon.$$

Dužine njegovih strana su:

$$|(z_0-z_1)-0|=|z_0-z_1|=\overline{IA},$$

$$|-(z_0-z_2)\,\varepsilon-0|=|z_0-z_2|=\overline{IB},$$

$$|(z_0-z_1)+(z_0-z_2)\,\varepsilon|=|-(z_0-z_3)\,\varepsilon^2|=|z_0-z_3|=\overline{IC}.$$

Prema tome, stav je dokazan.

Primedba II. *С. И. Зетель* u svojoj knjizi *Задачи на максимум и минимум* (Moskva— Lenjingrad, 1944, str. 135—142, zadaci: 213—224) posvetio je *Pompeiu*-ovom stavu posebnu pažnju.

Зетель ovako formuliše *Pompeiu*-ov stav:

Iz tri duži, koje se dobijaju spajanjem temena ravnostranog trougla s proizvoljnom tačkom I u njegovoj ravni, mogućno je konstruisati ili trougao ili jednu od tri date duži koja je jednaka zbiru ostale dve duži.

Ovaj poslednji slučaj nastupa kada se tačka I nalazi na krugu opisanom oko datog ravnostranog trougla.

U navedenoj knjizi dato je nekoliko geometriskih dokaza *Pompeiu*-ovog stava.

298. Dokazati identitet

(1) $$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}} \qquad (n \text{ prirodan broj } >1).$$

Dokaz. Pođimo od identiteta

$$\frac{x^n-1}{x-1}\equiv x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1 \qquad (x\neq 1).$$

Nule funkcije x^n-1 su

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \ldots,\ \varepsilon^{n-1} \qquad \{\varepsilon\equiv\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)\}.$$

Prema tome, postoji sledeća faktorizacija

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\equiv(x-\varepsilon)\,(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1}).$$

Ako je $x=1$, dobija se

$$n=(1-\varepsilon)\,(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{n-1}),$$

kao i

(2) $$n^2=|1-\varepsilon|^2|1-\varepsilon^2|^2\cdots|1-\varepsilon^{n-1}|^2.$$

Kako je

$$|1-\varepsilon^k|^2 = 1 + (\varepsilon\bar{\varepsilon})^k - (\varepsilon^k + \bar{\varepsilon}^k) = 2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right) = 4\sin^2\frac{k\pi}{n},$$

iz (2) dobija se identitet (1).

299. Dokazati faktorizaciju

(1) $$x^{2n+1}+1 \equiv (x+1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$$

i iz nje izvesti formule

(2) $$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1} \equiv \frac{1}{2^n}; \quad \prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1} \equiv \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

Rešenje. Pođimo od identiteta

$$x^{2n+1}+1 \equiv (x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+\cdots+1),$$

odnosno od $f(x) \equiv (x+1)\,g(x)$, gde je

$$f(x) \equiv x^{2n+1}+1, \qquad g(x) \equiv x^{2n}-x^{2n-1}+\cdots-x+1.$$

Nule funkcije $f(x)$ su

$$x_k = \exp\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi i\right) \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm n).$$

Za $k=n$ biće $x_n = -1$.

Prema tome, nule funkcije $g(x)$ su

(3) $$x_k = \exp\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi i\right) \qquad \{k=(n-1,\ -n);\ (n-2,\ -\overline{n-1});\ldots;\ (0,\ -1)\}.$$

Ako se koreni (3) grupišu po parovima koji odgovaraju indeksima izdvojenim u okruglim zagradama, dobija se

(4) $$g(x) \equiv \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k+1}{2n+1}\pi+1\right).$$

Budući da je

$$\cos\frac{2k+1}{2n+1}\pi = -\cos\left(1-\frac{2k+1}{2n+1}\right)\pi = -\cos\frac{2(n-k)}{2n+1}\pi,$$

formula (4) postaje

$$g(x) \equiv \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2+2x\cos\frac{2(n-k)}{2n+1}\pi+1\right).$$

Poslednja formula može se napisati i u obliku

(5) $$g(x) \equiv \prod_{k=1}^{n}\left(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right).$$

Za $x=1$ formula (5) postaje

$$1 = \prod_{k=1}^{n} 2\left(1+\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(2\cos\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2.$$

$$\therefore \quad \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}.$$

Iz (5) za $x=-1$ sleduje

$$2n+1=\prod_{k=1}^{n} 2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(2\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2.$$

$$\therefore\quad \prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

300. Dokazati faktorizaciju

$$\text{(1)}\qquad x^{2n}-1\equiv(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)\qquad (n \text{ prirodan broj} >1)$$

i na osnovu nje izvesti formule

$$\text{(2)}\qquad \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},\qquad \prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Rešenje. $x^{2n}-1\equiv(x^2-1)(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots+1)$.

Sve nule funkcije $g(x)\equiv x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots+1$ takođe su nule funkcije $f(x)\equiv x^{2n}-1$. Sve nule funkcije $f(x)$, osim $x=\pm1$, jesu nule funkcije $g(x)$.

Prema tome, nule funkcije $g(x)$ odredićemo iz relacije

$$x^{2n}-1=0\quad (x\neq\pm1).$$

One su

$$x_k=\exp(k\pi i/n)\quad (k=\pm1,\ \pm2,\ldots,\pm\overline{n-1}).$$

Stoga je

$$\text{(3)}\qquad g(x)\equiv\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-x_{-k})\equiv\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right).$$

Za $x=1$ relacija (3) postaje

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}2\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(2\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2.$$

Odavde se dobija

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Relacija (3) za $x=-1$ postaje

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}2\left(1+\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(2\cos\frac{k\pi}{2n}\right)^2.$$

Odavde izlazi

$$\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

301. Dokazati faktorizacije:

$$\text{(1)}\qquad x^{2n+1}-1\equiv(x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right);$$

$$\text{(2)}\qquad x^{2n}+1\equiv\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+1\right).$$

Šta se iz (1) i (2) dobija kada se stavi $x=-1$ i $x=+1$?

Primedba. Relacija (1) može se dobiti iz relacije (1) u zadatku 299 ako se umesto x stavi $-x$.

302. Dokazati relaciju

$$\prod_{k=1}^{n} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}.$$

303. Sumirati

(1) $$n\cos\theta + (n-1)\cos 2\theta + \cdots + 1\cos n\theta.$$

Rešenje. Poći ćemo od identiteta

(2) $$z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1 \equiv (z^{n+1}-1)/(z-1) \qquad (z \neq 1),$$

gde je $z = e^{i\theta}$ (θ realan broj).

Iz (2) sleduje

$$|z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1|^2 \equiv |(z^{n+1}-1)/(z-1)|^2$$

odnosno

$$\{e^{ni\theta} + e^{(n-1)i\theta} + \cdots + e^{i\theta} + 1\}\{e^{-ni\theta} + e^{-(n-1)i\theta} + \cdots + e^{-i\theta} + 1\}$$

$$\equiv \frac{e^{(n+1)i\theta}-1}{e^{i\theta}-1} \cdot \frac{e^{-(n+1)i\theta}-1}{e^{-i\theta}-1}.$$

Odavde izlazi

$$(n+1) + 2\{n\cos\theta + (n-1)\cos 2\theta + (n-2)\cos 3\theta + \cdots + 1\cos n\theta\}$$

$$\equiv \sin^2\frac{n+1}{2}\theta \Big/ \sin^2\frac{1}{2}\theta \qquad \left(\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0\right).$$

Poslednjoj relaciji može se dati i sledeći oblik

(3) $$\sum_{k=1}^{n} k\cos(n-k+1)\theta \equiv \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}\theta}{\sin^2\frac{1}{2}\theta} - \frac{1}{2}(n+1).$$

Ako se u (3) umesto n stavi $n-1$, dobija se

$$(n-1)\cos\theta + (n-2)\cos 2\theta + \cdots + 1\cos(n-1)\theta \equiv \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\frac{n}{2}\theta}{\sin^2\frac{1}{2}\theta} - \frac{1}{2}n.$$

Stavimo li ovde $\theta = 2\pi/n$, dobijamo

$$(n-1)\cos\left\{1\cdot\frac{2\pi}{n}\right\} + (n-2)\cos\left\{2\cdot\frac{2\pi}{n}\right\} + \cdots + 1\cos\left\{(n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right\} \equiv -\frac{n}{2} \qquad (n > 1).$$

Poslednja relacija izvedena je u ovom *Zborniku* na str. 23, problem **75.**

Pólya i *Szegö* izveli su formulu (3) drugim putem, koji je nešto duži od napred izloženog (videti knjigu: *G. Pólya — G. Szegö*: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. II, 1925, S. 78).

Primedba. Ako se pođe od identiteta

$$\frac{z^{2n}-1}{z+1} \equiv z^{2n-1} - z^{2n-2} + \cdots + z - 1 \qquad (z \neq -1),$$

gde je $z = e^{i\theta}$ (θ realan broj), dobija se

(4) $$(2n-1)\cos\theta - (2n-2)\cos 2\theta + \cdots + 1\cos(2n-1)\theta \equiv n - \frac{\sin^2 n\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} \qquad \left(\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0\right).$$

Za izvođenje relacije (4) treba upotrebiti identitet

$$\left(\frac{z^{2n}-1}{z+1}\right)\overline{\left(\frac{z^{2n}-1}{z+1}\right)} \equiv (z^{2n-1} - z^{2n-2} + \cdots + z - 1)\,\overline{(z^{2n-1} - z^{2n-2} + \cdots + z - 1)},$$

gde je $z = e^{i\theta}$.

304. Date su funkcije

$$f(z) \equiv \frac{1-\cos z}{z^a}, \quad g(z) \equiv \frac{e^z-1-z}{z^a} \quad (a \text{ ma kakva konstanta}).$$

Za razne vrednosti parametra a odrediti singularitete ovih funkcija koji se nalaze na konačnoj daljini.

305. 1° Ako postoji analitička funkcija $f(z)\{\equiv u(x,y)+iv(x,y)\}$ čiji je realni deo

$$u(x,y) \equiv (\sin 2x)/(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y),$$

odrediti odgovarajući imaginarni deo $v(x,y)$ koji zadovoljava uslov $v(x,0)=0$.

2° Ako je mogućno, razviti funkciju $f(z)$ u potencijalni red u okolini početka.

3° Odrediti z tako da bude $f(z)=1+i$.

306. Data je funkcija

$$G(z) \equiv z/(z-1).$$

Ispitati singularitete funkcija: $G(z)$, $e^{G(z)}$, $\operatorname{Log} G(z)$.

Kakva je za njih tačka $z=\infty$?

307. Odrediti broj rešenja jednačine

$$\operatorname{tg} z = az \quad (a \text{ realan broj}; \ z = x+iy). \tag{1}$$

Rešenje. Grafičkim putem uveravamo se da jednačina (1) ima beskonačno mnogo realnih rešenja.

Pretpostavićemo sada da je $y \neq 0$.

Stavimo $z=x+iy$ u (1) i izjednačimo realne i imaginarne delove, pa dobijamo

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} = ax, \quad \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} = ay. \tag{2}$$

Ako je $x \neq 0$, iz (2) sleduje

$$\frac{\sin 2x}{x} = \frac{\operatorname{sh} 2y}{y}.$$

Ova jednakost je nemogućna, jer za svako $x\,(\neq 0)$ i $y\,(\neq 0)$ važe nejednakosti

$$\frac{\sin 2x}{2x} < 1, \quad \frac{\operatorname{sh} 2y}{2y} > 1.$$

Prema tome, ostaje mogućnost $x=0$. Tada, prema (2), za određivanje y imamo jednačinu

$$\frac{\operatorname{sh} 2y}{1+\operatorname{ch} 2y} = ay, \quad \text{tj.} \quad \operatorname{th} y = ay. \tag{3}$$

Grafičkim putem dolazi se do ovog zaključka:

1° Ako je $a \leqslant 0$ ili $a \geqslant 1$, jednačina (3) ima samo jedno rešenje, i to $y=0$, koje smo isključili iz razmatranja;

2° Ako je $0<a<1$, jednačina (3) ima dva realna rešenja različita od nule, tj. tada jednačina (1) ima dva rešenja, koja su čisto imaginarni brojevi.

308. Odrediti geometrisko mesto tačke $M(z)$ pod uslovom da

$$z + \frac{1}{z} - i \operatorname{Log} z$$

bude realno.

Rešenje. Stavimo li $z=\rho e^{i\theta}$, dobijamo

$$z+\frac{1}{z}-i\operatorname{Log} z=\left\{\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta+\theta+2k\pi\right\}+i\left\{\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta-\log\rho\right\}.$$

Traženo geometrisko mesto je kriva čija je jednačina

$$\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta=\log\rho.$$

Ostaje još da se nacrta ova kriva.

309. Odrediti nule funkcije $f(z)\equiv\cos z-\operatorname{ch} z$. Da li ova funkcija ima neku nulu čiji je red viši od jedan?

Rešenje. Kako je

$$\cos z-\operatorname{ch} z=\cos z-\cos iz=-2\sin\left(\frac{1+i}{2}z\right)\sin\left(\frac{1-i}{2}z\right),$$

nule funkcije $f(z)$ određene su jednačinama:

$$\sin\left(\frac{1+i}{2}z\right)=0,\qquad \sin\left(\frac{1-i}{2}z\right)=0.$$

Odavde sleduje

$$z=k\pi(1-i),\quad z=n\pi(1+i)\quad (k, n=0, \pm 1, \pm 2,\ldots).$$

Sve nule raspoređene su na pravama $y=x$ i $y=-x$. Jedina dvostruka nula je $z=0$.

Primedba. Da je $z=0$ dvostruka nula funkcije $f(z)$, uveravamo se takođe pomoću izraza

$$\lim_{z\to 0} z\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

310. Odrediti nule funkcija:

$$\sin az-\operatorname{sh} bz,\quad \cos az-\operatorname{sh} bz\qquad (a, b \text{ kompleksni brojevi}).$$

311. Odrediti uslove koje moraju ispunjavati kompleksni brojevi p i q da bi funkcija

$$f(z)\equiv\sin pz-\cos qz\qquad (z=x+iy)$$

imala pored prostih nula i nule drugog reda.

Ako su ti uslovi ispunjeni, navesti koje su nule dvostruke.

312. Ako je $z=x+iy$, pokazati da važe formule:

$$\cos z=\cos x\operatorname{ch} y-i\sin x\operatorname{sh} y;\quad \sin z=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{\operatorname{tg} x(1-\operatorname{th}^2 y)}{1+\operatorname{tg}^2 x\operatorname{th}^2 y}+i\frac{\operatorname{th} y(1+\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x\operatorname{th}^2 y};$$

$$\operatorname{ch} z=\operatorname{ch} x\cos y+i\operatorname{sh} x\sin y;\quad \operatorname{sh} z=\operatorname{sh} x\cos y+i\operatorname{ch} x\sin y;$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{th} x(1+\operatorname{tg}^2 y)}{1+\operatorname{th}^2 x\operatorname{tg}^2 y}+i\frac{\operatorname{tg} y(1-\operatorname{th}^2 x)}{1+\operatorname{th}^2 x\operatorname{tg}^2 y}.$$

313. Dokazati formule:

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}, \qquad |\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y};$$

$$|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\sin^2 y + \operatorname{sh}^2 x}, \qquad |\operatorname{ch} z| = \sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x};$$

$$|\operatorname{sh} y| \leqslant |\sin z| \leqslant \operatorname{ch} y, \qquad |\operatorname{sh} y| \leqslant |\cos z| \leqslant \operatorname{ch} y;$$

$$|\operatorname{sh} x| \leqslant |\operatorname{sh} z| \leqslant \operatorname{ch} x, \qquad |\operatorname{sh} x| \leqslant |\operatorname{ch} z| \leqslant \operatorname{ch} x$$

$$(z = x + iy).$$

Uputstvo. Poći od formula:

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Tako se, na primer, dobija

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y \\ &= \sin^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y) + (1 - \sin^2 x) \operatorname{sh}^2 y \\ &= \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y. \end{aligned}$$

Iz formule

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x$$

sleduje

$$|\sin z| \geqslant |\operatorname{sh} y|, \quad |\sin z| \leqslant \operatorname{ch} y,$$

odnosno

$$|\operatorname{sh} y| \leqslant |\sin z| \leqslant \operatorname{ch} y.$$

314. Ako je m ceo broj, dokazati formule:

1° $\operatorname{sh}(m\pi i) = 0$; 2° $\operatorname{ch}(m\pi i) = \cos m\pi = (-1)^m$;

3° $\operatorname{th}(m\pi i) = 0$; 4° $\operatorname{sh}(x + m\pi i) = (-1)^m \operatorname{sh} x$;

5° $\operatorname{ch}(x + m\pi i) = (-1)^m \operatorname{ch} x$.

315. Dokazati nejednakosti:

1° $|\cos z| \leqslant \operatorname{ch}|z|$; 2° $|\sin z| \leqslant \operatorname{sh}|z|$.

Rešenje.

1° $$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \quad \therefore \quad |\cos z| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{(2k)!}.$$

$$\therefore \quad |\cos z| \leqslant \operatorname{ch}|z|.$$

2° $$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad \therefore \quad |\sin z| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$\therefore \quad |\sin z| \leqslant \operatorname{sh}|z|.$$

316. Odrediti singularitete funkcije

$$f(z) \equiv \frac{1}{\sin z - \cos(1/z)}$$

i prirodu tačke $z = \infty$.

Izračunati $\oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz$.

317. Data je funkcija

$$f(z) \equiv \frac{1}{z^2 + 2\lambda z - 1} \quad (\lambda \text{ pozitivna konstanta}).$$

1° Odrediti singularitete funkcije $f(z)$ i prirodu tačke $z = \infty$.

2° Naći vrednost integrala $\oint f(z)\, dz$ duž kruga $|z| = 1$.

3° Rastavljajući ovaj integral na realni i imaginarni deo, izračunati realni integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin^2 t + \lambda^2}.$$

4° U okolini tačke $z = \infty$ razviti funkciju $z^2 f(z)$ u *Laurent*-ov red.

5° Pokazati da je koeficijent od z^{-n} polinom stepena n po λ. Odrediti korene tog polinoma i pokazati da se oni nalaze na imaginarnoj osi.

318. Naći analitičku funkciju $f(z)$ koja na krugu $|z| = 1$ ima vrednost

$1/(a + i \cos \varphi)$ (φ argument promenljive z; a realna konstanta).

Primenom računa ostataka, na osnovu gornjeg, izračunati

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + i \cos \varphi}.$$

Ispitati ponašanje integrala $I(a)$ kad a teži nuli.

319. Ako z teži beskonačnosti po pravama koje prolaze kroz koordinatni početak osim po apscisnoj osi, izračunati $\lim\limits_{z \to \infty} \operatorname{tg} z$.

Rešenje. Pođimo od formule

$$\operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}.$$

Stavi li se ovde $z = \rho e^{i\theta}$, dobija se

$$\operatorname{tg}(\rho e^{i\theta}) = \frac{\sin(2\rho\cos\theta) + i \operatorname{sh}(2\rho\sin\theta)}{\operatorname{ch}(2\rho\sin\theta) + \cos(2\rho\cos\theta)}$$

$$= \operatorname{th}(2\rho\sin\theta) \cdot \frac{i + \{\sin(2\rho\cos\theta)\} / \{\operatorname{sh}(2\rho\sin\theta)\}}{1 + \{\cos(2\rho\cos\theta)\} / \{\operatorname{ch}(2\rho\sin\theta)\}}.$$

Ako je $0 < \theta < \pi$, tada

$$\operatorname{th}(2\rho\sin\theta) \to 1, \quad \text{ako} \quad \rho \to \infty.$$

Ako je $\pi < \theta < 2\pi$, tada

$$\operatorname{th}(2\rho\sin\theta) \to -1, \quad \text{ako} \quad \rho \to \infty.$$

Za $0 < \theta < \pi$ i za $\pi < \theta < 2\pi$, izraz

$$\frac{i + \{\sin(2\rho\cos\theta)\} / \{\operatorname{sh}(2\rho\sin\theta)\}}{1 + \{\cos(2\rho\cos\theta)\} / \{\operatorname{ch}(2\rho\sin\theta)\}} \to i, \quad \text{kada} \quad \rho \to \infty.$$

Prema tome, ako se z udaljava u beskonačnost polazeći od koordinatnog početka u smeru gde je $y > 0$, tada $\operatorname{tg} z \to i$. Ako se z udaljava u beskonačnost u smeru gde je $y < 0$, tada $\operatorname{tg} z \to -i$.

320. Ispitati da li funkcija

$$f(z) \equiv (z+a)\,e^{z}+(z-a)\,e^{-z} \qquad (a \text{ pozitivna konstanta})$$

ima i drugih nula osim čisto imaginarnih.

Rešenje. Posmatrajmo module

$$|(z+a)\,e^{z}|=e^{x}\sqrt{(x+a)^2+y^2}, \quad |(z-a)\,e^{-z}|=e^{-x}\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Ako je $x>0$, tada je

$$|(z+a)\,e^{z}|>|(z-a)\,e^{-z}|,$$

jer je

$$e^{-x}<1<e^{x} \qquad (x>0),$$

$$|x+a|>|x-a| \qquad (a>0;\ x>0).$$

Kada je $x<0$, biće

$$|(z+a)\,e^{z}|<|(z-a)\,e^{-z}|,$$

jer je

$$e^{-x}>1>e^{x} \qquad (x<0),$$

$$|x+a|<|x-a| \qquad (a>0;\ x<0).$$

Ako je z jedna nula funkcije $f(z)$, funkcije

$$(z+a)\,e^{z}, \quad (z-a)\,e^{-z}$$

imaju jednake module za takvo z. Tada je $x=0$. Dakle, sve nule funkcije $f(z)$ su čisto imaginarne, oblika iy, gde y treba odrediti iz transcendentne jednačine

$$y+a\operatorname{tg} y=0 \qquad (a>0).$$

Primedba. Uporediti sa zadatkom 307 iz ovog poglavlja.

321. Odrediti opšti oblik analitičke funkcije $f(z)=f(x+iy)$ čiji je realni deo neka funkcija od $t\,(=x+y)$. Ako je $f(0)>0$ i ako je $f'(0)$ u četvrtom kvadrantu ravni $f(z)$, u kome se kvadrantu z-ravni nalaze singulariteti funkcije $\dfrac{1}{f(z)}$?

322. Odrediti čemu teži

$$|e^{z}/z^{n}| \qquad (n \text{ prirodan broj})$$

kad $|z|\to\infty$, ako je

$$1^\circ \quad -\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}; \qquad 2^\circ \quad \frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}.$$

323. Funkciju

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f+i\,(Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F)$$

$$(a, b, \ldots;\ A, B, \ldots \text{ realni parametri})$$

izraziti pomoću z i $\bar{z}$.

Pod kojim će uslovima tako dobijena funkcija biti nezavisna od $\bar{z}$?

324. Odrediti kompleksan broj a tako da funkcija

$$f(z)=i\,\frac{a e^{iz}+1}{a e^{iz}-1}$$

zadovoljava uslov $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$.

325. Data je analitička funkcija

$$w=f(z)=\frac{z^2}{z^4+4}.$$

1° Odrediti nule ove funkcije kao i položaj i vrstu singulariteta.

2° Odrediti ostatke funkcije $f(z)$ u singularnim tačkama.

3° Izračunati integral $\oint\limits_{|z|=2} f(z)\,dz.$

4° Koje tačke w-ravni odgovaraju tačkama $z=0$, $z=\sqrt{2}$, $z=i\sqrt{2}$ koje leže u z-ravni? Na šta se preslikava kružni kvadrant

$$|z|\leqslant\sqrt{2}, \quad 0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}$$

transformacijom $w=f(z)$?

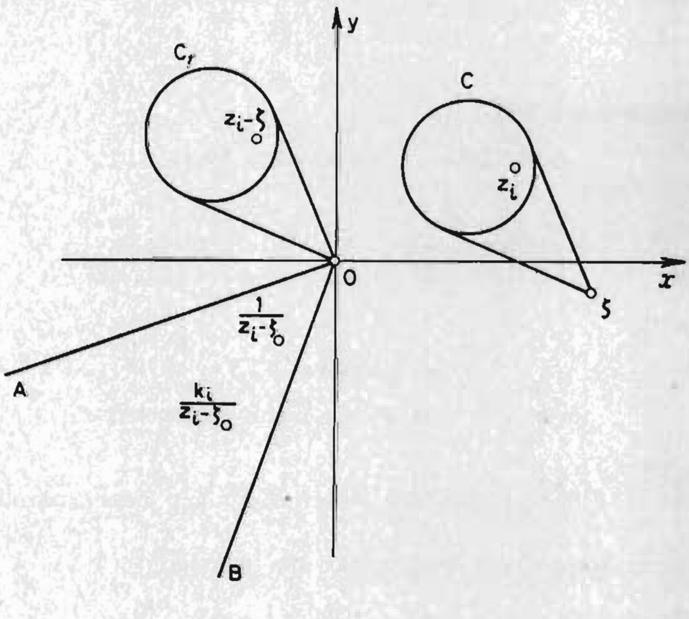
Uputstvo. Koristiti sukcesivne transformacije

$$z_1=z^2, \quad z_2=z_1+\frac{4}{z_1}, \quad w=\frac{1}{z_2}.$$

326. Dokazati *Lucas*-ovu teoremu:

Ako sve nule polinoma $P_n(z)$ leže u krugu C, onda i nule izvodnog polinoma $P_n'(z)$ leže u istom krugu.

Dokaz. Neka je $P_n(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_\nu)^{k_\nu}$ $(a_0\neq 0;\ k_1+k_2+\cdots+k_\nu=n)$



bilo koji polinom. Ako je $k_i>1$, onda $P_n'(z)$ ima nulu $z=z_i$. Zajedničke nule polinoma $P_n(z)$ i $P_n'(z)$ ispunjavaju uslove teoreme.

Neka je ς bilo koja nula polinoma $P_n'(z)$ koja nije nula polinoma $P_n(z)$. Ona zadovoljava relaciju

$$\frac{P_n'(\varsigma)}{P_n(\varsigma)}=\frac{k_1}{\varsigma-z_1}+\frac{k_2}{\varsigma-z_2}+\cdots+\frac{k_\nu}{\varsigma-z_\nu}=0,$$

odnosno

$$\frac{k_1}{z_1-\varsigma}+\frac{k_2}{z_2-\varsigma}+\cdots+\frac{k_\nu}{z_\nu-\varsigma}=0.$$

Pokažimo da ς leži u krugu C. Pretpostavimo da je tačno suprotno, tj. da ς nije u krugu C. Tada vidni ugao α kruga C iz tačke ς ispunjava uslov $0<\alpha\leqslant\pi$. Preslikavanjem $w_1=z-\varsigma$ krug C prelazi u krug C_1, a tačke z_i u tačke $z_i-\varsigma$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$ koje leže u krugu C_1. Preslikavanjem $w_2=\frac{1}{w_1}$ tačke $z_i-\varsigma$ prelaze u tačke $\frac{1}{z_i-\varsigma}$ koje se sve nalaze u uglu AOB (O koordinatni početak; $\sphericalangle AOB=\alpha$). U istom uglu nalaze se i tačke $\frac{k_i}{z_i-\varsigma}$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$.

Zbog ovoga je $\frac{k_1}{z_1-\varsigma}+\frac{k_2}{z_2-\varsigma}+\cdots+\frac{k_\nu}{z_\nu-\varsigma}\neq 0$, te pretpostavka da ς nije u krugu C otpada. Prema tome, *Lucas*-ova teorema je dokazana.

327. Ako sve nule polinoma $P_n(z)$ leže s jedne strane prave L, onda i sve nule izvodnog polinoma $P_n'(z)$ leže na istoj strani od te prave. Dokazati.

Dokaz. Transformacijom $z=z_0+e^{i\theta}w$ možemo učiniti da se prava L poklopi sa imaginarnom osom w-ravni i da se sve nule polinoma $P_n(z)$ preslikaju u polu-ravan $\operatorname{Re} w<0$.

Uvedimo oznaku $P_n(z)=P_n(z_0+e^{i\theta}w)=Q_n(w)$. Tada je

$$\frac{dQ_n}{dw}=e^{i\theta}\frac{dP_n}{dz}.$$

Prema tome, nule polinoma $P_n(z)$ i $P_n'(z)$ preslikavaju se u nule polinoma $Q_n(w)$ i $Q_n'(w)$ respektivno.

Neka je

$$Q_n(w)=a_0(w-w_1)^{k_1}\cdots(w-w_p)^{k_p}\qquad (a_0\neq 0;\ k_1+k_2+\cdots+k_p=n;\ \operatorname{Re} w_\nu<0).$$

Samo $p-1$ nula polinoma $Q_n'(w)$ razlikuju se od nula polinoma $Q_n(w)$, pa samo za njih treba proveriti da li se nalaze u poluravni $\operatorname{Re} w<0$.

Pretpostavimo da je tačno suprotno, tj. da je bar za jednu od tih nula $\operatorname{Re} w=u\geqslant 0$ $(w=u+iv)$.

Za one nule polinoma $Q_n'(w)$ koje se razlikuju od nula polinoma $Q_n(w)$ važi relacija

$$\frac{Q_n'(w)}{Q_n(w)}=\frac{k_1}{w-w_1}+\frac{k_2}{w-w_2}+\cdots+\frac{k_p}{w-w_p}=0,$$

tj.

$$\frac{k_1[(u-u_1)-i(v-v_1)]}{|w-w_1|^2}+\frac{k_2[(u-u_2)-i(v-v_2)]}{|w-w_2|^2}+\cdots+\frac{k_p[(u-u_p)-i(v-v_p)]}{|w-w_p|^2}=0.$$

Izjednačujući realni deo sa nulom, dobijamo:

$$\sum_{\nu=1}^{p}\frac{k_\nu(u-u_\nu)}{|w-w_\nu|^2}=0,$$

što je apsurd, jer smo pretpostavili da je $u\geqslant 0$ i $u_\nu<0$.

Time je gornji stav dokazan. Ovaj stav ekvivalentan je *Lucas*-ovom stavu (videti prethodni zadatak).

328. Ako kvadratna jednačina

$$z^2-2pz+q=0$$

ima jedan realan koren, pokazati da je

$$4(p-\bar{p})(\bar{p}q-p\bar{q})=(q-\bar{q})^2.$$

329. Odrediti a tako da koreni z_1, z_2, z_3 jednačine

$$z^3+12(1+i\sqrt{3})z+a=0$$

leže na jednoj pravoj.

Rezultat. Tačke z_1, z_2, z_3 su kolinearne tada i samo tada ako je a realno i uz to $|a|\leqslant 32\sqrt{2}$.

330. Ako koreni z_1, z_2 jednačine

$$z^2+pz+q=0 \qquad (p,\ q \text{ kompleksni brojevi})$$

zadovoljavaju uslov $|z_1|=|z_2|$, tada je $\bar{p}q=p|q|$.

Dokazati ovaj stav i ispitati da li važi obrnuto.

Rešenje. Kako je

$$p=-(z_1+z_2), \qquad q=z_1 z_2,$$

dobija se

(1) $$p|q|-\bar{p}q=(\bar{z}_1+\bar{z}_2)z_1z_2-(z_1+z_2)|z_1||z_2|$$

$$=|z_1|^2z_2+|z_2|^2z_1-(z_1+z_2)|z_1||z_2|.$$

Kako je $|z_1|=|z_2|$, izraz $p|q|-\bar{p}q$ se anulira, što znači da je stav tačan. Da obrnuti stav ne važi, zaključuje se na jednačini za koju je $q=0$ i $p\neq 0$.

331. Ako koreni z_1 i z_2 jednačine

$$z^2+pz+q=0$$

zadovoljavaju uslov $|z_1|z_2=|z_2|z_1$, tada je $\bar{p}q=p|q|$.

Dokazati ovaj stav. Da li važi obrnuti stav?

332. Data je kvadratna jednačina

$$z^2-2pz+q=0 \qquad (p,\ q \text{ kompleksni brojevi}).$$

Ispitati da li je relacija

$$\bar{p}q=p\{|p|^2+|p^2-q|\}$$

potreban i dovoljan uslov da bi moduli korena ove jednačine bili jednaki.

333. Data je kvadratna jednačina

(1) $$z^2-2pz+q=0,$$

gde su p i q kompleksni brojevi. Odrediti potrebne i dovoljne uslove koje moraju zadovoljavati koeficijenti p i q tako da oba korena z_1 i z_2 jednačine (1) budu na jediničnom krugu.

Rešenje. Izvešćemo najpre neke obrasce koji će kasnije biti potrebni.

Iz (1) izlazi

(2) $$|z_1|\,|z_2| = |q|.$$

Kako je

(3) $$\begin{aligned}|z_1|^2 &= (p+\sqrt{p^2-q})\,\overline{(p+\sqrt{p^2-q})} = |p|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\{\bar p\sqrt{p^2-q}\} + |p^2-q|,\\ |z_2|^2 &= (p-\sqrt{p^2-q})\,\overline{(p-\sqrt{p^2-q})} = |p|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\{\bar p\sqrt{p^2-q}\} + |p^2-q|,\end{aligned}$$

sabiranjem dobijamo

(4) $$\frac{1}{2}(|z_1|^2+|z_2|^2) = |p|^2 + |p^2-q|.$$

Osim toga, važe relacije

(5) $$\begin{aligned}2p &= z_1+z_2,\\ 2\bar p q &= |z_2|^2 z_1 + |z_1|^2 z_2.\end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da je $|z_1|=1$, $|z_2|=1$. Tada iz (2) i (4) dobijamo

(6) $$|q|=1, \qquad |p|^2+|p^2-q|=1.$$

Prema tome, ako jednačina (1) ima oba korena na jediničnom krugu, uslovi (6) moraju biti zadovoljeni, što znači da su oni *potrebni.*

Uslovi (6) su i *dovoljni,* jer ako su oni zadovoljeni, tada iz (2) i (4) izlazi

$$|z_1|\,|z_2|=1, \qquad |z_1|^2+|z_2|^2=2,$$

tj.

$$|z_1|=1, \qquad |z_2|=1.$$

Drugi sistem potrebnih i dovoljnih uslova dobićemo na sledeći način:

Pretpostavimo da je $|z_1|=1$, $|z_2|=1$. Tada iz (5) sleduje $p=\bar p q$. Osim toga, iz $2p=z_1+z_2$ dobija se

$$|p| \leqslant \frac{1}{2}(|z_1|+|z_2|)=1,$$

a iz $z_1 z_2 = q$ sleduje $|q|=1$.

Prema tome, traženi uslovi su

(7) $$p=\bar p q, \qquad |p|\leqslant 1, \qquad |q|=1.$$

Ako je $p\neq 0$, ovaj poslednji uslov može se izostaviti, jer sleduje iz prvoga.

Da bismo pokazali da su ovi uslovi i *dovoljni,* tj. da iz (7) sleduje $|z_1|=1$, $|z_2|=1$ primetimo da iz (7) izlazi

$$q=e^{\theta i}, \qquad p=\rho\, e^{\theta i/2} \qquad (0\leqslant\rho\leqslant 1).$$

Jednačina (1) u tom slučaju postaje

$$z^2-2\rho\, e^{\theta i/2} z + e^{\theta i} = 0$$

i njena rešenja su

$$z_{1,2} = (\rho \pm i\sqrt{1-\rho^2})\, e^{\theta i/2},$$

odakle je

$$|z_{1,2}| = |\rho \pm i\sqrt{1-\rho^2}| = 1.$$

Primedba. Uslovi (6) i (7), prema prethodnom, ekvivalentni su, što se može i neposredno pokazati.

Tako, na primer, iz (7) sleduje $p^2=|p|^2 q$, tj.

$$p^2-q=(|p|^2-1)q,$$

pa je, s obzirom na $|p|\leqslant 1$ i $|q|=1$,

$$|p^2-q| = 1-|p|^2.$$

Prema tome, iz (7) sleduje (6).

Da bismo pokazali da i obrnuto iz (6) sleduje (7), dovoljno je posmatrati slučaj kad je $p \neq 0$. Iz (6) dobija se najpre $|p| \leqslant 1$. Dalje, iz $|p^2 - q| = 1 - |p|^2$, odnosno iz $(p^2 - q)(\overline{p^2 - q}) = (1 - |p|^2)^2$, sleduje

$$p^2 \bar{q} + \bar{p}^2 q = 2|p|^2,$$

jer je $|q| = 1$. Osim toga je

$$p^2 \bar{q} \cdot \bar{p}^2 q = |p^4|.$$

Iz ove dve jednačine neposredno izlazi

$$p^2 \bar{q} = \bar{p}^2 q = |p|^2, \quad \text{tj.} \quad p\bar{q} = \bar{p}.$$

Ovim smo dokazali da iz uslova (6) izlazi (7).

Videti sledeći problem. Uporediti rezultate i metode.

Redigovano prema rešenju *R. Bojanića.*

334. Data je kvadratna jednačina:

(1) $$z^2 - 2pz + q = 0 \quad (p \neq 0),$$

gde su p i q kompleksni brojevi. Odrediti potrebne i dovoljne uslove koje moraju zadovoljavati koeficijenti p i q tako da:

1° jedan i samo jedan koren jednačine (1) ima modul $r\,(>0)$;

2° oba korena jednačine (1) imaju modul $r\,(>0)$;

3° bar jedan koren jednačine (1) ima modul $r\,(>0)$;

4° koreni jednačine (1) imaju jednake module.

Rešenje. 1° Pretpostavimo da je $|z_1| = r$ i $|z_2| \neq r$, gde su z_1 i z_2 koreni jednačine (1). Tada je

$$z_1^2 - 2pz_1 + q = 0 \Rightarrow z_1 z_1 \bar{z}_1 + q\bar{z}_1 = 2pz_1 \bar{z}_1.$$

Odavde sleduje:

(2) $$r^2 z_1 + q\bar{z}_1 = 2pr^2, \quad \bar{q} z_1 + r^2 \bar{z}_1 = 2\bar{p} r^2.$$

Poslednje dve jednačine posmatraćemo kao sistem po z_1 i $\bar{z}_1$. Determinanta tog sistema je

$$\Delta = r^4 - q\bar{q} = r^4 - |q|^2 = r^4 - |z_1|^2 |z_2|^2 = r^2(r^2 - |z_2|^2) \neq 0,$$

što znači da sistem (2) ima jedinstveno rešenje:

(3) $$z_1 = \frac{2r^2}{\Delta} \begin{vmatrix} p & q \\ \bar{p} & r^2 \end{vmatrix} = \frac{2r^2(pr^2 - \bar{p}q)}{r^4 - |q|^2},$$

$$\bar{z}_1 = \frac{2r^2}{\Delta} \begin{vmatrix} r^2 & p \\ \bar{q} & \bar{p} \end{vmatrix} = \frac{2r^2(\bar{p}r^2 - p\bar{q})}{r^4 - |q|^2}.$$

Na osnovu (3) je

(4) $$2r|pr^2 - \bar{p}q| = |r^4 - |q|^2| \neq 0.$$

Pokazali smo da su uslovi (4) potrebni. Da su ovi uslovi i dovoljni sleduje iz toga što oni osiguravaju egzistenciju rešenja (3).

2° Neka je $|z_1| = |z_2| = r > 0$.

Posmatrajmo identitet

(5) $$2(p\,|q|-\bar{p}q)=(z_1+z_2)\,|z_1|\,|z_2|-z_1 z_2(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$
$$=(z_1+z_2)\,|z_1|\,|z_2|-|z_1|^2 z_2-|z_2|^2 z_1$$
$$=|z_1|\,(z_1|z_2|-z_2|z_1|)+|z_2|\,(z_2|z_1|-z_1|z_2|)$$
$$=(|z_2|-|z_1|)\,(z_2|z_1|-z_1|z_2|).$$

Na osnovu učinjene pretpostavke i identiteta (5) dobijamo relaciju

(6) $$r^2 p-\bar{p}q=0.$$

Ova relacija izražava potreban uslov da bi bilo $|z_1|=|z_2|=r>0$, ali nije dovoljan To se može naslutiti iz identiteta (5), jer ako se u (5) anulira leva strana, ne možemo tvrditi da se na desnoj strani anulira prvi faktor. Zato ćemo detaljno ispitati položaje korena jednačine (1), kada je ispunjen uslov (6).

Iz (6) sleduje

$$|q|=|z_1|\,|z_2|=r^2.$$

Prema tome dopunski uslov treba da obezbedi važnost relacije

(7) $$|z_1|=|z_2|.$$

Iz (6) izlazi

$$q=r^2\cdot\frac{p}{\bar{p}}=\frac{r^2}{|p|^2}\cdot p^2,$$

pa jednačina (1) postaje

$$z^2-2pz+\frac{r^2}{|p|^2}\cdot p^2=0.$$

Odatle je

(8) $$z_1=p\left(1+\sqrt{1-\frac{r^2}{|p|^2}}\right),\qquad z_2=p\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{|p|^2}}\right).$$

Na osnovu poslednjih formula zaključujemo da će relacija (7) važiti samo kad je

$$1-\frac{r^2}{|p|^2}\leqslant 0,\quad \text{tj.}\quad |p|^2\leqslant r^2.$$

Tako smo najzad došli do rezultata: Da bi bilo $|z_1|=|z_2|=r>0$, potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni uslovi:

(9) $$r^2 p-\bar{p}q=0,\qquad |p|\leqslant r.$$

3° Traženi uslovi za ovaj deo zadataka mogu se dobiti uzimajući u obzir rezultate iz 1° i 2°.

Da bi bar jedan koren jednačine (1) imao modul jednak $r\,(>0)$, potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni uslovi:

(10) $$2r\,|pr^2-\bar{p}q|=|r^4-|q|^2|,$$
$$|p|\leqslant r\quad \text{samo kad je}\quad |q|=r^2.$$

Kad je $|q|\neq r^2$ drugim uslovom se ne zahteva ništa.

4° Da bismo odgovorili na poslednje pitanje, koristićemo rezultate iz tačke 2°, tj. uslove (9). Smatrajući u (9) $r\,(>0)$ proizvoljnim, nalazimo da su uslovi:

(11) $$\frac{\bar{p}q}{p}\ \text{je realan pozitivan broj},\quad |p|^2\leqslant|q|$$

potrebni i dovoljni da bi bilo $|z_1|=|z_2|$.

Uslovi (11) mogu se kondenzovati u jedan jedini uslov

$$|p|^2 \leqslant \frac{\bar{p}q}{p} = \frac{\bar{p}^2 q}{|p|^2}, \quad \text{tj.} \quad |p|^4 \leqslant \bar{p}^2 q.$$

Redigovano prema rešenju *D. Đokovića.*

Primedba. Pokazati da je poslednja relacija ekvivalentna uslovu navedenom u zadatku 332 ovog *Zbornika.*

335. Integraleći $\frac{1}{z} \exp(e^{iz})$ po konturi koja se sastoji od polu-krugova

$$|z| = r, \quad |z| = R, \quad \operatorname{Im}(z) \geqslant 0$$

i od otsečaka

$$r \leqslant |\operatorname{Re}(z)| \leqslant R, \quad \operatorname{Im}(z) = 0,$$

pokazati da je

$$\int_0^\infty e^{\cos x} \sin(\sin x) \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{2} \pi (e-1).$$

336. Izračunati

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ib}^{c+ib} \frac{dz}{a^z \sin z} \qquad (0 < c < \pi;\ a > 1).$$

Rezultat. $1/(1+a^\pi)$.

337. 1° Ispitati da li funkcija $f(z) = e^{\pi i z^2} \operatorname{cosec} \pi z$ zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$f(z) - f(z-1) = 2ie^{\pi i z(z-1)}.$$

2° Integraleći funkciju $f(z)$ duž paralelograma čija su temena u tačkama

$$\pm \frac{1}{2} \pm re^{\pi i/4} \qquad (r \text{ veliko}),$$

pokazati da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \, dt = 1.$$

3° Takođe, integraleći funkciju $f(z)$ duž paralelograma čija su temena u tačkama $\pm \frac{1}{2} \pm re^{\pi i/4}$, pokazati da je:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t^2} \cos(2\pi t) \, dt = 1/\sqrt{2e^\pi}.$$

4° Birajući na pogodan način konturu integracije i integraleći duž nje funkciju $f(z)$, pokazati da je:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2 \sin 2\alpha} \cos(\pi t^2 \cos 2\alpha) \, dt = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2 \sin 2\alpha} \sin(\pi t^2 \cos 2\alpha) \, dt = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Primedba. Tačkama 3° i 4° zadatak dopunio *D. Đoković.*

338. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{Re}(z^n)}{\operatorname{Im}(z^n)} \qquad (z=x+iy;\ n \text{ ceo broj}).$$

Rešenje. Pređimo na polarne koordinate, tj. stavimo

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta.$$

Tada se dobija

$$\frac{\sin\theta\, dr+r\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta\, dr-r\sin\theta\, d\theta}=\frac{r^n\cos n\theta}{r^n\sin n\theta},$$

odakle je

$$\frac{dr}{r}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\cos(n+1)\theta}\, d\theta.$$

Posle integracije biće

$$\log r=-\frac{1}{n+1}\log|\cos(n+1)\theta|+\text{const},$$

odnosno

$$r^{n+1}\cos(n+1)\theta=C \qquad (C \text{ realna konstanta}),$$

tj.

$$\operatorname{Re}(z^{n+1})=C.$$

339. Ako je $v(x, y)$ imaginarni deo neke analitičke funkcije $f(z)$, dokazati da se diferencijalne jednačine

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx}=\operatorname{cotg} v(x, y), \qquad \frac{dy}{dx}=-\operatorname{tg} v(x, y)$$

mogu integraliti pomoću kvadratura.

Rešenje. Realni deo $u(x, y)$ analitičke funkcije $f(z)$, čiji je imaginarni deo $v(x, y)$, određuje se iz uslova

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Funkcija

$$e^{f(z)}\equiv e^u\cos v+ie^u\sin v$$

takođe je analitička, što znači da važe uslovi:

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial y}(e^u\cos v)=-\frac{\partial}{\partial x}(e^u\sin v), \qquad \frac{\partial}{\partial y}(e^u\sin v)=\frac{\partial}{\partial x}(e^u\cos v).$$

Kako se jednačine (1) mogu napisati u obliku

$$(3) \qquad e^u(\cos v\, dx-\sin v\, dy)=0, \qquad e^u(\sin v\, dx+\cos v\, dy)=0,$$

iz (2) sleduje da su jednačine (3) jednačine sa totalnim diferencijalom. Prema tome, jednačine (1) su integrabilne. Funkcija e^u je integracioni faktor.

Primedba. Videti članak:

D. S. Mitrinović: *Sur l'emploi de la partie réelle et de la partie imaginaire des fonctions analytiques dans l'intégration des équations différentielles* (*The Tôhoku Mathematical Journal*, vol. 42, 1936, p. 179—184).

340. Da li se parametar a može tako odrediti da jedno rešenje $w(z)$ diferencijalne jednačine

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}-9w=e^z(z+a)$$

bude uniformna funkcija promenljive $z\ (=x+iy)$?

341. Odrediti onaj partikularni integral diferencijalne jednačine

$$(1)\qquad \frac{dw}{dz} + 2\,zw + Ae^{z^2+Az}\,w^2 = 0$$

(A kompleksna konstanta sa pozitivnim realnim i imaginarnim delom) koji teži beskonačnosti kada $z \to 0$.

Pokazati da taj integral w ima beskrajno mnogo polova i da svi ovi leže na jednoj pravoj koja prolazi kroz početak u z-ravni.

342. Ako je $a > 0$, proveriti formule:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{t^z}{z}\,dz = \begin{cases} 1 & (t>1), \\ 0 & (0<t<1); \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{t^z}{z^2}\,dz = \begin{cases} \log t & (t>1), \\ 0 & (0<t<1); \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{t^{z+2}}{z\,(z+1)\,(z+2)}\,dz = \begin{cases} \frac{1}{2}\,(t-1)^2 & (t>1), \\ 0 & (0<t<1); \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2-\alpha^2}\,dz = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sh}\,\alpha t & (t>0) \\ 0 & (t<0) \end{cases} \qquad (a>|\alpha|>0);$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z\,(z^2+\alpha^2)}\,dz = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2}\,(1-\cos\alpha t) & (t>0), \\ 0 & (t<0). \end{cases}$$

Takođe izračunati integrale:

1° $\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^{n+1}}\,dz$ ($a>0$; t realno; n nula ili prirodan broj);

2° $\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)}\,dz$ ($a>0$; $\alpha_k<a$; t realno);

3° $\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{t^z \sin \pi z}\,dz$ ($0<a$, $t<1$);

4° $\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}\,\mathrm{th}\,z}{z}\,dz$ ($a>0$; $t>0$).

Primedba. Umesto $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{t^z}{z}\,dz$ stoji $\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{t^z}{z}\,dz$. Ova granična vrednost označava se takođe sa $\displaystyle\int_{\mathrm{Br}_1} \frac{t^z}{z}\,dz$, gde je Br_1 *Bromwich*- ova kontura, tj. prava $x=a$ (>0). Postoji i druga *Bromwich*-ova kontura koja se označava sa Br_2.

Integrali duž *Bromwich*-ovih kontura igraju važnu ulogu u teoriji *Laplace*-ove transformacije.

343. Izračunati određeni integral

$$J=\int_0^1 \frac{x^{-3/5}(1-x)^{3/5}}{1+x^2}\,dx.$$

Uputstvo. Izvršiti smenu $(1-x)/x=t$ i na dobijeni integral

$$\int_0^\infty \frac{t^{3/5}}{1+(1+t)^2}\,dt$$

primeniti račun ostataka.

Rezultat. $J=\dfrac{\pi}{2^{1/5}}\left(1-\operatorname{cotg}\dfrac{2}{5}\pi\right).$

Generalizacija. Izračunati integral

$$\int_0^1 \frac{x^{-m/n}(1-x)^{m/n}}{1+x^p}\,dx \qquad (m,\,n,\,p \text{ prirodni brojevi; } m<n;\ p\geqslant 2).$$

344. Koje krive na *Riemann*-ovoj sferi odgovaraju skupu koncentričnih krugova u ravni?

345. Da li realni deo $u(x,y)$ jedne analitičke funkcije može biti oblika

$$u(x,y)=\frac{f(x,y)}{1-x} \qquad \{f(1,y)\neq 0\},$$

gde je $f(x,y)$ funkcija koja ima neprekidne druge parcijalne izvode?

Generalisati.

Odgovor. Ne.

346. Analitička funkcija $f(z)$ koja je realna za svako z, realna je konstanta. Dokazati.

347. Odrediti analitičke funkcije $w=f(z)$ $(z=x+iy)$ koje krive (C) iz xy-ravni preslikavaju na krive (Γ) u uv-ravni tako da je:

1° Ugao između tangente krive (Γ) u preslikanoj tački $(u_0,\,v_0)$ i u-ose jednak uglu između tangente i potega krive (C) u posmatranoj tački $(x_0,\,y_0)$;

2° Ugao između tangente i potega krive (Γ) u preslikanoj tački $(u_0,\,v_0)$ jednak uglu između tangente i potega krive (C) u posmatranoj tački $(x_0,\,y_0)$;

3° Ugao između tangente i potega krive (Γ) u korespondentnoj tački $(u_0,\,v_0)$ jednak uglu između tangente krive (C) u posmatranoj tački (x_0,y_0) i x-ose.

Rezultat. 1° $w=a\operatorname{Log} z+b$; 2° $w=b\,z^a$; 3° $w=b\,e^{az}$ $(a>0$; b kompleksna konstanta).

Primedba Ovaj problem sastavio je *V. Janekoski.*

348. Neka su $P_1,\,P_2,\,\ldots\,,\,P_{2n+1}$ temena jednog pravilnog poligona $P_1P_2\ldots P_{2n+1}$ koji je upisan u krugu C. Ispitati da li važi relacija

$$\overline{PP_1}+\overline{PP_3}+\cdots+\overline{PP_{2n+1}}=\overline{PP_2}+\overline{PP_4}+\cdots+\overline{PP_{2n}},$$

gde je P proizvoljna tačka luka P_1P_{2n+1} kruga C.

349. Konstruisati krivu (C) definisanu jednačinom $|e^z/z|=e$ i izračunati $J=\oint \frac{e^z}{z}\, dz$ duž petlje krive (C).

Rezultat. $J=2\pi i$.

350. Odrediti minimum izraza $\max(|1+z|, |1+z^2|)$, kada kompleksna promenljiva z uzima sve vrednosti u z-ravni.

Rezultat. $\min\max(|1+z|, |1+z^2|)=\sqrt{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$.

Generalizacija. 1° Da li je takođe

$$\min\max(|1+z|, |z^2-z|, |1+z^2|)=\sqrt{3-\sqrt{5}}\,?$$

2° Odrediti

$$\min\max\{|f_n(z)-f_\nu(z)|;\ n\neq\nu;\ n, \nu=1, 2, \dots, m\},$$

gde su

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$$

polinomi kompleksne promenljive z.

Primedba. Ovaj problem postavljen je u mađarskom časopisu: *Matematikai Lapok*, t. VIII, 1957, str. 290.

351. Dokazati formulu

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)=2^{n/2}\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right).$$

352. Ako su P_1 i P_2 tačke u kompleksnoj ravni, čiji su afiksi z_1 i z_2, krug opisan nad P_1P_2 kao prečnikom određen je jednačinom

$$|2z-z_1-z_2|=|z_1-z_2|.$$

353. Dokazati relaciju

$$|E(z,p)-1|\leqslant|z|^{p+1} \qquad (|z|\leqslant 1),$$

gde je

$$E(z,p)=(1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^p}{p}\right).$$

Dokaz. Za funkciju $E(z,p)$ važi razvoj

(1)
$$E(z,p)=1+\sum_{k=1}^{\infty}A_{kp}z^k.$$

Za izvod funkcije $E(z,p)$

$$\frac{d}{dz}E(z,p)=-z^p\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^p}{p}\right)$$

važi razvoj

(2)
$$\frac{d}{dz}E(z,p)=-z^p\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}B_{kp}z^k\right),$$

gde su B_{kp} $(k=1, 2, \dots)$ pozitivni.

Polazeći od (1), dobija se

(3)
$$\frac{d}{dz}E(z,p)=\sum_{k=1}^{\infty}kA_{kp}z^{k-1}.$$

Poređenjem (2) i (3) nalazi se

(4)
$$A_{1p}=A_{2p}=\dots=A_{pp}=0 \quad \text{i} \quad A_{kp}<0 \qquad (k>p).$$

Ako se uzmu u obzir formule (4), iz (1) izlazi

$$(5)\qquad \begin{aligned} |E(z,p)-1| &= \left|\sum_{k=p+1}^{\infty} A_{kp} z^k\right| \\ &\leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} |A_{kp}|\,|z|^k \\ &= |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |A_{kp}|\,|z|^{k-p-1}. \end{aligned}$$

Kako je $|z| \leqslant 1$, na osnovu (5) biće

$$(6)\qquad |E(z,p)-1| \leqslant |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |A_{kp}|.$$

Budući da je $E(1,p)=0$, prema (1) i (4) je

$$(7)\qquad \sum_{k=p+1}^{\infty} A_{kp} = -1.$$

Kako su svi A_{kp} za $k>p$ negativni, iz (7) proističe

$$(8)\qquad \sum_{k=p+1}^{\infty} |A_{kp}| = 1.$$

Polazeći od (6) i uzimajući u obzir (8), dobija se

$$|E(z,p)-1| \leqslant |z|^{p+1} \qquad (|z| \leqslant 1;\ p \text{ prirodan broj}).$$

Primedba. Redigovano prema knjizi: *E. Hille: Analytic function theory*, vol. I (New York, 1959, p. 227).

DODATAK*

354. Ako su z_ν $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ uzastopna temena tetivnog četvorougla, pokazati da važe relacije

$$(1)\qquad \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)} > 0,$$

$$(2)\qquad |z_1-z_3|\,|z_2-z_4| = |z_1-z_2|\,|z_3-z_4| + |z_1-z_4|\,|z_2-z_3|.$$

Geometriski protumačiti jednakost (2).

Rešenje. Neka je a centar i r poluprečnik kruga na kome se nalaze tačke z_ν $(\nu=1,2,3,4)$. Tada se može staviti

$$z_\nu = a + r e^{\theta_\nu i}.$$

Uzastopnost ovih temena obezbeđena je, na primer, uslovom

$$(3)\qquad \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_1 + 2\pi.$$

* Ovaj *Dodatak* izradio je *D. Adamović*.

Onda

$$\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=\frac{(e^{\theta_1 i}-e^{\theta_2 i})(e^{\theta_3 i}-e^{\theta_4 i})}{(e^{\theta_1 i}-e^{\theta_4 i})(e^{\theta_2 i}-e^{\theta_3 i})}$$

$$=\frac{\left(e^{\frac{\theta_1-\theta_2}{2}i}-e^{-\frac{\theta_1-\theta_2}{2}i}\right)\left(e^{\frac{\theta_3-\theta_4}{2}i}-e^{-\frac{\theta_3-\theta_4}{2}i}\right)}{\left(e^{\frac{\theta_1-\theta_4}{2}i}-e^{-\frac{\theta_1-\theta_4}{2}i}\right)\left(e^{\frac{\theta_2-\theta_3}{2}i}-e^{-\frac{\theta_2-\theta_3}{2}i}\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta_4-\theta_3}{2}}{\sin\frac{\theta_4-\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2}}>0,$$

jer, prema (3), svaka veličina pod znakom sinusa pripada intervalu $(0, \pi)$.

Iz dokazane nejednakosti (1) izlazi

$$|(z_1-z_2)(z_3-z_4)|+|(z_1-z_4)(z_2-z_3)|=|(z_1-z_2)(z_3-z_4)+(z_1-z_4)(z_2-z_3)|$$

$$=|-z_1z_4-z_2z_3+z_1z_2+z_4z_3|=|(z_1-z_3)(z_2-z_4)|,$$

tj. relacija (2).

Neposredno se vidi da jednakost (2) izražava *Ptolomejevu* teoremu: Proizvod dijagonala tetivnog četvorougla jednak je zbiru proizvoda njegovih suprotnih strana.

355. Neka su $A_\nu B_\nu$ $(\nu=1, 2, 3)$ luci direktne orijentacije istog kruga kojima odgovaraju centralni uglovi veličine $\pi/3$ i neka je C_1 sredina tetive B_1A_2, C_2 sredina tetive B_2A_3, C_3 sredina tetive B_3A_1. Dokazati da je trougao $C_1C_2C_3$ ravnostran.

Rešenje. Uzmimo da je centar kruga koordinatni početak a njegov poluprečnik r. Označimo sa $z_\nu=re^{i\theta_\nu}$ $(\nu=1, 2, \ldots, 6)$ redom afikse tačaka $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$. Tada su

(1) $$\zeta_1=\frac{z_2+z_3}{2}, \qquad \zeta_2=\frac{z_4+z_5}{2}, \qquad \zeta_3=\frac{z_6+z_1}{2}$$

redom afiksi tačaka C_1, C_2, C_3. Problem se svodi na dokaz jednakosti

(2) $$|\zeta_2-\zeta_3|^2=|\zeta_3-\zeta_1|^2=|\zeta_1-\zeta_2|^2.$$

Prema (1) može se (2) napisati u obliku.

$$|z_4+z_5-z_6-z_1|^2=|z_6+z_1-z_2-z_3|^2=|z_2+z_3-z_4-z_5|^2.$$

Posle razvijanja i uprošćavanja, prva jednakost, zbog

$$\cos(\theta_5-\theta_6)=\cos(\theta_1-\theta_2),$$

svodi se na

$$\cos(\theta_4-\theta_5)-\cos(\theta_4-\theta_6)-\cos(\theta_4-\theta_1)-\cos(\theta_5-\theta_1)$$

$$=\cos(\theta_2-\theta_3)-\cos(\theta_6-\theta_2)-\cos(\theta_6-\theta_3)-\cos(\theta_1-\theta_3),$$

a druga, zbog

$$\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos(\theta_3-\theta_4),$$

na

$$\cos(\theta_6-\theta_1)-\cos(\theta_6-\theta_2)-\cos(\theta_6-\theta_3)-\cos(\theta_1-\theta_3)$$

$$=\cos(\theta_4-\theta_5)-\cos(\theta_2-\theta_4)-\cos(\theta_2-\theta_5)-\cos(\theta_3-\theta_5).$$

Ako se stavi

$$\theta_6-\theta_1=\varphi_1, \quad \theta_3-\theta_2=\varphi_2, \quad \theta_5-\theta_4=\varphi_3,$$

prethodne jednakosti postaju

$$(3)\quad \cos\varphi_3-\cos\left(\varphi_3+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi_2+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi_2+\varphi_3+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\varphi_2-\cos\left(\varphi_2+\varphi_3+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi_3+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi_2+\frac{\pi}{3}\right).$$

$$(4)\quad \cos\varphi_1-\cos\left(\varphi_2+\varphi_3+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi_3+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi_2+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\varphi_3-\cos\left(\varphi_2+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi_2+\varphi_3+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi_3+\frac{\pi}{3}\right).$$

Jednakost (3) može se napisati u obliku

$$(3')\quad \cos\varphi_3+\cos\left(\varphi_3+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi_3+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\varphi_2+\cos\left(\varphi_2+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi_2+\frac{\pi}{3}\right),$$

a jednakost (4), s obzirom na relaciju

$$-\cos(\varphi_2+\varphi_3)=\cos(\varphi_2+\varphi_3+\pi)=\cos\varphi_1,$$

u obliku

$$(4')\quad -\left\{\cos(\varphi_2+\varphi_3)+\cos\left(\varphi_2+\varphi_3+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi_2+\varphi_3+\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=\cos\varphi_3+\cos\left(\varphi_3+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi_3+\frac{\pi}{3}\right).$$

Kako je za svako φ

$$\cos\varphi+\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\varphi-2\sin\frac{\pi}{6}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

jednakosti (3') i (4') pretstavljaju identitete.

Primedba. Ovaj problem formulisao je *F. Denk* (Erlangen). Rešenje slično izloženom, u kome su umesto kompleksnih brojeva upotrebljeni vektori u ravni, dao je *Toma Leko.*

356. Ispitati u kojim delovima kompleksne ravni važe nejednačine

$$1^\circ\quad |z|<1-\mathrm{Re}(z),\qquad 2^\circ\quad 0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}?$$

357. Funkcijom $w=z+e^z$ $(z=x+iy)$ preslikati pojas $-\pi<y<+\pi$.

358. Odrediti dužinu s slike kruga $|z|=1$ pri preslikavanju funkcijom $w=\sqrt{z+1}$.

Rezultat. $s=\frac{\sqrt{2}}{2}B\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)$ (B beta funkcija).

359. Naći bilinearnu funkciju koja preslikava krug $|z|=2$ na krug $|z+1|=1$, tačku -2 u početak i početak u tačku i.

Rezultat. $w=-\dfrac{z+2}{z(1+i)+2i}$.

Uputstvo. Iskoristiti invarijantnost dvorazmere četiri tačke

$$(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_4}:\frac{z_3-z_2}{z_3-z_4}$$

u odnosu na bilinearnu transformaciju (i ovo dokazati) i činjenicu da bilinearna transformacija preslikava par inverznih tačaka u odnosu na dati krug u inverzne tačke u odnosu na sliku tog kruga.

360. Dokazati da je svaka transformacija kompleksne ravni koja ne pomera početak i održava sva rastojanja ili rotacija ili rotacija kombinovana sa ogledanjem o realnu osu.

Rešenje. Ako je $w=f(z)$ transformacija o kojoj je reč, formulisani uslovi mogu se izraziti jednakostima

(1) $$|f(z_1)-f(z_2)|=|z_1-z_2|, \quad \text{za svako } z_1 \text{ i } z_2,$$

(2) $$f(0)=0.$$

Iz (1) i (2) najpre sleduje da je za svako z

(3) $$|f(z)|=|z|.$$

Dalje, za svako z_1 i z_2 važi

$$\big|f(|z_1|)-f(|z_2|)\big|=\big||z_1|-|z_2|\big|=\big||f(|z_1|)|-|f(|z_2|)|\big|,$$

što znači da je, pod pretpostavkom $z_1\neq 0$, $z_2\neq 0$,

(4) $$f(|z_1|)/f(|z_2|)>0.$$

Iz (3) i (4) izlazi

(5) $$f(|z|)=|z|\,e^{\alpha i},$$

gde argument α ne zavisi od z.

Prema (1),

(6) $$|f(z)-f(|z|)|=\big|z-|z|\big|.$$

Ako se stavi, s obzirom na (3),

(7) $$z=|z|\,e^{\theta i}, \quad f(z)=|z|\,e^{\beta i} \quad (\theta \text{ i } \beta \text{ realni brojevi}),$$

gde je β funkcija od z, biće s jedne strane, zbog (5),

(8) $$\big|f(z)-f(|z|)\big|=|z|\,|e^{\beta i}-e^{\alpha i}|=2\,|z|\left|\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right|,$$

a s druge strane

(9) $$\big|z-|z|\big|=|z|\,|e^{\theta i}-1|=2\,|z|\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

Prema (6), (8) i (9), za $z\neq 0$,

$$\left|\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right|=\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

Odavde izlazi da mora biti zadovoljena jedna od relacija

$$\beta=\alpha+\theta+4k\pi, \quad \beta=\alpha-\theta+2(2k+1)\pi, \quad \beta=\alpha-\theta+4k\pi, \quad \beta=\alpha+\theta+2(2k+1)\pi$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Može se, dakle, uzeti da je ili

(10) $$\beta=\alpha+\theta \quad \text{ili} \quad \beta=\alpha-\theta.$$

Pri tome, za određenu funkciju $f(z)$ zadovoljena je jedna od relacija (10) za svako z. U protivnom slučaju bi postojali kompleksni brojevi

$$z_1=|z_1|\,e^{\theta_1 i} \quad \text{i} \quad z_2=|z_2|\,e^{\theta_2 i}$$

takvi da je $\theta_1\neq k\pi$, $\theta_2\neq k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ i

$$f(z_1)=|z_1|\,e^{(\alpha+\theta_1)i}, \quad f(z_2)=|z_2|\,e^{(\alpha-\theta_2)i}.$$

Međutim, tada bi iz relacije

$$\big||z_1|\,e^{(\alpha+\theta_1)i}-|z_2|\,e^{(\alpha-\theta_2)i}\big|^2=|f(z_1)-f(z_2)|^2=|z_1-z_2|^2=\big||z_1|\,e^{\theta_1 i}-|z_2|\,e^{\theta_2 i}\big|^2$$

ili, posle sređivanja,

$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos(\theta_1-\theta_2),$$

izišlo da je ili

$$\theta_1+\theta_2=\theta_1-\theta_2+2k\pi \quad \text{ili} \quad \theta_1+\theta_2=-\theta_1+\theta_2+2k\pi,$$

tj. ili $\theta_1=k\pi$ ili $\theta_2=k\pi$, u protivrečnosti sa pretpostavkom.

Dakle, prema (7), u slučaju $\beta=\alpha+\theta$ za svako z

$$f(z)=|z|e^{\theta i}e^{\alpha i}=ze^{\alpha i},$$

a u slučaju $\beta=\alpha-\theta$

$$f(z)=|z|e^{-\theta i}e^{\alpha i}=\overline{ze^{-\alpha i}} \quad \text{za svako } z.$$

Time je ustanovljeno da posmatrano preslikavanje pretstavlja ili rotaciju ili rotaciju kombinovanu sa ogledanjem o realnu osu.

Primedba. Uz pomoć geometriskih rasuđivanja može se dati kraći dokaz. Cilj prethodnog izlaganja bio je, međutim, čisto analitičko tretiranje problema, shvaćenog kao zadatak nalaženja opšteg rešenja funkcionalne jednačine (1) pod uslovom (2).

361. Naći konformno preslikavanje gornje poluravni na samu sebe koje tačke ∞, 0 i 1 redom prevodi u tačke 0, 1 i ∞.

362. Naći sva bilinearna preslikavanja pri kojima tačke ± 1 zadržavaju svoj položaj.

Rešenje. I. Preslikavanje

$$w=w(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0)$$

treba da zadovolji zahteve

$$w(1)=\frac{a+b}{c+d}=1 \quad \text{i} \quad w(-1)=\frac{-a+b}{-c+d}=-1, \tag{1}$$

što pretpostavlja da je

$$c+d\neq 0, \quad -c+d\neq 0$$

(iz $a+b=c+d=0$ dobilo bi se $ad-bc=0$; isto tako i iz $-a+b=-c+d=0$).

Iz (1) izlazi

$$a+b=c+d, \qquad -a+b=c-d$$

i odatle $b=c$, $a=d$.

Dakle, traženo preslikavanje treba da ima oblik

$$w=\frac{az+b}{bz+a} \qquad (a^2-b^2\neq 0). \tag{2}$$

Očigledno je da dobijeno preslikavanje zaista ima traženu osobinu. Prema tome, formulom (2) dat je opšti oblik takvog preslikavanja.

II. Sva ova preslikavanja data su jednačinom

$$\frac{w-1}{w+1}=K\frac{z-1}{z+1} \qquad (K\neq 0 \text{ kompleksna konstanta}).$$

363. Pokazati da se svaka bilinearna funkcija koja preslikava realnu osu na realnu osu može napisati pomoću realnih koeficijenata.

Rešenje. Ako bilinearna funkcija

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0)$$

preslikava realnu osu na realnu osu, mora biti za svako realno x

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\overline{a}x+\overline{b}}{\overline{c}x+\overline{d}}. \tag{1}$$

Pretpostavimo prvo da je $c=0$. Tada (1) postaje

$$\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}=\overline{\left(\frac{a}{d}\right)}x+\overline{\left(\frac{b}{d}\right)},$$

ili

$$\left\{\frac{a}{d}-\overline{\left(\frac{a}{d}\right)}\right\}x+\frac{b}{d}-\overline{\left(\frac{b}{d}\right)}=0,$$

odakle

$$\frac{a}{d}-\overline{\left(\frac{a}{d}\right)}=\frac{b}{d}-\overline{\left(\frac{b}{d}\right)}=0,$$

što znači da su a/d i b/d realni brojevi, tako da se bilinearna funkcija u ovom slučaju može napisati u obliku $w=Az+B$ sa realnim koeficijentima A i B.

Ako je $c\neq 0$, bilinearna funkcija može se napisati u obliku

$$w=\frac{Az+B}{z+D}\qquad\left(A=\frac{a}{c},\ B=\frac{b}{c},\ D=\frac{d}{c}\right),$$

pa (1) postaje

$$\frac{Ax+B}{x+D}=\frac{\overline{A}x+\overline{B}}{x+\overline{D}},$$

ili

$$(A-\overline{A})x^2+(A\overline{D}-\overline{A}D+B-\overline{B})x+B\overline{D}-\overline{B}D=0.$$

Odavde

(2) $$A-\overline{A}=0,\qquad A\overline{D}-\overline{A}D+B-\overline{B}=0,\qquad B\overline{D}-\overline{B}D=0.$$

Iz prve jednačine (2) izlazi da je A realno, a iz treće, pod pretpostavkom $D\neq 0$,

(3) $$B=\alpha D,$$

gde je α realan broj različit od A (stoga što

$$AD-B=\frac{1}{C^2}(ad-bc)\neq 0).$$

Druga jednačina (2) onda postaje

$$(A-\alpha)(D-\overline{D})=0,$$

pa

(4) $$D-\overline{D}=0.$$

Iz (3) i (4) sleduje da su B i D realni brojevi. Ako je $D=0$, realnost koeficijenta B izlazi iz druge jednačine (2).

364. Pokazati da funkcija $w=z^2+2z+3$ biunivoko preslikava oblast $|z|<1$.

365. Neka su a_ν $(\nu=1,2,\ldots,n)$ i z proizvoljni kompleksni brojevi i $c=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu$. Dokazati sledeće relacije:

1° $$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2=|c|^2+\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu-c|^2;$$

2° $$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}|z-a_\nu|^2=|z-c|^2+\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu-c|^2;$$

3° $$\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\right|^2\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2.$$

Pri tome, u nejednakosti 3° znak jednakosti mogućan je samo kad je

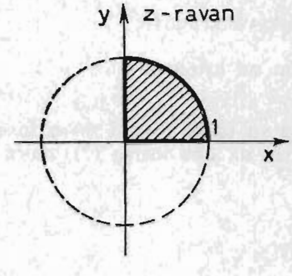
$$a_1=a_2=\cdots=a_n.$$

366. Funkcijom $w=4/(z+1)^2$ preslikati oblast

$$|z|<1, \quad 0<\arg z<\pi/2.$$

Rešenje. Transformaciju

$$w=\frac{4}{(z+1)^2}$$



rastavljamo na transformacije

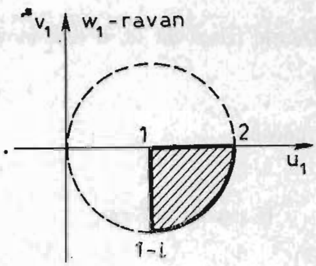
$$(1) \qquad w_1=\frac{2}{z+1} \quad \text{i} \quad w=w_1^2.$$

Na uobičajeni način se pokazuje da prva od njih preslikava datu oblast na oblast

$$(2) \qquad |w_1-1|<1, \quad \frac{3\pi}{2}<\arg(w-1)<2\pi.$$

Druga od funkcija (1) preslikava tačke 1, 2, $1-i$ redom u tačke 1, 4, $-2i$, a otsečak [1,2] na otsečak [1,4]. Ako se stavi

$$w=u+iv, \quad w_1=u_1+iv_1,$$



druga jednakost (1) daje

$$u=u_1^2-v_1^2,$$
$$v=2u_1v_1.$$

Stavljajući u ovim relacijama $u_1=1$, dobija se

$$u=1-v_1^2, \quad v=2v_1,$$

ili, posle eliminacije parametra v_1,

$$(3) \qquad v^2=4(1-u).$$

Dakle, duž u w_1-ravni čiji su krajevi tačke 1 i $1-i$, preslikava se na deo parabole (3) označen na slici sa I.

Ako se u jednačini kruga

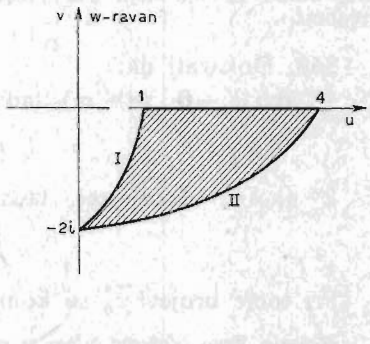
$$(4) \qquad |w_1-1|^2=1$$

stavi $w_1=\sqrt{w}$, dobija se, posle razvijanja,

$$|w|+1-2\,\mathrm{Re}(\sqrt{w})=1$$

i dalje

$$|w|^2=4\,\mathrm{Re}^2(w).$$



Prelazom na polarne koordinate

$$w=\rho e^{i\theta}$$

dobija se

$$\rho^2=4\rho\cos^2\frac{\theta}{2}$$

ili

$$(5) \qquad \rho=2(1+\cos\theta).$$

Dakle, krug (4) preslikava se u kardioidu (5), a njegov luk koji pripada rubu oblasti—na deo kardioide označen na slici sa II.

Prema tome, data oblast preslikava se funkcijom $w=4/(z+1)^2$ na oblast prikazanu na trećoj slici. Nije teško uvideti da je ovo preslikavanje biunivoko.

367. Ako bilinearna funkcija preslikava par koncentričnih krugova na koncentrične krugove, ispitati kako se menja odnos poluprečnika krugova pri ovom preslikavanju.

Rešenje. Pretpostavimo da bilinearna funkcija

$$w=w(z)=\frac{Az+B}{Cz+D}$$

preslikava krugove

(1) $$|z-a|=r \quad \text{i} \quad |z-a|=R \qquad (r\neq R)$$

redom na krugove

(2) $$|w-b|=r_1 \quad \text{i} \quad |w-b|=R_1 .$$

Kako su tačke $z=a$ i $z=\infty$ inverzne u odnosu na oba kruga (1), a tačke $w=b$ i $w=\infty$ u odnosu na oba kruga (2), mora biti ili

$$w(a)=b \quad \text{i} \quad w(\infty)=\infty$$

ili

$$w(a)=\infty \quad \text{i} \quad w(\infty)=b,$$

tj. ili

$$C=0 \quad \text{i} \quad \frac{Aa+B}{D}=b$$

ili

$$-\frac{D}{C}=a \quad \text{i} \quad \frac{A}{C}=b \qquad (C\neq 0).$$

Odatle izlazi da je, u dva moguća slučaja,

$$w(z)=\frac{Az+Db-Aa}{D} \qquad (A\neq 0)$$

odnosno

$$w(z)=\frac{bz+B_1}{z-a} \qquad (B_1+ab\neq 0).$$

U prvom slučaju

(3) $$|w(z)-b|=\left|\frac{A}{D}\right| |z-a|,$$

a u drugom

(4) $$|w(z)-b|=\frac{|b+ab|}{|z-a|}.$$

Prema (3) i (4), posmatrana funkcija u oba slučaja preslikava ne samo krugove (1) nego i sve krugove sa centrom u a na krugove sa centrom u b.

Iz (3) i (4) takođe izvodimo zaključak da u prvom slučaju odnos poluprečnika bilo koja dva kruga sa centrom u a pri preslikavanju ostaje nepromenjen, a u drugom slučaju ovaj odnos za ma koja dva kruga sa centrom u a pri preslikavanju uzima recipročnu vrednost.

368. Dokazati da:

1° ako $z_n\to 0$ $(n\to\infty)$, tada

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\to 1 \qquad (n\to\infty);$$

2° ako $z_n\to 1$ $(n\to\infty)$, tada

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\to e \qquad (n\to\infty).$$

Pri tome brojevi z_n su kompleksni.

Rešenje. Prvo tvrđenje izlazi iz nejednakosti

$$\left|\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n-1\right|=\left|1+\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{z_n^\nu}{n^\nu}-1\right|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{|z_n|^\nu}{n^\nu}=\left(1+\frac{|z_n|}{n}\right)^n-1.$$

Drugo sleduje iz prvoga kad se stavi $z_n=1+w_n$ i napiše

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{w_n}{n+1}\right)^n.$$

369. 1° Pretpostavljajući da je izraz e^z $(z=x+iy)$ definisan jednakošću

$$e^z=e^x\, e(y),$$

gde $e(y)$ označava izraz $\cos y+i\sin y$, na elementaran način dokazati da

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\to e^z \qquad (n\to\infty)$$

za svako kompleksno z.

2° Koristeći redove, pokazati da u svakom krugu $|z|\leqslant R<\infty$ niz $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ uniformno konvergira ka e^z.

Rešenje. 1° Pođimo od jednakosti

$$(1)\qquad 1+\frac{z}{n}=1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+i\frac{y}{n+x}\right).$$

Drugi faktor može se napisati u obliku

$$(2)\qquad 1+i\frac{y}{n+x}=\left\{1+\frac{y^2}{(n+x)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} e\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{n+x}\right),$$

gde se zbog pozitivnosti realnog dela uzima glavna vrednost funkcije arc tg x. Prema (1) i (2) je

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left\{1+\frac{y^2}{(n+x)^2}\right\}^{\frac{n}{2}}\cdot e\left(n\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{n+x}\right).$$

Prvi faktor konvergira ka e^x, drugi ka jedinici kad $n\to\infty$.

Kako je kompleksna funkcija realne promenljive $e(y)$ neprekidna, biće

$$\lim_{n\to\infty} e\left(n\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{n+x}\right)=e\left(\lim_{n\to\infty} n\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{n+x}\right)=e(y).$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x\cdot 1\cdot e(y)=e^z.$$

2° Ako je poluprečnik R posmatranog kruga po volji izabran i potom fiksiran, tada za proizvoljno ε (>0) postoji takav prirodan broj m da je

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty}\frac{R^\nu}{\nu!}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Kako $(\nu\leqslant n)$

$$\binom{n}{\nu}\frac{1}{n^\nu}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\nu+1)}{\nu!}\cdot\frac{1}{n^\nu}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)\frac{1}{\nu!},$$

za $|z| \leqslant R$ i $n \geqslant m$ biće

$$\left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} - \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{z^\nu}{n^\nu}\right|$$

$$= \left|\sum_{\nu=0}^{n} \left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)\right\}\frac{z^\nu}{\nu!} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}\right|$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{m} \left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)\right\}\frac{R^\nu}{\nu!} + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{R^\nu}{\nu}$$

$$< \sum_{\nu=0}^{m} \left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)\right\}\frac{R^\nu}{\nu!} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prvi član poslednjeg izraza teži nuli kad $n \to \infty$. Stoga postoji $n_0 \geqslant m$ takvo da je za $n \geqslant n_0$ vrednost ovog člana manja od $\varepsilon/2$. Za $n \geqslant n_0$ onda je

$$\left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (|z| \leqslant R).$$

370. Dokazati jednakosti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+a^2)^{-n} \left\{x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \binom{n}{4} x^{n-4} a^4 - \cdots\right\} dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+a^2)^{-n} \left\{\binom{n}{1} x^{n-1} - \binom{n}{3} x^{n-3} a^2 + \binom{n}{5} x^{n-5} a^4 - \cdots\right\} dx = 0,$$

gde je n prirodan broj >1 i $a>0$.

371. Neka je funkcija $f(z)$ regularna u krugu $|z-a|<R$. Dokazati da je tada za $0<r<R$

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} P(\theta)\, e^{-i\theta}\, d\theta,$$

gde $P(\theta)$ označava realni deo od $f(a+re^{i\theta})$.

Rešenje. Uopšte, ako

(1) $$\int_\alpha^\beta \varphi(\theta)\, d\theta = 0,$$

gde je $\varphi(\theta) = u(\theta) + i v(\theta)$ kompleksna funkcija realne promenljive θ, tada i

(2) $$\int_\alpha^\beta \overline{\varphi(\theta)}\, d\theta = 0.$$

Zaista, (1) povlači

$$\int_\alpha^\beta u(\theta)\, d\theta = \int_\alpha^\beta v(\theta)\, d\theta = 0,$$

a odatle sleduje (2).

Pod uslovima zadatka,

$$0 = \oint_{|z-a|=r} f(z)\, dz = i r \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\theta.$$

Odatle, prema prethodno ustanovljenom,

$$(3) \qquad 0=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \overline{f(a+re^{i\theta})}\; e^{-i\theta}\,d\theta.$$

S druge strane, prema *Cauchy*-evom integralnom obrascu za prvi izvod,

$$(4) \qquad f'(a)=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\; e^{-i\theta}\,d\theta.$$

Sabiranjem jednakosti (3) i (4) dobija se

$$f'(a)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} P(\theta)\; e^{-i\theta}\,d\theta,$$

a oduzimanjem

$$f'(a)=\frac{i}{\pi r}\int_0^{2\pi} Q(\theta)\; e^{-i\theta}\,d\theta,$$

gde $Q(\theta)$ označava imaginarni deo od $f(a+re^{i\theta})$.

372. 1° Koristeći funkciju $\dfrac{1}{e^{2\pi i z}-1}$, pomoću kompleksne integracije sumirati red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

2° Istim postupkom doći do relacija između vrednosti $\zeta(2m)$ *Riemann*-ove ζ-funkcije $\left(\zeta(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\right)$ i *Bernoulli*-evih brojeva B_{2m}.

3° Na osnovu prethodnog dokazati da su *Bernoulli*-evi brojevi B_{2m} $(m=1,2,\ldots)$ naizmenično pozitivni i negativni i da im moduli teže beskonačnosti kad $m\to\infty$, i to monotono za dovoljno velike vrednosti m. Koristeći *Stirling*-ovu formulu, dati asimptotsku procenu brzine rašćenja njihovih modula.

Rešenje. 1° — 2° Pođimo od relacije

$$(1) \qquad \varphi(z)=\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{1}{2}z+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k} \qquad (|z|<2\pi),$$

gde su B_n $(n=0,1,2,\ldots)$ *Bernoulli*-evi brojevi. Oni se redom izračunavaju pomoću rekurentne formule

$$(2) \qquad B_0=1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{n+1}{\nu}B_\nu=B_{n+1} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

ili, simbolički napisano,

$$B_0=1, \qquad (B+1)^{n+1}=B^{n+1} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Jednostavno rasuđivanje pokazuje da su svi *Bernoulli*-evi brojevi s neparnim indeksima, sem prvog, jednaki nuli, a iz (2) dobija se

$$(3) \qquad B_2=\frac{1}{6}, \qquad B_4=-\frac{1}{30}, \quad \ldots$$

Stavimo

$$\psi(z)=\frac{1}{e^{2\pi i z}-1}, \qquad f(z)=\frac{\psi(z)}{z^{2m}} \qquad (m=1,2,\ldots).$$

Prema (1),

(4) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\,z^{-2m-1}\,\varphi(2\pi i z)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{z^{-2m-1}(1-\pi i z)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k}\pi^{2k}\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-2m-1}\right\}\qquad (|z|<1).$$

U tački $z=0$ funkcija $f(z)$ ima pol reda $2m+1$. Odgovarajući reziduum, prema (4), iznosi

(5) $$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}(-1)^m 2^{2m}\pi^{2m}\frac{B_{2m}}{(2m)!}.$$

Od singulariteta funkcija $f(z)$ ima još polove prvog reda u tačkama $\pm n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Odgovarajući reziduumi su

(6) $$\operatorname*{Res}_{z=\pm n} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{e^{2\pi i}z^{2m}}\bigg|_{z=\pm n}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{n^{2m}}\qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Označimo sa C_n kvadrat sa temenima u tačkama $\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pm 1\pm i)$. U njemu funkcija od singulariteta ima tačke $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, pa prema (5) i (6)

(7) $$\oint_{C_n} f(z)\,dz=2\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu^{2m}}+(-1)^m 2^{2m}\pi^{2m}\frac{B_{2m}}{(2m)!}.$$

S druge strane, na horizontalnim delovima putanje C_n

$$z=x\pm i\left(n+\frac{1}{2}\right),\qquad -\left(n+\frac{1}{2}\right)\leqslant x\leqslant +\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

pa je na njima

$$|\psi(z)|\leqslant\left|\frac{1}{e^{2\pi i z}-1}+\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left|\frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1}\right|+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(|\operatorname{cotg}\pi z|+1)=\frac{1}{2}\left\{\left|\operatorname{cotg}\pi\left[x\pm i\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\right|+1\right\}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left\{\coth\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+1\right\}\leqslant\frac{1}{2}\left(\coth\frac{3\pi}{2}+1\right).$$

Na vertikalnim delovima

$$z=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)+iy,\qquad -\left(n+\frac{1}{2}\right)\leqslant y\leqslant +\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

pa je

$$|\psi(z)|=\left|\frac{1}{e^{2\pi i\left\{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)+iy\right\}}-1}\right|=\frac{1}{\left|-e^{-2\pi y}-1\right|}=\frac{1}{e^{-2\pi y}+1}<1.$$

Dakle,

$$|\psi(z)|\leqslant M=\max\left\{\frac{1}{2}\left(\coth\frac{3\pi}{2}+1\right), 1\right\}\quad\text{za } z\in C_n\qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Odatle,

(8) $$\left|\oint_{C_n} f(z)\,dz\right|\leqslant\oint_{C_n}\frac{|\psi(z)|}{|z|^{2m}}|dz|\leqslant\frac{M}{n^{2m}}\oint_{C_n}|dz|=\frac{8\left(n+\frac{1}{2}\right)M}{n^{2m}}\to 0\qquad (n\to\infty)$$

(jer $m\geqslant 1$).

Iz (7) i (8) sleduje

$$0=2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2m}}+(-1)^m 2^{2m}\pi^{2m}\frac{B_{2m}}{(2m)!}$$

i odatle

(9) $$\zeta(2m)=(-1)^{m-1}\frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!}B_{2m}\qquad(m=1,2,\ldots).$$

Ovo su tražene relacije između $\zeta(2m)$ i B_{2m}.

Za $m=1$ i $m=2$ iz (3) i (9) izlazi

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \zeta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Prvi rezultat može se dobiti na različite načine, a drugi je tražen tačkom 1° zadatka.

3° Kako $\zeta(2m)>0$ $(m=1,2,\ldots)$, iz (9) izlazi da su *Bernoulli*-evi brojevi B_{2m} $(m=1,2,\ldots)$ naizmenično pozitivni i negativni.

Iz nejednakosti

$$0<\zeta(2m)-1=\sum_{\nu=2}^{k}\frac{1}{\nu^{2m}}+\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2m}}\leqslant\sum_{\nu=2}^{k}\frac{1}{\nu^{2m}}+\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2}}\qquad(m\geqslant 1)$$

dobija se, puštajući da $m\to\infty$,

$$0\leqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\,[\zeta(2m)-1]\leqslant\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$$

i odatle, kako $\displaystyle\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$ može biti proizvoljno malo,

$$\lim_{m\to\infty}[\zeta(2m)-1]=0,$$

tj.

(10) $$\lim_{m\to\infty}\zeta(2m)=1.$$

Odatle i iz relacije (9), napisane u obliku

(11) $$B_{2m}=(-1)^{m-1}\frac{(2m)!}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\zeta(2m),$$

izlazi

$$|B_{2m}|\to\infty\qquad(m\to\infty),$$

a takođe

$$\left|\frac{B_{2m+2}}{B_{2m}}\right|=\frac{(2m+1)(2m+2)}{4\pi^2}\cdot\frac{\zeta(2m+2)}{\zeta(2m)}\to\infty\qquad(m\to\infty),$$

pa

$$|B_{2m+2}|>|B_{2m}|\quad\text{za } m \text{ dovoljno veliko},$$

tj. niz $|B_{2m}|$ monotono raste za dovoljno velike vrednosti m.

Kombinovanjem rezultata (10) i (11) sa *Stirling*-ovom formulom

$$n!\sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}\qquad(n\to\infty),$$

dobija se

$$|B_{2m}|\sim\frac{(2m)^{2m+1/2}e^{-2m}}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\sqrt{2\pi},$$

tj.

$$|B_{2m}|\sim 4\pi\sqrt{e}\left(\frac{m}{\pi e}\right)^{2m+\frac{1}{2}}\qquad(m\to\infty),$$

što pretstavlja traženu asimptotsku procenu.

373. Data je funkcija $f(z)=\dfrac{1}{a-e^{-iz}}$ (a konstanta >1).

1° Ispitati singularitete funkcije $f(z)$ u zatvorenoj kompleksnoj ravni.

2° Integraleći funkciju $z\,f(z)$ duž pravougaonika čija su temena u tačkama $\pm\pi$ i $\pm\pi+iR$ i puštajući da $R\to\infty$, izračunati

$$(1) \qquad \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+a^2-2a\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

3° Funkciju $f(z)$ razviti u red po stepenima od e^{-iz}. Ispitati u kojim oblastima z-ravni ovaj red konvergira u običnom smislu, apsolutno i uniformno.

4° Iz reda dobijenog pod 3° izvesti trigonometriski (*Fourier*-ov) red za funkciju

$$\frac{\sin x}{1+a^2-2a\cos x}$$

i, koristeći ovaj poslednji, izračunati na drugi način integral (1).

374. 1° Kompleksnom integracijom izračunati integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad (a \text{ realno}).$$

2° Izračunati:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x \operatorname{ch} \beta x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x \qquad (0<\alpha<1;\ \beta \text{ realno});$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x \operatorname{ch} \beta x}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad (0<\alpha<2;\ \beta \text{ realno}).$$

Uputstvo. 2° Pošto se dobiju rezultati pod 1°, iskoristiti stav o analitičkoj funkciji definisanoj određenim integralom i stav o jedinstvenosti analitičkih funkcija.

375. Izračunati integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{ax}{x^2+1}}}{x^2+1} \cos\frac{a}{x^2+1}\,\mathrm{d}x; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{ax}{x^2+1}}}{x^2+1} \sin\frac{a}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Rezultat. $\pi\cos\dfrac{a}{2}$; $\pi\sin\dfrac{a}{2}$.

SPECIJALNE FUNKCIJE*

I. LEGENDRE-OVI POLINOMI

1. Izračunati $P_n(1)$ i $P_n(-1)$ ako je

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \qquad (\textit{Legendre}\text{-ov polinom}).$$

Uputstvo i rezultat. Na izraz $(x^2-1)^n = (x+1)^n (x-1)^n$ primeniti *Leibniz*-ovu formulu, pa se dobija $P_n(1) = 1$ i $P_n(-1) = (-1)^n$.

2. Posmatrati *Legendre*-ove polinome u intervalu $[a, b]$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,(b-a)^n} \frac{d^n}{dx^n} \{(x-a)^n (x-b)^n\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

i za njih dokazati formule:

$$P_n(a) = (-1)^n, \quad P_n(b) = 1, \quad P_n\left(\frac{a+b}{2}\right) = \begin{cases} 0 & (n = 2k+1), \\ \binom{-1/2}{k} & (n = 2k); \end{cases}$$

$$\int_a^b P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ \dfrac{b-a}{2n+1} & (n = m); \end{cases}$$

$$(x-a)(x-b) P_n'' + (2x-a-b) P_n' - n(n+1) P_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

3. Izračunati vrednost izraza

$D^{n+s} (x^2-1)^n$, tj. $D^{n+s} \{(x+1)^n (x-1)^n\}$ (n, s prirodni brojevi; $D \equiv d/dx$) za $x = 1$ i za $x = -1$.

Rešenje. Primenom *Leibniz*-ove formule dobijamo

$$\text{(1)} \qquad D^{n+s} \{(x+1)^n (x-1)^n\}$$

$$\equiv (x+1)^n D^{n+s} (x-1)^n + \cdots + \binom{n+s}{k} D^k (x+1)^n D^{n+s-k} (x-1)^n + \cdots + (x-1)^n D^{n+s} (x+1)^n.$$

---

* Videti:

D. S. Mitrinović: *Legendre-ovi polinomi i Bessel-ove funkcije celog reda.* Ovaj informativni članak objavljen je u knjizi:

S. Fempl: *Redovi sa prilozima D. S. Mitrinovića,* Beograd, 1960 (sveska 14 Matematičke biblioteke).

Za $x=1$ svi članovi ovoga izraza jednaki su nuli, osim člana za koji je

$$n+s-k=n, \quad \text{tj.} \quad k=s.$$

Taj član ima oblik

$$\binom{n+s}{s} \mathrm{D}^s (x+1)^n \, \mathrm{D}^n (x-1)^n \tag{2}$$

i za $x=1$ njegova vrednost je

$$2^{n-s} n! \binom{n+s}{s} n(n-1) \cdots (n-s+1),$$

odnosno

$$[\mathrm{D}^{n+s} (x^2-1)^n]_{x=1} \equiv 2^{n-s} n! \, s! \binom{n+s}{s} \binom{n}{s}. \tag{3}$$

Članovi koji dolaze ispred i iza člana (2) su respektivno

$$\binom{n+s}{s-1} \mathrm{D}^{s-1} (x+1)^n \, \mathrm{D}^{n+1} (x-1)^n,$$

$$\binom{n+s}{s+1} \mathrm{D}^{s+1} (x+1)^n \, \mathrm{D}^{n-1} (x-1)^n.$$

Za $x=1$ njihova vrednost je nula, a takođe i svih ostalih članova na desnoj strani relacije (1).

Istim postupkom nalazimo

$$[\mathrm{D}^{n+s} (x^2-1)^n]_{x=-1} \equiv (-2)^{n-s} n! \, s! \binom{n+s}{s} \binom{n}{s} \qquad (s \geqslant 0). \tag{4}$$

Formule (3) i (4) primenjuju se, na primer, prilikom izračunavanja integrala

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}^r P_m(x)}{\mathrm{d}x^r} \frac{\mathrm{d}^s P_n(x)}{\mathrm{d}x^s} \, \mathrm{d}x \qquad (m, n, r, s \text{ prirodni brojevi}),$$

gde su $P_m(x)$ i $P_n(x)$ *Legendre*-ovi polinomi, tj.

$$P_n(x) \equiv \frac{1}{n! \, 2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2-1)^n.$$

Videti o ovome članak:

D. S. Mitrinović: *Neke formule koje se odnose na Legendre-ove polinome* (Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu — serija: *Matematika i fizika*, № 1, 1956, 20 str.)

4. Izračunati integrale:

$$1^\circ \quad \int_0^1 x^2 P_{n+1}(x) P_{n-1}(x) \, \mathrm{d}x; \qquad 2^\circ \quad \int_{-1}^{+1} x P_n(x) P_{n-2}(x) \, \mathrm{d}x,$$

gde je $P_n(x)$ *Legendre*-ov polinom.

Rezultat. $1^\circ \quad \dfrac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.$

5. Proveriti rezultate:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_m(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_n(x) \, \mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n);$$

$$\int_{-1}^{+1} x^2 \{P_n(x)\}^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8(2n-1)} + \frac{3}{4(2n+1)} + \frac{1}{8(2n+3)};$$

$$\int_{-1}^{+1} P_2(x) P_n(x) P_{n-1}(x) \, \mathrm{d}x = 0,$$

gde $P_k(x)$ označava *Legendre*-ov polinom.

6. Da li postoji *Legendre*-ov polinom $P_k(x)$ takav da je

$$\int_{-1}^{+1} P_k(x) P_n(x) P_{n-1}(x)\, dx = \frac{3n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\ ?$$

7. Ako su brojevi m i n $(\geqslant m)$ iste parnosti, tada je

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dP_n(x)}{dx} \frac{dP_m(x)}{dx}\, dx = m(m+1),$$

gde su $P_m(x)$ i $P_n(x)$ *Legendre*-ovi polinomi.
Dokazati ovo.

8. Dokazati da za *Legendre*-ov polinom $P_n(x)$ važi rekurentna relacija

$$(x^2-1) P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

9. Izračunati integral

$$I_{mn} = \int_{-1}^{+1} x(1-x^2) P_n'(x) P_m'(x)\, dx,$$

gde $P_n(x)$ i $P_m(x)$ označavaju *Legendre*-ove polinome.

Rezultat.

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \frac{2m(m^2-1)}{4m^2-1} & & (n=m-1), \\ &= \frac{2n(n^2-1)}{4n^2-1} & & (m=n-1), \\ &= 0 & & (n \neq m-1;\ m \neq n-1). \end{aligned}$$

10. Pokazati da je funkcija

$$z = \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \qquad \{P_n(x)\ \textit{Legendre}\text{-ov polinom}\}$$

partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(1-x^2) z'' - 2(m+1) x z' + \{n(n+1) - m(m+1)\} z = 0.$$

Uputstvo. Poći od relacije

$$(1-x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) + n(n+1) P_n(x) \equiv 0,$$

pa je diferencirati m-puta.

11. Pokazati da za *Legendre*-ov polinom $P_n(x)$ važi formula

$$\int_{-1}^{+1} x^n P_n(x)\, dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

12. Izračunati integral

$$\int_{-1}^{+1} (x^2-1) P_{n+1}(x) P_n'(x)\, dx,$$

gde je $P_n(x)$ *Legendre*-ov polinom.

Rezultat. $2n(n+1)/\{(2n+1)(2n+3)\}$.

13. Ako je $f(x)$ polinom stepena n, tada važi relacija

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\left\{(2\nu+1)P_\nu(x)\int_{-1}^{+1}f(t)P_\nu(t)\,\mathrm{d}t\right\},$$

gde je $P_\nu(t)$ *Legendre*-ov polinom.
Dokazati ovo.

14. Dokazati formulu

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\left\{\frac{\mathrm{d}P_n(x)}{\mathrm{d}x}\right\}^2\mathrm{d}x=\frac{2n(n+1)}{2n+1},$$

gde je $P_n(x)$ *Legendre*-ov polinom.

15. Funkcija $F_n(x)$ definisana je na sledeći način:

$F_n(x)$ je polinom stepena n; $F_n(1)=1$;

$$\int_{-1}^{+1}F_m(x)F_n(x)\,\mathrm{d}x=0 \qquad (m\neq n).$$

Metodom matematičke indukcije, ili na koji drugi način, dokazati da je $F_n(x)$ *Legendre*-ov polinom.

16. Izračunati integrale:

$$\int_{-1}^{+1}x^{n+2}P_n(x)\,\mathrm{d}x; \qquad \int_{-1}^{+1}x\,P_n(x)\,P_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Rezultat. $\dfrac{(n+2)!}{(2n+3)!!}$; $\dfrac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$.

17. Ako je $x=-1/2$, tada je

$$P_n=P_0P_{2n}-P_1P_{2n-1}+P_2P_{2n-2}-\cdots+P_{2n}P_0,$$

gde je P_k vrednost *Legendre*-ovog polinoma $P_k(x)$ za $x=-1/2$. Dokazati ovu relaciju.

Uputstvo. Razviti u potencijalni red u okolini tačke $t=0$ obe strane relacije

$$(1+t^2+t^4)^{-1/2}=(1+t+t^2)^{-1/2}(1-t+t^2)^{-1/2}$$

i izjednačiti koeficijente uz t^{2n}.

18. Ako je $P_k(x)$ *Legendre*-ov polinom i ako je

$$I=\int_0^1 P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

tada je

$$I=\frac{1}{2n+1} \qquad (m=n),$$

$$=0 \qquad (m-n \text{ parno}),$$

$$=\frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2^{m+n-1}(n-m)(n+m+1)}\,\frac{n!\,m!}{(\nu!)^2(\mu!)^2} \qquad (n=2\nu+1;\ m=2\mu).$$

Proveriti ovaj rezultat.

19. Odrediti a_k $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ tako da je

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x),$$

gde je $P_k(x)$ *Legendre*-ov polinom.

Rezultat. $a_k = 0$ $\qquad (n-k$ neparno ili negativno);

$$a_k = \frac{(2k+1)\, 2^k\, n! \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}k\right)!}{\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}k\right)!\, (n+k+1)!} \qquad (n-k \text{ parno i pozitivno}).$$

20. Proveriti relaciju

$$n P_n(\cos\theta) = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)\, P_{n-k}(\cos\theta),$$

gde je $P_k(x)$ *Legendre*-ov polinom.

21. Ako je

$$u_n = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n P_{2m}(x)\, \mathrm{d}x \qquad (m<n),$$

pokazati da je

$$(n-m)(2n+2m+1)\, u_n = 2n^2 u_{n-1}.$$

$P_{2m}(x)$ označava *Legendre*-ov polinom.

22. Izračunati integral

$$\int_{-1}^{+1} x(1-x^2)\, P_r \frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}P_m}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x,$$

gde je P_k *Legendre*-ov polinom po promenljivoj x.

23. Dokazati da za *Legendre*-ove polinome $P_k(x)$ važi relacija

$$x P_n'(x) = n P_n(x) + (2n-3) P_{n-2}(x) + (2n-7) P_{n-4}(x) + \cdots$$

24. Dokazati da za *Legendre*-ove polinome $P_k(x)$ važi relacija

$$x^2 P_n''(x) = n(n-1) P_n(x) + \sum_{r=1}^{p} \left[(2n-4r+1)\{r(2n-2r+1)-2\} P_{n-2r}(x)\right],$$

gde je $p = \frac{1}{2}n$ ili $\frac{1}{2}(n-1)$.

Izvesti formulu kojom će izraz

$$x^\nu P_n^{(\nu)}(x) \qquad (\nu \leqslant n \text{ prirodan broj})$$

ili opštije

$$x^\nu P_n^{(r)}(x) \qquad (\nu, r \text{ prirodni brojevi ili nule; } r \leqslant n)$$

biti pretstavljen kao linearna kombinacija *Legendre*-ovih polinoma.

25. Dokazati metodom matematičke indukcije formulu

$$(2n+1)\int_x^1 P_n^2(x)\,dx = 1 - x P_n^2(x) - 2x\,\{P_1^2(x) + P_2^2(x) + \cdots + P_{n-1}^2(x)\}$$
$$+ 2\,\{P_1(x)\,P_2(x) + P_2(x)\,P_3(x) + \cdots + P_{n-1}(x)\,P_n(x)\},$$

gde $P_k(x)$ označava *Legendre*-ov polinom.

26. Ako je $P_k(x)$ *Legendre*-ov polinom, proveriti formulu

$$x^{n-1} P'_{n+1}(x) = (2n+1)\,x^{n-1} P_n(x) + \sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu)\,x^{n-1+\nu} P_{n-\nu}(x).$$

27. Ako je m prirodan broj, tada je

$$\left.\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_{m+n}(x)\right|_{x=1} = \frac{\Gamma(2m+n+2)}{2^{m+1}(m+1)!\,\Gamma(n)},$$

gde je $P_n(x)$ *Legendre*-ov polinom i $\Gamma(x)$ gama-funkcija.
Proveriti ovaj rezultat.

28. Ako su m i n $(\leqslant m)$ prirodni brojevi i $P_n(x)$ *Legendre*-ov polinom, dokazati formulu

$$(1)\qquad \int_{-1}^{+1} (1+x)^m P_n(x)\,dx = \frac{2^{m+1} m!\, m!}{(m-n)!\,(m+n+1)!}.$$

Rešenje. Primenom postupka parcijalne integracije n puta uzastopno dobijamo:

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^m P_n(x)\,dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} (1+x)^m D^n (x^2-1)^n\,dx$$
$$= \frac{1}{2^n n!}(-1)^n \frac{m!}{(m-n)!} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{m-n} (x^2-1)^n\,dx$$
$$= \frac{m!}{2^n n!\,(m-n)!} \int_{-1}^{+1} (1-x)^n (1+x)^m\,dx.$$

Takođe uzastopnom parcijalnom integracijom n puta nalazimo:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^n (1+x)^m\,dx = \frac{m!\,n!}{(m+n)!} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{m+n}\,dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\,2^{m+n+1}.$$

Zamenom u prethodnoj formuli dobijamo (1).

29. Proveriti *Titchmarch*-ovu formulu

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{m+n} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = \frac{2^{m+n+1}\{(m+n)!\}^4}{(m!\,n!)^2\,(2m+2n+1)!},$$

gde je $P_k(x)$ *Legendre*-ov polinom.

30. Ako R označava operator

$$\mathrm{R}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\},$$

proveriti da li važi relacija

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,\mathrm{R}\{f(x)\}\,\mathrm{d}x=-n(n+1)\int_{-1}^{+1} P_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

gde su $f(x)$ i $f'(x)$ konačni za $x=\pm 1$. Ovde je $P_n(x)$ *Legendre*-ov polinom.

31. Ako je $f(x)\equiv ax^2+bx+c$ (a, b, c parametri) i ako je

$$F_n(x)\equiv\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{f(x)\}^n,$$

pokazati da je

$$F'_{n+1}(x)=f(x)F_n'(x)+(n+2)f'(x)F_n'(x)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)f''(x)F_n(x),$$

$$f(x)F_n''(x)+f'(x)F_n'(x)-\frac{1}{2}n(n+1)f''(x)F_n(x)=0.$$

Ove rezultate dovesti u vezu sa odgovarajućim rezultatima o *Legendre*-ovim polinomima.

32. Razviti u red *Legendre*-ovih polinoma funkciju

$$\begin{aligned} f(x)&=0 \quad (-1<x<0),\\ &=1 \quad (0<x<+1). \end{aligned}$$

Rezultat. $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-2)!\,(4n-1)}{2^{2n}\,n!\,(n-1)!}P_{2n-1}(x).$

33. Proveriti razvoj

$$|x|=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-2)!\,(4n+1)}{2^{2n}(n-1)!\,(n+1)!}P_{2n}(x) \qquad (-1<x<+1),$$

gde je $P_k(x)$ *Legendre*-ov polinom.

34. Ako je $y_n(x)$ rešenje *Legendre*-ove diferencijalne jednačine

$$(x^2-1)\,y''(x)+2\,x\,y'(x)-n(n+1)\,y(x)=0,$$

proveriti da li je funkcija $y(x)=y_n(1/x)$ rešenje diferencijalne jednačine

$$x^2(x^2-1)\,y''(x)+2\,x^3\,y'(x)+n(n+1)\,y(x)=0.$$

35. Ako je $y_n(x)$ rešenje *Legendre*-ove diferencijalne jednačine

$$(x^2-1)\,y''(x)+2\,x\,y'(x)-n(n+1)\,y(x)=0,$$

ispitati da li je funkcija $y(x)=x^a\,y_n(x)$ rešenje diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} x^2(x^2-1)\,y''(x)&+2\,x\,[(1-a)\,x^2+a]\,y'(x)\\ &+\{[a(a-1)-n(n+1)]\,x^2-a(a+1)\}\,y(x)=0. \end{aligned}$$

36. Polazeći od formule

$$\text{(1)}\qquad \int_0^\pi \frac{d\theta}{a-ib\cos\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad \{a\,(>0),\ b \text{ realne konstante}\},$$

pokazati da se *Legendre*-ov polinom $P_n(x)$ za $-1\leqslant x\leqslant 1$ može izraziti u obliku

$$\text{(2)}\qquad P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n\,d\theta.$$

Rešenje. Ako se stavi

$$a=1-tx,\qquad b=t\sqrt{1-x^2}\qquad (0<t<1;\ -1\leqslant x\leqslant 1),$$

tada je $a>0$ i b realno, te formula (1) dobija oblik

$$\text{(3)}\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\theta}{1-tx-it\sqrt{1-x^2}\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{(1-tx)^2+t^2(1-x^2)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n.$$

Potencijalni red

$$\text{(4)}\qquad \frac{1}{1-t(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)}=\sum_{n=0}^{\infty}(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n\,t^n$$

konvergira, jer je

$$|t(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)|=t\sqrt{x^2+(1-x^2)\cos^2\theta}\qquad (\text{jer je } 0<t<1)$$
$$=t\sqrt{\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta}$$
$$\leqslant t<1.\qquad (\text{jer je } -1\leqslant x\leqslant 1)$$

Iz (4) sleduje

$$\text{(5)}\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\theta}{1-t(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}t^n\int_0^\pi (x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n\,d\theta.$$

Upoređenjem relacija (3) i (5) dobija se

$$\text{(6)}\qquad P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n\,d\theta\qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

To je integralna formula *Legendre*-ovog polinoma, koju ju izveo *Laplace*. Ova formula važi za svako x.

Polazeći od (6), dobija se majorantna formula

$$|P_n(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta|^n\,d\theta\qquad (\text{jer je } -1\leqslant x\leqslant 1)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{(\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta)^n}\,d\theta$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta$$
$$=1.$$

Prema tome, dobili smo majorantnu formulu

$$|P_n(x)|\leqslant 1\qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

37. Polazeći od *Laplace*-ove formule

$$(1) \qquad P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n \, d\theta,$$

pokazati da za *Legendre*-ove polinome važi nejednakost

$$(2) \qquad P_n^2(x) \leqslant P_{n-1}(x) P_{n+1}(x) \qquad (|x| \geqslant 1).$$

Dokaz. Napišimo formulu (1) u obliku

$$(3) \qquad P_n(x) = \int_0^{\pi} f(\theta) g(\theta) \, d\theta,$$

gde je

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^{\frac{n-1}{2}},$$

$$g(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Ako se *Schwarz*-ova nejednakost

$$\left(\int_a^b f(\theta)\, g(\theta)\, d\theta\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(\theta)\, d\theta\right)\left(\int_a^b g^2(\theta)\, d\theta\right)$$

primeni na integral (3), dobija se nejednakost (2), koju je trebalo dokazati.

II. BESSEL-OVE FUNKCIJE

38. Proveriti formule:

$$(1) \qquad \operatorname{ch}(x \operatorname{ch}\theta) = I_0(x) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} I_{2\nu}(x) \operatorname{ch} 2\nu\theta,$$

$$(2) \qquad \operatorname{sh}(x \operatorname{ch}\theta) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} I_{2\nu+1}(x) \operatorname{ch}(2\nu+1)\theta,$$

$$(3) \qquad \operatorname{ch}(x \operatorname{sh}\theta) = J_0(x) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} J_{2\nu}(x) \operatorname{ch} 2\nu\theta,$$

$$(4) \qquad \operatorname{sh}(x \operatorname{sh}\theta) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(x) \operatorname{sh}(2\nu+1)\theta,$$

$$(5) \qquad \operatorname{ch}(x \cos\theta) = I_0(x) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} I_{2\nu}(x) \cos 2\nu\theta,$$

$$(6) \qquad \operatorname{sh}(x \cos\theta) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} I_{2\nu+1}(x) \cos(2\nu+1)\theta,$$

$$(7) \qquad \operatorname{ch}(x \sin\theta) = I_0(x) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} I_{2\nu}(x) \cos 2\nu\theta,$$

$$(8) \qquad \operatorname{sh}(x \sin\theta) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} I_{2\nu+1}(x) \sin(2\nu+1)\theta,$$

$$(9) \qquad \cos(x \operatorname{ch}\theta) = J_0(x) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} J_{2\nu}(x) \operatorname{ch} 2\nu\theta,$$

(10) $$\sin(x \operatorname{ch} \theta) = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu J_{2\nu+1}(x) \operatorname{ch}(2\nu+1)\theta,$$

(11) $$\cos(x \operatorname{sh} \theta) = I_0(x) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu I_{2\nu}(x) \operatorname{ch} 2\nu\theta,$$

(12) $$\sin(x \operatorname{sh} \theta) = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu I_{2\nu+1}(x) \operatorname{sh}(2\nu+1)\theta,$$

(13) $$\cos(x \cos\theta) = J_0(x) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu J_{2\nu}(x) \cos 2\nu\theta,$$

(14) $$\sin(x \cos\theta) = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu J_{2\nu+1}(x) \cos(2\nu+1)\theta,$$

(15) $$\cos(x \sin\theta) = J_0(x) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{2\nu}(x) \cos 2\nu\theta,$$

(16) $$\sin(x \sin\theta) = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(x) \sin(2\nu+1)\theta.$$

U ovim formulama $J_k(x)$ i $I_k(x)$ su *Bessel*-ova funkcija prve vrste i modifikovana *Bessel*-ova funkcija prve vrste.

Formule

$$1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \cdots,$$
$$\cos x = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \cdots$$

dobijaju se iz (3) i (15) odnosno iz (9) i (13) stavljanjem $\theta = 0$.

39. Proveriti relacije:

$$J_2(x) - J_0(x) = 2J_0''(x),$$
$$J_2(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) = J_0''(x),$$

gde je $J_k(x)$ *Bessel*-ova funkcija prve vrste.

40. Dokazati relaciju

$$16\, J_n^{(4)}(x) = J_{n-4}(x) - 4\, J_{n-2}(x) + 6\, J_n(x) - 4\, J_{n+2}(x) + J_{n+4}(x),$$

gde je $J_k(x)$ *Bessel*-ova funkcija prve vrste.

41. Proveriti relaciju

$$J_3(x) + 3\, J_0'(x) + 4\, J_0'''(x) = 0,$$

gde je $J_k(x)$ *Bessel*-ova funkcija prve vrste.

42. Ako se pomnože razvoji izraza

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} \quad \text{i} \quad e^{-\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

u *Laurent*-ov red u okolini tačke $t=0$ i odredi član nezavisan od t, pokazati da se dobija

$$J_0^2(x) + 2\{J_1^2(x) + J_2^2(x) + \cdots\} = 1,$$

gde je $J_k(x)$ *Bessel*-ova funkcija prve vrste.

43. Proveriti formulu

$$\int_0^\infty e^{-bt} J_0(at)\,dt = (a^2+b^2)^{-1/2} \qquad (b>0),$$

gde je $J_0(x)$ *Bessel*-ova funkcija prve vrste nultog reda.

44. Dokazati da važi razvoj

$$x^2 = a \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_{2n}(x) \qquad \{J_{2n}(x)\ \textit{Bessel}\text{-ova funkcija}\},$$

gde je a numerička konstanta koju treba odrediti.

Uputstvo. Poći od definicione formule

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\,t^n,$$

diferencirati po t, pomnožiti zatim sa t, ponovo diferencirati po t i najzad staviti $t=1$.

Da li se ovim postupkom mogu razviti potencije $x^3, x^4, \ldots$ u red *Bessel*-ovih funkcija?

Rezultat.

$$x^r = 2^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r+n-1)!}{n!}(r+2n)\,J_{r+2n}(x).$$

45. Proveriti relacije:

$$\frac{1}{2}z = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\,J_{2n+1}(z);$$

$$\frac{1}{2}z\cos z = J_1(z) - 9J_3(z) + 25J_5(z) - \cdots;$$

$$\frac{1}{2}z\sin z = 4J_2(z) - 16J_4(z) + 36J_6(z) - \cdots$$

$\{J_k(z)$ *Bessel*-ova funkcija prve vrste$\}$.

46. Dokazati *Neumann*-ovu formulu

$$J_n(u+v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(u)\,J_{n-m}(v),$$

gde je $J_n(u)$ *Bessel*-ova funkcija prve vrste.

47. Ako su a i b dva različita rešenja jednačine

(1) $$J_0(x) = 0,$$

pokazati da je

(2) $$\int_0^1 x\,J_0(ax)\,J_0(bx)\,dx = 0,$$

(3) $$\int_0^1 x\,J_0^2(ax)\,dx = \frac{1}{2}J_1^2(a)$$

$\{J_\nu(x)$ *Bessel*-ova funkcija I vrste reda $\nu\}$.

Primenom formula (2) i (3) odrediti A_k u *Fourier-Bessel*-ovom razvoju

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(a_k x),$$

gde je $f(x)=x^2\ (0<x<1)$ i gde su $a_k\ (a_1<a_2<\cdots<a_k<\cdots)$ pozitivne nule funkcije $J_0(x)$.

Rezultat. $A_k=2(a_k^2-4)/\{a_k^3 J_1(a_k)\}$.

48. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''+x^m y=0.$$

Rezultat. $y=\sqrt{x}\, Z_{1/(m+2)}\left(\frac{2}{m+2}\, x^{\frac{m+2}{2}}\right)$, gde je $Z_{1/(m+2)}$ cilindrična funkcija naznačenog argumenta.

49. Dokazati da je funkcija

$$y=\frac{1}{\cos x}\{C_1 J_n(x)+C_2 N_n(x)\},$$

gde su C_1 i C_2 dve proizvoljne konstante, a $J_n(x)$ i $N_n(x)$ *Bessel*-ove funkcije I i II vrste. rešenje jednačine

$$x^2 y''+(x-2x^2\operatorname{tg} x)\, y'-(x\operatorname{tg} x+n^2)\, y=0.$$

Odrediti ono rešenje $y=y_1(x)$ ove jednačine koje ostaje konačno kada $x\to 0$ i zadovoljava uslov $y_1(a)=b$.

Uputstvo. Izvršiti transformaciju $y=z/\cos x$ (z nova funkcija).

50. Ako je $x>0$ i ako je n prirodan broj ili nula, dokazati formulu

$$J_{n+1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)+Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right\}, \tag{1}$$

gde su $P_n(1/x)$ i $Q_n(1/x)$ polinomi po $1/x$ čiji stepeni ne premašuju n i koji imaju osobinu:

$$P_n(1/x)\to 1, \qquad Q_n(1/x)\to 0 \qquad (x\to\infty). \tag{2}$$

Polazeći od (1), izvesti asimptotsku formulu

$$J_{n+1/2}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right). \tag{3}$$

Rešenje. Kao polaznu tačku uzećemo formulu

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \qquad (\nu \text{ ma kakva konstanta}), \tag{4}$$

kao i rekurentnu relaciju

$$\nu J_\nu(x)=\frac{x}{2}\{J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)\}. \tag{5}$$

Za $\nu=1/2$ iz (4) sleduje

$$J_{1/2}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{k!\,2^{2k+1}\,\Gamma(k+3/2)}. \tag{6}$$

Kako je

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

formula (6) postaje

(7) $$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Za $\nu=-1/2$ iz (4) sleduje

(8) $$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Iz relacije (5) za $\nu=1/2$ dobija se

$$J_{3/2}(x)=\frac{1}{x}J_{1/2}(x)-J_{-1/2}(x).$$

S obzirom na formule (7) i (8) nalazi se

(9) $$J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{1}{x}\sin x-\cos x\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Ako se u (5) stavi $\nu=3/2$, biće

$$J_{5/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\sin(x-\pi)+\frac{3}{x}\cos(x-\pi)\right\}.$$

Dalje je:

$$J_{7/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left(\frac{15}{x^3}-\frac{6}{x}\right)\sin x-\left(\frac{15}{x^2}-1\right)\cos x\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left(\frac{15}{x^2}-1\right)\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+\left(\frac{15}{x^3}-\frac{6}{x}\right)\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\right\};$$

$$J_{9/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left(\frac{105}{x^4}-\frac{45}{x^2}+1\right)\sin x-\left(\frac{105}{x^3}-\frac{10}{x}\right)\cos x\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left(-\frac{105}{x^4}+\frac{45}{x^2}-1\right)\sin(x-2\pi)-\left(\frac{105}{x^3}-\frac{10}{x}\right)\cos(x-2\pi)\right\};$$

$$J_{11/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left(\frac{945}{x^5}-\frac{420}{x^3}+\frac{15}{x}\right)\sin x-\left(\frac{945}{x^4}-\frac{105}{x^2}-1\right)\cos x\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left(-\frac{945}{x^4}+\frac{105}{x^2}-1\right)\sin\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)-\left(\frac{945}{x^5}-\frac{420}{x^3}+\frac{15}{x}\right)\cos\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)\right\}$$

Na osnovu prethodnih formula naslućujemo da je $J_{n+1/2}(x)$ oblika (1).

Pretpostavimo stoga da je formula (1) tačna za $n=k$ i $n=k-1$, pa iz (5) odredimo J_ν za $\nu=k+1/2$.

Na taj način dobijamo

$$J_{k+3/2}(x)=\frac{1}{x}(2k+1)\,J_{k+1/2}(x)-J_{k-1/2}(x),$$

odnosno

$$\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J_{k+3/2}(x)=\frac{1}{x}(2k+1)\left\{P_k\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x-\frac{k\pi}{2}\right)+Q_k\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x-\frac{k\pi}{2}\right)\right\}$$

$$-\left\{P_{k-1}\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x-\frac{k-1}{2}\pi\right)+Q_{k-1}\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x-\frac{k-1}{2}\pi\right)\right\}.$$

Budući da su izrazi

$$\sin\left(x-\frac{k\pi}{2}\right),\quad \cos\left(x-\frac{k\pi}{2}\right),\quad \sin\left(x-\frac{k-1}{2}\pi\right),\quad \cos\left(x-\frac{k-1}{2}\pi\right)$$

jednaki izrazima

$$\cos\left(x-\frac{k+1}{2}\pi\right),\quad -\sin\left(x-\frac{k+1}{2}\pi\right),\quad -\sin\left(x-\frac{k+1}{2}\pi\right),\quad -\cos\left(x-\frac{k+1}{2}\pi\right),$$

poslednja relacija postaje

$$J_{k+3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{A\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x-\frac{k+1}{2}\pi\right)+B\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x-\frac{k+1}{2}\pi\right)\right\},$$

gde je

$$A\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{2k+1}{x}Q_k\left(\frac{1}{x}\right)+P_{k-1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

(10)

$$B\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2k+1}{x}P_k\left(\frac{1}{x}\right)+Q_{k-1}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Kako je, prema induktivnoj hipotezi,

$$P_{k-1}(1/x)\to 1,\quad P_k(1/x)\to 1\qquad (x\to\infty);$$

$$Q_{k-1}(1/x)\to 0,\quad Q_k(1/x)\to 0\qquad (x\to\infty),$$

iz (10) sleduje

$$A(1/x)\to 1,\quad B(1/x)\to 0\qquad (x\to\infty),$$

gde su $A(1/x)$ i $B(1/x)$ polinomi po $1/x$ čiji stepeni ne premašaju $k+1$, što se zaključuje na osnovu formula (10).

Stoga se polinomi $A(1/x)$ i $B(1/x)$ mogu označiti sa $P_{k+1}(1/x)$, odnosno sa $Q_{k+1}(1/x)$.

Definitivno dobijamo formulu

(11)
$$J_{k+3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x-\frac{k+1}{2}\pi\right)+Q_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x-\frac{k+1}{2}\pi\right)\right\}.$$

Dakle, ako je formula (1) tačna za $n=k-1$ i za $n=k$, ona je tačna i za $n=k+1$. Prema tome, metodom matematičke indukcije dokazali smo formulu (1).

Kada $x\to\infty$, iz (1) sleduje aproksimativna asimptotska formula (3), tj.

$$J_{n+1/2}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right).$$

Ako se umesto n stavi $n-\frac{1}{2}$, dobija se

$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\qquad (x\to\infty),$$

odnosno

$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}-x\right)\right\}\qquad (x\to\infty).$$

Odavde sleduje

(12)
$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\qquad (x\to\infty).$$

Može se dokazati da poslednja formula važi kada je n ma kakav realan broj ν, tj. da važi aproksimativna asimptotska formula

$$(13)\qquad J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\qquad (x\to\infty).$$

Za *Bessel*-ovu funkciju druge vrste važi sledeća asimptotska aproksimativna formula

$$(14)\qquad N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\qquad (x\to\infty).$$

Da bismo dokazali formulu (14), pođimo od definicione formule

$$(15)\qquad N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}\qquad (\nu\neq \text{ceo broj})$$

S obzirom na (13), formula (15) postaje

$$(\sin\nu\pi)\,N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\nu\pi\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

Ako se primeni identitet

$$2\cos p\cos q \equiv \cos(p-q)+\cos(p+q),$$

poslednja relacija postaje

$$(2\sin\nu\pi)\,N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x-\frac{3\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(x+\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\ (x\to\infty).$$

$$\therefore\quad (2\sin\nu\pi)\,N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x-\frac{3\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\qquad (x\to\infty).$$

$$\therefore\quad (\sin\nu\pi)\,N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\nu\pi\qquad (x\to\infty).$$

Na kraju se dobija

$$(16)\qquad N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\qquad (x\to\infty).$$

Polazeći od asimptotske formule (13), zaključuje se da *Bessel*-ova funkcija $J_\nu(x)$ za velike vrednosti x ima nule koje se mogu pretstaviti aproksimativnom formulom

$$x_s \approx \frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+s\pi\qquad (s \text{ prirodan broj dovoljno veliki}).$$

51. Pokazati da je

$$\int_0^\infty (\sin x)\,J_0(xt)\,dx = \begin{cases}(1-t^2)^{-1/2} & (0<t<1),\\ 0 & (t>1),\end{cases}$$

gde je

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\,d\theta.$$

52. Polazeći od razvoja

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\,t^n,$$

pokazati da je

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-z\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

III. LAGUERRE-OVI POLINOMI

53. Polazeći od definicione formule

$$\frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

Laguerre-ovih polinoma $L_n(x)$, dokazati da je

$$L_n(x)=\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left\{\frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)\right\}\right)_{t=0}.$$

$$=e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}).$$

Rešenje. S jedne strane imamo razvoj

$$\frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\frac{1}{1-t}\exp\left(x-\frac{x}{1-t}\right)$$

$$=e^x\frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{x}{1-t}\right)$$

$$=e^x\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{1-t}\right)^k$$

$$=e^x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\,\frac{1}{(1-t)^{k+1}}.$$

Budući da je

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\,\frac{1}{(1-t)^{k+1}}=(k+1)(k+2)\cdots(k+n)\frac{1}{(1-t)^{k+n+1}},$$

dobija se

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left\{\frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)\right\}\right)_{t=0}=e^x\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\frac{x^k}{k!}\prod_{r=1}^{n}(k+r)\right\}.$$

S druge strane imamo razvoj

$$x^n e^{-x}=x^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+n}}{k!}.$$

Odavde izlazi

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(k+1)}{k!}x^k.$$

Ovim smo dokazali da je zaista

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

Primenom *Leibniz*-ove formule nalazimo

$$L_n(x) = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}(x^n)}{dx^{n-k}} \frac{d^k(e^{-x})}{dx^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \{(-1)^k \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(k+1)\, x^k\}$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}.$$

To je *Laguerre*-ov polinom.

54. Metodom indukcije dokazati relaciju

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t}\, e^{-\frac{xt}{1-t}} \right) \right\}_{t=0} = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

Dokaz. I. Stavimo li

$$F = \frac{1}{1-t}\, e^{-\frac{xt}{1-t}},$$

posle diferenciranja po t dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{1-t} - \frac{x}{(1-t)^2} \right\} F,$$

odnosno

$$\text{(2)} \qquad (1-t)^2 \frac{\partial F}{\partial t} = (1-x-t)\, F.$$

Diferenciramo li zatim relaciju (2) n puta po t, primenom *Leibniz*-ove formule dobijamo

$$(1-t)^2 \frac{\partial^{n+1} F}{\partial t^{n+1}} - 2n(1-t) \frac{\partial^n F}{\partial t^n} + n(n-1) \frac{\partial^{n-1} F}{\partial t^{n-1}}$$

$$= (1-x-t) \frac{\partial^n F}{\partial t^n} - n \frac{\partial^{n-1} F}{\partial t^{n-1}}.$$

Ako ovde stavimo $t=0$, posle sređivanja, biće

$$\text{(3)} \qquad \left\{ \frac{\partial^{n+1} F}{\partial t^{n+1}} \right\}_{t=0} + (x-2n-1) \left\{ \frac{\partial^n F}{\partial t^n} \right\}_{t=0} + n^2 \left\{ \frac{\partial^{n-1} F}{\partial t^{n-1}} \right\}_{t=0} = 0.$$

Uvedimo sledeću oznaku

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = e^x D^n(x^n e^{-x}).$$

Dokazaćemo sada da funkcije $L_n(x)$ zadovoljavaju rekurentnu relaciju

$$\text{(4)} \qquad D^{n+1}(x^{n+1} e^{-x}) + (x-2n-1) D^n(x^n e^{-x}) + n^2 D^{n-1}(x^{n-1} e^{-x}) = 0.$$

Da bismo pokazali da je relacija (4) zaista tačna, izvršićemo nekoliko transformacija. Kako je

$$\text{(5)} \qquad D^{n+1}(x^{n+1} e^{-x}) = D^n D(x^{n+1} e^{-x}) = (n+1) D^n(x^n e^{-x}) - D^n(x^{n+1} e^{-x}),$$

relacija (4) postaje

$$\text{(6)} \qquad (x-n) D^n(x^n e^{-x}) - D^n(x^{n+1} e^{-x}) + n^2 D^{n-1}(x^{n-1} e^{-x}) = 0.$$

Koristeći *Leibniz*-ovu formulu za n-ti izvod proizvoda, dobijamo

(7) $$D^n (x^{n+1} e^{-x}) = D^n \{x (x^n e^{-x})\} = x D^n (x^n e^{-x}) + n D^{n-1} (x^n e^{-x}).$$

Unošenjem izraza (7), relacija (6) uzima oblik

(8) $$-n D^n (x^n e^{-x}) - n D^{n-1} (x^n e^{-x}) + n^2 D^{n-1} (x^{n-1} e^{-x}) = 0.$$

Posle skraćivanja sa $-n$ biće

$$D^{n-1} \{ D (x^n e^{-x}) + x^n e^{-x} - n x^{n-1} e^{-x} \} = 0,$$

jer je

$$D (x^n e^{-x}) = n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}.$$

Bez teškoće se proverava da je relacija (1) tačna za $n=1$ i $n=2$. Pretpostavimo li da je tačna za $n=1, 2, \ldots, k$, dokazaćemo da iz toga sleduje da je tačna i za $n=k+1$.

Zbilja, ako je

$$\left\{\frac{\partial^{k-1} F}{\partial t^{k-1}}\right\}_{t=0} = L_{k-1}(x) \quad \text{i} \quad \left\{\frac{\partial^k F}{\partial t^k}\right\}_{t=0} = L_k(x),$$

tada se iz rekurentnih relacija (3) i (4) dobija

$$\left\{\frac{\partial^{k+1} F}{\partial t^{k+1}}\right\}_{t=0} = L_{k+1}(x).$$

Time je induktivni dokaz relacije (1) završen.

Redigovano prema rešenju *D. Đokovića*.

II. Kako je

$$e^{-\frac{xt}{1-t}} = e^x \cdot e^{-\frac{x}{1-t}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{x}{1-t}}\right) = -\frac{1}{1-t} e^{-\frac{x}{1-t}},$$

dobija se

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}\right) = e^x \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t} e^{-\frac{x}{1-t}}\right)$$

$$= -e^x \frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{x}{1-t}} = -e^x \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-\frac{x}{1-t}},$$

tj.

(2′) $$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}\right) = -e^x \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-\frac{x}{1-t}}.$$

Ako se stavi $u = e^{-\frac{x}{1-t}}$, biće

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -(x D^2) u \qquad \left(D = \frac{\partial}{\partial x}\right),$$

gde $x D^2$ treba shvatiti kao operator.

Zatim je

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-\frac{x}{1-t}} = \frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (x D^2) u$$

$$= -\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\frac{\partial}{\partial t} (x D^2) u = \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} (x D^2)(x D^2) u = \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} (x D^2)^2 u.$$

Indukcijom se dokazuje da je

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-\frac{x}{1-t}} = (-1)^n (x D^2)^n u.$$

Prema tome iz (2′) dobija se

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)=(-1)^{n+1}e^x\,\mathrm{D}\,(x\,\mathrm{D}^2)^n\,u,$$

odnosno

(3′) $$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)\Bigg|_{t=0}=(-1)^{n+1}e^x\,\mathrm{D}\,(x\,\mathrm{D}^2)^n\,e^{-x},$$

pošto je $u=e^{-x}$ za $t=0$.

Na osnovu *Leibniz*-ove formule je

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}x^n\right)\left(\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}e^{-x}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}e^{-x}\\ &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\frac{n!}{r!}x^r e^{-x},\end{aligned}$$

odakle je

(4′) $$e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\frac{n!}{r!}x^r.$$

Prema (3′) i (4′) relacija (1) postaje

$$(-1)^{n+1}e^x\,\mathrm{D}\,(x\,\mathrm{D}^2)^n\,e^{-x}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\frac{n!}{r!}x^r,$$

odnosno

(5′) $$\mathrm{D}\,(x\,\mathrm{D}^2)^n\,e^{-x}=e^{-x}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r+1}\binom{n}{r}\frac{n!}{r!}x^r.$$

Dovoljno je sada dokazati istinitost ove relacije. Relacija (5′) je istinita za $n=0$ i $n=1$. Pretpostavimo da je istinita i za $n=p$, tj. da je

(6′) $$\mathrm{D}\,(x\,\mathrm{D}^2)^p\,e^{-x}=e^{-x}\sum_{r=0}^{p}(-1)^{p-r+1}\binom{p}{r}\frac{p!}{r!}x^r.$$

Budući da je

$$\mathrm{D}\,(x\mathrm{D}^2)^{p+1}\,e^{-x}=\mathrm{D}\,(x\mathrm{D}^2)\,(x\mathrm{D}^2)^p\,e^{-x}=\mathrm{D}\,(x\,\mathrm{D})\,\mathrm{D}\,(x\,\mathrm{D}^2)^p\,e^{-x},$$

na osnovu induktivne pretpostavke (6′) dobija se

$$\mathrm{D}\,(x\,\mathrm{D}^2)^{p+1}\,e^{-x}=\mathrm{D}\,(x\,\mathrm{D})\left\{e^{-x}\sum_{r=0}^{p}(-1)^{p-r+1}\binom{p}{r}\frac{p!}{r!}x^r\right\}.$$

Ako stavimo

$$a_r=(-1)^{p-r+1}\binom{p}{r}\frac{p!}{r!}\qquad(r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

tada je

(7′) $$\begin{aligned}\mathrm{D}\,(x\,\mathrm{D}^2)^{p+1}\,e^{-x} &= \mathrm{D}\,(x\,\mathrm{D})\left(e^{-x}\sum_{r=0}^{p}a_r\,x^r\right)\\ &= e^{-x}\left\{\sum_{r=1}^{p}r^2\,a_r\,x^{r-1}-\sum_{r=0}^{p}(2\,r+1)\,a_r x^r+\sum_{r=0}^{p}a_r\,x^{r+1}\right\}\\ &= e^{-x}\sum_{r=0}^{p+1}b_r\,x^r,\end{aligned}$$

gde je

$$b_0=a_1-a_0=(-1)^p\,(p+1)\,!,$$

$$b_r=(r+1)^2\,a_{r+1}-(2\,r+1)\,a_r+a_{r-1}=(-1)^{p-r}\binom{p+1}{r}\frac{(p+1)\,!}{r\,!},$$

$$(r=1,2,3,\ldots,p-1),$$

$$b_p=a_{p-1}-(2\,p+1)\,a_p=(p+1)^2,$$

$$b_{p+1}=-1.$$

Prema tome, može se staviti

$$b_r=(-1)^{p-r}\binom{p+1}{r}\frac{(p+1)\,!}{r\,!}\qquad (r=0,1,2,\ldots,p+1),$$

te relacija (7′) glasi

$$\mathrm{D}\,(x\,\mathrm{D}^2)^{p+1}\,e^{-x}=e^{-x}\sum_{r=0}^{p+1}(-1)^{p-r}\binom{p+1}{r}\frac{(p+1)\,!}{r\,!}\,x^r.$$

Ovo pokazuje da je relacija (5′) istinita za $n=p+1$ kada je istinita za $n=p$. Kako ona važi za $n=0$ i 1, izlazi da je istinita i za svaki ceo broj n ($\geqslant 0$). Odavde sleduje da je za svaki ceo broj $n\geqslant 0$ istinita i relacija (1) koja je ekvivalentna relaciji (5′).

Primedba. Ovaj problem postavio je *D. S. Mitrinović* (*Mathematics Magazine*, vol. 33, № 4, 1960, p. 233). Navedeni dokaz relacije (1) je nova i bolja redakcija dokaza koji je u istom časopisu dao *H. Demir*.

55. Proveriti da li je funkcija

$$y_n(x)=\frac{n\,!}{2\pi\,i}\oint_{|t|=r>0} e^{-xt}\,\frac{(t+1)^n}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

rešenje *Laguerre*-ove diferencijalne jednačine

$$xy''+(1-x)\,y'+ny=0.$$

Rešenje. Izvršimo u integralu smenu promenljive $t=(z-x)/x$, pa dobijamo

$$y_n(x)=\frac{n\,!}{2\pi\,i}\,e^x\oint_{|z-x|=R}\frac{e^{-z}\,z^n}{(z-x)^{n+1}}\,\mathrm{d}z. \tag{1}$$

Na osnovu *Cauchy*-eve formule za izvode analitičke funkcije, iz (1) sleduje

$$y_n(x)=e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\,e^{-x}). \tag{2}$$

Funkcija (2) je upravo *Laguerre*-ov polinom n-tog stepena.

56. Ako je $L_n(x)=e^x\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\,e^{-x})$, dokazati razvoj

$$\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k\,!}\binom{n}{k}L_k(x). \tag{1}$$

Rešenje. Posmatrajmo funkciju

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k\,!}L_k(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{e^x}{k\,!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^k\,e^{-x}). \tag{2}$$

Na osnovu *Cauchy*-evog stava o izvodima analitičkih funkcija je

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^k e^{-x}) = \left\{\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}(z^k e^{-z})\right\}_{z=x} = \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{z^k e^{-z}}{(z-x)^{k+1}}\,\mathrm{d}z,$$

gde za konturu integracije C možemo uzeti krug koji obuhvata tačku $z=x$, na primer, $|z-x|=r>0$.

Tada (2) postaje

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{(-1)^k}{2\pi i}e^x\binom{n}{k}\oint_C \frac{z^k e^{-z}}{(z-x)^{k+1}}\,\mathrm{d}z\right\} \tag{3}$$

$$= \frac{e^x}{2\pi i}\oint_C\left\{\frac{e^{-z}}{z-x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{z}{z-x}\right)^k\right\}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{e^x}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{-z}}{z-x}\left(1-\frac{z}{z-x}\right)^n\mathrm{d}z$$

$$= \frac{e^x}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{-z}(-x)^n}{(z-x)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Primenjujući ponovo *Cauchy*-ev stav, dobijamo

$$f(x) = \frac{e^x(-x)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}) = \frac{x^n}{n!}.$$

Time smo dokazali relaciju (1).

Redigovano prema rešenju *D. Đokovića.*

57. Ako se polinom $S_n(x)$ definiše pomoću relacije

$$e^t J_0(2\sqrt{xt}) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad \{J_0(x)\ \textit{Bessel}\text{-ova funkcija}\},$$

ispitati da li je $S_n(x) = \alpha(n) L_n(x)$, gde je $\alpha(n)$ funkcija od n i $L_n(x)$ *Laguerre*-ov polinom.

Rešenje. Pođimo od reda za *Bessel*-ovu funkciju

$$J_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{1}{(\nu!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}.$$

Stavimo li ovde $z=2\sqrt{xt}$, dobijamo

$$J_0(2\sqrt{xt}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{x^\nu}{(\nu!)^2}t^\nu.$$

Definiciona relacija polinoma $S_n(x)$ postaje

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{x^\nu}{(\nu!)^2}t^\nu\right) = \sum_{n=0}^{\infty}S_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Upoređivanjem koeficijenata uz t^n dobijamo

$$S_n(x) = n!\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{x^\nu}{(\nu!)^2(n-\nu)!} = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\frac{x^\nu}{\nu!}. \tag{1}$$

S druge strane, *Laguerre*-ovi polinomi su

(2) $$L_n(x)=e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})=n!\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \binom{n}{\nu}\frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Upoređujući (1) i (2), vidimo da je

$$S_n(x)=\frac{1}{n!}L_n(x),$$

pa je zaista

$$S_n(x)=\alpha(n)L_n(x),$$

gde je $\alpha(n)=1/n!$

Ovo je rešenje *D. Đokovića.*

IV. RAZNI PROBLEMI

58. Izračunati integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} J_0(xt)\,\mathrm{d}x \qquad (t>0),$$

gde je $J_0(x)$ *Bessel*-ova funkcija prve vrste i nultog reda.

59. Proveriti *Carlitz*-ovu relaciju

$$(1-x^2)\left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x)\right)^2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{n+1}(x)\right\}$$
$$=n(n+1)\,[P_n^2(x)-P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)],$$

gde je $P_n(x)$ *Legendre*-ov polinom.

60. Dokazati da za *Hermite*-ove polinome

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2/2})$$

važi relacija

$$n!\sum_{k=0}^{n}H_k^2(x)/k!=H_{n+1}^2(x)-H_n(x)H_{n+2}(x).$$

61. Pokazati da je

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2x)=2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) \qquad (x>0),$$

gde je $\Gamma(x)$ gama-funkcija.

62. Ako je s ceo broj i $a\neq$ ceo broj, proveriti da li važi relacija

$$\Gamma(a-s)=(-1)^s\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a+s)},$$

gde je $\Gamma(x)$ gama-funkcija.

63. Odrediti funkciju $f(x^2+y^2)$ tako da $(\sin z) f(x^2+y^2)$ bude *Newton*-ov potencijal.

Rešenje. Izvodi funkcije $F(x, y, z) = f(x^2+y^2)\sin z$ su:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = [4x^2 f''(x^2+y^2) + 2f'(x^2+y^2)]\sin z,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = [4y^2 f''(x^2+y^2) + 2f'(x^2+y^2)]\sin z,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -f(x^2+y^2)\sin z.$$

Funkcija $F(x, y, z)$ biće potencijalna funkcija ako je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

Ako stavimo $x^2+y^2=u$, biće

$$4u f''(u) + 4f'(u) - f(u) = 0.$$

Stavimo li $u=r^2$ i $f(r^2)=R(r)$, dobijamo

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - R = 0.$$

Ovo je diferencijalna jednačina za modifikovane *Bessel*-ove funkcije. Ako zahtevamo, na primer, da rešenja za $r=0$ budu konačna, biće $R(r) = A\, I_0(r)$, gde je A proizvoljna konstanta, a $I_0(x)$ modifikovana *Bessel*-ova funkcija. Tako smo dobili

$$F(x, y, z) = A\, I_0(\sqrt{x^2+y^2})\sin z.$$

Primedba. Odrediti $f(x^2+y^2)$ pod uslovom da $z f(x^2+y^2)$ bude *Newton*-ov potencijal.

64. Ako je P_n polinom po x, definisan relacijom

$$\{1-x^3+(x-z)^3\}^{-1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n,$$

proveriti relacije:

$$(1-x^3)P_n' = (1+n)(x^2 P_n - P_{n+1}),$$

$$(1-x^3)P'_{n-1} - (1-x^3)xP'_n - (n-1)xP_{n-2} + (2n-1)x^2 P_{n-1} + n(1-2x^3)P_n = 0,$$

$$2xP_n - P_{n-1} - P'_{n+1} + 3x^2 P_n - 3xP'_{n-1} + P'_{n-2} = 0,$$

$$(1-x^3)P_n' - (1-x^3)xP'_{n+1} - nx^2 P_n - 2(n+1)(x^3-1)P_{n+1} - (n-1)P_{n-2} + (2n-1)xP_{n-1} = 0.$$

65. Dokazati formulu

$$\int_0^1 \frac{P_{2n+1}(x)}{x(1+x)^{2n+2}}\,dx = (-1)^n \frac{1}{2}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

gde je $P_k(x)$ *Legendre*-ov polinom.

66. Dokazati relaciju

$$\frac{1}{(m+n-1)\,2^{m+n-2}} < B(m, n) < 2\,\frac{1-2^{1-m-n}}{m+n-1}$$

$$(m+n \neq 1; \quad m>0; \quad n>0),$$

gde $B(m, n)$ označava beta-funkciju.

Uputstvo. Poći od identiteta

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx + \int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

i nejednakosti

$$x < 1-x \qquad (0<x<1/2),$$

$$1-x < x \qquad (1/2<x<1).$$

67. Ako je

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \qquad (m>0;\ n>0),$$

tada je

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(ax+b)^{m+n}}\,dx = \frac{1}{a^m b^n}\,B(m, n).$$

Na osnovu ovog izraziti

$$2(\alpha-\beta)^{2m}(\alpha+\beta)^{2n}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta}{(\alpha^2+2\alpha\beta\cos 2\theta+\beta^2)^{m+n}}\,d\theta$$

pomoću B-funkcije.

68. Dokazati nejednakost

$$\Gamma(x) \leqslant x^x e^{1-x} \qquad (x \geqslant 1),$$

gde je $\Gamma(x)$ gama-funkcija.

69. Proveriti razvoj

$$\log x = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k x)}{\lambda_k^2\,\{J_1(\lambda_k)\}^2},$$

gde je λ_k rešenje jednačine $J_0(x)=0$ $\{J_0(x)$ i $J_1(x)$ *Bessel*-ove funkcije prve vrste$\}$.

70. Proveriti formule:

$$\int_0^x \frac{1}{t}\,J_1^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\{1-J_0^2(x)-J_1^2(x)\},$$

$$\int_0^x \frac{1}{t}\,I_1^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\{I_0^2(x)-I_1^2(x)-1\},$$

gde je $J_k(x)$ *Bessel*-ova funkcija prve vrste, $I_k(x)$ modifikovana *Bessel*-ova funkcija prve vrste.

71. Polazeći od relacija

$$(1)\qquad e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\,t^n,$$

$$(2)\qquad J_n(xi^{3/2})=\operatorname{ber}_n x+i\operatorname{bei}_n x,$$

dokazati

$$(3)\qquad \operatorname{ber}_{n+1} x=-\frac{n\sqrt{2}}{x}(\operatorname{ber}_n x-\operatorname{bei}_n x)-\operatorname{ber}_{n-1} x,$$

$$(4)\qquad \operatorname{bei}_{n+1} x=-\frac{n\sqrt{2}}{x}(\operatorname{ber}_n x+\operatorname{bei}_n x)-\operatorname{bei}_{n-1} x.$$

Rešenje. Iz (1) izlazi identitet

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x).$$

Stavljajući ovde $x\,i^{3/2}$ umesto x, dobija se

$$J_{n-1}(x\,i^{3/2})+J_{n+1}(x\,i^{3/2})=\frac{2n}{x\,i^{3/2}}J_n(x\,i^{3/2}),$$

ili, na osnovu (2),

$$(5)\qquad \operatorname{ber}_{n-1} x+i\operatorname{bei}_{n-1} x+\operatorname{ber}_{n+1} x+i\operatorname{bei}_{n+1} x=\frac{2n}{x\,i^{3/2}}(\operatorname{ber}_n x+i\operatorname{bei}_n x),$$

tj.

$$(6)\qquad (\operatorname{ber}_{n-1} x+\operatorname{ber}_{n+1} x)+i(\operatorname{bei}_{n-1} x+\operatorname{bei}_{n+1} x)$$

$$=-\frac{n\sqrt{2}}{x}(\operatorname{ber}_n x-\operatorname{bei}_n x)-i\frac{n\sqrt{2}}{x}(\operatorname{ber}_n x+\operatorname{bei}_n x).$$

Razdvajajući u (6) realne i imaginarne delove, dolazi se do relacija:

$$(7)\qquad \operatorname{ber}_{n+1} x+\operatorname{ber}_{n-1} x=-\frac{n\sqrt{2}}{x}(\operatorname{ber}_n x-\operatorname{bei}_n x),$$

$$(8)\qquad \operatorname{bei}_{n+1} x+\operatorname{bei}_{n-1} x=-\frac{n\sqrt{2}}{x}(\operatorname{ber}_n x+\operatorname{bei}_n x).$$

Relacije (7) i (8) ekvivalentne su relacijama (3) i (4).

72. Dati su eliptični integrali:

$$I(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{dx}{[(x^2+a^2)(x^2+b^2)]^{1/2}},\quad J(a,b)=\int_0^{\sqrt{ab}}\frac{dx}{[(x^2+a^2)(x^2+b^2)]^{1/2}}\qquad (0<a<b).$$

1° U integralu $J(a,b)$ izvršiti smenu $x=ab/u$ i zatim odrediti vezu između $I(a,b)$ i $J(a,b)$.

2° U integralu $J(a,b)$ izvršiti smenu $v=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{x}-x\right)$ i na osnovu dobijenog rezultata ovde i u tački 1° pokazati da je

$$I(a,b)=I\left(\sqrt{ab},\ \frac{a+b}{2}\right).$$

3° Izračunati $I(a,b)$ i dokazati relaciju

$$\frac{\pi}{2b} < I(a,b) < \frac{\pi}{2a}.$$

Rezultat. 1° $I(a,b)=2J(a,b)$.

73. Izračunati integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{x-e^x}\,dx \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{x-e^x}\,dx.$$

Rešenje. Smena $e^x=t$ pretvara date integrale redom u

(1) $$A=\int_0^{+\infty} e^{-t}\log t\,dt \quad \text{i} \quad B=\int_0^{+\infty} e^{-t}\log^2 t\,dt.$$

Iz integralnog oblika Γ-funkcije

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \qquad (x>0),$$

diferenciranjem pod znakom integrala, koje nije teško opravdati, dobija se

(2) $$\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\log t\,dt, \qquad \Gamma''(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\log^2 t\,dt.$$

Iz (1) i (2) izlazi

(3) $$A=\Gamma'(1), \qquad B=\Gamma''(1).$$

Polazeći od formule

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=x e^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} \qquad (x>0),$$

gde je $C=0{,}577\,215\,7\ldots$ *Euler*-ova konstanta, nalazi se

(4) $$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{1}{x}+C+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n}\right),$$

(5) $$-\frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)}+\frac{\Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)}=-\frac{1}{x^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.$$

Iz jednakosti (4) za $x=1$ dobija se

(6) $$\Gamma'(1)=-C.$$

Stavljajući u (5) $x=1$ i koristeći rezultat

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

dobija se

(7) $$\Gamma''(1)=\frac{\pi^2}{6}+C^2.$$

Iz (6) i (7), s obzirom na (3), izlazi

$$A=-C, \qquad B=\frac{\pi^2}{6}+C^2.$$

Ovo je rešenje *D. Adamovića*.

Generalizacija. Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{x-ae^{kx}}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{x-ae^{kx}}\,dx \qquad (a>0,\ k>0)$$

izraziti pomoću Γ-funkcije. Za $k=2$ i $k=1/n$ (n prirodan broj) izračunati ove integrale.

74. Neka je n prirodan broj i m ceo broj $\leqslant \frac{1}{2}(n-1)$. Dokazati formulu *D. Blanuše:*

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k\, 2^{n-2k}\,(n-m-k-1)!}{(n-2k)!\; k!} = \frac{(-1)^m\, 2^{2m+1}\,(n-2m-1)!\; \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\; n!},$$

gde $\Gamma(x)$ označava gama-funkciju.

75. Dokazati formulu

$$\int_0^\infty J_1(ax)\, J_0(bx)\, dx = \begin{cases} 1/a & (0<b<a), \\ 1/(2a) & (0<b=a), \\ 0 & (0<a<b), \end{cases}$$

gde su $J_0(x)$ i $J_1(x)$ *Bessel*-ove funkcije prve vrste.

76. Neka je funkcija $\Lambda_n(z)$ definisana sa

$$\Lambda_n(z) = \Gamma(n+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} J_n(z),$$

gde je $J_n(z)$ *Bessel*-ova funkcija prve vrste reda n, tako da je

$$\Lambda_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{r!\;\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{iz}{2}\right)^{2r}.$$

Neka je dalje c izvesna konstanta, a t i z dve varijable. Pokazati da važe formule:

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2s} (2s+2r)!\; z^{2s}}{(2s)!\;(s+r)!\;(n+r+s)!} \Lambda_{n+r+s}(ct),$$

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2s+1} (2s+2r+2)!\; z^{2s+1}}{(2s+1)!\;(s+r+1)!\;(n+r+s+1)!} \Lambda_{n+r+s+1}(ct).$$

Primedba. Videti članak:

D. Blanuša: *Jedna vrst integralnih teorema Bessel-ovih funkcija* (Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, knjiga 271 (1948), str. 5—65. Posebno videti: str. 31—35).

77. Neka je dato N parova kompleksnih brojeva a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ tako da ni u kojem od parova jednačina

$$a_j = a_k, \quad b_j^2 = b_k^2 \quad (j \neq k;\; j, k = 1, 2, \ldots, N)$$

nisu zadovoljene obe jednačine i da najviše za jednu vrednost k_1 indeksa vredi $b_{k_1} = 0$; neka su dalje $R_{0,k}$, $R_{1,k}$, $R_{2,k}$, $R_{3,k}$ $(k = 1, 2 \ldots, N)$ i R_4 cele racionalne funkcije varijable t, koje nisu sve identično jednake nuli. Tada ne postoji identitet oblika

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N} R_{0,k}\, \Lambda_0(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}) + \sum_{k=1}^{N} R_{1,k}\, \Lambda_1(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}) \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{N} R_{2,k} \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2})\, dy \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{N} R_{3,k} \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2})\, dy + R_4 = 0, \end{aligned}$$

gde je funkcija $\Lambda_n(z)$ definisana u prethodnom zadatku.

Dokazati navedeni stav *D. Blanuše.*

U vezi sa gornjim rezultatom *D. Blanuša* je postavio sledeći problem:

1° Da li prethodni stav još važi ako se dopusti da $R_{0,k}$, $R_{1,k}$, $R_{2,k}$, $R_{3,k}$, R_4 budu algebarske funkcije od t?

2° Da li postoji algebarski identitet između funkcija

$$\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right), \quad \Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right),$$

$$\int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right) dy, \quad \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right) dy$$

$$(k=1, 2, \ldots, N)?$$

Primedba. Videti članak:

D. Blanuša: *Jedna vrst integralnih teorema Bessel-ovih funkcija* (Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, knjiga 277 (1950), str. 5—128, a posebno str. 46—66).

78. Neka su a, b, c, p ma kakve konstante i neka je $Z_p(x)$ cilindrična funkcija oblika

$$Z_p(x) = C_1 J_p(x) + C_2 N_p(x)$$

$\{C_1$ i C_2 integracione konstante; $J_p(x)$ i $N_p(x)$ *Bessel*-ove funkcije I i II vrste$\}$.

Proveriti da li sledeće diferencijalne jednačine imaju navedena opšta rešenja:

1° $y''+\left(b-\frac{4p^2-1}{4x^2}\right)y=0,$ $\quad y=\sqrt{x}\ Z_p(\sqrt{b}\,x);$

2° $y''+\left(bx+\frac{1}{4x^2}\right)y=0,$ $\quad y=\sqrt{x}\ Z_0\left(\frac{2}{3}\sqrt{b}\,x^{3/2}\right);$

3° $y''+\left(bx^2+\frac{1}{4x^2}\right)y=0,$ $\quad y=\sqrt{x}\ Z_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{b}\,x^2\right);$

4° $y''+\left(\frac{b}{x}+\frac{1}{4x^2}\right)y=0,$ $\quad y=\sqrt{x}\ Z_0(2\sqrt{bx});$

5° $y''+a\,e^{2x}y=0,$ $\quad y=Z_0(\sqrt{a}\,e^x);$

6° $y''+a^2e^{2ax}y=0,$ $\quad y=Z_0(e^{ax});$

7° $y''+(a\,e^{2x}-p^2)y=0,$ $\quad y=Z_p(\sqrt{a}\,e^x);$

8° $y''+\frac{1}{x}y'+\left(bx^2-\frac{4p^2}{x^2}\right)y=0,$ $\quad y=Z_p\left(\frac{1}{2}\sqrt{b}\,x^2\right);$

9° $y''-\frac{1}{x}y'+\left(b+\frac{1}{x^2}\right)y=0,$ $\quad y=x\,Z_0(\sqrt{b}\,x);$

10° $y''+\frac{a}{x}y'+\left\{e^{2x}+\frac{a(a-2)}{4x^2}-p^2\right\}y=0,$ $\quad y=x^{-a/2}Z_p(e^x);$

11° $y''-\frac{2}{\sin 2x}y'+\sin^2 x\left(1-\frac{p^2}{\cos^2 x}\right)y=0,$ $\quad y=Z_p(\cos x);$

12° $y''+\frac{ax^2-c}{x(ax^2+c)}y'+\frac{a^2x^2}{ax^2+c}\left(1-\frac{p^2}{ax^2+c}\right)y=0,$ $\quad y=Z_p(\sqrt{ax^2+c}).$

79. Izračunati integrale:

$$I_{nm}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x)\, H_m(x)\, \mathrm{d}x, \quad J_{nm}=\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} H_n(x)\, H_m(x)\, \mathrm{d}x,$$

gde je $H_k(x)$ *Hermite*-ov polinom stepena k.

Rešenje. Prema relaciji koja definiše *Hermite*-ove polinome

$$e^{-t^2+2tx}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \tag{1}$$

biće

$$e^{x^2-(t_1-x)^2}\, e^{x^2-(t_2-x)^2}=\Big(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{H_r(x)}{r!} t_1^r\Big)\Big(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{H_s(x)}{s!} t_2^s\Big). \tag{2}$$

Pomnožimo obadve strane ove relacije sa e^{-x^2} i integralimo ih po x u intervalu $(-\infty, +\infty)$, pa dobijamo

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_r(x)\, H_s(x)\, \mathrm{d}x\Big\} \frac{t_1^r\, t_2^s}{r!\, s!}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2-(t_1-x)^2-(t_2-x)^2}\, \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Integral na desnoj strani relacije (3), s obzirom na obrazac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+2bx}\, \mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{b^2/a} \qquad (a>0),$$

ima vrednost $\sqrt{\pi}\, e^{2t_1t_2}$ koja se može napisati u obliku *Taylor*-ovog reda

$$\sqrt{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2t_1t_2)^r}{r!}=\sqrt{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^r}{r!} t_1^r\, t_2^s\, \delta_{rs},$$

gde je δ_{rs} *Kronecker*-ov simbol.

Izjednačavanjem koeficijenata pred istim stepenima od t_1 i t_2 u relaciji

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} I_{rs} \frac{t_1^r\, t_2^s}{r!\, s!}=\sqrt{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^r}{r!} t_1^r\, t_2^s\, \delta_{rs},$$

dobija se tražena vrednost integrala

$$I_{nm}=2^n\, m!\, \sqrt{\pi}\, \delta_{nm}.$$

Integral

$$J_{nm}=\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} H_n(x)\, H_m(x)\, \mathrm{d}x$$

može se izračunati sličnim postupkom.

Relacija (3) za ovaj slučaj ima oblik

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} H_r(x)\, H_s(x)\, \mathrm{d}x\Big\} \frac{t_1^r\, t_2^s}{r!\, s!}=\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{x^2-(t_1-x)^2-(t_2-x)^2}\, \mathrm{d}x=\sqrt{\pi}(t_1+t_2)\, e^{2t_1t_2}.$$

Kad se desna strana razvije, dobija se

$$\sqrt{\pi}\Big(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{2^r\, t_1^{r+1}\, t_2^r}{r!}+\sum_{r=0}^{\infty} \frac{2^r\, t_1^r\, t_2^{r+1}}{r!}\Big)$$

$$=\sqrt{\pi}\Big(\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^{r-1}\, t_1^r\, t_2^s}{(r-1)!} \delta_{s,r-1}+\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2^r\, t_1^r\, t_2^s}{r!} \delta_{s,r+1}\Big).$$

Izjednačavanjem koeficijenata ispred $t_1^n t_2^m$ nalazi se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\,dx = \sqrt{\pi}\{2^{n-1} n!\,\delta_{m,\,n-1} + 2^n (n+1)!\,\delta_{m,\,n+1}\}.$$

Ovaj postupak može se takođe primeniti pri izračunavanju integrala oblika

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\,dx \qquad (r \text{ prirodan broj}).$$

Ovi integrali javljaju se pri proučavanju momenta inercije prostog harmoniskog oscilatora sa gledišta kvantne mehanike. Videti o ovome: *H. Margenau — G. M. Murphy: The Mathematics of Physics and Chemistry,* New York, 1949, p. 121—122.

Ovo rešenje redigovala je *Kovina Milošević.*

80. Za *Bernoulli*-eve polinome $B_n(x)$, koji su definisani relacijom

$$\frac{t e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \qquad \{B_0(x) = 1\},$$

važe jednakosti:

(1) $$B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1},$$

(2) $$B_n(x+1) = \{1 + B(x)\}^n,$$

(3) $$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$

Dokazati.

Primedba I. U jednakosti (2), posle primene *Newton*-ove formule, $B^k(x)$ zameniti sa $B_k(x)$.

Primedba II. *Bernoulli*-evi brojevi B_n definišu se pomoću *Bernoulli*-evih polinoma:

$$B_n = B_n(0),$$

te važi simbolična jednakost

$$B_n(x) = (B + x)^n,$$

gde, posle razvijanja, umesto B^k treba staviti B_k.

81. *Euler*-ovi polinomi $E_n(x)$ definisani su relacijom

$$\frac{2 e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

a *Euler*-ovi brojevi E_n sa

$$E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right).$$

Dokazati jednakosti:

(1) $$E_n(x+1) + E_n(x) = 2 x^n,$$

(2) $$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x),$$

(3) $$E_n(x+1) = \{1 + E(x)\}^n,$$

(4) $$n E_{n-1}(x) = 2 B_n(x) - 2^{n+1} B_n\left(\frac{1}{2} x\right),$$

gde $B_n(x)$ označava *Bernoulli*-ev polinom.

U relaciji (3), posle primene *Newton*-ove formule, treba $E^k(x)$ zameniti sa $E_k(x)$.

Primedba. O *Bernoulli*-evim i *Euler*-ovim polinomima videti knjige:

N. E. Nörlund: *Differenzenrechnung,* Berlin, 1924;

J. Karamata: *Teorija i praksa Stieltjes-ova integrala,* Beograd, 1949.

82. Ako je

$$(t^3-3\,tz+1)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} R_n\,t^n \qquad (R_n \text{ funkcija od } z),$$

pokazati da važe *Pincherle*-ove relacije:

$$2\,(n+1)\,R_{n+1}-3\,(2\,n+1)\,z\,R_n+(2\,n-1)\,R_{n-2}=0,$$

$$n\,R_n+R_{n-2}'-z\,R_n'=0,$$

$$4\,(4z^3-1)\,R_n'''+96\,z^2\,R_n''-(12\,n^2+24\,n-91)\,z\,R_n'-n\,(2\,n+3)\,(2\,n+9)\,R_n=0.$$

83. Dokazati formulu

$$\int_{-1}^{+1} x^{n+2k}\,P_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2^n}\,\frac{(n+2\,k)\,!}{(2\,k)\,!}\,\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)} \qquad (k=0,\,1,\,2,\,\ldots\,),$$

gde je $\Gamma(x)$ gama-funkcija i $P_n(x)$ *Legendre*-ov polinom.

84. Dokazati formulu

$$(1-x^2)\,P_n''(x)=-n\,(n-1)\,P_n(x)+2\,(2\,n-3)\,P_{n-2}(x)+2\,(2n-7)\,P_{n-4}(x)+\cdots,$$

gde je $P_n(x)$ *Legendre*-ov polinom.

85. Za *Hermite*-ovu funkciju

$$H_n(x)=(-1)^n\,e^{x^2}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,e^{-x^2}$$

važe sledeće relacije:

$$y''-2\,xy'+2\,ny=0 \qquad \{y=H_n(x)\},$$

$$z''+(2\,n+1-x^2)\,z=0 \qquad \{z=e^{-x^2/2}\,H_n(x)\},$$

$$H_n'(x)=2n\,H_{n-1}(x),$$

$$H_n(x)=2x\,H_{n-1}(x)-H_{n-1}'(x),$$

$$\frac{H_n(x)}{n\,!}=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k}{k\,!}\,\frac{(2\,x)^{n-2k}}{(n-2\,k)\,!}.$$

Pokazati takođe da je

$$H_{2m}(0)=(-1)^m\,\frac{(2\,m)\,!}{m\,!}, \qquad H_{2m+1}'(0)=(-1)^m\,\frac{(2\,m+2)\,!}{(m+1)\,!}.$$

Primenom *Cauchy*-evog stava o ostacima dokazati da vredi formula

$$H_n(x)=\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_C \frac{e^{2xz-z^2}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z,$$

gde je C prosta zatvorena kontura koja opkoljava tačku $z=0$ u kompleksnoj ravni.

86. *Gegenbauer*-ovi polinomi C_k^ν definišu se relacijom

$$(1-2\,xt+t^2)^{-\nu}\equiv\sum_{k=0}^{\infty} C_k^\nu(x)\,t^k \qquad (\nu \text{ realno}).$$

Polazeći od ove definicije, izvesti jednakosti:

$$C_k^\nu(x)=\sum_{s=0}^{[k/2]}(-1)^s\,\frac{\Gamma(\nu+k-s)}{s!\,(k-2s)!\,\Gamma(\nu)}\,(2x)^{k-2s},$$

$$(1-x^2)\,\frac{d^2 C_n^\nu(x)}{dx^2}-(2\nu+1)\,x\,\frac{d\,C_n^\nu(x)}{dx}+(n+2\nu)\,C_n^\nu(x)=0,$$

$$\int_{-1}^{+1} C_m^\nu(x)\,C_n^\nu(x)\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx=0 \qquad \left(m\neq n;\ \nu>-\frac{1}{2}\right).$$

87. Date su funkcije

$$F(\theta)=\frac{\sin(a\cos\theta)}{\sin\theta},\qquad G(\theta)=\frac{\cos(a\cos\theta)}{\sin\theta}\qquad (a \text{ parametar}).$$

Ako se stavi $t=\cos\theta$, pokazati da su $F(\theta)$ i $G(\theta)$ rešenja diferencijalne jednačine

$$(1-t^2)\,y''(t)-2\,t\,y'(t)+\left\{a^2(1-t^2)-\frac{1}{1-t^2}\right\}y(t)=0.$$

Primedba. Funkcije $F(\theta)$ i $G(\theta)$ pojavljuju se u teoriji linearnih oscilatora (videti: *J. A. Stratton: Electromagnetic theory*, New York, 1941, str. 479).

88. Data je pridružena *Legendre*-ova funkcija prve vrste

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{dx^m}\,P_n(x)\qquad(-1<x<+1),$$

gde je m prirodan broj i $P_n(x)$ *Legendre*-ov polinom.

Pokazati da je funkcija $P_n^m(x)$ rešenje diferencijalne jednačine

$$(1-x^2)\,y''-2\,x\,y'+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0.$$

Dokazati formulu:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(x)\,P_r^m(x)\,dx=\begin{cases}0 & (r\neq n),\\[4pt] \dfrac{2}{2n+1}\,\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & (r=n),\end{cases}$$

ako su n, r, m prirodni brojevi, takvi da je $n>m$ i $r>m$.

89. Izraziti proizvod *Laguerre*-ovih polinoma $L_r(x)$ i $L_s(x)$ kao linearnu kombinaciju *Laguerre*-ovih polinoma.

APSTRAKTNA ALGEBRA

I. GRUPOIDI

Ako je u skupu G definirana binarna operacija „$\cdot$", tako da je svakom uređenom paru (ne nužno različitih) elemenata a, b od G jednoznačno pridružen neki element $a \cdot b = c$ tog skupa, kaže se da je $(G, \cdot)$ *grupoid.*

Umjesto $a \cdot b$ označuje se paru a, b pridruženi element često kraće s ab i zove *produkt* elemenata a, b.

Grupoid $(G, \cdot)$ zove se *konačan*, ako je skup G konačan. Konačni grupoid $(G, \cdot)$, gdje je $G = \{a, b, \ldots, k\}$, može se predočiti *Cayleyevom tablicom*

$\cdot$	a	b	$\cdots$	k
a	aa	ab	$\cdots$	ak
b	ba	bb	$\cdots$	bk
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdot$
k	ka	kb	$\cdots$	kk

Element a grupoida $(G, \cdot)$ zove se *idempotentan*, ako je $a^2 = aa = a$.

Ako za neki par a, b elemenata grupoida $(G, \cdot)$ vrijedi $ab = ba$, kaže se, da su elementi a, b *permutabilni.*

Ako je svaki par elemenata od G permutabilan, kaže se, da je grupoid $(G, \cdot)$ *komutativan.* Konačan grupoid $(G, \cdot)$ komutativan je, dakle, onda i samo onda, ako mu je Cayleyeva tablica simetrična prema glavnoj (padajućoj) dijagonali.

Vrijedi li za svaku trojku (ne nužno različitih) elemenata $a, b, c \in G$ jednakost $(ab)\,c = a\,(bc)$, kaže se, da je grupoid $(G, \cdot)$ *asocijativan.* Asocijativni grupoid zove se *monoid* ili *semi-grupa.* U monoidu je produkt od konačnog broja elemenata jednoznačno određen poredajem tih elemenata, bez obzira na razdiobu zagrada, tj. označeni redoslijed izvršavanja operacija.

U monoidu $(G, \cdot)$ definira se za prirodne brojeve n rekurzivno n-ta *potencija* od $a \in G$, pomoću $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n a$.

Postoji li u grupoidu $(G, \cdot)$ element e', takav da je za svaki element $a \in G$ ispunjeno $e' a = a$, zove se e' *lijevi jedinični element* od $(G, \cdot)$. Analogno, postoji li element e'', takav da je za svaki element $a \in G$ ispunjeno $ae'' = a$, zove se e'' *desni jedinični element* od $(G, \cdot)$.

Ako je neki element e ujedno i lijevi i desni jedinični element od $(G, \cdot)$, zove se on kraće *jedinični element* od $(G, \cdot)$. Prema zadatku 4. grupoid može sadržavati najviše jedan jedinični element.

Neka je a neki element grupoida $(G, \cdot)$ s jediničnim elementom e. Postoji li u G element a', takav da je $a' a = e$, zove se a' *lijevo-inverzni* element od a. Analogno, postoji li element a'', takav da je $aa'' = e$, zove se a'' *desno-inverzni* element od a.

Ako za neki element a grupoida $(G, \cdot)$ s jediničnim elementom postoji i lijevo-inverzni element a' i desno-inverzni element a'', te ako je $a' = a''$, zove se taj lijevo- i desno-inverzni element kraće *inverzni element* od a i označuje se često s a^{-1}. Element a, za koji postoji inverzni element a^{-1}, zove se *invertibilan*.

Ako u grupoidu $(G, \cdot)$ za svaki par elemenata a, b postoje rješenja x i y jednadžbi $ax = b$, $ya = b$, te ako su ta rješenja uvijek jednoznačno određena, zove se $(G, \cdot)$ *kvazigrupa*. Konačni grupoid je dakle onda i samo onda kvazigrupa, ako mu unutar njegove Cayleyeve tablice svaki element dolazi (točno jedamput) u svakom retku i u svakom stupcu tablice.

Ako su $(G, \cdot)$ i $(H, \times)$ grupoidi i ako postoji uzajamno jednoznačno preslikavanje φ od G *na* H, takvo da za svaki par a, b elemenata od G vrijedi $\varphi(a \cdot b) = \varphi a \times \varphi b$, zovu se grupoidi $(G, \cdot)$ i $(H, \times)$ *izomorfni*.

II. GRUPE

Monoid s jediničnim elementom, u kojem svaki element ima inverzni, zove se *grupa*. Drugim riječima, ako je u skupu G definirana binarna operacija „$\cdot$“, bit će $(G, \cdot)$ grupa, ukoliko vrijedi:

1. Za svaku trojku elemenata $a, b, c \in G$ je $(ab) c = a (bc)$; 2. postoji element e, tako da je za svaki element $a \in G$ ispunjeno $ea = ae = a$; 3. za svaki element $a \in G$ postoji element $a^{-1} \in G$, tako da je $a^{-1} a = aa^{-1} = e$.

Potencija a^n za prirodni broj n definira se kao kod monoida. Nadalje, za $n = 0$ stavlja se $a^0 = e$, a za negativni cio n definira se $a^n = (a^{-1})^{-n}$.

III. PEANOVI AKSIOMI ZA PRIRODNE BROJEVE

Neka je N neki skup, u kojem je definirano jednoznačno preslikavanje, koje svakom elementu $n \in N$ pridružuje neki element $n^+ \in N$. Ako je $n^+ = m$, zove se m *sljedbenik* od n, a n je *prethodnik* od m.

Skup N prirodnih brojeva karakteriziran je prema Peanu aksiomima (1889):

P 1. $1 \in N$, tj. 1 je prirodan broj.

P 2. $n^+ \neq 1$, tj. 1 nema prethodnika u N.

P 3. $n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$, tj. ako su sljedbenici dvaju prirodnih brojeva jednaki, onda su i sami ti brojevi jednaki. (Drugim riječima, preslikavanje od n na n^+ je ne samo jednoznačno, već i uzajamno jednoznačno).

P 4. $[M \subseteq N \; \& \; 1 \in M \; \& \; (n \in M \Rightarrow n^+ \in M)] \Rightarrow M = N$, tj. ako neki podskup M od N sadrži broj 1 i ako ima svojstvo, da sa svakim svojim elementom n sadrži i element n^+, onda se M poklapa sa N (*aksiom potpune indukcije*).

U skupu N definiraju se operacije $+$ i $\cdot$ sa

$$n + 1 = n^+, \quad n + m^+ = (n + m)^+; \tag{1}$$

$$n \cdot 1 = n, \quad n \cdot m^+ = n \cdot m + n. \tag{2}$$

(Može se dokazati, da su sa (1) i (2) operacije $+$ i $\cdot$ jednoznačno definirane.)

Relacije $>$ i $<$ definiraju se u N ovako: Za dva prirodna broja $a, b \in N$ kaže se, da je a veći od b, $a > b$ (i da je b manji od a, $b < a$), ako postoji $c \in N$, tako da je $a = b + c$.

IV. ZADACI

1. Neka je G skup svih realnih brojeva, a operacija „$\cdot$" definirana sa $a \cdot b = \frac{1}{2}(a + b)$. Pokazati, da je $(G, \cdot)$ komutativna neasocijativna kvazigrupa bez jediničnog elementa.

2. Neka je G skup svih jednoznačnih preslikavanja f nekog skupa S u sama sebe, a operacija „$\cdot$" definirana sa $(f_1 \cdot f_2)(s) = f_2(f_1(s))$ za sve $s \in S$. Pokazati, da je $(G, \cdot)$ monoid s jediničnim elementom.

3. Ispitati sve moguće grupoide $(G, \cdot)$ koji sadrže 3 elementa a, b, c. Koliko ima neizomorfnih oblika? Koliko među ovima ima a) komutativnih grupoida, b) monoida, c) kvazigrupa?

4. Dokazati: Ako grupoid $(G, \cdot)$ ima jedinične elemente e_1 i e_2, onda je nužno $e_1 = e_2$. Drugim riječima, grupoid ne može imati više od jednog jediničnog elementa.

Rješenje. Po pretpostavci za svaki element a vrijedi $e_1 a = a$; posebno je dakle $e_1 e_2 = e_2$. Analogno, za svaki $a \in G$ vrijedi po pretpostavci i $a e_2 = a$, dakle posebno i $e_1 e_2 = e_1$. Iz $e_1 e_2 = e_2$, $e_1 e_2 = e_1$ izlazi $e_1 = e_2$.

5. Dokazati: a) Ako u monoidu $(G, \cdot)$ element a ima lijevo-inverzni element a' i desno-inverzni element a'', onda je $a' = a''$, pa je element a invertibilan s inverznim elementom a^{-1}. b) Ako za element a monoida $(G, \cdot)$ postoje inverzni elementi $(a^{-1})_1$ i $(a^{-1})_2$, onda je $(a^{-1})_1 = (a^{-1})_2$, tj. u monoidu ne može postojati više od jednog inverznog elementa nekog danog elementa. c) Ako je a^{-1} inverzni element od a, onda je a inverzni element od a^{-1}.

Rješenje. a) Zbog asocijativnosti $(G, \cdot)$ bit će $(a'a)a'' = a'(aa'')$, dakle $ea'' = a'e$ i odatle $a'' = a'$.

b) Ako su $(a^{-1})_1$ i $(a^{-1})_2$ inverzni elementi od a, bit će tim više $(a^{-1})_1$ lijevo-inverzni element od a, a $(a^{-1})_2$ desno-inverzni element od a, pa je prema a) $(a^{-1})_1 = (a^{-1})_2$.

c) Po pretpostavci je $a^{-1}a = aa^{-1} = e$. Elementu a^{-1} inverzni element $(a^{-1})^{-1}$ jednak je dakle a, jer za $(a^{-1})^{-1} = a$ vrijedi $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}a^{-1} = e$.

6. Dokazati: Ako je u monoidu $(G, \cdot)$ element a permutabilan s elementima b i c, onda je a permutabilan i s njihovim produktom bc.

Rješenje. Zbog asocijativnosti $(G, \cdot)$ i pretpostavaka zadatka izlazi

$$a(bc) = (ab)c = (ba)c = b(ac) = b(ca) = (bc)a.$$

7. Dokazati: Ako u monoidu $(G, \cdot)$ s jediničnim elementom e element a ima lijevo-inverzni element a' [desno-inverzni element a''], onda se s a može kratiti slijeva [zdesna], tj. vrijedi

$$ab = ac \Rightarrow b = c \qquad [ba = ca \Rightarrow b = c].$$

Rješenje. Po pretpostavci je zbog asocijativnosti

$$a'(ab) = a'(ac) \Rightarrow (a'a)b = (a'a)c \Rightarrow eb = ec \Rightarrow b = c;$$

$$(ba)a'' = (ca)a'' \Rightarrow b(aa'') = c(aa'') \Rightarrow be = ce \Rightarrow b = c.$$

8. Neka je $(G, \cdot)$ konačna komutativna kvazigrupa. Dokazati: Ako je broj elemenata od G neparan, rješiva je za svaki $a \in G$ jednadžba $x^2 = a$. Drugim riječima, pomnožimo li svaki od elemenata od G sam sa sobom, dobit ćemo opet sve elemente od G. Obratno, ako je $x^2 = a$ u $(G, \cdot)$ rješivo za svaki $a \in G$, tada G ima neparan broj elemenata.

Rješenje. Zbog simetričnosti Cayleyeve tablice za $(G,\cdot)$ obzirom na glavnu dijagonalu dolazi svaki element $a \in G$ isto toliko puta iznad koliko i ispod glavne dijagonale. U drugu ruku on u svakom retku tablice dolazi točno jedamput, pa u čitavoj tablici dolazi neparan broj puta. Znači, budući da izvan dijagonale dolazi paran broj puta, mora na samoj dijagonali biti zastupan neparan broj puta (i to točno jedamput, jer isti zaključak vrijedi za svaki element od G, a na glavnoj dijagonali ima isti broj elemenata koliko ih ima G). No elementi na dijagonali su upravo oni oblika $x\,x = x^2$, pa je dakle $x^2 = a$ rješivo za svaki a.

Obrnuto, uz rješivost od $x^2 = a$ za svaki a (dakle i jednoznačnu rješivost te jednakosti sa svaki a, jer je G konačan) bit će svaki element od G u čitavoj *Cayleyevoj* tablici zastupan neparan broj puta, pa je tolik i njen broj redaka, dakle i elemenata od G.

9. Dokazati: Ako u grupoidu $(G, \cdot)$ s jediničnim elementom za svaku trojku elemenata a, b, c vrijedi $(ab)c = (ac)b$, onda je $(G, \cdot)$ komutativni monoid.

Rješenje. Stavimo li najprije $a = e$, dobit ćemo $(eb)c = (ec)b \Rightarrow bc = cb$ pa je grupoid $(G,\cdot)$ komutativan. Odatle je $(ab)c = (ba)c$. Po pretpostavci je dalje $(ba)c = (bc)a$ i opet zbog komutativnosti $(bc)a = a(bc)$. Povežemo li posljednje tri jednakosti, izlazi $(ab)c = a(bc)$, tj. $(G,\cdot)$ je monoid.

10. Dokazati: U monoidu za svaki par prirodnih brojeva m, n vrijedi $a^m a^n = a^{m+n}$.

Rješenje. Provedimo dokaz potpunom indukcijom po n. Za $n = 1$ (i kojigod m) tvrdnja je točna po definiciji potencije. Pretpostavimo, da ona važi i za $n = k$. Tada je zbog pretpostavke indukcije i asocijativnosti $a^m a^{k+1} = a^m (a^k a) = (a^m a^k) a = a^{m+k} a = a^{m+k+1}$, tj. tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, što je još trebalo dokazati.

11. Neka su $(G, \cdot)$ i $(H, \times)$ izomorfni grupoidi. Dokazati: a) Ako je $(G, \cdot)$ monoid, i $(H, \times)$ je monoid. b) Ako je $(G, \cdot)$ komutativan, i $(H, \times)$ je komutativan. c) Ako $(G, \cdot)$ ima lijevi [desni] jedinični element, i $(H, \times)$ ima lijevi [desni] jedinični element. d) Ako u $(G, \cdot)$ element a ima lijevo-[desno-] inverzni element, onda u $(H, \times)$ element φa ima lijevo-[desno-] inverzni element.

12. Ako su $(G, \cdot)$ i $(H, \times)$ izomorfni grupoidi, a isto tako $(H, \times)$ i $(K, \circ)$ izomorfni grupoidi, onda su i grupoidi $(G, \cdot)$ i $(K, \circ)$ izomorfni.

13. Provjeriti, da su navedeni grupoidi grupe:

a) G je skup svih realnih brojeva, a operacija „ $\cdot$ " obično zbrajanje. b) G je skup pozitivnih realnih brojeva, a operacija „ $\cdot$ " obično množenje. c) G je skup svih gibanja prostora, koja zadanu kocku prevode u samu sebe, a operacija „ $\cdot$ " između dvaju takvih gibanja znači njihovo uzastopno izvršavanje. d) G je skup svih striktno uzlaznih neprekinutih realnih funkcija f, definiranih za $0 \leqq x \leqq 1$, za koje je $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, a operacija „ $\cdot$ " definirana je s $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(f_2(x))$. e) Grupoidi $(G, \cdot)$ i $(H, \times)$ dani su tablicama koje su navedene na idućoj strani.

14. Dokazati: a) Grupe iz a) i b) prethodnog zadatka su izomorfne. b) Grupe $(G, \cdot)$ i $(H, \times)$ iz prethodnog zadatka e) nisu izomorfne.

Rješenje. b) Ako bi $(G,\cdot)$ i $(H,\times)$ bile izomorfne grupe, moralo bi postojati preslikavanje φ od G na H, takvo da je $\varphi(x \cdot y) = \varphi x \times \varphi y$. Kako u $(G,\cdot)$ postoji element a sa svojstvom da je $x^2 = a$ za svaki element $x \in G$, moralo bi biti $\varphi(x \cdot x) = (\varphi x) \times (\varphi x) = \varphi a$ za svaki $\varphi x \in H$. No u H očito ne postoji element φa s tim svojstvom.

$(G, \cdot)$

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$(H, \times)$

$\times$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	δ	α	γ
γ	γ	α	δ	β
δ	δ	γ	β	α

15. Ispitati pomoću Cayleyevih tablica sve moguće grupe od najviše 4 elementa. Postoje li za dani broj elemenata takve grupe koje nisu izomorfne?

16. Ispitati sve grupe od 5 i od 6 danih elemenata. Koliko ima neizomorfnih oblika? Koji su komutativni, a koji nekomutativni?

17. Dokazati: Ako je $(G, \cdot)$ monoid, u kojem postoji lijevi jedinični element e i za svaki element a od G lijevo-inverzni a' obzirom na e, $(G, \cdot)$ je grupa.

Rješenje. Treba dokazati: a) lijevi jedinični element e ujedno je i desni jedinični element, pa je to jedinični element od $(G, \cdot)$; b) lijevo-inverzni element a' od a ujedno je i desno-inverzni element od a. Dokažimo najprije b):

Ako je a' lijevo-inverzni element od a, tj. $a'a = e$, bit će $a'(aa') = (a'a)a' = ea' = a'$, pa množenje slijeva lijevo-inverznim elementom $(a')'$ od a' daje $(a')'[a'(aa')] = [(a')'a'](aa') = e(aa') = aa' = (a')'a' = e$, dakle zaista $aa' = e$.

Da bismo dokazali i a) uočimo, da iz $aa' = e$ izlazi, da je $ae = a(a'a) = (aa')a = ea = a$ pa je zaista i $ae = a$.

18. Dokazati: Ako je $(G, \cdot)$ monoid, u kojem su za kakvegod elemente $a, b \in G$ rješive jednadžbe $bx = a$, $yb = a$, $(G, \cdot)$ je grupa.

Rješenje. Neka je b neki odabrani element od G i $y = e$ jedno rješenje od $yb = b$, tj. $eb = b$. Za svaki $a \in G$ neka je $x = x_a$ rješenje od $bx = a$, tj. $bx_a = a$. Tada je $ea = e(bx_a) = (eb)x_a = bx_a = a$. Nadalje, za svaki $a \in G$ postoji rješenje $x = a'$ jednadžbe $xa = e$, pa je $a'a = e$. $(G, \cdot)$ dakle zadovoljava uvjete iz prethodnog zadatka, pa je to grupa.

19. Ako je $(G, \cdot)$ konačni monoid, u kojem za kakve god elemente $a, b \in G$ jednadžbe $bx = a$, $yb = a$ imaju najviše jedno rješenje, $(G, \cdot)$ je grupa.

Rješenje. Ako $bx = a$ ima *najviše* jedno rješenje, a G je *konačan* skup od g elemenata, mora $bx = a$ imati i *bar* jedno rješenje, što uvidamo ovako: Neka je b neki *odabrani* element od G, a x neka prolazi *svim* elementima od G. Budući da po pretpostavci $bx = a$ ima najviše jedno rješenje, bit će za $x_1 \neq x_2$ također i $bx_1 \neq bx_2$, pa bx poprima g različitih vrijednosti, kad x poprima toliko različitih vrijednosti. Prema tome, među elementima bx dolaze svi elementi $a \in G$, što je trebalo dokazati. Time je zadatak sveden na prethodni.

20. Dokazati, da u grupi $(G, \cdot)$ vrijedi: a) G ima samo jedan jedinični element (koji je ujedno jedini lijevi i jedini desni jedinični element). b) Svaki element a od G ima u G samo jedan inverzni element a^{-1} (koji je ujedno jedini lijevo-inverzni i jedini desno-inverzni element od a). c) $(a^{-1})^{-1} = a$, tj. inverzni element elementu a inverznog elementa poklapa se sa a. d) Dopušteno je kraćenje slijeva i zdesna, tj. $ab=ac \Rightarrow b=c$, $ba=ca \Rightarrow b=c$. e) Jednadžbe $bx=a$, $yb=a$ rješive su, i to jednoznačno. (Drugim riječima, svaka grupa je kvazigrupa.) f) $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$. g) $(a^n)^{-1}=(a^{-1})^n$ za svaki cjelobrojni n.

Rješenje. a) do d) izlaze kao posebni slučajevi odgovarajućih zadataka o grupoidima.

e) Množenjem $bx=a$ slijeva s b^{-1} izlazi $x=b^{-1}a$, tj. ako rješenje jednadžbe $bx=a$ postoji, ono je jednoznačno određeno. Da takvo rješenje zaista postoji, izlazi odatle, što je $b(b^{-1}a)=(bb^{-1})a=ea=a$. Analogno se dokazuje i drugi dio tvrdnje.

f) Vrijedi, jer je $(b^{-1}a^{-1})(ab)=b^{-1}[a^{-1}(ab)]=b^{-1}[(a^{-1}a)b]=b^{-1}(eb)=b^{-1}b=e$.

g) Jednakost analogna f) vrijedi očito i za veći broj faktora, tj.

$$(a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)^{-1}=a_n^{-1}a_{n-1}^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1},$$

pa posebno za $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$ izlazi g) za $n>0$. Za $n=0$ g) je trivijalno, jer je $(a^0)^{-1}=e^{-1}=e=(a^{-1})^0$. Za $n<0$ je $-n=m>0$, pa je po definiciji i c)

$$(a^n)^{-1}=[(a^{-1})^m]^{-1}=[(a^m)^{-1}]^{-1}=a^m=[(a^{-1})^{-1}]^m=(a^{-1})^n.$$

21. Dokazati: Ako su a, b permutabilni elementi grupe $(G,\cdot)$, tj. $ab=ba$, onda su i a^m, b^n permutabilni elementi, za sve cjelobrojne m, n.

Rješenje. Ako su m, n prirodni brojevi, tvrdnja izlazi prema

$$a^mb^n=a^{m-1}(ab)b^{n-1}=a^{m-1}(ba)b^{n-1}=\cdots=a^{m-2}(ba)ab^{n-1}=\cdots=ba^mb^{n-1}=\cdots=b^na^m.$$

Nadalje, iz $ab=ba$ množenjem slijeva i zdesna s a^{-1} izlazi

$$a^{-1}(ab)a^{-1}=a^{-1}(ba)a^{-1}\Rightarrow(a^{-1}a)(ba^{-1})=(a^{-1}b)(aa^{-1})\Rightarrow ba^{-1}=a^{-1}b,$$

pa su i elementi a^{-1}, b permutabilni. Analogno su i a, b^{-1} permutabilni. Prema definiciji potencije za eksponent 0 i negativne eksponente izlazi odatle tvrdnja i u ostalim slučajevima.

22. Dokazati: U grupi $(G,\cdot)$ vrijedi za svaki element a i za kakve god cjelobrojne m, n jednakost $a^ma^n=a^{m+n}$.

23. Dokazati, da je e jedini idempotentni element grupe.

Rješenje. Množenjem $x^2=x$ sa x^{-1} izlazi $x=e$; u drugu ruku $e^2=e$ i tvrdnja je dokazana.

24. Za grupe $(G,\cdot)$ i $(G,\times)$ neka je

$$(a\cdot b)\times c=a\cdot(b\times c),\qquad (a\times b)\cdot c=a\times(b\cdot c)$$

za svaku trojku elemenata a, b, c od G. Neka se dokaže, da su grupe $(G,\cdot)$ i $(G,\times)$ izomorfne.

Rješenje. Neka je e jedinični element grupe $(G,\cdot)$, a e' jedinični element grupe $(G,\times)$. Razmotrimo preslikavanje φ od G u G, dano sa $\varphi a=a\cdot e'$. Prema zadatku 20 e) φ je uzajamno jednoznačno preslikavanje od G *na* G. Za to preslikavanje vrijedi

$$\varphi a\times\varphi b=(a\cdot e')\times(b\cdot e')=a\cdot[e'\times(b\cdot e')]=a\cdot[(e'\times b)\cdot e']=a\cdot(b\cdot e')=(a\cdot b)\cdot e'=\varphi(a\cdot b),$$

pa su grupe $(G,\cdot)$ i $(G,\times)$ zaista izomorfne.

25. Za elemente grupe $(G,\cdot)$ definiran je grupoid $(G,\times)$ sa $a\times b=f_1a\cdot f_2b$, gdje su f_1 i f_2 jednoznačne funkcije u G (preslikavanja od G u G). Dokazati: Ako $(G,\times)$ ima jedinični element e, onda je $(G,\times)$ grupa izomorfna s $(G,\cdot)$.

Rješenje. Po pretpostavci je $a\times e=a$, $e\times b=b$, pa je stoga $a=f_1a\cdot f_2e$, $b=f_1e\cdot f_2b$ i odatle $f_1a=a\cdot(f_2e)^{-1}$, $f_2b=(f_1e)^{-1}\cdot b$. Prema tome bit će $a\times b=a\cdot(f_2e)^{-1}\cdot(f_1e)^{-1}\cdot b=a\cdot k\cdot b$, gdje je sa k označen element $(f_2e)^{-1}\cdot(f_1e)^{-1}$. Za preslikavanje φ dano sa $\varphi a=a\cdot k^{-1}$ bit će $\varphi(a\cdot b)=a\cdot b\cdot k^{-1}=(a\cdot k^{-1})\cdot k\cdot(b\cdot k^{-1})=\varphi a\cdot k\cdot\varphi b=\varphi a\times\varphi b$, pa je $(G,\times)$ zaista grupa izomorfna s $(G,\cdot)$.

26. Dokazati, da je sustav P 1. do P 4. *Peanovih* aksioma *nezavisan.*

Rješenje. Treba pokazati, da nijedan od aksioma P 1. do P 4. nije posljedica preostalih. To se može provesti tako, da se navedu skupovi N i u njima definiraju preslikavanja od n na n^+ tako, da pritom budu ispunjeni svi aksiomi *osim* jednog.

a) Neka je N prazan skup: $N=\Phi$. Tada P 1. očito nije zadovoljen, dok su ostali aksiomi P 2. do P 4. automatski trivijalno zadovoljeni: P 2. je ispunjeno, jer nijedan element od N nema za sljedbenika broj 1; P 3. jer $n^+=m^+$ uopće ne može nastupiti budući da N ne sadrži nijedan element; P 4., jer zbog $M \subseteq N$ ne može biti $1 \in M$.

b) Neka je $N=\{1\}$, tj. N je jednočlan skup, kojem je 1 jedini element i neka je $1^+=1$. Tada vrijedi P 1, jer je $1 \in \{1\}$. P 2. ne vrijedi jer je po definiciji $1^+=1$. P 3. vrijedi, jer $m^+=n^+$ može nastupiti samo uz $n^+=m^+=1$, a tada je zaista i $m=n$ $(=1)$. P 4. vrijedi, jer hipoteza tog aksioma može biti ispunjena jedino uz $M=\{1\}$, u kom je slučaju $1 \in M$ i $n \in M \Rightarrow n^+ \in M$, a zaista je $M=N$.

c) Neka je $N=\{1, 2\}$, tj. N je dvočlani skup s elementima 1 i 2, za koje neka je $1^+=2$, $2^+=2$. Tada očito vrijedi P 1. i P 2. No P 3. ne vrijedi, jer je $1^+=2^+$, iako je $1 \neq 2$. P 4. opet vrijedi, budući da hipoteza $1 \in M$ & $(n \in M \Rightarrow n^+ \in M)$ traži da bude $M=\{1, 2\}$, u kom je slučaju $M=N$.

d) Neka je $N=\{1, 2, 3, \ldots ; a\}$, tj. N je skup svih prirodnih brojeva i još nekog elementa a, koji *nije* prirodni broj. Preslikavanje $+$ neka je za prirodni broj $n \in N$ definirano s $n^+=n+1$, a za element a sa $a^+=a$. Tada očito vrijedi P 1. do P 3., ali P 4. ne vrijedi, jer skup M, koji preostaje ako iz N uklonimo a, ima svojstva $1 \in M$ i $n \in M \Rightarrow n^+ \in M$, a ipak je (zbog $a \notin M$, $a \in N$) $M \neq N$.

27. Dokazati, da ni za jedan element n skupa N, koji zadovoljava *Peanove* aksiome, ne može biti $n^+=n$.

Rješenje. Dokaz ćemo provesti indirektno. Pretpostavimo dakle, da za neki $n \in N$ vrijedi $n^+=n$. Tada je sigurno $n \neq 1$, jer prema P 2. ne postoji element $m \in N$, za koji je $m^+=1$. Odatle izlazi, da bi skup M, koji preostaje ako se iz N ukloni n, bio neprazan i sadržavao broj 1. No tako konstruirani skup M imao bi i svojstvo, da $m \in M$ povlači $m^+ \in M$, što uviđamo ovako: za $m \neq n$ je zbog P 3. također i $m^+ \neq n^+=n$, pa se ne može desiti, da zahtjev $m \in M \Rightarrow m^+ \in M$ ne bi bio ostvariv jer n nije element od M. Vidimo, da M zadovoljava uvjete aksioma P 4., pa bi moralo biti $M=N$, no to se protivi konstrukciji podskupa M. Dobiveno protivrječje dokazuje tvrdnju.

28. Dokazati, da je broj 1 jedini, koji u skupu N, koji zadovoljava Peanove aksiome, nema prethodnika.

Rješenje. Da 1. nema prethodnika, osigurava aksiom P 2. Treba još dokazati, da nijedan drugi element od N nema to svojstvo. Dokaz provodimo indirektno: pretpostavimo dakle, da za neki $m \neq 1$ za svaki $n \in N$ vrijedi $n^+ \neq m$. Razmotrimo skup M, koji dobivamo iz N izostavljanjem elementa m. Posve analogno, kao u rješenju prethodnog zadatka, uviđamo, da dolazimo do protivrječja. Pretpostavku $m \neq 1$, $m \neq n^+$ valja dakle odbaciti, čime je tvrdnja dokazana.

29. Dokazati, da za operacije $+$ i $\cdot$, definirane sa (1) i (2), vrijedi

a) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (asocijativnost zbroja);

b) $a+b=b+a$ (komutativnost zbroja);

c) $a(b+c)=ab+ac$ (distributivnost slijeva množenja prema zbrajanju);

d) $(ab)c=a(bc)$ (asocijativnost produkta);

e) $ab=ba$ (komutativnost produkta).

Rješenje. a) Prema (1) vrijedi $a+(b+1)=a+b^+=(a+b)^+=(a+b)+1$, pa je jednakost a) zadovoljena za $c=1$. Ako ona vrijedi za neki $c=n$, tj. ako je $(a+b)+n=a+(b+n)$, bit će zbog (1) $(a+b)+n^+=[(a+b)+n]^+=[a+(b+n)]^+=a+(b+n)^+=a+(b+n^+)$, pa *a*) vrijedi i za $c=n^+$. Zbog P 4. odatle izlazi, da a) vrijedi za svaki prirodni broj c (i kakve god prirodne brojeve a, b).

b) Dokažimo najprije, da je $a+1=1+a$. Ispravnost ove relacije očita je za $a=1$. Ako ona stoji za $a=n$, tj. ako je $n+1=1+n$, bit će zbog (1) i a): $n^+ +1=(n+1)+1=(1+n)+1=1+(n+1)=1+n^+$, pa $a+1=1+a$ vrijedi i za $a=n^+$, dakle do P 4. za svaki a. Ovo pak znači, da b) vrijedi za $b=1$. Pretpostavimo li, da b) vrijedi i za $b=n$, tj. da je $a+n=n+a$, bit će zbog (1), a) i upravo dokazane relacije $a+1=1+a$ ispunjeno također i $a+n^+=(a+n)^+=(n+a)^+=n+(a+1)=n+(1+a)=(n+1)+a=n^+ +a$. b) dakle vrijedi i za $b=n^+$, pa iz P 4. izlazi, da vrijedi općenito.

Napomena. Uoči, da u a) ulaze *tri* prirodna broja a, b, c po volji, dok u b) ulaze samo *dva* takva broja a, b; ipak je za dokaz od a) bio dovoljan jedan postupak potpune indukcije, dok smo za dokaz od b) taj postupak morali provesti dva puta (jednom po a, drugi put po b).

c) Kako je po (1) i (2) $a(b+1)=ab^+=ab+a=ab+a\cdot 1$, vrijedi c) za $c=1$. Vrijedi li c) za $c=n$, tj. vrijedi li $a(b+n)=ab+an$, bit će zbog (1), (2) i a): $a(b+n^+)=a(b+n)^+=a(b+n)+a=(ab+an)+a=ab+(an+a)=ab+an^+$, pa c) vrijedi i za $c=n^+$, dakle i općenito.

d) Kako je prema (2) $(ab)\cdot 1=ab=a(b\cdot 1)$, vrijedi d) za $c=1$. Ako vrijedi za $c=n$, tj. ako je $(ab)\cdot n=a(bn)$, bit će zbog (2) i c): $ab\cdot n^+=ab\cdot n+ab=a\cdot bn+ab=a(bn+b)=a\cdot bn^+$, pa d) vrijedi i za $c=n^+$, dakle općenito.

Prije nego li predemo na dokaz od e), dokažimo najprije lemu $1\cdot a=a$, $b^+a=ba+a$. Njen prvi dio očit je zbog (2) za $a=1$, a ako vrijedi za $a=n$, bit će zbog (2) i c): $1\cdot n^+=1(n+1)=1\cdot n+1\cdot 1=n+1=n^+$, čime je prvi dio leme dokazan indukcijom po a. Zbog (2) i (1) je nadalje $b^+\cdot 1=b^+=b+1=b\cdot 1+1$, pa i drugi dio leme vrijedi za $a=1$. Vrijedi li on za $a=n$, tj. vrijedi li $b^+n=bn+n$, bit će zbog (2), (1), a) i b): $b^+n^+=b^+n+b^+=(b^+n+b)^+=[(bn+n)+b]^+=[bn+(n+b)]^+=[bn+(b+n)]^+=[(bn+b)+n]^+=(bn^+ +n)^+=bn^+ +n^+$, pa drugi dio leme vrijedi i za $a=n^+$, dakle i općenito.

Predimo sada na dokaz jednakosti e). Kako je prema (2) i prvom dijelu leme $a\cdot 1=a=1\cdot a$, vrijedi e) za $b=1$. vrijedi li e) i za $b=n$, tj. vrijedi li $an=na$, bit će zbog 2) i drugog dijela leme $an^+=an+a=na+a=n^+a$, čime je dokaz od e) proveden. (Uoči da je i ovdje — za produkt — dokaz asocijativnosti bio jednostavniji i kraći, nego li dokaz komutativnosti.)

Iz e) i c) dobivamo također c') $(b+c)a=a(b+c)=ab+ac=ba+ca$ (distributivnost zdesna množenja prema zbrajanju).

30. Dokazati, da za bilo koja dva prirodna broja $a, b\in N$ vrijedi *bar* jedna od relacija $a<b$, $a=b$, $a>b$.

Rješenje. Dokažimo najprije, da tvrdnja vrijedi za $a=1$.

Ako je i $b=1$, ona je trivijalna, jer je tada $a=b$. Ako je $b\neq 1$, bit će prema zadatku 28. i 29. b): $b=m^+=m+1=1+m=a+m$, i tvrdnja je zadovoljena s $b>a$.

Pretpostavimo sada, da tvrdnja stoji za $b=n$, tj. da za svaki $a\in N$ vrijedi bar jedna od relacija $a<n$, $a=n$, $a>n$. Treba još dokazati, da u tom slučaju vrijedi i bar jedna od relacija $a<n^+$, $a=n^+$, $a>n^+$. U tu svrhu možemo zaključivati ovako:

a) Ako je $a<n$, znači to, da je $a+c=n$, pa je $a+c^+=(a+c)^+=n^+$, i vrijedi $a<n^+$.

b) Ako je $a=n$, bit će $n^+=a^+=a+1$, pa je i ovdje $a<n^+$.

c) Ako je $a>n$, bit će $a=n+c$. Razlikovat ćemo 2 slučaja: c_1) $c=1$, c_2) $c\neq 1$. U slučaju c_1) izlazi $a=n+1=n^+$, i vrijedi $a=n^+$. U slučaju c_2) bit će prema zadatku 28. $c=d^+$, pa je zbog zadatka 29. b): $a=n+d^+=(n+d)^+=(d+n)^+=d+n^+=n^+ +d$, i vrijedi $a>n^+$.

31. Dokazati, da za prirodne brojeve a, b, c vrijedi

a) $a+b=a+c$ povlači $b=c$;

b) $ab=ac$ povlači $b=c$.

Rješenje. a) Za $a=1$ a) je trivijalno, jer zbog 29. b) $1+b=1+c$ znači isto što i $b+1=c+1$, dakle $b^+=c^+$, što po P 3. povlači, da je $b=c$. Uzmimo dalje, da a) vrijedi za $a=n$, tj. da $n+b=n+c$ povlači $b=c$. Tada $n^+ +b=n^+ +c$, ili, što je isto, $(n+1)+b=(n+1)+c$, dakle zbog 29. a) $n+(1+b)=n+(1+c)$ po pretpostavci povlači $1+b=1+c$, a ovo, kao što smo upravo vidjeli, povlači dalje $b=c$. a) dakle vrijedi i za $a=n^+$, čime je tvrdnja dokazana.

b) Uzmimo, da uz $ab=ac$ vrijedi $b<c$. Tada bi bilo $b+d=c$ i odatle zbog 29. c) $ab=ac=a(b+d)=ab+ad$, dakle i $ab+1=(ab)^+=(ab+ad)^+=ab+(ad)^+$. Prema a) odatle zaključujemo, da bi moralo biti $(ad)^+=1$, što se protivi P 2. Pretpostavku $b<c$ treba dakle odbaciti. Isto tako izlazi, da otpada i mogućnost $b>c$. Prema zadatku 30. odatle izlazi, da preostaje jedino mogućnost $b=c$, čime je dokaz proveden.

32. Dokazati, da za bilo koja dva prirodna broja $a, b \in N$ vrijedi točno jedna od relacija $a<b$, $a=b$, $a>b$.

Rješenje. U zadatku 30. vidjeli smo, da uvijek vrijedi *bar* jedna od relacija $a<b$, $a=b$, $a>b$, pa još preostaje da dokažemo, da uz dane a, b vrijedi *najviše* jedna od tih relacija, tj. da se one međusobno isključuju.

a) Nemoguće je, da istodobno bude $a<b$ i $a=b$, jer bi to značilo da je $a+c=b=a$ i odatle $a+c^+=(a+c)^+=a^+=a+1$, dakle prema zadatku 31. a) $c^+=1$, suprotno P 2.

b) Isto tako izlazi, da se međusobno isključuju mogućnosti $a=b$ i $a>b$.

c) Da je u isti mah $a<b$ i $a>b$, bilo bi $a+c=b$, $a=b+d$, dakle prema 29. a) $b+(d+c)=(b+d)+c=a+c=b$ i odatle $b+(d+c)^+=[b+(d+c)]^+=b^+=b+1$, dakle po 31. a) $(d+c)^+=1$, opet suprotno P 2.

33. Dokazati, da za relaciju $<$ vrijedi

a) $a<b$, $b<c$ povlači $a<c$ (tranzitivnost),

b) $a<b$ povlači $a+c<b+c$ (monotonija zbroja),

c) $a<b$ povlači $ac<bc$ (monotonija produkta).

Rješenje. a) Po pretpostavci je $a+d=b$, $b+e=c$, dakle zbog 29. a) $a+(d+e)=(a+d)+$ $+e=b+e=c$, što znači $a<c$.

b) Iz $a+d=b$ dobivamo zbog 29. a) i 29. b) $(a+c)+d=a+(c+d)=a+(d+c)=(a+d)+$ $c=b+c$, pa je zaista $a+c<b+c$.

c) Iz $a+d=b$ dobivamo zbog 29. c') da je $ac+dc=(a+d)\,c=bc$, dakle zaista $ac<bc$.

34. Neka je S neki neprazni podskup skupa N, koji zadovoljava *Peanove* aksiome P 1. do P 4. Neka se dokaže, da S sadrži najmanji element n, tj. da postoji $n \in S$ takav, da za svaki $s \in S$ vrijedi $n=s$ ili $n<s$ (*dobro uređenje* skupa prirodnih brojeva).

Rješenje. Definirajmo skup M ($M \subseteq N$) ovako: Element $n \in N$ bit će element od M onda i samo onda, ako za svaki element $s \in S$ vrijedi bilo $n=s$, bilo $n<s$. Ovako konstruirani skup M sadrži broj 1, jer za $s \neq 1$ prema 28. i 29. b) vrijedi $s=a^+=a+1=1+a$, pa je $1<s$. Kad bi M imao svojstvo, da $n \in M$ povlači $n^+ \in M$, bilo bi $M=N$, što je isključeno: ako je naime s neki element od S, značilo bi to, da je i $s^+=s+1 \in M$, dakle posebno $s^+<s$ ili $s^+=s$, što je zbog 32. u suprotnosti s $s^+>s$. Kako dakle M *nema* svojstvo $n \in M \Rightarrow n^+ \in M$, postoji (bar jedan) $n \in M$, takav da n^+ nije element od M. Preostaje još da dokažemo, da je $n \in S$: Zaista, da n *nije* element od S, bilo bi za svaki $s \in S$: $n<s$ (jer bi mogućnost $n=s$ time otpala), pa bismo imali $n+c=s$. Uz $c=1$ dobili bismo odatle $n+1=n^+=s$, a za $c \neq 1$ prema 28. $c=d^+$ i odatle zbog 29. b) $s=n+c=n+d^+=(n+d)^+=(d+n)^+=d+n^+=n^++d$, dakle $n^+<s$. No time bi bilo $n^+ \in M$, suprotno ranijem.

Napomena. Lako je uvidjeti, da u S postoji *samo* jedan najmanji element $n \in S$. Ako su naime n_1, n_2 dva elementa sa svojstvom, da za svaki $s \in S$ vrijedi bilo $n=s$, bilo $n<s$, bilo bi posebno $n_1=n_2$ ili $n_1<n_2$ kao i $n_2=n_1$ ili $n_2<n_1$. Prema 32. odatle izlazi, da je $n_1=n_2$. (Ujedno smo time dokazali, da u gore konstruiranom skupu M postoji *samo* jedan element $n \in M$, takav da n^+ nije element od M).

35. Neka je N neki skup, u kojem je definirano jednoznačno preslikavanje koje svakom elementu $n \in N$ pridružuje neki element $n^+ \in N$. Ovo preslikavanje proširujemo i na podskupove M od N, tako da se podskupu M od N pridružuje podskup M^+, koji sadrži sve one elemente $n \in N$, za koje u M postoji $m \in M$, tako da je $m^+=n$. (Posebno na pr. za prazni skup Φ vrijedi $\Phi^+=\Phi$, a za jednočlani skup $\{n\}^+=\{n^+\}$). M^+ zovemo *slikom* od M.

Neka se dokaže: Sustav *Peanovih* aksioma P 1. do P 4. ekvivalentan je s ovim sustavom aksioma:

A 1. N nije prazan.

A 2. Najviše jedan element od N nema u N prethodnika.

A 3. Nijedan neprazan podskup od N ne poklapa se sa svojom slikom, tj. $M=M^{+} \Rightarrow M=\Phi$.

Rješenje. Treba dokazati, da aksiomi P 1. do P 4. povlače ispravnost A 1. do A 3. i obrnuto.

Da uz P 1. do P 4. vrijedi A 1. je trivijalno, jer je već po P 1. $1 \in N$. Zbog 28. vrijedi tada i A 2.

Pretpostavimo, da A 3. ne vrijedi. Prema 34. sadržao bi M najmanji element n. Zbog $M^{+}=M$ bilo bi $n \in M^{+}$, a po definiciji od M^{+} značilo bi to, da postoji $m \in M$, takav da je $m^{+}=n$. No iz $m^{+}=n$ izlazi $m+1=n$, dakle $n>m$, suprotno izboru broja n kao najmanjeg u M.

Treba još dokazati obrat, tj. da A 1. do A 3. povlači P 1. do P 4.

Dokažimo najprije ovu lemu:

Uz A 1. do A 3. vrijedi $M \subseteq M^{+} \Rightarrow M=\Phi$, tj. nijedan neprazni podskup M od N nije sadržan u svojoj slici.

Dokaz leme. Pretpostavimo, da lema ne vrijedi. Tada N sadrži neprazni podskup M sa $M \subseteq M^{+}$. Prema tome unija $Q=\bigcup M$ svih podskupova M, koji su sadržani u svojoj slici, nije prazna. Dalje je po definiciji slike podskupa od N:

$$Q=\bigcup M \subseteq \bigcup (M^{+})=(\bigcup M)^{+}=Q^{+},$$

dakle $Q \subseteq Q^{+}$. Da je sada $Q \neq Q^{+}$, postojao bi element $a \in Q^{+}$, koji nije sadržan u Q. Tada bi međutim za podskup $R=Q \cup \{a\}$ bilo $R^{+}=Q^{+} \cup \{a^{+}\} \supseteq Q^{+} \supseteq Q \cup \{a\}=R$, dakle $R \subseteq R^{+}$, ali R ne bi bio sadržan u Q, što se protivi konstrukciji od Q. Prema tome je $Q^{+}=Q \neq \Phi$, no to se protivi A 3. Time je postojanje nepraznog podskupa M od N, koji bi bio sadržan u svojoj slici M^{+} isključeno, i lema je dokazana. (Obrat, tj. tvrdnja da lema povlači A 3. je trivijalna, jer je A 3. posebni slučaj leme.)

Pređimo sada na dokaz, da A 1. do A 3. zaista povlači P 1. do P 4.

a) Kako N po P 1. nije prazan, ne može se po A 3. poklopiti sa N^{+}, pa zbog $N^{+} \subseteq N$ sadrži N bar jedan element bez prethodnika. Po A 2. ne postoji više takvih elemenata, pa taj jedini element bez prethodnika označimo sa 1. Vrijedi dakle P 1. i P 2.

b) Dokaz, da vrijedi P 4. (P 3. ćemo dokazati kasnije, i to uz pomoć već dokazanog P 4.) Neka je M podskup od N. M neka sadrži u a) nađeni element $1 \in N$, i neka ima svojstvo $M \supseteq M^{+}$, tj. $n \in M \Rightarrow n^{+} \in M$. Da bismo dokazali P 4. treba odatle (uz A 1. do A 3.) izvesti, da je $M=N$. Pretpostavimo suprotno, tj. uzmimo da je *neprazan* skup $Q=N-M$, koji sadrži sve one elemente od N, koji nisu sadržani u M. Tada prema lemi postoji element $b \in Q$, koji nije element od Q^{+}; kako po pretpostavci o M vrijedi $1 \in M$ (dakle 1 nije element Q), sigurno je $b \neq 1$. Odatle zbog a) izlazi, da je b sljedbenik a^{+} nekog elementa $a \in N$. No $a \in Q$ imalo bi za posljedicu, da bi bilo $a^{+}=b \in Q^{+}$, suprotno pretpostavci, pa je nužno $a \in N-Q=M$. Odatle bismo međutim dobili da je $a^{+} \in M^{+} \subseteq M$, pa $b=a^{+}$ ne bi bio element od $N-M=Q$, suprotno pretpostavci. Time je opovrgnuta pretpostavka $Q \neq \Phi$, i P 4. je dokazano.

c) Izvod od P 3. uz A 1. do A 3. Neka je N' skup svih prirodnih brojeva n', a u N neka vrijedi A 1. do A 3. Konstruirat ćemo preslikavanje f od N' u N pomoću rekurzivnih definicija („$\rightarrow$" ovdje znači pridruženje)

$$1' \rightarrow f\,1'=1, \quad (n' \rightarrow f\,n'=n) \Rightarrow (n+1)' \rightarrow f\,(n+1)'=n^{+}.$$

Budući da je P 4. uz A 1. do A 3. već dokazano, izlazi, da je f preslikavanje od N' *na* N, tj. za svaki element $n \in N$ postoji neki element $n' \in N'$, takav da je $f\,n'=n$. Ako dakle P 3. *ne bi* vrijedio u N, bio bi podskup M onih elemenata od N, za koje inverzno preslikavanje f^{-1} nije jednoznačno, neprazan. Podskup $f^{-1} M$ od N' sadržao bi tada zbog 34. najmanji broj n_0'. Neka je sada G f-slika u N odsječka G' brojeva $n' \geqq n_0'$. Tada bi bilo $Q^{+} \supseteq Q$, jer je $f\,n_0'$ po pretpostavci također f-slika i nekog od n_0' većeg broja, a iz $m \in Q$ (dakle $m=f n'$ i $n'>n_0'$, tj. $n'-1 \geqq n_0'$) izlazi i $m=f[(n'-1)+1]=[f(n'-1)]^{+} \in Q^{+}$. $Q^{+} \supseteq Q$ je međutim za $Q \neq \Phi$ zbog leme isključeno. Time je sve dokazano.

36. Neka je $S=\{(a, b)\}$ (a, b racionalni brojevi, $a \neq 0$). U skupu S je definisana binarna operacija $*$ pomoću formule: $(a, b) * (c, d)=(ac, bc+c+d)$. Dokazati da je $(S, *)$ grupa.

Rešenje. Ako su a, b, c, d racionalni brojevi, onda su $a\,c$ i $b\,c+c+d$ takođe racionalni. Operacija $*$ je interna ($a\,c \neq 0$ ako a i $c \neq 0$). Operacija $*$ je asocijativna, jer važi

$$[(a, b) * (c, d)] * (e, f)=(ac, bc+c+d) * (e, f)=(ace, bce+ce+de+e+f)$$

$$(a, b) * [(c, d) * (e, f)]=(a, b) * (ce, de+e+f)=(ace, bce+ce+de+e+f).$$

Potražimo jedinični element. Ako je on (x, y), onda jednakost $(a, b)*(x, y)=(a, b)$, gde su a $(\neq 0)$ i b ma kakvi racionalni brojevi, daje jedinstveno rešenje $x=1$, $y=-1$. Znači $(1, -1)\in S$ je jedinični element jer je i $(1, -1)*(a, b)=(a, b)$.

Neka je $(a, b)\in S$ bilo koji element skupa S.

Potražimo element $(x, y)\in S$ takav da $(a, b)*(x, y)=(1, -1)$. Iz odgovarajućeg sistema linearnih jednačina $ax=1$, $bx+x+y=-1$ nalazimo $x=1/a$, $y=-(1/a)(a+b+1)$. Element $(1/a, -(1/a)(a+b+1))\in S$ je i levi inverzan element elementa (a, b). Znači $(S, *)$ je grupa.

37. Jedina relacija kongruencije u prstenu Z celih brojeva je $\equiv \bmod m$ $(m=0, 1, 2, 3, \ldots)$. Dokazati.

Dokaz. Proverimo prethodno da je $\equiv \bmod m$ (m prirodan broj ili nula) relacija kongruencije.

Ovo je ekvivalentno tvrđenju: ako $a\equiv b \pmod m$ i $c\equiv d \pmod m$ onda $a+c\equiv b+d \pmod m$ i $a\cdot c\equiv b\cdot d \pmod m$. Dokaz tvrđenja se sastoji u sledećem. Neka $a\equiv b \pmod m$ i $c\equiv d \pmod m$. Tada postoje celi brojevi k_1 i k_2 takvi da $a=b+k_1\cdot m$, $c=d+k_2\cdot m$. Odavde

$$a+c=b+d+(k_1+k_2)\,m, \quad ac=bd+(bk_2+dk_1+k_1k_2m)\,m,$$

pa

$$a+c\equiv b+d \pmod m, \quad ac\equiv bd \pmod m.$$

Pretpostavimo sada da je $\sim$ bilo kakva relacija ekvivalencije koja je kongruencija u prstenu Z celih brojeva. Sada, znači, pretpostavljamo da iz $a\sim b$ i $c\sim d$ sledi $a+c\sim b+d$ i $a\cdot c\sim b\cdot d$. Označimo sa S skup svih celih brojeva koji su ekvivalentni sa 0, tj., iz $a\in S$ sledi $a\sim 0$ i obrnuto. Razlikujemo dva slučaja:

I slučaj. Skup S ima samo jedan element 0. Onda je $\sim$ obična jednakost ($\equiv \bmod 0$), jer iz $a\sim b$ i $(-b)\sim(-b)$ sledi $a-b\sim 0$, tj. $a-b=0$, $a=b$.

II slučaj. S ima više od jednog elementa. Ako $l\in S$ onda i $-l\in S$, pa se u S nalazi bar jedan prirodan broj. Označimo sa m najmanji prirodan broj koji se nalazi u S. Ako $s\in S$ bilo koji element iz S, onda se on može jedinstveno prikazati u obliku: $s=m\cdot q+r$ (q, r celi brojevi, $0\leqslant r<m$). Iz $s\sim 0$, $m\sim 0$, $-q\sim -q$ zaključujemo $s-mq=r\sim 0$, tj. $r=0$. Znači, svaki element skupa S je oblika mq, gde je q ceo broj.

Ako $m=1$, onda je relacija $\sim$ takva da $a\sim b$ za svako a i b. Ovu relaciju $\sim$ zovemo kongruencija po modulu 1.

Ako $m>1$, onda iz $a\sim b$ i $(-b)\sim(-b)$ dobijamo $a-b\sim 0$, tj. $a-b=mq$, $a\equiv b \pmod m$, pa je relacija $\sim$ ustvari $\equiv \bmod m$.

38. Pokazati da funkcije $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$, $f_3(x)=-x$, $f_4(x)=-\dfrac{1}{x}$ čine grupu u odnosu na operaciju $*$ datu formulom: $f_i(x) * f_j(x)=f_i[f_j(x)]$.

Rešenje. Multiplikativna tablica operacije $*$ glasi

$*$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

gde je, na primer,

$$f_3(x) * f_4(x)=(-x) * \left(-\frac{1}{x}\right)=-\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}=f_2(x),$$

$$f_2(x) * f_3(x)=\frac{1}{x} * (-x)=\frac{1}{-x}=f_4(x), \qquad f_3(x) * f_3(x)=x=f_1(x).$$

Iz ove tablice saznajemo da je operacija $*$ interna, da je f_1 jedinični element, da svaki element ima inverzni $(f_i^{-1}=f_i)$.

Asocijativnost sledi iz činjenice da je operacija $*$ množenja funkcija asocijativna u skupu svih funkcija. Naime:

$$[f(x)*\varphi(x)]*\psi(x)=f[\varphi(x)]*\psi(x)=f\{\varphi[\psi(x)]\}=f(x)*\varphi[\psi(x)]=f(x)*[\varphi(x)*\psi(x)].$$

Primetimo da se iz tablice saznaje da je u skupu $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ operacija $*$ komutativna. Znači skup navedenih funkcija u odnosu na operaciju $*$ čini *Abel*-ovu grupu.

39. Neka je $(G,\cdot)$ data grupa. Definišimo binarnu operaciju $*$ pomoću $a*b=b\cdot a$ $(a, b\in G)$.

Pokazati da je $(G,*)$ grupa.

Rešenje. Iz $a, b\in G$ sleduje $b\cdot a=a*b\in G$, tj. $*$ je interna operacija. Kako je

$$(a*b)*c=(b\cdot a)*c=c\cdot(b\cdot a)=(c\cdot b)\cdot a=(b*c)\cdot a=a*(b*c),$$

operacija $*$ je asocijativna. Element e je jedinični jer $a*e=e*a=a$. Inverzan element elementa a je a^{-1} jer $a^{-1}*a=a\cdot a^{-1}=e$, $a*a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e$.

Dakle, $(G,*)$ je zaista grupa.

40. Neka je a bilo koji element grupe G, konačnog reda g.

a) Pokazati da postoji najmanji prirodan broj $\omega(a)$ takav da $a^{\omega(a)}=e$ (e je jedinični element grupe G).

b) Pokazati da je $a^g=e$.

c) Pokazati da je $a^h=a^k$ ako i samo ako $h\equiv k\ (\mathrm{mod}\ \omega(a))$.

Rešenje. a) Skup $S=\{a, a^2, a^3, \ldots, a^g, a^{g+1}\}$ sastoji se iz elemenata grupe G. Svi elementi skupa S ne mogu biti različiti, jer bi inače grupa G imala $g+1$ element. Stoga je $a^l=a^s$, gde su l i s dva različita prirodna broja iz skupa $\{1, 2, \ldots, g, g+1\}$. Neka je $l>s$. Tada iz jednakosti $a^l=a^s$ dobijamo $a^{l-s}=e$. Dakle, postoji bar jedan prirodan broj $l-s$ takav da $a^{l-s}=e$. Označimo sa M skup svih prirodnih brojeva n sa osobinom $a^n=e$. Ovaj skup M nije prazan jer $l-s\in M$. Stoga u M postoji najmanji prirodan broj. Označimo ga sa $\omega(a)$. Na ovaj način je tvrđenje a) dokazano.

b) Uočimo skup $H=\{a, a^2, a^3, \ldots, a^{\omega(a)}=e\}$. Ovaj skup u odnosu na operaciju grupe G čini grupu, tj. H je podgrupa grupe G. Prema *Lagrange*-ovoj teoremi sledi da je $g=h\,\omega(a)$ (gde je h prirodan broj).

Koristeći ovu jednakost dobijamo $a^g=a^{h\omega(a)}=[a^{\omega(a)}]^h=e^h=e$, pa je tvrđenje b) dokazano.

c) Neka, prvo, $h\equiv k\ (\mathrm{mod}\ \omega(a))$. Tada $h=k+s\,\omega(a)$ (s ceo broj), pa $a^h=a^{k+s\omega(a)}=$ $=a^k\cdot[a^{\omega(a)}]^s=a^k\cdot e^s=a^k\cdot e=a^k$. Na taj način je prvi deo tvrđenja dokazan.

Neka $a^h=a^k$. Podelimo h i k sa $\omega(a)$. Označimo količnike respektivno sa s_1 i s_2 a ostatke sa r_1 i r_2. Tada $h=s_1\,\omega(a)+r_1$, $k=s_2\,\omega(a)+r_2$, gde $0\leqslant r_1<\omega(a)$, $0\leqslant r_2<\omega(a)$. Iz $a^h=a^k$ dobijamo zbog $a^{\omega(a)}=e$ da je $a^{r_1}=a^{r_2}$. Odavde $r_1=r_2$ tj. $h\equiv k\ (\mathrm{mod}\ \omega(a))$, jer inače ako je $r_1\neq r_2$, dobijamo $a^{|r_1-r_2|}=e$, što je nemogućno pošto $|r_1-r_2|<\omega(a)$.

41. Neka je $(S,\cdot)$ konačna semi-grupa. Pokazati da u S mora postojati bar jedan idempotentan element.

Pokazati da ako $(S,\cdot)$ nije konačna semi-grupa, takav element ne mora da postoji.

Rešenje. Neka je S reda g i neka $a\in S$ bilo koji element. Formirajmo skup

$$T=\{a^2, a^{2^2}, a^{2^3}, a^{2^4}, \ldots, a^{2^g}, a^{2^{g+1}}\}.$$

Skup T je podskup S. U T moraju bar dva elementa da budu jednaka, inače skup S bi imao $g+1$ element.

Neka $a^{2^l}=a^{2^s}$ $(l>s)$. Ako je x bilo koji prirodan broj, onda množeći ovu jednakost sa a^x dobijamo

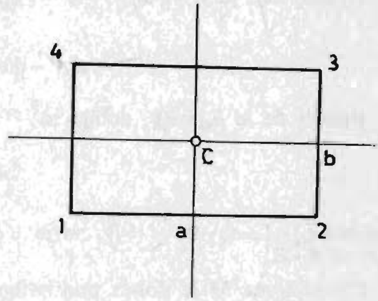
(1) $$a^{2^l+x}=a^{2^s+x}\quad \text{(ovo važi i za } x=0).$$

Potražimo x iz uslova $2^l + x = 2 \cdot (2^s + x)$. Odavde $x = 2^l - 2^{s+1}$. Za ovaj broj x jednakost (1) postaje:

$$(a^{2^l - 2^s})^2 = a^{2^l - 2^s}.$$

Odavde sleduje da je element $a^{2^l - 2^s}$ idempotentan.

Da bismo dokazali drugi deo tvrđenja, navedimo jedan primer. Skup prirodnih brojeva u odnosu na sabiranje čini semigrupu bez idempotentnog elementa.



42. Naći grupu simetrija za: a) pravougaonik; b) kvadrat.

Rešenje. a) Po definiciji, simetrija geometriske figure je biuniokvo preslikavanje tačaka te figure na tačke te figure koje „čuva" udaljenje tačaka.

Neka su 1, 2, 3, 4 temena pravougaonika, C centar i neka su a i b prave kroz C koje su paralelne stranama 14 odnosno 12 pravougaonika. Pravougaonik ima sledeće simetrije:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = (1)\,(2)\,(3)\,(4) \qquad \text{(identično preslikavanje);}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix} = (12)\,(34) \qquad \text{(rotacija oko } a \text{ za } \pi);$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = (14)\,(23) \qquad \text{(rotacija oko } b \text{ za } \pi);$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix} = (13)\,(24) \qquad \text{(rotacija oko } C \text{ za } \pi).$$

Dakle, grupa simetrija pravougaonika je:

$$G = \{(1)\,(2)\,(3)\,(4),\ (12)\,(34),\ (13)\,(24),\ (14)\,(23)\}.$$

b) Na sličan način zaključujemo da je grupa simetrija kvadrata:

$$G_1 = \{(1)\,(2)\,(3)\,(4),\ (1234),\ (13)\,(24),\ (1432),\ (12)\,(34),\ (14)\,(23),\ (13),\ (24)\}$$

(1, 2, 3, 4 su temena kvadrata).

43. Pokazati da skup M svih matrica tipa $n \times n$, koje u svakoj vrsti i svakoj koloni imaju samo po jedan element jednak jedinici, dok su ostali nule, pretstavlja multiplikativnu grupu izomorfnu simetričnoj grupi supstitucija reda n.

Rešenje. Pokazaćemo najpre da je skup M zatvoren u odnosu na operaciju množenja. Neka je $\| a_{ij} \|$, $\| b_{ij} \| \in M$. Tada je

$$\| a_{ij} \| \cdot \| b_{ij} \| = \| c_{ij} \|,$$

gde je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \tag{1}$$

Ako je

$$a_{ir} = 1,\ a_{ik} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n),$$

$$b_{sj} = 1,\ b_{kj} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n),$$

iz relacije (1) sleduje da je $c_{ij} = 1$ za $r = s$ i $c_{ij} = 0$ za $r \neq s$. Pošto je c_{ij} jedinica samo za jednu vrednost indeksa i i samo sa jednu vrednost od j, izlazi da je $\| c_{ij} \| \in M$.

Kako za množenje matrica važi zakon asocijacije, on važi i za elemente skupa M.

Jedinični (levi i desni) element od M je jedinična matrica tipa $n \times n$. Za matricu $A \in M$ inverzni (levi i desni) element je transponovana matrica A', tj.

$$A'A = AA' = E.$$

Doista, ako je $A = \| a_{ij} \|$, $A' = \| b_{ij} \|$, tada je

$$AA' = \| c_{ij} \| \quad \left(c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right).$$

Budući da je $b_{kj} = a_{jk}$, dobija se

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk},$$

odnosno $c_{ii} = 1$, $c_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, pa je $\| c_{ij} \| = E$, što je trebalo dokazati. Slično se pokazuje da je $A'A = E$.

Prema tome M je doista multiplikativna grupa.

Neka su

(2)
$$a_{1i_1}, \; a_{2i_2}, \; \dots, \; a_{ni_n}$$

oni elementi matrice $\| a_{ij} \| \in M$ koji nisu jednaki nuli. Skup elemenata (2) određuje jednu i samo jednu matricu skupa M. Međutim, ovaj skup određuje jednu i samo jednu supstituciju

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

skupa S simetričnih supstitucija reda n. Odavde sleduje da između skupova M i S postoji obostrano jednoznačna korespondencija.

Neka su

(3)
$$a_{1i_1}, \; a_{2i_2}, \; \dots, \; a_{ni_n}, \; b_{1j_1}, \; b_{2j_2}, \; \dots, \; b_{nj_n}$$

elementi različiti od nule matrica $\| a_{ij} \|$, $\| b_{ij} \| \in M$.

Tada je

(4)
$$\| a_{ij} \| \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}, \quad \| b_{ij} \| \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix},$$

gde simbol $\leftrightarrow$ označava obostrano jednoznačnu korespondenciju skupova M i S.

Elementi različiti od nule koji određuju matricu $\| c_{ij} \| = \| a_{ij} \| \; \| b_{ij} \|$ su oblika $a_{sk} \, b_{kr}$, pri čemu treba da bude jednovremeno $a_{sk} \neq 0$ i $b_{kr} \neq 0$. Tada je, na osnovu (3), $a_{sk} = a_{si_s}$ i $b_{kr} = b_{i_s j_{i_s}}$, te je

$$c_{sj_{i_s}} = a_{si_s} b_{i_s j_{i_s}} \neq 0,$$

tj. elementi koji određuju matricu c_{ij} su

$$c_{1j_{i_1}}, \; c_{2j_{i_2}}, \; \dots, \; c_{nj_{i_n}}.$$

Međutim, odavde je

(5)
$$\| c_{ij} \| \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_{i_1} & j_{i_2} & \cdots & j_{i_n} \end{pmatrix}$$

i najzad

(6)
$$\| a_{ij} \| \; \| b_{ij} \| \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix},$$

jer desna strana u relaciji (5) pretstavlja proizvod supstitucija koje se javljaju u poslednjoj relaciji.

Kako je relacija (6) posledica relacija (4), zaključuje se da su grupe M i S doista izomorfne.

Ovo je rešenje *M. Popadića.*

44. Pokazati da su skup kompleksnih brojeva $a+ib$ i skup matrica $\begin{Vmatrix} a & b \\ -b & a \end{Vmatrix}$ (a, b realni brojevi) izomorfni kako u odnosu na operaciju sabiranja tako i u odnosu na operaciju množenja.

45. Pod kojim će uslovima podskupovi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ konačne grupe G obrazovati grupu kad proizvod $A_i A_j$ pretstavlja skup svih elemenata

$$z = xy \qquad (x \in A_i;\ y \in A_j).$$

46. Da li skup permutacija

$$1234, \quad 2143, \quad 3412, \quad 4321$$

obrazuje grupu?

47. Za parove (a, b) realnih brojeva a, b uvedimo definicije:

$$(a, a) = a,$$
$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d),$$
$$(a, b)\,(c, d) = (ac, bd).$$

Za ove parove važe: zakoni komutacije i asocijacije za sabiranje; zakoni komutacije i asocijacije za množenje; zakon distribucije za množenje u odnosu na sabiranje. Proveriti ovo.

Da li jednačina $(a, b)^2 = -1$ ima rešenja u skupu realnih brojeva?

Da li važi faktor-teorema prema kojoj relacija

$$(a, b) \cdot (c, d) = 0$$

važi tada i samo tada ako je bar jedan od faktora (a, b) i (c, d) jednak nuli?

Isto proučiti za parove realnih brojeva za koje važe relacije:

$$1^\circ \qquad \begin{aligned} &(a, a) = a, \\ &(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d), \\ &(a, b)\,(c, d) = (ad, bc); \end{aligned}$$

ili

$$2^\circ \qquad \begin{aligned} &(a, 0) = a, \\ &(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d), \\ &(a, b)\,(c, d) = (ac+bd, ad+bc+bd). \end{aligned}$$

48. Ako se grupa G može proizvesti pomoću elemenata a i b, koji zadovoljavaju relaciju

$$(1) \qquad a^3 = b^2 = (ab)^2 = e \qquad (e \text{ jedinični element grupe } G),$$

pokazati da se grupa G sastoji iz šest elemenata

$$a^m b^k \qquad (m = 0, 1, 2;\ k = 0, 1).$$

Rešenje. Prema (1) je

$$(b^2 = abab) \Rightarrow (b = aba) \Rightarrow (a^2 b = a^3 ba) \Rightarrow (ba = a^2 b).$$

Relacija $ba = a^2 b$ dopušta da se svaki element grupe G može prikazati u obliku $a^m b^k$. Tako je, na primer,

$$a^2 bab^2 = a^2 (ba)\, b^2 = a^2 a^2 bb^2 = a a^3 b^2 b = aeb = ab.$$

Skup $S=\{a^m b^k\}$ $(m, k,=0, 1, 2, \ldots)$ sadrži sve elemente grupe G. U njemu imamo sledećih šest različitih elemenata:

$$e, a, a^2, b, ab, a^2 b.$$

Ovim je tvrđenje dokazano.

Grupi G odgovara multiplikativna tablica:

	e	a	a^2	ab	a^2b	b
e	e	a	a^2	ab	a^2b	b
a	a	a^2	e	a^2b	b	ab
a^2	a^2	e	a	b	ab	a^2b
ab	ab	b	a^2b	e	a^2	a
a^2b	a^2b	ab	b	a	e	a^2
b	b	a^2b	ab	a^2	a	e

49. Dat je skup $\{a, b, c, \ldots\}$ pravih u Euklidovoj ravni. Ispitati da li su relacije *paralelnost* i *normalnost* relacije ekvivalentnosti.

Odgovor. Paralelnost je relacija ekvivalentnosti, dok normalnost to nije.

50. Na skupu N prirodnih brojeva data je relacija: $a\,(\in N)$ je prosto prema $b\,(\in N)$, što se piše u obliku $(a, b)=1$.

Da li je ova relacija jedna ekvivalentnost?

Odgovor. Nije.

51. Na skupu E celih brojeva data je relacija

$$a \equiv b \pmod{m},$$

gde $a, b, m \in E$ i $m \neq 0$.

Da li je ova relacija jedna ekvivalentnost?

Odgovor. Jeste.

U vezi sa zadacima: 49, 50, 51 videti:

D. S. Mitrinović — D. Mihailović: *Linearna algebra — Analitička geometrija — Polinomi* (Beograd, 1959, str. 386-387).

52. Ispitati da li važi relacija

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) \subset (A \cap C) \cup (B \cap D),$$

gde su A, B, C, D ma kakvi podskupovi jednog skupa E.

Rezultat. Ne važi.

53. Ako su A, B, C delovi jednog skupa, dokazati relaciju

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

koja izražava *Dedekind*-ov aksiom.

Ovaj aksiom je generalisao *D. S. Mitrinović*. Videti njegov članak:

Sur certaines relations de l'Algèbre des ensembles (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 232, 1951, p. 917—918).

54. Ako su A i B delovi skupa E, tada važe relacije:

$$E\setminus(A\cap B)=(E\setminus A)\cup(E\setminus B),$$
$$E\setminus(A\cup B)=(E\setminus A)\cap(E\setminus B).$$

Ovo su *De Morgan*-ovi obrasci.

55. Ako su A, B, C, D delovi jednog skupa, tada je:

$$A\setminus B=A\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\setminus B,$$
$$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C),$$
$$(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(A\cup D).$$

56. Ako je k ceo broj i

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

da li je grupa $\{A^k\}$ konačna?

57. Pokazati da sve nesingularne matrice datog reda obrazuju grupu u odnosu na matrično množenje.

58. Dat je skup brojeva oblika

$$a+b\sqrt{2}\quad (a,\ b \text{ racionalni brojevi; } a^2+b^2>0).$$

Ispitati da li ovaj skup obrazuje grupu u odnosu na množenje.

59. Pokazati da supstitucije

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$
$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

obrazuju *Abel*-ovu grupu u odnosu na množenje supstitucija.

Primedba I. Ova grupa zove se *Klein*-ova grupa po nemačkom matematičaru *F. Klein*-u, koji je naročito poznat zbog svoje knjige: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Berlin, Bd. I (1933), vierte Auflage, Bd. II, dritte Auflage (1925).

Primedba II. Svi elementi ove grupe involutivni su, tj. svaki je sam sebi inverzni element.

60. Proveriti da li skup supstitucija

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$B_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B_5=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\quad B_6=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$B_7=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad B_8=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

obrazuje grupu.

61. Odrediti red supstitucije

$$S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 7 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6\end{pmatrix}.$$

Odgovor. $S^{12}=E$ (jedinična supstitucija).

62. Dokazati da je $S^8=E$ (jedinična supstitucija) ako je

$$S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1\end{pmatrix}.$$

63. Ako u polinomu

$$P_1=ab+cd$$

izvršimo sve mogućne supstitucije elemenata a, b, c, d četvrtog stepena, dobijaju se pored polinoma P_1 još i sledeća dva:

$$P_2=ac+bd, \quad P_3=ad+bc.$$

Tako, na primer, supstitucije

$$\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ b & a & d & c\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}a & b & c & d\\ a & b & d & c\end{pmatrix}$$

dovode do P_1.

Proveriti navedenu činjenicu.

64. Pokazati da skup brojeva $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ obrazuje grupu u odnosu na sabiranje modulo p.

65. Pokazati da skup brojeva $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ obrazuje grupu u odnosu na množenje modulo p, gde je p prost broj (prim-broj).

66. Dati su skupovi:

$$E_1=\{1, i, -1, -i\}, \quad E_2=\{0, 1, 2, 3\}.$$

Pokazati da važi relacija

$$(S_1, \cdot)\cong(S_2, +)$$

($\cdot$ obično množenje; $+$ sabiranje modulo 4; $\cong$ znak izomorfizma).

67. Data je grupa $\{0, 1, 2, 3\}$ sa operacijom sabiranja po modulu 4. Navesti njene automorfizme.

68. Na skupu E racionalnih brojeva proučiti zakone kompozicije:

$$1^\circ \quad a\circ b=a+2b; \qquad 2^\circ \quad a\circ b=\frac{a+b}{1-ab}.$$

69. Na skupu delova jednog skupa E data je operacija unija $\cup$. Pokazati da je ona unutrašnja (interna), asocijativna, komutativna i da ima neutralni element. Koja osobina nedostaje ovoj operaciji da bi ona bila zakon grupe?

Isto pitanje za operaciju presek $\cap$.

70. Neka je na skupu $S=\{a, b, c, \ldots\}$ definisana jedna interna asocijativna operacija $*$. Neka za elemente a i b važe jednakosti:

$$(1) \qquad ab=ba, \quad aba=a, \quad bab=b \quad (a*b=ab).$$

Ako je c bilo koji element skupa S koji je komutativan sa elementom a $(ac=ca)$, dokazati da važe relacije

$$1^\circ \quad acb=bac; \qquad 2^\circ \quad bc=cb.$$

Dokaz. Polazeći od (1), dobijamo:

$$bac=bca=bcaba=bca^2b=ba^2cb=abacb=acb;$$

$$cb=cbab=cabb=acbb=bacb=bbac=babc=bc.$$

Ovim je tvrđenje dokazano.

71. Pokazati da se simetrična grupa S_n (skup svih permutacija elemenata $1, 2, \ldots, n$) može generisati pomoću permutacija

$$P_1=(1, 2, 3, \ldots, n-1), \quad P_2=(n-1, n).$$

Dokaz. Svaka permutacija iz skupa S_n može se razložiti u proizvod dvočlanih ciklusa (a, b) $(1 \leqslant a \leqslant n;\ 1 \leqslant b \leqslant n)$, pa je dovoljno dokazati da se (a, b) može dobiti pomoću P_1 i P_2.

Primetimo da je

$$P_1^{-1}P_2P_1=(1, n), \quad P_1^{-2}P_2P_1^2=(2, n), \quad \ldots, \quad P_1^{-k}P_2P_1^k=(k, n) \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1).$$

Stoga je

$$(a, b)=(n, a)^{-1}(n, b)(n, a)=(n, a)(n, b)(n, a)=P_1^{-a}P_2P_1^a \cdot P_1^{-b}P_2P_1^b \cdot P_1^{-a}P_2P_1^a.$$

Ovim je tvrđenje dokazano.

72. Pokazati da skup matrica

$$A(t, \theta)=\begin{Vmatrix} t\cos\theta & t\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix} \qquad (t, \theta \text{ realni brojevi})$$

ne obrazuje grupu u odnosu na operaciju množenja matrica, ali da podskupovi ovog skupa za koje je

$$1^\circ \quad t=1; \qquad 2^\circ \quad t^2=1$$

obrazuju grupe.

Dati jedno geometrisko tumačenje ovih podskupova, posmatrajući ih kao transformacije tačaka u Euklidovoj ravni.

Uputstvo. Da bismo zaključili da skup $A(t, \theta)$ nije uvek grupa, dovoljno je uočiti da matrica $A(0, \theta)$ nema inverzne matrice.

Da su navedeni podskupovi grupe, utvrđuje se proveravanjem da za njih važe postulati grupe.

Matrici $A(1, \theta)$ odgovara rotacija tačaka u ravni za ugao θ, dok matrici $A(-1, \theta)$ odgovara prethodna transformacija kombinovana sa simetrijom prema pravoj $y=x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$.

73. Pokazati da je preslikavanje

$$a+b\sqrt{m} \leftrightarrow \begin{Vmatrix} a & b \\ mb & a \end{Vmatrix} \qquad (a, b \text{ racionalni; } \sqrt{m} \text{ nije racionalan broj})$$

izomorfizam polja $\{a+b\sqrt{m}\}$ sa poljem matrica oblika $\begin{Vmatrix} a & b \\ mb & a \end{Vmatrix}$.

74. Neka je $\cdot$ asocijativna operacija i neka $a \cdot b = b \cdot a$. Dokazati

$$a^m \cdot b^n = b^n \cdot a^m \qquad (m,\ n \text{ prirodni brojevi}).$$

75. Odrediti grupu simetrija za: 1° ravnokraki trougao; 2° ravnokraki trapez; 3° ravnostrani trougao.

76. Na skupu $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ proučiti operaciju $*$ koja je definisana relacijom

$$m * n = |m - n| \qquad \text{za svako } m, n \in N.$$

77. Dokazati da su sve grupe reda p ($=$prost broj) među sobom izomorfne.

78. Dat je skup M kvadratnih nesingularnih matrica

$$\| a_{ij} \|_1^n \qquad (a_{ij} \text{ kompleksni brojevi})$$

za koje je

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Pokazati da skup M obrazuje grupu u odnosu na operaciju množenja matrica.

Rešenje. Ako su

$$A = \| a_{ij} \|_1^n, \quad B = \| b_{ij} \|_1^n$$

dve ma koje matrice iz skupa M, tada je

$$C = \| c_{ij} \|_1^n = AB = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right\|_1^n .$$

Zbir elemenata i-te vrste matrice C je

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} \right). \tag{2}$$

Na osnovu (1) je

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1.$$

Prema tome, skup M je zatvoren u odnosu na operaciju množenja matrica.

Za ma koje tri matrice A, B, C tipa $n \times n$ važi relacija

$$(AB)\, C = A\, (BC),$$

pa naravno i za slučaj kada one pripadaju skupu M.

U skupu M postoji jedinični element. To je matrica $E = \| \delta_{ij} \|_1^n$ (δ_{ij} *Kronecker*-ov simbol) čiji elementi takođe ispunjavaju uslov (1).

Pokažimo da $A \in M \Rightarrow A^{-1} \in M$. Stavimo $A = \| a_{ij} \|_1^n$, $A^{-1} = \| \alpha_{ij} \|_1^n$. Tada iz jednakosti $A^{-1} \cdot A = E$, prema (2), sleduje

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}.$$

Kako je

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 1 \quad (\text{jer } E, A \in M), \quad \text{biće} \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} = 1, \quad \text{pa } A^{-1} \in M.$$

Dakle, skup M zaista čini multiplikativnu grupu.

79. Operacija $*$ definisana je relacijom

$$a*b=\frac{ab}{a+b},$$

gde su a, b proizvoljni elementi skupa kompleksnih brojeva C sa ograničenjem $a\neq -b$.

Ako je a, b, $c\in C$, proveriti da li važe relacije:

$$\begin{aligned}
a*b&=b*a,\\
(a*b)*c&=a*(b*c),\\
a\,(b*c)&=(ab)*(ac),\\
(a*b)\,(c+d)&=(ac+ad)*(bc+bd),\\
&=(ac*bc)+(ad*bd),\\
(a+b)^{-1}&=\frac{1}{b}*\frac{1}{a},\\
a*0&=0.
\end{aligned}$$

Navesti uz kakva ograničenja važe navedene relacije.

Takođe proveriti relacije:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{A(x)*B(x)\}=\{A(x)*B(x)\}^2\left\{\frac{1}{A^2(x)}\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{B^2(x)}\frac{\mathrm{d}B(x)}{\mathrm{d}x}\right\}$$

$$=\frac{1}{\{A(x)+B(x)\}^2}\left\{B^2(x)\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}+A^2(x)\frac{\mathrm{d}B(x)}{\mathrm{d}x}\right\},$$

gde su $A(x)$ i $B(x)$ neprekidne funkcije promenljive x.

Navesti uslove koje moraju ispunjavati funkcije $A(x)$ i $B(x)$ da bi dve poslednje formule imale smisla.

Primedba. Navedena operacija $*$ uvedena je prilikom tretiranja jednog problema iz teorije električnih kola. Videti o ovome članak:

K. E. Erickson: A new operation for analyzing seriers-parallel networks (IRE Transactions on circuit theory, vol. 6, 1959, p. 124—126).

Takođe videti članak *Šestakova* u časopisu: *Журнал технической физики*, том 11, № 6, 1941, str. 532—539.

80. Na skupu realnih brojeva definisane su operacije $\oplus$ i $\odot$ pomoću jednakosti:

$$a\oplus b=a+b+1,\qquad a\odot b=a+b+ab.$$

Dokazati relacije:

1° $\quad |a\oplus b|\leqslant|a|\oplus|b|$,

2° $\quad |a\odot b|\leqslant|a|\odot|b|$,

3° $\quad a^{(2)}\oplus b^{(2)}\oplus c^{(2)}\geqslant a\odot b\oplus a\odot c\oplus b\odot c \qquad (x^{(2)}=x\odot x)$.

81. Ispitati da li skup S realnih matrica oblika $\begin{Vmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix}$ čini polje u odnosu na sabiranje i množenje matrica.

82. Na skupu realnih brojeva uočimo binarnu operaciju $*$ definisanu pomoću jednakosti:

$$a*b=f(b)\qquad \{f(x)\ \text{realna funkcija}\}.$$

Dokazati da je operacija $*$ levo-distributivna prema sebi samoj.

Odrediti u skupu C neprekidnih funkcija takvu funkciju $f(x)$ za koju je operacija $*$ asocijativna.

Ispitati da li i van skupa C postoje takve funkcije.

83. Neka je f bilo kakva funkcija koja vrši biunivoko preslikavanje skupa realnih brojeva R na skup R. Definišimo u R operacije $\oplus$ i $\odot$ pomoću jednakosti:

$$a \oplus b = f^{-1}\{f(a)+f(b)\},$$

$$a \odot b = f^{-1}\{f(a) \cdot f(b)\}.$$

Dokazati relaciju $(R, +, \cdot) \cong (R, \oplus, \odot)$.

84. Definišimo za polinom $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ na ma kakvom polju F $(a_0, a_1, \ldots, a_n \in F)$ „izvod" $p'(x)$ na sledeći način:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

Dokazati jednakosti:

1° $\{c\,p(x)\}' = c\,p'(x)$,

2° $\{p(x) + q(x)\}' = p'(x) + q'(x)$,

3° $\{p(x)\,q(x)\}' = p'(x)\,q(x) + p(x)\,q'(x)$,

4° $\{p^n(x)\}' = n\,p^{n-1}(x) \cdot p'(x)$.

85. Na skupu realnih brojeva definišu se operacije max i min pomoću jednakosti:

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & (a \geqslant b) \\ b & (b \geqslant a) \end{cases}; \quad \min(a, b) = \begin{cases} a & (a \leqslant b) \\ b & (b \leqslant a) \end{cases}.$$

1° Operacije max i min su komutativne i asocijativne. Distributivni zakon važi za sve parove ovih operacija (max, max), (max, min), (min, max) i (min, min).

2° Za ma koja tri broja a, b, c važi:

$$\min\{\max(a, b),\ \max(a, c),\ \max(b, c)\}$$
$$= \max\{\min(a, b),\ \min(a, c),\ \min(b, c)\}.$$

3° Bilo koji skup realnih brojeva čini semi-grupu u odnosu na svaku od operacija max i min. U kom slučaju svaka od tih semi-grupa ima jedinični element?

Dokazati navedene osobine.

Primedba. Videti o ovome članak:

D. S. Mitrinović: O operacijama max i min (Godišen zbornik na Filozofskiot fakultet na Univerzitot vo Skopje, Prirodno-matematički oddel, knjiga 3, 1950, № 4, str. 1—10).

86. Dokazati da skup matrica

$$\left\{ \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -a & a \end{Vmatrix} \right\} \quad (a \text{ kompleksan broj})$$

obrazuje grupu u odnosu na operacijn množenja matrica.

87. Definišimo na skupu R realnih brojeva binarne operacije $\oplus$, $\odot$, $*$ pomoću jednakosti

$$a \oplus b = a + b + 1, \quad a \odot b = a + b + a \cdot b, \quad a * b = (a \oplus b) \oplus (a \odot b).$$

1° Ispitati komutativnost i asocijativnost navedenih operacija.

2° Ispitati levu i desnu distributivnost operacije $\odot$ prema $\oplus$, operacije $\oplus$ prema $\odot$ i $*$ prema $*$.

3° Da li je $(R, +, \cdot)$ izomorfno sa $(R, \oplus, \odot)$?

4° Ako je $z^{(n)} = z \odot z \odot \cdots \odot z$, $z^{[n]} = z * z * \cdots * z$ (u oba slučaja $n \neq 1$ faktora), $z^{(1)} = z^{[1]} = z$, izvesti „binomne formule" $(a \oplus b)^{(n)}$, $(a * b)^{[n]}$.

5° Rešiti jednačine $x^{(n)} = 0$, $x^{[n]} = 0$.

6° Izraziti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n)}}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!}$$

pomoću elementarnih funkcija.

7° Uvedimo „determinante" slično običnim determinantama smenjujući u definiciji običnih determinata $+$ sa $\oplus$, $\cdot$ sa $\odot$ i $-$ inverznom operacijom operacije $\oplus$. Razviti

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a^{(2)} \\ 0 & b & b^{(2)} \\ 0 & c & c^{(2)} \end{vmatrix}.$$

88. Na skupu $S = \{a, b, c, d\}$ definisana je binarna operacija $*$ pomoću tablice

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Neka je f bilo koja permutacija u ovom skupu. Pomoću f i $*$ definišimo operaciju $\bigcirc$ na sledeći način:

$$x \bigcirc y = f^{-1}\{f(x) * f(y)\} \quad (x, y \in S).$$

1° Pokazati da su $(S, *)$ i $(S, \bigcirc)$ izomorfne grupe.

2° Izabrati permutaciju f različitu od $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ tako da operacije $*$ i $\bigcirc$ budu jednake.

3° Da li jednačina

$$x * b = c \bigcirc x \quad \left\{ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix} \right\}$$

ima rešenja?

89. Neka je $M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, $E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

1° Pokazati da je

(1) $$M^n = M^{n-2} + M^2 - E \quad (n \text{ prirodan broj } \geqslant 2).$$

2° Pokazati da skup S svih matrica oblika

$a_0 E + a_1 M + \cdots + a_n M^n$ $(n = 1, 2, \ldots;\ a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi) čini vektorski prostor na polju R realnih brojeva.

Odrediti dimenziju tog prostora.

Rešenje. 1° Polazeći od potencija:

$$M^2=\begin{Vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{Vmatrix},\quad M^3=\begin{Vmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{Vmatrix},\quad M^4=\begin{Vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{Vmatrix},\quad M^5=\begin{Vmatrix}1&0&0\\3&0&1\\2&1&0\end{Vmatrix},$$

naslućujemo da je

$$(2)\qquad M^{2k}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\k&1&0\\k&0&1\end{Vmatrix},\quad M^{2k+1}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\k+1&0&1\\k&1&0\end{Vmatrix}\qquad (k=1,2,3,\ldots).$$

Ove dve formule su tačne za $k=1$. Pretpostavimo sada da su one tačne za neko k. Kako je

$$M^{2k+2}=M^{2k}\cdot M^2=\begin{Vmatrix}1&0&0\\k&1&0\\k&0&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\k+1&1&0\\k+1&0&1\end{Vmatrix},$$

$$M^{2k+3}=M^{2k+1}\cdot M^2=\begin{Vmatrix}1&0&0\\k+1&0&1\\k&1&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\k+2&0&1\\k+1&1&0\end{Vmatrix},$$

izlazi da su formule (2) tačne za $k+1$ ako su tačne za k. Prema tome, formule (2) su tačne za svaki prirodan broj n.

Iz jednakosti

$$M^{2k}-M^{2k-2}=M^2-E,\qquad M^{2k+1}-M^{2k-1}=M^2-E\qquad (k=1,2,\ldots;\ M^0=E)$$

sleduje da je tvrđenje (1) zaista tačno kada je $n\,(\geqslant 2)$ prirodan broj.

2° Označimo sa $A, B, C, \ldots$ elemente skupa S. Skup S čini vektorski prostor nad poljem R, jer su ispunjeni uslovi:

I. $(S, +)$ ($+$ sabiranje matrica) je *Abel*-ova grupa;

II. Množenje skalara $\lambda\,(\in R)$ matricom $A\,(\in S)$ zadovoljava uslove

$$\lambda A\in S,\quad \lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A,\quad (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A,\quad \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,\quad 1A=A$$
$$(\lambda,\ \mu\ \text{skalari}).$$

Potražimo dimenziju prostora. Karakteristični polinom matrice M je

$$P(\lambda)=|M-\lambda E|=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)=-(\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1).$$

Prema *Cayley—Hamilton*-ovoj teoremi je $M^3=M^2+M-E$.

Odavde izlazi

$$M^4=(M^2+M-E)\cdot M=M^3+M^2-M=2M^2-E,$$
$$M^5=(2M^2-E)\cdot M=2M^3-M=2M^2+M-2E,$$

i uopšte

$$M^n=a_n M^2+b_n M+c_n E\qquad (a_n,\ b_n,\ c_n\in R),$$

što se dokazuje indukcijom.

Dakle, ma koji element skupa S je oblika $a_0E+a_1M+a_2M^2$ ($a_0, a_1, a_2\in R$), pa je dimenzija prostora 3, ukoliko E, M, M^2 nisu linearno zavisni. Da bismo ispitali linearnu zavisnost vektora E, M, M^2, potražimo minimalni polinom $p(\lambda)$ matrice M. Kako $p(\lambda)$ mora biti faktor polinoma $P(\lambda)$, u obzir za ispitivanje dolaze polinomi:

$$\lambda-1,\quad \lambda+1,\quad \lambda^2-1,\quad (\lambda-1)^2,\quad -P(\lambda).$$

Kako je $M-E\neq 0$, $M+E\neq 0$, $M^2-E\neq 0$, $(M-E)^2\neq 0$, biće

$$p(\lambda)=-P(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1,$$

pa jednakost oblika

$$\alpha E+\beta M+\gamma M^2=0\qquad (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0)$$

ne postoji, tj. E, M, M^2 su linearno nezavisni.

Primedba. Redigovano prema rešenju studenta *O. Šotića* koje je dao na pismenom ispitu iz predmeta *Matematičke metode u fizici* (Elektrotehnički fakultet u Beogradu, jun 1960).

PROJEKTIVNA GEOMETRIJA PROŠIRENE EUKLIDSKE RAVNI

Oznake i konvencije

1. *Tačke* su obeležene velikim kurzivnim slovima, na primer $A, B, \ldots, Y, Z$.
2. *Prave* su obeležene malim kurzivnim slovima, na primer $a, b, \ldots, q, r$.
3. AB znači *pravu* koja prolazi kroz tačke A i B, ili *duž* čije su krajnje tačke A i B.
4. $\overline{AB}$ je merni broj orijentisane duži AB.
5. $a \cdot b$ znači presek pravih a i b.
6. $(a \cdot b) \cdot C$ je oznaka za pravu koja spaja tačke $a \cdot b$ i C.
7. $(A, B; C, D)$ odnosno $(a, b; c, d)$ znači *dvojni odnos* kolinearnih tačaka A, B, C, D odnosno pravih a, b, c, d jednog pramena.
8. (ABC) odnosno (abc) je oznaka za determinantu čije su vrste homogene koordinate tačaka A, B, C odnosno pravih a, b, c.
9. Rečenica „Prave $a, b, \ldots$ seku prave $a', b', \ldots$ u tačkama $A, B, \ldots$" znači „Prave a i a' seku se u tački A, prave b i b' seku se u tački $B, \ldots$".
10. Rečenica „Prave $a, b, \ldots$ spajaju tačke $A, B, \ldots$ sa tačkama $A', B', \ldots$" znači „Prava a spaja tačke A i A', prava b spaja tačke B i $B', \ldots$".

I. GEOMETRISKA METODA

1. Pokazati da za četiri kolinearne tačke A, B, C, D važi identično

(1) $$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0.$$

Dokaz. Relaciju (1) možemo pisati u obliku

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{DB}} + \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} \cdot \overline{DB}} + 1 = 0,$$

ili

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = 1,$$

odnosno

(2) $$(B, C;\ A, D) + (B, A;\ C, D) = 1.$$

Pošto relacija (2) važi identično, identitet je i relacija (1).

2. Ako su a, b, c, d četiri prave jedne ravni koje prolaze kroz jednu tačku, važi identično

(1) $$\sin(ab)\sin(cd) + \sin(ac)\sin(db) + \sin(ad)\sin(bc) = 0.$$

Šta daje ovaj identitet u specijalnom slučaju, kad je $(cd) = \pi/2$?

Uputstvo. Relaciju (1) možemo pisati u obliku

$$(b, c;\ a, d) + (b, a;\ c, d) = 1.$$

U datom specijalnom slučaju imamo $(ac)=\alpha$, $(cb)=\beta$, $(ab)=\alpha+\beta$, $(ad)=\alpha+\pi/2$, $(bd)=-\beta+\pi/2$. Zamenom ovih vrednosti u (1) dobija se

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

3. Ako je AB dijametar kruga, a CD tetiva, normalna na AB, onda prave koje spajaju bilo koju tačku kruga sa A, B, C, D obrazuju harmonisku četvorku. Dokaz!

4. Ako su AP, BQ, CR visine trougla ABC, onda je četvorka pravih PQ, PR, PA, PB harmoniska.

Uputstvo. Harmonija sleduje iz osobina potpunog četvorotemenika $PCQS$, gde je S presek visina trougla.

5. Simetrala ugla kod A trougla ABC seče njegovu suprotnu stranicu u P. Q i R su ortogonalne projekcije tačaka B i C na AP. Pokazati da su tačke A, P, Q, R harmoniske.

Dokaz. Neka je D presek normale, postavljene na AP u A, sa BC. Onda je $AP\perp AD$, $\sphericalangle CAP=\sphericalangle PAB$, i zato $(AB, AC; AP, AD)=-1$, odakle sledi $(B, C; P, D)=(A, P; R, Q)=-1$, što je trebalo dokazati.

6. O je bilo koja tačka visine AD trougla ABC, E je presek BO i AC, a F presek CO i AB. Pokazati da je DA simetrala ugla EDF.

Dokaz. Iz osobina potpunog četvorotemenika $ABCO$ sledi $(DA, DB; DE, DF)=-1$. Pošto je $DA\perp DB$, sledi da je, zaista, DA simetrala ugla EDF.

7. Pokazati da visine AA', BB', CC' nepravouglog trougla ABC polove uglove trougla $A'B'C'$.

Dokaz. Neka je H ortocentar trougla ABC. Za potpuni četvorotemenik $ABCH$ je $A'B'C'$ dijagonalni trougao. Zato je, na primer, $(A'B', A'C'; A'A, A'B)=-1$. A budući da je $A'A\perp$ $\perp A'B$, važi $\sphericalangle B'A'A=\sphericalangle AA'C'$, tj. AA' je simetrala ugla pri A' u trouglu $A'B'C'$. Po analogiji sledi da su BB', CC' simetrale uglova pri B' odnosno C'.

8. Ako su L, M, N sredine stranica BC, CA, AB trougla ABC, onda je četvorka pravih LM, LN, LA, LB harmoniska.

Uputstvo. Prave LM, LN, LA, LB preseći pravom MN.

9. Tangente nekog kruga sa dodirnim tačkama P i Q seku se u A, a prečnik BC kruga prolazi kroz A. Pokazati da tačke A, Q razdvajaju harmoniski par tačaka R, S u kojima pravu AQ seku prave PB i PC. Kakav se stav dobija u specijalnom slučaju kada je jedna od tačaka R, S beskrajna?

Dokaz. Zbog $PS\perp PR$ i $\sphericalangle QPS=\sphericalangle SPA$ (stav o periferiskim uglovima) imamo, zaista,

$$(PA, PQ; PR, PS)=(A, Q; R, S)=-1.$$

U specijalnom slučaju, kada je tačka R beskrajna, četvorougao $BPAQ$ je paralelogram. Zbog simetrije u odnosu na AB, ovaj paralelogram je romb. Iz $\sphericalangle PBQ=\sphericalangle PQA$ sledi da je taj romb sastavljen od dva podudarna jednakostranična trougla PBQ i QAP. Pošto je $(A, Q; R, S)=-1$, a R je beskrajna tačka, sledi da je S sredina duži AQ. AS je zato visina jednakostraničnog trougla ABQ, a ona prolazi kroz tačku C datog kruga. Prema tome: *Ako dve stranice jednog jednakostraničnog trougla dodiruju jedan krug u dva temena, onda se njegove visine seku na tom krugu.*

10. U krugu Γ neka je HK dijametar, a AB tetiva, normalna na HK. Ako je P proizvoljna tačka na Γ, onda prave HP i KP seku AB u dvema tačkama P_1 i P_2 koje razdvajaju harmoniski par tačaka A, B.

Dokaz. H i K su sredine dva luka AB na krugu Γ; znači, prave PH i PK su simetrale uglova između normalnih pravih PA, PB. Zato je $(PA, PB; PP_1, PP_2) = -1$, ili $(A, B; P_1, P_2) = -1$, što je trebalo dokazati.

11. Pokazati da iz $(A, B; X, Y) = (A', B'; X', Y')$, $(A, B; Y, Z) = (A', B'; Y', Z')$ sledi $(A, B; X, Z) = (A', B'; X', Z')$.

12. Dat je pravilni petougao $ABCDE$ sa centrom O. Prava OA seče stranicu CD u F, a dijagonalu BE u G. Pokazati da par tačaka F, G razdvaja harmoniski par tačaka O, A.

Uputstvo. Proveriti relaciju $2/\overline{OA} = 1/\overline{OG} + 1/\overline{OF}$.

13. Ako se dva kruga seku ortogonalno, onda oni svaki njihov dijametar seku u četiri harmoniske tačke.

Uputstvo. Koristiti stepen sredine proizvoljnog dijametra jednog kruga u odnosu na drugi krug.

14. Dat je jednakokraki trougao ABC. Na njegovoj osnovici BC je izabrana tačka D tako da je $\overline{CD} = \overline{BC}$ i C između B i D; na AB su izabrane tačke E i F tako da bude $\overline{AE} = \overline{AB}/2$, $\overline{AF} = \overline{AB}/3$. Prave DE i DF seku AC u P i Q; EQ i FP seku se u L, a DL i AB u M. Pokazati da je $\overline{EM} = \frac{1}{10} \cdot \overline{AB}$.

Uputstvo. Proveriti da tačke A, M, E, F obrazuju harmonisku četvorku, a zatim primeniti relaciju $2/\overline{AM} = 1/\overline{AE} + 1/\overline{AF}$.

15. Dat je krug k s dijametrom AB i prava p, normalna na AB. Prava AM, gde je M proizvoljna tačka kruga k, seče pravu p u P, a PB seče k još u M'. Pokazati da prave MM' prolaze kroz jednu fiksnu tačku.

Rešenje. MB i AB neka seku p u Q i C. Visine BC, PM trougla BPQ seku se u A. Zato i treća visina prolazi kroz A; a pošto je ona normalna na PB, ta visina je QM'. Tačke A, M', Q leže, prema tome, na jednoj pravoj. Presek D pravih MM', AB i tačka C razdvajaju harmoniski par tačaka A, B (posmatrati potpuni četvorotemenik $PQMM'$). Pošto su tačke A, B, C stalne, stalna je i tačka D, čime je tvrdnja dokazana.

16. Na stranici BC trougla ABC uzeta je tačka P, a Q je njezina harmoniska tačka u odnosu na B, C. Odrediti geometrisko mesto centra O kruga k, opisanog oko trougla APQ, ako se P kreće po BC.

Rešenje. Neka je M sredina duži BC; onda je $\overline{MB}^2 = \overline{MP} \cdot \overline{MQ}$. Ako je D druga presečna tačka kruga k sa AM, dobijamo za stepen tačke M u odnosu na k: $\overline{MA} \cdot \overline{MD} = \overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MB}^2$. Odavde sleduje, budući da je MA i MB nepromenljivo, da je tačka D fiksna. Krug k prolazi kroz fiksne tačke A i D. Traženo geometrisko mesto je simetrala duži AD.

17. Kroz teme A paralelograma $ABCD$ povučena je prava koja dijagonalu BD seče u E, a stranice BC, CD u tačkama F, G. Dokazati relaciju

$$1/\overline{AE} = 1/\overline{AF} + 1/\overline{AG}.$$

Uputstvo. Paralela sa BD kroz C seče AG u H. Četvorka tački A, H, F, G je harmoniska.

18. Odrediti potreban i dovoljan uslov da: a) koreni jednačine ax^2+2bx+ $+c=0$ razdvajaju harmoniski korene jednačine $a'x^2+2b'x+c'=0$; b) prave $ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2=0$ razdvajaju harmoniski prave $a'x_1^2+2b'x_1x_2'+c'x_2^2=0$.

Rezultat. U oba slučaja: $ac'+a'c=2bb'$.
Dualizovati slučaj b).

19. Tačke A_1, A_2, A_3 leže na pravoj l, a tačke B_1, B_2, B_3 na pravoj m. Prave A_1B_2, A_2B_1 seku se u X_3; A_3B_1, A_1B_3 u X_2; A_2B_3, A_3B_2 u X_1. Prave A_1B_1, A_2B_2 seku se u Y_3; A_2B_3, A_3B_1 u Y_2; A_3B_2, A_1B_3 u Y_1. Pokazati: Ako su tačke X_1, X_2, X_3 kolinearne, onda su kolinearne i tačke Y_1, Y_2, Y_3.

Uputstvo. Posmatrati trougle $A_1X_2B_1$ i $B_2X_1A_2$, i primeniti *Desargues*-ovu teoremu.

20. A, B, C, D su četiri tačke, od kojih bilo koje tri ne leže na istoj pravoj. AB, CD seku se u E; AC, BD u F; AD, BC u G; AC, EG u K; AB, DK u L; AD, EF u M. Pokazati da su tačke C, L, M kolinearne.

Uputstvo. Posmatrati uređene trojke tačaka K, G, E i B, F, D, te primeniti *Pappus*-ovu teoremu.

21. B, C su tačke na pravoj LA, a S' tačka na nekoj drugoj pravoj LS. $SB, S'A$ seku se u X; $SA, S'B$ u X'; $SC, S'B$ u Y; $SB, S'C$ u Y'. Pokazati da se prave $XY, X'Y', LA$ seku u jednoj tački.

Uputstvo. Posmatrati uređene trojke pravih SA, SB, SC i $S'C, S'B, S'A$ i primeniti stav dualan *Pappus*-ovoj teoremi.

22. Tačke A, B, Q, V leže na pravoj. Jedna prava kroz V seče jednu pravu kroz Q u O. X je promenljiva tačka na OV. AX i QO seku se u P; BP, QX u Y. Pokazati da Y leži na jednoj fiksnoj pravoj kroz O.

Uputstvo. Posmatrati trougle $X_1Y_1P_1$ i $X_2Y_2P_2$, gde X_1, X_2 znače dva proizvoljna položaja tačke X, a Y_1, Y_2 i P_1, P_2 odgovarajuće tačke tačaka Y i P. Primeniti stav dualan *Desargues*-ovoj teoremi.

23. Date su paralelne prave p, q i tačka T njihove ravni. Samo pomoću lenjira konstruisati paralelu sa p i q kroz T.

Rešenje. I. m e t o d a. Koristiti *Desargues*-ov stav: Nacrtati trougao TPQ, čije teme P leži na p, a Q na q. Na p uzeti proizvoljnu tačku P_1, a na q tačku Q_1. Treba odrediti tačku T_1 tako da trougli TPQ i $T_1P_1Q_1$ budu perspektivni. Kroz tačku $PQ\cdot P_1Q_1$ povlačimo proizvoljnu pravu r i uzimamo je za perspektivnu osu. Onda je T_1 presek pravih $(TP\cdot r)\cdot P_1$ i $(TQ\cdot r)\cdot Q_1$. Tražena paralela je TT_1.

II. m e t o d a. Koristiti pojam polare para pravih: Jedna proizvoljna prava kroz T seče p u P_1, a q u Q_2, a jedna druga ih seče u P_2 i Q_1. Povlačimo proizvoljnu pravu kroz presek $P_1Q_1\cdot P_2Q_2$ koja prave p, q seče u P_3 i Q_3. Polara tačke P u odnosu na par p, q je prava $T\cdot(P_2Q_3\cdot P_3Q_2)=r$, koja zato prolazi kroz $p\cdot q$. Prava r je tražena prava.

III. m e t o d a. Konstrukciju kod II metode možemo objasniti i primenom perspektivnosti. Za perspektivnost tačaka između p i q, definisanu sa $P_1\to Q_1$, $P_2\to Q_2$ (oznake kao kod II metode), treba konstruisati kolineacisku osu.

24. U ravni su date dve paralelne prave p, q i tačke A, B, A' na p. Linearnom konstrukcijom odrediti na p tačku B' tako da bude $\overline{AB}=\overline{A'B'}$.

Rešenje. Translacija prave p, definisana sa $A\to A'$, je parabolična projektivnost π sa dvojnom tačkom u beskonačnosti. Treba konstruisati tačku B' koja u π odgovara tački B. Na q izabiramo dve tačke S, S'; kroz tačku $SA\cdot S'A'$ vučemo paralelu r sa p i q; onda je $B'=[(SB\cdot r)\cdot S']\cdot p$. Paralelu r treba konstruisati samo pomoću lenjira (videti prethodni zadatak).

25. U dati trougao ABC upisati trougao XYZ čije stranice YZ, ZX, XY prolaze kroz tri date kolinearne tačke P, Q, R.

Rešenje. Kroz P povlačimo proizvoljnu pravu koja seče AB u Z_1, a AC u Y_1. Neka je $X_1 = RY_1 \cdot QZ_1$. Traženi trougao i trougao $X_1Y_1Z_1$ su perspektivni, jer im se odgovarajuće stranice seku u kolinearnim tačkama P, Q, R. Prave XX_1, YY_1, ZZ_1 seku se, prema tome, u jednoj tački, koja je očigledno tačka A. Teme X traženog trougla dobija se kao presek pravih AX_1 i CB.

26. Konstruisati trougao $X_1X_2X_3$ čije stranice prolaze kroz tri date tačke A_1, A_2, A_3 tako da njegova temena leže na datim pravima p_1, p_2, p_3 koje se seku u jednoj tački O.

Rešenje. Kroz A_1 povlačimo proizvoljnu pravu koja seče p_2, p_3 u Y_2, Y_3. Prava Y_2A_3 neka seče p_1 u Y_1. Traženi trougao $X_1X_2X_3$ i trougao $Y_1Y_2Y_3$ su perspektivni, jer se prave X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 seku u jednoj tački (u O). Zato su preseci odgovarajućih stranica, tj. X_2X_3, Y_2Y_3 (tačka A_1); X_1X_2, Y_1Y_2 (tačka A_3) i X_3X_1, Y_3Y_1 kolinearni. Zato je presek pravih X_3X_1, Y_3Y_1 ona tačka Z u kojoj se seku A_3A_1 i Y_3Y_1. Prava ZA_2 seče p_1, p_2 u traženim temenima X_1, X_3, dok je $X_2 = p \cdot X_1A_3$.

27. Dva data perspektivna pramena pravih sa centrima O, O' i perspektivnom osom p_0 preseći dvema pravima p, p' tako da dobiveni nizovi budu perspektivni.

Rezultat. Prave p, p' treba da se seku na p_0 ili na OO'.

28. Svaka od tri stranice promenljivog trougla ABC prolazi kroz jednu od tri fiksne kolinearne tačke D, E, F. Ako se A i B kreću po dvema fiksnim pravima a i b, odrediti geometrisko mesto tačke C. Zatim postaviti dualni problem!

Rešenje. Preslikavanje $\pi : A \to B$ između tačaka pravih a i b je projektivnost; zato je i preslikavanje $\Pi : FA \to EB$ između pravih pramenova sa centrima u F i E projektivnost. Prava EF odgovara u Π sama sebi; Π je, znači, *perspektivnost*. Geometrisko mesto tačaka C je, prema tome, jedna prava p. Pošto u projektivnosti Π pravoj FG odgovara EG, gde je $G = a \cdot b$, to p prolazi kroz G.

Traženo geometrisko mesto je prava koja prolazi kroz presek pravih a i b.

D u a l n o: Ako se temena nekog promenljivog trougla kreću svako po jednoj od tri kopunktualne prave, a dve stranice trougla prolaze kroz po jednu stalnu tačku, onda i treća stranica prolazi kroz neku fiksnu tačku koja je kolinearna sa prve dve.

29. U ravni je data tačka S, dve orijentisane prave p, p', a na njima tačka A odnosno A'. Kroz S povući pravu koja će prave p, p' seći u tačkama X, X', za koje će odnos $\overline{AX} : \overline{A'X'}$ imati datu vrednost r.

Rešenje. Na pravoj p izabiremo jednu proizvoljnu tačku B, a na pravoj p' onu tačku B' da bude $\overline{AB} : \overline{A'B'} = r$. Parovi tačaka A, A'; B, B' određuju *sličnost* $\sum$ između p i p'. Tražene prave su dvojne prave u projektivnosti pramena pravih sa centrom S, u kojoj jedna drugoj odgovaraju prave koje projiciraju odgovarajuće tačke u $\sum$.

30. A, B, C su nekolinearne tačke. Jedna prava seče BC, CA, AB u A_1, B_1, odnosno C_1. A' je harmoniski konjugovana sa A_1 u odnosu na B i C; a slično su definisane tačke B', C' na CA odnosno AB. Pokazati: a) prave AA', BB', CC' seku se u jednoj tački; b) obratna teorema je i dualna.

Dokaz. a) Četvorke A, B, C', C_1 i A, C, B', B_1 su, po pretpostavci, harmoniske, znači $(A, B; C', C_1) = (A, C; B', B_1)$. Sleduje da postoji projektivnost kod koje $A \to A$, $B \to C$, $C' \to B'$, $C_1 \to B_1$, koja je zbog $A \to A$ *perspektivnost*. Znači $B'C'$ prolazi kroz A_1. Slično se pokazuje da $C'A'$ prolazi kroz B_1, a $A'B'$ kroz C_1. Znači, prave BC, CA, AB seku prave $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ u kolinearnim tačkama A_1, B_1, C_1. Prema dualnom stavu *Desargues*-ove teoreme biće onda prave AA', BB', CC' kopunktualne (seku se u jednoj tački).

31. Odrediti geometrisko mesto onih tačaka ravni iz kojih se dva projektivna niza te ravni projektuju u dva pramena koja su u involuciji. Zatim formulisati dualni rezultat.

Rešenje. Ako je S tražena tačka, a A, A' jedan par korespondentnih tačaka date projektivnosti Π posmatranih nizova, onda su prave SA, SA' konjugovane u jednoj involuciji. Zbog toga su preseci B, B' pravih SA', SA sa pravima na kojima leže posmatrani nizovi, korespondentni kod Π. Dakle S leži u preseku pravih AB', $A'B$, asociranih u Π, znači na kolineaciskoj osi. Traženo geometrisko mesto je *kolineaciska osa* date projektivnosti Π.

32. Kod dva zadata projektivna pramena odrediti onaj par korespondentnih pravih koje su paralelne.

Rešenje. Jedan pramen paralelno preneti tako da posle prenosa oba pramena imaju isti centar, a onda kod projektivnosti tih pramenova odrediti dvojne prave.

33. Date su granične tačke I', J jedne projektivnosti Π između dve prave koje se poklapaju, njihova sredina O, kao i njoj korespondentna tačka O'. Iz međusobnog položaja datih tačaka zaključiti kakav tip projektivnosti je Π.

Rešenje. Za proizvoljan par tačaka X, X', korespondentnih u Π, važi $\overline{XJ}\cdot\overline{X'I'}=\text{const}$. Ako je tačka M dvojna tačka u Π, sleduje odavde $\overline{MJ}\cdot\overline{MI'}=\overline{OJ}\cdot\overline{O'I'}$, odakle $(\overline{MO}+\overline{OJ})(\overline{MO}+\overline{OI'})=\overline{OJ}\cdot(\overline{O'O}+\overline{OI'})$ ili, zbog $\overline{OJ}=-\overline{OI'}$, $(\overline{MO}+\overline{OJ})(\overline{MO}-\overline{OJ})=\overline{OJ}\cdot(\overline{O'O}-\overline{OJ})$, što daje $\overline{OM}^2=\overline{OJ}\cdot\overline{O'O}$. Dvojna tačka M postoji samo onda kada je $\overline{OM}^2$ pozitivno. Projektivnost Π je, znači, hiperbolična ili eliptična prema tome da li je O u unutrašnjosti konačne duži JO' ili van nje, a parabolična je u slučaju kada je $O\equiv O'$. Slučaj $O'\equiv J$ nije moguć.

34. Konstruisati nepokretne (dvojne) tačke jedne projektivnosti Π prave p u sebe, kod koje su zadate granične (bežne) tačke I', J i slika O' sredine O konačne duži $I'J$.

Rešenje. Za dvojnu tačku M važi $\overline{OM}^2=\overline{OJ}\cdot\overline{O'O}$ (videti prethodni zadatak). Ako je Π hiperbolična projektivnost, O je u unutrašnjosti konačne duži JO'. Konstrukcija se svodi na određivanje duži $MO=ON$, tj. geometriske sredine duži OJ i $O'O$.

35. Kroz datu tačku O povući pravu koja dva data projektivna niza p, p' seče u korespondentnim tačkama.

Rešenje. Neka je M, M' jedan korespondentan par tačaka. Problem će biti rešen ako se prave OM, OM' poklapaju. Treba, znači, odrediti dvojne prave u projektivnosti pramena sa zajedničkim centrom O, kod koje su parovi pravih OM, OM' korespondentni.

36. Na jednoj pravoj p je data tačka M, a na drugoj nekoj pravoj p' — tačka M'. Kroz datu tačku O povući transverzalu, koja će prave p, p' seći u tačkama X, X' tako da bude: a) $\overline{MX}+\overline{M'X'}=k$; b) $\overline{MX}\cdot\overline{M'X'}=k$; c) $\overline{MX}/\overline{M'X'}=k$, gde je k data konstanta. Prave p, p' su orijentisane i na svakoj je izabrana merna jedinica za dužinu.

Rešenje. Ove *Apollonios*-ove probleme rešićemo primenom preslikavanja $X\to X'$ tačaka prave p u tačke prave p', koje je u sva tri slučaja projektivna korespondencija. Tražene prave su dvojne prave projektivnih pramenova sa zajedničkim centrom O kod kojih $OX\to OX'$. Svaka projektivnost je zadata sa tri para korespondentnih elemenata. Zato, u sva tri slučaja, treba izabrati tri proizvoljna korespondentna para tačaka X_1, X_1'; X_2, X_2'; X_3, X_3', kao na primer:

a) Za $X=X_1$ izabiramo tačku M; onda je tačka $X'=X_1'$ određena sa $\overline{M'X_1'}=k$. Za $X'=X_2'$ izabiramo tačku M'; onda je tačka $X=X_2$ određena sa $\overline{MX_2}=k$. Za $X=X_3$ izabiramo beskrajnu tačku X_∞ prave p; onda je X_3' beskrajna tačka X'_∞ prave p'. Projektivnost $X\to X'$ *je sličnost.*

b) Za tačke X_1, X_2, X_3 izabiramo tačke određene sa: $X_1=M$, $X_2=X_\infty$, $\overline{MX_3}=1$; onda je: $X_1'=X_\infty'$, $X_2'=M'$, $\overline{M'X_3'}=k$.

c) $X_1=M$, $X_1'=M'$; $X_2=X_\infty$, $X_2'=X_\infty'$; X_3, X_3' izabiramo tako da bude $\overline{MX_3}=k$, $\overline{M'X_3'}=1$. Preslikavanje $X \to X'$ je *sličnost*.

37. Zadate su dve prave p, q i dve tačke P_1, P_2 jedne ravni. Konstruisati duž sa jednom krajnjom tačkom na p, a drugom na q, koja će se od P_1 i P_2 videti pod datim uglovima α_1, α_2.

Rešenje. Na p izabiramo proizvoljnu tačku M i konstruišemo uglove $\alpha_1=\sphericalangle MP_1M_1$, $\alpha_2=\sphericalangle MP_2M_2$, gde su M_1, M_2 preseci drugih krakova uglova sa q. Za svaki položaj tačke M na p dobijamo po jedan par tačaka M_1, M_2 na q. Treba M izabrati tako da bude $M_1=M_2$.

Preslikavanje $M_1 \to M_2$ tačaka prave q u sebe je projektivnost. Zašto? Treba izabrati tri proizvoljna položaja tačke M, čime dobijamo tri korespondentna para tačaka projektivnosti, koja je time određena. *Steiner*-ovom konstrukcijom određujemo onda dvojne tačke te projektivnosti. To su krajnje tačke traženih duži na pravoj q.

38. U dati trougao ABC upisati paralelogram date površine, kome dve stranice leže na AB, AC, a jedno teme na BC.

Rešenje. Konstruišemo jedan proizvoljan paralelogram date površine, kome dve stranice leže na AB, AC. Njegova temena na AB, AC — različna od A — neka su B_1 odnosno C_1. One stranice ovog paralelograma koje su paralelne sa AB, AC, a ne prolaze kroz A, neka seku pravu BC u M odnosno M'. Za svaki ovako konstruisani paralelogram dobijamo po jedan par tačaka B_1, C_1. Pošto su površine ovih paralelograma jednake među sobom, imamo

$$\overline{AB_1}\cdot\overline{AC_1}=\text{const},$$

odakle sledi da je preslikavanje $B_1 \to C_1$ tačaka prave AB u tačke prave AC projektivnost, u kojoj je tačka A granična za obe prave. Ako ove projektivne nizove na AB, AC projiciramo iz beskrajnih tačaka pravih AC, odnosno AB na pravu BC, sledi da je preslikavanje $M \to M'$ tačaka prave BC u sebe neka projektivnost π; a u toj projektivnosti su tačke B, C granične, tj. tačka koja se preslikava u beskonačnu i tačka koja je slika beskonačne tačke I_∞ prave BC. Projektivnost π je, prema tome, određena korespondentnim parovima tačaka: M, M'; B, I_∞; I_∞, C. Za ovu projektivnost π treba odrediti dvojne tačke; to su ona temena traženih paralelograma koja leže na BC.

39. Data su dva projektivna pramena pravih. Konstruisati one prave jednog od njih koje sa svojim korespondentnim pravama zahvataju dati ugao α.

Rešenje. Ako prameni nemaju isti centar, prenosimo jedan od njih paralelno samom sebi tako da mu se centar posle prenosa poklapa sa centrom S drugog. Zatim okrenemo oko S jedan od pramenova za dati orijentisani ugao α. Između okrenutog i neokrenutog pramena postoji projektivna korespondencija, čiji dvojni zraci pretstavljaju rešenje problema.

40. U ravni su data dva projektivna niza p, p' i prava p_0 koja ne prolazi kroz presek pravih p, p'. Naći centre S, S' od kojih se p, p' projiciraju pomoću dva perspektivna pramena čija je perspektivna osa p_0.

Rešenje. Neka su M, N' preseci prave p_0 sa p odnosno sa p', M'—slika od M pri datoj projektivnosti, a N—tačka čija slika je N'. Ako je A, A' bilo koji korespondentni par, onda je $S=NN'\cdot AA'$, $S'=MM'\cdot AA'$. Postoji bezbroj rešenja.

41. Na datoj pravoj p konstruisati cikličnu projektivnost sa periodom 3.

Rešenje. Na p izabiramo tri proizvoljne tačke A, B, C i posmatramo projektivnost π između tačaka prave p, definisanu sa: $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$. Za projektivnost π^3 važi onda: $A \to A$, $B \to B$, $C \to C$; ona ima, dakle, tri dvojne tačke, pa je stoga identitet. Projektivnost π je, prema tome, ciklična i ima periodu 3.

42. Pokazati da se svaka eliptična projektivnost Π neke prave p u sebe može smatrati kao preslikavanje, kod koga su korespondentne tačke preseci krakova jednog ugla konstantne veličine koji rotira u svojoj ravni oko svog temena.

Dokaz. Neka su J, I' bežne tačke kod Π, O — njihova sredina, a O' — slika od O. Sa korespondentnim parovima tačaka I_∞, I'; O, O'; J, J'_∞ projektivnost Π je jednoznačno određena. Na krugu čiji je dijametar $I'O'$ izabiramo tačku S tako da je $SO \perp p$. Projektovanjem datih projektivnih nizova prave p iz tačke S dobijamo projektivnost Φ_1 u pramenu pravih sa centrom S. Parovi pravih SI_∞, SI'; SO, SO'; SJ, SJ'_∞ su korespondentni kod Φ_1. Elementarno geometriski se pokazuje lako da su uglovi koje zatvaraju ovi parovi pravih jednaki. Znači ovi parovi su korespondentni i kod rotacije Φ_2 za ugao $\alpha = \sphericalangle(SO, SO')$ oko S. Rotacija je projektivnost, a projektivnost je jednoznačno određena sa tri para korespondentnih elemenata. Prema tome je $\Phi_1 = \Phi_2$, što dokazuje teoremu.

43. U jednodimenzionoj formi postoji projektivnost Π sa dvojnim elementima M, N, kod koje datim elementima A, B odgovaraju dati elementi A', B', onda i samo onda kada su tri para elemenata M, N; A, B'; A', B konjugovani u jednoj involuciji.

Dokaz. Za $M \neq N$ teorema sleduje iz $(M, N; A, B) = (M, N; A', B') = (N, M; B', A')$.

Za $M = N$, tj. ako je projektivnost Π parabolična, sleduje da je u involuciji I, u kojoj su A, B' i A', B konjugovani parovi, element M dvojan. Jer, kad bi u I bilo $M \rightarrow N \neq M$, onda bi Π, prema gornjem, bila hiperbolična projektivnost. Obratno, ako je M dvojni element u I, projektivnost Π je parabolična. Kad bi naime postojao još jedan dvojni element $N (\neq M)$ u Π, par M, N bio bi konjugovan u I, protivno pretpostavci da je M dvojni element u I.

44. Jedna involucija je data sa dva para konjugovanih tačaka A, A'; B, B'. Konstruisati: a) centar involucije, b) konjugovanu tačku jedne date tačke C — ako je osim upotrebe lenjira dozvoljeno vući još i paralelne prave.

Rešenje. a) Kroz A i kroz B' povlačimo dve proizvoljne paralelne prave, a kroz B i A' dve druge paralelne prave. Nacrtane prave kroz A i B neka se seku u P, a one kroz tačke A', B' — u Q. Presek O pravih PQ i AB je *centar* involucije. Zaista, iz sličnosti trouglova imamo

$$\overline{OP} : \overline{OQ} = \overline{OA} : \overline{OB'} = \overline{OB} : \overline{OA'}, \quad \text{ili} \quad \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'},$$

odakle sleduje da je O centar.

b) Kroz A' povlačimo paralelu sa CP do preseka R sa PQ. Paralela sa PA kroz R seče AB u traženoj tački C'.

45. Ako su dva para suprotnih stranica potpunog četvorotemenika ortogonalni, onda je i njegov treći par suprotnih stranica ortogonalan. Kome stavu iz geometrije trougla je ekvivalentna ova teorema?

Dokaz. Parovi suprotnih stranica potpunog četvorotemenika seku beskrajnu pravu p_∞ u parovima tačaka koji su konjugovani u istoj involuciji. Ako su dva para stranica ortogonalna, oni određuju na p_∞ apsolutnu involuciju, čije konjugovane parove tačaka određuju uzajamno ortogonalni pravci. Zato je i treći par suprotnih stranica ortogonalan, što je trebalo dokazati.

Teorema je ekvivalentna stavu da se visine u trouglu seku u istoj tački.

46. Pokazati da je relacija $\overline{AB'} \cdot \overline{BC'} \cdot \overline{CA'} + \overline{A'B} \cdot \overline{B'C} \cdot \overline{C'A} = 0$ potreban i dovoljan uslov za to da parovi tačaka A, A'; B, B'; C, C' budu konjugovani u istoj involuciji.

Uputstvo. Stav izlazi iz $(A, B; A', C') = (A', B'; A, C)$.

47. Parove suprotnih stranica potpunog četvorotemenika seče jedna prava u parovima tačaka A, A'; B, B'; C, C'; pokazati da važi

$$\overline{AB'} \cdot \overline{BC'} \cdot \overline{CA'} + \overline{A'B} \cdot \overline{B'C} \cdot \overline{C'A} = 0.$$

Uputstvo. Parovi A, A'; B, B'; C, C' su konjugovani u istoj involuciji.

48. Ako je $ABCD$ kvadrat, a PX, PY paralele sa AB, BC, onda su parovi pravih PA, PC; PB, PD; PX, PY konjugovani u istoj involuciji.

Uputstvo. Primeniti *Desargues*-ov stav za potpuni četvorostranik.

49. H, H' su dve tačke u ravni trougla ABC. Prave BC, CA, AB seku prave HA, HB, HC u tačkama P, Q, R, a stranice $H'A, H'B, H'C$ u P', Q', R'. Prave QR, $Q'R'$ seku BC u L, L'. Pokazati da su parovi L, L'; P, P'; B, C konjugovani u jednoj involuciji.

Dokaz. Četvorke tačaka $B, C; L, P$ i $B, C; L', P'$ su harmoniske (posmatrati potpune četvorotemenike $ARHQ$ i $AR'H'Q'$). Prema tome, B i C su dvojne tačke u involuciji, u kojoj su parovi L, P i L', P' konjugovani. Odavde sleduje (zad. 43) da su parovi B, C; L, L'; P, P' konjugovani u jednoj involuciji, što je trebalo dokazati.

50. Konstruisati dvojne elemente M, N projektivnosti jednodimenzione forme u sebe, kod koje datim elementima A, B, C odgovaraju respektivno elementi A', B', C'.

Rešenje. Parovi M, N; A, B'; A', B su konjugovani u jednoj involuciji I_1, a parovi M, N; A, C'; A', C u jednoj involuciji I_2 (vidi zadatak 43). Treba, znači, konstruisati par elemenata koji su konjugovani u obe involucije I_1, I_2.

51. Na datoj pravoj p odrediti paraboličnu projektivnost, u kojoj su A, A'; B, B' dva data para korespondentnih elemenata.

Rešenje. Dvojni element tražene projektivnosti je jedan od dvojnih elemenata u involuciji, u kojoj su parovi A, B'; A', B konjugovani (zad. 43). Problem ima dva rešenja ili nijedno — prema tome da li se parovi A, A' i B, B' razdvajaju ili ne.

52. U datoj eliptičkoj involuciji konstruisati onaj konjugovani par elemenata koji dati konjugovani par razdvaja harmoniski.

Rešenje. Neka je A, A' dati konjugovani par. Posmatrajmo jednu drugu, tačno određenu involuciju, u kojoj su A, A' dvojni elementi. Ako je X, X' bilo koji par konjugovanih elemenata u ovoj involuciji, važi $(A, A'; X, X') = -1$. Prema tome, traženi par elemenata je zajednički konjugovani par u datoj i u sada konstruisanoj involuciji. Pokazati da ovaj par uvek postoji (tj. da je uvek realan).

53. Pokazati da su projekcije temena trougla iz date tačke njegove ravni na pravu p, koja ne prolazi ni kroz jedno teme, konjugovane u jednoj involuciji I sa presecima te prave sa suprotnim stranicama trougla. Formulisati i dokazati obratnu teoremu. Kako glase dualne teoreme? Koji stav za trougao sleduje iz obratne teoreme, ako je p beskrajna prava, a I apsolutna involucija? A koji stav dobijamo iz teoreme dualne obratnoj teoremi, ako je involucija I u pramenu ortogonalna?

Dokaz. Stav izlazi direktno iz teoreme da prava seče suprotne stranice potpunog četvorotemenika u korespondentnim tačkama jedne involucije.

54. U ravni su data dva trougla $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$. Kroz tačke A_1, B_1, C_1 povlačimo paralele a_2, b_2, c_2 sa pravima B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2, a kroz tačke A_2, B_2, C_2 paralele a_1, b_1, c_1 sa pravima B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Pokazati: ako se a_2, b_2, c_2 seku u jednoj tački, onda to važi i za a_1, b_1, c_1.

Dokaz. Neka se a_2, b_2, c_2 seku u jednoj tački S_1. Smerovi pravih $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ su onda smerovi pravih $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, A_1S_1, B_1S_1, C_1S_1$, dakle smerovi šest stranica potpunog četvorotemenika $A_1C_1B_1S_1$. Beskrajna prava seče parove suprotnih stranica četvorotemenika B_1C_1, A_1S_1; A_1C_1, B_1S_1; C_1S_1, B_1A_1 u parovima, konjugovanim u jednoj involuciji J. Smerovi pravih a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 su dakle konjugovani u J. Iste smerove imaju suprotne stranice potpunog četvorotemenika $A_2B_2C_2S_2$, gde $S_2 = a_1 \cdot b_1$; stranica C_2S_2 ima dakle smer prave c_1, znači $C_2S_2 = c_1$. To dokazuje teoremu.

55. Krugovi čiji su dijametri dijagonale jednog potpunog četvorostranika pripadaju jednom pramenu.

Dokaz. Iz teoreme, dualne teoremi za potpuni četvorotemenik, sleduje: Ako iz jedne tačke ravni projektujemo suprotna temena potpunog četvorostranika, i ako su dva ovako dobivena para pravih ortogonalna, onda je to i treći par. Prema tome, ako se dva od tri data kruga seku u tačkama S, S', onda kroz te tačke prolazi i treći krug. Stav je dokazan za slučaj da se krugovi seku. Ako uvedemo imaginarne elemente, onda dokaz važi i za slučaj kada krugovi nemaju realnih preseka, tj. važi uopšte.

56. Ako je u ravni dat svojim temenima kvadrat, može se linearnom konstrukcijom odrediti normala iz proizvoljne tačke P ravni ma na koju pravu p te ravni.

Dokaz. Dve susedne stranice kvadrata i njegove dijagonale određuju na beskrajnoj pravoj dva para korespondentnih tačaka u *apsolutnoj involuciji* I_a. Treba kroz P povući pravu p' čija je beskrajna tačka konjugovana sa beskrajnom tačkom prave p u I_a. Pritom treba potrebne paralelne prave konstruisati samo pomoću lenjira, što je moguće (zad. 23).

57. Hiperbolička involucija pravih data je dvojnom pravom i jednim konjugovanim parom pravih. Odrediti pravu koju parovi pravih, konjugovanih u datoj involuciji, seku u parovima tačaka koje su korespondentne u simetriji. Zatim odrediti centar simetrije.

Uputstvo. Koristiti stav da je simetrija hiperbolička involucija sa jednom dvojnom tačkom u beskonačnosti.

58. Kroz sredinu M tetive AB neke krive II reda Γ povučene su dve druge tetive CD i EF. DE i CF seku AB u G i H. Pokazati da je M sredina duži GH.

Dokaz. Posmatrajmo na pravoj AB preslikavanje $\pi: X \to X'$, definisano na sledeći način. Ako je X proizvoljna tačka na AB, Y — drugi presek prave CX sa krivom Γ, a Y_1 — drugi presek YM sa krivom Γ, onda je $X' = Y_1D \cdot AB$. Preslikavanje π je algebarska korespondencija tipa (1, 1), u kojoj je par A, B involutoran, dok je tačka M dvojna. Preslikavanje π je, znači, involucija, u kojoj je M dvojna tačka. Mora postojati još jedna dvojna tačka N, jer parabolična involucija ne postoji. Važi, prema tome $(M, N; X, X') = (M, N; A, B) = -1$. No budući da je, po pretpostavci, M sredina duži $\overline{AB}$, to je N beskrajna tačka prave AB. Odavde sledi da je M sredina duži $\overline{XX'}$. A pošto su i tačke G, A jedan specijalan korespondentan par u posmatranoj involuciji, M je sredina duži GA — što je trebalo dokazati.

59. Konstruisati zajednički konjugovani par tačaka u dve date involucije iste prave p.

Rešenje. I. metoda. Neka su involucije zadate konjugovanim parovima tačaka

$$X_1, X_1'; \; X_2, X_2' \quad \text{i} \quad Y_1, Y_1'; \; Y_2, Y_2',$$

Van prave p izaberemo proizvoljnu tačku M. Krugovi koji prolaze kroz M, X_1, X_1' i kroz M, X_2, X_2' neka se seku pored M još u X; a krugovi koji prolaze kroz M, Y_1, Y_1' i kroz M, Y_2, Y_2', — još u Y. Krug kroz M, X, Y seče p u dve tačke koje su konjugovane u obe involucije. Ako su tačke M, X, Y kolinearne, onda involucije imaju zajednički centar (zajednički konjugovan par je centar i beskrajna tačka).

II. metoda. Nacrtajmo proizvoljan krug k i na njemu izaberimo bilo koju tačku S. Date involucije projiciramo iz S na k, čime dobijamo na krugu k dve nove involucije; njihovi polovi neka su P i Q. Prava PQ seče k u jednom paru tačaka koji je konjugovan u obe involucije na krugu. Njihove projekcije iz S na p su traženi par tačaka.

60. U datoj eliptičkoj involuciji odrediti onaj konjugovani par tačaka čije je rastojanje minimalno.

Rešenje. Neka budu M, N bazne tačke jednog pramena krugova koji datu pravu p seku u parovima tačaka koji su konjugovani u datoj involuciji. Prava MN seče p u centru O date involucije. Ako je X, X' bilo koji konjugovani par tačaka, a A, A' traženi par, onda je

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OX}\cdot\overline{OX'}=\text{const}.$$

Rastojanje $\overline{AA'}=\overline{AO}+\overline{OA'}$ biće najmanje tada kad je $|\overline{OA}|=|\overline{OA'}|$, što sledi iz teoreme da pravougaonik konstantne površine ima najmanji obim onda kada je kvadrat. Znači, krug koji pravu p seče u traženim tačkama A, A' ima centar na normali, podignutoj u O na p; time je taj krug određen, jer on mora prolaziti i kroz tačke M i N.

61. Odrediti pramen krugova koji će dve date prave seći u parovima tačaka, konjugovanim u datim involucijama na tim pravima.

Rešenje. Neka su J, J_1 date involucije na pravoj p odnosno p_1. Tački $O=p\cdot p_1$ neka odgovaraju u tim involucijama tačke O' i O_1'. Krug k koji prolazi kroz O, O', O_1' pripada traženom pramenu (ako je $O=O'=O_1'$, krug k degeneriše u tačku). Osim toga, radikalna osa r tog pramena prolazi kroz centre C, C_1 involucija J odnosno J_1. Ako se C i C_1 ne poklapaju sa O, možemo r konstruisati. Sa jednim krugom k i radikalnom osom r je onda pramen određen.

Gornja konstrukcija je izvodljiva ako tačka O nije beskonačna i ako je $O\neq C$, $O\neq C_1$.

Ako je tačka O beskrajna, možemo postupiti na sledeći način. Izabiramo jedan proizvoljan konjugovan par X, X' od J i jedan par X_1, X_1' od J_1. Svaki od dva promenljiva kruga, čije su bazne tačke X, X' odnosno X_1, X_1', seku pravu CC_1 — radikalnu osu traženog pramena — u jednoj involuciji. Neka je M, N zajednički konjugovani par u ove dve involucije. Kroz njih prolazi krug koji sadrži tačke X, X' i krug koji sadrži tačke X_1, X_1'. Prema tome, M i N su bazne tačke traženog pramena.

Ako je $O=C=C_1$, pokazati da svaku pravu kroz O možemo izabrati kao radikalnu osu traženog pramena i onda primeniti prethodnu metodu. Problem ima, znači, bezbroj rešenja.

Ako je $O=C\neq C_1$, pokazati da problem nema rešenja (radikalna osa bila bi prava p_1).

62. Eliptička involucija tačaka je data svojim centrom O i jednim parom konjugovanih tačaka A, A'. Konstruisati druge konjugovane parove, posmatrajući datu involuciju kao presek ortogonalne involucije pravih.

Rezultat. Centar traženih pramenova pravih je bilo koji od dva preseka kruga, čiji je dijametar AA', i normale, podignute u O na pravu na kojoj je data involucija tačaka.

63. Konstruisati krug koji prolazi kroz dve date tačke i koji dodiruje jedan dati krug.

Rešenje. Presečne tačke proizvoljnog kruga koji prolazi kroz date dve tačke sa datim krugom su konjugovane u jednoj involuciji. Dvojne tačke ove involucije su dodirne tačke traženih krugova sa datim krugom. Problem ima dva rešenja ili nijedno. Kada nastupa jedan, a kada drugi slučaj?

64. Konstruisati krug koji prolazi kroz datu tačku i dodiruje dva data kruga.

Uputstvo. Neka su K_1, K_2 dati krugovi, a P data tačka. Na K_1 izaberemo proizvoljnu tačku X. Kroz tačke P, X prolaze dva ili nijedan krug koji se dodiruju do K_2. Ako ovakvi krugovi postoje, onda K_2 uvek jedan od njih dodiruje spolja, a jedan iznutra. Posmatraćemo prvo samo kugove koje K_2 dodiruje spolja. Onda je sa izborom tačke X takav krug jednoznačno određen. Njegov drugi presek sa K_1 neka je X'. Preslikavanje $X \to X'$ između tačaka na krugu K_1 je involucija. Dvojne tačke ove involucije su dodirne tačke traženih krugova sa K_1. Analogni zaključci važe za krugove koji prolaze kroz P i koje krug K_2 dodiruje sa unutrašnje strane. Problem ima najviše četiri rešenja.

65. Prave koje spajaju bilo koju tačku kruga sa temenima upisanog kvadrata obrazuju harmonisku četvorku.

Dokaz. I. metoda. Četiri tačke na krivoj II reda, znači i na krugu, se projiciraju iz svake tačke P krive u četiri prave sa konstantnim dvojnim odnosom. Ako se, specijalno, P poklopi sa jednim temenom upisanog kvadrata, projicirajuće prave obrazuju harmonisku četvorku, jer su dve normalne i ujedno simetrale uglova koje obrazuju druge dve prave. Zato te prave obrazuju harmonisku četvorku i onda kada je P bilo koja tačka na krugu. Time je stav dokazan.

II. metoda. Ako je $ABCD$ upisani kvadrat, a M tačka na krugu, onda zbog $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BMC = \sphericalangle CMD = 45°$ (periferiski uglovi nad jednakim tetivama) izlazi $(MA, MC; MB, MD) = (\sin AMB : \sin CMB) / (\sin AMD : \sin CMD) = -1$, što je trebalo dokazati.

66. Konstruisati dvojne tangente u projektivnosti tangenata krive II reda, date sa tri para korespondentnih tangenata.

Uputstvo. Rešiti prvo dualni zadatak, pa onda dualizovati.

67. AMB, BNC, CMD su tetive jedne fiksne krive drugog reda, a M, N dve fiksne tačke. Kakvo je preslikavanje $A \to D$ tačaka krive u sebe?

Rezultat. Involucija.

68. Ako je kriva drugog reda nacrtana, kako naći dodirne tačke tangenata krive, povučenih iz tačke P?

Rešenje. Kroz P povlačimo tri proizvoljne prave, koje datu krivu seku u parovima tačaka 1, 1'; 2, 2'; 3, 3'. Ova tri para su konjugovani u involuciji tačaka krive čiji je pol P. Tražene dodirne tačke su preseci prave koja spaja tačke $(1 \cdot 2') \cdot (1' \cdot 2)$ i $(2 \cdot 3') \cdot (2' \cdot 3)$, tj. kolineaciske ose, sa krivom.

69. Na jednoj krivoj drugog reda date su tri tačke A, B, C. Koja teorema se dobija na osnovu konstrukcije kolineaciske ose projektivnosti između tačaka te krive, definisane sa $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$? Formulisati i dualnu teoremu.

Rezultat. Preseci stranica trougla, upisanog u krivu II reda, sa tangentama na krivu u suprotnim temenima trougla su kolinearni. — Prave koje spajaju temena trougla, opisanog oko krive II reda, sa dodirnim tačkama suprotnih stranica trougla seku se u jednoj tački.

70. Ako se parovi tačaka A, B; C, D na jednoj krivi drugog reda razdvajaju harmoniski, onda se tangente na krivu u A i B seku na CD. Teoremu dualizovati.

Uputstvo. Projicirati tačke A, B, C, D od A i od B na CD.

71. Dat je pravougaonik $OABC$; susedne stranice AB, CD podeljene su tačkama $A \equiv A_0$, A_1, A_2, ... , $A_n \equiv B$ odnosno $C \equiv B_0$, B_1, B_2, ... , $B_n \equiv B$ u po n jednakih delova. Prava OB_i seče paralelu sa OA kroz A_i u P_i. Na kakvoj krivi leže tačke P_i?

Rešenje. Neka je D_∞ beskrajna tačka prave OA. Parovi OB_i, $D_\infty A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ korespondentni su u jednoj projektivnosti pramenova sa centrima u O i D_∞, definisanoj, na primer, sa $OB_i \to D_\infty A_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Korespondentni zraci seku se u tačkama P_i, koje stoga leže na jednoj krivoj II reda. Pošto se OC preslikava u $D_\infty O$, prava OC je tangenta sa dodirom u O. Prava $OA = OD_\infty$ se preslikava u beskrajnu pravu, koja je stoga tangenta krive sa dodirom u D_∞. Kriva je dakle parabola, kojoj je OA osa, a O teme.

72. Promenljivi trougao ABC sa fiksnim temenom A i konstantnim uglom kod A kreće se tako da B i C leže na fiksnim pravima a, b ravni trougla. Šta je obvojnica pravih BC? Ispitaj i specijalni metrični slučaj kada je jedna od pravih a, b beskrajna!

Rezultat. Konusni presek koji dodiruje prave a i b.

73. Odrediti geometrisko mesto centra kruga opisanog oko trougla koji grade dve fiksne i jedna promenljiva tangenta date parabole.

Rešenje. Promenljiva tangenta t neka seče fiksne tangente a, a' u A odnosno A', a A_1, A_1' neka su sredine duži OA, OA', gde $O = a \cdot a'$. Normale n, n' na a, a' u A_1, odnosno A_1' seku se u tački geometriskog mesta. Normale n, n' možemo smatrati i kao prave koje beskrajne tačke U, U', što odgovaraju smerovima normalnim na smerove pravih a, a', spajaju sa A_1 odnosno sa A_1'. Preslikavanje $A_1 \to A_1'$ je projektivnost. Zašto? Stoga je i preslikavanje $UA_1 \to U'A_1'$ neka projektivnost π pramena pravih sa centrima u U, U'. No beskrajna prava UU' odgovara sama sebi. Zbog toga je projektivnost π perspektivnost. Traženo geometrisko mesto je, dakle, *prava* — perspektivna osa perspektivnosti π.

74. Odrediti geometrisko mesto ortocentara trouglova koje grade dve fiksne prave a, b i jedna promenljiva prava koja prolazi kroz jednu fiksnu tačku.

Rezultat. Hiperbola čije su asimptote normalne na pravima a, b.

75. Pokretna tangenta parabole seče tri njene fiksne tangente u stalnom odnosu.

Dokaz. Neka su a, b, c date fiksne tangente, a t promenljiva tangenta. Tangenta t seče tangente a, b, c i beskrajnu pravu d_∞, koja je isto tako jedna fiksna tangenta parabole, u tačkama A, B, C, D_∞, čiji je dvojni odnos konstantan, dakle

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD_\infty}}{\overline{BD_\infty}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \text{const},$$

što dokazuje teoremu.

76. Tetive krive II reda koje se iz date tačke te krive vide pod pravim uglom prolaze kroz jednu fiksnu tačku.

Dokaz. Neka je data kriva Γ, a na njoj tačka P. Na Γ izabiramo proizvoljnu tačku M; onda prava koja prolazi kroz P i normalna je na PM seče Γ ponovo još u jednoj tački M'. Tetiva MM' vidi se iz P pod pravim uglom. Preslikavanje $M \to M'$ je jedna involucija J tačaka na Γ. Zašto? Prave MM' prolaze, dakle, kroz jednu fiksnu tačku F — kroz pol involucije J. Tačka F zove se *Frégier*-ova tačka za tačku P u odnosu na Γ.

77. Promenljiva prava koja prolazi kroz fiksnu tačku P seče fiksnu krivu II reda Γ u M, N. Krug, čiji je dijametar duž MN, seče Γ ponovo još u X, Y. Pokazati da prave XY prolaze kroz jednu fiksnu tačku.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je preslikavanje $X \to Y$ involucija tačaka krive Γ.

Na krivoj Γ izaberimo proizvoljnu tačku X, a onda tražimo na Γ one tačke M, N, kolinearne sa P, za koje važi $NX \perp XM$. Prava MN prolazi, dakle, kroz *Frégier*-ovu tačku F_X tačke X (zad. 76) i kroz P; a pošto je tačka F_X sa X jednoznačno određena, a P je data, to je i prava MN jednoznačno određena. Time je jednoznačno određen i krug kroz tačke M, N, X, koji krivu Γ seče još tačno u jednoj tački Y. Preslikavanje $X \to Y$ je, dakle, jednoznačno. Po analogiji sledi da je i preslikavanje $Y \to X$ jednoznačno. A oba preslikavanja su, očigledno, algebarske korespondencije. Preslikavanje $X \to Y$ je, prema tome, jedna algebarska korespondencija tipa (1, 1) kod koje je svaki par involutoran, znači zaista involucija tačaka krive Γ.

78. Na jednoj tangenti t konusnog preseka Γ data je involucija J. Šta je geometrisko mesto preseka tangenata na Γ, povučenih iz parova tačaka konjugovanih u J?

Uputstvo i rezultat. Prvo dualizovati. Geometrisko mesto je prava.

79. Tangente konusnog preseka, povučene iz parova tačaka koje dve fiksne tačke jedne njegove tangente razdvajaju harmoniski, seku se na jednoj pravoj. Dokazati. Dualizovati.

80. Presečne tačke normalnih tangenata parabole leže na jednoj fiksnoj pravoj, a tetive koje spajaju dodirne tačke prolaze kroz jednu fiksnu tačku.

Uputstvo. Prvi deo stava je specijalan slučaj teoreme zad. 78; beskrajnu tangentu parabole seku parovi normalnih tangenata u parovima tačaka, konjugovanim u apsolutnoj involuciji.

81. Kroz temena jednog neortocentričnog četvorotemenika prolazi tačno jedna jednakostrana hiperbola, koja može degenerisati i u par ortogonalnih pravih.

Uputstvo. Koristiti stav da u svakoj involuciji tačaka beskrajne prave, koja nije apsolutna, postoji tačno jedan konjugovani par kome odgovara jedan par ortogonalnih pravaca.

82. Ako parabola dodiruje stranice jednog trougla, onda su tangente, povučene iz njegovog ortocentra na parabolu, normalne.

Dokaz. Dati trougao i beskrajna prava obrazuju jedan četvorostranik, u koji je upisana parabola. Parovi pravih koje spajaju ortocentar O trougla sa parovima suprotnih temena posmatranog četvorostranika, ortogonalni su. Parovi tangenata, povučenih iz O na krive II reda koje su upisane u dati četvorostranik su dakle konjugovani (*Desargues*-ova teorema) u ortogonalnoj (cirkularnoj) involuciji. To dokazuje teoremu.

83. Pokazati da je geometrisko mesto ortocentara trouglova, čije stranice dodiruju jednu fiksnu parabolu, prava.

Uputstvo. Primeniti rezultate zad. 80, 82.

84. Pokazati da su ortocentri četiri trougla, koji se mogu obrazovati stranicama bilo kojeg potpunog četvorostranika, kolinearni.

Uputstvo. U četvorostranik se može upisati parabola; znači, sva četiri trougla su paraboli opisana, itd. (videti zad. 83).

85. Pravougaoniku je upisana neka kriva II reda Γ, a opisan krug. Pokazati da su tangente, povučene na Γ iz bilo koje tačke kruga, ortogonalne.

Dokaz. Parovi tangenata, povučenih iz bilo koje fiksne tačke M ravni na krive II reda, upisane u dati pravougaonik $ABCD$, konjugovane su u jednoj involuciji J. Dve specijalne takve krive — degenerisane — parovi su suprotnih temena A, C i B, D pravougaonika. Ako je M na krugu, onda je $MA \perp MC$, $MB \perp MD$. Znači, u ovom slučaju involucija J je ortogonalna; zbog toga su i tangente, povučene iz bilo koje tačke M kruga na krivu Γ, ortogonalne.

86. Odrediti geometrisko mesto temena pravog ugla čiji kraci dodiruju jednu fiksnu centralnu krivu II reda.

Rezultat i uputstvo. Krug; jer pravi uglovi čiji su kraci paralelni sa osama krive obrazuju pravougaonik, itd. (videti zad. 85).

87. Ako dve paralelne tangente centralne krive II reda sečemo jednom promenljivom tangentom, onda je proizvod rastojanja od dodirnih tačaka paralelnih tangenata do njihovih preseka sa pokretnom tangentom konstantan.

Dokaz. Neka su t_1, t_2 date paralelne tangente, a T_1, T_2 — njihove dodirne tačke. Promenljiva tangenta t neka seče t_1, t_2 u P_1, P_2. Preslikavanje $P_1 \to P_2$ je jedna projektivnost π tačaka prave t_1 u tačke prave t_2. T_1, T_2 su bežne tačke u π (tj. tačke koje su slike beskrajnih tačaka pravih t_1 i t_2 pri preslikavanju π^{-1} odnosno π), odakle sledi da je, zaista, $\overline{T_1P_1} \cdot \overline{T_2P_2} = \text{const.}$

88. Temena A, B trougla ABC su fiksna, a teme C se kreće po pravoj p. Odrediti geometrisko mesto ortocentra tog trougla.

Uputstvo i rezultat. Preslikavanje $AO \to BO$, gde O znači ortocentar trougla ABC, je projektivnost.

Ako stranica AB nije paralelna sa pravom p i nije normalna na njoj, traženo geometrisko mesto je hiperbola; ako je $AB \parallel p$, g. m. je parabola, a ako $AB \perp p$ — prava p.

89. Presečne tačke tangenata jedne fiksne krive II reda Γ, povučenih iz bilo kojeg para tačaka neke prave p, koje su konjugovane u istoj involuciji J, leže na jednoj krivoj II reda Γ'.

Dokaz. Neka je A, A' bilo koji par tačaka konjugovanih u J, a M, N neka su dvojne tačke te involucije; onda je $(M, N; A, A') = -1$. Ako je X presek jedne tangente iz A i jedne tangente iz A' na Γ, onda te tangente XA, XA' razdvajaju harmoniski par pravih XM, XN; prave XM, XN su dakle konjugovane u odnosu na Γ. Preslikavanje $MX \to NX$ je algebarska korespondencija tipa (1, 1), dakle projektivnost. Zato, zaista, promenljiva tačka X leži na jednoj krivoj II reda Γ'.

90. Petouglu $ABCDE$ je upisana neka kriva II reda Γ, a opisana kriva II reda Γ'. Pokazati da postoji bezbroj petougla sa istom osobinom.

Dokaz. Posmatramo preslikavanje $M \to M'$ tačaka krive Γ' u sebe, koje je definisano na sledeći način: ako je M proizvoljna tačka na Γ', povučemo jednu od dve tangente iz M na Γ koja krivu Γ' seče ponovo u M_1; onda iz M_1 povlačimo drugu tangentu na Γ koja krivu Γ' seče ponovo u M_2; druga tangenta iz M_2 na Γ seče Γ' ponovo u M_3; druga tangenta iz M_3 na Γ seče Γ' ponovo u M_4; druga tangenta iz M_4 na Γ seče Γ' ponovo u M'. Pošto smo iz M mogli povući dve tangente na Γ, to ovim postupkom dobijamo za M' dve različite tačke — neka su to M_1', M_2'. Znači, kod našeg preslikavanja odgovaraju svakoj tački M krive Γ' dve njene tačke. Isto važi i za inverzno preslikavanje. Preslikavanje je, dakle, algebarska korespondencija tipa (2, 2). Zašto je preslikavanje algebarsko? Korespondencija ovog tipa, ako nije identitet, ima $2+2=4$ dvojne tačke; a ako ih ima više, identitet je. No tačke A, B, C, D, E, znači njih pet, dvojne su tačke pri našem preslikavanju, koje je stoga identitet. Prema tome, kod svake tačke M na Γ' dobijamo $M = M_1' = M_2'$, što dokazuje teoremu.

Da li je tačan analogan stav za n-ugaonik $(n > 5)$?

91. Za četvorougao dokazati stav analogan teoremi iz zad. 90.

Dokaz. Metoda prethodnog zadatka ne vodi do cilja.

Neka je četvorougao $ABCD$ upisan krivoj Γ', a opisan krivoj Γ, i neka je $M = AD \cdot BC$, $M' = AB \cdot CD$. Na Γ' izabiramo proizvoljnu tačku A_1; tangente iz A_1 na Γ neka seku Γ' u B_1 i D_1, a A_1D_1, A_1B_1 neka seku pravu MM' u M_1, M_1'. Na pravoj MM' posmatramo involuciju J, određenu parovima M, M'; M_1, M_1'. Prema zad. 89, preseci tangenata iz konjugovanih parova u involuciji J, povučenih na Γ, leže na jednoj krivoj II reda; na njoj zato leže tačke A, B, C, D, A_1, B_1, D_1. No već sa pet tačaka je kriva II reda određena; ova kriva je, dakle, baš kriva Γ'. Na njoj leži i presek C_1 tangenata M_1D_1, $M_1'B_1$; znači, proizvoljni četvorougao $A_1B_1C_1D_1$, opisan oko Γ, upisan je u Γ'.

92. Ako je jedan trougao opisan jednoj krivoj II reda i upisan drugoj krivoj II reda, onda postoji bezbroj takvih trouglova.

Dokaz. Trougao ABC neka je upisan krivoj Γ', a opisan krivoj Γ. D neka je proizvoljna tačka na Γ'; jedna tangenta iz D na Γ seče Γ' ponovo u E; a druga tangenta iz E na Γ seče drugu tangentu iz D u F. Kriva Γ je, dakle, upisana u trouglu ABC i u trouglu DEF. No onda postoji (zad. 94) jedna kriva II reda koja je opisana oko ta dva trougla, koja dakle prolazi kroz A, B, C, D, E, F. Ali, pošto je kriva sa pet svojih tačaka A, B, C, D, E jednoznačno određena, to je ta kriva baš kriva Γ'; dakle i tačka F leži na Γ'. Time je stav dokazan.

93. Nacrtati dva nekoncentrična kruga tako da postoji bezbroj a) trouglova, b) četvorouglova, koji će istovremeno biti upisani u jednom krugu, a opisani oko drugog.

94. Ako su dva trougla upisana u istu krivu II reda, onda postoji jedna kriva II reda koja je upisana u oba trougla.

Dokaz. Neka su $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ dva data trougla koja su upisana u istoj krivoj II reda. Iz *Pascal*-ove teoreme za šestougao $A_1A_2A_3B_3B_2B_1$ sledi da su tačke $C_1=A_1A_2 \cdot B_3B_2$, $C_2=A_2A_3 \cdot B_2B_1$, $C_3=A_3B_3 \cdot B_1A_1$ kolinearne. Sada posmatramo šestougao čije su stranice stranice trouglova $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$, tj. šestougao $A_1C_1B_3B_1C_2A_3$. Iz kolinearnosti tačaka C_1, C_2, C_3 izlazi da prava C_1C_2 prolazi kroz tačku $C_3=A_3B_3 \cdot B_1A_1$, tj. da prave C_1C_2, A_1B_1, A_3B_3, a to su prave koje spajaju parove suprotnih temena šestougla $A_1C_1B_3B_1C_2A_3$, prolaze kroz jednu istu tačku. Iz obratnog stava *Brianchon*-ove teoreme sledi da je taj šestougao opisan jednoj krivoj II reda — što je i trebalo dokazati.

95. Ako je parabola upisana u trouglu, onda njen fokus leži na krugu koji je opisan oko tog trougla.

Dokaz. Fokus F je presek tangenata parabole, povučenih iz apsolutno-kružnih tačaka I_1, I_2 ravni; parabola je upisana u dati trougao i još u trougao I_1I_2F. Iz teoreme, dualne teoremi iz prethodnog zadatka, sledi da postoji jedna kriva II reda koja je opisana oko ta dva trougla; ta kriva prolazi kroz tačke I_1, I_2, pa je zbog toga krug.

96. Koliko krivih II reda, koje prolaze kroz četiri date tačke, dodiruje jednu datu pravu? Dualizovati.

Rešenje. Datu pravu p seče svaka kriva koja prolazi kroz četiri date tačke u parovima tačaka, konjugovanim u istoj involuciji J. Dvojne tačke u J su dodirne tačke posmatranih krivih sa p. *Postoje,* znači, *dve, jedna ili nijedna kriva II reda koja dodiruje datu pravu i prolazi kroz četiri date tačke.*

Konstruisati dodirne tačke krivih sa pravom p.

Dualno: *Kroz datu tačku prolaze dve, jedna ili nijedna kriva II reda, upisana u dati četvorostranik.* Konstruisati tangente krivih u datoj tački.

97. Kakve krive sadrži pramen krivih II reda kome pripadaju dve jednakostrane hiperbole?

Rešenje. Beskrajna prava seče krive pramena u parovima tačaka koje su konjugovane u istoj involuciji J. Dva para konjugovanih tačaka te involucije su preseci ortogonalnih asimptota dveju jednakostranih hiperbola. Ova dva para su konjugovana i u apsolutnoj involuciji. A pošto je sa dva konjugovana para involucija jednoznačno određena, sledi da je J apsolutna involucija. Svaka kriva pramena seče, dakle, beskrajnu pravu u dve tačke koje su određene sa dva ortogonalna pravca; *svaka kriva pramena je,* prema tome, *jednakostrana hiperbola,* ili, u degenerisanom slučaju, *par normalnih pravih.*

98. Date su asimptote dveju hiperbola; naći smer osa onih parabola koje prolaze kroz presečne tačke tih hiperbola.

Rešenje. Navedene hiperbole određuju pramen krivih II reda, koje beskrajnu pravu seku u involuciji, čije dvojne tačke određuju smerove traženih parabola. *Smerovi osa ovih parabola su,* dakle, *harmonisko konjugovani sa smerovima asimptota jedne i druge hiperbole.* Odrediti ove smerove konstruktivno.

99. Parabole koje prolaze kroz četiri tačke jednog kruga imaju normalne ose.

Dokaz. Sve krive II reda koje prolaze kroz date četiri tačke obrazuju pramen. One seku beskrajnu pravu p_∞ u parovima tačaka, konjugovanim u istoj involuciji J. Pramenu pripada i jedan krug; on seče beskrajnu pravu u apsolutno-kružnim tačkama I_1, I_2. Dvojne tačke M_1, M_2 involucije J su dodirne tačke parabola pramena sa p_∞. Dvojne tačke M_1, M_2 i svaki korespondentni par, dakle i I_1, I_2, razdvajaju se harmoniski; odavde sledi da tačke M_1, M_2 određuju dva ortogonalna pravca. To su pravci dijametara, pa znači i osa, parabola. Time je stav dokazan.

100. Ako pramen krivih II reda sadrži krug, onda parovi osa svih krivih pramena imaju iste pravce.

Dokaz. I. metoda. U pramenu postoje i dve parabole (zad. 99) sa ortogonalnim osama; njihove beskrajne tačke neka su M_1, M_2. Tačke M_1, M_2 pretstavljaju jedan konjugovani par tačaka u odnosu na obe parabole, zbog čega je to jedan konjugovan par i u odnosu na svaku krivu pramena. Ako je C centar bilo koje krive pramena, onda je CM_1, CM_2 par konjugovanih dijametara te krive. A pošto je osim toga i $CM_1 \perp CM_2$, to su CM_1, CM_2 ose krive. Znači, ose svake krive pramena seku beskrajnu pravu u fiksnim tačkama M_1, M_2, tj., zaista, svaka osa bilo koje krive pramena ima ili pravac određen sa M_1, ili pravac određen sa M_2 — a to su dva normalna fiksna pravca.

II. metoda. Pramen seče beskrajnu pravu p_∞ u parovima tačaka, konjugovanim u jednoj involuciji J. M_1, M_2 neka su dvojne tačke u J. Bilo koja kriva pramena neka seče p_∞ u A_1, A_2; A_1, A_2 je konjugovan par u J. Neka je O bilo koja tačka ravni. Posmatramo involuciju zrakova, definisanu sa $OA_1 \to OA_2$. Prave OM_1, OM_2 su dvojne prave ove involucije; pošto su normalne, biće bisektrise uglova određenih sa OA_1, OA_2. Prave OA_1, OA_2 imaju smerove asimptota; zato su OM_1, OM_2 paralelne sa osama krive.

101. $ABCD$ je četvorougao, upisan u jedan krug; DA, CB seku se u M, a AB, DC u N. Pokazati da su simetrale ugla AMC normalne na simetralama ugla ANC.

Uputstvo. AB, CD i AD, BC su dve degenerisane krive II reda u pramenu čije su bazne tačke A, B, C, D. Primeniti stav iz prethodnog zadatka.

102. Prave a, b, c, d leže u ravni; tačka A leži na a, a D — na d. Jedna promenljiva kriva II reda Γ dodiruje prave a, b, c, d. Pokazati da se druge tangente krive Γ, povučene iz A i D, seku na jednoj fiksnoj pravoj.

Dokaz. Te druge tangente neka su a' i d'. Za šestougao $aa'd'dbc$ primenićemo *Brianchon*-ovu teoremu. Suprotna temena $a \cdot a' = A$ i $d \cdot b$ ovog šestougla su fiksna, a i suprotna temena $a \cdot c$ i $d' \cdot d = D$ su fiksna. Prave koje spajaju ova dva para temena neka se seku u O. Zato, prema *Brianchon*-ovoj teoremi, tačka $a' \cdot d'$ treba da leži na pravoj koja spaja fiksnu tačku O sa fiksnom tačkom $b \cdot c$ — što dokazuje teoremu.

103. Dualizovati stav iz prethodnog zadatka.

Rezultat. Tačke A, B, C, D leže u ravni; prava a prolazi kroz A, a prava d kroz D. Promenljiva kriva II reda Γ prolazi kroz A, B, C, D. Prava a seče Γ još u A', a prava d — još u D'. Prave $A'D'$ prolaze tada kroz jednu fiksnu tačku.

104. Tačke R, S leže u ravni trougla ABC. Prave RS i BC seku se u T. Promenljiva prava, koja prolazi kroz R, seče AB, AC u U, V. Pokazati da konusni presek Γ, na kome leže tačke B, S, T, U, V, prolazi kroz jednu fiksnu tačku na AC.

Dokaz. Γ neka seče AC još u X. Primenjujući za šestougao $BSTXVU$ *Pascal*-ovu teoremu, dobijamo: suprotne stranice BS, XV su fiksne, a suprotne stranice ST, VU seku se u fiksnoj tački R; zato TX mora prolaziti kroz jednu fiksnu tačku prave AB. Prema tome, X je stalna tačka na AC.

105. Ako su dva trougla perspektivna, onda tačke u kojima svaka stranica jednog trougla seče nehomologne stranice drugog leže na jednoj istoj krivoj II reda. Dualizovati.

Uputstvo. Primeniti *Pascal*-ovu teoremu.

D u a l n o: Prave koje spajaju temena jednog trougla sa nehomolognim temenima drugog tangente su jedne iste krive II reda.

106. Tangente u temenima trougla, upisanog u krivu II reda, seku suprotne stranice u kolinearnim tačkama. Dokazati stav, a zatim dualizovati.

Uputstvo. Specijalan slučaj *Pascal*-ove teoreme. (Videti i zad. 217.)

107. Pokazati da je dodir tangente hiperbole sredina duži koju na tangenti otsecaju asimptote.

Uputstvo. Primeniti *Brianchon*-ovu teoremu.

108. Kriva II reda dodiruje neparalelne stranice AB, CD trapeza $ABCD$ u A i D, a dodiruje i stranicu BC. Pokazati da je dodir tangente BC sredina duži BC.

Uputstvo. Neka je $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$. Primeniti *Brianchon*-ovu teoremu za šestougao $aabbcc$.

109. Trougao koji grade asimptote i promenljiva tangenta fiksne hiperbole ima konstantnu površinu.

Uputstvo. I. m e t o d a. Primeniti *Pascal*-ovu teoremu za jedan šestougao, upisan u hiperbolu, kod koga su beskrajne tačke asimptota dva suprotna temena. Dobija se: Ako bilo koje dve tangente seku asimptote u A, B odnosno u C, D, onda je $AD \parallel CB$, odakle sledi teorema.

II. m e t o d a. Promenljiva tangenta seče asimptote u tačkama A, B, koje su korespondentne u jednoj projektivnosti. Presek O asimptota je bežna tačka za obe asimptote. Zato je $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\text{const}$, što dokazuje teoremu.

110. Prave VW, WU, UV dodiruju neki konusni presek Γ u tačkama A, B, C. Prave AU, BV, CW seku Γ ponovo u R, S, T, a tangente na Γ sa dodirima u R, S, T seku VW, WU, UV u L, M, odnosno N. Pokazati da su tačke L, M, N kolinearne.

Dokaz. Tačke L, M, N su polare za AR, BS, odnosno CT u odnosu na Γ. No, pošto prave AR, BS, CT prolaze kroz jednu tačku (videti zad. 106, dualno), to su tačke L, M, N kolinearne.

111. Dato je pet tačaka A, B, C, D, E neke krive drugog reda Γ. Odrediti druge tačke i tangente te krive.

Uputstvo I. m e t o d a. Koristimo projektivnost Φ pravih u pramenima sa centrima u D i E, određenu sa: $DA \to EA$, $DB \to EB$, $DC \to EC$. Prave koje odgovaraju sekanti DE u Φ

odnosno u Φ^{-1} su tangente na Γ u E i D. Presek O ovih tangenti je centar projektivnosti Φ. Svaki par korespondentnih zrakova u Φ seče se u jednoj tački krive Γ. Tangente u tim tačkama određujemo na analogan način kao one u D i E.

II. m e t o d a. Primeniti *Pascal*-ovu teoremu: Kroz tačku $AB \cdot DE$ povlačimo jednu proizvoljnu pravu p, koju smatramo za *Pascal*-ovu pravu za šestougao $ABCDEF$, u kome treba teme F odrediti. Za svaki položaj prave p dobijamo po jednu tačku F krive Γ. Tangentu na krivu Γ u A, na primer, konstruišemo primenom iste teoreme na šestougao $AABCDE$, u kome se dva temena poklapaju u tački A; prava AA je tangenta u A.

III. m e t o d a (za određivanje tangente). Na pravoj DE posmatrajmo involuciju J, u kojoj tu pravu seku krive II reda, opisane oko četvorotemenika $AABC$, u kome se dva temena poklapaju (AA je oznaka za tangentu u A). U J su poznata dva para konjugovanih tačaka: par E, D i par presečnih tačaka pravih AB, AC sa ED, čime je involucija J određena. Kroz tačku koja je, u J, konjugovana sa $BC \cdot ED$ prolazi tražena tangenta.

112. Jedan konusni presek je određen sa četiri svoje tačke i tangentom u jednoj od njih. Konstruisati druge tačke i druge tangente krive.

Uputstvo. Neka su A, B, C, D date tačke, i d tangenta u D.

I. m e t o d a. Koristimo projektivnost između dva pramena, definisanu sa:

$$CA \to DA, \quad CB \to DB, \quad CD \to d.$$

II. m e t o d a. Upotrebiti *Pascal*-ovu teoremu, smatrajući d kao pravu koja spaja dve tačke koje se poklapaju sa D.

113. Odrediti nekoliko tačaka hiperbole koja prolazi kroz tri date tačke i kojoj je data jedna asimptota.

Uputstvo. Date tačke neka su A, B, C, a prava d neka je data asimptota. Beskrajna tačka prave d neka je D_∞.

I. m e t o d a. Koristiti projektivnost π između pravih u pramenovima sa centrima u A i D_∞, definisanu sa $AD_\infty \to d$, $AB \to D_\infty B$, $AC \to D_\infty C$. Centar projektivnosti π je presek O prave d i prave $(AC \cdot BD_\infty) \cdot (AB \cdot CD_\infty)$.

II. m e t o d a. Primeniti *Pascal*-ovu teoremu.

114. Konstruisati druge tačke parabole, date sa tri svoje tačke i smerom dijametara.

Uputstvo. Smer dijametara parabole određuje njenu beskrajnu tačku A_∞. Datą je, dakle tangenta u A_∞ (beskrajna prava) i još tri tačke (videti zad. 112).

115. Konstruisati tačke i tangente konusnog preseka, kome su date tri tačke i tangente u dve od njih.

116. Konstruisati asimptote hiperbole kojoj su date tri tačke i smerovi asimptota.

Uputstvo. Neka su A, B, C date tačke; pravci asimptota određuju dve naredne tačke D_∞, E_∞. Primeniti *Pascal*-ovu teoremu za degenerisane šestougle $ABCD_\infty D_\infty$ i $ABCE_\infty E_\infty$.

117. Dato je pet tangenata a, b, c, d, e jednog konusnog preseka. Konstruisati naredne tangente.

Rešenje. I. m e t o d a. Tangenta d seče tangente a, b, c u tačkama A_1, B_1, C_1, a tangenta e seče ih u tačkama A_2, B_2, C_2. Ako je X_1, X_2 bilo koji korespondentan par tačaka u projektivnosti π tačaka prave d u tačke prave e, definisanoj sa $A_1 \to A_2$, $B_1 \to B_2$, $C_1 \to C_2$, onda je prava $X_1 X_2$ tangenta krive.

II. m e t o d a. Posmatramo šestougao $abcdet$, gde je t jedna od narednih tangenata krive. Bilo koju tangentu t da izaberemo, *Brianchon*-ova tačka (tj. presečna tačka pravih koje spajaju suprotna temena šestougla) biće na pravoj koja spaja suprotna temena $a \cdot b$ i $d \cdot e$;

a i obratno, ako bilo koju tačku na ovoj pravoj izaberemo za *Brianchon*-ovu tačku, odgovaraće joj — na osnovu *Brianchon*-ove teoreme — jedna tangenta t krive. Izaberimo, dakle, na $(a \cdot b) \cdot (d \cdot e)$ proizvoljnu tačku B kao *Brianchon*-ovu tačku — ona određuje jednu tangentu t. Prema *Brianchon*-ovoj teoremi, prave $(b \cdot c) \cdot (e \cdot t)$ i $(c \cdot d) \cdot (t \cdot a)$ seku se u B; zato ih možemo nacrtati spajanjem tačaka $b \cdot c$ i $c \cdot d$ sa B. Prava koja spaja preseke ovih pravih sa e odnosno sa a je nova tangenta t krive.

118. Odrediti dodirne tačke tangenata konusnog preseka, datog sa pet tangenti.

Uputstvo. I. metoda. Dodir D tangente d (oznake kao u prethodnom zadatku) nalazimo ako odredimo tačku koja se u projektivnosti π preslikava u tačku $d \cdot e$.

II. metoda. Za određivanje dodira D tangente d primeniti *Brianchon*-ovu teoremu za šestougao $abcdde$, gde dd simbolično označuje dodir D.

III. metoda. Dualizovati metodu III. zad. 111.

119. Odrediti druge tangente parabole, određene sa četiri svoje tangente.

Uputstvo. Pored date četiri tangente data je još jedna — beskrajna prava. Primeniti *Brianchon*-ovu teoremu.

120. Konstruisati tangente hiperbole, date svojim asimptotama i jednom tangentom.

Uputstvo. Svaku asimptotu smatrati kao tangentu sa beskrajnom dodirnom tačkom, a zatim primeniti *Brianchon*-ovu teoremu.

121. Konstruisati druge tangente parabole, kojoj su date dve tangente sa dodirnim tačkama.

122. Parabola je data tangentama a, b i njihovim dodirnim tačkama A, B. Konstruisati tangentu, paralelnu tetivi AB.

Uputstvo. Primeniti *Brianchon*-ovu teoremu za šestougao $aabbp_\infty t$, gde je p_∞ beskrajna prava, a t — tražena tangenta. Za t se dobija prava koja spaja sredine duži OA, OB, gde $O = a \cdot b$.

123. Konstruisati krive drugog reda koje prolaze kroz četiri date tačke i koje dodiruju datu pravu p.

Rešenje. Neka su A, B, C, D date tačke, a p — data prava. Treba odrediti dvojne tačke M, N u involuciji J, u kojoj pramen krivih drugog reda sa baznim tačkama u A, B, C, D seče pravu p. Parovi pravih AB, CD i AC, BD su dve degenerisane krive tog pramena. Zato je involucija J određena konjugovanim parovima tačaka u kojima prave AB, CD i AC, BD seku p. Ako je involucija J hiperbolička, postoje dve tražene krive—tj. one određene tačkama A, B, C, D, M odnosno A, B, C, D, N.

124. Pokazati da hiperbola i njene asimptote isecaju na svakoj sečici jednake duži. Primenjujući ovu osobinu, konstruisati druge tačke hiperbole, ako su date asimptote i jedna tačka.

Rešenje. Neka su date asimptote a, b i sečica s, koja asimptote seče u A, B, a hiperbolu u A_1, B_1. Treba pokazati da je $\overline{AA_1} = \overline{B_1B}$. Krive II reda, čije su asimptote date prave a, b, obrazuju pramen; one seku s u tačkama, konjugovanim u involuciji J. Parovi A, B; A_1, B_1 su konjugovani u J. Pramenu pripada i dvojna beskrajna prava (tj. prava koja spaja dodirne tačke krivih sa a, b); zbog toga je jedna dvojna tačka involucije J beskrajna tačka prave s, odakle sledi da je preslikavanje J *simetrija*. Parovi konjugovanih tačaka su, dakle, simetrični u odnosu na jednu istu tačku O; specijalno, O je sredina duži AB i A_1B_1, odakle sledi $\overline{AA_1} = \overline{B_1B}$.

125. Naći druge tačke hiperbole kojoj je data jedna asimptota i tri tačke.

Rešenje. Neka su date tačke L, M, N i asimptota a. Prvo nalazimo preseke (zad. 124) pravih LN, MN sa još nepoznatom asimptotom; time je određena i druga asimptota, itd.

Rešiti zadatak i primenom: a) *Pascal*-ove teoreme; b) primenom projektivnih pramenova pravih.

126. Primenom *Desargues*-ove teoreme izvršiti sledeće konstrukcije: a) dato: četiri tačke i smer jedne asimptote hiperbole; konstruisati tu asimptotu i smer druge asimptote; b) dato: asimptote i jedna tačka A hiperbole; konstruisati tangentu u A.

127. U krug je upisan potpun četvorotemenik $ABCD$. Pokazati da postoji jedan dijametar kruga koji sve parove suprotnih stranica četvorotemenika seče u parovima tačaka, simetričnim u odnosu na centar O kruga.

Rešenje. Neka je d, po pretpostavci, jedan dijametar koji stranice AD, BC seče u tačkama M, M', koje su simetrične u odnosu na O. Dati krug k neka seče d u tačkama N, N', koje su isto tako simetrične u odnosu na O. Parovi M, M'; N, N' određuju involuciju J; to je *simetrija* tačaka prave d u odnosu na O. No, involucija J je i involucija u kojoj krive II reda, opisane oko četvorotemenika $ABCD$, seku pravu d. Specijalne takve krive pretstavljaju parovi pravih AC, BD i AB, CD; znači, i njih seče d u parovima simetričnih tačaka u odnosu na O. Dakle, ako jedan dijametar seče *jedan* par suprotnih stranica upisanog četvorotemenika u simetričnim tačkama u odnosu na centar, onda to važi i za ostala dva para.

Treba još dokazati egzistenciju takvog dijametra d koji jedan par suprotnih strana seče u simetričnim tačkama. Neka je $E = AD \cdot BC$, a d' — prava koja zajedno sa OE razdvaja harmoniski par pravih AE, BE. Dijametar koji je paralelan sa d' je traženi dijametar d.

128. Četvorotemeniku $ABCD$ je opisana kriva II reda, a kroz presek E pravih AB, CD povučena je prava p. Odrediti tačku P u kojoj jedna kriva II reda, koja prolazi kroz A, B, C, D, dodiruje pravu p.

Rešenje. Krive II reda koje prolaze kroz A, B, C, D seku p u parovima tačaka, konjugovanim u jednoj involuciji J. Par pravih AB, CD je degenerisana kriva toga pramena krivih; ona seče p u dvojnoj tački E involucije J. Tražena dodirna tačka je druga dvojna tačka te involucije; odredićemo je, na primer, kao četvrtu harmonisku tačku za tačke $AC \cdot p$, $BD \cdot p$, E.

129. Odrediti smer ose parabole koja je opisana datom trapezu.

Uputstvo. Specijalan slučaj prethodnog zadatka.

130. Konstruisati ose parabola koje prolaze kroz četiri date tačke.

Uputstvo. Date tačke su temena potpunog četvorotemenika, čije suprotne stranice seku beskrajnu pravu p_∞ u tačkama, konjugovanim u jednoj involuciji J. Treba naći dvojne tačke u J. — Ili: odrediti onaj konjugovani par u J koji je određen sa dva ortogonalna pravca. Time su dobijeni smerovi osa.

131. Kriva II reda je data sa: a) pet svojih tačaka A, B, C, D, E; b) četiri tačke i tangentom u jednoj od njih; c) tri tangente i dodirnim tačkama na dvema od njih. Odrediti presek krive sa jednom datom pravom koja prolazi kroz datu tačku krive.

Uputstvo. a) I. m e t o d a. Data prava p neka prolazi, po pretpostavci, kroz E. Krive II reda, opisane oko četvorotemenika $ABCD$, seku p u parovima tačaka, konjugovanim u istoj involuciji. Degenerisane krive toga pramena su parovi suprotnih stranica potpunog četvorotemenika $ABCD$. Tražena presečna tačka je, dakle, homologna tački E u involuciji, u kojoj suprotne strane tog četvorotemenika seku pravu p.

II. m e t o d a. Primeniti *Pascal*-ovu teoremu na šestougao $ABCDEF$, gde je F tražena presečna tačka. Nalazimo *Pascal*-ovu pravu $p_0 = (AB \cdot DE) \cdot (BC \cdot EF)$, gde $EF = p$. Presek prave $(DC \cdot p_0) \cdot A$ sa p je tražena tačka F.

132. Konusni presek je dat sa pet svojih tangenata a, b, c, d, e. Konstruisati drugu tangentu na krivu iz jedne date tačke A na tangenti a.

Rešenje. I. m e t o d a (primena *Desargues*-ove teoreme). Posmatrana kriva je upisana u četvorostranik $bcde$. Tangente, povučene iz A, na krive II reda koje su upisane u taj četvorostranik su konjugovane u istoj involuciji J; u toj involuciji su konjugovani i parovi pravih koje tačku A spajaju sa suprotnim temenima (degenerisane krive II klase) četvorostranika $bcde$, koji tu involuciju jednoznačno određuju. Tražena tangenta je, dakle, prava koja je konjugovana pravoj a u involuciji J.

II. m e t o d a. Primeniti *Brianchon*-ovu teoremu za šestougao $abcdet$, gde je t tražena tangenta. Određujemo *Brianchon*-ovu tačku $B=[(a\cdot b)\cdot(d\cdot e)]\cdot[(c\cdot d)\cdot(t\cdot a)]$, gde $t\cdot a=A$. Prava koja spaja tačke $b\cdot c$ i B seče e u E. Onda je $t=AE$.

Posmatrati i specijalne slučajeve kada se jedan ili dva para datih tangenata poklapa, tj. ako je umesto jednog para tangenata data jedna tangenta sa svojom dodirnom tačkom.

133. Konusni presek je dat sa pet svojih tangenata. Konstruisati tangentu, paralelnu jednoj datoj tangenti.

Uputstvo. Specijalan slučaj prethodnog zadatka.

134. Odrediti presek prave p sa krivom II reda od koje je dato pet tačaka A, B, C, M, N.

Rešenje. Posmatrajmo projektivnost π između pramenova pravih sa centrima u dve od pet datih tačaka, na primer u M, N, definisanu sa $MX\to NX$, gde je X promenljiva tačke krive. Parovi pravih MA, NA; MB, NB; MC, NC su korespondentni u π. One seku p u parovima tačaka A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2, koji su korespondentni u jednoj projektivnosti II tačaka prave p. Dvojne tačke u II, koje dobijamo *Steiner*-ovom konstrukcijom, tražene su presečne tačke.

135. Kriva II reda je data sa pet svojih tačaka. Ispitati da li je to elipsa, hiperbola, parabola ili par pravih.

Rešenje. Ako su tri od pet datih tačaka kolinearne, kriva degeneriše u par pravih. A ako to nije slučaj, onda je kriva nedegenerisana. Ona je hiperbola, parabola ili elipsa — prema tome da li sa beskrajnom pravom ima dve, jednu ili nijednu zajedničku tačku. Treba, dakle, seći krivu beskrajnom pravom (zad. 134).

136. Konstruisati asimptote jednakostrane hiperbole koja prolazi kroz četiri date tačke.

Uputstvo. Smerovi (tj. beskrajne tačke) asimptota su smerovi koji su ortogonalni i konjugovani u involuciji u kojoj krive II reda, koje prolaze kroz date četiri tačke, seku beskrajnu pravu.

137. Pokazati da parabola nema dve paralelne tangente.

Dokaz. Paralelne tangente krive su tangente povučene iz jedne tačke beskrajne prave. No, jedna od njih dve je kod parabole uvek sama beskrajna prava.

138. Krivoj II reda, kojoj je zadato pet tangenata, odrediti centar.

Uputstvo. Konstruisati, koristeći *Brianchon*-ovu teoremu, dve tangente respektivno paralelne sa dve date tangente. Ako se one poklope sa beskrajnom pravom, onda je kriva parabola, koja nema centar u konačnosti. U protivnom slučaju oba para paralelnih tangenti određuju jedan paralelogram, opisan krivoj. Presek njegovih dijagonala je centar krive.

139. Parabola je data sa tri tačke i pravcem dijametara. Odrediti njeno teme.

Uputstvo. Kroz datu tačku A krive povući normalu na smer dijametara i naći njen drugi presek A_1 sa krivom. Kroz sredinu duži AA_1 povući dijametar (osu) i odrediti njegov presek sa krivom.

140. Konusni presek je dat sa pet tačaka. Konstruisati one njegove tangente — ako postoje — koje su paralelne sa datom pravom p.

Uputstvo. Odrediti dijametar krive, konjugovan sa smerom prave p, a zatim odrediti njegove preseke sa krivom. To su dodirne tačke traženih tangenata.

141. Konusni presek je dat tačkama A, B, C i centrom O. Odrediti druge tačke krive.

Uputstvo. Primeniti prvo osobinu centra krive: tačke A_1, B_1, C_1, centrično simetrične u odnosu na O, naredne su tri tačke krive. Za određivanje narednih tačaka primeniti *Pascal*-ovu teoremu ili projektivne pramenove.

142. Kriva II reda je data sa pet tačaka. Kroz zadatu tačku P povući tetivu čija će sredina biti P.

Uputstvo. Odrediti centar O krive, a onda dijametar d koji je konjugovan sa OP. Tražena tetiva je paralelna sa d.

143. Koristeći samo sredstva projektivne geometrije, konstruisati ose elipse kojoj je dat jedan par konjugovanih prečnika, po položaju i veličini.

Uputstvo. Dati konjugovani dijametri neka su $d=AB$ i $d'=A'B'$; njihov presek je centar O krive. Neka je M sredina duži AA', a N sredina duži $A'B$. N je dakle sredina tetive $A'B$ koja je paralelna dijametru OM; sledi da su OM, ON konjugovani dijametri (po položaju). Time je, sa svoja dva konjugovana para d, d' i OM, ON, određena involucija J konjugovanih dijametara elipse. Treba konstruisati ortogonalni konjugovani par u J; to su ose. Temena se dobijaju kao preseci dobijenih osa sa krivom.

144. Date su ose simetrije i dve tačke A, B neke krive drugog reda Γ. Odrediti konstruktivno njena temena.

Uputstvo. Na jednom datom dijametru d odrediti involuciju J konjugovanih tačaka u odnosu na krivu Γ; dvojne tačke involucije J su temena na osi d krive Γ. Involuciju J odredićemo na sledeći način: presek O datih osa je njen centar, jer je O pol beskrajne prave; dalje, ako je tačka A' simetrična tački A u odnosu na d, onda je trougao $AA'B$ upisan u krivoj, a njegova stranica AA' je konjugovana sa d u odnosu na Γ, odakle — po *Staudt*-ovoj teoremi — izlazi da druge dve stranice trougla, prave AB, $A'B$, seku d u jednom paru konjugovanih tačaka u odnosu na Γ.

Rešiti zadatak i za slučaj da se tačke A, B poklope, tj. ako je umesto tačaka A, B data jedna tangenta sa svojom dodirnom tačkom.

145. Jedna kriva II reda prolazi kroz tačke A, B, C, D, E, a neka druga — kroz A, B, C, F, G. Konstrukcijom odrediti četvrtu zajedničku tačku krivih.

Rešenje. Tražena tačka neka je M. Krive II reda koje prolaze kroz A, B, C, M seku pravu DF u parovima tačaka, konjugovanim u jednoj involuciji J. Dva konjugovana para u J su parovi tačaka D, D' i F, F', gde D' i F' znače druge preseke prave DF sa prvom odnosno sa drugom datom krivom; njima je involucija J određena. Par pravih AB i CM seče DF još u jednom paru konjugovanih tačaka. Tački $AB \cdot DF$ ćemo, dakle, konstruisati konjugovanu tačku u J; neka je to C_1. Tačka M leži na CC_1. Analogno važi za par pravih AC, BM; za tačku $AC \cdot DF$ konstruišemo konjugovanu tačku u J — neka je to B_1. Tačka M leži i na BB_1. Time je tražena tačka $M=BB_1 \cdot CC_1$ određena.

146. Za dve date krive II reda poznate su dve zajedničke tačke. Odrediti ostale zajedničke tačke krivih.

Rešenje. Prva kriva neka je data tačkama A, B, C, D, E, a druga — tačkama A, B, F, G, H. Traže se još ostale dve zajedničke tačke; neka su to M, N. Prvo nalazimo (linearnom konstrukcijom) druge preseke F', D' prave FD sa prvom odnosno drugom krivom. Parovima F, F' i D, D' je određena na FD jedna involucija J. Svaka kriva II reda koja prolazi kroz A, B, M, N seče DF u jednom konjugovanom paru. I par pravih AB, MN je takva kriva;

za tačku $AB \cdot FD$ nalazimo konjugovanu tačku u J; ona leži dakle na MN. Ako analogno kao sa FD postupimo, na primer, sa pravom CG, dobijamo još jednu tačku na MN. Time je prava MN određena. Preseci prave MN sa bilo kojom od datih krivih su tražene zajedničke tačke.

147. Jedna kriva II reda Γ prolazi kroz tačke A, B, C, D, E, a jedan krug kroz D, E, F. Odrediti preseke krivih.

Rešenje. Neka je X promenljiva tačka na krivoj Γ, a X', X'' tačke u kojima prave DX, EX seku ponovo dati krug. Preslikavanje π: $X' \to X''$ je projektivnost tačaka kruga u sebe; ona je jednoznačno određena korespondentnim parovima tačaka u kojima parovi pravih DA, EA; DB, EB; DC, EC ponovo seku krug. Krug i kriva Γ seku se osim u tačkama E, D još i u dvojnim tačkama projektivnosti π.

148. Dato je pet tangenata a, b, c, d, e neke krive II reda i krug koji dodiruje d i e. Odrediti ostale zajedničke tangente te krive i kruga.

Uputstvo. Dualno zadatku 147.

149. Polare jedne iste tačke u odnosu na parove suprotnih stranica potpunog četvorotemenika seku se u jednoj tački.

Dokaz. Neka je P data tačka, a P' presek njenih polara u odnosu na parove HK, LM i HL, KM potpunog četvorotemenika $HKLM$. Preseci ovih pravih sa PP' neka su A, A'; B, B', a preseci prave PP' sa trećim parom suprotnih stranica HM, KL neka su C, C'. Tačke A, A'; B, B'; C, C' su konjugovane u involuciji J. A iz definicije pojma polare sledi da par P, P' razdvaja harmoniski parove A, A'; B, B', što znači da su P, P' dvojne tačke involucije I. A i tačke C, C' su jedan konjugovani par involucije, što dokazuje teoremu.

150. Polovi prave p u odnosu na parove suprotnih temena potpunog četvorotemenika su kolinearni. Koji specijalni stav se dobija ako je p beskrajna prava?

Dokaz i rezultat. Stav je dualan teoremi prethodnog zadatka. Slučaj da je p beskrajna prava daje: Sredine dijagonala potpunog četvorotemenika su kolinearne.

151. Pokazati da su polare centra kruga u odnosu na parove suprotnih stranica svakog, krugu upisanog, potpunog četvorotemenika paralelne.

Rešenje. Parovi suprotnih strana četvorotemenika i krug pripadaju istom pramenu krivih II reda. Polara centra O kruga u odnosu na krug je beskrajna prava p_∞, a sve polare tačke O u odnosu na krive pramena seku se u jednoj tački, koja leži dakle na p_∞.

152. U datu krivu II reda upisati trougao ABC čije stranice BC, CA, AB prolaze kroz tačke P, Q, R.

Rešenje. Na krivoj izabiramo proizvoljnu tačku A; AR neka seče krivu ponovo u B, BP neka je seče ponovo u C, a CQ neka je seče ponovo u A'. Ako A varira na krivoj, onda su preslikavanja $A \to B$, $B \to C$, $C \to A'$ tri involucije tačaka krive, a njihov proizvod, preslikavanje $A \to A'$, projektivnost π. Svaka dvojna tačka ove projektivnosti određuje po jedno teme A traženih trouglova. Problem ima, dakle, u opštem slučaju, dva, jedno ili nijedno rešenje.

Može se desiti da projektivnost π bude identitet. To je tačno onda kada je trougao PQR *autopolarni* trougao za datu krivu. Zaista, ako je PQR autopolaran, onda za tačke $L = QR \cdot BC$, $M = QP \cdot BA$, A, B, C, P, R važi

$$(B, C;\ L, P) = -1, \qquad (B, A;\ R, M) = -1.$$

Preslikavanje tačaka prave BC u tačke prave BA, kod koga su parovi B, B; C, A; L, R; P, M korespondentni, je dakle projektivnost. Kod ove projektivnosti zajednička tačka B pravih BC, BA odgovara sama sebi; projektivnost je zbog toga perspektivnost. Odavde sledi da se prave LR, CA, MP seku u jednoj tački, tj. tačka Q leži na CA, odakle sledi da se tačka A, koja je bila izabrana proizvoljno na krivoj, poklapa sa A'. U ovom slučaju problem ima bezbroj rešenja.

Obratno, ako je svaka tačka A na krivoj teme jednog traženog trougla, onda se pokazuje, idući u gornjem dokazu u obratnom pravcu, da je trougao PQR autopolaran.

Izvršiti konstrukcije za svaki mogući slučaj.

153. Stav „sredine dijagonala potpunog četvorostranika su kolinearne" transformisati pomoću jedne polarnosti.

Rešenje. Ako je P sredina dijagonale AA' potpunog četvorostranika, a Q beskrajna tačka te dijagonale, onda je $(A, A'; P, Q) = -1$. Imajući u vidu da kod polarnog preslikavanja harmoniski elementi prelaze u harmoniske, dobijamo transformisanjem gornjeg stava teoremu: „*Polare ma koje tačke u odnosu na parove suprotnih strana svakog potpunog četvorotemenika prolaze kroz jednu tačku*". (Videti i zad. 149.)

154. Stav da se visine u trouglu seku u jednoj tački transformisati pomoću jedne polarnosti kod koje je fundamentalna kriva krug.

Uputstvo i rezultat. Ako je O centar kruga, koji je izabran za fundamentalnu krivu, a p_1, p_2 — polare tačaka P_1, P_2, onda prave p_1, p_2 zahvataju isti ugao kao OP_1, OP_2. Transformisani stav glasi: *Normale, povučene iz bilo koje tačke O ravni trougla ABC na prave OA, OB, OC, seku stranice BC, CA, odnosno AB u tri kolinearne tačke.*

155. Normala fiksne krive II reda u njenoj fiksnoj tački O seče krivu ponovo u P. OQ, OR su dve promenljive normalne tetive krive. QP seče OR u M, a RP seče OQ u N. Pokazati da je prava MN fiksna.

Dokaz. MN je polara tačke $S = OP \cdot QR$. Preslikavanje $OQ \rightarrow OR$ je ortogonalna involucija u pramenu sa centrom u O; zbog toga je preslikavanje $Q \rightarrow R$ neka involucija J tačaka na krivoj. Odavde sledi da sve prave RQ prolaze kroz jednu istu tačku. Pošto je O, P jedan konjugovan par involucije J, izlazi da je ta tačka tačka S. Pošto je tačka S fiksna, fiksna je i njena polara MN.

156. Odrediti geometrisko mesto polova jedne fiksne prave p u odnosu na krive II reda koje pripadaju jednom pramenu.

Rezultat. Kriva II reda Γ koja prolazi kroz temena A, B, C zajedničkog polarnog trotemenika i kroz dodirne tačke M, N prave p sa onim krivima pramena koje dodiruju p.

Specijalno, ako je p beskrajna prava, sleduje teorema: Geometrisko mesto centara krivih II reda nekog pramena je konusni presek Γ koji prolazi osim kroz A, B, C, M, N još i kroz sredine sranica potpunog četvorotemenika, čija su temena bazne tačke datog pramena.

157. Odrediti geometrisko mesto centara krivih II reda koje prolaze kroz temena P, Q, R i ortocentar O trougla PQR.

Rešenje. Degenerisane krive pramena su tri para normalnih pravih. Involucija u kojoj krive pramena seku beskrajnu pravu je, dakle, ortogonalna involucija; njene dvojne tačke su apsolutno-kružne tačke I_1, I_2. Krive pramena su jednakostrane hiperbole, a geometrisko mesto centara (videti zad. 156) prolazi kroz I_1, I_2 (jer to su tačke kojima odgovaraju u zad. 156 tačke M, N), koja je stoga krug. To je *krug devet tačaka* ili *Feuerbach*-ov (medijalni) krug trougla PQR; on prolazi kroz šest sredina stranica potpunog četvorotemenika $PQRO$ i kroz njegove tri dijagonalne tačke, tj. kroz podnožne tačke visina trougla PQR.

158. Odrediti geometrisko mesto polova jedne fiksne prave p u odnosu na krive druge klase jednog liniskog pramena. Specijalno i za slučaj da je p beskrajna prava.

Rezultat. Jedna prava p', ako p nije stranica jednog zajedničkog polarnog trostranika. Prave p i p' zovu se *konjugovane* u odnosu na dati pramen.

Za slučaj da je p beskrajna prava sledi teorema: *Geometrisko mesto centra konusnih preseka, upisanih u jedan četvorostranik, je prava koja prolazi kroz sredine njegovih triju dijagonala;* a odavde teorema da su *sredine dijagonala potpunog četvorostranika kolinearne.*

159. Šta je geometrisko mesto polova jedne fiksne prave p u odnosu na konusne preseke čije su žiže date tačke F, F'?

Rešenje. Posmatrani konusni preseci su krive II reda koji su upisani u potpuni četvorostranik, čije su stranice četiri prave koje apsolutno-kružne tačke beskrajne prave spajaju sa datim žižama F, F'; one pripadaju jednom homofokalnom pramenu konusnih preseka. Traženo geometrisko mesto je (zad. 158) jedna prava p'. Ako je $A = p \cdot FF'$, a A' četvrta harmoniska tačka za tačke F, F', A, onda p' prolazi kroz A'. Par apsolutno-kružnih tačaka je jedna degenerisana kriva pramena; zato ovaj par tačaka razdvaja harmoniski par beskrajnih tačaka pravih p, p', odakle sledi $p \perp p'$. Time je prava p' određena.

160. Pokazati da se krive II reda jednog homofokalnog pramena, koje prolaze kroz istu tačku T, seku u ovoj tački ortogonalno.

Dokaz. Parovi tangenata, povučenih iz T na krive datog pramena su konjugovani u jednoj involuciji J. Jedan konjugovan par u J pretstavljaju i prave koje T spajaju sa apsolutno-kružnim tačkama (jer par apsolutno-kružnih tačaka je degenerisana kriva pramena), tj. izotropne prave. Involucija J je, prema tome, *inverzna kongruencija* pravih. U njoj su dvojne prave normalne, a to su tangente dveju krivih pramena koje prolaze kroz T.

161. Dualizovati zad. 156. Specijalno za homofokalni pramen.

Rešenje. Anvelopa polara tačke P u odnosu na jedan (liniski) pramen krivih II klase je konusni presek Γ koji dodiruje zajednički polarni trostranik abc i dvojne zrake m, n u involuciji parova tangenata, povučenih iz P na krive pramena.

Specijalno, ako je pramen *homofokalan*, jedna stranica polarnog trostranika abc je beskrajna (na njoj leže naime apsolutno-kružne tačke), na primer c; a druge dve — budući da njihove beskrajne tačke razdvaja par apsolutno-kružnih tačaka harmoniski — uzajamno su normalne, znači $a \perp b$. Osim toga je $m \perp n$ (zad. 160). Kriva Γ je, dakle, *parabola* koja dodiruje ose a i b krivih pramena i tangente m, n onih krivih pramena koje prolaze kroz P.

162. Pokazati da je geometrisko mesto centara krivih II reda, koje prolaze kroz četiri tačke jednog kruga, jednakostrana hiperbola.

Rešenje. Krive obrazuju pramen koji beskrajnu pravu p_∞ seče u involuciji. Jedan konjugovan par su i apsolutno-kružne tačke — preseci kruga i p_∞. Zato dvojne tačke involucije određuju dva normalna pravca. Odavde i iz zad. 156 sledi gornja teorema.

163. Šta je geometrisko mesto tačaka, iz kojih se sve krive II klase jednog tangentnog pramena vide pod pravim uglom?

Rešenje. Parovi tangenata, povučeni iz jedne tačke P na krive pramena, obrazuju konjugovane parove u jednoj involuciji J. Uslovu zadatka odgovaraju one tačke P za koje je involucija J ortogonalna. A involucija je ortogonalna ako ima dva ortogonalna konjugovana para. Dovoljno je, znači, naći one tačke P iz kojih se bilo koje dve krive iz posmatranog pramena vide pod pravim uglom, na primer bilo koje dve od tri postojeće degenerisane krive. Traženo geometrisko mesto pretstavljaju, dakle, dve tačke — presečne tačke krugova, čiji su dijametri dijagonale četvorostranika u koji su krive pramena upisane (vidi zad. 55; ovim je ponovo dokazano da ovi krugovi pripadaju jednom pramenu krugova) — ako nijedna stranica četvorostranika nije beskrajna. A ako je jedna od tih stranica beskrajna, dobijamo teoremu: *Sve parabole, upisane u jedan trougao, vide se iz njegovog ortocentra, i samo iz njega, pod pravim uglom.*

164. Ortocentri svih trouglova koje grade bilo koje tri stranice jednog potpunog četvorostranika leže na zajedničkoj radikalnoj osi r krugova čiji su dijametri dijagonale tog četvorostranika.

Dokaz. Sve tačke iz kojih se parabola, upisana u dati četvorostranik, vidi pod pravim uglom, leže na jednoj pravoj (zad. 80), a pošto su dve od njih na r (zad. 163), to je baš r ta prava. A ta parabola je upisana i u svaki od pomenutih trouglova, pa se vidi pod pravim uglom (zad. 163) iz njihovih ortocentara, koji prema tome leže na r.

165. Konstruisati direktrisu parabole, upisane u dati četvorostranik.

Rezultat. Prava r prethodnog zadatka.

166. Odrediti geometrisko mesto ortocentara svih trouglova opisanih oko jedne fiksne parabole.

Rezultat. Direktrisa parabole.

167. Duž koju dve fiksne tangente t_1, t_2 neke krive II reda Γ isecaju na jednoj promenljivoj tangenti t vidi se iz svake žiže krive pod konstantnim uglom.

Dokaz. Posmatramo četiri fiksne tangente na Γ: t_1, t_2 i FI_1, FI_2, gde je F žiža, a I_1, I_2 apsolutno-kružne tačke ravni. Promenljiva tangenta t neka seče t_1 u T_1, a t_2 u T_2. Preslikavanje $FT_1 \rightarrow FT_2$ je jedna projektivnost π. Preseci pravih FT_1, FT_2 sa p_∞ su zato korespondentni opet u jednoj projektivnosti, a u njoj su I_1, I_2 dvojne tačke; u π su dvojni elementi, dakle, izotropne prave FI_1, FI_2. Preslikavanje π je stoga direktna kongruencija pravih u pramenu sa centrom u F, čime je stav dokazan.

168. Neka je AB proizvoljna tetiva i C njen pol u odnosu na dati konusni presek Γ čiji je jedan fokus F. Pokazati da FC polovi ugao AFB.

Rešenje. Neka je D presek direktrise d u odnosu na F (polare od F) sa AB, a D' presek pravih FC i AB. Prave FC, FD su konjugovane u odnosu na Γ i zato normalne. A i B su dvojne tačke u involuciji na pravoj AB konjugovanih tačaka u odnosu na Γ; zato je $(A, B; D, D') = -1$. Iz $(FA, FB; FD, FD') = -1$ i $FD \perp FD'$ sledi da je $FD' = FC$ simetrala ugla AFB.

169. Date su ose simetrije a, b, tangenta t i njena dodirna tačka T konusnog preseka Γ. Konstruktivno odrediti centar oskulatornog kruga krive Γ u tački T.

Rešenje. I. m e t o d a. Posmatrajmo homofokalni pramen kome pripada Γ. Neka je Γ_1 jedna kriva pramena koja ne prolazi kroz T. Tangente iz T na Γ_1 neka su t_1, t_2, a T_1, T_2, njihove dodirne tačke. Prave t_1', t_2', koje su konjugovane sa t_1 odnosno sa t_2 u odnosu na posmatrani pramen, prolaze kroz T_1 odnosno T_2 i normalne su na t_1 odnosno t_2 (zad. 159). Onda su i t_1, t_2 konjugovane sa t_1', odnosno t_2' u odnosu na taj pramen; prava t_1 (t_2) je dakle geometrisko mesto polova prave t_1' (t_2') u odnosu na krive pramena. Sledi da su prave t_1', t_2' polare tačke $T = t_1 \cdot t_2$ u odnosu na dve krive pramena, odakle proizilazi (zad. 161) da su one dve tangente parabole II, koja dodiruje prave a, b i tangentu t i normalu n krive Γ u tački T. Ako se tačka T_1 krive neograničeno približava tački T_2, tj. $T_1 = T_2 = T$, dobijamo za granični položaj preseka pravih t_1' i t_2' dodirnu tačku C prave n sa parabolom II. Tačka C je traženi centar krivine krive Γ u tački T.

Centar krivine C možemo konstruktivno odrediti pomoću *Brianchon*-ove teoreme, nalazeći za parabolu, upisanu u četvorostranik *abtn*, njenu dodirnu tačku sa pravom n.

II. m e t o d a. Iz zad. 100 sledi da zajedničke tetive bilo kojeg konusnog preseka Γ i kruga k, uzete dve po dve, obrazuju sa osama krive Γ jednake uglove. Neka se Γ i k seku u tačkama A, B, C, D, i neka $A \equiv B \equiv C$, tj. krug k neka je oskulatorni krug krive Γ za tačku A. Onda tangenta $t = AB$ na Γ u A i tetiva CD obrazuju jednake uglove sa osama krive Γ. Simetrala duži CD seče normalu na tangentu t povučenu u A, u tački S koja je centar oskulatornog kruga k.

Ako je, dakle, data tangenta t krive Γ i njen dodir T, crtamo pravu koja sa osama a, b zahvata iste uglove kao t i koja prolazi kroz T; onda određujemo njen drugi presek D sa Γ. Simetralu duži TD sečemo normalom podignutom na t u T. Presečna tačka je traženi centar oskulatornog kruga.

Ove metode su upotrebljive samo onda kada T nije neko teme krive Γ. Ako je T teme, upotrebljavaju se poznate metričke metode.

170. Odrediti poluprečnik krivine hiperbole u datoj tački, ako su date i njene asimptote.

171. U koliko oblasti deli projektivnu ravan n pravih u opštem položaju?

Rešenje. $n-1$ pravih neka deli ravan u N_{n-1} oblasti. Ako dodamo još jednu pravu, tj. n-tu, onda ona seče prvih $n-1$ pravih u $n-1$ tačaka; ona, znači, prolazi kroz $n-1$ oblasti, od kojih svaku deli na dva dela. Prema tome važi

$$N_n = N_{n-1} + n - 1, \quad \text{ili} \quad N_n - N_{n-1} = n-1,$$

odakle iz

$$N_n = N_1 + (N_2 - N_1) + (N_3 - N_2) + \cdots + (N_n - N_{n-1}), \quad \text{i} \quad N_1 = 1$$

sleduje

$$N_n = 1 + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)] = 1 + \binom{n}{2}.$$

172. U projektivnoj ravni je dato n tačaka u opštem položaju. a) Koliko pravih prolazi kroz te tačke? b) U koliko tačaka, osim u datih n tačaka, se seku te prave? c) Dualizovati.

Rešenje. a) Svaki par tačaka određuje po jednu pravu. Ima, znači, toliko pravih na koliko se načina mogu izabrati po dve tačke od n datih, tj. broj pravih jednak je broju kombinacija klase 2 od n elemenata. Kroz n tačaka prolazi $\binom{n}{2}$ pravih — potpuni n-temenik ima $\binom{n}{2}$ stranica.

b) One tačke u kojima se seku posmatrane prave, a različite su od n datih tačaka, zovu se *dijagonalne tačke* potpunog n-temenika, čija su *temena* date n tačke. Svaku pravu p — stranicu potpunog n-temenika — seku ostale $\binom{n}{2}-1$ prave u $\binom{n}{2}-1$ tačka. Dve od njih su temena, kroz koje prolazi po $n-1$ stranica, uključujući tu i samu pravu p; znači, kroz svako teme prolaze osim stranice p još $n-2$ stranice. Na pravoj p imamo, prema tome, $\binom{n}{2}-1-2(n-2)$ dijagonalnih tačaka. Na svim stranicama ima ih

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}\left[\binom{n}{2}-1-2(n-2)\right] = \frac{1}{8}\, n(n-1)(n-2)(n-3) = 3\binom{n}{4}.$$

173. Konstruisati dvojne tačke projektivnosti tačaka ravni u sebe, ako je data jedna dvojna tačka $A = A'$ i dva korespondentna trougla BCD i $B'C'D'$.

Rešenje. U projektivnosti pravih sa zajedničkim centrom $A = A'$, definisanoj sa $AB \to A'B'$, $AC \to A'C'$, $AD \to A'D'$, konstruišemo dvojne prave m, n. Data projektivnost tačaka ravni u sebe inducira na m (i na n) jednu projektivnost, u kojoj je $A = A'$ dvojna tačka; linearnom konstrukcijom odredimo drugu dvojnu tačku M na m (i N na n). Dvojne tačke date projektivnosti ravni su A, M, N.

174. Pokazati kakvo je specijalno preslikavanje kolineacija između dve ravni σ i σ', ako se kod nje preslikava: a) dati paralelogram ravni σ u dati paralelogram ravni σ'; b) dati kvadrat u dati kvadrat; c) pravi uglovi ravni σ u prave uglove ravni σ'; d) dati krug k ravni σ u dati krug k' ravni σ' i centar kruga k u centar kruga k'; e) krugovi ravni σ u krugove ravni σ'.

Uputstvo i rezultati. a) Beskrajna prava ravni σ preslikava se u beskrajnu pravu ravni σ'. Kolineacija je *afino* preslikavanje.

b) Ortogonalna (apsolutna) involucija beskrajne prave u σ transformiše se u ortogonalnu involuciju beskrajne prave ravni σ' (smerovi stranica kvadrata i njegovih dijagonala su dva para ortogonalnih smerova), znači apsolutno-kružne tačke jedne ravni prelaze u apsolutno-kružne tačke druge. Kolineacija je *sličnost*.

c) Sličnost.

d) Beskrajne tačke dijametara kruga k prelaze u beskrajne tačke dijametara kruga k', znači beskrajna prava p_∞ ravni σ u beskrajnu pravu ravni σ'; sledi da i apsolutno-kružne tačke (presek kruga k i p_∞) ravni σ prelaze u apsolutno-kružne tačke ravni σ'. Kolineacija je dakle *sličnost*.

e) Sličnost.

175. Jedna sličnost $\sum$ ravni σ je data sa dva korespondentna para tačaka A, A'; B, B'. Konstruktivno odrediti konačnu dvojnu tačku sličnosti $\sum$.

Rešenje. Sličnost je specijalno projektivno preslikavanje. U pramenima pravih sa centrima u A, A' ona inducira projektivnost, čiji se korespondentni zraci seku na jednoj krivoj II reda, koja prolazi kroz tačke $A, A', C = AB \cdot A'B'$ i kroz apsolutno-kružne tačke ravni σ; kriva je dakle krug opisan oko trougla $AA'C$. Analogno, korespondentni zraci u projektivnim pramenovima pravih sa centrima B, B' se seku na krugu, opisanom trouglu $BB'C$. Ova dva kruga seku se osim u C, još u jednoj tački M. Slika tačke M u sličnosti $\sum$ leži i na pravoj $A'M$ i na pravoj $B'M$; ona se preslikava, dakle, u sebe. M je tražena dvojna tačka sličnosti $\sum$.

176. Afino preslikavanje je specijalno projektivno preslikavanje tačaka jedne ravni π u tačke druge ravni π', u kome se beskrajna prava ravni π preslikava u beskrajnu pravu ravni π'. Na osnovu toga pokazati da za afina preslikavanja važi: a) korespondentni nizovi su slični; b) odnos površina dva paralelograma (dve pravoliniske, dve krivoliniske figure) ne menja se.

177. Jedna homologija je data svojim centrom, svojom osom i bežnom pravom j. Nacrtati slike (tačke, tangente) kruga, koji: a) seče pravu j; b) dodiruje pravu j; c) sa pravom j nema zajedničkih tačaka.

Rezultati. a) Hiperbola; b) parabola; c) elipsa.

178. Primenom centralne kolineacije (homologije) odrediti tačke i tangente konusnog preseka Γ, kome su date tačke A, B, C, D i tangenta a u A.

Rešenje. Konstruišemo krug k koji dodiruje a u A i prolazi kroz B. Određujemo jednu homologiju χ u kojoj će se krug k preslikati u krivu Γ. Za centar O homologije izabiramo tačku A; tangenta a kruga k u A preslikaće se onda zaista u tangentu krive Γ u A. Drugim presecima C_1, D_1 pravih AC, AD sa k odgovaraju u χ tačke C, D; osa o homologije χ prolazi dakle kroz tačku $CD \cdot C_1 D_1$. Tako možemo nacrtati osu $o = B \cdot (CD \cdot C_1 D_1)$. Sa centrom O, osom o i jednim korespondentnim parom, na primer C_1, C, homologija χ je potpuno određena. Nalazeći, u ovoj homologiji, slike raznih tačaka i tangenata kruga k, dobijamo tačke i tangente konusnog preseka Γ.

179. Pomoću homologije konstruisati krivu II reda Γ koja dodiruje date prave a, b u tačkama A odnosno B i prolazi još kroz datu tačku C.

Rešenje. I. m e t o d a. Specijalan slučaj prethodnog zadatka.

II. m e t o d a. Konstruišemo jedan krug k, koji dodiruje prave a, b. Ako je bar jedna od tačaka A, B u konačnosti, izaberimo je za dodir kruga k i prave a odnosno b. Neka u datom slučaju to bude tačka A. Tačku $O = a \cdot b$ izabiramo za centar jedne homologije χ koja k preslikava u Γ. Onda tačka A odgovara sama sebi; osa homologije prolazi dakle kroz A. Dodir B_1 kruga k sa b odgovara tački B. Neka je C_1 jedan od preseka prave OC sa k; onda u χ tački C_1 odgovara tačka C. Osa homologije prolazi, znači, kroz tačku $BC \cdot B_1 C_1$. Time je homologija χ određena.

Posmatrati i metričke specijalne slučajeve, kada su jedan ili dva od datih elemenata beskrajni.

180. Pomoću homologije odrediti naredne tačke i tangente konusnog preseka Γ, kome su date tangente a, b, c i dodirne tačke A, B na a, b.

Uputstvo. Ako je tačka A u konačnosti, konstruišemo krug k koji dodiruje prave a i c, a njegov dodir sa a je u A. Odredićemo jednu homologiju χ koja će krug k preslikati u krivu Γ. Neka je B_1 jedan od preseka kruga k sa pravom koja tačku $O = a \cdot c$ spaja sa B, a b_1 tangenta kruga k u tački B_1. Onda homologija χ sa centrom u O i osom $o = A \cdot (b \cdot b_1)$, kod koje je B_1, B jedan korespondentan par, preslikava k u Γ.

181. Podesno izabranom homologijom odrediti naredne tačke i tangente konusnog preseka Γ kome su date tri tačke A, B, C i oskulatorni krug k za tačku A.

Rešenje. Odredićemo jednu homologiju χ koja će dati oskulatorni krug k preslikati u krivu Γ. Krug k i kriva Γ moraju imati u A bar trojni presek, tj. moraju imati tri „beskrajno bliske" zajedničke tačke. Centar homologije izabiramo u A; krug k i preslikana kriva imaju onda u A zajedničku tangentu, dakle dvojni presek, dok su druge dve zajedničke tačke — presečne tačke ose o homologije χ i kruga k. Treba, dakle, homologiju χ izabrati tako da osa prolazi kroz $O \equiv A$. Tražena homologija, znači, ima za osu pravu koja spaja tačke A i $BC \cdot B_1C_1$, gde B_1, C_1 znače druge preseke kruga k sa AB odn. AC. Centrom O, osom o i jednim korespondentnim parom, na primer B_1, B, homotetija χ je određena.

Posmatrati i sledeće specijalne slučajeve: a) mesto tačaka B, C data je tangenta sa dodirnom tačkom B; b) ako je u slučaju a) tačka B beskrajna; c) ako je u slučaju b) još i tačka A beskrajna.

182. Konusnom preseku Γ su date četiri tačke A, B, C, D i tangenta a u A. Pomoću homologije odrediti oskulatorni krug krive Γ za tačku A.

Rešenje. Uzimamo bilo koji krug k' koji dodiruje pravu a u A i jednu homologiju χ' koja krug k' preslikava u Γ. Neka su B', C', D' drugi preseci kruga k' sa AB, AC, AD. Centar O homologije χ' izabiramo u A, a za osu pravu $o' = (BC \cdot B'C') \cdot (CD \cdot C'D')$. Ako prava o' prolazi kroz A, onda je k' već traženi oskulatorni krug (vidi zad. 181). A ako to nije slučaj, povlačimo kroz tačku $A \equiv O$ pravu o, paralelnu sa o'; njeni preseci sa BC, CD neka su L, M. Kroz L povlačimo pravu paralelnu sa $B'C'$, a kroz M pravu paralelnu sa $C'D'$; njihov presek neka je C_1. Konstruišemo krug k koji dodiruje a u A i prolazi kroz C_1. To je traženi oskulatorni krug. D o k a z: Lako se uvida da C_1 leži na AC. Trougao $B_1C_1D_1$, gde je $B_1 = AB \cdot LC_1$, $D_1 = AD \cdot MC_1$, je homotetičan sa trouglom $B'C'D'$ sa centrom homotetije u A; kod iste homotetije prelazi krug k' u krug k_1, koji prolazi kroz tačke A, B_1, C_1, D_1 i dodiruje a u A. Ovaj krug k_1 je dakle baš krug k; a njegove tačke A, B_1, C_1, D_1 i tangenta a preslikavaju se kod homologije χ, čiji je centar tačka A, osa — prava o, a C_1, C jedan korespondentan par tačaka, u tačke A, B, C, D i u tangentu a krive Γ; komologija χ preslikava, prema tome, krug k u krivu Γ. Pošto osa o homologije χ prolazi kroz A (zad. 181), imaju krug k i kriva Γ u A tri zajedničke tačke, pa sledi da je k, zaista, oskulatorni krug krive Γ u tački A.

II. ANALITIČKA METODA

183. Tačke A, B, E neke prave čije su homogene koordinate u jednom projektivnom (ili afinom) koordinatnom sistemu (a_1, a_2), (b_1, b_2), (e_1, e_2) uzimamo za bazne tačke i za jediničnu tačku jednog novog projektivnog koordinatnog sistema. Odrediti transformacione jednačine koordinata tačaka.

Rešenje. Proizvoljna tačka X neka ima u starom sistemu koordinate x_1, x_2, a u novom x_1', x_2'. Onda je

$$x_1' : x_2' = (A, B; E, X) = \frac{(AE)}{(BE)} : \frac{(AX)}{(BX)},$$

gde simbol (MN) znači determinantu čije su vrste stare koordinate tačaka M, N. Dakle

$$x_1' : x_2' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ e_1 & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ e_1 & e_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}},$$

ili

(1) $$x_1' : x_2' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ e_1 & e_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ e_1 & e_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

184. Na svakoj od dve prave p, p' dat je po jedan koordinatni sistem. Naći jednačine projektivnog preslikavanja tačaka prave p u tačke prave p', u kojem tačkama (a_1, a_2), (b_1, b_2), (e_1, e_2) prave p odgovaraju respektivno tačke $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ prave p'.

Rezultat. Koordinate x_1, x_2 originalne tačke X vezane su sa koordinatama x_1', x_2' njene slike X' jednačinom (1) prethodnog zadatka.

185. Date su tačke O, X, Y, U, V jedne ravni. Izraziti dvojni odnos pravih OX, OY, OU, OV kao funkciju koordinata tih pet tačaka.

Rešenje. U nekom projektivnom koordinatnom sistemu su date koordinate

$$(o_1, o_2, o_3), \ldots, (v_1, v_2, v_3) \quad \text{tačaka} \quad O, \ldots, V.$$

Služićemo se uobičajenom vektorskom simbolikom. Tako će nam, na primer, A značiti uređenu trojku koordinata (a_1, a_2, a_3); formalno izračunati vektorski proizvod $[XY]$ — kao da su projektivne koordinate tačaka X, Y pravougle koordinate dvaju vektora X, Y u prostoru — daje nam projektivne koordinate prave XY; anulirani formalno izračunati skalarni proizvod $[UV]\cdot X=0$ daje nam analitički uslov za incidentnost tačke X sa pravom $[UV]$ itd.

Pošto su prave $x=OX$, $y=OY$, $u=OU$, $v=OV$ kopunktualne, postoje takvi skalari λ_1, μ_1; λ_2, μ_2 da važi

$$(1) \qquad \lambda_1[OX]+\mu_1[OY]=[OU], \qquad \lambda_2[OX]+\mu_2[OY]=[OV].$$

Traženi dvojni odnos $(x, y;\, u, v)$ je jednak odnosu $\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}:\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}$. Treba naći u (1) izraze λ_1/μ_1 i λ_2/μ_2. Množenjem prve jednačine (1) skalarno sa Y, a onda sa X, dobijamo — koristeći vektorski identitet $[OX]\cdot Y=(OXY)$ — jednačine

$$\lambda_1(OXY)=(OUY), \qquad \mu_1\cdot(OYX)=(OUX),$$

odakle

$$(2) \qquad \frac{\lambda_1}{\mu_1}=-\frac{(OUY)}{(OUX)}.$$

Na analogan način dobijamo

$$(3) \qquad \frac{\lambda_2}{\mu_2}=-\frac{(OVY)}{(OVX)}.$$

Iz (2), (3) sleduje

$$(x, y;\, u, v)=\frac{\lambda_2}{\mu_2}:\frac{\lambda_1}{\mu_1}=\frac{(OVY)}{(OVX)}:\frac{(OUY)}{(OUX)},$$

ili

$$(OX, OY;\, OU, OV)=\frac{(OXU)}{(OYU)}:\frac{(OXV)}{(OYV)},$$

gde simbol (ABC) označuje determinantu čije su vrste koordinate tačaka A, B, C.

Izvođenje je izvršeno pri pretpostavci da tačke O, X, Y nisu kolinearne. A koliki je dvojni odnos ako su one kolinearne?

186. Pokazati da transformacione jednačine koordinata tačaka jedne prave pri prelazu na novi sistem, u kome su tačke $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ fundamentalne, a tačka $E(e_1, e_2)$ — jedinična tačka, možemo napisati u obliku

$$x_i=(EB)\cdot a_i x_1'+(AE)\cdot b_i x_2' \qquad (i=1, 2),$$

gde simbol (MN) znači determinantu čije su vrste stare koordinate tačaka M, N. Zatim rešiti ovaj sistem jednačina po x_i'.

Rezultat.

$$x_1' : x_2'=\frac{(XB)}{(EB)}:\frac{(AX)}{(AE)}=(AE)\cdot(BX):(BE)\cdot(AX),$$

što se slaže sa jednačinom (1) zadatka 183.

187. Naći jednačine projektivnog preslikavanja tačaka prave p u tačke prave p', u kome datim tačkama $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ prave p odgovaraju respektivno tačke $A'(a_1', a_2')$, $B'(b_1', b_2')$, $C'(c_1', c_2')$ prave p'.

Rešenje. Koordinate a_i, b_i, c_i tačaka A, B, C odnose se na jedan dati koordinatni sistem na p, a koordinate a_i', b_i', c_i' — na jedan dati koordinatni sistem na p'. I na jednoj i na drugoj pravoj izabraćemo nove koordinatne sisteme, i to takve da tačke A, B budu fundamentalne, a C — jedinična tačka novog koordinatnog sistema na p, a tačke A', B' fundamentalne, a C' — jedinična tačka novog koordinatnog sistema na p'. Stare i nove koordinate iste tačke na p obeležićemo sa x_i odnosno x_i^*, a stare i nove koordinate iste tačke na p' sa x_i' odnosno $x_i'^*$. Imamo dakle (zad. 186)

(1) $$x_i = (CB)\cdot a_i x_1^* + (AC)\cdot b_i x_2^*, \quad x_i' = (C'B')\cdot a_i' x_1'^* + (A'C')\cdot b_i' x_2'^* \qquad (i=1,\ 2).$$

Jednačine datog preslikavanja u novim koordinatama glase $x_1'^* = x_1^*$, $x_2'^* = x_2^*$. Da bismo dobili jednačine preslikavanja u starim, prvobitno datim koordinatama, rešićemo drugi sistem (1) po $x_i'^*$; dobijamo (zad. 186)

$$x_1'^* : x_2'^* = \frac{(X'B')}{(C'B')} : \frac{(A'X')}{(A'C')}.$$

Ove vrednosti za $x_i'^*$, zbog $x_i'^* = x_i^*$, unosimo u prvi sistem (1), pa izlazi

(2) $$x_i = \frac{(CB)}{(C'B')}\cdot(X'B')\cdot a_i + \frac{(AC)}{(A'C')}(A'X')\cdot b_i \qquad (i=1,2).$$

Analogno dobija se

(3) $$x_i' = \frac{(C'B')}{(CB)}\cdot(XB)\cdot a_i' + \frac{(A'C')}{(AC)}\cdot(AX)\cdot b_i' \qquad (i=1,2).$$

Jednačine (2) odnosno (3) su tražene transformacione jednačine. Jednačine (3), na primer, potpuno ispisane glase

$$x_i' = \frac{\begin{vmatrix} c_1' & c_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot a_i' + \frac{\begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ c_1' & c_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot b_i' \qquad (i=1,2).$$

188. Pokazati da sva projektivna preslikavanja tačaka jedne prave u sebe, koje ostavljaju dve tačke prave nepomičnim, obrazuju grupu.

Uputstvo. Date dve tačke izabrati za fundamentalne tačke koordinatnog sistema.

189. Pokazati da se tačke apstraktne projektivne realne ravni mogu realizovati kao krugovi i prave Euklidove ravni koje prolaze kroz jednu fiksnu tačku O. Na koji način je realizovana projektivna prava u ovoj interpretaciji? Kako glasi *Pappus*-ov stav u ovoj interpretaciji?

Rešenje. 1° Neka je M množina tačno određenih elemenata, koji mogu biti ma kakve prirode. Ako za elemente množine M važi: 1) svaki element množine M određuje jednu uređenu trojku realnih brojeva $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, različitu od $(0, 0, 0)$; 2) svakoj uređenoj trojki realnih brojeva $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, različitoj od $(0, 0, 0)$, odgovara jedan element množine M; 3) ako je jedan element iz M određen trojkom $(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0)$, onda i trojka $(\rho\lambda_1^0, \rho\lambda_2^0\ \rho\lambda_3^0)$, za svaki realni $\rho \neq 0$, određuje isti element — onda množina M realizuje apstraktnu realnu projektivnu ravan.

Ako je O zadata fiksna tačka Euklidove ravni, onda sve krugove i prave koje prolaze kroz O određuje jednačina

(1) $$\lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot y + \lambda_3\,(x^2+y^2) = 0,$$

ako su x, y pravougle Dekartove koordinate tačaka Euklidove ravni sa koordinatnim početkom u O. Ako λ_1, λ_2, λ_3 uzimaju sve moguće realne vrednosti, krive (1) obrazuju elemente neke množine M, za koje je lako proveriti da za njih važe gore nabrojene osobine 1), 2), 3); pri tome u množinu M spada i tačka O (krug radijusa 0), kao objekt koji u posmatranoj realizaciji odgovara tački $(0, 0, 1)$ apstraktne ravni. Znači, krive (1) zaista pretstavljaju jednu realizaciju tačaka realne projektivne ravni.

2° Ako su (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) dve tačke apstraktne projektivne realne ravni, onda su tačke $\lambda\cdot(a_1, a_1, a_3) + \mu\cdot(b_1, b_2, b_3) = (\lambda a_1 + \mu b_1,\ \lambda a_2 + \mu b_2,\ \lambda a_3 + \mu b_3)$, gde λ i μ uzimaju sve moguće realne vrednosti — sa jedinim izuzetkom da ne bude $\lambda = \mu = 0$ — tačno sve tačke projektivne prave koja je određena tim tačkama. U našoj realizaciji tačkama projektivne prave odgovaraju krive

$$(\lambda a_1 + \mu b_1)\,x + (\lambda a_2 + \mu b_2)\,y + (\lambda a_3 + \mu b_3)\,(x^2+y^2) = 0,$$

ili

$$\lambda\,[a_1 x + a_2 y + a_3 (x^2 + y^2)] + \mu\,[b_1 x + b_2 y + b_3 (x^2 + y^2)] = 0,$$

dakle pramen krivih (1).

3° *Pappus*-ov stav glasi: Ako su tačke 1, 2, 3, kao i tačke 1′, 2′, 3′, kolinearne, onda su kolinearne i tačke (1·2′)·(1′·2); (1·3′)·(1′·3); (2·3′)·(2′·3). U našoj realizaciji kolinearnim tačkama apstraktne ravni odgovaraju krugovi (ili prave) koji prolaze kroz O i pripadaju jednom pramenu. Za *Pappus*-ov stav dobijamo u posmatranoj realizaciji, dakle, ovu teoremu: Neka su O, P, P' tri tačke; k_1, k_2, k_3 neka su tri kruga koji prolaze kroz O, P, a k_1', k_2', k_3'—tri kruga koji prolaze kroz O i P'; parovi krugova k_1, k_2'; k_1', k_2; k_1, k_3'; k_1', k_3; k_2, k_3'; k_2', k_3 seku se osim u O još u tačkama $P_{12}, P_{21}, P_{13}, P_{31}, P_{23}, P_{32}$. Onda se krugovi, opisani oko trouglova $OP_{12}P_{21}$, $OP_{13}P_{31}$, $OP_{23}P_{32}$, seku osim u O još u jednoj zajedničkoj tački.

190. Date su koordinate tačaka A_1, A_2, A_3, E, među kojima nema tri koje su kolinearne. Naći transformacione jednačine koordinata tačaka za prelaz iz datog sistema u novi koordinatni sistem, čiji koordinatni trougao je trougao $A_1A_2A_3$, a E — jedinična tačka.

Rešenje. Za koordinate x_1', x_2', x_3' bilo koje tačke X u odnosu na novi koordinatni sistem važe relacije, koje pomoću vektorske simbolike (videti zad. 185) možemo napisati u kondenzovanom obliku

$$X = x_1'\cdot\sigma_1\cdot A_1 + x_2'\cdot\sigma_2\cdot A_2 + x_3'\cdot\sigma_3\cdot A_3; \tag{1}$$

konstante σ_i treba izabrati tako da će tačka E u novom sistemu imati koordinate (1, 1, 1), dakle da bude

$$E = 1\cdot\sigma_1\cdot A_1 + 1\cdot\sigma_2\cdot A_2 + 1\cdot\sigma_3\cdot A_3. \tag{2}$$

Jednačina (2) je kraće napisan sistem linearnih jednačina po $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Množenjem jednačine (2) sa $[A_2A_3]$, $[A_3A_1]$, $[A_1A_2]$ — ili primenom *Cramer*-ovog pravila — sledi

$$\sigma_1 = \frac{(EA_2A_3)}{(A_1A_2A_3)},\quad \sigma_2 = \frac{(A_1EA_3)}{(A_1A_2A_3)},\quad \sigma_3 = \frac{(A_1A_2E)}{(A_1A_2A_3)}.$$

Ove vrednosti za σ_i unosimo u (1) i odbacujemo zajednički faktor $1/(A_1A_2A_3)$, pa dobijamo

$$X = (EA_2A_3)\cdot A_1\cdot x_1' + (A_1EA_3)\cdot A_2\cdot x_2' + (A_1A_2E)\cdot A_3\cdot x_3', \tag{3}$$

ili, ako ovu jednačinu napišemo potpuno, zamenjujući X sa koordinatama x_1, x_2, x_3, A_i sa koordinatama (a_1^i, a_2^i, a_3^i) $(i = 1, 2, 3)$, a vrednosti determinanata (EA_2A_3), (A_1EA_3), (A_1A_2E) obeležimo sa e_{23}, e_{31}, e_{12}, sistem

$$x_1 = e_{23}\cdot a_1^1\cdot x_1' + e_{31}\cdot a_1^2\cdot x_2' + e_{12}\cdot a_1^3\cdot x_3'$$
$$x_2 = e_{23}\cdot a_2^1\cdot x_1' + e_{31}\cdot a_2^2\cdot x_2' + e_{12}\cdot a_2^3\cdot x_3'$$
$$x_3 = e_{23}\cdot a_3^1\cdot x_1' + e_{31}\cdot a_3^2\cdot x_2' + e_{12}\cdot a_3^3\cdot x_3'.$$

To su tražene transformacione jednačine, koje vezuju stare koordinate x_i i nove koordinate x_i' jedne iste tačke ravni.

191. Naći transformacione jednačine projektivnog preslikavanja tačaka jedne ravni π u tačke druge ravni π', u kome tačkama

$$A(a_1, a_2, a_3),\quad B(b_1, b_2, b_3),\quad C(c_1, c_2, c_3),\quad D(d_1, d_2, d_3)$$

ravni π odgovaraju respektivno tačke

$$A'(a_1', a_2', a_3'),\quad B'(b_1', b_2', b_3'),\quad C'(c_1', c_2', c_3'),\quad D'(d_1'\ d_2', d_3')$$

ravni π'. Pri tome među tačkama A, B, C, D, kao i među tačkama A', B', C', D', nema tri koje bi bile kolinearne.

Rezultat. Koordinate a_i, b_i, c_i, d_i tačaka A, B, C, D odnose se na jedan dati koordinatni sistem ravni π, a koordinate a_i', b_i', c_i', d_i' tačaka A', B', C', D' — na jedan dati koordinatni sistem u ravni π'. Na analogan način kao u zad. 187 se dobija

$$x_i' = \frac{(D'B'C')}{(DBC)}\cdot(XBC)\cdot a_i' + \frac{(A'D'C')}{(ADC)}\cdot(AXC)\cdot b_i' + \frac{(A'B'D')}{(ABD)}\cdot(ABX)\cdot c_i' \qquad (i = 1, 2, 3),$$

gde su x_i, x_i' koordinate korespondentnih tačaka, a sa X je označena uređena trojka (x_1, x_2, x_3).

192. Prave $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}=0$ $(i=1, 2, 3)$, koje ne prolaze kroz jednu istu tačku, stranice su koordinatnog sistema, a tačka (x_0, y_0) — nova jedinična tačka. Naći transformacione jednačine za koordinate tačaka.

Rešenje. Za nove koordinate x_i' važi

$$x_i' = \rho_i (a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}) \quad (i=1, 2, 3),$$

gde još nepoznate konstante ρ_i treba izabrati tako da za $x=x_0$, $y=y_0$ dobijamo $x_1'=x_2'=$ $=x_3'=1$, dakle $\rho_i = 1/(a_{i1}x_0 + a_{i2}y_0 + a_{i3})$. Tražene jednačine glase

$$x_i' = \frac{a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}}{a_{i1}x_0 + a_{i2}y_0 + a_{i3}} \quad (i=1, 2, 3).$$

Važi li ovaj rezultat i onda kada su x, y nehomogene projektivne koordinate?

193. P je proizvoljna tačka; AP, BP, CP seku stranice BC, CA, AB trougla ABC u D, E, F, a prave EF, FD, DE seku BC, CA, AB u X, Y, Z. Pokazati da su tačke X, Y, Z kolinearne.

Dokaz. Trougao ABC uzimamo za koordinatni trougao, a tačku P kao jediničnu tačku jednog projektivnog koordinatnog sistema. Onda tačke X, Y, Z imaju respektivno koordinate $(0, 1, -1)$, $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$. Koordinate ovih tačaka zadovoljavaju jednačinu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

što znači da tačke X, Y, Z zaista leže na jednoj pravoj.

194. Dokazati analitički *Desargues*-ov stav o perspektivnim trouglima.

Uputstvo. Jedan od trouglova izabrati za koordinatni trougao, a tačku, u kojoj se seku prave koje spajaju homologna temena oba trougla, za jediničnu tačku koordinatnog sistema. Onda su temena drugog trougla tačke $(\lambda_1, 1, 1)$, $(1, \lambda_2, 1)$, $(1, 1, \lambda_3)$.

195. $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ su dva takva trougla u jednoj ravni da se prave A_1B_1, A_2B_3, A_3B_2 seku u jednoj tački, a isto tako i prave A_1B_3, A_2B_2, A_3B_1; pokazati da se onda i prave A_1B_2, A_2B_1, A_3B_3 seku u jednoj tački.

Uputstvo. Trougao $A_1A_2A_3$ izabrati za koordinatni trougao, a za jediničnu tačku presek pravih A_1B_1, A_2B_3, A_3B_2; onda koordinate temena B_1, B_2, B_3 trougla $B_1B_2B_3$ možemo pisati u obliku $(\lambda_1, 1, 1)$, $(1, 1, \lambda_3)$, $(1, \lambda_2, 1)$, gde su parametri λ_1, λ_2, λ_3 vezani uslovom da prave A_1B_3, A_2B_2, A_3B_1 imaju jednu zajedničku tačku. Dobija se $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

196. Šest stranica potpunog četvorotemenika seku stranice svog dijagonalnog trougla u njegovim temenima i u još šest tačaka. Pokazati da su ovih šest tačaka temena jednog potpunog četvorostranika koji ima isti dijagonalni trougao kao zadati četvorotemenik.

Uputstvo. Tri temena datog potpunog četvorotemenika izabiramo za temena koordinatnog trougla, a četvrto teme za jediničnu tačku.

197. Analitički rešiti zadatke 19, 20, 21, 22.

198. Kako glasi jednačina beskrajne prave u baricentričnim koordinatama?

Rešenje. Projektivne koordinate su *baricentrične* ako je jedinična tačka težište koordinatnog trougla. Beskrajna prava je u tom slučaju jedinična prava, tj. prava $x_1+x_2+x_3=0$.

199. Kakvo je: a) geometrisko; b) mehaničko značenje baricentričnih koordinata?

Rešenje. *a*) Koordinatni trougao neka je trougao $A_1 A_2 A_3$, a njegovo težište — jedinična tačka E. Prave $A_1 E$, $A_2 E$, $A_3 E$ neka seku stranice $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ respektivno u E_1, E_2, E_3, a prave $A_1 X$, $A_2 X$, $A_3 X$ neka ih seku u X_1, X_2, X_3. Proizvoljno izabrana tačka X neka ima koordinate x_1, x_2, x_3; onda imamo

$$\frac{x_2}{x_3}=(A_2,\ A_3;\ E_1,\ X_1)=\frac{\overline{A_2 E_1}}{\overline{A_3 E_1}}:\frac{\overline{A_2 X_1}}{\overline{A_3 X_1}}$$

ili, zbog $\overline{A_2 E_1}=-\overline{A_3 E_1}$,

$$\frac{x_2}{x_3}=\frac{\overline{X_1 A_3}}{\overline{A_2 X_1}}=\frac{\Delta XA_3 A_1}{\Delta XA_1 A_2},$$

dakle

(1) $$x_1 : x_2 : x_3=\Delta XA_2 A_3 : \Delta XA_3 A_1 : \Delta XA_1 A_2,$$

gde $\Delta XA_i A_k$ označava površinu orijentisanog trougla $XA_i A_k$.

b) Imamo

$$\overline{A_1 X} : \overline{XX_1}=\Delta XA_3 A_1 : \Delta XX_1 A_3=\Delta XA_1 A_2 : \Delta XA_2 X_1,$$

ili

$$\overline{A_1 X} : \overline{XX_1}=(\Delta XA_3 A_1+\Delta XA_1 A_2) : (\Delta XX_1 A_3+\Delta XA_2 X_1)=$$
$$=(\Delta XA_3 A_1+\Delta XA_1 A_2) : \Delta XA_2 A_3,$$

odakle zbog (1) izlazi

(2) $$\overline{A_1 X} : \overline{XX_1}=(x_2+x_3) : x_1 .$$

Ako su u tačkama A_1, A_2, A_3 stavljene materijalne tačke čije mase imaju po x_1, x_2, odnosno x_3 jedinica, onda je, na osnovu (2), tačka X težište sistema tih triju materijalnih tačaka. *Baricentrične koordinate tačke X su,* znači, *proporcionalne mernim brojevima triju takvih masa koje treba staviti u temena koordinatnog trougla da bi tačka X bila težište tih masa.*

200. Jedinična tačka projektivnog koordinatnog sistema neka je centar E kruga, upisanog u koordinatni trougao $A_1 A_2 A_3$. a) Kakvo je geometrisko značenje koordinata tačaka u ovom sistemu? b) Kako glasi jednačina beskrajne prave?

Rešenje. a) Rastojanju svake tačke X do bilo koje od tri stranice trougla $A_1 A_2 A_3$ pripisujemo, po dogovoru, znak + ili − prema tome da li X i E leže na istoj ili na suprotnim poluravnima, na koje ta stranica deli ravan. *Koordinate x_1, x_2, x_3 tačke X su proporcionalne rastojanjima tačke X od stranica $a_1=A_2 A_3$, $a_2=A_3 A_1$, $a_3=A_1 A_2$ koordinatnog trougla.* Zaista, ako je $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ normalna jednačina stranice a_i koordinatnog trougla u odnosu na neki Dekartov pravougli koordinatni sistem, i ako su ove jednačine normirane tako da tačka E ima do svake od njih pozitivno rastojanje, onda za rastojanja x_i tačke X od pravih a_i važi

$$x_i=a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}, \qquad |a_{ik}|\neq 0 \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3),$$

odakle, zaista, sleduje da su x_i projektivne koordinate tačke X. Ove specijalne projektivne koordinate zovu se i *trilinearne* koordinate.

b) Neka su s_1, s_2, s_3 merni brojevi dužina stranica a_1, a_2, a_3 koordinatnog trougla, a x_1, x_2, x_3 neka znače opet rastojanja proizvoljne tačke X do tih stranica. Onda za baricentrične koordinate x_1', x_2', x_3' tačke X u odnosu na isti koordinatni trougao važi

(1) $$x_1' : x_2' : x_3'=\Delta XA_2 A_3 : \Delta XA_3 A_1 : \Delta XA_1 A_2=s_1 x_1 : s_2 x_2 : s_3 x_3 .$$

Jednačina beskrajne prave u baricentričnim koordinatama (videti zad. 189) glasi

$$x_1'+x_2'+x_3'=0.$$

Jednačina ove prave u trilinearnim koordinatama, koje su proporcionalne sa x_i, zbog (1), glasi

$$s_1 x_1+s_2 x_2+s_3 x_3=0.$$

Ako su α_1, α_2, α_3 unutrašnji uglovi trougla $A_1 A_2 A_3$, onda, imajući u vidu sinusnu teoremu $\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_3=s_1 : s_2 : s_3$, jednačinu beskrajne prave možemo pisati u i obliku

$$x_1 \sin\alpha_1+x_2 \sin\alpha_2+x_3 \sin\alpha_3=0.$$

201. Naći potreban i dovoljan uslov za paralelnost dveju pravih u projektivnim koordinatama. Specijalno naći uslove za baricentrične, trilinearne i afine koordinate.

Rešenje. Dve prave su paralelne ako se seku na beskrajnoj pravoj. Neka su dve date prave p i q date jednačinama

$$(1) \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0, \qquad q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 = 0;$$

jednačina beskrajne prave neka je

$$(2) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Potreban i dovoljan uslov za to da prave (1), (2) prolaze kroz jednu tačku je

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0.$$

To je uslov za paralelnost pravih (1).

U specijalnom slučaju, kada su x_i baricentrične koordinate, imamo $a_1 = a_2 = a_3 = 1$; a kada su x_i trilinearne koordinate, onda a_1, a_2, a_3 znače dužine stranica koordinatnog trougla.

Ako su koordinate x_i afine, onda jednačina (2) ima oblik $x_3 = 0$, tj. $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$, pa uslov (3) za paralelnost glasi

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

202. Ispitati porodicu pravih, datih jednačinom

$$x_1 \sin(\alpha_1 - \varphi) + x_2 \sin(\alpha_2 - \varphi) + x_3 \sin(\alpha_3 - \varphi) = 0,$$

gde su x_i trilinearne koordinate, α_i — unutrašnji uglovi koordinatnog trougla, i φ — proizvoljan parametar.

Rešenje. Jednačinu datih pravih možemo pisati u obliku

$$x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_2 + x_3 \cos\alpha_3 - \lambda\cdot(x_1 \sin\alpha_1 + x_2 \sin\alpha_2 + x_3 \sin\alpha_3) = 0, \quad \lambda = \operatorname{ctg}\varphi.$$

Prave pripadaju, dakle, jednom pramenu; njemu pripada i prava čija je jednačina

$$x_1 \sin\alpha_1 + x_2 \sin\alpha_2 + x_3 \sin\alpha_3 = 0,$$

a to je beskrajna prava (videti zadatak 200). Sve prave su, prema tome, paralelne među sobom.

203. Kakve koordinate imaju stranice potpunog četvorostranika ako za koordinatni trostranik izaberemo dijagonalni trostranik tog četvorostranika, a jednu njegovu stranicu za jediničnu pravu? Dualizovati.

Rešenje. Stranice potpunog četvorostranika neka su a_1, a_2, a_3, a_4; njegove dijagonale su onda $d_1 = (a_1 \cdot a_4)\cdot(a_2 \cdot a_3)$, $d_2 = (a_2 \cdot a_4)\cdot(a_1 \cdot a_3)$, $d_3 = (a_3 \cdot a_4)\cdot(a_1 \cdot a_2)$. Dijagonale d_1, d_2, d_3, su, po pretpostavci, strane koordinatnog trougla; njihove jednačine su onda $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ odnosno $x_3 = 0$. Stranicu a_4 datog četvorostranika izabiramo za jediničnu pravu; njena jednačina je zato $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Prava a_1 prolazi kroz $a_4 \cdot d_1$; zato njena jednačina glasi $x_1 + x_2 + x_3 + \lambda' x_1 = 0$, ili, stavljajući $1 + \lambda' = \lambda_1$,

$$\lambda_1 x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Na analogan način dobijamo za a_2, a_3 jednačine oblika

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 + \lambda_2 x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda_3 x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Prave a_2, a_3 se seku na d_1; jednačine (1) su zato zadovoljene za $x_1=0$, odakle sleduje

$$\lambda_2 x_2 + x_3 = 0, \qquad x_2 + \lambda_3 x_3 = 0,$$

$$\therefore \quad x_2/x_3 = -1/\lambda_2 = -\lambda_3,$$

(2) $$\therefore \quad \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

Slično se dobija

(3) $$\lambda_3 \lambda_1 = 1, \qquad \lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Množenjem jednačina (2), (3) dobijamo

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1.$$

Ako bi bilo $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, odakle na osnovu (2), (3) sledi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, imali bismo $a_1 \equiv a_2 \equiv a_3$, što nije slučaj; zato je $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1$, što zajedno sa (2), (3) daje $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Jednačine pravih a_i $(i=1, 2, 3, 4)$, prema tome, glase

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 - x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 + x_2 - x_3 = 0, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$

njihove koordinate su dakle $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, 1, 1)$.

D u a l n o: Ako temena dijagonalnog trougla jednog potpunog četvorotemenika izaberemo za temena koordinatnog trougla, a jedno teme četvorotemenika za jediničnu tačku, onda temena četvorotemenika imaju koordinate $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, 1, 1)$.

204. Izvesti jednačinu kruga, opisanog oko koordinatnog trougla, u trilinearnim koordinatama.

Rešenje. Koordinatni trougao neka je $A_1 A_2 A_3$; s_1, s_2, s_3 neka su dužine njegovih stranica A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2; k — krug opisan oko trougla $A_1 A_2 A_3$, a X — bilo koja tačka na k.

Tačku X izaberimo za centar inverzije; kod nje prelazi krug k u neku pravu k', na kojoj se nalaze slike A_1', A_2', A_3' temena A_1, A_2, A_3. Iz osobina inverzije sledi da je $\overline{XA_2} \cdot \overline{XA_2'} = \overline{XA_3} \cdot \overline{XA_3'}$, ili $\overline{XA_2} : \overline{XA_3} = \overline{XA_3'} : \overline{XA_2'}$; odavde i zbog $\sphericalangle XA_2A_3 = \sphericalangle XA_3'A_2'$ sledi da su trougli XA_2A_3 i $XA_3'A_2'$ slični. Njihove visine u odnosu na A_2A_3, $A_2'A_3'$ neka su x_1 odnosno d; pošto se visine odnose kao osnovice, imamo

(1) $$x_1 : d = s_1 : \overline{A_2' A_3'}, \quad \text{ili} \quad s_1 : x_1 = \overline{A_2' A_3'} : d.$$

Na analogan način dobijamo

(2) $$s_2 : x_2 = \overline{A_3' A_1'} : d, \qquad s_3 : x_3 = \overline{A_1' A_2'} : d.$$

Rastojanja x_1, x_2, x_3 su trilinearne koordinate tačke X; one su za tačke unutar koordinatnog trougla pozitivne. Proizvoljna tačka X na k je van trougla, i njene koordinate x_1, x_2, x_3 imaju iste znake kao merni brojevi orijentisanih duži $A_2'A_3'$, $A_3'A_1'$, $A_1'A_2'$ (ako je na k' uzeta proizvoljna orijentacija). Prema tome, za koordinate x_i proizvoljne tačke X na krugu k dobijamo iz $A_2'A_3' + A_3'A_1' + A_1'A_2' = 0$, iz (1) i (2) jednačinu

$$\frac{s_1}{x_1} + \frac{s_2}{x_2} + \frac{s_3}{x_3} = 0, \qquad \text{ili} \qquad s_1 \cdot x_2 x_3 + s_2 \cdot x_3 x_1 + s_3 \cdot x_1 x_2 = 0.$$

To je tražena jednačina kruga.

205. Kako glasi jednačina kruga, opisanog oko koordinatnog trougla, ako je jedinična tačka a) težište; b) centar opisanog kruga; c) ortocentar koordinatnog trougla?

Rešenje. Za transformacione jednačine za prelaz od trilinearnih koordinata x_i u projektivne koordinate x_i' sa istim koordinatnim trouglom $A_1 A_2 A_3$, no sa jediničnom tačkom u tački P čije trilinearne koordinate su $\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_3$, dobijamo

$$x_1 = x_1' \cdot \overset{\circ}{x}_1, \qquad x_2 = x_2' \cdot \overset{\circ}{x}_2, \qquad x_3 = x_3' \cdot \overset{\circ}{x}_3.$$

Krug opisan oko trougla $A_1 A_2 A_3$ ima dakle, na osnovu prethodnog zadatka, jednačinu

$$s_1 \mathring{x}_2 \mathring{x}_3 x_2' x_3' + s_2 \mathring{x}_3 \mathring{x}_1 x_3' x_1' + s_3 \mathring{x}_1 \mathring{x}_2 x_1' x_2' = 0,$$

gde s_i imaju isto značenje kao u zad. 204.

a) Ako je P težište, imamo $s_1 \mathring{x}_1 : s_2 \mathring{x}_2 : s_3 \mathring{x}_3 = 1:1:1$; možemo uzeti $\mathring{x}_1 = 1/s_1$, $\mathring{x}_2 = 1/s_2$, $\mathring{x}_3 = 1/s_3$. Za jednačinu kruga dobijamo

$$s_1^2 \cdot x_2' x_3' + s_2^2 \cdot x_3' x_1' + s_3^2 \cdot x_1' x_2' = 0.$$

b) Za rastojanja $\mathring{x}_i$ centra opisanog kruga od stranica trougla izračunavamo $\mathring{x}_i = \frac{s_i}{2} \operatorname{ctg} \alpha_i$, gde α_i označuje ugao kod temena A_i u trouglu $A_1 A_2 A_3$; imamo

$$\mathring{x}_1 : \mathring{x}_2 : \mathring{x}_3 = s_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1 : s_2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2 : s_3 \cdot \operatorname{ctg} \alpha_3 = \frac{\cos\alpha_1}{\frac{\sin\alpha_1}{s_1}} : \frac{\cos\alpha_2}{\frac{\sin\alpha_2}{s_2}} : \frac{\cos\alpha_3}{\frac{\sin\alpha_3}{s_3}},$$

ili, zbog

$$\frac{\sin\alpha_1}{s_1} = \frac{\sin\alpha_2}{s_2} = \frac{\sin\alpha_3}{s_3},$$

$$\mathring{x}_1 : \mathring{x}_2 : \mathring{x} = \cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3.$$

Jednačina kruga, opisanog oko trougla $A_1 A_2 A_3$, glasi dakle

$$s_1 \cdot \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \cdot x_2' x_3' + s_2 \cdot \cos\alpha_3 \cos\alpha_1 \cdot x_3' x_1' + s_3 \cdot \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cdot x_1' x_2' = 0,$$

ili, zbog $s_1 : s_2 : s_3 = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_3$,

$$x_2' x_3' \operatorname{tg} \alpha_1 + x_3' x_1' \operatorname{tg} \alpha_2 + x_1' x_2' \operatorname{tg} \alpha_3 = 0.$$

c) Neka je P ortocentar trougla $A_1 A_2 A_3$; A_1', A_2', A_3' — preseci pravih $A_1 P$, $A_2 P$, $A_3 P$ sa $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, odnosno $A_1 A_2$. Trougli $A_1 A_1' A_2$ i $A_1 A_3' P$ su slični; zato

$$\overline{A_3' P} : \overline{A_2 A_1'} = \overline{A_1 A_3'} : \overline{A_1 A_1'}.$$

Obeležavajući rastojanje tačke P od stranice $A_1 A_2$ sa $\mathring{x}_3$, ova proporcija daje

$$\mathring{x}_3 : s_3 \cos\alpha_2 = s_2 \cos\alpha_1 : s_2 \sin\alpha_3,$$

odakle sleduje

$$\mathring{x}_3 = \frac{s_3 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin\alpha_3}.$$

Za trilinearne koordinate $\mathring{x}_i$ tačke P imamo dakle

$$\mathring{x}_1 : \mathring{x}_2 : \mathring{x} = \frac{\cos\alpha_2 \cos\alpha_3}{\frac{\sin\alpha_1}{s_1}} : \frac{\cos\alpha_3 \cos\alpha_1}{\frac{\sin\alpha_2}{s_2}} : \frac{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\frac{\sin\alpha_3}{s_3}},$$

ili, zbog

$$\frac{\sin\alpha_1}{s_1} = \frac{\sin\alpha_2}{s_2} = \frac{\sin\alpha_3}{s_3},$$

$$\mathring{x}_1 : \mathring{x}_2 : \mathring{x}_3 = \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 : \cos\alpha_3 \cos\alpha_1 : \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha_1} : \frac{1}{\cos\alpha_2} : \frac{1}{\cos\alpha_3}.$$

Za jednačinu kruga dobijamo

$$s_1 \cos\alpha_1 x_2' x_3' + s_2 \cos\alpha_2 x_3' x_2' + s_3 \cos\alpha_3 x_1' x_2' = 0,$$

ili

$$x_2' x_3' \cdot \sin 2\alpha_1 + x_3' x_1' \cdot \sin 2\alpha_2 + x_1' x_2' \cdot \sin 2\alpha_3 = 0.$$

206. Kako glasi opšta jednačina kruga u projektivnim koordinatama ako je jedinična tačka u: a) težištu koordinatnog trougla; b) centru upisanog kruga; c) centru opisanog kruga; d) ortocentru koordinatnog trougla?

Rešenje. Svi krugovi ravni seku njenu beskrajnu pravu u dvema fiksnim tačkama — u apsolutno-kružnim tačkama; one su presečne tačke ma kog kruga ravni i beskrajne prave. A i svaka kriva II reda, koja prolazi kroz njih, je krug. Ako je, prema tome, $K=0$ jednačina bilo kog kruga, $p_\infty=0$ — jednačina beskrajne prave, a $p=0$ jednačina bilo koje prave, onda kriva

$$K+p_\infty\cdot p=0 \tag{1}$$

prolazi kroz tačke, određene sa $K=0$, $p_\infty=0$, tj. kroz apsolutno-kružne tačke; kriva je zato krug. Jednačina $p\equiv\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3=0$ sadrži t r i proizvoljne konstante λ_i; zato jednačina (1) određuje sve krugove ravni.

a) Imamo (zadatak 198, 205 a)

$$p_\infty\equiv x_1+x_2+x_3=0; \qquad K\equiv s_1^2 x_2 x_3+s_2^2 x_3 x_1+s_3^2 x_1 x_2=0,$$

gde su s_i dužine stranica koordinatnog trougla. Opšta jednačina kruga glasi dakle

$$s_1^2 x_2 x_3+s_2^2 x_3 x_1+s_3^2 x_1 x_2+(x_1+x_2+x_3)\cdot(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3)=0.$$

b) (zad. 200 b, 204) $p_\infty\equiv s_1 x_1+s_2 x_2+s_3 x_3=0$; $K\equiv s_1 x_2 x_3+s_2 x_3 x_1+s_3 x_1 x_2=0$.

Opšta jednačina kruga:

$$s_1 x_2 x_3+s_2 x_3 x_1+s_3 x_1 x_2+(s_1 x_1+s_2 x_2+s_3 x_3)\cdot(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3)=0.$$

c) (zad. 205 b) $p_\infty\equiv x_1 \sin 2\alpha_1+x_2 \sin 2\alpha_2+x_3 \sin 2\alpha_3=0$;

$$K\equiv x_2 x_3\cdot \operatorname{tg}\alpha_1+x_3 x_1\cdot \operatorname{tg}\alpha_2+x_1 x_2\cdot \operatorname{tg}\alpha_3=0.$$

Opšta jednačina kruga glasi

$$x_2 x_3\cdot \operatorname{tg}\alpha_1+x_3 x_1\cdot \operatorname{tg}\alpha_2+x_1 x_2\cdot \operatorname{tg}\alpha_3$$
$$+(x_1 \sin 2\alpha_1+x_2 \sin 2\alpha_2+x_3 \sin 2\alpha_3)\,(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3)=0.$$

d) (zad. 205 c) $p_\infty\equiv x_1 \operatorname{tg}\alpha_1+x_2 \operatorname{tg}\alpha_2+x_3 \operatorname{tg}\alpha_3=0$;

$$K\equiv x_2 x_3\cdot \sin 2\alpha_1+x_3 x_1\cdot \sin 2\alpha_2+x_1 x_2\cdot \sin 2\alpha_3=0.$$

Opšta jednačina kruga je

$$x_2 x_3\cdot \sin 2\alpha_1+x_3 x_1\cdot \sin 2\alpha_2+x_1 x_2\cdot \sin 2\alpha_3$$
$$+(x_1 \operatorname{tg}\alpha_1+x_2 \operatorname{tg}\alpha_2+x_3 \operatorname{tg}\alpha_3)\,(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3)=0.$$

207. Napisati jednačinu pramena krivih II reda koje prolaze kroz temena jednog potpunog četvorotemenika, ako je njegov dijagonalni trougao uzet za koordinatni trougao.

Rezultat. Ako za jediničnu tačku izaberemo jedno od temena četvorotemenika, onda temena imaju koordinate (zad. 203) $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Treba, dakle, naći uslov da krive $\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} x_i x_k=0$ prolaze kroz te četiri tačke. Dobija se $a_{ik}=0$, $i\neq k$; $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$. Jednačina traženog pramena glasi

$$a_{11} x_1^2+a_{22} x_2^2+a_{33} x_3^2=0, \quad a_{11}+a_{22}+a_{33}=0.$$

208. Šta je geometrisko mesto polova jedne prave u odnosu na krive II reda koje pripadaju pramenu? Šta se dobija za slučaj kada je ta prava beskrajna?

Rešenje. Zajednički polarni trougao pramena uzimamo za koordinatni trougao. Jednačina pramena onda glasi (zad. 207)

$$a_{11} x_1^2+a_{22} x_2^2+a_{33} x_3^2=0, \qquad a_{11}+a_{22}+a_{33}=0.$$

Polara tačke (x_1', x_2', x_3') je prava

$$a_{11} x_1' x_1 + a_{22} x_2' x_2 + a_{33} x_3' x_3 = 0.$$

Ako sa ξ_1, ξ_2, ξ_3 obeležimo koordinate ove prave, onda se zbog

$$\xi_1 = a_{11} x_1', \quad \xi_2 = a_{22} x_2', \quad \xi_3 = a_{33} x_3'; \quad a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

dobija

$$\frac{\xi_1}{x_1'} + \frac{\xi_2}{x_2'} + \frac{\xi_3}{x_3'} = 0, \quad \text{ili} \quad \xi_1 x_2' x_3' + \xi_2 x_3' x_1' + \xi_3 x_1' x_2' = 0.$$

Kod fiksnih ξ_i ovo je jednačina krive II reda, opisane oko koordinatnog trougla, tj. oko zajedničkog polarnog trougla za krive datog pramena (odnosno oko dijagonalnog trougla četvorotemenika, kome su opisane krive pramena).

Polovi jedne prave u odnosu na krive II reda, koje pripadaju pramenu, obrazuju krivu II reda, opisanu oko zajedničkog polarnog trougla.

Specijalno, ako je (ξ_1, ξ_2, ξ_3) beskrajna prava, dobija se teorema: *Geometrisko mesto centara konusnih preseka jednog pramena je kriva II reda, opisana oko zajedničkog polarnog trougla.*

209. Krive II reda prolaze kroz četiri tačke A_1, A_2, A_3, A_4; pokazati da geometrisko mesto centara ovih krivih prolazi kroz sredine duži $A_1 A_4$, $A_2 A_4$, $A_3 A_4$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$. Koji stav se dobija za slučaj da je dati četvorotemenik $A_1 A_2 A_3 A_4$ ortocentričan?

Rešenje. Temena $D_1 = A_1 A_4 \cdot A_2 A_3$, $D_2 = A_2 A_4 \cdot A_3 A_1$, $D_3 = A_3 A_4 \cdot A_1 A_2$ dijagonalnog trougla četvorotemenika $A_1 A_2 A_3 A_4$ izabiramo za temena koordinatnog trougla, a tačku A_4 za jediničnu tačku. Dati pramen krivih ima onda jednačinu (zad. 207)

(1) $$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_2^2 = 0, \qquad a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0;$$

jednačina geometriskog mesta centara ovih krivih je

(2) $$\xi_1^0 x_2 x_3 + \xi_2^0 x_3 x_1 + \xi_3^0 x_1 x_2 = 0,$$

gde ξ_1^0, ξ_2^0, ξ_3^0 znače koordinate beskrajne prave.

Kriva (2) prolazi kroz tačke D_1, D_2, D_2. Prava $D_1 A_4$ seče krivu (2) osim u D_1 još u jednoj tački M_1, a beskrajnu pravu u tački M_1'. Treba pokazati da je $(A_1, A_4; M_1, M_1') = -1$.

Za presečne tačke prave $D_1 A_4$, tj. $x_2 = x_3$, i krive (2) dobijamo

$$x_3 = 0, \qquad (\xi_2^0 + \xi_3^0) x_1 + \xi_1^0 x_3 = 0.$$

Za tačku M_1 važi $x_1/x_3 = -\xi_1^0/(\xi_2^0 + \xi_3^0)$. Za presek beskrajne prave $\xi_1^0 x_1 + \xi_2^0 x_2 + \xi_3^0 x_3 = 0$ i prave $D_1 A_4$ izlazi $x_1/x_3 = -(\xi_2^0 + \xi_3^0)/\xi_1^0$. Tačke A_1, A_4 imaju koordinate $(-1, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$; zato za njih važi $x_1/x_3 = -1$, odnosno 1. Brojevi $-1, 1, -\xi_1^0/(\xi_2^0 + \xi_3^0), -(\xi_2^0 + \xi_3^0)/\xi_1^0$ su projektivne koordinate tačaka A_1, A_4, M_1, M_1', i njihov dvojni odnos je, zaista, jednak -1. Prema tome tačka M_1 je sredina duži $A_1 A_4$. Po analogiji sledi da kriva (2) prolazi i kroz sredine duži $A_2 A_4$, $A_3 A_4$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$. Kriva (2) prolazi, dakle, kroz ovih šest sredina i kroz tačke D_1, D_2, D_3; zato se zove *konusni presek devet tačaka.*

U specijalnom slučaju, kada je četvorotemenik $A_1 A_2 A_3 A_4$ *ortocentričan*, tj. ako je svaka od tačaka A_i ortocentar trougla čija su temena ostale tri od četiri zadate tačke (ako to važi za jednu od njih, važi za sve), onda su prave $A_1 A_4$, $A_2 A_4$, $A_3 A_4$ simetrale unutrašnjih uglova u trouglu $D_1 D_2 D_3$ — ako su oznake za tačke A_i izabrane tako da je A_4 u unutrašnjosti trougla $A_1 A_2 A_3$; A_4 je, prema tome, centar upisanog kruga u koordinatni trougao $D_1 D_2 D_3$, odakle sledi da su koordinate u ovom slučaju *trilinearne.* A kriva (2) u trilinearnim koordinatama je krug (zad. 204) opisan oko trougla $D_1 D_2 D_3$. Dobili smo, prema tome, teoremu:

Ako je dat bilo koji trougao $A_1 A_2 A_3$, onda postoji krug koji prolazi kroz podnožja visina, kroz sredine strana trougla $A_1 A_2 A_3$ i kroz sredine duži između svakog temena i ortocentra; to je krug devet tačaka (medijalni krug) za dati trougao.

210. Odrediti geometrisko mesto centara krivih II reda, upisanih u dati četvorostranik.

Rešenje. Dijagonalni trostranik datog potpunog četvorostranika uzimamo za koordinatni trostranik, a jednu stranu četvorostranika za jediničnu pravu. Onda jednačina datih krivih II reda (dualno zad. 207) u liniskim (tangentnim) koordinatama glasi

$$\alpha_{11}\xi_1^2+\alpha_{22}\xi_2^2+\alpha_{33}\xi_3^2=0;\quad \alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}=0.$$

Centar krive II reda je pol beskrajne prave $(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$, tj. tačka data jednačinom

$$\alpha_{11}\xi_1^0\xi_1+\alpha_{22}\xi_2^0\xi_2+\alpha_{33}\xi_3^0\xi_3=0;$$

njene koordinate su, dakle, $x_1=\alpha_{11}\xi_1^0$, $x_2=\alpha_{22}\xi_2^0$, $x_3=\alpha_{33}\xi_3^0$. Odavde i iz $\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}=0$ sleduje

$$\frac{x_1}{\xi_1^0}+\frac{x_2}{\xi_2^0}+\frac{x_3}{\xi_3^0}=0.$$

To je jednačina traženog geometriskog mesta; *geometrisko mesto centara je prava.*

211. Pokazati da su sredine dijagonala svakog potpunog četvorostranika kolinearne.

Dokaz. Parovi suprotnih temena A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 potpunog četvorostranika pretstavljaju tri degenerisane krive II klase, a svakoj pripadaju sve četiri stranice datog potpunog četvorostranika; one su, znači, „upisane" u taj četvorostranik. Sredine A', B', C' duži (dijagonala) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 su centri tih degenerisanih krivih; a oni leže (zad. 210) na pravoj. Time je stav dokazan.

212. Šta pretstavljaju jednačine: a) $x_1=1$, $x_2=t^2$, $x_3=t$; b) $x_1=t^2$, $x_2=t^2-1$, $x_3=t(t+1)$; c) $x_1=a_1(t-2)(t-3)$, $x_2=a_2(t-3)(t-1)$, $x_3=a_3(t-1)(t-2)$; d) $x_i=a_it^2+b_it+c_i$ $(i=1, 2, 3)$, gde su a_i, b_i, c_i date konstante, t — parametar, a x_1, x_2, x_3 homogene projektivne koordinate?

Rezultati. U svim slučajevima jednačine pretstavljaju po jednu krivu II reda, i to takvu da u odnosu na koordinatni trougao $A_1A_2A_3$ ima sledeći položaj: a) dodiruje A_1A_3 u A_1; b) dodiruje A_2A_3 u A_2 i prolazi kroz A_1; c) prolazi kroz A_1, A_2, A_3; d) bilo koja kriva II reda.

213. Naći osam dodirnih tačaka zajedničkih tangenata krivih $ax_1^2+bx_2^2-x_3^2=0$ i $cx_1^2+dx_2^2-x_3^2=0$ i pokazati da one leže na jednoj krivoj II reda.

Rezultat. Za koordinate x_1, x_2, x_3 dodirnih tačaka tangenata sa krivom $ax_1^2+bx_2^2-x_3^2=0$ dobijamo

$$x_1^2:x_2^2:x_3^2=bc(b-d):ad(c-a):ab(bc-ad),$$

a za dodirne tačke tih tangenata sa krivom $cx_1^2+dx_2^2-x_3^2=0$:

$$x_1^2:x_2^2:x_3^2=ad(b-d):bc(c-a):cd(bc-ad).$$

Tačke leže na krivoj $ac(b+d)x_1^2+bd(c+a)x_2^2-(bc+ad)x_3^3=0$.

214. Naći uslov da prava $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0$ bude tangenta date krive:

a) $a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2=0$; b) $x_1x_2-x_3^2=0$;

c) $a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0$.

Rezultati. Uslov nam daju jednačine tih krivih u liniskim koordinatama. Dobijamo:

a) $\xi_1^2/a_1+\xi_2^2/a_2+\xi_3^2/a_3=0$; b) $4\xi_1\xi_2-\xi_3^2=0$;

c) $a_{23}^2\xi_1^2+2(2a_{12}a_{33}-a_{13}a_{23})\xi_1\xi_2+a_{13}^2\xi_2^2-2a_{12}a_{23}\xi_1\xi_3-2a_{13}a_{23}\xi_2\xi_3+a_{12}^2\xi_3^2=0$.

215. Odrediti jednačine krivih II reda koje prolaze kroz tačke date u nehomogenim koordinatama:

a) (0, 2), (0, 4), (1, 0), (3, 0), (2, 1);

b) (5, 2), (3, −4), (2, −7), (1, 2), (3, 5).

Rešenje. Ako su A, B, C, D, E pet datih tačaka neke krive II reda, onda za proizvoljnu tačku X te krive važi

$$(DA,\ DB;\ DC,\ DX)=(EA,\ EB;\ EC,\ EX),$$

odakle za jednačinu krive sledi (zad. 185)

$$\frac{(DAC)}{(DBC)}:\frac{(DAX)}{(DBX)}=\frac{(EAC)}{(EBC)}:\frac{(EAX)}{(EBX)},$$

gde (ABC) znači determinantu homogenih koordinata tačaka A, B, C; umesto X treba staviti tekuće homogene koordinate x_1, x_2, x_3. Dobijamo:

a) $16\,x_1^2+23\,x_1x_2+6\,x_2^2-64\,x_1x_3-36\,x_2x_3+48\,x_3^2=0;$

b) $(3\,x_1-x_2-13\,x_3)(3\,x_1-2\,x_2+x_3)=0.$

216. Dualizovati metodu prethodnog zadatka.

217. Tangente u temenima trougla, upisanog u konusan presek, seku suprotne stranice u kolinearnim tačkama.

Dokaz. Trougao uzimamo za koordinatni trougao. Podesnim izborom jedinične tačke dobijamo za krivu, opisanu oko trougla, jednačinu $x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2=0$. Njene tangente u temenima trougla su $x_2+x_3=0$, $x_3+x_1=0$, $x_1+x_2=0$; one seku suprotne stranice $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ u tačkama $(0,\ 1,\ -1)$, $(1,\ 0,\ -1)$, $(1,\ -1,\ 0)$, koje su zaista kolinearne.

218. Izvesti uslov da jednačina $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0$ pretstavlja parabolu, ako su x_1, x_2, x_3: a) baricentrične koordinate; b) trilinearne koordinate; c) projektivne koordinate u specijalnom slučaju kad je jedinična tačka ortocentar koordinatnog trougla.

Rezultati. a) $\dfrac{1}{a_{11}}+\dfrac{1}{a_{22}}+\dfrac{1}{a_{33}}=0$; b) $\dfrac{s_1^2}{a_{11}}+\dfrac{s_2^2}{a_{22}}+\dfrac{s_3^2}{a_{33}}=0$ (s_1, s_2, s_3 dužine stranica koordinatnog trougla);

c) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha_1}{a_{11}}+\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha_2}{a_{22}}+\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha_3}{a_{33}}=0$ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ unutrašnji uglovi koordinatnog trougla).

219. Trougao ABC je upisan jednom konusnom preseku, a $A_1B_1C_1$ je trougao čija su temena proizvoljno izabrane tačke na tangentama krive u A, B, odnosno C; stranice BC, B_1C_1; CA, C_1A_1; AB, A_1B_1 seku se u tačkama P, Q, R. Pokazati da se prave A_1P, B_1Q, C_1R seku u jednoj tački.

Uputstvo. Trougao ABC izabrati za koordinatni trougao, a jediničnu tačku odabrati tako da jednačina datog konusnog preseka bude $x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2=0$. Za tačke tangente sa dodirom u A važi $x_2+x_3=0$; koordinate bilo koje tačke na ovoj tangenti možemo dakle pisati u obliku $(\lambda_1,\ 1,\ -1)$, gde λ_1 znači promenljiv parametar. Temena trougla $A_1B_1C_1$ imaju koordinate $(\lambda_1,\ 1,\ -1)$, $(-1,\ \lambda_2,\ 1)$, $(1,\ -1,\ \lambda_3)$.

220. Tri temena kvadrata su bazne, a četvrto teme — jedinična tačka koordinatnog sistema. Naći jednačinu kruga opisanog oko tog kvadrata.

Rezultat. $2\,x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3=0.$

221. Pokazati da projektivna preslikavanja tačaka ravni u sebe, koja jednu datu pravu prevode u sebe, obrazuju grupu.

Uputstvo. Datu pravu izabrati za stranu $x_3=0$ koordinatnog trougla.

222. Tačke A, B, C, D jedne ravni, od kojih bilo koje tri nisu kolinearne, prelaze u datoj projektivnosti Φ redom u tačke B, A, D, C. Pokazati da je preslikavanje Φ involutorično.

Rešenje. Uzimajući tačke A, B, C za bazne, a tačku D za jediničnu tačku projektivnog sistema, dobijamo za Φ jednačine

$$x_1' = x_2 - x_3, \quad x_2' = x_1 - x_3, \quad x_3' = -x_3,$$

odakle se lako proverava da je Φ^2 identitet, što je trebalo dokazati.

223. Odrediti sva ona projektivna preslikavanja ravni u sebe koja: *a*) parabolu $y = x^2$; *b*) krug $x^2 + y^2 = 1$ prevode u sebe.

Rešenje. *a*) Jednačina parabole u homogenim Dekartovim koordinatama glasi

(1) $$x_1^2 - x_2 x_3 = 0.$$

Odavde izlazi da su jednačine

(2) $$x_1 = t_1 t_2, \quad x_2 = t_1^2, \quad x_3 = t_2^2,$$

gde su t_1, t_2 homogeni realni parametri, parametarske jednačine date krive. Proizvoljno projektivno preslikavanje tačaka krive (2) u tačke te iste krive je dato sa

$$\begin{aligned} t_1' &= a t_1 + b t_2 \\ t_2' &= c t_1 + d t_2 \end{aligned} \quad \text{gde je} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ako homogene Dekartove koordinate tačke koju određuju vrednosti t_1' t_2' parametara obeležimo sa x_1', x_2', x_3', imamo

$$\begin{aligned} x_1' &= t_1' t_2' = a c t_1^2 + (ad + bc)\, t_1 t_2 + b d t_2^2 \\ x_2' &= t_1'^2 = a^2 t_1^2 + 2 a b t_1 t_2 + b^2 t_2^2 \\ x_3' &= t_2'^2 = c^2 t_1^2 + 2 c d t_1 t_2 + d^2 t_2^2, \end{aligned}$$

odakle se, s obzirom na (2), dobija

(3) $$\begin{aligned} x_1' &= (ad + bc) \cdot x_1 + ac \cdot x_2 + bd \cdot x_3 \\ x_2' &= 2ab \cdot x_1 + a^2 x_2 + b^2 x_3 \\ x_3' &= 2cd \cdot x_1 + c^2 x_2 + d^2 x_3. \end{aligned}$$

Ako ovaj sistem jednačina, u kome posmatramo a, b, c, d kao proizvoljne homogene realne parametre za koje važi $ab - dc \neq 0$, primenimo sada za s v e t a č k e (x_1, x_2, x_3) r a v n i, a ne samo za tačke date parabole, onda nam on definiše sva ona projektivna preslikavanja ravni u sebe, kod kojih se kriva (1) preslikava u sebe.

Sva preslikavanja (3) obrazuju grupu.

b) Prelazimo na novi projektivni koordinatni sistem u kome će jednačina datog kruga biti oblika (1), tj. na sistem u kome će dve fundamentalne prave biti tangente kruga, a treća fundamentalna prava — sekanta koja prolazi kroz dodirne tačke tih tangenata. Takve prave su, na primer, prave $x = 0$, $y - 1 = 0$, $y + 1 = 0$, odnosno $x = 0$, $y - z = 0$, $y + z = 0$, ako pređemo na homogene Dekartove koordinate. Transformacione jednačine za prelaz na novi sistem glase onda

$$x_1 = x, \quad x_2 = y + z, \quad x_3 = -y + z.$$

Za jednačinu datog kruga dobijamo, zaista, jednačinu (1). Jednačine (3) su tražene jednačine projektivnih preslikavanja, u projektivnim koordinatama x_i, koje dati krug prevode u sebe. Jednačine ovih projektivnosti u p o l a z n i m koordinatama dobijaju se, ako u (3) veličine x_1, x_2 x_3 zamenimo redom sa x, $y + z$, $-y + z$, a x_1', x_2', x_3' sa x', $y' + z'$, $-y' + z'$, a zatim dobijeni sistem rešimo po x', y', z'.

224. Date su koordinate nekolinearnih tačaka A_1, A_2, A_3 jedne ravni. Odrediti jednačine grupe onih projektivnih preslikavanja tačaka ravni u sebe koje imaju ove dvojne elemente: a) tačke A_1, A_2, A_3; b) tačku A_3 i sve tačke prave A_1, A_2; c) tačke A_1, A_3 i pravu $A_1 A_2$. Šta se dobija u slučaju b) ako su tačke A_1, A_2 beskrajne?

Uputstvo i rezultati. Prelazimo na novi koordinatni sistem u kome će tačke A_1, A_2, A_3 biti fundumentalne, dok jedinična tačka može biti uzeta proizvoljno. Ako su (x_1, x_2, x_3) koordinate proizvoljne tačke X u starom koordinatnom sistemu, onda jednačine pravih $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ i $A_1 A_2$ možemo pisati redom u obliku $(A_2 A_3 X)=0$, $(A_3 A_1 X)=0$, $(A_1 A_2 X)=0$. Transformacione jednačine su onda

$$(1) \qquad y_1=(A_2 A_3 X), \quad y_2=(A_3 A_1 X), \quad y_3=(A_1 A_2 X).$$

Za tražena projektivna preslikavanja, u novim koordinatama y_1, y_2, y_3, dobijaju se jednačine

$$\text{a)}\ \begin{aligned} y_1'&=\rho_1 y_1\\ y_2'&=\rho_2 y_2\\ y_3'&=\rho_3 y_3\end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} y_1'&=\rho_1 y_1\\ y_2'&=\rho_1 y_2\\ y_3'&=\rho_2 y_3\end{aligned} \qquad \text{c)}\ \begin{aligned} y_1'&=\rho_1 y_1+\rho_3 y_2\\ y_2'&=\rho_1 y_2\\ y_3'&=\rho_2 y_3\end{aligned}$$

gde ρ_1, ρ_2, ρ_3 znače proizvoljne parametre, a $(y_1', y_2' y_3')$ — tačku u koju se preslikava tačka (y_1, y_2, y_3). Odavde se, na osnovu (1), za ova preslikavanja u odnosu na prvobitne koordinate dobijaju jednačine

$$\text{a)}\ \begin{aligned} (A_2 A_3 X')&=\rho_1 (A_2 A_3 X)\\ (A_3 A_1 X')&=\rho_2 (A_3 A_1 X)\\ (A_1 A_2 X')&=\rho_3 (A_1 A_2 X)\end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} (A_2 A_3 X')&=\rho_1 (A_2 A_3 X)\\ (A_3 A_1 X')&=\rho_1 (A_3 A_1 X)\\ (A_1 A_2 X')&=\rho_2 (A_1 A_2 X)\end{aligned}$$

$$(2) \qquad \text{c)}\ \begin{aligned} (A_2 A_3 X')&=\rho_1 (A_2 A_3 X)+\rho_3 (A_3 A_1 X)\\ (A_3 A_1 X')&=\rho_1 (A_3 A_1 X)\\ (A_1 A_2 X')&=\rho_2 (A_1 A_2 X).\end{aligned}$$

Tačka $X'(x_1', x_2', x_3')$ je korespondentna tački $X(x_1, x_2, x_3)$. Eksplicitni oblik jednačina datih preslikavanja dobijamo, ako sisteme linearnih jednačina (2) rešimo po x_1', x_2', x_3'.

Ako su tačke A_1, A_2, beskrajne, preslikavanja b) su homotetije sa zajedničkim centrom u A_3.

LITERATURA

1. L. Amoroso — E. Bompiani: *Esercizi di Geometria analitica e proiettiva*, Pavia, 1917.
2. H. Beck: *Koordinatengeometrie*, Bd. I, Berlin, 1919.
3. O. Chisini: *Esercizi di Geometria analitica e proiettiva*, Bologna, 1949.
4. A. Comessatti: *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva*, Padova, 1947.
5. R. L. Goodstein — E. J. F. Primrose: *Axiomatic Projective Geometry*, Leicester, 1953.
6. L. Kollros: *Géométrie descriptive*, Zürich.
7. L. Kollros: *Cours de Géométrie projective*, Neuchatel, 1946.
8. A. Robson: *An Introduction to Analytical Geometry*, Vol. II, Cambridge, 1947.
9. Д. Табаковъ: *Сборникъ отъ задачи по Проективна и Дескриптивна геометрия*, София, 1941.

PROBLEMI IZ RAZNIH OBLASTI

1. Ako su M i N prirodni brojevi, sumirati

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\min(m,n) \quad \text{i} \quad \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\max(m,n).$$

2. Proveriti da li se kriva

$$x^2(x-y)^2+x(x^2-y^2)(y-1)+y^2(y-1)^2=0$$

može napisati pomoću jednačina

$$\frac{x}{t^2+t+1}=\frac{y}{t+1}=\frac{1}{t^4+t^3+t^2+t+1} \qquad (t \text{ pomoćna promenljiva}).$$

Nacrtati ovu krivu.

3. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, proveriti da li je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\alpha.$$

4. Dokazati relaciju

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & & \varepsilon^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} = \sqrt{n^n}\exp\left\{\frac{\pi}{4}\,i\,(n-1)(3n-2)\right\},$$

gde je $\varepsilon=\exp\dfrac{2\pi i}{n}$.

Primedba. Ovaj zadatak formulisao je *D. Đoković.*

5. Ako $[x]$ označava najveći ceo broj koji ne premašuje x, dokazati da je

$$\left[1\Big/\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)\right]=n.$$

Rešenje. Prema formuli $\sum\limits_{r=1}^{\infty}\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$ imamo

$$\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^2}=\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{r^2}.$$

Kako je

$$\frac{1}{r(r+1)}<\frac{1}{r^2}<\frac{1}{r(r-1)} \qquad (r>1),$$

biće

$$\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{r(r+1)}<\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{r^2}<\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{r(r-1)},$$

$$\frac{1}{n+1}<\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{r^2}<\frac{1}{n}.$$

Jedno za drugim dobija se:

$$n+1>\frac{1}{\sum\limits_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{r^2}}>n; \qquad \left[\frac{1}{\sum\limits_{r=n+1}^{\infty}1/r^2}\right]=n; \qquad \left[1\Big/\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^2}\right)\right]=n.$$

Redigovala *Kovina Milošević.*

6. Odrediti poluprečnik konvergencije reda $\sum a_n x^n$, ako je

$$\frac{a_{3p+1}}{a_{3p}}\to l_1\neq 0, \quad \frac{a_{3p+2}}{a_{3p+1}}\to l_2\neq 0, \quad \frac{a_{3p}}{a_{3p-1}}\to l_3\neq 0 \quad (p\to+\infty).$$

Generalisati.

7. Ako je

$$1\ 2\ 3\ \ldots\ n$$

glavna (polazna) permutacija elemenata

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

ukupan broj inverzija u svima permutacijama od ovih elemenata iznosi

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}(n!).$$

Dokazati ovu formulu.

Rešenje. Za $n=2$ formula je istinita. Pretpostavimo sada da ova je formula istinita za neko n ($\geqslant 2$), pa posmatrajmo sve permutacije formirane od $n+1$ elemenata

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ n+1.$$

Permutacije čiji je prvi element 1 imaće, prema pretpostavci, ukupno inverzija

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}(n!).$$

Permutacije čiji je prvi element 2 imaće ukupno inverzija $\frac{1}{2}\binom{n}{2}(n!)+n!$, jer ukupan broj inverzija u permutacijama formiranim od elemenata 1, 3, 4, ..., n, $n+1$, prema pretpostavci, biće $\frac{1}{2}\binom{n}{2}(n!)$ i element 2 sa 1 obrazovaće inverziju u svakoj od $n!$ permutacija.

Permutacije čiji je prvi element 3 imaće ukupno inverzija $\frac{1}{2}\binom{n}{2}(n!)+2(n!)$.

$$\vdots$$

Permutacije čiji je prvi element $n+1$ imaće ukupno inverzija $\frac{1}{2}\binom{n}{2}(n!)+n(n!)$.

Ukupan broj svih inverzija je

$$\frac{1}{2}(n+1)\binom{n}{2}(n!)+(1+2+\cdots+n)(n!),$$

odnosno

$$\frac{1}{2}(n+1)\binom{n}{2}(n!)+\frac{1}{2}(n+1)\,n\,(n!),$$

odnosno

$$\frac{1}{2}(n+1)(n!)\left\{\binom{n}{2}+n\right\},$$

odnosno

$$\frac{1}{2}(n+1)!\binom{n+1}{2}.$$

Ovim je induktivni dokaz završen.

Primedba. Drugo rešenje, različito od navedenog, dali su *M. Delcourte* i *A. Sevrin* u časopisu *Mathesis*, vol. 68, 1959, p. 95.

8. Od n elemenata

$$1, 2, \ldots, n$$

obrazovane su sve permutacije $\{P\}$.

Dokazati da u skupu $\{P\}$ postoji:

1° $n-1$ permutacija (skup $\{P_1\}$) koje imaju jednu i samo jednu inverziju;

2° $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$ permutacija (skup $\{P_2\}$) koje imaju tačno dve inverzije ako je $n \geqslant 2$;

3° $\frac{1}{6}n(n^2-7)$ permutacija (skup $\{P_3\}$) koje imaju tačno tri inverzije ako je $n \geqslant 3$.

Rešenje. Neka je

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

glavna (polazna) permutacija. Najveći broj inverzija ima permutacija

$$n, n-1, \ldots, 2, 1$$

i taj najveći broj inverzija iznosi

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{2}n(n-1)=\binom{n}{2}.$$

1° Samo jednu inverziju imaju permutacije kod kojih postoji jedna i samo jedna inverzija između susednih elemenata. To su permutacije:

$$2, 1, 3, 4, \ldots, n; \quad 1, 3, 2, 4, \ldots, n; \quad \ldots; \quad 1, 2, 3, \ldots, n, n-1.$$

Njih je ukupno $n-1$, kao što je trebalo pokazati.

2° Ovaj rezultat dokazaćemo potpunom indukcijom. Pretpostavimo da broj permutacija od $n-1$ elemenata koje imaju tačno dve inverzije iznosi $\frac{1}{2}n(n-3)$, pa odredimo broj permutacija od n elemenata sa dve i samo sa dve inverzije.

Permutacije od n elemenata koje imaju tačno dve inverzije mogu počinjati samo sa 1, 2 i 3. One permutacije koje počinju sa $4, 5, \ldots, n$ imaju bar tri inverzije, te ne dolaze u obzir.

Posmatrajmo prvo permutacije koje počinju sa 1. Iza 1 dolazi $n-1$ elemenata. Prema induktivnoj hipotezi, od elemenata $2, 3, 4, \ldots, n$ može se obrazovati $\frac{1}{2}n(n-3)$ permutacija sa tačno dve inverzije.

Sve permutacije koje počinju sa 2 imaju bar jednu inverziju.

Prema formuli dokazanoj pod 1° broj permutacija od elemenata

$$1, 3, 4, \dots, n$$

sa jednom inverzijom iznosi $n-2$.

I na kraju postoji samo jedna permutacija koja počinje sa 3 i koja ima tačno dve inverzije. To je

$$3, 1, 2, 4, 5, \dots, n.$$

Dakle, ukupan broj permutacija od n elemenata koje imaju tačno dve inverzije iznosi

$$\frac{1}{2} n(n-3)+(n-2)+1, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{2}(n+1)(n-2).$$

Prema tome, ako je formula tačna za $n-1$ elemenata, ona je tačna i za n elemenata. Formula 2° je tačna za $n=3$. Zaista, od tri elementa 1, 2, 3 imamo ove permutacije

1 2 3 (nijedna inverzija),

1 3 2 (jedna inverzija),

2 1 3 (jedna inverzija),

2 3 1 (dve inverzije),

3 1 2 (dve inverzije),

3 2 1 (tri inverzije),

od kojih dve imaju tačno dve inverzije. To se slaže sa rezultatom koji se dobija kada se u formuli $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$ stavi $n=3$.

Ovim je induktivni dokaz završen.

Formula navedena pod 3° takođe se dokazuje indukcijom.

Generalizacija. Neka je $\{P\}$ skup svih permutacija od n elemenata. Odrediti iz skupa $\{P\}$ one permutacije koje imaju $k \left(\leqslant \binom{n}{2}\right)$ i samo k inverzija.

9. Posmatrajmo *Pascal*-ov trougao

$$\begin{matrix} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ \vdots \end{matrix}$$

i numerišimo vrste ovog trougla redom sa 0, 1, 2, 3, ... počev od vrste u kojoj se nalazi $\binom{0}{0}$.

Dokazati da u n-toj ($n \geqslant 0$) vrsti ima tačno $2^{\sigma(n)}$ neparnih binomnih koeficijenata, gde je $\sigma(n)$ zbir cifara broja n napisanog u binarnom sistemu.

Dokaz. 1° Dokažimo prvo pomoćni stav: *Brojevi*

$$\binom{2^k+i}{\nu} \quad \text{i} \quad \binom{i}{\nu} \qquad (\nu \leqslant i < 2^k)$$

iste su parnosti.

Odista, prirodni broj j ($\leqslant i$) je oblika

$$j = 2^{\alpha_j} \cdot \beta_j \qquad (\alpha_j < k; \ \beta_j \text{ neparno}),$$

pa možemo pisati

(1) $$\nu!\binom{i}{\nu}=\prod_{j=i-\nu+1}^{i} j=2^{\alpha}\cdot\beta,$$

(2) $$\nu!\binom{2^k+i}{\nu}=\prod_{j=i-\nu+1}^{i}(2^k+j)=2^{\alpha}\cdot\gamma,$$

gde je

$$\alpha=\sum_{j=i-\nu+1}^{i}\alpha_j;\quad \beta=\prod_{j=i-\nu+1}^{i}\beta_j;\quad \gamma=\prod_{j=i-\nu+1}^{i}(2^{k-\alpha_j}+\beta_j)$$

(β i γ su neparni brojevi).

Pretpostavimo da je $\binom{i}{\nu}$ neparan broj. Tada iz (1) sleduje da je $\frac{\nu!}{2^{\alpha}}$ ceo neparan broj. Jednakost (2) možemo napisati u obliku

$$\frac{\nu!}{2^{\alpha}}\cdot\binom{2^k+i}{\nu}=\gamma.$$

Odavde izlazi da je $\binom{2^k+i}{\nu}$ neparan broj.

Na sličan način pokazujemo da iz neparnosti broja $\binom{2^k+i}{\nu}$ sleduje neparnost broja $\binom{i}{\nu}$. Time je pomoćni stav dokazan.

2° Označimo sada sa $\tau(n)$ broj neparnih elemenata u n-toj vrsti *Pascal*-ovog trougla. Dokazaćemo da su u (2^k-1)-oj vrsti svi brojevi neparni, tj. da je

(3) $$\tau(2^k-1)=2^k.$$

Zaista, za $\nu=0$ je $\binom{2^k-1}{\nu}=1$, dok je za $\nu\neq 0$

$$\binom{2^k-1}{\nu}=\prod_{j=1}^{\nu}\frac{2^k-j}{j}=\prod_{j=1}^{\nu}\frac{2^{k-\alpha_j}-\beta_j}{\beta_j}.$$

Odavde, posle množenja sa $\prod_{j=1}^{\nu}\beta_j$, zaključujemo da je $\binom{2^k-1}{\nu}$ neparno.

3° Na osnovu identiteta $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ i rezultata (3) zaključujemo da su parni sledeći brojevi:

$$\binom{2^k}{\nu}\qquad(\nu=1,2,\ldots,2^k-1),$$

$$\binom{2^k+1}{\nu}\qquad(\nu=2,3,\ldots,2^k-1),$$

$$\vdots$$

$$\binom{2^k+2^k-2}{\nu}\qquad(\nu=2^k-1).$$

Vidimo da važi i relacija

(4) $$\tau(2^k)=2.$$

4° Posmatrajmo n-tu vrstu *Pascal*-ovog trougla. Neka je:

$$n=2^k+i\qquad(1\leqslant i\leqslant 2^k-2).$$

Elemente uočene vrste razdelićemo u tri grupe:

1) $\binom{n}{\nu}\qquad(\nu=0,1,\ldots,i)$,

2) $\binom{n}{\nu}\qquad(\nu=i+1,\ i+2,\ldots,2^k-1)$,

3) $\binom{n}{\nu}\qquad(\nu=2^k,\ 2^k+1,\ldots,2^k+i=n)$.

Brojeve neparnih elemenata ovih grupa označimo respektivno sa $\tau_1(n)$, $\tau_2(n)$ i $\tau_3(n)$. Sad možemo pisati

$$\tau(n)=\tau_1(n)+\tau_2(n)+\tau_3(n). \tag{5}$$

Na osnovu 3° je $\tau_2(n)=0$, a na osnovu identiteta $\binom{n}{\nu}=\binom{n}{n-\nu}$ dobija se $\tau_1(n)=\tau_3(n)$. Umesto (5) možemo pisati

$$\tau(n)=2\tau_1(n). \tag{6}$$

Na osnovu pomoćnog stava dalje zaključujemo

$$\tau(n)=2\tau_1(n)=2\tau_1(2^k+i)=2\tau(i).$$

Prema tome došli smo do relacije

$$\tau(2^k+i)=2\tau(i). \tag{7}$$

5° U zadatku se traži da se dokaže relacija

$$\tau(n)=2^{\sigma(n)}. \tag{8}$$

Bez teškoće se proverava da je ona tačna za $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$. U tački 2° pokazali smo da je relacija (8) tačna za $n=2^k-1$, a u tački 3° za $n=2^k$.

Pretpostavimo sada da je relacija (8) tačna za $n=0, 1, 2, \ldots, N-1$, pa ćemo pokazati da odatle sleduje da je tačna i za $n=N$.

Ako je N oblika 2^k ili 2^k-1, tvrdnja je direktno dokazana.

Ako je $N=2^k+I$ $(1\leqslant I\leqslant 2^k-2)$, biće

$$\tau(N)=\tau(2^k+I)=2\tau(I).$$

Na osnovu pretpostavke je $\tau(I)=2^{\sigma(I)}$, pa dobijamo

$$\tau(N)=2\cdot 2^{\sigma(I)}=2^{1+\sigma(I)}=2^{\sigma(N)},$$

jer je

$$\sigma(N)=\sigma(2^k+I)=1+\sigma(I).$$

Ovim je dokaz završen.

Ovaj dokaz dao je *D. Đoković*.

10. Ako polinom $P(x)$ stepena n ima samo realne nule

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \qquad (x_i<x_k \quad \text{za } i<k),$$

čiji su redovi višestrukosti respektivno

$$k_1, k_2, \ldots, k_m \qquad \left(\sum_{r=1}^{m} k_r=n\right),$$

tada izvod $P'(x)$ ima samo realne nule

$$x_1, x_2, \ldots, x_m,$$

čiji su redovi respektivno

$$k_1-1, \quad k_2-1, \quad \ldots, \quad k_m-1 \qquad \left(\sum_{r=1}^{m} (k_r-1)=n-m\right)$$

kao i proste realne nule

$$y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$$

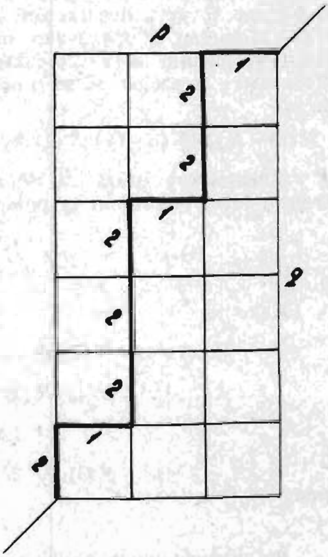
različite od x_r $(r=1, 2, \ldots, m)$.

Takođe je $P''(y_r)\cdot P(y_r)<0 \qquad (r=1, 2, \ldots, m-1)$.

11. Žičana pravougaona rešetka sa p žica u jednom i q u drugom pravcu ortogonalnom u odnosu na prvi, okačena je o konac jednim uglom tako da slobodno visi. Kap tečnosti spušta se iz najviše u najnižu tačku rešetke idući poprečnicama rešetke. Koliko puteva ima kojima ona to može da učini, a koliko je među tim putevima onih u kojima kap ne ide dvaput uzastopce poprečnicama jednog istog utvrđenog smera?

Rešenje. Ma kojim putem sišla kap tečnosti iz najviše u najnižu tačku rešetke, ona uvek ima da pređe ukupno $p+q-2$ poprečne ivice okana rešetke. Opišimo jednu putanju na sledeći način: svaki deo putanje koji ide ivicom okna rešetke u jednom smeru oznakom 1, a ako ide u drugom smeru, oznakom 2. Tada se putanja jednoznačno može opisati nizom cifara 1, 2, kojih ukupno ima $p+q-2$, a od čega je samo cifara 1 ukupno $p-1$. Broj kombinacija ove dve vrste cifara u ovakvom ukupnom iznosu je

$$\binom{p+q-2}{p-1},$$



a to je istovremeno i broj svih mogućih putanja kapi tečnosti iz najviše u najnižu tačku rešetke.

Pretpostavimo da broj oznaka 1 u nizu koji opisuje putanju nema više nego oznaka 2 i da želimo da nigde dve oznake 1 ne stoje u nizu jedna do druge. Postavimo sve oznake 2 jednu do druge. Njih ima ukupno $q-1$, a mesta između njih (računajući i ona sa strane) ima ukupno q. Od tih q mesta izaberimo $p-1$ mesto za postavljanje oznaka 1. Koliko takvih izbora bude, toliko ima putanja u kojima kap tečnosti ne ide dvaput uzastopce pravcem koji smo označili sa 1. Kao što je poznato, broj izbora $p-1$ elemenata iz skupa od ukupno q elemenata je

$$\binom{q}{p-1}.$$

To je odgovor na drugo pitanje u zadatku.

Ovo je problem i rešenje *M. Stojakovića.*

12. Odrediti rekurzivnu formulu koja daje broj mogućih relacija ekvivalencije u skupu od n elemenata.

Rešenje. Zadati u skupu od n elemenata neku relaciju ekvivalencije isto je što i podeliti elemente toga skupa na klase koje dve po dve nemaju zajedničke elemente, tako da svaki element iz datog skupa bude u jednoj, i samo jednoj klasi.

Uočimo jedan element a. On može biti u klasi sam, a može biti „u društvu" sa nekim drugim elementima zadatog skupa. Neka je sa njim u istoj klasi još $k-1$ elemenata. Za one ostale elemente kojih ima $n-k$ biće broj mogućih relacija ekvivalencije jednak $N(n-k)$ (gde smo sa $N(v)$ obeležili ukupan broj relacija ekvivalencije u skupu od v elemenata). Kako ima $\binom{n-1}{k-1}$ mogućih izbora elemenata koji bi mogli biti u istoj klasi sa uočenim elementom a i kako svaki od tih izbora može da se nadoveže na $N(n-k)$ relacija ekvivalencije za ostale elemente u skupu, to ukupno ima

$$\binom{n-1}{k-1} N(n-k)$$

relacija ekvivalencije kad je element a u društvu sa još $k-1$ drugih elemenata. Kako k može da varira od 1 do n, tražena formula je

$$N(n)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} N(n-k) \qquad \{N(0)=1\}.$$

Ovo je rešenje *M. Stojakovića.*

13. Odrediti rekurzivnu formulu za izračunavanje broja načina na koje se može dobiti rezultat primenom zakona asocijacije na proizvod $a_1 a_2 \cdots a_n$ od n različitih brojeva.

Pokazati da je

$$\frac{1}{2}[1-(1-4x)^{1/2}]$$

funkcija-generatrisa za ovaj problem.

Rešenje. Neka je traženi broj načina na koje se može izračunati proizvod n faktora označen sa $N(n)$. Izdvojimo li prvi faktor a_1, ostatak se može izmnožiti na $N(n-1)$ načina. Izdvojimo li prva dva faktora a_1, a_2, oni se mogu izmnožiti na $N(2)$ načina, a ostatak na $N(n-2)$ načina. Kako svako množenje prva dva faktora može da se nadoveže na svako množenje ostalih $N(n-2)$ faktora, pri ovakvoj podeli faktora u dve grupe ima ukupno $N(2)\,N(n-2)$ načina da se proizvod sračuna. Nastavljajući tako i dalje, dolazimo do zaključka da je

$$N(n)=N(1)\,N(n-1)+N(2)\,N(n-2)+N(3)\,N(n-3)+\cdots+N(n-2)\,N(2)+N(n-1)\,N(1).$$

Simetričnost izraza za $N(n)$ daje nam indiciju da pri traženju funkcije-generatrise za brojeve $N(n)$ pokušamo sa potencijalnim redom

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} N(\nu)\,x^{\nu} \qquad \{N(1)=1\}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \{x+N(2)\,x^2+\cdots\}\,\{x+N(2)\,x^2+\cdots\}\\ &= x^2+\{N(1)\,N(2)+N(2)\,N(1)\}\,x^3\\ &\qquad +\{N(1)\,N(3)+N(2)\,N(2)+N(3)\,N(1)\}\,x^4+\cdots\\ &= x^2+N(3)\,x^3+N(4)\,x^4+\cdots=f(x)-x \qquad (\text{uzeto je odmah da je } N(2)=1), \end{aligned}$$

biće

$$f^2(x)-f(x)+x=0.$$

Rešavanjem ove jednačine po $f(x)$ nalazimo izraz za funkciju-generatrisu kako je u zadatku navedeno. Prema tome je

$$N(n)=\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}.$$

Ovo je rešenje *M. Stojakovića.*

14. Ako kvadratna matrica A zadovoljava uslov

$$A^n+A^{n-1}+\cdots+A+E=0, \tag{1}$$

pokazati da je $A^{-1}=A^n$.

Rešenje. Posle množenja uslova (1) sa A, dobija se

$$A^{n+1}+A^n+\cdots+A^2+A=0. \tag{2}$$

Ako se jednakosti (1) i (2) oduzmu, nalazi se

$$A^{n+1}=E, \quad \text{tj.} \quad A\cdot A^n=E.$$

Prema tome, zaista je $A^{-1}=A^n$.

15. Determinanta

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ \cos n\theta & \cos(n+1)\theta & \cos(n+3)\theta \\ \sin n\theta & \sin(n+1)\theta & \sin(n+3)\theta \end{vmatrix} \qquad (n \text{ ceo broj})$$

deljiva je sa $1-2x\cos\theta+x^2$.

Uputstvo. Proveriti da li se determinanta anulira za

$$x=e^{i\theta} \text{ i } x=e^{-i\theta}.$$

Generalizacija. Ispitati da li je determinanta

$$\begin{vmatrix} 1 & x^l & x^k \\ \cos n\theta & \cos(n+l)\theta & \cos(n+k)\theta \\ \sin n\theta & \sin(n+l)\theta & \sin(n+k)\theta \end{vmatrix} \quad (n, l, k \text{ celi brojevi})$$

deljiva sa $1-2x\cos\theta+x^2$.

16. Odrediti

$$B^{-1}=(2A^4-12A^3+19A^2-29A+37E)^{-1}$$

u obliku

$$kA+mE$$

ako je

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Rešenje. Na osnovu

$$\lambda E-A=\begin{Vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -2 & \lambda-5 \end{Vmatrix}$$

zaključujemo da je karakteristični polinom matrice A

$$\lambda^2-6\lambda+7.$$

Zbog toga je

$$A^2=6A-7E,$$

$$A^3=29A-42E,$$

$$A^4=132A-203E,$$

te je

$$B=2A^4-12A^3+19A^2-29A+37E=A+2E.$$

Iz

$$E=BB^{-1}=(A+2E)(kA+mE)$$

sleduje

$$E=(8k+m)A+(2m-7k)E,$$

a odatle

$$8k+m=0,$$

$$2m-7k=1,$$

što daje

$$k=-1/23, \quad m=8/23,$$

pa je

$$B^{-1}=-A/23+8E/23.$$

Primedba. Iz karakterističnog polinoma $\lambda^2-10\lambda+23$ matrice B izlazi $B^2-10B+23E=0$, odnosno $E=(-B^2+10B)/23$, što pomnoženo sa B^{-1} daje neposredno

$$B^{-1}=(-B+10E)/23=(-A+8E)/23.$$

Ovo je rešenje *M. Stojakovića.*

17. Pokazati da je četvrti stepen matrice

$$A=\begin{Vmatrix} -1 & 6 & -9 \\ -11 & 24 & -33 \\ -6 & 12 & -16 \end{Vmatrix}$$

jednak $65A-114E$, gde je E jedinična matrica.

Izraziti A^n u obliku a_nA+b_nE $(n=2, 3, \ldots)$.

Rešenje. Iz

$$\lambda E - A = \begin{Vmatrix} \lambda+1 & -6 & 9 \\ 11 & \lambda-24 & 33 \\ 6 & -12 & \lambda+16 \end{Vmatrix},$$

svodeći ovu matricu sa polinomskim elementima na *Smith*-ovu formu, nalazimo da je

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6$$

minimalni polinom matrice A.

Stoga je

$$A^2 = 5A - 6E,$$

a odatle

$$A^4 = (A^2)^2 = (5A-6E)^2 = 25A^2 - 60A + 36E = 25(5A-6E) - 60A + 36E = 65A - 114E.$$

Ovim je tvrđenje dokazano. Indukcijom se može dokazati da se A^n može prikazati u obliku $a_n A + b_n E$ (a_n, b_n funkcije od n).

Iz jednakosti

$$A^n = a_n A + b_n E,$$

$$A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} E,$$

$$A^{n+1} = a_n A^2 + b_n A = a_n (5A - 6E) + b_n A = (5a_n + b_n) A - 6a_n E$$

zaključujemo

$$a_{n+1} = 5a_n + b_n, \qquad b_{n+1} = -6a_n.$$

Funkcije a_n i b_n su rešenja ovog sistema diferencnih jednačina koja ispunjavaju uslove: $a_2 = 5$, $b_2 = -6$ (jer je $A^2 = 5A - 6E$).

Eliminacijom funkcije b iz ovog sistema dobijamo

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0.$$

Odavde je

$$a_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n \qquad (C_1,\ C_2 \text{ konstante}).$$

Prema $b_{n+1} = -6a_n$ i prema $a_2 = 5$, $b_2 = -6$ nalazimo

$$a_n = 3^n - 2^n, \quad b_n = -6(3^{n-1} - 2^{n-1}) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Stoga je

$$A^n = (3^n - 2^n) A - 6(3^{n-1} - 2^{n-1}) E \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Primedba. Koristeći dobijenu jednakost, nalazimo A^n, gde je n proizvoljan prirodan broj. Dobijena jednakost vredi i kad je n ma kakav ceo broj. Izložena metoda može se primeniti za traženje A^n kad je A bilo kakva kvadratna matrica.

Redigovano prema rešenju *M. Stojakovića* i *S. Prešića*.

18. Izračunati vrednost determinante

$$D_n = |a_{ik}| \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

gde je

$$a_{ik} = 2 \quad (i = k), \qquad a_{ik} = -1 \quad (i = k+1),$$

$$a_{ik} = 3 \quad (i = k-1), \qquad a_{ik} = 0 \quad (i \neq k,\ k+1,\ k-1).$$

Rešenje. Ako determinantu D_n $(n \geqslant 3)$ razvijemo po elementima prve vrste, dobijamo

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 \end{vmatrix}.$$

Ako determinantu čiji je koeficijent 3 razvijemo po elementima prve kolone, poslednja relacija postaje

(1) $$D_n = 2D_{n-1} + 3D_{n-2}.$$

Ovo je diferencna jednačina. Njena partikularna rešenja dobijamo ako stavimo $D_n = r^n$. Karakteristična jednačina je

$$r^n - 2r^{n-1} - 3r^{n-2} = 0, \quad \text{tj.} \quad r^2 - 2r - 3 = 0.$$

Koreni ove jednačine su: $r_1 = 3$ i $r_2 = -1$.
Opšte rešenje jednačine (I) je

$$D_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n \qquad (A,\ B \text{ proizvoljne konstante}).$$

Kako je $D_3 = 20$ i $D_4 = 61$, dobijamo jednačine

$$20 = 27A - B, \qquad 61 = 81A + B.$$

Odavde izlazi $A = 3/4$ i $B = 1/4$.
Prema tome je $D_n = \frac{1}{4}\{3^{n+1} + (-1)^n\}$.
Ova formula važi i za slučaj kada je $n = 1$ i $n = 2$.

Generalizacija. Odrediti $D_n = |a_{ik}|_1^n$ ako je

$a_{ik} = \alpha$ $(i = k)$, $a_{ik} = \beta$ $(i = k+1)$, $a_{ik} = \gamma$ $(i = k-1)$, $a_{ik} = 0$ $(i \neq k,\ k+1,\ k-1)$.

Izračunati karakteristične vrednosti matrice $\|a_{ik}\|$ ako su β i γ različiti od nule i ako je $\operatorname{sgn}\beta = \operatorname{sgn}\gamma$.

19. Koja je od sledećih dveju transformacija vektorskog prostora linearna:

a) Vektor $\vec{x}$ projektuje se ortogonalno na stalni pravac p, a potom se ova projekcija opet ortogonalno projektuje natrag na pravac vektora $\vec{x}$;

b) Vektor $\vec{x}$ projektuje se na stalni pravac p, a zatim ova projekcija dalje na stalni pravac q?

Za onu od tih transformacija koja je linearna naći matricu kojom se ta transformacija može računski zadati.

Rešenje. a) Uzmemo li dva vektora $\vec{x}$, $\vec{y}$ koji sa stalnim pravcem p zaklapaju po ugao od $\pi/4$, imaju intenzitet jednak jedinici, uzajamno su ortogonalni i leže u istoj ravni sa stalnim pravcem p, njihov zbir $\vec{x} + \vec{y}$ ležaće na samom pravcu p, pa će i posle oba projektovanja opisana u tekstu zadatka ostati $\vec{x} + \vec{y}$. Ako, međutim, *najpre* projektujemo pojedinačno vektore $\vec{x}$, $\vec{y}$ kako je u zadatku opisano, pa *posle* izvršimo sabiranje slika, dobićemo kao rezultat vektor $(\vec{x} + \vec{y})/2$. Ovde, dakle, slika zbira nije jednaka zbiru slika, pa transformacija nije linearna.

b) Ako se zadržimo samo na projektovanju na stalni pravac p, onda će projekcija zbira biti jednaka zbiru projekcija. Ako sad ove dve projekcije dalje projektujemo na stalni pravac q, biće opet projekcija zbira jednaka zbiru projekcija, pa zaključujemo da je transformacija linearna. Ako je A matrica, koja opisuje prvo projektovanje i B matrica koja opisuje drugo projektovanje, matrica za oba projektovanja je BA.

Ovo je problem i rešenje *M. Stojakovića.*

20. Odrediti polinom minimalnog stepena po promenljivoj x sa racionalnim koeficijentima koji za $x = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ ima vrednost $2\sqrt{2} + 5\sqrt{5}$.

Rešenje. Neka je

$$\sqrt{2} = u, \qquad \sqrt{5} = v.$$

Zbog

$$x = u + v, \qquad x^2 = 7 + 2uv, \qquad x^3 = 17u + 11v$$

biće

$$u = -\frac{1}{6}(11x - x^3), \qquad v = -\frac{1}{6}(x^3 - 17x).$$

Sada je

$$2u+5v=2\sqrt{2}+5\sqrt{5}=\frac{1}{2}(21x-x^3),$$

pa je polinom koji za $x=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ima vrednost $y=2\sqrt{2}+5\sqrt{5}$ dat sa $y=\frac{1}{2}(21x-x^3)$.

Ovo je zadatak i rešenje *M. Stojakovića.*

21. Izračunati vrednost determinante

$$|a_{ij}|_1^n \qquad (a_{ij}=\delta_{ij}+i^{-1}j^{-1}),$$

gde je δ_{ij} *Kronecker*-ov simbol.

22. Funkcija $f(x)$ je realna, ograničena i zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$f(x-y)=f(x)f(y)-f(a-x)f(a+y),$$

gde je a pozitivna konstanta i $f(0)=1$.

1° Dokazati da je $f(a)=0$.

2° Dokazati da za svako realno x važe relacije:

$$f(x)=f(-x), \quad f(2a-x)=-f(x),$$

$$f(x+4a)=f(x), \quad f^2(x)+f^2(a-x)=1,$$

$$-1\leqslant f(x)\leqslant 1.$$

3° Navesti primer funkcije $f(x)$ koja ima sve navedene osobine.

23. Ako je

$$C_{nr}(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{np+r}}{(np+r)!}, \qquad S_{nr}(x)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{x^{np+r}}{(np+r)!},$$

$$(r=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1),$$

izvesti adicione teoreme za

$$C_{nr}(x+y) \quad \text{i} \quad S_{nr}(x+y).$$

Dokazati *Knar*-ove formule:

$$\operatorname{sh} x \sin x = S_{42}(x\sqrt{2}),$$

$$\operatorname{ch} x \cos x = S_{40}(x\sqrt{2}).$$

Funkcije $C_{nr}(x)$ i $S_{nr}(x)$ uveo je *Ricatti.*

Rešenje. a) Uvedimo hiperkompleksnu jedinicu j koja je definisana na sledeći način:

1° $j^n=1$,

2° Potencije $j^0=1,\ j^1=j,\ j^2,\ j^3,\ \ldots,\ j^{n-1}$ su linearno nezavisne.

Definišimo eksponencijalnu funkciju jednakošću

$$e^{jx}=\sum_{\nu=0}^{\infty}j^\nu\frac{x^\nu}{\nu!}. \tag{1}$$

Koristeći uslov 1°, možemo jednakosti (1) dati oblik

$$e^{jx}=\sum_{p=0}^{n-1}j^p C_{np}(x). \tag{2}$$

Iz definicije (1) eksponencijalne funkcije $f(x)=e^{jx}$ izvodi se da ona zadovoljava funkcionalnu jednačinu

(3) $$f(x)\,f(y)=f(x+y).$$

Dokaz te relacije je analogan njenom dokazu u oblasti kompleksnih brojeva.

Na osnovu (2) i (3) dobijamo

(4) $$\sum_{p=0}^{n-1} j^p C_{np}(x+y)=\left(\sum_{p=0}^{n-1} j^p C_{np}(x)\right)\left(\sum_{p=0}^{n-1} j^p C_{np}(y)\right).$$

Iz (4), na osnovu 2° i 1°, sleduje:

(5) $$C_{nr}(x+y)=\sum_{\nu+p=r} C_{n\nu}(x)\,C_{np}(y)+\sum_{\nu+p=n+r} C_{n\nu}(x)\,C_{np}(y).$$

b) Postupak u izvođenju je potpuno analogan prethodnom samo što se jedinica j definiše na sledeći način:

1° $j^n=-1$,

2° Potencije $j^0=1,\ j^1=j,\ j^2,\ j^3,\ \dots,\ j^{n-1}$ su linearno nezavisne.

Dolazi se do rezultata

(6) $$S_{nr}(x+y)=\sum_{\nu+p=r} S_{n\nu}(x)\,S_{np}(y)-\sum_{\nu+p=n+r} S_{n\nu}(x)\,S_{np}(y).$$

Za $n=2$ formule (5) i (6) lako se proveravaju, jer je:

$$C_{20}(x)=\operatorname{ch} x;\qquad C_{21}(x)=\operatorname{sh} x;$$

$$S_{20}(x)=\cos x;\qquad S_{21}(x)=\sin x.$$

Ovo je rešenje *D. Đokovića.*

24. Odrediti polinom $P(x)$ stepena $2n+1$ koji ima osobine:

$$(x-1)^{n+1}\mid\{P(x)+1\},\qquad (x+1)^{n+1}\mid\{P(x)-1\}.$$

Rešenje. Navedenim uslovima može se dati sledeći oblik

(1) $$P(x)+1\equiv(x-1)^{n+1}\,Q_1(x),$$

(2) $$P(x)-1\equiv(x+1)^{n+1}\,Q_2(x),$$

gde su $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ polinomi stepena n.

Na osnovu (1) i (2) dobija se

(3) $$P^2(x)-1\equiv(x^2-1)^{n+1}\,Q(x),$$

gde je $Q(x)$ polinom stepena $2n$.

Iz (1) i (2), odnosno iz (3), vidi se da polinom $P(x)$ nije deljiv sa x^2-1.

Posle diferenciranja identitet (3) postaje

(4) $$2P(x)\,P'(x)\equiv 2(n+1)\,x\,(x^2-1)^n\,Q(x)+(x^2-1)^{n+1}\,Q'(x).$$

Odavde izlazi da je izvodni polinom $P'(x)$ deljiv sa $(x^2-1)^n$.

Na osnovu ovog i kako je $P(x)$ polinom stepena $2n+1$, imamo

(5) $$P'(x)=a\,(x^2-1)^n=a\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}x^{2k},$$

gde je a jedna konstanta koju ćemo kasnije odrediti.

Posle integracije dobijamo

(6) $$P(x)=a\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{2k+1}\binom{n}{k}x^{2k+1}+b,$$

gde je b konstanta.

Prema (1) i (2), polinom $P(x)$, definisan relacijom (6), zadovoljava uslove

$$a \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k+1} \binom{n}{k} + b = -1,$$

$$-a \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k+1} \binom{n}{k} + b = 1.$$

Iz poslednjih relacija dobija se

$$a = -\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k+1} \binom{n}{k}}, \qquad b = 0.$$

Da bismo sumirali $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$, posmatrajmo razvoj

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k},$$

odakle, posle integracije, izlazi

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}.$$

Stavimo li $x = \cos t$, dobijamo

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Prema tome, traženi polinom ima vid

$$P(x) = -\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} x^{2k+1}.$$

Ostaje da se pokaže da ovaj polinom ispunjava uslove (1) i (2).

25. Ako je $f(x) = (1+\sqrt{x})^{2n+2}$, pokazati da je

$$f^{(n)}(1) = 4(n+1)(n+1)!$$

Rešenje. Uporedo sa datom funkcijom $f(x)$ posmatrajmo funkciju

$$g(x) = (1-\sqrt{x})^{2n+2}.$$

Bez teškoće konstatuje se da je $g^{(n)}(1) = 0$.

Na osnovu ovoga izračunavanje vrednosti $f^{(n)}(1)$ je znatno olakšano. Pođimo od izraza

$$\begin{aligned} f^{(n)}(1) &= f^{(n)}(1) + g^{(n)}(1) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \{1+\sqrt{x})^{2n+2} + (1-\sqrt{x})^{2n+2}\} \Big|_{x=1}. \end{aligned}$$

Kako je

$$(1+\sqrt{x})^{2n+2} + (1-\sqrt{x})^{2n+2} = 2 \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2}{2k} x^k,$$

dobijamo

$$\frac{d^n}{dx^n} \left\{ 2 \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2}{2k} x^k \right\} = 2 \binom{2n+2}{2n+2} (n+1)! \ x + 2 \binom{2n+2}{2n} n!$$

Prema tome je

$$f^{(n)}(1)=2\,(n+1)\,!+(2n+2)\,(2n+1)\;n\,!$$
$$=4\,(n+1)\,(n+1)\,!$$

Ovaj zadatak postavio je R. E. Shafer (*The American Mathematical Monthly*, vol. 67, 1960, p. 85, problem E 1369). Navedeno interesantno rešenje dao je Chih-yi Wang.

Generalizacija. Ako je $h(a)=1$ i ako je $h(x)$ diferencijabilna funkcija (potreban broj puta), izračunati

$$\frac{d^{2n+2}}{dx^{2n+2}}\{1+\sqrt{h(x)}\}^{2n+2}.$$

Navesti i druge generalizacije.

26. Izračunati određeni integral

$$\int_0^1 x^r(1-x)^n\,dx \qquad (n,\ r \text{ prirodni brojevi}).$$

Ako je

$$I_{ns}=\int_0^1 x^s\frac{d^n}{dx^n}\{x^{n+r-s}(1-x)^n\}\,dx,$$

gde su n, r, s prirodni brojevi, pokazati da je

$$(1)\qquad \begin{aligned} I_{ns}&=0 && (s<n),\\ &=(-1)^n\frac{(n!)^2\,r!}{(n+r+1)!} && (s=n).\end{aligned}$$

Rešenje. Ostavlja se čitaocu da dokaže formulu

$$(2)\qquad \int_0^1 x^r(1-x)^n\,dx=\frac{n!\;r!}{(n+r+1)!}.$$

Primenom parcijalne integracije na integral I_{ns} dobija se

$$I_{ns}=-s\int_0^1 x^{s-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\{x^{n+r-s}(1-x)^n\}\,dx,$$

jer je

$$x^s\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\{x^{n+r-s}(1-x)^n\}$$

jednako nuli za $x=0$ i $x=1$.

Posle s-te primene parcijalne integracije, dobija se

$$(3)\qquad I_{ns}=(-1)^s s!\int_0^1 \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}}\{x^{n+r-s}(1-x)^n\}\,dx,$$

jer je

$$(-1)^{s-1}s!\,x\frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}}\{x^{n+r-s}(1-x)^n\}$$

jednako nuli za $x=0$ i $x=1$.

Ako je $s<n$, iz (3) sleduje da je $I_{ns}=0$. Ako je $s=n$, tada (3) postaje

$$I_{nn}=(-1)^n n!\int_0^1 x^r(1-x)^n\,dx.$$

Primenom formule (2) dobija se

$$I_{nn}=(-1)^n n!\,\frac{r!\,n!}{(n+r+1)!}=(-1)^n\frac{(n!)^2 r!}{(n+r+1)!}.$$

Ovim je dokazana formula (1).

Izvedene formule važe takođe ako n, r, s imaju vrednost nule.

Primedba. Izračunati integral I_{ns} kada je $s>n$.

27. Pokazati da je polinom

$$(1)\qquad Q_{np}(x)=\int_1^x t^n(t-1)^p\,\mathrm{d}t \qquad (n,\ p \text{ nenegativni celi brojevi})$$

deljiv sa $(x-1)^{p+1}$. Odrediti količnik $Q_{np}(x)/(x-1)^{p+1}$.

Rešenje. Kako je $Q_{np}(1)=0$, polinom $Q_{np}(x)$ je deljiv bar sa $x-1$. Iz (1), posle diferenciranja, izlazi

$$\frac{\mathrm{d}Q_{np}(x)}{\mathrm{d}x}=x^n(x-1)^p.$$

Budući da je ovaj izvod deljiv sa $(x-1)^p$, polinom $Q_{np}(x)$ je deljiv sa $(x-1)^{p+1}$. Ako u integralu (1) izvršimo smenu

$$t-1=u \qquad (u \text{ nova nezavisno promenljiva}),$$

tada je

$$(2)\qquad Q_{np}(x)=\int_0^{x-1}(u+1)^n u^p\,\mathrm{d}u,$$

te ćemo dobiti $Q_{np}(x)$ u obliku polinoma po $x-1$.

Kako je

$$(u+1)^n=\sum_{r=0}^n\binom{n}{r}u^r,$$

integral (2) dobija oblik

$$Q_{np}(x)=\int_0^{x-1}\Big(\sum_{r=0}^n\binom{n}{r}u^{r+p}\Big)\mathrm{d}u=\sum_{r=0}^n\int_0^{x-1}\binom{n}{r}u^{r+p}\,\mathrm{d}u$$

$$=\sum_{r=0}^n\binom{n}{r}\frac{1}{r+p+1}u^{r+p+1}\Big|_{u=0}^{u=x-1}$$

$$=\sum_{r=0}^n\binom{n}{r}\frac{1}{r+p+1}(x-1)^{r+p+1}$$

$$=(x-1)^{p+1}\sum_{r=0}^n\binom{n}{r}\frac{1}{r+p+1}(x-1)^r.$$

Zaista, ovaj polinom je deljiv sa $(x-1)^{p+1}$, a nije deljiv sa $(x-1)^{p+2}$, jer je traženi količnik polinom

$$\sum_{r=0}^n\binom{n}{r}\frac{1}{r+p+1}(x-1)^r,$$

čiji je nezavisan član broj $\dfrac{1}{p+1}$, koji je različit od nule, jer je p nula ili prirodan broj.

Generalizacija. Ispitati da li je polinom

$$Q_{np}(x;\, a,\, b) = \int_{\lambda}^{x} (x-a)^n (x-b)^p \, \mathrm{d}x$$

(n, p nule ili prirodni brojevi; a, b, λ realni brojevi)

deljiv sa

$$(x-a)^{n+1} \quad \text{ako je} \quad \lambda = a;$$

$$(x-b)^{p+1} \quad \text{ako je} \quad \lambda = b.$$

28. Izračunati

$$J = \iiiint (R^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2)^{1/2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}u \quad \text{po oblasti} \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leqslant R^2.$$

Rešenje. I. Integralimo najpre po u. Tada su granice integrala $-(R^2-x^2-y^2-z^2)^{1/2}$ i $(R^2-x^2-y^2-z^2)^{1/2}$, te dobijamo

$$\int (R^2-x^2-y^2-z^2-u^2)^{1/2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \pi (R^2-x^2-y^2-z^2).$$

Izraz na desnoj strani je polovina površine kruga poluprečnika

$$(R^2-x^2-y^2-z^2)^{1/2}.$$

Posle prelaza na sferne koordinate dobija se

$$J = \frac{1}{2} \pi \iiint (R^2-x^2-y^2-z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \pi \int_0^R r^2 (R^2-r^2) \, \mathrm{d}r \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi.$$

Kada se izračunaju integrali, koji se javljaju na desnoj strani poslednje jednakosti, nalazi se

$$J = \frac{4}{15} \pi^2 R^5.$$

II. Izvršimo smenu:

$$x = r \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma,$$

$$y = r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

$$z = r \sin\alpha \cos\beta,$$

$$u = r \cos\alpha.$$

Element zapremine je $\mathrm{d}v = r^3 \sin^2\alpha \sin\beta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta \, \mathrm{d}\gamma$.
Dati integral sada postaje

$$J = \left(\int_0^R r^3 \sqrt{R^2-r^2} \, \mathrm{d}r \right) \left(\int_0^{\pi} \sin^2\alpha \, \mathrm{d}\alpha \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\beta \, \mathrm{d}\beta \right) \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\gamma \right).$$

Kako je

$$\int_0^R r^3 \sqrt{R^2-r^2} \, \mathrm{d}r = \frac{2}{15} R^5, \qquad \int_0^{\pi} \sin^2\alpha \, \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2} \pi,$$

$$\int_0^{\pi} \sin\beta \, \mathrm{d}\beta = 2, \qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\gamma = 2\pi,$$

dobija se

$$J = \frac{2}{15} R^5 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{15} \pi^2 R^5.$$

29. Izračunati

$$\iiiint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u \quad \text{po oblasti} \quad x^2+y^2+z^2+u^2 \leqslant R^2.$$

Rešenje. Ako integralimo najpre po u, granice su

$$-(R^2-x^2-y^2-z^2)^{1/2} \quad \text{i} \quad +(R^2-x^2-y^2-z^2)^{1/2}.$$

Tada je

$$J=\iiiint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u=2\iiint (R^2-x^2-y^2-z^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

U dobijenom trostrukom integralu pređemo li na sferne koordinate

$$x=\rho\cos\varphi\cos\theta, \quad y=\rho\cos\varphi\sin\theta, \quad z=\rho\sin\varphi,$$

dobijamo

$$J=2\int_0^R \rho^2(R^2-\rho^2)^{1/2}\,\mathrm{d}\rho \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta=8\pi\int_0^R \rho^2(R^2-\rho^2)^{1/2}\,\mathrm{d}\rho.$$

Ako stavimo $\rho=R\cos t$, dobijamo na kraju

$$J=8\pi R^4\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\pi R^4\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\pi^2 R^4.$$

30. Izračunati integral

$$\iiiint \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{u^2}{g^2}\right)^{1/2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u$$

po oblasti

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{u^2}{g^2} \leqslant 1.$$

Rešenje. Ako stavimo $x=a\xi$, $y=b\eta$, $z=c\zeta$, $u=g\tau$, integral će dobiti oblik

$$J=abcg\iiiint (1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2-\tau^2)^{1/2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\tau.$$

Na desnoj strani imamo integral iz zadatka 28, u slučaju kada je $R=1$. Zato je

$$J=\frac{4\pi^2}{15}abcg.$$

31. Data je funkcija $y_1=x^n e^{-x}$ (n prirodan broj).

1° Pokazati da ova funkcija zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\right)=ny. \tag{1}$$

2° Polazeći od ove jednačine, zaključiti da je funkcija $z_1=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$ jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$x\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}+(x+1)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(n+1)z=0. \tag{2}$$

3° Pokazati da je funkcija $w_1=e^x\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$ polinom stepena n i da ona zadovoljava jednačinu

$$x\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}+(1-x)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}+nw=0. \tag{3}$$

4° Ako je k prirodan broj, za $k=n$ i za $k<n$ izračunati

$$J_{kn}=\int_0^\infty x^k \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}x^n)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Rešenje. 2° Polazeći od (1), posle diferenciranja, dobija se

$$x\mathrm{D}^{n+2}y+(x+1)\mathrm{D}^{n+1}y+(n+1)\mathrm{D}^n y=0 \qquad (\mathrm{D}^k=\mathrm{d}^k/\mathrm{d}x^k). \tag{5}$$

Ako se stavi $\mathrm{D}^n y=z$, jednačina (5) postaje jednačina (2).

Na osnovu ovog zaključuje se da jednačina (2) ima partikularno rešenje $\mathrm{D}^n(x^n e^{-x})$, budući da je funkcija $x^n e^{-x}$ partikularno rešenje jednačine (5).

3° Primenom *Leibniz*-ove formule dobija se

$$\mathrm{D}^n(x^n e^{-x})=e^{-x}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\mathrm{D}^{n-r}(x^n)=n!\,e^{-x}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\frac{x^r}{r!}.$$

Prema tome, funkcija $e^x\mathrm{D}^n(x^n e^{-x})$ zaista je polinom po x.

Jednačina (2), smenom $z=e^{-x}w(x)$, postaje jednačina (3), pa se iz ovog zaključuje da je funkcija $e^x\mathrm{D}^n(x^n e^{-x})$ zaista partikularno rešenje jednačine (3).

4° J_{kn} izračunaćemo uzastopnom primenom metoda parcijalne integracije. Posle prve integracije dobija se

$$J_{kn}=x^k\mathrm{D}^{n-1}(x^n e^{-x})\Big|_0^\infty-\int_0^\infty \mathrm{D}(x^k)\,\mathrm{D}^{n-1}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x=-\int_0^\infty \mathrm{D}(x^k)\,\mathrm{D}^{n-1}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x.$$

Posle ponovne parcijalne integracije biće

$$J_{kn}=\int_0^\infty \mathrm{D}^2(x^k)\,\mathrm{D}^{n-2}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x.$$

Posle $k-1$ parcijalnih integracija, integral J_{kn} postaje

$$\begin{aligned} J_{kn}&=(-1)^{k-1}\int_0^\infty \mathrm{D}^{k-1}(x^k)\,\mathrm{D}^{n-k+1}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x \\ &=(-1)^{k-1}\mathrm{D}^{k-1}(x^k)\,\mathrm{D}^{n-k}(x^n e^{-x})\Big|_0^\infty+(-1)^k\int_0^\infty \mathrm{D}^k(x^k)\,\mathrm{D}^{n-k}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{6}$$

Za $k=n$ dobija se

$$J_{nn}=(-1)^n n!\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x=(-1)^{n-1}n!\,e^{-x}\left\{\sum_{r=0}^{n}\mathrm{D}^r(x^n)\right\}\Bigg|_0^\infty.$$

$$\therefore\quad J_{nn}=(-1)^n(n!)^2.$$

Za $k<n$ iz (6) sleduje

$$J_{kn}=(-1)^k k!\,\mathrm{D}^{n-k-1}(x^n e^{-x})\Big|_0^\infty=0.$$

Prema tome, imamo sledeći rezultat

$$J_{kn}=\begin{cases} 0 & (k<n); \\ (-1)^n(n!)^2 & (k=n). \end{cases}$$

32. Pokazati da je funkcija

$$y=(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)/(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n) \tag{1}$$

$$(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n;\ b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_n \text{ konstante})$$

opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n+1} \\ y_2 & y_3 & & y_{n+2} \\ \vdots & & & \\ y_{n+1} & y_{n+2} & & y_{2n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

gde je $y_r = \mathrm{D}^r y / r!$ $(r = 1, 2, \ldots, 2n+1)$.

Rešenje. Ovaj zadatak formulisao je *Frank Morley*, a rešio ga *T. A. Bullard* (videti: *The American Mathematical Monthly*, vol. 31, 1924, p. 353).

Posmatrajmo (1) u obliku

$$(3)\qquad By = A,$$

gde je

$$A = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r, \quad B = \sum_{r=0}^{n} b_r x^r.$$

Ako se pomoću *Leibniz*-ove formule proizvod By diferencira $n-i$ puta, tada iz (3) sleduje

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+i)!}{\nu!\,(n+i-\nu)!} (\mathrm{D}^{n+i-\nu} y)(\mathrm{D}^{\nu} B) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

jer je $\mathrm{D}^k A = \mathrm{D}^k B = 0$ za $k > n$.

Posle deobe sa $(n+i)!$ i upotrebe notacije $y_r = \mathrm{D}^r y / r!$ i $B_r = \mathrm{D}^r B / r!$ dobija se skup linearnih jednačina

$$(4)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} B_\nu\, y_{n+i-\nu} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Ako se iz (4) eliminišu B_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$, dolazi se do jednačine (2), što je i trebalo pokazati.

Generalizacija. *Morley*-ev problem može se ovako uopštiti:

Ako polinomi $\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu$ i $\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu$ (a_ν, b_ν ma kakve konstante) nemaju zajedničkih nula, tada je funkcija

$$y = \Big(\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu\Big) \Big/ \Big(\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu\Big)$$

opšte rešenje diferencijalne jednačine reda $m+n+1$

$$\begin{vmatrix} y_{m-n+1} & y_{m-n+2} & \cdots & y_{m+1} \\ y_{m-n+2} & y_{m-n+3} & & y_{m+2} \\ \vdots & & & \\ y_{m+1} & y_{m+2} & & y_{m+n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

gde je

$$\begin{aligned} y_k &= 0 && (k < 0), \\ &= y && (k = 0), \\ &= \frac{1}{k!}\mathrm{D}^k y && (k > 0). \end{aligned}$$

33. Ispitati da li je funkcija

$$u=\int_0^\pi f(x\cos t+y)\sin^{n-1}t\,dt \qquad (n \text{ prirodan broj } > 1)$$

rešenje parcijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{n}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

gde je $f(z)$ dva puta diferencijabilna funkcija.

34. Da li postoji rešenje V parcijalne jednačine

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\operatorname{cosec}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0$$

koje je oblika $V=f(r)\cos\theta$ i zadovoljava uslove:

$$V=0 \quad \text{za } r=0;$$

$$\frac{\partial V}{\partial r}=-k\cos\theta \qquad (k=\text{const})?$$

35. Date su diferencijalne jednačine

(1) $$xy''-xy'-ny=0$$

(2) $$xy''-xy'+ny=0$$

(n prirodan broj).

1° Pokazati da je funkcija

(3) $$y_1(x)=(e^x x^n)^{(n-1)}$$

jedno partikularno rešenje jednačine (1).

2° Pokazati da je funkcija

$$y_2(x)=e^x y_1(-x),$$

gde je $y_1(x)$ definisano relacijom (3), jedno partikularno rešenje jednačine (2) i da je ono oblika

$$a\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2(n-k)!\,\frac{k}{n}\,x^k,$$

gde je a jedna fiksna konstanta.

36. Ispitati da li je skup funkcija

$$g_0(x)=1,\quad g_{2n}(x)=\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{\sin^2\frac{1}{2}x},\quad g_{2n-1}(x)=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{\sin^2\frac{1}{2}x}$$

$$(n=1,2,3,\ldots)$$

ortogonalan na intervalu $(0, 2\pi)$ u odnosu na težinu $\rho(x)=\sin^2\frac{1}{2}x$.

37. Po x rešiti jednačine

$$1^\circ\ \binom{a}{x}=b;\qquad 2^\circ\ \binom{a}{x}c^x=b;\qquad 3^\circ\ \binom{x}{a}c^x=b$$

(a, b, c realni parametri).

Od interesa su i rešenja za partikularne vrednosti parametara a, b, c.

38. Ako se pomoću duži čije su veličine a, b, c, d, e, f može formirati jedan tetraedar, pokazati da se pomoću duži čije su veličine

$$\sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{b},\ \sqrt[n]{c},\ \sqrt[n]{d},\ \sqrt[n]{e},\ \sqrt[n]{f} \qquad (n=2,\,3,\,4,\ldots)$$

takođe može formirati tetraedar.

39. Dokazati $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{kn}{n}=(-1)^n n^n$.

40. Dato je:

$$\begin{aligned}&\alpha_1 \text{ kuglica boje } 1,\\ &\alpha_2 \text{ kuglica boje } 2,\\ &\quad\vdots\\ &\alpha_p \text{ kuglica boje } p.\end{aligned}$$

Ukupan broj kuglica je paran, tj. $\sum_{\nu=1}^{p}\alpha_\nu=2n$.

Na koliko se *različitih* načina mogu ovih $2n$ kuglica rasporediti u parove? (Pod različitim rasporedima u parove podrazumevaju se takvi rasporedi koji daju različit broj bar jednog tipa parova. Tip para određuju boje dve kuglice koje čine par — one mogu biti i iste boje.)

Ovo je problem *D. Đokovića*.

41. Odrediti parametre m i n tako da važi relacija

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} x^m y^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

Generalisati ovo pitanje na integrale oblika:

1° $$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} x^m y^n z^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z;$$

2° $$\int\!\!\int\cdots\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant r^2} x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\cdots x_n^{\nu_n}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \qquad (n>3).$$

42. Proveriti da li funkcionalne jednačine:

(1) $$f(x_1+x_2,\,x_3)+f(x_1,\,x_2)=f(x_2,\,x_3)+f(x_1,\,x_2+x_3),$$

(2) $$\begin{aligned}&f(x_1+x_2,\,x_3,\,x_4)+f(x_1,\,x_2,\,x_3+x_4)\\ &\qquad=f(x_2,\,x_3,\,x_4)+f(x_1,\,x_2+x_3,\,x_4)+f(x_1,\,x_2,\,x_3),\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}&f(x_1+x_2,\,x_3,\,x_4,\,x_5)+f(x_1,\,x_2,\,x_3+x_4,\,x_5)+f(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)\\ &\qquad=f(x_2,\,x_3,\,x_4,\,x_5)+f(x_1,\,x_2+x_3,\,x_4,\,x_5)+f(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4+x_5)\end{aligned}$$

imaju respektivno sledeća rešenja:

(1′) $$f(x_1,\,x_2)=G(x_1+x_2)-G(x_2)-G(x_1)+a,$$

(2′) $$\begin{aligned}f(x_1,\,x_2,\,x_3)=&\{G(x_1+x_2,\,x_3)+G(x_1,\,x_2)-G(x_1,\,x_2+x_3)-G(x_2,\,x_3)\}\\ &+\{H(x_1+x_2)-H(x_2)\}+ax_1,\end{aligned}$$

$$(3') \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{G(x_1+x_2, x_3, x_4) + G(x_1, x_2, x_3+x_4) - G(x_2, x_3, x_4) - G(x_1, x_2+x_3, x_4) - G(x_1, x_2, x_3)\} + \{H(x_1+x_2, x_3) - H(x_1, x_2+x_3) - H(x_2, x_3)\} + \{K(x_1+x_2) - K(x_2) - K(x_1)\} + a.$$

Ovde a označava proizvoljnu konstantu i G, H, K proizvoljne funkcije.

Ako je f diferencijabilna funkcija koja zadovoljava jednačinu (e) $(e=1, 2, 3)$, tada ona ima oblik (E) $(E=1', 2', 3')$, gde su G, H, K proizvoljne diferencijabilne funkcije.

Primedba I. Ovaj rezultat dobio je *S. Kurepa.* Videti njegov članak: *On some functional equations* (Glasnik matematičko-fizički i astronomski, serija II, t. 11, 1956, 3—5).

Primedba II. Da li *Kurepine* funkcionalne jednačine imaju i drugih rešenja osim navedenih?

Primedba III. Videti takođe funkcionalne jednačine *D. S. Mitrinovića* (zadaci: 43 i 44 ovog odeljka), koje su inspirisane *Kurepinim* jednačinama.

43. Ispitati da li funkcionalna jednačina

$$(1) \quad \{f(x_1, x_2+x_3) + f(x_2+x_3, x_1)\} + \{f(x_2, x_3+x_1) + f(x_3+x_1, x_2)\} = 2\{f(x_3, x_1+x_2) + f(x_1+x_2, x_3)\}$$

ima i drugih rešenja osim

$$(S) \quad f(x, y) = F(x+y) + H(x) - H(y),$$

gde su $F(x)$ i $H(x)$ proizvoljne funkcije.

Rešenje. Uvedimo pomoćnu funkciju $g(x, y)$ pomoću relacije

$$(2) \quad g(x, y) = f(x, y) + f(y, x).$$

Jednačina (1) tada glasi

$$g(x_1, x_2+x_3) + g(x_2, x_3+x_1) = 2g(x_3, x_1+x_2),$$

odnosno

$$(3) \quad g(x_1, x_2+x_3) + g(x_2, x_3+x_1) + g(x_3, x_1+x_2) = 3g(x_3, x_1+x_2).$$

Ako izvršimo permutaciju $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$, leva strana se ne menja, pa i desna mora da ima tu istu osobinu. Dakle

$$(4) \quad g(x_3, x_1+x_2) = g(x_1, x_2+x_3).$$

Za $x_3=0$ dobijamo

$$g(x_1, x_2) = g(0, x_1+x_2),$$

odakle izlazi da je $g(x, y)$ funkcija od $x+y$, tj. $g(x, y) = h(x+y)$.

Prema jednakosti (2) dobijamo

$$(5) \quad f(x, y) + f(y, x) = h(x+y).$$

Uvedimo funkciju $\theta(x, y)$ pomoću uslova

$$(6) \quad f(x, y) = \frac{1}{2} h(x+y) + \theta(x, y).$$

Jednačina (5) tada postaje

$$\theta(x, y) + \theta(y, x) = 0.$$

Opšte rešenje ove jednačine je $\theta(x, y) = G(x, y) - G(y, x)$, gde je $G(x, y)$ proizvoljna funkcija naznačenih argumenata. Na osnovu (6) zaključuje se da $f(x, y)$ mora biti oblika

$$f(x, y) = \frac{1}{2} h(x+y) + G(x, y) - G(y, x).$$

Bez teškoće se proverava da ovako dobijena funkcija $f(x, y)$ zadovoljava jednačinu (1). Opšte rešenje jednačine (1) je

$$f(x, y)=\frac{1}{2} h(x+y)+G(x, y)-G(y, x), \tag{7}$$

gde su $h(x+y)$, $G(x, y)$ ma kakve funkcije naznačenih argumenata.

Ako se u (7) stavi $G(x, y) \equiv H(x)$ i $\frac{1}{2} h(x+y) \equiv F(x+y)$, dobija se partikularno rešenje (S) jednačine (1).

Ovo rešenje dao je *S. Prešić*.

44. Ispitati da li funkcionalna jednačina

$$A\{f(x_1, x_2+x_3)-f(x_2+x_3, x_1)\}+B\{f(x_2, x_3+x_1)-f(x_3+x_1, x_2)\}$$
$$+C\{f(x_3, x_1+x_2)-f(x_1+x_2, x_3)\}=0$$

(A, B, C proizvoljne konstante)

ima i drugih rešenja osim

$$f(x, y)=F(x+y)+H(x)+H(y),$$

gde su $F(x)$ i $H(x)$ proizvoljne funkcije.

45. Neka je (E, τ) topološki prostor, gde je sa τ označeno jednoznačno preslikavanje partitivnog skupa $P(E)$ skupa E u skup $P(E)$ koje ispunjava uslove:

$\tau(\Lambda)=\Lambda$ ($\Lambda=$ prazan deo skupa E);

$\tau(A) \supset A$ za svako $A \subset E$;

$\tau(A \cup B)=\tau(A) \cup \tau(B)$ za svako $A, B \subset E$;

$\tau(\tau(A))=\tau(A)$ za svako $A \subset E$.

1° Ako je X ma koji podskup u prostoru (E, τ), dokazati da je njegov rub $r(X)$ zatvoren skup u tom prostoru.

2° Neka je $X=[\alpha, \beta]$ $(\alpha<\beta)$ ma koji segment numeričke prave R^1. Dokazati da je X zatvoren skup u prostoru R^1 i da se njegov rub $r(X)$ sastoji samo od dve tačke.

Ako je Q skup svih racionalnih tačaka u R^1, pokazati da je rub $r(Q)$ skupa Q jednak skupu svih realnih brojeva.

3° Iz tačke 2° sleduje da ne mora svaki zatvoren skup biti jednak svom rubu. Dokazati zato sledeći stav: Da zatvoren skup X topološkog prostora (E, τ) bude jednak svome rubu $r(X)$, potrebno je i dovoljno da njegova unutrašnjost $u(X)$ bude prazan skup.

4° Neka je R^2 numerička ravan, tj. topološki proizvod $R^1 \times R^1$, i neka je sa X označen skup $\{(\alpha, \beta):(\alpha, \beta) \in R^1 \times R^1, \alpha^2+\beta^2=1\}$. Pokazati da je skup X zatvoren u prostoru R^2 i, primenom stava iz tačke 3°, da je taj skup jednak svome rubu $r(X)$.

Primedba. Ovaj problem dao je *Z. Mamuzić* na pismenom ispitu iz Analize II na Filozofskom fakultetu u Novom Sadu, juna 1960.

46. Ako su m i n prirodni brojevi ili nule, tada važe formule *D. Blanuše:*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2m+2k)!}{(2k)!\,(m+k)!\,(n-k)!} = \begin{cases} 0 & (n>m), \\ \dfrac{(-1)^n 2^{2n} (2m)!}{(2n)!\,(m-n)!} & (n \leqslant m); \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2m+2k+2)!}{(2k+1)!\,(m+k+1)!\,(n-k)!} = \begin{cases} 0 & (n>m), \\ \dfrac{(-1)^n 2^{2n+1} (2m+1)!}{(2n+1)!\,(m-n)!} & (n \leqslant m). \end{cases}$$

47. Odrediti u obliku potencijalnog reda ono rešenje $y(x)$ diferencijalne jednačine

(1) $$(6x^2-5x+1)y''+2(12x-5)y'+12y=0$$

koje ispunjava uslove: $y(0)=1$ i $y'(0)=0$.

Rešenje. Stavimo li

(2) $$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

jednačina (1) dobija oblik

$$(6x^2-5x+1)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}+2(12x-5)\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}+12\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k=0,$$

odakle sleduje diferencna jednačina

(3) $$a_{k+2}-5a_{k+1}+6a_k=0 \qquad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

Stavi li se $a_k=r^k$, dolazi se do njene karakteristične jednačine $r^2-5r+6=0$, čiji su koreni $r_1=2$ i $r_2=3$. Opšte rešenje jednačine (3) je

(4) $$a_k=C_1 2^k+C_2 3^k,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Uslovima $y(0)=1$ i $y'(0)=0$, polazeći od (2), odgovaraju jednakosti:

(5) $$a_0=1 \text{ i } a_1=0.$$

Iz (4), za vrednosti (5), dobija se

$$1=C_1+C_2, \quad 0=2C_1+3C_2,$$

odakle izlazi $C_2=-2$, $C_1=3$.

Prema tome, traženo partikularno rešenje glasi

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(3\cdot 2^k-2\cdot 3^k)\,x^k=\frac{3}{1-2x}-\frac{2}{1-3x}.$$

Poluprečnik konvergencije ovog reda je $1/3$.

Generalizacija. Odrediti jednačinu oblika

(6) $$(\alpha_0 x^2+\alpha_1 x+\alpha_2)y''+(\beta_0 x+\beta_1)y'+\gamma y=0 \qquad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2;\ \beta_0, \beta_1;\ \gamma \text{ konstante})$$

kojoj će navedenim postupkom korespondirati diferencna jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Jednačina (1) je partikularan slučaj jednačine (6).

48. Dokazati formulu:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos x_1 & \cos x_2 & & \cos x_{n+1} \\ \cos 2x_1 & \cos 2x_2 & & \cos 2x_{n+1} \\ \vdots & & & \\ \cos nx_1 & \cos nx_2 & & \cos nx_{n+1} \end{vmatrix} = 2^{\binom{n}{2}} P(\cos x - \cos x_j),$$

gde je $i>j$ i $P(\cos x_i - \cos x_j)$ *Vandermonde*-ov polinom.

Primedba. Uporediti sa formulom:

$$D=2^{n^2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} \sin\frac{x_i+x_j}{2}\sin\frac{x_i-x_j}{2}.$$

49. Data je matrica

$$M=\begin{Vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \\ \vdots & & \\ P_m & Q_m & R_m \end{Vmatrix},$$

gde je

$$P_i=\| a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{ip}\|,\quad Q_i=\| b_{i1}\ b_{i2}\ \cdots\ b_{iq}\|,\quad R_i=\| c_{\,1}\ c_{i2}\ \cdots\ c_{ir}\|$$
$$(i=1, 2, \ldots, m).$$

Neka je

$$a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{ip}\qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

jedna od permutacija elemenata $a_{11}a_{12}\cdots a_{1p}$.

Neka je

$$b_{i1}\ b_{i2}\ \cdots\ b_{iq}\qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

jedna od permutacija elemenata $b_{11}b_{12}\cdots b_{1q}$.

Ako je $m=p+q+r$, ispitati da li je rang $M<m$.

Primedba I. Šta se može reći o rangu matrice M ako je

$$c_{i1}\ c_{i2}\ \cdots\ c_{ir}\qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

jedna od permutacija elemenata $c_{11}c_{12}\cdots c_{1r}$?

Primedba II. Posmatrati opštije matrice navedene strukture.

50. Ako funkcija $z(t)=x(t)+iy(t)$, gde su $x(t)$ i $y(t)$ realne funkcije realne promenljive t, ima izvod, tada je

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\{z(t)\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{dz(t)}{dt}\right\},\qquad \frac{d}{dt}\operatorname{Im}\{z(t)\}=\operatorname{Im}\left\{\frac{dz(t)}{dt}\right\}.$$

Dokazati navedene formule i primeniti ih na određivanje n-tih izvoda funkcija

$$e^{pt}\cos qt,\quad e^{pt}\sin qt\qquad (p,\ q \text{ realne konstante}).$$

Odrediti takođe n-ti izvod funkcije

$$\frac{A}{(t-a)^2}+\frac{\bar{A}}{(t-\bar{a})^2}=2\operatorname{Re}\left\{\frac{A}{(t-a)^2}\right\}.$$

51. Neka je $z(t)=x(t)+iy(t)$ kompleksna funkcija realne promenljive t. Ako su funkcije $x(t)$ i $y(t)$ integrabilne, tada je

$$\int \operatorname{Re}\{z(t)\}\,dt=\operatorname{Re}\left\{\int z(t)\,dt\right\}, \qquad \int \operatorname{Im}\{z(t)\}\,dt=\operatorname{Im}\left\{\int z(t)\,dt\right\}.$$

Dokazati ove formule i pomoću njih odrediti integrale

$$\int e^{pt}\cos qt\,dt, \qquad \int e^{pt}\sin qt\,dt \qquad (p,\ q \text{ realne konstante}).$$

Takođe odrediti integral

$$\int \left\{\frac{A}{(t-a)^n}+\frac{\bar{A}}{(t-\bar{a})^n}\right\} dt \qquad (n=1,2,3,\ldots),$$

gde su A i a ma kakve konstante.

52. Proveriti rezultate:

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(1-x)^2}\,dx=\frac{2}{3}\pi^2; \quad \int_0^\infty \frac{\log^4 x}{(1-x)^2}\,dx=\frac{8}{15}\pi^4; \quad \int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(1+x)^2}\,dx=\frac{1}{3}\pi^2.$$

Primedba. Videti primedbu sledećeg zadatka.

53. Proveriti formule:

$$\int_0^\infty \frac{\log^{2k} x}{(1-x)^2}\,dx=(-1)^{k-1}\,2^{2k}\pi^{2k}B_{2k};$$

$$\int_0^1 \frac{\log^{2k-1} x}{1-x}\,dx=(-1)^k\frac{1}{k}\,2^{2k-2}\pi^{2k}B_{2k}$$

(k prirodan broj; B_{2k} *Bernoulli*-ev broj).

Primedba. Ove i druge slične formule dobio je *Th. Anghelutza* u svome članku objavljenom u časopisu *Lucrări ştiinţifice* — Institutul politehnic, Cluj, 1959.

54. Na šta se preslikava oblast $\operatorname{Re} z>2a$ $(a\neq 0)$ funkcijom $w=a^2/\bar{z}$?

55. Pokazati da funkcija

$$f(z)=\frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} \qquad (z\neq 0),$$

$$= 0 \qquad (z=0)$$

nije diferencijabilna u tački $z=0$, ma da su ispunjeni *Cauchy—Riemann*-ovi uslovi.

Uputstvo. Posmatrati, na primer, granične vrednosti:

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\{y=kx\}}}\frac{f(z)-f(0)}{z}, \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\{x=y^2\}}}\frac{f(z)-f(0)}{z}.$$

56. Pokazati da su

$$z = k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

jedine nule funkcije $\sin z$ i da su sve one prvog reda.

Uputstvo. Poći od formule

$$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$$

57. Odrediti izvod funkcije $\bar{z}$ u tački $z = a$ duž glatke krive

$$x = g_1(t), \qquad y = g_2(t).$$

Rezultat. Traženi izvod u tački $z = a$ je

$$\frac{\{g_1'(\tau)\}^2 - \{g_2'(\tau)\}^2 - 2i\,g_1'(\tau)\,g_2'(\tau)}{\{g_1'(\tau)\}^2 + \{g_2'(\tau)\}^2},$$

gde je τ određeno jednačinom $a = g_1(\tau) + i\,g_2(\tau)$.

58. Krug C koji ortogonalno seče krug $|z| = 1$ preslikati funkcijom $1/\bar{z}$.

59. Neka je

$$f(z) = c\left\{\prod_{\nu=1}^{m}(z - z_\nu)\right\} \Big/ \left\{\prod_{\nu=1}^{n}(z - p_\nu)\right\}$$

$(p_1 = p_2 \neq p_\nu$ za $\nu = 3, 4, 5, \ldots, n$; c kompleksna konstanta $\neq 0)$.

Dokazati formulu

$$\operatorname*{Res}_{z=p_1} f(z) = c\left(\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{p_1 - z_\nu} - \sum_{\nu=3}^{n}\frac{1}{p_1 - p_\nu}\right)\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{m}(p_1 - z_\nu)}{\prod\limits_{\nu=3}^{n}(p_1 - p_\nu)}.$$

Primedba I. Ova formula je korisna pri izračunavanju izvesnih tipova kompleksnih integrala.

Primedba II. Ovaj zadatak sastavio je *D. Đoković.*

60. Pokazati da je funkcija $u = f(z + ix\cos a + iy\sin a)$ rešenje *Laplace*-ove jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (x, y, z \text{ kompleksni brojevi})$$

za svako a i za svaku analitičku funkciju $f(t)$.

61. Neka je $f(z)$ uniformna analitička funkcija i neka su z_1 i z_2 dva pola funkcije $f(z^n)$ (n prirodan broj) koji su vezani uslovom

$$z_2 = z_1 \exp\left(\frac{2\pi i\nu}{n}\right) = z_1\,\varepsilon_n^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dokazati formulu

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z^n) = \varepsilon_n^\nu \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z^n).$$

Primedba. Ovaj zadatak sastavio je *D. Đoković.*

62. Ako su polovi z_ν racionalne funkcije

$$R(z)=A\{\prod_\nu (z-\zeta_\nu)^{p_\nu}\}/\{\prod_\nu (z-z_\nu)^{q_\nu}\}$$

(A kompleksna konstanta; p_ν, q_ν nenegativni celi brojevi)

simetrični u odnosu na y-osu, a isto tako i njene nule ζ_ν, dokazati formulu

$$\operatorname*{Res}_{z=-\bar{z}_\nu} R(z)=-\frac{A}{\bar{A}}\,\overline{\operatorname*{Res}_{z=z_\nu} R(z)}.$$

Primedba. Reći ćemo da su polovi (nule) funkcije $f(z)$ simetrično raspoređeni ili samo simetrični u odnosu na neku pravu ako je pored geometriske simetrije ispunjen uslov da su dva odgovarajuća simetrična pola (nule) istog reda.

Generalizacija. Ako su polovi i nule (svaki za sebe) simetrični u odnosu na neku pravu koja zaklapa ugao α sa pozitivnim smerom x-ose, tada za ma koja dva simetrična pola z_1 i z_2 važi relacija

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} R(z)=\frac{A}{\bar{A}}\,e^{2(k+1)\alpha i}\,\overline{\operatorname*{Res}_{z=z_1} R(z)}\qquad \Big(k=\sum_\nu p_\nu-\sum_\nu q_\nu\Big).$$

Ovaj zadatak sastavio je *D. Đoković.*

63. Dokazati: $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-\sqrt[4]{x}}\sin\sqrt[4]{x}\,dx=0\qquad (n=0,1,2,\ldots).$

Uputstvo. Ako se stavi $x=t^4$, integral postaje $4\displaystyle\int_0^\infty t^{4n+3}e^{-t}\sin t\,dt$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

Posmatrati zatim krivoliniski integral $\displaystyle\oint_\Gamma z^{4n+3}e^{(i-1)z}\,dz$, gde zatvorenu konturu Γ sačinjavaju: otsečak x-ose od 0 do $r(>0)$, luk kruga $|z|=r$, $\operatorname{Re} z\geqslant 0$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ i otsečak y-ose od r do 0.

64. Na šta se na *Riemann*-ovoj sferi preslikavaju sledeće oblasti z-ravni:

1° $|z|<1$; 2° $|z|>2$; 3° $1<|z|<2$; 4° $0<\arg z<\pi/2$?

65. Neka su $f(z)$ i $g(z)$ dve uniformne analitičke funkcije. Ako je a nula reda k funkcije $f(z)$ i takođe pol reda ν funkcije $g(z)$, kakva je priroda tačke $z=a$ za funkcije

$$f(z)+g(z),\quad f(z)\,g(z),\quad f(z)/g(z),\quad g(z)/f(z)?$$

66. Data je funkcija

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(t)}{g(t)}\,\frac{g(t)-g(z)}{t-z}\,dt,$$

gde je:

$$g(z)=(z-z_1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2\qquad (z_1,\ z_2,\ z_3 \text{ različiti}).$$

Sa Γ je označena zatvorena putanja koja obuhvata tačke z_1, z_2, z_3, a sa $f(t)$ analitička uniformna funkcija koja nema singulariteta na konturi Γ i u oblasti obuhvaćenoj konturom Γ.

Proveriti da li funkcija $F(z)$ u unutrašnjosti putanje Γ pretstavlja polinom stepena $\leqslant 5$ i da li važe jednakosti

$$F(z_k)=f(z_k),\qquad F'(z_k)=f'(z_k)\qquad (k=1,2,3).$$

67. Izračunati krivoliniski integral

$$I = \oint\limits_{|z|=r} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}\,dz \qquad (n<r^3<n+1;\ n \text{ prirodan broj}).$$

Rešenje. Jedini singulariteti funkcije

$$f(z) = \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}$$

na konačnoj daljini su polovi, određeni jednačinom

$$z^3 = k \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Od ovih polova u krugu $|z|=r$ nalaze se:

$$z=0,\ \pm\sqrt[3]{k},\quad \pm\alpha\sqrt[3]{k},\quad \pm\alpha^2\sqrt[3]{k} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

gde je $\alpha = \frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$. Ukupno ima $6n+1$ polova i svi su oni prosti.

Ako označimo sa $z=a\ (\neq 0)$ ma koji od ovih polova, biće

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}\left\{(z-a)\frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}\right\} = \lim_{z\to a}\frac{z^2}{6\pi i z^2 e^{2\pi i z^3}} = \frac{1}{6\pi i\, e^{2\pi i a^3}} = \frac{1}{6\pi i},$$

jer je $e^{2\pi i a^3} = e^{2\pi i k} = 1$.

Ostatak za pol $z=0$ je

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^3}{e^{2\pi i z^3}-1} = \frac{1}{2\pi i}.$$

Prema tome

$$\oint\limits_{|z|=r} f(z)\,dz = 2n+1 \qquad \left(\sqrt[3]{n}<r<\sqrt[3]{n+1}\right).$$

Primedba. Izračunati

$$\text{v. p.} \oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$$

ako je Γ zatvorena kontura $\{|z|=r,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\}\cup\{-r\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant +r,\ \operatorname{Im} z=0\}$, gde je

$$\sqrt[3]{n}<r<\sqrt[3]{n+1} \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

68. Izračunati krivoliniski integral

$$\oint \frac{z^m}{e^{2\pi i z^n}-1}\,dz \qquad (m,\ n \text{ celi brojevi})$$

duž kruga $|z|=r$ $(N<r^n<N+1;\ N$ prirodan broj$)$.

69. Izračunati krivoliniski integral

$$\int\limits_{C^+} \frac{z}{e^{2\pi i z^3}-1}\,dz,$$

gde je C polukrug $|z|=r$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ $(n<r^3<n+1;\ n$ prirodan broj$)$.

70. Ispitati da li važe nejednakosti:

$$(1)\qquad \frac{\pi}{[1+(n+1)^a\pi^a]^{1/2}}<\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x}<\frac{\pi}{[1+n^a\pi^a]^{1/2}}$$

$$(n \text{ prirodan broj; } a>0).$$

Rešenje. Budući da je

$$(2)\qquad 1+(n+1)^a\pi^a\sin^2 x>1+x^a\sin^2 x>1+n^a\pi^a\sin^2 x \qquad \{n\pi<x<(n+1)\pi\},$$

važe nejednakosti

$$(3)\qquad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+(n+1)^a\pi^a\sin^2 x}<\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x}<\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+n^a\pi^a\sin^2 x}.$$

Ako uvedemo oznaku

$$J(k)=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+k^a\pi^a\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+k^a\pi^a\sin^2 x},$$

nejednakosti (3) postaju:

$$(4)\qquad J(n+1)<\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x}<J(n).$$

Smenom $\operatorname{tg} x=z$ nalazi se

$$(5)\qquad J(k)=2\int_0^{\infty}\frac{dz}{1+(1+k^a\pi^a)z^2}=\frac{\pi}{(1+k^a\pi^a)^{1/2}},$$

pa na osnovu (4) dobijamo nejednakosti (1).

Redigovano prema rešenju *R. Lučića.*

Primedba I. Polazeći od jednakosti

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x}=\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x}+\int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x}$$

i ocenjujući kao u (2) svaki sabirak na desnoj strani, dolazimo do nešto užih nejednakosti

$$(6)\qquad \frac{1}{2}J\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}J(n+1)<\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x}<\frac{1}{2}J(n)+\frac{1}{2}J\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Iz (5) i (6) izlazi

$$\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{\left[1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^a\pi^a\right]^{1/2}}+\frac{1}{[1+(n+1)^a\pi^a]^{1/2}}\right\}<\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x}$$

$$<\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1+n^a\pi^a)^{1/2}}+\frac{1}{\left[1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^a\pi^a\right]^{1/2}}\right\}.$$

Primedba II. Navedene nejednakosti (1) mogu se korisno upotrebiti za ispitivanje egzistencije integrala

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x}.$$

71. Dokazati simboličnu formulu

$$(*)\quad x^n D^{2n} = \{xD^2 + (1-n)D\}^n \qquad (n \text{ prirodan broj; } D = d/dx).$$

Dokaz. Indukcijom ćemo dokazati formulu

$$(1)\qquad (xD^2 + aD)^k = \sum_{\nu=0}^{k} C_\nu^k P_\nu^{a+k-1} x^{k-\nu} D^{2k-\nu} \qquad (a = \text{const}),$$

gde je

$$C_\nu^k = \binom{k}{\nu}; \quad P_\nu^k = k(k-1)(k-2)\cdots(k-\nu+1), \quad P_0^k = 1.$$

Ako se u (1) stavi $k=n$ i $a=1-n$, dobija se (*).

Kada je $k=1$, izraz

$$\sum_{\nu=0}^{k} C_\nu^k P_\nu^{a+k-1} x^{k-\nu} D^{2k-\nu}$$

postaje

$$C_0^1 P_0^a x D^2 + C_1^1 P_1^a D = x D^2 + aD.$$

Dakle, formula (1) je tačna za $k=1$.

Pretpostavimo li sada da je formula (1) tačna za $k=m-1$ $(m>1)$, biće

$$(2)\qquad (xD^2+aD)^m = (xD^2+aD)(xD^2+aD)^{m-1}$$

$$= (xD^2+aD) \sum_{\nu=0}^{m-1} C_\nu^{m-1} P_\nu^{a+m-2} x^{m-1-\nu} D^{2m-2-\nu}.$$

Kako je za $\lambda = \text{const}$, $p = \text{const}$ i q prirodan broj ili nula,

$$D(\lambda x^p D^q) = \lambda x^p D^{q+1} + \lambda p x^{p-1} D^q,$$

$$D^2(\lambda x^p D^q) = \lambda x^p D^{q+2} + 2\lambda p x^{p-1} D^{q+1} + \lambda p(p-1) x^{p-2} D^q,$$

formula (2) postaje

$$(xD^2+aD)^m = \sum_{\nu=0}^{m-1} \Big[C_\nu^{m-1} P_\nu^{a+m-2} \{x^{m-\nu} D^{2m-\nu} + 2(m-1-\nu) x^{m-1-\nu} D^{2m-1-\nu}$$

$$+ (m-1-\nu)(m-2-\nu) x^{m-2-\nu} D^{2m-2-\nu} + a x^{m-1-\nu} D^{2m-1-\nu}$$

$$+ a(m-1-\nu) x^{m-2-\nu} D^{2m-2-\nu}\}\Big]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} \Big[C_\nu^{m-1} P_\nu^{a+m-2} \{x^{m-\nu} D^{2m-\nu} + (a+2m-2-2\nu) x^{m-1-\nu} D^{2m-1-\nu}$$

$$+ (a+m-2-\nu)(m-1-\nu) x^{m-2-\nu} D^{2m-2-\nu}\}\Big]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} C_\nu^{m-1} P_\nu^{a+m-2} x^{m-\nu} D^{2m-\nu} + \sum_{\nu=1}^{m} C_{\nu-1}^{m-1} P_{\nu-1}^{a+m-2} (a+2m-2\nu) x^{m-\nu} D^{2m-\nu}$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{m} C_{\nu-2}^{m-1} P_{\nu-2}^{a+m-2} (a+m-\nu)(m+1-\nu) x^{m-\nu} D^{2m-\nu}$$

$$= \sum_{\nu=2}^{m-1} \Big[\{C_\nu^{m-1} P_\nu^{a+m-2} + (a+2m-2\nu)\, C_{\nu-1}^{m-1} P_{\nu-1}^{a+m-2}$$

$$+ (a+m-\nu)(m+1-\nu)\, C_{\nu-2}^{m-1} P_{\nu-2}^{a+m-2}\} x^{m-\nu} D^{2m-\nu}\Big]$$

$$+ x^m D^{2m} + m(a+m-1) x^{m-1} D^{2m-1} + P_m^{a+m-1} D^m$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} C_\nu^m P_\nu^{a+m-1} x^{m-\nu} D^{2m-\nu}.$$

Primetimo da je

$$x^m D^{2m} + m(a+m-1)x^{m-1}D^{2m-1} + P_m^{a+m-1}D^m$$

$$= C_0^{m-1}P_0^{a+m-2}x^m D^{2m} + C_1^{m-1}P_1^{a+m-2}x^{m-1}D^{2m-1}$$

$$+ C_0^{m-1}P_0^{a+m-2}(a+2m-2)x^{m-1}D^{2m-1} + C_{m-1}^{m-1}P_{m-1}^{a+m-2}a D^m + C_{m-2}^{m-1}P_{m-2}^{a+m-2}a D^m,$$

jer je

$$C_1^{m-1}P_1^{a+m-2} + C_0^{m-1}P_0^{a+m-2}(a+2m-2)$$

$$= (m-1)(a+m-2)+(a+2m-2)$$

$$= m(a+m-1)$$

kao i

$$C_{m-1}^{m-1}P_{m-1}^{a+m-2}a + C_{m-2}^{m-1}P_{m-2}^{a+m-2}a$$

$$= (a+m-2)(a+m-3)\cdots(a+1)a^2 + (m-1)(a+m-2)(a+m-3)\cdots(a+2)(a+1)a$$

$$= (a+m-1)(a+m-2)\cdots(a+1)a$$

$$= P_m^{a+m-1}.$$

Ovim je induktivni dokaz završen.

Primedba I. Formula (*) ima korisnu primenu pri integraciji jedne klase linearnih diferencijalnih jednačina.

Primedba II. Ovaj zadatak rešio je za *Zbornik D. C. B. Marsh*, matematičar iz Sjedinjenih Američkih Država (Colorado School of Mines, Goldon, Colorado).

72. Izračunati integral

$$J_{nm} = \int_0^\infty e^{-x}x^{k+p-1}L_n^k(x)L_m^k(x)\,dx \qquad (n, m, k, p \text{ prirodni brojevi}),$$

gde je $L_n^k(x) = \dfrac{d^k}{dx^k}L_n(x)$ $(n \geqslant k)$ pridruženi *Laguerre*-ov polinom stepena $n-k$.

Rešenje. Iz razvoja

$$\frac{1}{1-z}e^{-\frac{xz}{1-z}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{L_n(x)}{n!}z^n \qquad (|z|<1), \tag{1}$$

koji definiše *Laguerre*-ove polinome, diferenciranjem k puta po x, izlazi

$$\frac{(-1)^k}{1-z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^k e^{-\frac{xz}{1-z}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{d^k}{dx^k}L_n(x)\frac{z^n}{n!} = \sum_{r=k}^\infty L_r^k(x)\frac{z^r}{r!}. \tag{2}$$

Smenjujući ovde z jedno za drugim sa z_1 i z_2 i množeći dobijene jednakosti, nalazimo

$$\sum_{r=k}^\infty\sum_{s=k}^\infty \frac{z_1^r z_2^s}{r!\,s!}L_r^k(x)L_s^k(x) = (z_1z_2)^k(1-z_1)^{-k-1}(1-z_2)^{-k-1}\exp\left(-\frac{xz_1}{1-z_1}-\frac{xz_2}{1-z_2}\right). \tag{3}$$

Pomnožimo obe strane ove jednakosti sa $e^{-x}x^{k+p-1}$ i integralimo dobijenu jednakost po x u intervalu $(0, \infty)$.

Na taj način dobijamo

$$\sum_{r=k}^\infty\sum_{s=k}^\infty \frac{z_1^r z_2^s}{r!\,s!}J_{rs} = (z_1z_2)^k\{(1-z_1)(1-z_2)\}^{-k-1}\int_0^\infty x^{k+p-1}e^{-tx}\,dx, \tag{4}$$

gde je

$$t = (1-z_1)^{-1}+(1-z_2)^{-1}-1 = (1-z_1z_2)(1-z_1)^{-1}(1-z_2)^{-1}.$$

Na osnovu jednakosti

$$\int_0^\infty e^{-tx} x^q \, dx = t^{-q-1} q! \qquad (q \text{ prirodan broj; } t>0)$$

relacija (4) postaje

$$(5) \qquad \sum_{r=k}^{\infty} \sum_{s=k}^{\infty} \frac{z_1^r z_2^s}{r!\, s!} J_{rs} = (z_1 z_2)^k (1-z_1)^{p-1} (1-z_2)^{p-1} (1-z_1 z_2)^{-k-p} (k+p-1)!$$

Kad funkciju $(1-z_1 z_2)^{-k-p}$ razvijemo u binomni red, relacija (5) postaje

$$(6) \qquad \sum_{r=k}^{\infty} \sum_{s=k}^{\infty} \frac{z_1^r z_2^s}{r!\, s!} J_{rs} = (1-z_1)^{p-1} (1-z_2)^{p-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+p+r-1)!}{r!} z_1^{k+r} z_2^{k+r}.$$

Za $p=1$ dobijamo $J_{nm}=0$ $(m \neq n)$ i $J_{nn} = \dfrac{(n!)^3}{(n-k)!}$.

Neka je sada $p>1$. Razvijajući $(1-z_1)^{p-1}$ i $(1-z_2)^{p-1}$ pomoću binomnog obrasca, relaciji (6), posle množenja izraza na njenoj desnoj strani, možemo dati oblik

$$(7) \qquad \sum_{r=k}^{\infty} \sum_{s=k}^{\infty} \frac{z_1^r z_2^s}{r!\, s!} J_{rs} = \sum_{r=k}^{\infty} \sum_{s=k}^{\infty} A_{rs} z_1^r z_2^s,$$

gde je

$$A_{rs} = \sum_{\nu=0}^{\min(s-k,\, r-k)} (-1)^{r+s} \binom{p-1}{r-k-\nu} \binom{p-1}{s-k-\nu} \frac{(k+p+\nu-1)!}{\nu!}.$$

Iz relacije (7) sleduje

$$(8) \qquad J_{nm} = (-1)^{n+m} n!\, m! \sum_{\nu=0}^{\min(m-k,\, n-k)} \binom{p-1}{m-k-\nu} \binom{p-1}{n-k-\nu} \frac{(k+p+\nu-1)!}{\nu!},$$

što pretstavlja traženi rezultat za $p>1$.

Primedba I. Integrali tipa J_{nn} javljaju se pri proučavanju kretanja elektrona u vodonikovom atomu. Videti o ovome: H. Margenau — G. M. Murphy: *The Mathematics of Physics and Chemistry*, New York, 1949, p. 125—127.

Primedba II. U navedenoj knjizi izračunati su integrali J_{nn} samo za $p=1, 2, 3$. Formulu (8) izveo je *S. Prešić*. Ako se u (8) stavi $p=2$ i $p=3$, dobija se redom

$$J_{nn} = \frac{(n!)^3}{(n-k)!} (2n-k+1) \qquad (p=2),$$

$$J_{nn} = \frac{(n!)^3}{(n-k)!} (6n^2-6nk+k^2+6n-3k+2) \qquad (p=3).$$

Ove formule su u saglasnosti sa onima koje su navedene u knjizi citiranoj u primedbi I.

73. Rešiti funkcionalnu jednačinu

$$(1) \qquad F(x) + G(y) = H(x) K(y).$$

Rešenje. Stavimo $x=c$ $(=\text{const})$ i uvedimo oznake:

$$F(c) = A \; (=\text{const}), \qquad H(c) = B \; (=\text{const}).$$

Iz (1) tada izlazi

$$(2) \qquad G(y) = B\,K(y) - A.$$

Ako (2) smenimo u (1), dobijamo

$$(3) \qquad F(x) - A = \{H(x) - B\}\, K(y).$$

Razlikovaćemo dva slučaja.

Prvi slučaj. Ako je $H(x)=B$, tada je $F(x)=A$, tako da, zbog (2), rešenje jednačine (1) glasi:

$$F(x)=A, \quad G(y)=B\,K(y)-A, \quad H(x)=B \quad \{K(y) \text{ proizvoljna funkcija}\}, \tag{4}$$

što se utvrđuje direktnim proveravanjem.

Drugi slučaj. Neka je x_0 takva vrednost za koju je $H(x_0)\neq B$. Tada iz (3) izlazi

$$K(y)=\frac{F(x_0)-A}{H(x_0)-B}=D\ (=\text{const}).$$

U ovom slučaju relacije (2) i (3) postaju redom

$$G(y)=BD-A=C,$$

$$F(x)=D\{H(x)-B\}+A=D\,H(x)-C.$$

Prema tome, rešenje jednačine (1) je

$$F(x)=B_1\,H(x)-A_1, \quad G(y)=A_1, \quad K(y)=B_1 \quad \{H(x) \text{ proizvoljna funkcija}\}, \tag{5}$$

što se utvrđuje direktnim proveravanjem.

Skupovi funkcija (4) i (5) su sva rešenja jednačine (1).

Primedba I. Primenom navedenog rezultata odrediti sva rešenja funkcionalnih jednačina:

$$\{f(x)+a\,g(x)\}\,\{f(y)+b\,g(y)\}=f(x)+g(y),$$

$$f^{(m)}(x)\,f^{(n)}(y)=a\,f^{(p)}(x)+b\,f^{(q)}(y)+c,$$

$$f_1(x)\,g_1(y)+f_2(x)\,g_2(y)+f_3(x)\,g_3(y)=0,$$

gde su a, b, c ma kakve konstante; m, n, p, q nenegativni celi brojevi; $f^{(k)}(t)=\mathrm{d}^k f(t)/\mathrm{d}t^k$.

Primedba II. U vezi sa ovim videti:

D. S. Mitrinović: *Sur un procédé fournissant des équations fonctionnelles dont les solutions continues et différentiables peuvent être déterminées* (Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika, № 5, 1956, str. 1—8);

J. Aczél: *Miszellen über Funktionalgleichungen I* (Mathematische Nachrichten, Bd. 19, 1958, S. 87—99);

D. S. Mitrinović: *Die Aufgabe 369* (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 60);

J. Aczél: *Lösung der Aufgabe 369* (isti časopis, Bd. 62, 1960, S. *13—15*).

74. Rastaviti funkcije

$$\frac{1}{x^k(1-x)}, \quad \frac{1}{x^k(1-x)^2}, \quad \frac{1}{x^k(1-x)^3} \quad (k \text{ prirodan broj})$$

na parcijalne razlomke.

Rešenje. 1° Budući da je

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{r=0}^{\infty} x^r \quad (-1<x<+1),$$

dobija se

$$\frac{1}{x^k(1-x)}=\left(\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{x}\right)+(1+x+x^2+\cdots) \quad (-1<x<+1).$$

Prema tome, traženo razlaganje ima oblik

$$\frac{1}{x^k(1-x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^k} \quad (x\neq 0 \text{ i } 1).$$

2° Kako je

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+kx^{k-1}+(k+1)x^k+\cdots \qquad (-1<x<+1),$$

biće

$$\frac{1}{x^k(1-x)^2}=\left(\frac{1}{x^k}+\frac{2}{x^{k-1}}+\cdots+\frac{k}{x}\right)+\{(k+1)+(k+2)x+(k+3)x^2+\cdots\}.$$

Za $-1<x<+1$ biće

$$\begin{aligned}(k+1)+(k+2)x+(k+3)x^2+\cdots&\\ &=k(1+x+x^2+\cdots)+(1+2x+3x^2+\cdots)\\ &=\frac{k}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

Stoga je traženo razlaganje

$$\frac{1}{x^k(1-x)^2}=\frac{k}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{k}{x}+\frac{k-1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^k} \qquad (x\neq 0 \text{ i } 1).$$

3° Ako pođemo od razvoja

$$\frac{2}{(1-x)^3}=1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\cdots+k(k+1)x^{k-1}+\cdots \qquad (-1<x<+1),$$

za $-1<x<0$ i $0<x<+1$ dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{2}{x^k(1-x)^3}&=\left\{\frac{1\cdot 2}{x^k}+\frac{2\cdot 3}{x^{k-1}}+\cdots+\frac{k(k+1)}{x}\right\}\\ &\quad+\{(k+1)(k+2)+(k+2)(k+3)x+(k+3)(k+4)x^2+\cdots\}.\end{aligned}$$

Za $-1<x<+1$ je

$$\begin{aligned}(k+1)(k+2)+(k+2)(k+3)x+(k+3)(k+4)x^2+\cdots&\\ &=k^2(1+x+x^2+\cdots)+k(3+5x+7x^2+\cdots)+(1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\cdots)\\ &=\frac{k^2}{1-x}+\frac{2k}{(1-x)^2}+\frac{k}{1-x}+\frac{2}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

Prema tome, dobili smo razvoj

$$\frac{1}{x^k(1-x)^3}=\frac{\binom{k+1}{2}}{x}+\frac{\binom{k}{2}}{x^2}+\cdots+\frac{\binom{2}{2}}{x^k}+\frac{\binom{k+1}{2}}{1-x}+\frac{k}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1-x)^3}$$

koji važi za $x\neq 0$ i $x\neq 1$.

Tako, na primer, za $k=2$ biće

$$\frac{1}{x^2(1-x)^3}=\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{1-x}+\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1-x)^3}.$$

Navedenim postupkom takođe se dobijaju razvoji za funkcije:

$$\frac{1}{x^k(1-x)^n} \qquad (n=4,\ 5,\ 6,\ \ldots).$$

Funkcija $\dfrac{1}{(x-a)^k(x-b)^n}$ (n, k prirodni brojevi; a, b konstante) svodi se na posmatrani slučaj $\dfrac{1}{t^k(1-t)^n}$ ako se stavi $x=a-(a-b)t$ (t nova promenljiva).

U literaturi nismo naišli na navedeni način razlaganja racionalnih funkcija na parcijalne razlomke.

75. Neka je $f(z)$ funkcija promenljive z, gde je z funkcija promenljive x. Pokazati da važi *Hoppe*-ova formula

$$\frac{\mathrm{d}^n f(z)}{\mathrm{d}x^n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k f^{(k)}(z)}{k!}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}z^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^n(z^\nu)}{\mathrm{d}x^n}, \tag{1}$$

gde je $f^{(k)}(z)=\mathrm{d}^k f(z)/\mathrm{d}z^k$.

Pokazati takođe da se formula (1) može napisati u obliku

$$\frac{\mathrm{d}^n f(z)}{\mathrm{d}x^n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k f^{(k)}(z)}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^n\left(\frac{z}{a}-1\right)^k}{\mathrm{d}x^n},$$

gde a treba smatrati kao konstantu prilikom diferenciranja po x, a posle diferenciranja staviti $a=z$.

76. Ako je $n\in\{0, 1, 2, \ldots\}$, broj rešenja $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k\in\{0, 1, 2, \ldots\}$ nejednačine

$$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_k\leqslant n$$

iznosi $\binom{n+k}{k}$, a jednačine

$$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_k=n$$

iznosi $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Dokazati navedene rezultate.

77. 1° Za preslikavanje

$$w=z^3-3z^2+3z+5 \tag{1}$$

odrediti ugao obrtanja i razmer preslikavanja u tačkama $z=0$ i $z=i$.

2° Duž kojih je krivih ugao obrtanja konstantan za preslikavanje (1)?

3° Duž kojih je krivih razmer preslikavanja konstantan?

4° U kojim se tačkama narušava konformnost preslikavanja (1)?

Odgovori. 2° $y=a(x-1)$ (a realna konstanta).

3° $(x-1)^2+y^2=k^2$ (k realna konstanta).

4° $z=1$.

Generalizacija. Rešiti ovaj zadatak za preslikavanja:

1° $w=az^3+bz^2+cz+d$; 2° $w=az^4+bz^2+c$ (a, b, c, d kompleksni brojevi).

78. I. Pretpostavimo: 1° da je uniformna funkcija $f(x)$ integrabilna u *Riemann*-ovom smislu na segmentu $[-r, +r]$, gde je $r>0$; 2° da je kompleksna funkcija $f(z)$ analitička i 3° da funkcija $f(z)$ nema singulariteta na krugu $|z|=r$.

Tada važi formula

$$\int_{C+} f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\sum \operatorname{Res} f(z)-\int_{-r}^{+r} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

gde je C luk kruga $|z|=r$ koji leži u poluravni $\operatorname{Im} z>0$. Sumiranje se proteže na sve polove i esencijalne singularitete koji leže u oblasti G definisanoj sa $\{|z|<r\}\cap\{\operatorname{Im} z>0\}$.

II. Ako je funkcija $f(z)$ neparna, ispitati da li važi formula

$$\int_{C^+} f(z)\,dz = \pi i \sum \operatorname{Res} f(z), \tag{2}$$

gde se sumiranje odnosi na sve singularitete koji leže u krugu $|z|=r$.

Generalizacija. Posmatrati slučaj kada analitička funkcija $f(z)$ ima samo polove prvog reda na otsečku x-ose od $-r$ do $+r$ i kada $|zf(z)|$ uniformno teži nuli za svako $\arg z \in [0, \pi]$ ako $|z| \to \infty$. Ostale pretpostavke iz tačke I ostaju na snazi. Tada će se pojaviti glavna vrednost nesvojstvenog integrala $\int_{-r}^{+r} f(x)\,dx$. Ako integral $\int_{-r}^{+r} f(x)\,dx$ kao nesvojstven postoji, tada pri sumiranju u formuli (1) treba uzeti i polovinu ostataka za sve polove koji leže na x-osi od $-r$ do $+r$.

Ako na polukrugu C ima samo polova prvog reda, tada se može desiti da postoji

$$\text{v. p.} \int_{C^+} f(z)\,dz.$$

Mogu se uzeti u obzir i druge generalizacije. Tako, na primer, umesto polukruga C može se posmatrati luk jedne deo po deo glatke krive.

79. Dokazati ili opovrgnuti jednakost

$$\begin{vmatrix} P_1(x) & P_2(x) & \cdots & P_n(x) \\ P_2(x) & P_3(x) & & P_{n+1}(x) \\ \vdots & & & \\ P_n(x) & P_{n+1}(x) & & P_{2n-1}(x) \end{vmatrix} = 2^{-(n^2-n+1)}(x^2-1)^{\binom{n}{2}}\{(x+1)^n+(x-1)^n\},$$

gde je $P_k(x)$ *Legendre*-ov polinom.

Primedba. J. L. Burchnal u svome članku: *An algebraic property of the classical polynomials* (Proceedings of the London Mathematical Society, third series, vol. 1, 1951, p. 237) naveo je bez dokaza pomenutu jednakost.

Ispitati da li postoje analogne relacije za *Laguerre*-ove i *Hermite*-ove polinome.

80. Proveriti da li je

$$\int_0^{2\pi} \log\left(\frac{5}{4} + \sin x\right) dx = 0.$$

81. Ako je

$$a_n = |\sin(an\pi)|^{1/n} \quad (a \text{ proizvoljan iracionalan broj}), \tag{1}$$

pokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1. \tag{2}$$

Ako je $a\,(\neq 0)$ racionalan broj, pokazati da takođe važi (2) pod uslovom da su iz niza (1) izbačeni svi elementi jednaki nuli.

Primedba. Ovaj problem postavio je *D. Đoković.*

82. Dokazati relaciju

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{k}\sum_{\nu=0}^{pk-1} e^{z\cos\frac{2\nu\pi}{pk}}\cos\left(z\sin\frac{2\nu\pi}{pk}-\frac{2\nu\pi}{p}\right)\right\}=0$$

(p i k prirodni brojevi; z realan broj).

Primedba. Ovaj problem postavio je *D. Đoković.*

83. Na šta se na ravni $Z\,(=X+iY)$, pomoću funkcije $Z=e^z$ $(z=x+iy)$, preslikava kvadrat, određen relacijama

(1) $$|x+y|\leqslant 1, \qquad |x-y|\leqslant 1?$$

Koliki je obim i kolika veličina površine na koju se preslikava dati kvadrat?

Rezultat. Prave

$$x+y=1 \quad \text{i} \quad y-x=1$$

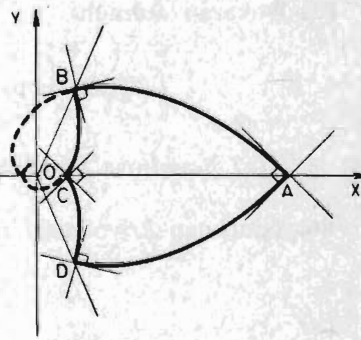
preslikavaju se u Z-ravni na krive čije jednačine, u polarnim koordinatama, imaju oblike:

(2) $$\rho=e^{1-\theta}, \qquad \rho=e^{\theta-1}.$$

Slika periferije kradrata sastoji se od lukova $(0\leqslant\theta\leqslant 1)$ spirala (2) i njima simetričnih lukova u odnosu na X-osu.

Kvadrat (1) preslikava se na krivoliniski četvorougao $ABCD$ sa pravim uglovima čija su temena u tačkama A, B, C, D.

Dužina luka AB iznosi $(e-1)\sqrt{2}$, a luka BC iznosi $(1-e^{-1})\sqrt{2}$. Obim je $2\,(e-e^{-1})\sqrt{2}$.



Veličina površine krivoliniskog četvorougla je $\dfrac{1}{2}(e-e^{-1})^2$.

Proveriti ove rezultate kao i priloženi grafik.

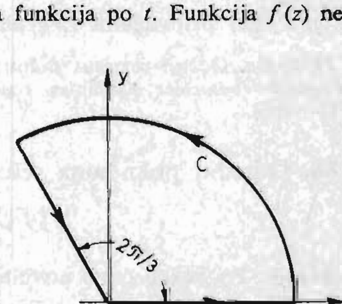
84. Neka je $f(z)$ racionalna funkcija promenljive z^3 $(z=x+iy)$ i neka se ona anulira u tački $z=\infty$. Pretpostavlja se takođe da $f(z)$ nema polova u $z=0$ i na pozitivnom delu x-ose. Primenom računa ostataka izračunati integral $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$.

Rešenje. Stavimo $f(z)=g(z^3)$, gde je $g(t)$ racionalna funkcija po t. Funkcija $f(z)$ nema polova ni na polupravoj $\arg z=2\pi/3$, jer je

$$f(xe^{2\pi i/3})=g\{(xe^{2\pi i/3})^3\}=g(x^3)=f(x).$$

Posmatrajmo integral

$$J=\oint_C f(z)\,dz,$$



gde je C kontura pretstavljena na slici. R je dovoljno veliko, tako da se u konturi C nalaze svi polovi funkcije $f(z)$, čiji je argument veći od nule, a manji od $2\pi/3$. Pošto je $f(\infty)=0$, stepen imenitelja funkcije $f(z)$ bar je za 3 veći od stepena brojitelja. Stoga iz relacije

$$J=\int_0^R f(x)\,dx+\int_0^{2\pi/3} f(Re^{i\theta})\,i\,Re^{i\theta}d\theta+\int_R^0 f(x)\,e^{2\pi i/3}dx$$

kad $R\to\infty$ izlazi

(1) $$J=(1-e^{2\pi i/3})\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Na osnovu *Cauchy*-eve teoreme je

$$J=2\pi i\sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_k}\{f(z)\}, \tag{2}$$

gde su zbirom obuhvaćeni svi polovi funkcije $f(z)$ koji ispunjavaju uslov

$$0<\arg z_k<\frac{2\pi}{3}.$$

Iz (1) i (2) dobijamo

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=\pi\left(i-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_k}\{f(z)\}.$$

Ovo je rešenje *D. Đokovića.*

85. Dokazati formulu

$$\int_0^\infty J_0(ax)\sin bx\,dx=\begin{cases}0 & (0<b<a),\\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} & (0<a<b),\end{cases}$$

gde je $J_0(x)$ *Bessel*-ova funkcija prve vrste.

86. Izračunati krivoliniski integral

$$\oint_C \frac{1}{(z^3+1)^2}\,dz,$$

gde je C konusni presek $x^2+6xy+10y^2-4x+8y-3=0$.

87. Dokazati formulu

$$\int_{-1}^{+1} x P_n^r(x)\,P_{n-1}^r(x)\,dx=\frac{2}{4n^2-1}\,\frac{(n+r)!}{(n-r-1)!}$$

$$(-1<x<+1;\quad r<n-1;\quad n \text{ prirodan broj}),$$

gde je $P_n^r(x)$ pridružena *Legendre*-ova funkcija prve vrste.

Primedba. Opštiji rezultat dobio je *B. S. Popov.* Videti njegov članak: *Sur les fonctions de Legendre associées* (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 248, 1959, p. 912—914).

88. Odrediti polinomna rešenja funkcionalne jednačine

$$f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z)). \tag{1}$$

Rešenje. Prethodno ćemo utvrditi stepene polinoma $f(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{ij}x^iy^j$ po x i po y.

Zamislimo da je polinom $f(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{ij}x^iy^j$ rešenje jednačine (1). Leva i desna strana jednakosti (1) su tada polinomi po x, y, z. Stepen polinoma leve strane po x je n^2, a stepen desne strane po x je n. Znači $n^2=n$. Slično, stepen leve strane po z je m, dok je stepen desne strane m^2. Znači $m^2=m$. Iz jednakosti $n^2=n$ i $m^2=m$ zaključujemo da $f(x,y)$ može biti najviše prvog stepena po x i prvog stepena po y. Zbog ovog polinom $f(x,y)$ posmatraćemo dalje u obliku

$$f(x,y)=a+bx+cy+dxy. \tag{2}$$

Uvršćenjem (2) u (1) i izjednačenjem odgovarajućih koeficijenata leve i desne strane dolazimo do sistema jednačina:

(3) $$a(b-c)=0, \quad b^2=b+ad, \quad c^2=c+ad, \quad d(b-c)=0.$$

Rešavanjem ovog sistema naći ćemo sva polinomna rešenja jednačine (1).

Potražimo prethodno ona rešenja za koja je $b=c$. Za ovakva rešenja sistem (3) svodi se na $b^2=b+ad$. U ovom slučaju dobijamo da je rešenje polinom $f(x, y)=a+b(x+y)+dxy$, gde su a, b, d proizvoljne konstante koje ispunjavaju uslov $b^2=b+ad$.

Neka je sada $b \neq c$. Tada se sistem (3) svodi na

$$a=0, \quad d=0, \quad b^2=b, \quad c^2=c.$$

Odavde dobijamo sledeća dva rešenja:

$$a=0, \quad b=1, \quad c=0, \quad d=0;$$

$$a=0, \quad b=0, \quad c=1, \quad d=0,$$

koja daju polinome $f(x, y)=x$ i $f(x, y)=y$.

Dakle, polinomna rešenja jednačine (1) su

$$f(x, y)=x, \quad f(x, y)=y, \quad f(x, y)=a+b(x+y)+dxy,$$

gde su a, b, d proizvoljni brojevi koji zadovoljavaju uslov $b^2=b+ad$.

Kao što smo i mogli očekivati, u rešenja ulaze i polinomi $f(x, y)=x+y$ i $f(x, y)=xy$ koji odgovaraju operaciji sabiranja odnosno množenja.

Primedba. Problem postavio i rešio *S. Prešić.*

89. Odrediti polinomna rešenja funkcionalne jednačine

(1) $$f(x^2)+f(x)f(x+1)=0.$$

Rešenje. Rešenja $f(x)=\text{const}$ su $f(x)=0$ i $f(x)=-1$. U daljem rasmatranju uzimamo $f(x) \neq \text{const}$.

Ako je x_0 bilo koja nula polinoma $f(x)$, tada su x_0^2 i $(x_0-1)^2$ takođe njegove nule. Ne može biti $|x_0|<1$ $(x_0 \neq 0)$ ili $|x_0|>1$, jer bi onda polinom $f(x)$ imao po volji mnogo nula $x_0, x_0^2, x_0^4, \ldots, x_0^{2^n}, \ldots$ Dakle, nule polinoma $f(x)$ moraju pripadati skupu $S=\{0, e^{\alpha i}\}$ (α realan broj).

Pokažimo da nula polinoma $f(x)$, koja je oblika $e^{\alpha i}$, mora biti 1. Neka, obrnuto, polinom $f(x)$ ima za nulu

(2) $$x_0=e^{\alpha i} \quad (\alpha \neq 2k\pi;\ k \text{ ceo broj}).$$

Tada je $|x_0-1| \neq 0$, pa kako je i $(x_0-1)^2$ takođe nula polinoma $f(x)$, biće $|x_0-1|=1$. Jednakosti $|x_0|=1$, $|x_0-1|=1$ daju $x_0\overline{x_0}=1$, $x_0\overline{x_0}-x_0-\overline{x_0}+1=1$, odakle izlazi $\operatorname{Re} x_0=\frac{1}{2}$.

Znači, nule oblika (2) moraju imati $\operatorname{Re} x_0=\frac{1}{2}$. Stoga, one moraju pripadati skupu

$$\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Jedan od brojeva $\left(\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, koji su takođe oblika (2), mora biti nula polinoma $f(x)$. Međutim, ovo je nemogućno, jer je

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}.$$

Dakle, zaista ne postoji ni jedna nula polinoma $f(x)$ oblika (2).

Prema tome, ako (1) ima polinomno rešenje $f(x)$, onda jedine nule tog polinoma mogu biti 0 i 1. Stoga $f(x)$ mora biti oblika

$$f(x)=A\,x^l(x-1)^m \qquad (l,\,m\geqslant 0;\ A\neq 0). \tag{3}$$

Smenom (3) u (1) dobijamo

$$A\,x^{2l}(x-1)^m(x+1)^m+A^2x^{l+m}(x-1)^m(x+1)^l=0,$$

odakle je

$$A\,x^{l-m}=-A^2(x+1)^{l-m}.$$

Odavde izlazi $A=-1$, $m=l$.

Polinomna rešenja jednačine (1) su polinomi

$$f(x)=-x^m(x-1)^m \qquad (m \text{ proizvoljan prirodan broj}).$$

Primedba. Ovaj problem dat je u časopisu *The American Mathematical Monthly*, vol. 1960, p. 593, ali njegovo rešenje još nije objavljeno. Navedeno rešenje dao je *S. Prešić*.

Generalizacija. Odrediti polinomna rešenja funkcionalne jednačine

$$f(x^n)+a\prod_{k=1}^{n}f(x-\alpha_k)=0,$$

gde su a i α_k $(k=1,2,\dots,n)$ konstante.

90. Neka su $\widehat{A_\nu B_\nu}$ $(\nu=1,2,3)$ luci direktne orijentacije istog kruga kojima odgovaraju centralni uglovi $\pi/3$. Neka su C_1, C_2, C_3 redom sredine tetiva: B_1A_2 B_2A_3, B_3A_1. Dokazati da je trougao $C_1C_2C_3$ ravnostran i direktne orijentacije.

Napomena. U ovom *Zborniku* na strani 124 (zad. 355) dato je već jedno rešenje ovog zadatka.

Rešenje. I. Posmatrajmo u z-ravni krug $|z|=r$. Afiksi tačaka A_ν su:

$$re^{i\theta_\nu} \qquad (\nu=1,2,3).$$

Afiksi tačaka B_ν su:

$$\alpha re^{i\theta_\nu} \qquad (\nu=1,2,3),$$

gde je $\alpha=e^{\pi i/3}$.

Afiksi tačaka C_ν $(\nu=1,2,3)$ su:

$$\zeta_1=\frac{r}{2}(\alpha e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}),\quad \zeta_2=\frac{r}{2}(\alpha e^{i\theta_2}+e^{i\theta_3}),\quad \zeta_3=\frac{r}{2}(\alpha e^{i\theta_3}+e^{i\theta_1}). \tag{1}$$

Trougao $C_1C_2C_3$ je ravnostran, ako se strana C_2C_3, rotacijom za ugao $\pi/3$ u pozitivnom smislu, poklopi sa stranom C_2C_1, tj. ako je ispunjen uslov

$$\zeta_1-\zeta_2=\alpha(\zeta_3-\zeta_2). \tag{2}$$

Za vrednosti (1) relacija (2) zaista je identički zadovoljena. Dakle, trougao $C_1C_2C_3$ je ravnostran.

Generalizacija. Neka su $\widehat{A_\nu B_\nu}$ $(\nu=1,2,3,4)$ luci direktne orijentacije istog kruga, kojima odgovaraju centralni uglovi $\pi/2$. Ako su tačke C_1, C_2, C_3, C_4 redom sredine duži:

$$B_1A_2,\quad B_2A_3,\quad B_3A_4,\quad B_4A_1,$$

dokazuje se da četvorougao $C_1C_2C_3C_4$ ima jednake i normalne dijagonale.

II. Afiksi tačaka A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 mogu se redom izraziti u obliku:

$$z_1,\quad z_1e^{\pi i/3},\quad z_2,\quad z_2e^{\pi i/3},\quad z_3,\quad z_3e^{\pi i/3}.$$

Ove tačke ležaće na istom krugu ako je $|z_1|=|z_2|=|z_3|$.

Afiksi tačaka C_1, C_2, C_3 su:

$$\zeta_1=\frac{1}{2}(z_1 e^{\pi i/3}+z_2),\quad \zeta_2=\frac{1}{2}(z_2 e^{\pi i/3}+z_3),\quad \zeta_3=\frac{1}{2}(z_3 e^{\pi i/3}+z_1).$$

Ugao između vektora $\overrightarrow{C_1C_2}$ i $\overrightarrow{C_1C_3}$ je

$$\arg\frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_2-\zeta_1}=\arg\frac{z_3 e^{\pi i/3}+z_1(1-e^{\pi i/3})-z_2}{z_3+z_2(e^{\pi i/3}-1)-z_1 e^{\pi i/3}}=\arg(e^{\pi i/3})=\frac{\pi}{3};$$

jer je

$$\frac{z_3 e^{\pi i/3}+z_1(1-e^{\pi i/3})-z_2}{z_3+z_2(e^{\pi i/3}-1)-z_1 e^{\pi i/3}}=e^{\pi i/3}\,\frac{z_3+z_1(e^{-\pi i/3}-1)-z_2 e^{-\pi i/3}}{z_3+z_2(e^{\pi i/3}-1)-z_1 e^{\pi i/3}}$$

kao i

$$e^{\pi i/3}+e^{-\pi i/3}=1.$$

Slično se pokazuje da su i ostali uglovi trougla $C_1C_2C_3$ jednaki $\pi/3$.

Generalizacija. Budući da pri izvođenju nije korišćeno da su moduli brojeva z_1, z_2, z_3 jednaki, izlazi da iskaz zadatka važi i u slučaju kada luci $\widehat{A_1B_1}$, $\widehat{A_2B_2}$, $\widehat{A_3B_3}$ pripadaju različitim koncentričnim krugovima.

Primedba I. Rešenje I dao je *D. Tošić*, a rešenje II *D. Đoković*.

Primedba II. Ako luci $\widehat{A_1B_1}$, $\widehat{A_2B_2}$, $\widehat{A_3B_3}$, $\widehat{A_4B_4}$ direktne orijentacije, kojima odgovaraju centralni uglovi od $\pi/2$, leže na četiri koncentrična kruga, četvorougao $C_1C_2C_3C_4$ ima jednake i normalne dijagonale.

Primedba III. *Đoković*, pošto je pročitao gornji tekst, dao je jednu novu generalizaciju ovog problema za direktno orijentisane lukove $\widehat{A_\nu B_\nu}$ $(\nu=1, 2, \ldots, n$, (kojima odgovaraju podesno izabrani centralni uglovi θ) koji leže na krugovima $|z|=r_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots n)$. Videti o ovome sledeći problem.

91. Posmatrajmo u z-ravni n koncentričnih krugova sa centrom u koordinatnom početku. Na svakom od ovih krugova izaberimo po jedan direktno orijentisani luk $\widehat{A_\nu B_\nu}$ sa centralnim uglom θ. Neka je C_ν sredina duži $B_\nu A_{\nu+1}$ $(A_{n+1}=A_1)$.

1° Odrediti θ tako da između afiksa temena mnogougla $C_1C_2\ldots C_n$ postoji ista linearna zavisnost za ma koje tačke $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

2° Za $n=3$ i $n=4$ geometriski protumačiti dobijenu linearnu zavisnost.

Rešenje. 1° Neka su z_ν, $z_\nu e^{i\theta}$, ζ_ν redom afiksi tačaka A_ν, B_ν, C_ν. Prema uslovima zadatka je:

$$\zeta_\nu=\frac{1}{2}(z_\nu e^{i\theta}+z_{\nu+1})\qquad(\nu=1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Da bi važio uslov 1°, mora biti

$$\begin{vmatrix} e^{i\theta} & 1 & & & & 0 \\ & e^{i\theta} & 1 & & & \\ & & e^{i\theta} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & e^{i\theta} & 1 \\ 1 & & & & & e^{i\theta} \end{vmatrix}=0.$$

Razvijajući ovu determinantu po prvoj vrsti, dobijamo

(2) $$e^{in\theta}=(-1)^n,\quad \text{tj.}\quad \theta=\pi+\frac{2k}{n}\pi \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Kad smo tako izabrali θ, između brojeva ζ_ν $(\nu=1,2,\ldots,n)$ postoji relacija

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 & 1 & & & & \\ \zeta_2 & e^{i\theta} & 1 & & 0 & \\ \zeta_3 & & e^{i\theta} & & & \\ \cdot & & & \ddots & & \\ \cdot & 0 & & & \ddots & \\ \cdot & & & & & 1 \\ \zeta_n & & & & & e^{i\theta} \end{vmatrix}=0.$$

odnosno

(3) $$\zeta_n-\alpha\zeta_{n-1}+\alpha^2\zeta_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}\alpha^{n-1}\zeta_1=0 \qquad (\alpha=e^{i\theta}).$$

Dakle, sa tako izabranim θ važi uslov 1°.

2° Za $n=3$ i $\theta=\pi/3$ relacija (3) glasi

$$\zeta_3-\alpha\zeta_2+\alpha^2\zeta_1=0 \quad (\alpha=e^{i\pi/3}),\quad \text{tj.}\quad \frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_2-\zeta_1}=\alpha.$$

Poslednja relacija kazuje da je

$$|\overrightarrow{C_1C_3}|=|\overrightarrow{C_1C_2}| \quad \text{i} \quad \sphericalangle(\overrightarrow{C_1C_2},\overrightarrow{C_1C_3})=\pi/3.$$

Prema tome, trougao $C_1C_2C_3$ je ravnostran.

Za $n=4$ i $\theta=\pi/2$ relacija (3) postaje:

$$\zeta_4-i\zeta_3-\zeta_2+i\zeta_1=0,\quad \text{tj.}\quad \frac{\zeta_4-\zeta_2}{\zeta_3-\zeta_1}=i.$$

Ova relacija kazuje da je:

$$|\overrightarrow{C_2C_4}|=|\overrightarrow{C_1C_3}| \quad \text{i} \quad \sphericalangle(\overrightarrow{C_1C_3},\overrightarrow{C_2C_4})=\pi/2.$$

Prema tome, četvorougao $C_1C_2C_3C_4$ ima jednake i normalne dijagonale.

Primedba. Interesantno bi bilo da se navede neka geometriska interpretacija relacije (3) i u opštem slučaju.

Ovo je rešenje *D. Đokovića*. Videti prethodni problem.

92. Proveriti formulu

$$\int_0^1 x\log x J_0(kx)\,dx=\frac{1}{k^2}J_0(k)-\frac{1}{k^2} \qquad (k=\text{const}\neq 0).$$

93. Pokazati da transformacija $z=\operatorname{ch} w$ preslikava pravougaonik u w-ravni, čija temena imaju afikse

$$0,\quad a,\quad a+\frac{1}{2}\pi i,\quad \frac{1}{2}\pi i \qquad (a>0)$$

na kvadrant jedne elipse u z-ravni.

PRILOZI

I. JEDAN PROBLEM O ANALITIČKIM FUNKCIJAMA*

Data je relacija

$$F(P, Q, x, y) = 0, \tag{1}$$

gde je $F(P, Q, x, y)$ realna funkcija realnih promenljivih P, Q, x, y.

Ispitajmo da li postoje konjugovano-harmoniske funkcije P, Q promenljivih x, y za koje identički važi relacija (1).

Iz relacije (1) dobija se

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Budući da se traže funkcije P i Q koje zadovoljavaju *Cauchy-Riemann*-ove uslove

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3}$$

relacije (2) postaju

$$\frac{\partial F}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial P}\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial P}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Odavde sleduje

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial Q} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial P}}{\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial P} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial Q}}{\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)^2}. \tag{5}$$

Jednačine (5) su oblika

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = g_1(P, Q, x, y), \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = g_2(P, Q, x, y), \tag{6}$$

gde su funkcije $g_1(P, Q, x, y)$ i $g_2(P, Q, x, y)$ poznate ako je $F(P, Q, x, y)$ dato.

Da bi izraz $P + iQ$, gde su P i Q vezani relacijom (1), bio analitička funkcija promenljive $z\,(= x + iy)$, potrebno je i dovoljno da relacije (6) i (1) imaju jedno zajedničko rešenje P, Q, gde su P i Q realne funkcije.

---

* Redigovano prema članku:

D. S. Mitrinović: *Un problème sur les fonctions analytiques* (Revue mathématique de l'Union interbalkanique, t. 1, 1936).

Efektivno određivanje funkcije Q iz relacija (6) izvršićemo na sledeći način. Kada se eliminiše P iz (1) i (6), dobija se

(7) $$\frac{\partial Q}{\partial x}=f_1(Q, x, y), \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=f_2(Q, x, y).$$

Svako rešenje koje zadovoljava obadve relacije (7) zadovoljava tako isto i nove relacije

(8) $$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}=\frac{\partial f_1}{\partial y}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial Q}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}=\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_1\frac{\partial f_2}{\partial Q},$$

i prema tome relaciju

(9) $$\frac{\partial f_1}{\partial y}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial Q}=\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_1\frac{\partial f_2}{\partial Q}.$$

Mogu se desiti dva slučaja.

Slučaj I. *Relacija* (9) *je identički zadovoljena.* Skup jednačina (7) tada ima beskonačno mnogo rešenja izraženih funkcijom koja sadrži jednu proizvoljnu realnu konstantu.

U ovom slučaju za skup (7) kaže se da je *potpuno integrabilan.*

Slučaj II. *Relacija* (9) *nije identički zadovoljena.* Za Q se može uzeti samo funkcija definisana relacijom (9). U ovom slučaju pomoću eliminacije može se uvek ispitati da li skup relacija (7) ima zajedničko rešenje. Ako takvo rešenje postoji, ono je partikularno, tj. u njemu se ne pojavljuje integraciona konstanta.

Kada se navedenim postupkom odredi jedna realna funkcija Q i kada je odgovarajuća funkcija P, definisana relacijom (1), tako isto realna, dobija se jedno rešenje postavljenog problema.

Skup svih parova (P, Q) pretstavlja opšte rešenje navedenog problema.

Primer I. Neka je relacija (1) oblika

$$P-Q\operatorname{tg} y=0.$$

Tada jednačine (6) glase

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=-Q\operatorname{tg} y,$$

odakle sleduje

$$Q=Ce^{-x}\cos y \qquad (C \text{ realna konstanta}).$$

Tražena analitička funkcija je

$$f(z)=Cie^{-z} \qquad (C \text{ realna konstanta}).$$

Primer II. Polazeći od relacije[1]

$$2xyP+(y^2-x^2)Q+2xy(x^2+y^2)^2=0,$$

nalazi se

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{Q}{x}+8x^2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{Q}{y}-8xy^2.$$

Ovaj skup jednačina je potpuno intgrabilan i njegovo rešenje je

$$Q=4xy(x^2-y^2)+2Cxy \qquad (C \text{ realna konstanta}).$$

Odgovarajuća analitička funkcija je

$$f(z)=z^4+Cz^2.$$

---

[1] Videti problem 101 na str. 28 ovog *Zbornika*.

Primer III. Ako je data relacija

$$P+Q^2-x^2+y-1=0,$$

tada je

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1+4xQ}{1+4Q^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{2x-2Q}{1+4Q^2}.$$

Ovaj skup jednačina nije potpuno integrabilan. Njegovo rešenje je $Q=x$. Tražena analitička funkcija je $f(z)=1+iz$.

Primer IV. Relacija

$$P+Q-x^2=0$$

ne definiše nijednu analitičku funkciju $f(z)=P+iQ$.

Tretirajmo sada opštiji problem.

Neka je $f(z_1, z_2)$ analitička funkcija promenljivih z_1 $(=x_1+iy_1)$ i z_2 $(=x_2+iy_2)$. Ako se razdvoje realni deo i imaginarni deo, dobija se

$$f(z_1, z_2)=P(x_1, y_1, x_2, y_2)+iQ(x_1, y_1, x_2, y_2),$$

gde su P i Q realne funkcije realnih promenljivih x_1, y_1, x_2, y_2. Funkcije P i Q zadovoljavaju uslove

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial x_1}=\frac{\partial Q}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial P}{\partial y_1}=-\frac{\partial Q}{\partial x_1},\\ &\frac{\partial P}{\partial x_2}=\frac{\partial Q}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y_2}=-\frac{\partial Q}{\partial x_2}.\end{aligned} \tag{10}$$

Neka je data relacija

$$F(P, Q, x_1, y_1, x_2, y_2)=0, \tag{11}$$

gde je F realna funkcija naznačenih argumenata.

Postavlja se pitanje da li postoje konjugovano-harmoniske funkcije P i Q koje zadovoljavaju relacije (10) *i* (11).

Iz (11), na osnovu (10), sleduje

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Q}{\partial x_1}=g_1(P, Q, x_1, y_1, x_2, y_2),\\ &\frac{\partial Q}{\partial y_1}=g_2(P, Q, x_1, y_1, x_2, y_2),\\ &\frac{\partial Q}{\partial x_2}=g_3(P, Q, x_1, y_1, x_2, y_2),\\ &\frac{\partial Q}{\partial y_2}=g_4(P, Q, x_1, y_1, x_2, y_2),\end{aligned} \tag{12}$$

gde su funkcije g_k poznate ako je funkcija F data.

Da bi relacija (11) definisala jednu analitičku funkciju

$$f(z_1, z_2)=P+iQ,$$

potrebno je i dovoljno da relacije (12) i (11) imaju rešenje P, Q, gde su P i Q realne funkcije.

Skup jednačina (12) može biti potpuno integrabilan ili ne ili da uopšte nema rešenja. Diskusija o efektivnom određivanju funkcije Q, a zatim P, analogna je slučaju sa jednom nezavisnom promenljivom koji je napred tretiran.

Primer. Data je relacija

$$x_1 P + y_1 Q - x_2 (x_1^2 + y_1^2) = 0.$$

Da li ona definiše jednu analitičku funkciju $f(z_1, z_2) = P + iQ$?

Skup relacija (12), u ovom slučaju, ima oblik

$$\partial Q/\partial x_1 = (Q - y_1 x_2)/x_1, \quad \partial Q/\partial y_1 = x_2, \quad \partial Q/\partial x_2 = y_1, \quad \partial Q/\partial y_2 = x_1,$$

i ekvivalentan je jednačini

$$dQ = \{(Q - y_1 x_2)/x_1\}\, dx_1 + x_2\, dy_1 + y_1\, dx_2 + x_1\, dy_2,$$

odnosno

$$\frac{dQ}{x_1} - \frac{Q}{x_1^2} dx_1 = -\frac{y_1 x_2}{x_1^2} dx_1 + \frac{d(y_1 x_2)}{x_1} + dy_2,$$

odakle sleduje

$$Q = y_1 x_2 + x_1 y_2 + C x_1 \quad (C \text{ realna konstanta}).$$

Tražena analitička funkcija je $f(z_1, z_2) = z_1 z_2 + C i z_1$.

Problem o kome je ovde bilo reči može se generalisati na kompleksne funkcije od n kompleksnih promenljivih.

II. STEREOGRAFSKA PROJEKCIJA

1. Tačka u beskonačnosti. Postavimo jednu sferu prečnika 1 tako da ona dodiruje kompleksnu ravan u početku O njenog koordinatnog sistema, tj. u tački $z = 0$. Ovu tačku zvaćemo *južni pol* sfere. Normala podignuta u tački O na kompleksnu ravan prodire sferu u tački N (*severni pol* sfere).

Prava koja spaja proizvoljnu tačku P kompleksne ravni sa polom N preseca sferu samo u jednoj tački M (različitoj od tačke N). Dakle, svakoj tački kompleksne ravni odgovara jedna, i samo jedna tačka sfere.

Obrnuto, prava koja spaja proizvoljnu tačku sfere sa severnim polom ove sfere prodire kompleksnu ravan samo u jednoj tački. Jedino polu N ne odgovara ni jedna tačka u kompleksnoj ravni.

Ovim smo ustanovili *biunivoku korespondenciju* između tačaka kompleksne ravni i tačaka sfere sa izuzetkom pola N.

Ako pustimo da se jedna tačka u kompleksnoj ravni udaljuje u beskonačnost bilo u kome pravcu, odgovarajuća tačka na sferi sve se više približava polu N. I obrnuto, ma kako se jedna tačka sfere približavala severnom polu N, tačka koja joj odgovara u kompleksnoj ravni udaljavaće se u beskonačnost.

To je razlog što uzimamo:

1° da kompleksna ravan ima jednu jedinu tačku u beskonačnosti, tačku $z = \infty$, i da ovoj tački korespondira na sferi pol N;

2° da polu N odgovara tačka u beskonačnosti, $z = \infty$, u ravni tačke z.

Navedeno preslikavanje kompleksne ravni tačke z na sferu zove se: *stereografsko preslikavanje*, jer se dobija *stereografskom projekcijom.*

Ravan kompleksne promenljive z zajedno sa beskonačno udaljenom tačkom $z = \infty$ naziva se *raširena ravan* kompleksne promenljive.

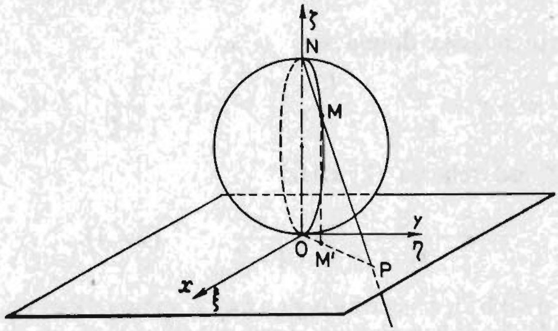
Sfera čije tačke pretstavljaju skup svih tačaka raširene kompleksne ravni zove se *Riemann-ova sfera.*

Dakle, između tačaka raširene ravni kompleksne promenljive i Riemann-ove sfere postoji biunivoka korespondencija.

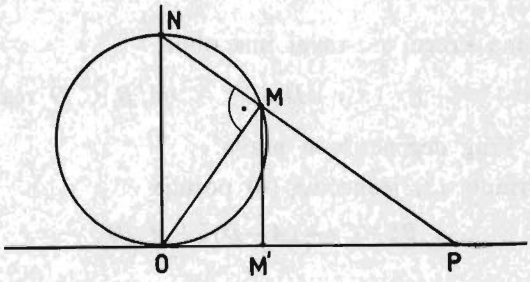
Smatramo li pod okolinom pola N na sferi kalotu (bez graničnog kruga) ove sfere na kojoj leži tačka N i koja je dobijena presekom sfere sa jednom ravni normalnom na polarnoj osi ON, tada se pod okolinom tačke $z=\infty$ u kompleksnoj ravni smatra stereografska projekcija okoline pola N na kompleksnoj ravni, odnosno skup tačaka koje se nalaze van jednog kruga opisanog oko početka u kompleksnoj ravni.

Argument tačke $z=\infty$ je neodređen kao i tačke $z=0$.

2. Formule stereografske projekcije. Neka je z afiks tačke P, a M' ortogonalna projekcija tačke M u kompleksnoj ravni (sl. 1).



Sl. 1



Sl. 2

OMN je glavni krug *Riemann*-ove sfere koji prolazi kroz tačku M i polove (sl. 2).

Iz trougla OMP izlazi

$$\overline{MM'}=\sqrt{|z'|\,(|z|-|z'|)},$$

gde je z' afiks projekcije tačke M u kompleksnoj ravni.

Kako su trouglovi PMM' i PON slični, imamo relaciju

$$\frac{\overline{MM'}}{\overline{ON}}=\frac{\overline{PM'}}{\overline{PO}},$$

odnosno

$$\sqrt{|z'|(|z|-|z'|)}=\frac{|z|-|z'|}{|z|}.$$

Odavde sleduje

(1) $$|z'|=\frac{|z|}{|z|^2+1} \quad \text{i} \quad z'=\frac{z}{|z|^2+1} \quad (\text{tačke } z \text{ i } z' \text{ imaju isti argument}),$$

a zatim

$$\overline{MM'}=\frac{|z|^2}{|z|^2+1}. \tag{1'}$$

Sa $O\xi\eta\zeta$ označimo ortogonalni trijedar osa (ξ-osa i x-osa poklapaju se, η-osa i y-osa poklapaju se, ζ-osa poklapa se sa vektorom $\overrightarrow{ON}$). Neka su (ξ, η, ζ) koordinate tačke M na sferi u odnosu na sistem $O\xi\eta\zeta$.

Iz (1) i (1') dobijamo

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1}, \quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2+1}, \quad \zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}. \tag{2}$$

Iz treće od ovih relacija dobija se

$$x^2+y^2=\frac{\zeta}{1-\zeta} \quad \text{i} \quad x^2+y^2+1=\frac{1}{1-\zeta} \qquad (\zeta\neq 1).$$

Iz prve i druge od relacija (2) izlazi

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y=\frac{\eta}{1-\zeta} \qquad (\zeta\neq 1). \tag{3}$$

3. G l a v n a o s o b i n a s t e r e o g r a f s k e p r o j e k c i j e. *Stereografskim projektovanjem svaki krug kompleksne ravni preslikava se na krug Riemann-ove sfere, i obrnuto.*

Dokaz. Jednačina kruga u z-ravni ima oblik

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \qquad (A, B, C, D \text{ realni}). \tag{4}$$

Ako je $A=0$, krug degeneriše u pravu.

Na osnovu formula (3) jednačina (4) postaje

$$B\xi+C\eta+(A-D)\zeta+D=0, \tag{5}$$

jer je

$$x^2+y^2=\frac{\zeta}{1-\zeta}.$$

Prema tome, svaki krug (uključujući i pravu) koji se nalazi u kompleksnoj ravni preslikava se na *Riemann*-ovu sferu

$$\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}, \quad \text{tj.} \quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2-\zeta=0, \tag{6}$$

na krug definisan kao presek sfere (6) i ravni (5).

Da ravan (5) uvek seče sferu (6), možemo se uveriti na sledeći način. Otstojanje centra sfere (0, 0, 1/2) od ravni (5) je

$$\frac{1}{2}\frac{|A+D|}{\{B^2+C^2+(A-D)^2\}^{1/2}}. \tag{7}$$

Ako je krug (4) realan, tada je

$$B^2+C^2-4AD>0 \qquad (A\neq 0). \tag{8}$$

Ako se izraz (7) napiše u obliku

$$\frac{1}{2}\frac{|A+D|}{\{B^2+C^2-4AD+(A+D)^2\}^{1/2}}$$

i uzme u obzir uslov (8), zaključuje se da je uvek

$$\frac{1}{2}\frac{|A+D|}{\{B^2+C^2+(A-D)^2\}^{1/2}}<\frac{1}{2},$$

tj. otstojanje centra sfere od ravni (5) uvek je manje od poluprečnika sfere.

Primedba. Šta će biti ako je $B^2+C^2-4AD=0$?

Obrnuto, svaki krug sfere preslikava se na krug u kompleksnoj ravni, što se bez teškoće pokazuje.

Ako krug *Riemann*-ove sfere prolazi kroz severni pol (0, 0, 1), on se stereografski preslikava na pravu u kompleksnoj ravni. Ova činjenica geometriski je očevidna.

Na *Riemann*-ovoj sferi posmatrajmo dve krive S_1 i S_2 koje se seku u jednoj tački M i neka tangente t_1 i t_2 ovih krivih u tački M grade ugao a. Stereografskim projektovanjem krivih S_1 i S_2 i tangenata t_1 i t_2 dobijaju se respektivno krive σ_1 i σ_2 i tangente τ_1 i τ_2.

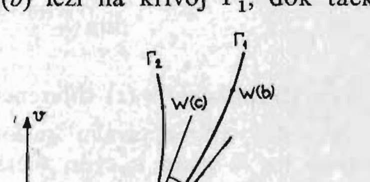
Može se pokazati da su uglovi a i α (α ugao između tangenata τ_1 i τ_2) jednaki.

III. KONFORMNO PRESLIKAVANJE

Neka su γ_1 i γ_2 dve ma koje deo po deo glatke krive u z-ravni koje se seku u tački a. Neka je $b\,(\neq a)$ jedna tačka na krivoj γ_1 i $c\,(\neq a)$ jedna tačka na krivoj γ_2.

Preslikavanjem funkcijom $w(z)$ krivih γ_1 i γ_2 na w-ravan dobijaju se krive Γ_1 i Γ_2 koje se seku u tački $w(a)$. Tačka $w(b)$ leži na krivoj Γ_1, dok tačka $w(c)$ leži na krivoj Γ_2.

Sl. 1



Sl. 2

Ugao između pravih koje prolaze kroz tačke a i b, odnosno a i c, dat je izrazom $\arg \frac{c-a}{b-a}$.

Ugao između pravih koje prolaze kroz tačke $w(a)$ i $w(b)$, odnosno $w(a)$ i $w(c)$, dat je izrazom

$$\arg \frac{w(c)-w(a)}{w(b)-w(a)}.$$

Ugao pod kojim se seku krive γ_1 i γ_2, odnosno krive Γ_1 i Γ_2, dat je formulom

$$\varphi = \lim_{\substack{b\to a\\ c\to a}} \arg \frac{c-a}{b-a}, \quad \text{odnosno} \quad \Phi = \lim_{\substack{b\to a\\ c\to a}} \arg \frac{w(c)-w(a)}{w(b)-w(a)}.$$

Ako se dve ma koje krive γ_1 i γ_2 u z-ravni uvek preslikavaju na druge dve krive Γ_1 i Γ_2 u w-ravni, tako da su uglovi preseka φ i Φ jednaki, kaže se da se z-ravan konformno preslikava na w-ravan.

Budući da je

$$\frac{w(c)-w(a)}{w(b)-w(a)} = \frac{\dfrac{w(c)-w(a)}{c-a}}{\dfrac{w(b)-w(a)}{b-a}} \, \frac{c-a}{b-a},$$

dobija se

$$\lim_{\substack{b\to a\\ c\to a}} \arg \frac{w(c)-w(a)}{w(b)-w(a)} = \lim_{c\to a} \arg \frac{w(c)-w(a)}{c-a} - \lim_{b\to a} \arg \frac{w(b)-w(a)}{b-a} + \lim_{\substack{b\to a\\ c\to a}} \arg \frac{c-a}{b-a}.$$

Zbog neprekidnosti glavne vrednosti argumenta, poslednjoj relaciji može se dati oblik

$$\lim_{\substack{b\to a\\ c\to a}} \arg \frac{w(c)-w(a)}{w(b)-w(a)} = \arg \lim_{c\to a} \frac{w(c)-w(a)}{c-a} - \arg \lim_{b\to a} \frac{w(b)-w(a)}{b-a} + \lim_{\substack{b\to a\\ c\to a}} \arg \frac{c-a}{b-a}.$$

Uglovi φ i Φ biće jednaki ako je

$$\lim_{c\to a} \frac{w(c)-w(a)}{c-a} = \lim_{b\to a} \frac{w(b)-w(a)}{b-a} \neq 0,$$

tj. kad je funkcija $w(z)$ diferencijabilna u tački $z=a$ i kada je uz to $w'(a)\neq 0$.

Kao što vidimo, svaka uniformna analitička funkcija konformno preslikava z-ravan na w-ravan u svim tačkama a za koje je $w'(a)\neq 0$.

Ako je S otvoren domen, ograničen zatvorenom *Jordan*-ovom krivom C, tada postoji jedinstvena analitička funkcija $f(z)$, regularna u S, takva da funkcija $w=f(z)$ preslikava S konformno na krug $|w|<1$, i takođe preslikava jednu tačku $z=a$ ($\in S$) na koordinatni početak i jedan dati pravac kod $z=a$ na pozitivni pravac realne ose.

Ovaj stav prvi je formulisao *B. Riemann* u svojoj doktorskoj disertaciji 1851 godine.

Njegov dokaz, kao što je pokazao *Weierstrass*, bio je nepotpun. On je zavisio od jednog stava iz varijacionog računa koji je *Riemann* pretpostavio da je dokazan, što nije bio slučaj. Međutim, nedokazani stav koji je *Riemann* upotrebio tačan je, kao što je kasnije *Weierstrass* utvrdio.

TABLICA NEKIH VAŽNIJIH PRESLIKAVANJA

Redni broj	Oblast u z-ravni $z=x+iy=re^{i\theta}$	Transformacija	Oblast u w-ravni $w=u+iv=\rho e^{i\varphi}$
1.	$\vert z\vert\leqslant 1$	$w=e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{\bar{a}z-1}$ (α realno; $\vert a\vert<1$)	$\vert w\vert\leqslant 1$
2.	$\operatorname{Im}(z)\geqslant 0$	$w=\dfrac{i-z}{i+z}$	$\vert w\vert\leqslant 1$
3.	$0\leqslant \operatorname{Re}(z)\leqslant\pi$	$w=\dfrac{1+ie^{iz}}{1-ie^{iz}}$	$\vert w\vert\leqslant 1$
4.	$\vert z\vert\leqslant r,\ \operatorname{Re}(z)\geqslant 0$	$w=i\dfrac{z^2-r^2+2rz}{z^2-r^2-2rz}$	$\vert w\vert\leqslant 1$
5.	$0\leqslant\theta\leqslant\pi/n$	$w=z^n$	$\operatorname{Im}(w)\geqslant 0$
6.	$\vert z\vert\leqslant 1,\ \operatorname{Im}(z)\geqslant 0$	$w=\dfrac{1+z}{1-z}$	$0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$
7.	$\vert z\vert\leqslant 1,\ \operatorname{Im}(z)\geqslant 0$	$w=\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$	$\operatorname{Im}(w)\geqslant 0$
8.	$\vert z\vert\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/n$	$w=\left(\dfrac{z^n+1}{z^n-1}\right)^2$	$\operatorname{Im}(w)\geqslant 0$
9.	$0\leqslant\operatorname{Im}(z)\leqslant\pi$	$w=e^z$	$\operatorname{Im}(w)\geqslant 0$
10.	$0\leqslant\operatorname{Re}(z)<\infty$, $0\leqslant\operatorname{Im}(z)\leqslant\alpha$	$w=-e^{-\pi z/\alpha}$	$\vert w\vert\leqslant 1,\ \operatorname{Im}(w)\geqslant 0$

IV. O GLAVNOJ VREDNOSTI NESVOJSTVENOG INTEGRALA

1. Prilikom definisanja *Riemann*-ova integrala

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a<b)$$

pretpostavlja se da je funkcija $f(x)$ ograničena na segmentu $[a, b]$ i da je interval integracije $b-a$ konačan.

Pojam integrala može se generalisati u slučaju kada funkcija ima konačan broj tačaka na segmentu $[a, b]$ u čijim okolinama ona ne ostaje ograničena ili kada interval integracije $b-a$ prestaje da bude ograničen.

Taj generalisani pojam integrala zove se *nesvojstveni integral.*

Pretpostavimo: 1° da funkcija $f(x)$ nije ograničena na segmentu $[a, b]$ samo u okolini tačke $c\in(a, b)$; 2° da je funkcija $f(x)$ R-integrabilna (tj. integrabilna u *Riemann*-ovom smislu) na svakom podsegmentu $[a_k, b_k]\subset[a, b]$ koji ne sadrži tačku c.

Ako postoje granične vrednosti

$$(1.1)\qquad \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kada ε_1 i ε_2 *nezavisno* teže ka $+0$, izraz

$$(1.\,2)\qquad \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx$$

pretstavlja vrednost nesvojstvenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$. Tada se kaže da nesvojstveni integral postoji ili da je konvergentan.

Pod *svojstvenim* integralom podrazumeva se *Riemann*-ov integral.

Može se desiti da (1. 2) ne postoji, ali da postoji granična vrednost

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right\}.$$

U tom slučaju kaže se da *nesvojstveni integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *postoji u smislu glavne vrednosti*. Ova granična vrednost zove se *glavna vrednost* nesvojstvenog integrala i označava sa

$$\text{v. p} \int_a^b f(x)\,dx \quad (\text{v. p.} \equiv \text{valeur principale}), \text{ ili sa } \mathrm{P} \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx$ zove se ponekad *Cauchy*-eva glavna vrednost integrala, budući da je *Cauchy* uveo ovaj pojam.

Ako integral $\int_a^b f(x)\,dx$ postoji kao nesvojstven, tada postoji i v. p. $\int_a^b f(x)\,dx$, dok obrnuto u opštem slučaju ne važi.

Ako funkcija $f(x)$ na segmentu $[a, b]$ nije ograničena jedino u desnoj okolini tačke a i ako je R-integrabilna na segmentu $[a+\varepsilon, b]$ ($\varepsilon > 0$ i $a+\varepsilon < b$), tada se granična vrednost

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx,$$

ako postoji, definiše kao vrednost nesvojstvenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

Za takav nesvojstveni integral kaže se ili da postoji ili da je konvergentan ili da ima smisla.

Ako je funkcija $f(x)$ na segmentu $[a, b]$ neograničena samo u levoj okolini tačke b i R-integrabilna na segmentu $[a, b-\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$ i $a < b-\varepsilon$), tada se granična vrednost

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

u slučaju ako postoji, zove vrednost nesvojstvenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

Za takav nesvojstveni integral kaže se ili da postoji ili da je konvergentan ili da ima smisla.

Ako na segmentu $[a, b]$ funkcija $f(x)$ nije ograničena samo u desnoj okolini tačke a i u levoj okolini tačke b $(>a)$ i ako je R-integrabilna na segmentu $[a+\varepsilon_1, b-\varepsilon_2]$ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$ i $a+\varepsilon_1<b-\varepsilon_2)$, tada se granična vrednost

$$(1.3) \qquad \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx,$$

ako postoji, definiše kao vrednost nesvojstvenog integrala funkcije $f(x)$ na segmentu $[a, b]$ u odnosu na granice a i b.

Može se desiti da ne postoji granična vrednost (1. 3), ali da postoji

$$(1.4) \qquad \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Tada se (1. 4) zove *glavna vrednost* nesvojstvenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ i ona se označava sa

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Neka funkcija $f(x)$ bude ograničena za $x \geqslant a$ i neka funkcija $\int_a^x f(t)\,dt$ postoji za svako $x \geqslant a$. Ako postoji

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt,$$

kaže se da postoji nesvojstveni integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$ ili da je konvergentan. Tada je, po definiciji,

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Slično se definiše vrednost nesvojstvenog integrala na intervalu $(-\infty, b)$ pomoću jednakosti

$$\int_{-\infty}^b f(t)\,dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)\,dt,$$

ako postoji granična vrednost na desnoj strani poslednje jednakosti.

Ako je funkcija $f(x)$ ograničena na svakom konačnom segmentu $[a, b]$ i ako $\int_a^b f(x)\,dx$ postoji u *Riemann*-ovom smislu, granična vrednost

$$(1.5) \qquad \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\,dx \quad \left(\text{odnosno} \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\,dx\right),$$

ukoliko postoji, definiše vrednost nesvojstvenog integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Ako (1. 5) ne postoji, može se desiti da postoji

$$(1.\ 6) \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tada se (1. 6) definiše kao glavna vrednost nesvojstvenog integrala $f(x)$ u odnosu na beskonačne granice.

Ako postoji glavna vrednost nesvojstvenog integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ona je jednaka nesvojstvenom integralu

$$\int_0^{\infty} \{f(x)+f(-x)\}\,\mathrm{d}x$$

koji konvergira.

Bez teškoće se proširuje pojam nesvojstvenog integrala i pojam glavne vrednosti nesvojstvenog integrala funkcije $f(x)$ na segmentu $[a, b]$, ako ona ima konačan broj tačaka $c_\nu \in (a, b)$ u čijim okolinama nije ograničena i ako je funkcija $f(x)$ integrabilna u *Riemann*-ovom smislu na svakom podsegmentu segmenta $[a, b]$ u kome nema tačaka c_ν.

Tako, na primer, ako postoje dve tačke c_1 i c_2 $(a<c_1<c_2<b)$ sa navedenom osobinom, tada je

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{v. p.} \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \text{v. p.} \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (c_1<d<c_2).$$

Primeri. 1° Integral

$$\int_a^b \frac{1}{x-c}\,\mathrm{d}x \qquad (a<c<b)$$

ne postoji kao svojstven, jer $|1/(x-c)| \to \infty$ $(x \to c)$.

Ovaj integral ne postoji takođe kao nesvojstven, jer izraz

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{1}{x-c}\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{1}{x-c}\,\mathrm{d}x = \log\frac{b-c}{c-a} + \log\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

nema graničnu vrednost kada ε_1 i ε_2 nezavisno teže nuli s pozitivne strane. Međutim, ako je $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, granična vrednost

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} \frac{1}{x-c}\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{1}{x-c}\,\mathrm{d}x \right\}$$

postoji, te je

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{1}{x-c}\,\mathrm{d}x = \log\frac{b-c}{c-a} \qquad (a<c<b).$$

2° Integral

$$(1.\ 7) \qquad \int_a^b \frac{1}{(x-c)^n}\,\mathrm{d}x \qquad (a<c<b;\ n \text{ prirodan broj} \geqslant 2)$$

kao svojstven ne postoji. On ne postoji ni kao nesvojstven.

Posmatrajmo sada izraz

$$\int_a^{c-\varepsilon} \frac{1}{(x-c)^n}\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} \frac{1}{(x-c)^n}\,dx$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} + \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} + (-1)^n \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right\}.$$

Ako je n neparno, ovaj izraz svodi se na

$$\frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right\}.$$

Prema tome je

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{1}{(x-c)^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right\},$$

gde je $n\,(\geqslant 3)$ neparan broj i $a < c < b$.

Integral (1. 7) nema svoju glavnu vrednost ako je n parno.

3° Integral

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a-\sin x}\,dx \qquad (0 < a < 1)$$

kao nesvojstven ne postoji, ali se može pokazati da je

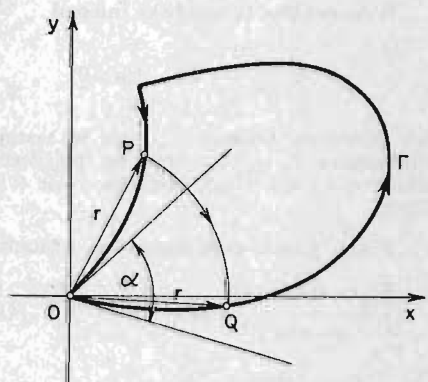
$$\text{v. p. } J = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \log \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} \qquad (0 < a < 1).$$

4° Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$ kao nesvojstven ne postoji, ali je v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = 0$.

5° Bez teškoće se pokazuje da je

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

2. Neka je $f(z)$ uniformna funkcija i neka je tačka $z = 0$ njen pol prvog reda[1]. Pretpostavimo da se u tački O sustiču dva dela zatvorene putanje Γ koja ograničava oblast G. Oko tačke O kao centra opišimo krug poluprečnika r tako da u oblasti $|z| \leqslant r$ nema drugih singulariteta funkcije $f(z)$ osim $z = 0$. Neka ovaj krug seče putanju Γ u tačkama P i Q. Označimo sa α ugao čije je teme u tački O i čiji su kraci tangente (u tački O) delova putanje Γ.



U okolini tačke $z = 0$ važi *Laurent*-ov razvoj

$$f(z) = \frac{A_{-1}}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k.$$

Odavde izlazi

$$(2.\ 1) \qquad \left| f(z) - \frac{A_{-1}}{z} \right| \leqslant M \qquad (|z| \leqslant r),$$

gde je M jedna fiksna pozitivna konstanta.

---

[1] Rezonovanje je isto ako se pol nalazi u tački $z = a$ $(\neq 0)$.

Posmatrajmo sada integral

$$\int_{\widehat{PQ}} f(z)\,dz = \int_{\widehat{PQ}} \frac{A_{-1}}{z}\,dz + \int_{\widehat{PQ}} \left\{ f(z) - \frac{A_{-1}}{z} \right\} dz .$$

Stavimo li $z = re^{i\theta}$, dobijamo

$$\int_{\widehat{PQ}} f(z)\,dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} i A_{-1}\,d\theta + \int_{\widehat{PQ}} \left\{ f(z) - \frac{A_{-1}}{z} \right\} dz ,$$

gde je θ_1 argument tačke P i θ_2 argument tačke Q.

Na osnovu nejednakosti (2. 1) biće

$$\left| \int_{\widehat{PQ}} \left\{ f(z) - \frac{A_{-1}}{z} \right\} dz \right| < M \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} |dz| \right| = Mr(\theta_1 - \theta_2).$$

Ako $r \to 0$, dobija se:

(2. 2) $$\theta_2 - \theta_1 \to -\alpha,$$

(2. 3) $$\int_{\widehat{PQ}} \left\{ f(z) - \frac{A_{-1}}{z} \right\} dz \to 0,$$

(2. 4) $$\lim_{r\to 0} \int_{\widehat{PQ}} f(z)\,dz = -\alpha i A_{-1} = -\alpha i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z).$$

Formula (2. 4) ima važnu ulogu pri izračunavanju glavne vrednosti integrala.

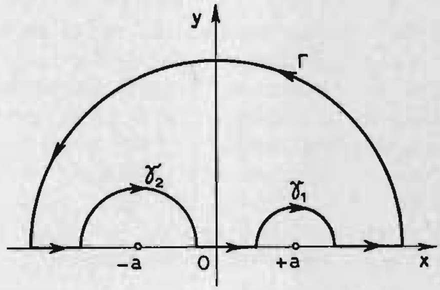
Primer. Primenom računa ostataka izvešćemo formulu

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\sin a}{a} \qquad (a > 0).$$

Posmatrajmo krivoliniski integral

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{a^2 - z^2}\,dz \qquad (a > 0)$$

duž zatvorene konture C, koja se sastoji iz polukrugova Γ, γ_1 γ_2 (čiji su poluprečnici redom r, r_1, r_2) i od otsečaka x-ose (videti sliku).



Prema *Cauchy*-evoj teoremi o ostacima je

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{ir\cos\theta - r\sin\theta}}{a^2 - r^2 e^{2i\theta}}\, i r e^{i\theta}\,d\theta + \int_{-r}^{-a-r_2} f(x)\,dx + J_2 + \int_{-a+r}^{a-r_1} f(x)\,dx + J_1 + \int_{a+r_1}^{r} f(x)\,dx = 0,$$

gde je $f(x) = e^{ix}/(a^2 - x^2)$.

Ovde J_1 i J_2 označavaju integrale duž malih polukrugova γ_1 i γ_2.

Ako primenimo *Jordan*-ovu nejednakost

$$\frac{2}{\pi}\theta \leqslant \sin\theta \qquad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi\right),$$

utvrđujemo da važi procena[1]

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{e^{ir\cos\theta - r\sin\theta}}{a^2 - r^2 e^{2i\theta}}\, ir e^{i\theta}\, d\theta\right| < \frac{\pi}{2(r^2-a^2)}.$$

Primenom formule (2. 4) dobijamo

$$J_1 \to \frac{\pi i}{2a} e^{ia} \quad (r_1 \to 0),$$

$$J_2 \to -\frac{\pi i}{2a} e^{-ia} \quad (r_2 \to 0).$$

Prema tome, ako $r \to \infty$, $r_1 \to 0$ i $r_2 \to 0$, dobija se

$$\text{(2. 5)} \qquad \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{a^2-x^2}\, dx = -\frac{\pi i}{2a}(e^{ia} - e^{-ia}) = \pi \frac{\sin a}{a} \qquad (a > 0).$$

Integral je nesvojstven u odnosu na granice, a u odnosu na diskontinuitete $x = \pm a$ integranda on ima samo glavnu vrednost.

Iz relacije (2. 5) izlazi

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2-x^2}\, dx = \pi \frac{\sin a}{a} \qquad (a > 0),$$

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{a^2-x^2}\, dx = 0 \qquad (a > 0).$$

Zadaci. 1° Pokazati da je

$$\text{v. p.} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos a}\, d\theta = \pi \frac{\sin na}{\sin a} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots ;\ 0 < a < \pi).$$

Ovaj se integral pojavljuje u problemima aeronautike.

2° Pokazati da je

$$\text{v. p.} \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x}\, dx = \cos a\pi \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \pi \operatorname{cotg} a\pi \qquad (0 < a < 1);$$

$$\text{v. p.} \int_0^{2\pi} \frac{x}{1 - a\cos x}\, dx = 0 \qquad (a > 1);$$

$$\text{v. p.} \int_0^{\infty} \frac{1}{1-x^3}\, dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

---

[1] Procena se može dati i na sledeći način:

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{e^{ir\cos\theta - r\sin\theta}}{a^2 - r^2 e^{2i\theta}}\, ir e^{i\theta}\, d\theta\right| \leqslant r \int_0^{\pi} \frac{e^{-r\sin\theta}}{r^2-a^2}\, d\theta \leqslant \frac{\pi r}{r^2-a^2} \qquad (r > a),$$

jer je $0 < e^{-r\sin\theta} \leqslant 1$ ako je $\theta \in [0, \pi]$.

3. Posmatrajmo integral

$$(3.\ 1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

gde su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi koji nemaju zajedničkih nula i neka $Q(x)$ nema realnih nula. Pretpostavimo dalje da je

$$(3.\ 2)\qquad \text{stepen } Q(x) - \text{stepen } P(x) \geqslant 2.$$

Da bismo izračunali integral (3. 1) pomoću računa ostataka, posmatrajmo krivoliniski integral

$$\oint_C \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z$$

duž konture C sastavljene od polukruga $|z| = r$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ i otsečka x-ose od $-r$ do $+r$. Poluprečnik r je tako velik da kontura C obuhvata sve polove koji se nalaze u poluravni $\operatorname{Im} z > 0$.

Na osnovu *Cauchy*-eve teoreme o ostacima biće

$$(3.\ 3)\qquad \int_0^{\pi} \frac{P(r e^{i\theta})}{Q(r e^{i\theta})}\, i r e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{-r}^{+r} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum \operatorname{Res} \frac{P(z)}{Q(z)},$$

gde se sumiranje odnosi na sve polove koji leže u poluravni $\operatorname{Im} z > 0$.

Ako $r \to \infty$, relacija (3. 3) dobija oblik

$$(3.\ 4)\qquad \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{+r} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum \operatorname{Res} \frac{P(z)}{Q(z)},$$

jer

$$\lim_{r\to\infty} \left| \int_0^{\pi} \frac{P(r e^{i\theta})}{Q(r e^{i\theta})}\, i r e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \right| \to 0$$

s obzirom na uslov (3. 2)

Granična vrednost (3. 4), prema navedenim definicijama u tački 1, pretstavlja glavnu vrednost nesvojstvenog integrala (3. 1) u odnosu na beskonačne granice. Dakle,

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum \operatorname{Res} \frac{P(z)}{Q(z)},$$

gde polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ ispunjavaju napred navedene uslove.

Kako integral (3. 1) postoji kao nesvojstven uz date pretpostavke, vrednost nesvojstvenog integrala (3. 1) jednaka je

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum \operatorname{Res} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Ovaj način dobijanja nesvojstvenih integrala pomoću njihovih glavnih vrednosti čest je slučaj pri primeni računa ostataka. U vezi s ovim videti više zadataka u odeljku *Kompleksni brojevi i kompleksne funkcije* u ovom *Zborniku*.

LITERATURA

O nesvojstvenom integralu i o glavnoj vrednosti nesvojstvenog integrala videti:

E. Goursat: *Cours d'Analyse mathématique*, t. I, Paris, 1927, p. 210—220.

J. Karamata: *Teorija i praksa Stieltjes-ova integrala*, Beograd, 1949, str. 265—270.

A. Ostrowski: *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung*, Bd. III, Basel, 1954, S. 255—277.

Ph. Franklin: *Functions of complex variables*, Englewood Cliffs (U. S. A.), 1958, p. 221—226.

E. T. Whittaker — G. N. Watson: *A course of modern analysis*, Cambridge, 1952, p. 75.

E. T. Copson: *An introduction to the theory of functions of a complex variable*, London, 1948, p. 133—135.

Г. М. Фихтенгольц: *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, t. II, Moskva, 1959, str. 556—657.

V. O GENERALIZACIJI JENSEN-OVE FORMULE*

1. Uvod. Neka je funkcija $f(z)$ $(z=re^{it})$ uniformna i regularna svuda u oblasti $D\equiv|z|<r$ i na njenom rubu $C\equiv|z|=r$, osim u konačnom broju polova $b_j\in D$ $(j=1, 2, \ldots, p)$. Označimo sa $a_i(\in D)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ nule funkcije $f(z)$. Pretpostavlja se da je $|a_i|\neq 0$, $|b_j|\neq 0$ i $f(z)\neq 0$ na C.

Pod ovim uslovima vredi relacija

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{it})|\,dt=\log|f(0)|+\sum_{i=1}^{n}\log\frac{r}{|a_i|}-\sum_{j=1}^{p}\log\frac{r}{|b_j|},$$

gde svaku nulu i pol treba uzeti onoliko puta koliki je njihov red. To je *Jensen*-ova formula — jedna od fundamentalnih relacija u teoriji celih i meromorfnih funkcija.

Osnovni značaj *Jensen*-ove formule sastoji se u tome što povezuje vrednosti funkcije na periferiji kruga sa modulima njenih nula i polova koji se nalaze u krugu, i zatim, što se pomoću nje izračunava vrednost važnog integrala

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{it})|\,dt\qquad(|z|=r).$$

Interesantno je spomenuti da je *Jensen* pronašao formulu (1) prilikom pokušaja da odredi distribuciju nula *Riemann*-ove zeta-funkcije u kritičnoj pruzi.

U raznim generalizacijama *Jensen*-ove formule, koje su se kasnije pojavile, figurišu i dalje nule i polovi. Međutim, cilj ovog članka je uopštavanje *Jensen*-ove formule sa jednog kvalitativno novog gledišta. Umesto nula i polova zahtevaćemo da funkcija $f(z)$ ima esencijalne singularitete, tj. rešićemo ovaj problem: Kako glasi relacija koja vezuje modul funkcije na periferiji kruga sa modulima njenih esencijalnih singulariteta koji se nalaze u krugu? Preciznije, treba izgraditi takvu formulu, analognu *Jensen*-ovoj, koja će istovremeno biti primenljiva ne samo na uniformne funkcije koje imaju samo nule i polove već i na uniformne funkcije koje imaju samo esencijalne singularitete.

---

*Ovaj prilog redigovao je *Dragiša Mitrović* prema svome članku: *Sur les valeurs de certaines intégrales définies* (Glasnik matematičko-fizički i astronomski, tom 10, 1955, str. 259—263).

2. Pomoćni stavovi. Pre nego što pređemo na rešavanje postavljenog problema, izvešćemo nekoliko relacija koje će biti potrebne kasnije.

Označimo sa Δ unutrašnjost zatvorene *Jordan*-ove krive e.

Neka je funkcija $f(z)$ uniformna i regularna svuda u oblasti $\Delta + e$, osim u esencijalnoj singularnoj tački $a \in \Delta$. Pretpostavlja se da Δ ne sadrži koordinatni početak i da je $f(z) \neq 0$ u $\Delta + e$. Tada je

$$(2) \qquad J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_e \frac{f'(z)}{f(z)} \log z \, dz = B_1 \log a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n a^n},$$

gde su B_n koeficijenti glavnog dela u Laurent-ovom razvoju funkcije $f'(z)/f(z)$ u tački $z = a$.

Dokaz. Prema *Laurent*-ovoj teoremi je

$$(3) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = b_0 + b_1 (z-a) + b_2 (z-a)^2 + \cdots + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \cdots$$

ili u kraćem obliku

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = P(z-a) + Q\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

Sada je

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_e P(z-a) \log z \, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_e Q\left(\frac{1}{z-a}\right) \log z \, dz,$$

gde se pod logaritmom podrazumeva jedna od njegovih grana. Funkcija $P(z-a) \log z$ regularna je u oblasti $\Delta + e$. Zato je prvi integral prema fundamentalnoj *Cauchy*-evoj teoremi jednak nuli. Što se tiče glavnog dela $Q\{1/(z-a)\}$, on se može integraliti član po član. Primenjujući pri tome *Cauchy*-evu formulu za derivacije regularne funkcije — u našem slučaju na funkciju $\log z$ — posle jednostavnog računa dobijamo

$$J_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_e \frac{B_n \log z}{(z-a)^n} dz = B_1 \log a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n a^n}.$$

Relacija (2) je dokazana.

Na analogan način kao u dokazu relacije (2) dolazi se do nove relacije

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_e \frac{f'(z)}{f(z)} dz = B_1,$$

gde je B_1 *ceo* broj (pozitivan, negativan ili nula). Da se dokaže ova jednostavna ali važna činjenica, dovoljno je integraliti (3) i zatim proučiti varijaciju funkcije $f(z)$ kad tačka z opisuje zatvorenu putanju oko tačke $z = a$ u oblasti Δ. Kako je, prema hipotezi, funkcija $f(z)$ uniformna, B_1 mora biti ceo broj. Zbog toga, tačka $z = a$ ili je pol reda > 1 ili esencijalna singularna tačka funkcije $f'(z)/f(z)$.

Sada ćemo pomoću (4) odrediti varijaciju argumenta funkcije $f(z)$ duž krive e. Označimo vitičastom zagradom varijaciju funkcije $\log f(z)$ na e. Tada je

$$B_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_e d(\log f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \{\log f(z)\}_e = \frac{1}{2\pi i} \{\log |f(z)| + i \arg f(z)\}_e$$
$$= \frac{1}{2\pi} \{\arg f(z)\}_e$$

tj.

$$(5) \qquad \{\arg f(z)\}_e = 2\pi B_1.$$

Na osnovu (5) dokazuje se i relacija

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \{\log z \log f(z)\}_{|z-a|=\varepsilon} = 2\pi i B_1 \log a. \tag{6}$$

3. T e o r e m a: *Neka je funkcija $f(z)$ uniformna i regularna svuda u oblasti $D \equiv |z| < r$ i na njenom rubu $C \equiv |z| = r$, osim u esencijalnim singularnim tačkama $a_\nu \in D$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, $|a_\nu| \neq 0$. Pretpostavlja se da je $f(z) \neq 0$ u oblasti $D + C$.* Tada je

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{it})| \, dt = \log |f(0)| + \sum_{\nu=1}^{k} B_{1,\nu} \log \frac{r}{|a_\nu|} + \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1,\nu}}{n a_\nu^n}, \tag{7}$$

gde su $B_{n,\nu}$ koeficijenti glavnog dela u Laurent-ovom razvoju funkcije $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ u tačkama a_ν.

D o k a z. Pretpostavimo radi jednostavnosti da je funkcija $f(z)$ regularna svuda u $D + C$, osim u jednoj esencijalnoj singularnoj tački $z = a$. U opštem slučaju, funkcija $\log f(z)$ je multiformna u $D + C$. Ali, kad se rubu C, na kome smo za početnu tačku uzeli $z = r$, pridruži zamka oko tačke $z = a$, kako se to obično radi u teoriji funkcija, funkcija $\log f(z)$ postaje uniformna i regularna u oblasti D_1, koja preostaje kad se iz D izdvoji proizvoljno mali krug $|z - a| \leqslant \varepsilon$ i segment $[a + \varepsilon e^{i\alpha}, r]$, gde je α fiksirano. Takođe, funkcija $\{\log f(z)\}/z$ je uniformna i regularna svuda u D_1 osim, u tački $z = 0$, gde ima pol sa ostatkom $\log f(0)$. Pod $\log f(z)$ podrazumevamo jednu određenu granu logaritma. Prema tome, kad primenimo teoremu o ostacima na rub L oblasti D_1, imamo jednakost

$$\int_L \frac{\log f(z)}{z} \, dz = 2\pi i \log f 0), \tag{8}$$

koja naravno važi i onda kad $\varepsilon \to 0$.

S druge strane, u vezi sa (5) zbog promene logaritma funkcije $f(z)$ duž ruba $|z - a| = \varepsilon$, imamo jednakost

$$\int_L \frac{\log f(z)}{z} \, dz = \int_C \frac{\log f(z)}{z} \, dz + \int_r^{a+\varepsilon e^{i\alpha}} \frac{\log f(z)}{z} \, dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{\log f(z)}{z} \, dz + \int_{a+\varepsilon e^{i\alpha}}^{r} \frac{\log f(z) - 2\pi i B_1}{z} \, dz,$$

i posle jednostavnog računa

$$\int_L \frac{\log f(z)}{z} \, dz = \int_C \frac{\log f(z)}{z} \, dz + 2\pi i B_1 [\log (a + \varepsilon e^{i\alpha}) - \log r] - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{\log f(z)}{z} \, dz. \tag{9}$$

Pomoću parcijalne integracije iz (9) dobijamo

$$\int_L \frac{\log f(z)}{z} \, dz = \int_C \frac{\log f(z)}{z} \, dz + 2\pi i B_1 [\log (a + \varepsilon e^{i\alpha}) - \log r] - \{\log z \log f(z)\}_{|z-a|=\varepsilon} + \int_{|z-a|=\varepsilon} \log z \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz. \tag{10}$$

Vodeći računa o relacijama (2), (6) i (8) kad $\varepsilon \to 0$, jednakost (9) prelazi u jednakost

$$\int_C \frac{\log f(z)}{z} dz + 2\pi i B_1 (\log a - \log r) - 2\pi i B_1 \log a$$

$$+ 2\pi i \left[B_1 \log a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n a^n} \right] = 2\pi i \log f(0),$$

odakle na kraju dobijamo

$$\int_C \frac{\log f(z)}{z} dz = 2\pi i \log f(0) + 2\pi i \left[B_1 \log \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n a^n} \right]. \tag{11}$$

Dobijena formula vredi u slučaju kada funkcija $f(z)$ ima samo jedan esencijalni singularitet. Međutim, pomoću teoreme o ostacima lako je modificirati formulu (11) i u slučaju kada funkcija $f(z)$ ima esencijalne singularne tačke a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$. Formula (11) tada očevidno prelazi u formulu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\log f(z)}{z} dz = \log f(0) + \sum_{\nu=1}^{k} B_{1,\nu} \log \frac{r}{a_\nu} + \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1,\nu}}{n a_\nu^n}, \tag{12}$$

gde su $B_{n,\nu}$ koeficijenti glavnog dela u *Laurent*-ovom razvoju funkcije $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ u tačkama a_ν.

Kad levu i desnu stranu u (12) posle smene $z = re^{it}$ rastavimo na realne i imaginarne delove i zatim realne delove izjednačimo, dobijamo formulu (7) u kojoj je sada sve određeno. Teorema je dokazana.

4. Jedna verifikacija formule (7). Neka je funkcija u harmonična u krugu $|z| \leqslant r$. Tada je

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, t) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(t - \varphi) + \rho^2} dt.$$

Ova relacija poznata je kao *Poisson*-ova formula. Ona izražava vrednosti harmonične funkcije u krugu $|z| \leqslant r$ pomoću njenih rubnih vrednosti.

Specijalno, ako je $u \equiv \text{const}$, tada je

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(t - \varphi) + \rho^2} dt = 1. \tag{13}$$

Funkcija pod znakom integrala zove se *Poisson*-ovo jezgro. Samo jezgro je takođe harmonična funkcija. Želimo pokazati da se (13) može dobiti i iz formule (7).

Posmatrajmo funkciju $f(z) = e^{\frac{z+a}{z-a}}$ $(a = \rho e^{i\varphi})$. U ovom slučaju je

$$\log f(z) = \frac{z+a}{z-a}, \quad \log |f(z)| = \operatorname{Re}\left(\frac{z+a}{z-a}\right), \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{2a}{(z-a)^2},$$

te je $B_1 = 0$, $B_2 = -2a$, $B_3 = B_4 = \cdots = 0$. Zato je posle supstitucije u (7)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{z+a}{z-a}\right) dt = \log e^{-1} + \operatorname{Re} \frac{(-1) B_2}{a},$$

tj.
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\cos(t-\varphi)+\rho^2}\,dt=-1+2=1.$$

5. Primedba 1. Posebno, ako je tačka a_ν nula ili pol funkcije $f(z)$, tada je $B_{2,\nu}=B_{3,\nu}=\cdots=0$, dok je $B_{1,\nu}$ red te nule ili pola. U prvom slučaju je $B_{1,\nu}>0$, u drugom <0. Zaista, ako je tačka $z=a_\nu$, na primer, nula reda m funkcije $f(z)$, tada je

$$f(z)=(z-a_\nu)^m f_1(z), \tag{14}$$

gde je $f_1(z)\neq 0$ u okolini tačke $z=a_\nu$. Logaritmovanjem, a zatim deriviranjem jednakosti (14) imamo

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a_\nu}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)},$$

odakle se vidi da je $B_{1,\nu}=m$. Na sličan način može se pokazati da je $B_{1,\nu}=-m$ ako je tačka a_ν pol reda m funkcije $f(z)$.

Posle ovih napomena može se pokazati kako se iz formule (7) dobija formula (1). Dovoljno je, na primer, pretpostaviti da tačke a_ν nisu esencijalne singularne tačke funkcije $f(z)$, već da su njene nule. U ovom slučaju, kako je gore pokazano, brojevi $B_{1,\nu}$ označavaju redove ovih nula, dok dvostruka suma u (7) iščezava. Dakle

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{it})|\,dt=\log|f(0)|+\sum_{\nu=1}^{k}\log\frac{r}{|a_\nu|},$$

gde svaku nulu treba uzeti u obzir onoliko puta koliki je njen red.

Primedba 2. Formula (1) vredi i kad se nule i polovi nalaze na periferiji kruga $|z|\leqslant r$. Da li formula (7) važi i kad se neki esencijalni singularitet funkcije $f(z)$ nalazi na rubu kruga $|z|\leqslant r$? Kakva je razlika između formula (1) i (7)?

VI. RAČUNANJE SA MATRICAMA RAZBIJENIM NA BLOKOVE

Definicija. Ako se neka matrica A mrežom pravih koje su paralelne njenim vrstama i kolonama razloži na više matrica, kaže se da je razbijena na blokove.

Blokovi su takođe matrice.

Ako matrica A ima m vrsta, može se razbiti na m matrica-vrsta. Ako matrica A ima n kolona, ona se može razbiti na n matrica-kolona.

Posmatrajmo matricu

$$\left\|\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right\|.$$

Ona se može razbiti na blokove na sledeće načine:

$$\left\|\begin{array}{cc:cc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ \hdashline 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ \hdashline 5 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right\| \quad \text{ili} \quad \left\|\begin{array}{c:ccc:cc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ \hdashline 5 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right\|$$

$$\text{ili} \quad \left\|\begin{array}{ccc:cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1\\ \hdashline 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right\|,$$

kao i na druge načine.

Ako je matrica A tipa $m \times n$, ona se može razbiti na blokove na sledeći način

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\nu} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2\nu} \\ \vdots & & & \\ A_{\mu 1} & A_{\mu 2} & & A_{\mu\nu} \end{Vmatrix},$$

gde su blokovi A_{ik} matrice tipa

$$m_i \times n_k \qquad (m_1 + m_2 + \cdots + m_\mu = m;\ n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu = n).$$

Indeksi i i k dobijaju vrednosti:

$$i = 1, 2 \ldots, \mu; \quad k = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Množenje matrice skalarom. Ako je α skalar i A navedena matrica, tada je

$$\alpha A = \| \alpha A_{ik} \|.$$

Sabiranje matrica. Ako su matrice A i B istog tipa i ako su na isti način razbijene na blokove

$$A = \| A_{ik} \|, \quad B = \| B_{ik} \|,$$

tada je

$$A + B = \| A_{ik} + B_{ik} \|.$$

Ova formula, kao i prethodna, dokazuje se bez teškoće.

Množenje matrica. Neka su matrice

$$A = \| a_{ik} \|, \quad B = \| b_{ik} \|$$

respektivno tipa $m \times n$ i $n \times p$.

Proizvod matrica A i B je matrica tipa $m \times p$

$$AB = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right\|.$$

Ako A_i označava i-tu vrstu matrice A i ako B_k označava k-tu kolonu matrice B, tada je

$$AB = \begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{Vmatrix} \| B_1 \ B_2 \cdots B_p \|.$$

Proizvod AB može se napisati na sledeće načine:

(1) $$AB = \begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{Vmatrix} B = \begin{Vmatrix} A_1 B \\ A_2 B \\ \vdots \\ A_m B \end{Vmatrix},$$

(2) $$AB = A \| B_1 \ B_2 \cdots B_p \| = \| AB_1 \ AB_2 \cdots AB_p \|.$$

Matrici $A = \left\| \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} \right\|$ može se dati oblik $\left\| \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_\mu \end{matrix} \right\|$, gde su $M_1, M_2, \ldots, M_\mu$ matrice tipa

$$m_1 \times n, \; m_2 \times n, \; \ldots, \; m_\mu \times n \qquad (m_1 + m_2 + \cdots + m_\mu = m).$$

Ustvari, blok M_1 sastavljen je od m_1 ($\leqslant m$) prvih vrsta matrice A, blok M_2 od m_2 ($\leqslant m$) narednih vrsta matrice $A, \ldots$, blok M_μ od m_μ ($\leqslant m$) poslednjih vrsta matrice A.

Na osnovu formule (1) neposredno se dobija

$$\left\| \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_\mu \end{matrix} \right\| B = \left\| \begin{matrix} M_1 B \\ M_2 B \\ \vdots \\ M_\mu B \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

jer je, na primer,

$$M_1 B = \left\| \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{m_1} \end{matrix} \right\| B = \left\| \begin{matrix} A_1 B \\ A_2 B \\ \vdots \\ A_{m_1} B \end{matrix} \right\|,$$

$$M_2 B = \left\| \begin{matrix} A_{m_1+1} \\ A_{m_1+2} \\ \vdots \\ A_{m_2} \end{matrix} \right\| B = \left\| \begin{matrix} A_{m_1+1} B \\ A_{m_1+2} B \\ \vdots \\ A_{m_2} B \end{matrix} \right\|,$$

itd.

Matrica $B = \| B_1 \; B_2 \ldots B_p \|$ može se napisati u obliku $\| N_1 \; N_2 \ldots N_\nu \|$, gde su $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ matrice tipa

$$n \times p_1, \; n \times p_2, \; \ldots, \; n \times p_\nu \qquad (p_1 + p_2 + \cdots + p_\nu = p).$$

Na osnovu formule (2) neposredno se dobija

$$A \, \| N_1 \; N_2 \cdots N_\nu \| = \| AN_1 \; AN_2 \cdots AN_\nu \|. \tag{4}$$

Dokazaćemo sada da važi formula

$$AB = \| M_1 \; M_2 \cdots M_r \| \left\| \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_r \end{matrix} \right\| = M_1 N_1 + M_2 N_2 + \cdots + M_r N_r, \tag{5}$$

gde su $M_1, M_2, \ldots, M_r$ matrice tipa

$$m \times n_1, \; m \times n_2, \; \ldots, \; m \times n_r \qquad (n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n)$$

i $N_1, N_2, \ldots, N_r$ matrice tipa

$$n_1 \times p, \; n_2 \times p, \; \ldots, \; n_r \times p.$$

Pokazaćemo najpre da je formula (5) tačna za $r=2$, tj. da je

$$\|M_1\ M_2\| \left\| \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix} \right\| = M_1 N_1 + M_2 N_2, \tag{6}$$

gde su M_1 i M_2 matrice tipa $m \times n_1$ i $m \times n_2$ $(n_1+n_2=n)$, a matrice N_1 i N_2 tipa $n_1 \times p$ i $n_2 \times p$.

U matrici

$$A = \|M_1\ M_2\| = \left\| \begin{array}{cccc:ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} & a_{1,s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{ms} & a_{m,s+1} & & a_{mn} \end{array} \right\|$$

i-ta vrsta je

$$\| a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{is} \quad a_{i,s+1} \quad \cdots \quad a_{in} \| \qquad (n_1=s).$$

U matrici

$$B = \left\| \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \\ b_{s1} & & b_{sp} \\ \hdashline b_{s+1,1} & & b_{s+1,p} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & & b_{np} \end{array} \right\|$$

k-ta kolona je matrica $\left\| \begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{sk} \\ b_{s+1,k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix} \right\|$.

Na mestu (i, k) u proizvodu AB nalazi se element

$$(a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{is} b_{sk}) + (a_{i,s+1} b_{s+1,k} + \cdots + a_{in} b_{nk}). \tag{7}$$

Na mestu (i, k) u proizvodu $M_1 N_1$ nalazi se element

$$a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{is} b_{sk}. \tag{8}$$

Na mestu (i, k) u proizvodu $M_2 N_2$ nalazi se element

$$a_{i,s+1} b_{s+1,k} + \cdots + a_{in} b_{nk}. \tag{9}$$

Poređenjem izraza (7), (8), (9) zaključuje se da je formula (6) zaista tačna.

Pretpostavimo sada da je formula (5) tačna za $r-1$. Napišimo matrice A i B u obliku

$$\|M_1\ M^*\| \quad \text{i} \quad \left\| \begin{matrix} N_1 \\ N^* \end{matrix} \right\|,$$

gde su M^* i N^* matrice

$$M^* = \|M_2\ M_3\ \cdots\ M_r\|, \quad N^* = \left\| \begin{matrix} N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ N_r \end{matrix} \right\|.$$

Prema dokazanoj formuli (6) biće

$$\begin{Vmatrix} M_1 & M^* \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} N_1 \\ N^* \end{Vmatrix} = M_1 N_1 + M^* N^*.$$

Prema induktivnoj hipotezi važi relacija

$$M^* N^* = \begin{Vmatrix} M_2 & M_3 & \cdots & M_r \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ N_r \end{Vmatrix} = M_2 N_2 + M_3 N_3 + \cdots + M_r N_r,$$

te je

$$\begin{Vmatrix} M_1 & M_2 & \cdots & M_r \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_r \end{Vmatrix} = M_1 N_1 + M_2 N_2 + \cdots + M_r N_r.$$

Ovim je induktivni dokaz formule (5) završen.

Ostaje još da se dokaže opšti slučaj. Neka je matrica A razbijena na blokove na sledeći način

$$A = \begin{Vmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1\nu} \\ M_{21} & M_{22} & & M_{2\nu} \\ \vdots & & & \\ M_{\mu 1} & M_{\mu 2} & & M_{\mu\nu} \end{Vmatrix},$$

gde su blokovi respektivno tipa

$$\begin{array}{cccc} m_1 \times n_1 & m_1 \times n_2 & \cdots & m_1 \times n_\nu \\ m_2 \times n_1 & m_2 \times n_2 & & m_2 \times n_\nu \\ \vdots & & & \\ m_\mu \times n_1 & m_\mu \times n_2 & & m \quad \times n_\nu \end{array}$$

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_\mu = m; \ n_1 + n_2 + \cdots n_\nu = n).$$

Neka je matrica B razbijena na blokove na sledeći način:

$$B = \begin{Vmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1\lambda} \\ N_{21} & N_{22} & & N_{2\lambda} \\ \vdots & & & \\ N_{\nu 1} & N_{\nu 2} & & N_{\nu\lambda} \end{Vmatrix}.$$

gde su blokovi respektivno tipa

$$\begin{array}{cccc} n_1 \times p_1 & n_1 \times p_2 & \cdots & n_1 \times p_\lambda \\ n_2 \times p_1 & n_2 \times p_2 & & n_2 \times p_\lambda \\ \vdots & & & \\ n_\nu \times p_1 & n_\nu \times p_2 & & n_\nu \times p_\lambda \end{array}$$

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_\lambda = p).$$

Pokazaćemo da je

$$AB = \left\| \sum_{j=1}^{\nu} M_{ij} N_{jk} \right\|, \tag{10}$$

gde je

$$i = 1, 2, \ldots, \mu; \quad k = 1, 2, \ldots, \lambda.$$

Radi toga napišimo matricu A u obliku

$$\begin{Vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_\mu \end{Vmatrix},$$

gde je

$$M_1 = \| M_{11} \; M_{12} \ldots M_{1\nu} \|, \quad M_2 = \| M_{21} \; M_{22} \ldots M_{2\nu} \|, \ldots,$$

$$M_\mu = \| M_{\mu 1} \; M_{\mu 2} \ldots M_{\mu\nu} \|$$

(matrice $M_1, M_2, \ldots, M_\mu$ su tipa $m_1 \times n, \; m_2 \times n, \; \ldots, \; m_\mu \times n$).

Na osnovu formule (3) je

$$\begin{Vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_\mu \end{Vmatrix} B = \begin{Vmatrix} M_1 B \\ M_2 B \\ \vdots \\ M_\mu B \end{Vmatrix}.$$

Posmatrajmo B u obliku

$$\| N_1 \; N_2 \; \ldots \; N_\lambda \|,$$

gde su $N_1, N_2, \ldots, N_\lambda$ matrice

$$N_1 = \begin{Vmatrix} N_{11} \\ N_{21} \\ \vdots \\ N_{\nu 1} \end{Vmatrix}, \quad N_2 = \begin{Vmatrix} N_{12} \\ N_{22} \\ \vdots \\ N_{\nu 2} \end{Vmatrix}, \quad \ldots, \quad N_\lambda = \begin{Vmatrix} N_{1\lambda} \\ N_{2\lambda} \\ \vdots \\ N_{\nu\lambda} \end{Vmatrix}$$

tipa $n \times p_1, \; n \times p_2, \; \ldots, \; n \times p_\nu$.

Na osnovu formule (4) dobija se

$$\begin{Vmatrix} M_1 B \\ M_2 B \\ \vdots \\ M_\nu B \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M_1 N_1 & M_1 N_2 & \cdots & M_1 N_\lambda \\ M_2 N_1 & M_2 N_2 & & M_2 N_\lambda \\ \vdots & & & \\ M_\nu N_1 & M_\nu N_2 & & M_\nu N_\lambda \end{Vmatrix}.$$

Prema formuli (5) biće

$$M_i N_k = \| M_{i1} \; M_{i2} \; \cdots \; M_{i\nu} \| \begin{Vmatrix} N_{1k} \\ N_{2k} \\ \vdots \\ N_{\nu k} \end{Vmatrix} = M_{i1} N_{1k} + M_{i2} N_{2k} + \cdots + M_{i\nu} N_{\nu k}.$$

Ovim je završen dokaz formule (10).

VII. POJAM O LINEARNOM PROSTORU

Pod *brojnim poljem* naziva se skup brojeva u kome se jednoznačno mogu izvršiti operacije: sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje brojem različitim od nule.

Primeri brojnih polja su:
Skup svih racionalnih brojeva;
Skup svih realnih brojeva;
Skup svih kompleksnih brojeva;
Skup svih brojeva oblika $a+b\sqrt{-1}$, gde su a i b racionalni brojevi;
Skup svih brojeva oblika $a+b\sqrt{2}$, gde su a i b racionalni brojevi.

Skup L ma kakvih elemenata $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ naziva se *linearnim* ili *vektorskim prostorom* nad brojnim poljem K, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1. Svakom paru elemenata $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ skupa L jednoznačno odgovara jedan element istog skupa koji se dobija operacijom sabiranja. Rezultat operacije označava se sa $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$;

2. Svakom elementu $\boldsymbol{a}$ skupa L i svakom elementu k brojnog polja K jednoznačno odgovara jedan element skupa L koji se dobija operacijom množenja. Rezultat operacije označava se sa $k\cdot\boldsymbol{a}$ ili $k\boldsymbol{a}$.

3. Operacije sabiranja i množenja zadovoljavaju uslove:

I. Ako su $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ tri ma koja elementa skupa L, važi:

1° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

2° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

II. U skupu L postoji *nula*-element $\mathbf{0}$ takav da je

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a} \text{ za svako } \boldsymbol{a} \text{ iz skupa } L.$$

III. Svakom elementu $\boldsymbol{a}$ skupa L odgovara element $-\boldsymbol{a}$ skupa L takav da je

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}.$$

IV. Za ma koje elemente $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ skupa L i za ma koja dva broja k_1 i k_2 iz polja K važe uslovi:

1° $k_1(k_2\boldsymbol{a})=(k_1k_2)\boldsymbol{a}$;

2° $(k_1+k_2)\boldsymbol{a}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{a}$;

3° $k_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k_1\boldsymbol{a}+k_1\boldsymbol{b}$.

V. Za ma koji element $\boldsymbol{a}$ skupa L važi

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

Uobičajeno je da se svaki element skupa L naziva *vektorom*.

Znak jednakosti koji je upotrebljen pri formulisanju navedenih aksioma linearnog prostora ima sledeće značenje:

Jednakost $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ znači da element $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ i element $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ pretstavljaju jedan isti element.

Dakle, ovde je jednakost *čisto logično sredstvo* i ona ima osobine *refleksivnosti*, *simetrije* i *tranzitivnosti*.

Primeri vektorskih prostora. 1° Skup svih vektora od n dimenzija u odnosu na sabiranje vektora i množenje vektora skalarom pretstavlja vektorski prostor.

2° Skup svih polinoma po λ čiji stepen ne prelazi n i čiji su koeficijenti iz polja K pretstavlja linearni prostor u odnosu na obično sabiranje polinoma i obično množenje polinoma brojem iz polja K.

Skup svih polinoma po λ čiji je stepen tačno n ne pretstavlja linearni prostor u odnosu na iste operacije.

3° Skup svih matrica $\|a_{ik}\|$ tipa $m\times n$ nad poljem $K\,(a_{ik}\in K)$ pretstavlja linearni prostor nad brojnim poljem K u odnosu na operaciju sabiranja matrica i množenja matrica brojem iz polja K.

OSOBINE OPERACIJA NAD VEKTORIMA

1° Ako je $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, tada je $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

2° Ako je $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, tada je $k\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ $(k\in K)$.

3° Zbir od proizvoljnog broja elemenata iz skupa L ne zavisi od reda po kome se vrši sabiranje ovih elemenata.

4° Postoji jedan i samo jedan vektor-nula koji ima osobinu

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a} \quad \text{za svako} \quad \boldsymbol{a}\in L.$$

Dokaz. Po aksiomi je

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}.$$

Neka $\boldsymbol{0}'$ ima istu osobinu, tj. neka je

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}'=\boldsymbol{a}.$$

Kako je $\boldsymbol{0}\in L$ i $\boldsymbol{0}'\in L$, važi

$$\boldsymbol{0}'+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}',$$

$$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}'=\boldsymbol{0},$$

što znači da je

$$\boldsymbol{0}'=\boldsymbol{0}.$$

5° Za svaki element $\boldsymbol{a}\,(\in L)$ postoji jedan i samo jedan suprotni element $-\boldsymbol{a}\,(\in L)$ za koji je

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji još jedan takav element $(-\boldsymbol{a})'\,(\in L)$ da je

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})'=\boldsymbol{0}.$$

Na osnovu aksioma koje su napred formulisane važe relacije:

$$\begin{aligned}(-\boldsymbol{a})&=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{0}=(-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})')\\&=((-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})'\\&=(\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}))+(-\boldsymbol{a})'\\&=\boldsymbol{0}+(-\boldsymbol{a})'\\&=(-\boldsymbol{a})'+\boldsymbol{0}\\&=(-\boldsymbol{a})'.\end{aligned}$$

Ovim je osobina 5° dokazana.

6° $0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

Dokaz.

$$\boldsymbol{a}+0\cdot\boldsymbol{a}=1\cdot\boldsymbol{a}+0\cdot\boldsymbol{a}=(1+0)\,\boldsymbol{a}=1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

Takvu osobinu ima samo nula-element, dakle $0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. Prema tome, nema opasnosti da se broj nula i vektor nula pomešaju.

NUMERIČKE TABLICE

LEGENDRE-OVI POLINOMI

$x \equiv P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,00	−0,5000	+0,0000	+0,3750	+0,0000	−0,3125	−0,0000
0,05	−0,4962	−0,0747	+0,3657	+0,0927	−0,2962	−0,1069
0,10	−0,4850	−0,1475	+0,3379	+0,1788	−0,2488	−0,1995
0,15	−0,4662	−0,2166	+0,2928	+0,2523	−0,1746	−0,2649
0,20	−0,4400	−0,2800	+0,2320	+0,3075	−0,0806	−0,2935
0,25	−0,4062	−0,3359	+0,1577	+0,3397	+0,0243	−0,2799
0,30	−0,3650	−0,3825	+0,0729	+0,3454	+0,1292	−0,2241
0,35	−0,3162	−0,4178	−0,0187	+0,3225	+0,2225	−0,1318
0,40	−0,2600	−0,4400	−0,1130	+0,2706	+0,2926	−0,0146
0,45	−0,1962	−0,4472	−0,2050	+0,1917	+0,3290	+0,1106
0,50	−0,1250	−0,4375	−0,2891	+0,0898	+0,3232	+0,2231
0,55	−0,0462	−0,4091	−0,3590	−0,0282	+0,2708	+0,3007
0,60	+0,0400	−0,3600	−0,4080	−0,1526	+0,1721	+0,3226
0,65	+0,1338	−0,2884	−0,4284	−0,2705	+0,0347	+0,2737
0,70	+0,2350	−0,1925	−0,4121	−0,3652	+0,1253	+0,1502
0,75	+0,3438	−0,0703	−0,3501	−0,4164	−0,2808	−0,0342
0,80	+0,4600	+0,0800	−0,2330	−0,3995	−0,3918	−0,2397
0,85	+0,5838	+0,2603	−0,0506	−0,2857	−0,4030	−0,3913
0,90	+0,7150	+0,4725	+0,2079	−0,0411	−0,2412	−0,3678
0,95	+0,8538	+0,7184	+0,5541	+0,3727	+0,1875	+0,0112
1,00	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000

Legendre-ov polinom definisan je izrazom

$$P_n(x) \equiv \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{k}{n} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k} \equiv \frac{1}{n!\,2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n .$$

$P_0(x) \equiv 1$; $\qquad P_1(x) \equiv x$;

$P_2(x) \equiv \frac{1}{2}(3x^2-1)$; $\qquad P_3(x) \equiv \frac{1}{2}(5x^3-3x)$;

$P_4(x) \equiv \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$; $\qquad P_5(x) \equiv \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$;

$P_6(x) \equiv \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$; $\qquad P_7(x) \equiv \frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$.

BESSEL-OVE FUNKCIJE INDEKSA 0 i 1

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$N_0(x)$	$N_1(x)$
0	+1	0	—∞	—∞
0,1	+0,99750	+0,04994	—1,53424	—6,45895
0,2	+0,99002	+0,09950	—1,08111	—3,32382
0,3	+0,97763	+0,14832	—0,80727	—2,29310
0,4	+0,96040	+0,19603	—0,60602	—1,78087
0,5	+0,93847	+0,24227	—0,44452	—1,47147
0,6	+0,91200	+0,28670	—0,30851	—1,26039
0,7	+0,88120	+0,32899	—0,19066	—1,10325
0,8	+0,84629	+0,36884	—0,08680	—0,97814
0,9	+0,80752	+0,40595	+0,00563	—0,87313
1,0	+0,76520	+0,44005	+0,08826	—0,78121
1,2	+0,67113	+0,49829	+0,22803	—0,62114
1,4	+0,56686	+0,54195	+0,33790	—0,47915
1,6	+0,45540	+0,56990	+0,42043	—0,34758
1,8	+0,33999	+0,58152	+0,47743	—0,22366
2,0	+0,22389	+0,57672	+0,51038	—0,10703
2,2	+0,11036	+0,55596	+0,52078	+0,00149
2,4	+0,00251	+0,52019	+0,51041	+0,10049
2,6	—0,09680	+0,47082	+0,48133	+0,18836
2,8	—0,18504	+0,40971	+0,43592	+0,26355
3,0	—0,26005	+0,33906	+0,37685	+0,32467

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$N_0(x)$	$N_1(x)$
3,2	—0,32019	+0,26134	+0,30705	+0,37071
3,4	—0,36430	+0,17923	+0,22962	+0,40102
3,6	—0,39177	+0,09547	+0,14771	+0,41539
3,8	—0,40256	+0,01282	+0,06450	+0,41411
4,0	—0,39715	-0,06604	—0,01694	+0,39793
4,2	—0,37656	—0,13865	—0,09375	+0,36801
4,4	—0,34226	—0,20278	—0,16334	+0,32597
4,6	—0,29614	—0,25656	—0,22346	+0,27375
4,8	—0,24043	—0,29850	—0,27230	+0,21357
5,0	—0,17760	—0,32758	—0,30852	+0,14786
5,5	—0,00684	—0,34144	—0,33948	—0,02376
6,0	+0,15064	—0,27668	—0,28819	—0,17501
6,5	+0,26009	—0,15384	—0,17324	—0,27409
7,0	+0,30008	—0,00468	—0,02595	—0,30267
7,5	+0,26634	+0,13525	+0,11731	—0,25913
8,0	+0,17165	+0,23464	+0,22352	—0,15806
8,5	+0,04194	+0,27312	+0,27021	+0,02617
9,0	—0,09033	+0,24531	+0,24994	+0,10431
9,5	—0,19393	+0,16126	+0,17121	+0,20318
10	—0,24594	+0,04347	+0,05567	+0,24902

Bessel-ova funkcija I vrste

$$J_\nu(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

Bessel-ova funkcija II vrste

$$N_\nu(x) \equiv \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \qquad (\nu \neq \text{ceo broj})$$

$$N_n(x) \equiv \lim_{\nu\to n} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \qquad (n = \text{ceo broj}).$$

BESSEL-OVE FUNKCIJE INDEKSA 2, 3, 4

x	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$N_2(x)$	$N_3(x)$	$N_4(x)$	x
0,1	+0,00125	+0,00002	+0,00000	−127,64478	−5099,33238	−305832,29	0,1
0,2	+0,00498	+0,00017	+0,00000	−32,15714	−639,81907	−19162,41	0,2
0,3	+0,01117	+0,00056	+0,00002	−14,48009	−190,77448	−3801,01	0,3
0,4	+0,01973	+0,00132	+0,00007	−8,29833	−81,20248	−1209,73	0,4
0,5	+0,03060	+0,00256	+0,00016	−5,44137	−42,05949	−499,27	0,5
0,6	+0,04367	+0,00440	+0,00033	−3,89279	−24,69157	−243,02	0,6
0,7	+0,05879	+0,00693	+0,00061	−2,96148	−15,81948	−132,634	0,7
0,8	+0,07582	+0,01025	+0,00103	−2,35856	−10,81465	−78,751	0,8
0,9	+0,09459	+0,01443	+0,00164	−1,94591	−7,77536	−49,890	0,9
1	+0,11490	+0,01956	+0,00248	−1,65068	−5,82152	−33,278	1
1,2	+0,15935	+0,03287	+0,00502	−1,26331	−3,58990	−16,68619	1,2
1,4	+0,20736	+0,05050	+0,00906	−1,02239	−2,44197	−9,44319	1,4
1,6	+0,25697	+0,07252	+0,01500	−0,85490	−1,78967	−5,85636	1,6
1,8	+0,30614	+0,09880	+0,02320	−0,72595	−1,38955	−3,90590	1,8
2	+0,35283	+0,12894	+0,03400	−0,61741	−1,12778	−2,76594	2
2,5	+0,44606	+0,21660	+0,07378	−0,38134	−0,75606	−1,43320	2,5
3	+0,48609	+0,30906	+0,13203	−0,16040	−0,53854	−0,91668	3
3,5	+0,45863	+0,38677	+0,20441	+0,04537	−0,35834	−0,65966	3,5
4	+0,36413	+0,43017	+0,28113	+0,21590	−0,18202	−0,48894	4
4,5	+0,21785	+0,42470	+0,34842	+0,32848	−0,00901	−0,34050	4,5
5	+0,04657	+0,36483	+0,39123	+0,36766	+0,14627	−0,19214	5
6	−0,24287	+0,11477	+0,35764	+0,22986	+0,32825	+0,09839	6
7	−0,30142	−0,16756	+0,15780	−0,06053	+0,26808	+0,29031	7
8	−0,11299	−0,29113	+0,10536	−0,26304	+0,02654	+0,28294	8
9	+0,14485	−0,18093	−0,26547	−0,22676	−0,20510	+0,09003	9
10	+0,25463	+0,05838	−0,21960	−0,00587	−0,25136	−0,14495	10

Modifikovana *Bessel*-ova funkcija I vrste

$$I_\nu(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

Modifikovana *Bessel*-ova funkcija II vrste

$$K_\nu(x) \equiv \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi} \qquad (\nu \neq \text{ceo broj})$$

$$K_n(x) \equiv \frac{\pi}{2} \lim_{\nu \to n} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi} \qquad (n = \text{ceo broj}).$$

MODIFIKOVANE BESSEL-OVE FUNKCIJE INDEKSA 0 i 1

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$	x
0,0	1,0000	0,0000			0,0
0,1	1,0025	0,0501	2,4271	9,8538	0,1
0,2	1,0100	0,1005	1,7527	4,7760	0,2
0,3	1,0226	0,1517	1,3725	3,0560	0,3
0,4	1,0404	0,2040	1,1145	2,1844	0,4
0,5	1,0635	0,2579	0,9244	1,6564	0,5
0,6	1,0920	0,3137	0,7775	1,3028	0,6
0,7	1,1263	0,3719	0,6605	1,0503	0,7
0,8	1,1665	0,4329	0,5653	0,8618	0,8
0,9	1,2130	0,4971	0,4867	0,7165	0,9
1,0	1,2661	0,5652	0,4210	0,6019	1,0
1,1	1,3262	0,6375	0,3656	0,5098	1,1
1,2	1,3937	0,7147	0,3185	0,4346	1,2
1,3	1,4693	0,7973	0,2782	0,3725	1,3
1,4	1,5534	0,8861	0,2437	0,3208	1,4
1,5	1,6467	0,9817	0,2138	0,2774	1,5
1,6	1,7500	1,0848	0,1880	0,2406	1,6
1,7	1,864	1,1963	0,1655	0,2094	1,7
1,8	1,990	1,3172	0,1459	0,1826	1,8
1,9	2,128	1,4482	0,1288	0,1597	1,9

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$	x
2,0	2,280	1,590	0,1139	0,1399	2,0
2,2	2,629	1,914	0,0893	0,1079	2,2
2,4	3,049	2,298	0,0702	0,0837	2,4
2,6	3,553	2,755	0,0554	0,0653	2,6
2,8	4,157	3,301	0,0438	0,0511	2,8
3,0	4,881	3,953	0,0347	0,0402	3,0
3,2	5,747	4,734	0,0276	0,0316	3,2
3,4	6,785	5,670	0,0220	0,0250	3,4
3,6	8,028	6,793	0,0175	0,0198	3,6
3,8	9,517	8,140	0,0140	0,0157	3,8
4,0	11,302	9,759	0,0112	0,0125	4,0
4,2	13,442	11,706	0,0089	0,0099	4,2
4,4	16,010	14,046	0,0071	0,0079	4,4
4,6	19,09	16,86	0,0057	0,0063	4,6
4,8	22,79	20,25	0,0046	0,0057	4,8
5,0	27,24	24,34	0,0037	0,0040	5,0

NULE FUNKCIJA $J_0(x)$ i $J_1(x)$

$$J_0\left(x_s^{(0)}\right)=0, \qquad J_1\left(x_s^{(1)}\right)=0$$

s	$x_s^{(0)}$	$J_1\left(x_s^{(0)}\right)$	$x_s^{(1)}$	$J_0\left(x_s^{(1)}\right)$	s
1	2,404825	+0,519147	3,831706	−0,402759	1
2	5,520078	−0,340265	7,015587	+0,300116	2
3	8,653728	+0,271452	10,173468	−0,249704	3
4	11,791534	−0,232460	13,323692	+0,218359	4
5	14,930918	+0,206546	16,470630	−0,196465	5
6	18,071064	−0,187729	19,615859	+0,180063	6
7	21,211637	+0,173266	22,760084	−0,167185	7
8	24,352471	−0,161701	25,903672	+0,156725	8
9	27,493479	+0,152181	29,046829	−0,148011	9
10	30,634606	−0,144166	32,189680	+0,140606	10
11	33,775820	+0,137297	35,332308	−0,134211	11
12	36,917098	−0,131325	38,474766	+0,128617	12
13	40,058426	+0,126069	41,617094	−0,123668	13
14	43,199792	−0,121399	44,759319	+0,119250	14
15	46,341188	+0,117211	47,901461	−0,115274	15
16	49,482610	−0,113429	51,043535	+0,111670	16
17	52,624052	+0,109991	54,185554	−0,108385	17
18	55,765511	−0,106848	57,327525	+0,105374	18
19	58,906984	+0,103960	60,469458	−0,102601	19
20	62,048469	−0,101293	63,611357	+0,100035	20

Prema članku; N. D. Davis — W. R. Kirkham *(Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 33, p. 760—772, 1927).

NULE FUNKCIJE $J_n(x)$

$$J_n\left(x_s^{(n)}\right) = 0$$

$s \diagdown n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2,405	3,832	5,136	6,380	7,588	8,772	9,936	11,086	12,225	13,354	14,476
2	5,520	7,016	8,417	9,761	11,065	12,339	13,589	14,821	16.038	17,241	18,433
3	8,654	10,173	11,620	13,015	14,373	15,700	17,004	18,288	19,554	20,807	22,047
4	11,792	13,324	14,796	16,223	17,616	18,980	20,321	21,642	22,945	24,234	25,509
5	14,931	16,471	17,960	19,409	20,827	22,218	23,586	24,935	26,267	27,584	28,887
6	18,071	19,616	21,117	22,583	24,019	25,430	26,820	28,191	29,546	30.885	32,212
7	21,212	22,760	24,270	25,748	27,199	28,627	30,034	31,423	32,796	34,154	35,500
8	24,352	25,904	27,420	28,908	30,371	31,812	33,233	34,637	36,026	37,400	38,762
9	27,493	29,047	30,569	32,065	33,537	34,989	36,422	37,839	39,240	40,628	42,004
10	30,635	32,190	33,716	35,219	36,699	38,160	39,603	41,031	42,444	43,844	45,232

NULE FUNKCIJE $J_n'(x)$

$$J_n\left(x_s^{(n)}\right) = 0 \quad \left(x_s^{(n)} < 25\right)$$

$s \diagdown n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,000	1,841	3,054	4,201	5,318	6,416	7,501	8,578	9,647	10,711	11,771
2	3,832	5,331	6,706	8,015	9,282	10,520	11,735	12,932	14,116	15,287	16,448
3	7,016	8,536	9,970	11,346	12,682	13,987	15,262	16,529	17,774	19,005	20,223
4	10,173	11,706	13,170	14,586	15,964	17,313	18,637	19,942	21,229	22,501	23,761
5	13,324	14,864	16,348	17,789	19,196	20,576	21,932	23,268	24,587		
6	16,471	18,016	19,513	20,972	22,401	23,803					
7	19,616	21,164	22,672	24,147							
8	22,760	24,311									
9	25,904										

Prema članku: D. B. Smith—L. M. Rogers—E. H. Traub *(Journal of Franklin Institute*, t. 237, 1944, p. 300—302).

NULE FUNKCIJE $N_n(x)$

$$N_n\left(x_s^{(n)}\right) = 0$$

$s \diagdown n$	0	1	2	3	4	5	$n \diagup s$
1	0,89358	2,19714	3,384	4,527	5,645	6,747	1
2	3,95768	5,42968	6,794	8,098	9,362	10,597	2
3	7,08605	8,59601	10.023	11,396	12,730	14,034	3
4	10,22234	11,74915	13,210	14,623	16,000	17,347	4
5	13,36110	14,89744	16,379	17,818	19,224	20,603	5
6	16,50092	18,04340	19,539	20,997	22,425	23,827	6
7	19,64131	21,18807	22,694	24,166	25,610	27,030	7
8	22,78203	24,33194	25,846	27,329	28,786	30,220	8
9	25,92296	27,47529	28,995	30,487	31.955	33,401	9
10	29,06403	30,61829	32,143	33,642	35,119	36,575	10

KELVIN-OVE FUNKCIJE

x	ber x	bei x	x	ber x	bei x
0,0	+1,0000	+0,0000			
0,1	1,0000	0,0025	2,6	+0,3001	+1,5569
0,2	1,0000	0,0100	2,7	0,1887	1,6557
0,3	0,9999	0,0225	2,8	+0,0651	1,7529
0,4	0,9996	0,0400	2,9	−0,0714	1,8472
0,5	0,9990	0,0625	3,0	0,2214	1,9376
0,6	0,9980	0,0900	3,1	0,3855	2,0228
0,7	0,9962	0,1224	3,2	0,5644	2,1016
0,8	0,9936	0,1599	3,3	0,7584	2,1723
0,9	0,9898	0,2023	3,4	0,968	2,2334
1,0	0,9844	0,2496	3,5	1,194	2,2832
1,1	0,9771	0,3017	3,6	1,435	2,3199
1,2	0,9671	0,3587	3,7	1,693	2,3413
1,3	0,9554	0,4204	3,8	1,967	2,3454
1,4	0,9401	0,4867	3,9	2,258	2,3300
1,5	0,9211	0,5576	4,0	2,563	2,2927
1,6	0,8979	0,6327	4,1	2,884	2,2309
1,7	0,8700	0,7120	4,2	3,219	2,142
1,8	0,8367	0,7953	4,3	3,568	2,024
1,9	0,7975	0,8821	4,4	3,928	1,873
2,0	0,7517	0,9723	4,5	4,299	1,686
2,1	0,6987	1,0654	4,6	4,678	1,461
2,2	0,6377	1,1610	4,7	5,064	1,195
2,3	0,5680	1,2585	4,8	5,453	0,884
2,4	0,4890	1,3575	4,9	5,843	0,525
2,5	+0,4000	+1,4572	5,0	−6,230	+0,116

Kelvin-ove funkcije $\mathrm{ber}_\nu\, x$, $\mathrm{bei}_\nu\, x$, $\mathrm{ker}_\nu\, x$, $\mathrm{kei}_\nu\, x$ definisane su relacijama:

$$\mathrm{ber}_\nu\, x + i\, \mathrm{bei}_\nu\, x = I_\nu \left(x\, e^{\frac{3\pi i}{4}} \right),$$

$$\mathrm{ker}_\nu\, x + i\, \mathrm{kei}_\nu\, x = K_\nu \left(x\, e^{\frac{3\pi i}{4}} \right).$$

Za $\nu = 0$ funkcije $\mathrm{ber}_\nu\, x$ i $\mathrm{bei}_\nu\, x$ imaju oblike:

$$\mathrm{ber}_0\, x \equiv \mathrm{ber}\, x \equiv 1 - \frac{(x/2)^4}{(2\,!)^2} + \frac{(x/2)^8}{(4\,!)^2} - \cdots$$

$$\mathrm{bei}_0\, x \equiv \mathrm{bei}\, x \equiv \frac{(x/2)^2}{(1\,!)^2} - \frac{(x/2)^6}{(3\,!)^2} + \cdots$$

x	ber x	bei x	ker x	kei x	x
1	$+0{,}9844$	$+0{,}2496$	$+0{,}2867$	$-0{,}4950$	1
2	$+0{,}7517$	$+0{,}9723$	$-0{,}04166$	$-0{,}2024$	2
3	$-0{,}2214$	$+1{,}938$	$-0{,}06703$	$-0{,}05112$	3
4	$-2{,}563$	$+2{,}293$	$-0{,}03618$	$+0{,}002198$	4
5	$-6{,}230$	$+0{,}1160$	$-0{,}01151$	$+0{,}01119$	5
6	$-8{,}858$	$-7{,}335$	$-10^{-4}\cdot 6{,}531$	$+0{,}007216$	6
7	$-3{,}633$	$-21{,}24$	$+10^{-3}\cdot 1{,}922$	$+0{,}002700$	7
8	$+20{,}97$	$-35{,}02$	$+10^{-3}\cdot 1{,}486$	$+10^{-4}\cdot 3{,}696$	8
9	$+73{,}94$	$-24{,}71$	$+10^{-4}\cdot 6{,}372$	$-10^{-4}\cdot 3{,}192$	9
10	$+138{,}8$	$+56{,}37$	$+10^{-4}\cdot 1{,}295$	$-10^{-4}\cdot 3{,}075$	10
11	$+133{,}0$	$+257{,}2$	$-10^{-5}\cdot 4{,}779$	$-10^{-4}\cdot 1{,}495$	11
12	$-128{,}5$	$+547{,}0$	$-10^{-5}\cdot 6{,}308$	$-10^{-5}\cdot 3{,}899$	12
13	$-882{,}7$	$+646{,}6$	$-10^{-5}\cdot 3{,}474$	$+10^{-6}\cdot 5{,}387$	13
14	-2131	$-160{,}9$	$-10^{-5}\cdot 1{,}088$	$+10^{-5}\cdot 1{,}268$	14
15	-2967	-2953	$-10^{-8}\cdot 1{,}514$	$+10^{-6}\cdot 7{,}963$	15
16	$-659{,}5$	-8191	$+10^{-6}\cdot 2{,}466$	$+10^{-6}\cdot 2{,}895$	16
17	$+9484$	$-10^{4}\cdot 1{,}309$	$+10^{-6}\cdot 1{,}797$	$+10^{-7}\cdot 2{,}861$	17
18	$+10^{4}\cdot 3{,}096$	$-10^{3}\cdot 7{,}454$	$+10^{-7}\cdot 7{,}438$	$-10^{-7}\cdot 4{,}555$	18
19	$10^{4}\cdot 5{,}625$	$+10^{4}\cdot 2{,}804$	$+10^{-7}\cdot 1{,}293$	$-10^{-7}\cdot 3{,}982$	19
20	$+10^{4}\cdot 4{,}749$	$+10^{5}\cdot 1{,}848$	$-10^{-8}\cdot 7{,}715$	$-10^{-7}\cdot 1{,}859$	20
21	$-10^{5}\cdot 7{,}616$	$+10^{5}\cdot 2{,}337$	$-10^{-8}\cdot 8{,}636$	$-10^{-8}\cdot 4{,}388$	21
22	$-10^{4}\cdot 4{,}155$	$+10^{5}\cdot 2{,}539$	$-10^{-8}\cdot 4{,}535$	$+10^{-8}\cdot 1{,}097$	22
23	$-10^{5}\cdot 9{,}536$	$-10^{5}\cdot 1{,}527$	$-10^{-8}\cdot 1{,}320$	$+10^{-8}\cdot 1{,}824$	23
24	$-10^{6}\cdot 1{,}242$	$-10^{6}\cdot 1{,}460$	$+10^{-10}\cdot 8{,}786$	$+10^{-8}\cdot 1{,}083$	24
25	$+10^{3}\cdot 9{,}798$	$-10^{6}\cdot 3{,}809$	$+10^{-9}\cdot 3{,}723$	$+10^{-9}\cdot 3{,}703$	25
26	$+10^{6}\cdot 4{,}936$	$-10^{6}\cdot 5{,}744$	$+10^{-9}\cdot 2{,}532$	$+10^{-10}\cdot 1{,}912$	26
27	$+10^{7}\cdot 1{,}489$	$-10^{6}\cdot 2{,}308$	$+10^{-10}\cdot 9{,}915$	$-10^{-10}\cdot 7{,}257$	27
28	$+10^{7}\cdot 2{,}553$	$+10^{7}\cdot 1{,}578$	$+10^{-10}\cdot 1{,}367$	$-10^{-10}\cdot 5{,}791$	28
29	$+10^{7}\cdot 1{,}825$	$+10^{7}\cdot 5{,}695$	$-10^{-10}\cdot 1{,}320$	$-10^{-10}\cdot 2{,}563$	29
30	$-10^{7}\cdot 4{,}612$	$+10^{8}\cdot 1{,}100$	$-10^{-10}\cdot 1{,}294$	$-10^{-10}\cdot 5{,}290$	30
∞	∞	∞	0	0	∞

NULE KELVIN-OVIH FUNKCIJA

(ber $'x = \mathrm{d}$ ber $x/\mathrm{d}x, \ldots$)

	ber $x=0$	bei $x=0$	ker $x=0$	kei $x=0$	ber $'x=0$	bei $'x=0$	ker $'x=0$	kei $'x=0$
1	2,84891	5,02622	1,71854	3,91467	6,03871	3,77320	2,66584	4,93181
2	7,23883	9,45561	6,12728	8,34422	10,51364	8,28099	7,17212	9,40405
3	11,67396	13,89349	10,56294	12,78256	14,96844	12,74215	11,63218	13,85827
4	16,11356	18,33398	15,00269	17,22314	19,41758	17,19343	16,08312	18,30717
5	20,55463	22,77544	19,44381	21,66464	23,86430	21,64114	20,53068	22,75379
6	24,99636	27,21737	23,88558	26,10660	28,30979	26,08716	24,97661	27,19922
7	29,43845	31,65958	28,32768	30,54882	32,75456	30,53225	29,42165	31,64395
8	33,88075	36,10195	32,76999	34,99120	37,19887	34,97676	33,86613	36,08823
9	38,32319	40,54444	37,21244	39,43370	41,64286	39,42090	38,31025	40,53221
10	42,76572	44,98701	41,65498	43,87627	46,08664	43,86478	42,75412	44,97598

GAMA-FUNKCIJA

x	0	2	4	6	8	x	0	2	4	6	8
1,00	1,00000	99885	99771	99657	99545	1,50	0,88623	88629	88636	88644	88651
1	0,99433	99321	99211	99101	98993	1	0,88659	88667	88676	88685	88694
2	0,98884	98777	98670	98565	98459	2	0,88704	88714	88724	88735	88746
3	0,98355	98251	98148	98046	97945	3	0,88757	88768	88780	88792	88805
4	0,97844	97744	97644	97546	97448	4	0,88818	88831	88844	88858	88872
5	0,97350	97254	97158	97063	96968	5	0,88887	88902	88917	88932	88948
6	0,96874	96781	96689	96597	96506	6	0,88964	88981	88997	89014	89031
7	0,96415	96325	96236	96148	96060	7	0,89049	89067	89085	89104	89123
8	0,95973	95886	95800	95715	95630	8	0,89142	89161	89181	89202	89222
9	0,95546	95463	95380	95298	95216	9	0,89243	89264	89285	89307	89329
1,10	0,95135	95055	94975	94896	94817	1,60	0,89352	89374	89397	89421	89444
1	0,94740	94662	94586	94509	94434	1	0,89468	89492	89517	89542	89567
2	0,94359	94285	94211	94138	94065	2	0,89592	89618	89644	89671	89697
3	0,93993	93922	93851	93781	93711	3	0,89724	89752	89779	89807	89836
4	0,93642	93573	93505	93437	93370	4	0,89864	89893	89922	89952	89982
5	0,93304	93238	93173	93108	93044	5	0,90012	90042	90073	90104	90135
6	0,92980	92917	92855	92793	92731	6	0,90167	90199	90231	90264	90296
7	0,92670	92609	92550	92490	92431	7	0,90330	90363	90397	90431	90465
8	0,92373	92315	92258	92201	92144	8	0,90500	90535	90570	90606	90642
9	0,92089	92033	91978	91924	91870	9	0,90678	90715	90752	90789	90826
1,20	0,91817	91764	91712	91660	91609	1,70	0,90864	90902	90940	90979	91018
1	0,91558	91507	91457	91408	91359	1	0,91057	91097	91137	91177	91217
2	0,91311	91263	91215	91168	91122	2	0,91258	91299	91341	91382	91424
3	0,91075	91030	90985	90940	90896	3	0,91467	91509	91552	91595	91639
4	0,90852	90809	90766	90724	90682	4	0,91683	91727	91771	91816	91861
5	0,90640	90599	90559	90519	90479	5	0,91906	91952	91998	92044	92091
6	0,90440	90401	90363	90325	90287	6	0,92137	92185	92232	92280	92328
7	0,90250	90214	90178	90142	90107	7	0,92376	92425	92474	92523	92573
8	0,90072	90037	90003	89970	89937	8	0,92623	92673	92723	92774	92825
9	0,89904	89872	89840	89809	89778	9	0,92877	92928	92980	93033	93085
1,30	0,89747	89717	89687	89658	89629	1,80	0,93138	93192	93245	93299	93353
1	0,89600	89572	89545	89517	89491	1	0,93408	93462	93517	93573	93629
2	0,89464	89438	89412	89387	89362	2	0,93685	93741	93797	93854	93912
3	0,89338	89314	89290	89267	89244	3	0,93969	94027	94085	94143	94202
4	0,89222	89199	89178	89157	89136	4	0,94261	94321	94380	94440	94501
5	0,89115	89095	89075	89056	89037	5	0,94561	94622	94683	94745	94807
6	0,89018	89000	88982	88965	88948	6	0,94869	94931	94994	95057	95120
7	0,88931	88915	88899	88884	88868	7	0,95184	95248	95312	95377	95442
8	0,88854	88839	88825	88812	88798	8	0,95507	95573	95638	95705	95771
9	0,88785	88773	88761	88749	88737	9	0,95838	95905	95972	96040	96108
1,40	0,88726	88716	88705	88695	88686	1,90	0,96177	96245	96314	96384	96453
1	0,88676	88668	88659	88651	88643	1	0,96523	96593	96664	96735	96806
2	0,88636	88628	88622	88615	88609	2	0,96877	96949	97021	97094	97167
3	0,88604	88598	88593	88589	88584	3	0,97240	97313	97387	97461	97535
4	0,88581	88577	88574	88571	88568	4	0,97610	97685	97760	97836	97912
5	0,88566	88564	88563	88562	88561	5	0,97988	98065	98142	98219	98296
6	0,88560	88560	88561	88561	88562	6	0,98374	98452	98531	98610	98689
7	0,88563	88565	88567	88569	88572	7	0,98768	98848	98928	99009	99090
8	0,88575	88578	88582	88586	88590	8	0,99171	99252	99334	99416	99499
9	0,88595	88599	88605	88610	88616	9	0,99581	99664	99748	99832	99916

FAKTORIJELI

1 !	1	6 !	720	11 !	399 16800	16 !	2092 27898 88000
2 !	2	7 !	5040	12 !	4790 01600	17 !	35568 74280 96000
3 !	6	8 !	40320	13 !	62270 20800	18 !	6 40237 37057 28000
4 !	24	9 !	3 62880	14 !	8 71782 91200	19 !	121 64510 04088 32000
5 !	120	10 !	36 28800	15 !	130 76743 68000	20 !	2432 90200 81766 40000

21 !	51090 94217 17094 40000	26 !	40 32914 61126 60563 55840 00000
22 !	11 24000 72777 76076 80000	27 !	1088 88694 50418 35216 07680 00000
23 !	258 52016 73888 49766 40000	28 !	30488 83446 11713 86050 15040 00000
24 !	6204 48401 73323 94393 60000	29 !	8 84176 19937 39701 95454 36160 00000
25 !	1 55112 10043 33098 59840 00000	30 !	265 25285 98121 91058 63630 84800 00000

31 !	8222 83865 41779 22817 72556 28800 00000	31 !
32 !	2 63130 83693 36935 30167 21801 21600 00000	32 !
33 !	86 83317 61881 18864 95518 19440 12800 00000	33 !
34 !	2952 32799 03960 41408 47618 60964 35200 00000	34 !
35 !	1 03331 47966 38614 49296 66651 33752 32000 00000	35 !
36 !	37 19933 26789 90121 74679 99448 15083 52000 00000	36 !
37 !	1376 37530 91226 34504 63159 79581 58090 24000 00000	37 !
38 !	52302 26174 66601 11176 00072 24100 07429 12000 00000	38 !
39 !	20 39788 20811 97443 35864 02817 39902 89735 68000 00000	39 !
40 !	815 91528 32478 97734 34561 12695 96115 89427 20000 00000	40 !
41 !	33452 52661 31638 07108 17006 20534 40751 66515 20000 00000	41 !
42 !	14 05006 11775 28798 98543 14260 62445 11569 93638 40000 00000	42 !
43 !	604 15263 06337 38356 37355 13206 85139 97507 26451 20000 00000	43 !
44 !	26582 71574 78844 87680 43625 81101 46158 90319 63852 80000 00000	44 !
45 !	11 96222 20865 48019 45619 63161 49565 77150 64383 73376 00000 00000	45 !
46 !	550 26221 59812 08894 98503 05428 80025 48929 61651 75296 00000 00000	46 !
47 !	25862 32415 11168 18064 29643 55153 61197 99691 97632 38912 00000 00000	47 !
48 !	12 41391 55925 36072 67086 22890 47373 37503 85214 86354 67776 00000 00000	48 !
49 !	608 28186 40342 67560 87225 21633 21295 37688 75528 31379 21024 00000 00000	49 !
50 !	30414 09320 17133 78043 61260 81660 64768 84437 76415 68960 51200 00000 00000	50 !

51 !	15 51118 75328 73822 80224 24301 64693 03211 06325 97200 16986 11200 00000 00000	51 !
52 !	806 58175 17094 38785 71660 63685 64037 66975 28950 54408 83277 82400 00000 00000	52 !
53 !	42748 83284 06002 55642 98013 75338 93996 49690 34378 83668 13724 67200 00000 00000	53 !
54 !	23 08436 97339 24138 04720 92742 68302 75810 83278 56457 18079 41132 28800 00000 00000	54 !
55 !	1269 64033 53658 27592 59651 00847 56651 69595 80321 05144 94367 62275 84000 00000 00000	55 !
56 !	71099 85878 04863 45185 40456 47463 72494 97364 97978 88116 84586 87447 04000 00000 00000	56 !
57 !	40 52691 95048 77216 75568 06019 05432 32213 49803 84796 22660 21451 84481 28000 00000 00000	57 !
58 !	2350 56133 12828 78571 82947 49105 15074 68382 88623 18181 14292 44206 99914 24000 00000 00000	58 !
59 !	1 38683 11854 56898 35737 93901 97203 89406 34590 28767 72687 43254 08212 94940 16000 00000 00000	59 !
60 !	83 20987 11274 13901 44276 34118 32233 64380 75417 26063 61245 95244 92776 96409 60000 00000 00000	60 !

FAKTORIJELI

1 !	1	6 !	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	11 !	$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	16 !	$2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$
2 !	2	7 !	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	12 !	$2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	17 !	$2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$
3 !	$2 \cdot 3$	8 !	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	13 !	$2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	18 !	$2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$
4 !	$2^3 \cdot 3$	9 !	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	14 !	$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$	19 !	$2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
5 !	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	10 !	$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$	15 !	$2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$	20 !	$2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

21 !	$2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	26 !	$2^{23} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
22 !	$2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	27 !	$2^{23} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
23 !	$2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	28 !	$2^{25} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
24 !	$2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	29 !	$2^{25} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$
25 !	$2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	30 !	$2^{26} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$

31 !	$2^{26} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	36 !	$2^{34} \cdot 3^{17} \cdot 5^8 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$
32 !	$2^{31} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	37 !	$2^{34} \cdot 3^{17} \cdot 5^8 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$
33 !	$2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	38 !	$2^{35} \cdot 3^{17} \cdot 5^8 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$
34 !	$2^{32} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	39 !	$2^{35} \cdot 3^{18} \cdot 5^8 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$
35 !	$2^{32} \cdot 3^{15} \cdot 5^8 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	40 !	$2^{38} \cdot 3^{18} \cdot 5^9 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$

41 !	$2^{38} \cdot 3^{18} \cdot 5^9 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41$	41 !
42 !	$2^{39} \cdot 3^{19} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41$	42 !
43 !	$2^{39} \cdot 3^{19} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43$	43 !
44 !	$2^{41} \cdot 3^{19} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43$	44 !
45 !	$2^{41} \cdot 3^{21} \cdot 5^{10} \cdot 7^6 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43$	45 !
46 !	$2^{42} \cdot 3^{21} \cdot 5^{10} \cdot 7^6 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43$	46 !
47 !	$2^{42} \cdot 3^{21} \cdot 5^{10} \cdot 7^6 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$	47 !
48 !	$2^{46} \cdot 3^{22} \cdot 5^{10} \cdot 7^6 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$	48 !
49 !	$2^{46} \cdot 3^{22} \cdot 5^{10} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$	49 !
50 !	$2^{47} \cdot 3^{22} \cdot 5^{12} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$	50 !
51 !	$2^{47} \cdot 3^{23} \cdot 5^{12} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^3 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$	51 !
52 !	$2^{49} \cdot 3^{23} \cdot 5^{12} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$	52 !
53 !	$2^{49} \cdot 3^{23} \cdot 5^{12} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53$	53 !
54 !	$2^{50} \cdot 3^{26} \cdot 5^{12} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53$	54 !
55 !	$2^{50} \cdot 3^{26} \cdot 5^{13} \cdot 7^8 \cdot 11^5 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53$	55 !
56 !	$2^{53} \cdot 3^{26} \cdot 5^{13} \cdot 7^9 \cdot 11^5 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53$	56 !
57 !	$2^{53} \cdot 3^{27} \cdot 5^{13} \cdot 7^9 \cdot 11^5 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53$	57 !
58 !	$2^{54} \cdot 3^{27} \cdot 5^{13} \cdot 7^9 \cdot 11^5 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53$	58 !
59 !	$2^{54} \cdot 3^{27} \cdot 5^{13} \cdot 7^9 \cdot 11^5 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59$	59 !
60 !	$2^{56} \cdot 3^{28} \cdot 5^{14} \cdot 7^9 \cdot 11^5 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59$	60 !

BINOMNI KOEFICIJENTI

	$\binom{1}{k}$	
0	1	1

	$\binom{2}{k}$	
0	1	2
1	2	1

	$\binom{3}{k}$	
0	1	3
1	3	2

	$\binom{4}{k}$	
0	1	4
1	4	3
2	6	2

	$\binom{5}{k}$	
0	1	5
1	5	4
2	10	3

	$\binom{6}{k}$	
0	1	6
1	6	5
2	15	4
3	20	3

	$\binom{7}{k}$	
0	1	7
1	7	6
2	21	5
3	35	4

	$\binom{8}{k}$	
0	1	8
1	8	7
2	28	6
3	56	5
4	70	4

	$\binom{9}{k}$	
0	1	9
1	9	8
2	36	7
3	84	6
4	126	5

	$\binom{10}{k}$	
0	1	10
1	10	9
2	45	8
3	120	7
4	210	6
5	252	5

	$\binom{11}{k}$	
0	1	11
1	11	10
2	55	9
3	165	8
4	330	7
5	462	6

	$\binom{12}{k}$	
0	1	12
1	12	11
2	66	10
3	220	9
4	495	8
5	792	7
6	924	6

	$\binom{13}{k}$	
0	1	13
1	13	12
2	78	11
3	286	10
4	715	9
5	1287	8
6	1716	7

	$\binom{14}{k}$	
0	1	14
1	14	13
2	91	12
3	364	11
4	1001	10
5	2002	9
6	3003	8
7	3432	7

	$\binom{15}{k}$	
0	1	15
1	15	14
2	105	13
3	455	12
4	1365	11
5	3003	10
6	5005	9
7	6435	8

	$\binom{16}{k}$	
0	1	16
1	16	15
2	120	14
3	560	13
4	1820	12
5	4368	11
6	8008	10
7	11440	9
8	12870	8

	$\binom{17}{k}$	
0	1	17
1	17	16
2	136	15
3	680	14
4	2380	13
5	6188	12
6	12376	11
7	19448	10
8	24310	9

	$\binom{18}{k}$	
0	1	18
1	18	17
2	153	16
3	816	15
4	3060	14
5	8568	13
6	18564	12
7	31824	11
8	43758	10
9	48620	9

	$\binom{19}{k}$	
0	1	19
1	19	18
2	171	17
3	969	16
4	3876	15
5	11628	14
6	27132	13
7	50388	12
8	75582	11
9	92378	10

	$\binom{20}{k}$	
0	1	20
1	20	19
2	190	18
3	1140	17
4	4845	16
5	15504	15
6	38760	14
7	77520	13
8	1 25970	12
9	1 67960	11
10	1 84756	10

	$\binom{21}{k}$	
0	1	21
1	21	20
2	210	19
3	1330	18
4	5985	17
5	20349	16
6	54264	15
7	1 16280	14
8	2 03490	13
9	2 93930	12
10	3 52716	11

	$\binom{22}{k}$	
0	1	22
1	22	21
2	231	20
3	1540	19
4	7315	18
5	26334	17
6	74613	16
7	1 70544	15
8	3 19770	14
9	4 97420	13
10	6 46646	12
11	7 05432	11

	$\binom{23}{k}$	
0	1	23
1	23	22
2	253	21
3	1771	20
4	8855	19
5	33649	18
6	1 00947	17
7	2 45157	16
8	4 90314	15
9	8 17190	14
10	11 44066	13
11	13 52078	12

	$\binom{24}{k}$	
0	1	24
1	24	23
2	276	22
3	2024	21
4	10626	20
5	42504	19
6	1 34596	18
7	3 46104	17
8	7 35471	16
9	13 07504	15
10	19 61256	14
11	24 96144	13
12	27 04156	12

	$\binom{25}{k}$	
0	1	25
1	25	24
2	300	23
3	2300	22
4	12650	21
5	53130	20
6	1 77100	19
7	4 80700	18
8	10 81575	17
9	20 42975	16
10	32 68760	15
11	44 57400	14
12	52 00300	13

	$\binom{26}{k}$	
0	1	26
1	26	25
2	325	24
3	2600	23
4	14950	22
5	65780	21
6	2 30230	20
7	6 57800	19
8	15 62275	18
9	31 24550	17
10	53 11735	16
11	77 26160	15
12	96 57700	14
13	104 00600	13

	$\binom{27}{k}$	
0	1	27
1	27	26
2	351	25
3	2925	24
4	17550	23
5	80730	22
6	2 96010	21
7	8 88030	20
8	22 20075	19
9	46 86825	18
10	84 36285	17
11	130 37895	16
12	173 83860	15
13	200 58300	14

	$\binom{28}{k}$	
0	1	28
1	28	27
2	378	26
3	3276	25
4	20475	24
5	98280	23
6	3 76740	22
7	11 84040	21
8	31 08105	20
9	69 06900	19
10	131 23110	18
11	214 74180	17
12	304 21755	16
13	374 42160	15
14	401 16600	14

	$\binom{29}{k}$	
0	1	29
1	29	28
2	406	27
3	3654	26
4	23751	25
5	1 18755	24
6	4 75020	23
7	15 60780	22
8	42 92145	21
9	100 15005	20
10	200 30010	19
11	345 97290	18
12	518 95935	17
13	678 63915	16
14	775 58760	15

	$\binom{30}{k}$	
0	1	30
1	30	29
2	435	28
3	4060	27
4	27405	26
5	1 42506	25
6	5 93775	24
7	20 35800	23
8	58 52925	22
9	143 07150	21
10	300 45015	20
11	546 27300	19
12	864 93225	18
13	1197 59850	17
14	1454 22675	16
15	1551 17520	15

	$\binom{31}{k}$	
0	1	31
1	31	30
2	465	29
3	4495	28
4	31465	27
5	1 69911	26
6	7 36281	25
7	26 29575	24
8	78 88725	23
9	201 60075	22
10	443 52165	21
11	846 72315	20
12	1411 20525	19
13	2062 53075	18
14	2651 82525	17
15	3005 40195	16

	$\binom{32}{k}$	
0	1	32
1	32	31
2	496	30
3	4960	29
4	35960	28
5	2 01376	27
6	9 06192	26
7	33 65856	25
8	105 18300	24
9	280 48800	23
10	645 12240	22
11	1290 24480	21
12	2257 92840	20
13	3473 73600	19
14	4714 35600	18
15	5657 22720	17
16	6010 80390	16

	$\binom{33}{k}$	
0	1	33
1	33	32
2	528	31
3	5456	30
4	40920	29
5	2 37336	28
6	11 07568	27
7	42 72048	26
8	138 84156	25
9	385 67100	24
10	925 61040	23
11	1935 36720	22
12	3548 17320	21
13	5731 66440	20
14	8188 09200	19
15	10371 58320	18
16	11668 03110	17

	$\binom{34}{k}$	
0	1	34
1	34	33
2	561	32
3	5984	31
4	46376	30
5	2 78256	29
6	13 44904	28
7	53 79616	27
8	181 56204	26
9	524 51256	25
10	1311 28140	24
11	2860 97760	23
12	5483 54040	22
13	9279 83760	21
14	13919 75640	20
15	18559 67520	19
16	22039 61430	18
17	23336 06220	17

	$\binom{35}{k}$	
0	1	35
1	35	34
2	595	33
3	6545	32
4	52360	31
5	3 24632	30
6	16 23160	29
7	67 24520	28
8	235 35820	27
9	706 07460	26
10	1835 79396	25
11	4172 25900	24
12	8344 51800	23
13	14763 37800	22
14	23199 59400	21
15	32479 43160	20
16	40599 28950	19
17	45375 67650	18

	$\binom{36}{k}$	
0	1	36
1	36	35
2	630	34
3	7140	33
4	58905	32
5	3 76992	31
6	19 47792	30
7	83 47680	29
8	302 60340	28
9	941 43280	27
10	2541 86856	26
11	6008 05296	25
12	12516 77700	24
13	23107 89600	23
14	37962 97200	22
15	55679 02560	21
16	73078 72110	20
17	85974 96600	19
18	90751 35300	18

k	$\binom{37}{k}$	
0	1	37
1	37	36
2	666	35
3	7770	34
4	66045	33
5	4 35897	32
6	23 24784	31
7	102 95472	30
8	386 08020	29
9	1244 03620	28
10	3483 30136	27
11	8549 92152	26
12	18524 82996	25
13	35624 67300	24
14	61070 86800	23
15	93641 99760	22
16	1 28757 74670	21
17	1 59053 68710	20
18	1 76726 31900	19

k	$\binom{38}{k}$	
0	1	38
1	38	37
2	703	36
3	8436	35
4	73815	34
5	5 01942	33
6	27 60681	32
7	126 20256	31
8	489 03492	30
9	1630 11640	29
10	4727 33756	28
11	12033 22288	27
12	27074 75148	26
13	54149 50296	25
14	96695 54100	24
15	1 54712 86560	23
16	2 22399 74430	22
17	2 87811 43380	21
18	3 35780 00610	20
19	3 53452 63800	19

k	$\binom{39}{k}$	
0	1	39
1	39	38
2	741	37
3	9139	36
4	82251	35
5	5 75757	34
6	32 62623	33
7	153 80937	32
8	615 23748	31
9	2119 15132	30
10	6357 45396	29
11	16760 56044	28
12	39107 97436	27
13	81224 25444	26
14	1 50845 04396	25
15	2 51408 40660	24
16	3 77112 60990	23
17	5 10211 17810	22
18	6 23591 43990	21
19	6 89232 64410	20

k	$\binom{40}{k}$	
0	1	40
1	40	39
2	780	38
3	9880	37
4	91390	36
5	6 58008	35
6	38 38380	34
7	186 43560	33
8	769 04685	32
9	2734 38880	31
10	8476 60528	30
11	23118 01440	29
12	55868 53480	28
13	1 20332 22880	27
14	2 32069 29840	26
15	4 02253 45056	25
16	6 28521 01650	24
17	8 87323 78800	23
18	11 33802 61800	22
19	13 12824 08400	21
20	13 78465 28820	20

k	$\binom{41}{k}$	
0	1	41
1	41	40
2	820	39
3	10660	38
4	1 01270	37
5	7 49398	36
6	44 96388	35
7	224 81940	34
8	955 48245	33
9	3503 43565	32
10	11210 99408	31
11	31594 61968	30
12	78986 54920	29
13	1 76200 76360	28
14	3 52401 52720	27
15	6 34322 74896	26
16	10 30774 46706	25
17	15 15844 80450	24
18	20 21126 40600	23
19	24 46626 70200	22
20	26 91289 37220	21

k	$\binom{42}{k}$	
0	1	42
1	42	41
2	861	40
3	11480	39
4	1 11930	38
5	8 50668	37
6	52 45786	36
7	269 78328	35
8	1180 30185	34
9	4458 91810	33
10	14714 42973	32
11	42805 61376	31
12	1 10581 16888	30
13	2 55187 31280	29
14	5 28602 29080	28
15	9 86724 27616	27
16	16 65097 21602	26
17	25 46619 27156	25
18	35 36971 21050	24
19	44 67753 10800	23
20	51 37916 07420	22
21	53 82578 74440	21

k	$\binom{43}{k}$	
0	1	43
1	43	42
2	903	41
3	12341	40
4	1 23410	39
5	9 62598	38
6	60 96454	37
7	322 24114	36
8	1450 08513	35
9	5639 21995	34
10	19173 34783	33
11	57520 04349	32
12	1 53386 78264	31
13	3 65768 48168	30
14	7 83789 60360	29
15	15 15326 56696	28
16	26 51821 49218	27
17	42 11716 48758	26
18	60 83590 48206	25
19	80 04724 31850	24
20	96 05669 18220	23
21	105 20494 81860	22

k	$\binom{44}{k}$	
0	1	44
1	44	43
2	946	42
3	13244	41
4	1 35751	40
5	10 86008	39
6	70 59052	38
7	383 20568	37
8	1772 32627	36
9	7089 30508	35

10	24812 56778	34
11	76693 39132	33
12	2 10906 82613	32
13	5 19155 26432	31
14	11 49558 08528	30
15	22 99116 17056	29
16	41 67148 05914	28
17	68 63537 97976	27
18	102 95306 96964	26
19	140 88314 80056	25
20	176 10393 50070	24
21	201 26164 00080	23
22	210 40989 63720	22

$\binom{45}{k}$

0	1	45
1	45	44
2	990	43
3	14190	42
4	1 48995	41
5	12 21759	40
6	81 45060	39
7	453 79620	38
8	2155 53195	37
9	8861 63135	36
10	31901 87286	35
11	1 01505 95910	34
12	2 87600 21745	33
13	7 30062 09045	32
14	16 68713 34960	31
15	34 48674 25584	30
16	64 66264 22970	29
17	110 30686 03890	28
18	171 58844 94940	27
19	243 83621 77020	26
20	316 98708 30126	25
21	377 36557 50150	24
22	411 67153 63800	23

$\binom{46}{k}$

0	1	46
1	46	45
2	1035	44
3	15180	43
4	1 63185	42
5	13 70754	41
6	93 66819	40
7	535 24680	39
8	2609 32815	38
9	11017 16330	37
10	40763 50421	36
11	1 33407 83196	35
12	3 89106 17655	34
13	10 17662 30790	33
14	23 98775 44005	32
15	51 17387 60544	31
16	99 14938 48554	30
17	174 96950 26860	29
18	281 89530 98830	28
19	415 42466 71960	27
20	560 82330 07146	26
21	694 35265 80276	25
22	789 03711 13950	24
23	823 34307 27600	23

$\binom{47}{k}$

0	1	47
1	47	46
2	1081	45
3	16215	44
4	1 78365	43
5	15 33939	42
6	107 37573	41
7	628 91499	40
8	3144 57495	39
9	13626 49145	38
10	51780 66751	37
11	1 74171 33617	36
12	5 22514 00851	35
13	14 06768 48445	34
14	34 16437 74795	33
15	75 16163 04549	32
16	150 32326 09098	31
17	274 11888 75414	30
18	456 86481 25690	29
19	697 31997 70790	28
20	976 24796 79106	27
21	1255 17595 87422	26
22	1483 38976 94226	25
23	1612 38018 41550	24

$\binom{48}{k}$

0	1	48
1	48	47
2	1128	46
3	17296	45
4	1 94580	44
5	17 12304	43
6	122 71512	42
7	736 29072	41
8	3773 48994	40
9	16771 06640	39
10	65407 15896	38
11	2 25952 00368	37
12	6 96685 34468	36
13	19 29282 49296	35
14	48 23206 23240	34
15	109 32600 79344	33
16	225 48489 13647	32
17	424 44214 84512	31
18	730 98370 01104	30
19	1154 18478 96480	29
20	1673 56794 49896	28
21	2231 42392 66528	27
22	2738 56572 81648	26
23	3095 76995 35776	25
24	3224 76036 83100	24

$\binom{49}{k}$

0	1	49
1	49	48
2	1176	47
3	18424	46
4	2 11876	45
5	19 06884	44
6	139 83816	43
7	859 00584	42
8	4509 78066	41
9	20544 55634	40
10	82178 22536	39
11	2 91359 16264	38
12	9 22637 34836	37
13	26 25967 83764	36
14	67 52488 72536	35
15	157 55807 02584	34
16	334 81089 92991	33
17	649 92703 98159	32
18	1155 42584 85616	31
19	1885 16848 97584	30
20	2827 75273 46376	29
21	3904 99187 16424	28
22	4969 98965 48176	27
23	5834 33568 17424	26
24	6320 53032 18876	25

$\binom{50}{k}$

0	1	50
1	50	49
2	1225	48
3	19600	47
4	2 30300	46
5	21 18760	45
6	158 90700	44
7	998 84400	43
8	5368 78650	42
9	25054 33700	41
10	1 02722 78170	40
11	3 73537 38800	39
12	12 13996 51100	38
13	35 48605 18600	37
14	93 78456 56300	36
15	225 08295 75120	35
16	492 36896 95575	34
17	984 73793 91150	33
18	1805 35288 83775	32
19	3040 59433 83200	31
20	4712 92122 43960	30
21	6732 74460 62800	29
22	8874 98152 64600	28
23	10804 32533 65600	27
24	12154 86600 36300	26
25	12641 06064 37752	25

$\binom{51}{k}$

0	1	51
1	51	50
2	1275	49
3	20825	48
4	2 49900	47
5	23 49060	46
6	180 09460	45
7	1157 75100	44
8	6367 63050	43
9	30423 12350	42
10	1 27777 11870	41
11	4 76260 16970	40
12	15 87533 89900	39
13	47 62601 69700	38
14	129 27061 74900	37
15	318 86752 31420	36
16	717 45192 70695	35
17	1477 10690 86725	34
18	2790 09082 74925	33
19	4845 94722 66975	32
20	7753 51556 27160	31
21	11445 66583 06760	30
22	15607 72613 27400	29
23	19679 30686 30200	28
24	22959 19134 01900	27
25	24795 92664 74052	26

$\binom{52}{k}$

0	1	52
1	52	51
2	1326	50
3	22100	49
4	2 70725	48
5	25 98960	47
6	203 58520	46
7	1337 84560	45
8	7525 38150	44
9	36790 75400	43
10	1 58200 24220	42
11	6 04037 28840	41
12	20 63794 06870	40
13	63 50135 59600	39
14	176 89663 44600	38
15	448 13814 06320	37
16	1036 31945 02115	36
17	2194 55883 57420	35
18	4267 19773 61650	34
19	7636 03805 41900	33
20	12599 46278 94135	32
21	19199 18139 33920	31
22	27053 39196 34160	30
23	35287 03299 57600	29
24	42638 49820 32100	28
25	47755 11798 75952	27
26	49591 85329 48104	26

$\binom{53}{k}$

0	1	53
1	53	52
2	1378	51
3	23426	50
4	2 92825	49
5	28 69685	48
6	229 57480	47
7	1541 43080	46
8	8863 22710	45
9	44316 13550	44
10	1 94990 99620	43
11	7 62237 53060	42
12	26 67831 35710	41
13	84 13929 66470	40
14	240 39799 04200	39
15	625 03477 50920	38
16	1484 45759 08435	37
17	3230 87828 59535	36
18	6461 75657 19070	35
19	11903 23579 03550	34
20	20235 50084 36035	33
21	31798 64418 28055	32
22	46252 57335 68080	31
23	62340 42495 91760	30
24	77925 53119 89700	29
25	90393 61619 08052	28
26	97346 97128 24056	27

$\binom{54}{k}$

0	1	54
1	54	53
2	1431	52
3	24804	51
4	3 16251	50
5	31 62510	49
6	258 27165	48
7	1771 00560	47
8	10404 65790	46
9	53179 36260	45
10	2 39307 13170	44
11	9 57228 52680	43
12	34 30068 88770	42
13	110 81761 02180	41
14	324 53728 70670	40
15	865 43276 55120	39
16	2109 49236 59355	38
17	4715 33587 67970	37
18	9692 63485 78605	36
19	18364 99236 22620	35
20	32138 73663 39585	34
21	52034 14502 64090	33
22	78051 21753 96135	32
23	1 08592 99831 59840	31
24	1 40265 95615 81460	30
25	1 68319 14738 97752	29
26	1 87740 58747 32108	28
27	1 94693 94256 48112	27

$\binom{55}{k}$

0	1	55
1	55	54
2	1485	53
3	26235	52
4	3 41055	51
5	34 78761	50
6	289 89675	49
7	2029 27725	48
8	12175 66350	47
9	63584 02050	46
10	2 92486 49430	45
11	11 96535 65850	44
12	43 87297 41450	43
13	145 11829 90950	42
14	435 35489 72850	41
15	1189 97005 25790	40
16	2974 92513 14475	39
17	6824 82824 27325	38
18	14407 97073 46575	37
19	28057 62722 01225	36
20	50503 72899 62205	35
21	84172 88166 03675	34
22	1 30085 36256 60225	33
23	1 86644 21585 55975	32
24	2 48858 95447 41300	31
25	3 08585 10354 79212	30
26	3 56059 73486 29860	29
27	3 82434 53003 80220	28

$\binom{56}{k}$

0	1	56
1	56	55
2	1540	54
3	27720	53
4	3 67290	52
5	38 19816	51
6	324 68436	50
7	2319 17400	49
8	14204 94075	48
9	75759 68400	47
10	3 56070 51480	46
11	14 89022 15280	45
12	55 83833 07300	44
13	188 99127 32400	43
14	580 47319 63800	42
15	1625 32494 98640	41
16	4164 89518 40265	40
17	9799 75337 41800	39
18	21232 79897 73900	38
19	42465 59795 47800	37
20	78561 35621 63430	36
21	1 34676 61065 65880	35
22	2 14258 24422 63900	34
23	3 16729 57842 16200	33
24	4 35503 17032 97275	32
25	5 57444 05802 20512	31
26	6 64644 83841 09072	30
27	7 38494 26490 10080	29
28	7 64869 06007 60440	28

$\binom{57}{k}$

0	1	57
1	57	56
2	1596	55
3	29260	54
4	3 95010	53
5	41 87106	52
6	362 88252	51
7	2643 85836	50
8	16524 11475	49
9	89964 62475	48
10	4 31830 19880	47
11	18 45092 66760	46
12	70 72855 22580	45
13	244 82960 39700	44
14	769 46446 96200	43
15	2205 79814 62440	42
16	5790 22013 38905	41
17	13964 64855 82065	40
18	31032 55235 15700	39
19	63698 39693 21700	38
20	1 21026 95417 11230	37
21	2 13237 96687 29310	36
22	3 48934 85488 29780	35
23	5 30987 82264 80100	34
24	7 52232 74875 13475	33
25	9 92947 22835 17787	32
26	12 22088 89643 29584	31
27	14 03139 10331 19152	30
28	15 03363 32497 70520	29

$\binom{58}{k}$

0	1	58
1	58	57
2	1653	56
3	30856	55
4	4 24270	54
5	45 82116	53
6	404 75358	52
7	3006 74088	51
8	19167 97311	50
9	1 06488 73950	49
10	5 21794 82355	48
11	22 76922 86640	47
12	89 17947 89340	46
13	315 55815 62280	45
14	1014 29407 35900	44
15	2975 26261 58640	43
16	7996 01828 01345	42
17	19754 86869 20970	41
18	44997 20090 97765	40
19	94730 94928 37400	39
20	1 84725 35110 32930	38
21	3 34264 92104 40540	37
22	5 62172 82175 59090	36
23	8 79922 67753 09880	35
24	12 83220 57139 93575	34
25	17 45179 97710 31262	33
26	22 15036 12478 47371	32
27	26 25227 99974 48736	31
28	29 06502 42828 89672	30
29	30 06726 64995 41040	29

$\binom{59}{k}$

0	1	59
1	59	58
2	1711	57
3	32509	56
4	4 55126	55
5	50 06386	54
6	450 57474	53
7	3411 49446	52
8	22174 71399	51
9	1 25656 71261	50
10	6 28283 56305	49
11	27 98717 68995	48
12	111 94870 75980	47
13	404 73763 51620	46
14	1329 85222 98180	45
15	3989 55668 94540	44
16	10971 28089 59985	43
17	27750 88697 22315	42
18	64752 06960 18735	41
19	1 39728 15019 35165	40
20	2 79456 30038 70330	39
21	5 18990 27214 73470	38
22	8 96437 74279 99630	37
23	14 42095 49928 68970	36
24	21 63143 24893 03455	35
25	30 28400 54850 24837	34
26	39 60216 10188 78633	33
27	48 40264 12452 96107	32
28	55 31730 42803 38408	31
29	59 13229 07824 30712	30

$\binom{60}{k}$

0	1	60
1	60	59
2	1770	58
3	34220	57
4	4 87635	56
5	54 61512	55
6	500 63860	54
7	3862 06920	53
8	25586 20845	52
9	1 47831 42660	51
10	7 53940 27566	50
11	34 27001 25300	49
12	139 93588 44975	48
13	516 68634 27600	47
14	1734 58986 49800	46
15	5319 40891 92720	45
16	14960 83758 54525	44
17	38722 16786 82300	43
18	92502 95657 41050	42
19	2 04480 21979 53900	41
20	4 19184 45058 05495	40
21	7 98446 57253 43800	39
22	14 15428 01494 73100	38
23	23 38533 24208 68600	37
24	36 05238 74821 72425	36
25	51 91543 79743 28292	35
26	69 88616 65039 03470	34
27	88 00480 22641 74740	33
28	103 71994 55256 34515	32
29	114 44959 50627 69120	31
30	118 26458 15648 61424	30

POTENCIJE PRIRODNIH BROJEVA

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	4	9	16	25	36	49	64	81
3	8	27	64	125	216	343	512	729
4	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6	64	729	4096	15625	46656	1 17649	2 62144	5 31441
7	128	2187	16384	78125	2 79936	8 23543	20 97152	47 82969
8	256	6561	65536	3 90625	16 79616	57 64801	167 77216	430 46721
9	512	19683	2 62144	19 53125	100 77696	403 53607	1342 17728	3874 20489
10	1024	59049	10 48576	97 65625	604 66176	2824 75249	10737 41824	34867 84401

1	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
2	100	121	144	169	196	225
3	1000	1331	1728	2197	2744	3375
4	10000	14641	20736	28561	38416	50625
5	1 00000	1 61051	2 48832	3 71293	5 37824	7 59375
6	10 00000	17 71561	29 85984	48 26809	75 29536	113 90625
7	100 00000	194 87171	358 31808	627 48517	1054 13504	1708 59375
8	1000 00000	2143 58881	4299 81696	8157 30721	14757 89056	25628 90625
9	10000 00000	23579 47691	51597 80352	1 06044 99373	2 06610 46784	3 84433 59375
10	1 00000 00000	2 59374 24601	6 19173 64224	13 78584 91849	28 92546 54976	57 66503 90625

1	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
2	256	289	324	361	400
3	4096	4913	5832	6859	8000
4	65536	83521	1 04976	1 30321	1 60000
5	10 48576	14 19857	18 89568	24 76099	32 00000
6	167 77216	241 37569	340 12224	470 45881	640 00000
7	2684 35456	4103 38673	6122 20032	8938 71739	12800 00000
8	42949 67296	69757 57441	1 10199 60576	1 69835 63041	2 56000 00000
9	6 87194 76736	11 85878 76497	19 83592 90368	32 26876 97779	51 20000 00000
10	109 95116 27776	201 59939 00449	357 04672 26624	613 10662 57801	1024 00000 00000

1	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
2	441	484	529	576	625
3	9261	10648	12167	13824	15625
4	1 94481	2 34256	2 79841	3 31776	3 90625
5	40 84101	51 53632	64 36343	79 62624	97 65625
6	857 66121	1133 79904	1480 35889	1911 02976	2441 40625
7	18010 88541	24943 57888	34048 25447	45864 71424	61035 15625
8	3 78228 59361	5 48758 73536	7 83109 85281	11 00753 14176	15 25878 90625
9	79 42800 46581	120 72692 17792	180 11526 61463	264 18075 40224	381 46972 65625
10	1667 98809 78201	2655 99227 91424	4142 65112 13649	6340 33809 65376	9536 74316 40625

1	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
2	676	729	784	841	900
3	17576	19683	21952	24389	27000
4	4 56976	5 31441	6 14656	7 07281	8 10000
5	118 81376	143 48907	172 10368	205 11149	243 00000
6	3089 15776	3874 20489	4818 90304	5948 23321	7290 00000
7	80318 10176	1 04603 53203	1 34929 28512	1 72498 76309	2 18700 00000
8	20 88270 64576	28 24295 36481	37 78019 98336	50 02464 12961	65 61000 00000
9	542 95036 78976	762 55974 84987	1057 84559 53408	1450 71459 75869	1968 30000 00000
10	14116 70956 53376	20589 11320 94649	29619 67666 95424	42070 72333 00201	59049 00000 00000

1	31	32	33	34
2	961	1024	1089	1156
3	29791	32768	35937	39304
4	9 23521	10 48576	11 85921	13 36336
5	286 29151	335 54432	391 35393	454 35424
6	8875 03681	10737 41824	12914 67969	15448 04416
7	2 75126 14111	3 43597 38368	4 26184 42977	5 25233 50144
8	85 28910 37441	109 95116 27776	140 64086 18241	178 57939 04896
9	2643 96221 60671	3518 43720 88832	4641 14844 01953	6071 69927 66464
10	81962 82869 80801	1 12589 99068 42624	1 53157 89852 64449	2 06437 77540 59776

1	35	36	37	38
2	1225	1296	1369	1444
3	42875	46656	50653	54872
4	15 00625	16 79616	18 74161	20 85136
5	525 21875	604 66176	693 43957	792 35168
6	18382 65625	21767 82336	25657 26409	30109 36384
7	6 43392 96875	7 83641 64096	9 49318 77133	11 44155 82592
8	225 18753 90625	282 11099 07456	351 24794 53921	434 77921 38496
9	7881 56386 71875	10155 99566 68416	12996 17397 95077	16521 61012 62848
10	2 75854 73535 15625	3 65615 84400 62976	4 80858 43724 17849	6 27821 18479 88224

1	39	40	41	42
2	1521	1600	1681	1764
3	59319	64000	68921	74088
4	23 13441	25 60000	28 25761	31 11696
5	902 24199	1024 00000	1158 56201	1306 91232
6	35187 43761	40960 00000	47501 04241	54890 31744
7	13 72310 06679	16 38400 00000	19 47542 73881	23 05393 33248
8	535 20092 60481	655 36000 00000	798 49252 29121	968 26519 96416
9	20872 83611 58759	26214 40000 00000	32738 19343 93961	40667 13838 49472
10	8 14040 60851 91601	10 48576 00000 00000	13 42265 93101 52401	17 08019 81216 77824

1	43	44	45	46
2	1849	1936	2025	2116
3	79507	85184	91125	97336
4	34 18801	37 48096	41 00625	44 77456
5	1470 08443	1649 16224	1845 28125	2059 62976
6	63213 63049	72563 13856	83037 65625	94742 96896
7	27 18186 11107	31 92778 09664	37 36694 53125	43 58176 57216
8	1168 82002 77601	1404 82236 25216	1681 51253 90625	2004 76122 31936
9	50259 26119 36843	61812 18395 09504	75668 06425 78125	92219 01626 69056
10	21 61148 23132 84249	27 19736 09384 18176	34 05062 89160 15625	42 42074 74827 76576

1	47	48	49	50
2	2209	2304	2401	2500
3	1 03823	1 10592	1 17649	1 25000
4	48 79681	53 08416	57 64801	62 50000
5	2293 45007	2548 03968	2824 75249	3125 00000
6	1 07792 15329	1 22305 90464	1 38412 87201	1 56250 00000
7	50 66231 20463	58 70683 42272	67 82230 72849	78 12500 00000
8	2381 12866 61761	2817 92804 29056	3323 29305 69601	3906 25000 00000
9	1 11913 04731 02767	1 35260 54605 94688	1 62841 35979 10449	1 95312 50000 00000
10	52 59913 22358 30049	64 92506 21085 45024	79 79226 62976 12001	97 65625 00000 00000

1	51	52	53	54
2	2601	2704	2809	2916
3	1 32651	1 40608	1 48877	1 57464
4	67 65201	73 11616	78 90481	85 03056
5	3450 25251	3802 04032	4181 95493	4591 65024
6	1 75962 87801	1 97706 09664	2 21643 61129	2 47949 11296
7	89 74106 77851	102 80717 02528	117 47111 39837	133 89252 09984
8	4576 79445 70401	5345 97285 31456	6225 96904 11361	7230 19613 39136
9	2 33416 51730 90451	2 77990 58836 35712	3 29976 35918 02133	3 90430 59123 13344
10	119 04242 38276 13001	144 55510 59490 57024	174 88747 03655 13049	210 83251 92649 20576

1	55	56	57	58
2	3025	3136	3249	3364
3	1 66375	1 75616	1 85193	1 95112
4	91 50625	98 34496	105 56001	113 16496
5	5032 84375	5507 31776	6016 92057	6563 56768
6	2 76806 40625	3 08409 79456	3 42964 47249	3 80686 92544
7	152 24352 34375	172 70948 49536	195 48974 93193	220 79841 67552
8	8373 39378 90625	9671 73115 74016	11142 91571 12001	12806 30817 18016
9	4 60536 65839 84375	5 41616 94481 44896	6 35146 19553 84057	7 42765 87396 44928
10	253 29516 21191 40625	303 30548 90961 14176	362 03333 14568 91249	430 80420 68994 05824

1	59	60	61	62
2	3481	3600	3721	3844
3	2 05379	2 16000	2 26981	2 38328
4	121 17361	129 60000	138 45841	147 76336
5	7149 24299	7776 00000	8445 96301	9161 32832
6	4 21805 33641	4 66560 00000	5 15203 74361	5 68002 35584
7	248 86514 84819	279 93600 00000	314 27428 36021	352 16146 06208
8	14683 04376 04321	16796 16000 00000	19170 73129 97281	21834 01055 84896
9	8 66299 58186 54939	10 07769 60000 00000	11 69414 60928 34141	13 53708 65462 63552
10	511 11675 33006 41401	604 66176 00000 00000	713 34291 16628 82601	839 29936 58683 40224

1	63	64	65
2	3969	4096	4225
3	2 50047	2 62144	2 74625
4	157 52961	167 77216	178 50625
5	9924 36543	10737 41824	11602 90625
6	6 25235 02209	6 87194 76736	7 54188 90625
7	393 89806 39167	439 80465 11104	490 22278 90625
8	24815 57802 67521	28147 49767 10656	31864 48128 90625
9	15 63381 41568 53823	18 01439 85094 81984	20 71191 28378 90625
10	984 93029 18817 90849	1152 92150 46068 46976	1346 27433 44628 90625

1	66	67	68
2	4356	4489	4624
3	2 87496	3 00763	3 14432
4	189 74736	201 51121	213 81376
5	12523 32576	13501 25107	14539 33568
6	8 26539 50016	9 04583 82169	9 88674 82624
7	545 51607 01056	606 07116 05323	672 29888 18432
8	36004 06062 69696	40606 76775 56641	45716 32396 53376
9	23 76268 00137 99936	27 20653 43962 94947	31 08710 02964 29568
10	1568 33688 09107 95776	1822 83780 45517 61449	2113 92282 01572 10624

1	69	70	71
2	4761	4900	5041
3	3 28509	3 43000	3 57911
4	226 67121	240 10000	254 11681
5	15640 31349	16807 00000	18042 29351
6	10 79181 63081	11 76490 00000	12 81002 83921
7	744 63532 52589	823 54300 00000	909 51201 58391
8	51379 83744 28641	57648 01000 00000	64575 35312 45761
9	35 45208 78355 76229	40 35360 70000 00000	45 84850 07184 49031
10	2446 19406 06547 59801	2824 75249 00000 00000	3255 24355 10098 81201

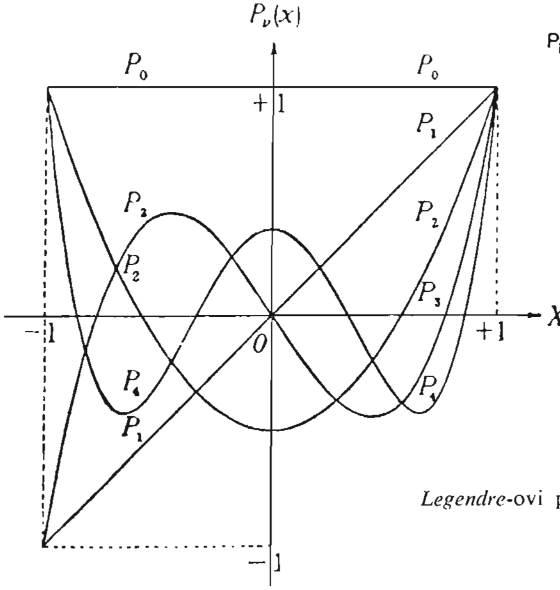
1	72	73	74
2	5184	5329	5476
3	3 73248	3 89017	4 05224
4	268 73856	283 98241	299 86576
5	19349 17632	20730 71593	22190 06624
6	13 93140 69504	15 13342 26289	16 42064 90176
7	1003 06130 04288	1104 73985 19097	1215 12802 73024
8	72220 41363 08736	80646 00918 94081	89919 47402 03776
9	51 99869 78142 28992	58 87158 67082 67913	66 54041 07750 79424
10	3743 90624 26244 87424	4297 62582 97035 57649	4923 99039 73558 77376

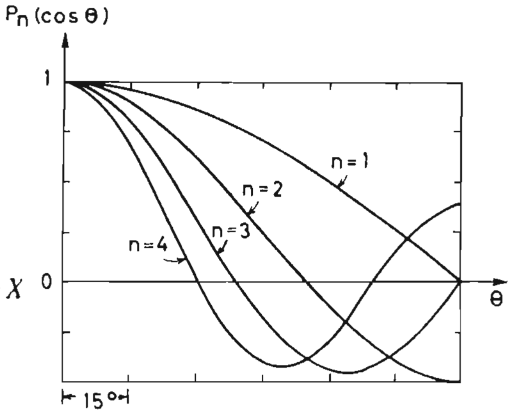
1	75	76	77
2	5625	5776	5929
3	4 21875	4 38976	4 56533
4	316 40625	333 62176	351 53041
5	23730 46875	25355 25376	27067 84157
6	17 79785 15625	19 26999 28576	20 84223 80089
7	1334 83886 71875	1464 51945 71776	1604 85232 66853
8	1 00112 91503 90625	1 11303 47874 54976	1 23573 62915 47681
9	75 08468 62792 96875	84 59064 38465 78176	95 15169 44491 71437
10	5631 35147 09472 65625	6428 88893 23399 41376	7326 68047 25862 00649

1	78	79	80
2	6084	6241	6400
3	4 74552	4 93039	5 12000
4	370 15056	389 50081	409 60000
5	28871 74368	30770 56399	32768 00000
6	22 51996 00704	24 30874 55521	26 21440 00000
7	1756 55688 54912	1920 39089 86159	2097 15200 00000
8	1 37011 43706 83136	1 51710 88099 06561	1 67772 16000 00000
9	106 86892 09132 84608	119 85159 59826 18319	134 21772 80000 00000
10	8335 77583 12361 99424	9468 27608 26268 47201	10737 41824 00000 00000

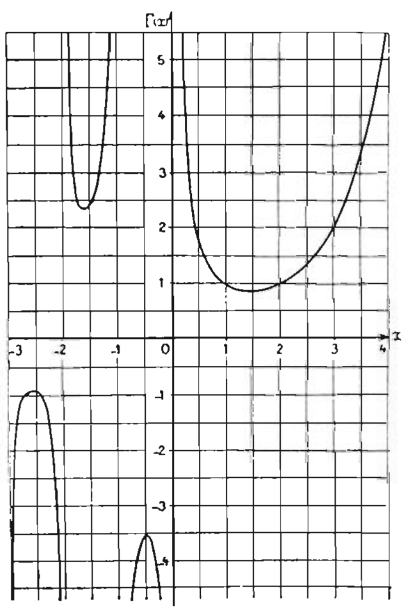
1	81	82	83
2	6561	6724	6889
3	5 31441	5 51368	5 71787
4	430 46721	452 12176	474 58321
5	34867 84401	37073 98432	39390 40643
6	28 24295 36481	30 40066 71424	32 69403 73369
7	2287 67924 54961	2492 85470 56768	2713 60509 89627
8	1 85302 01888 51841	2 04414 08586 54976	2 25229 22321 39041
9	150 09463 52969 99121	167 61955 04097 08032	186 94025 52675 40403
10	12157 66545 90569 28801	13744 80313 35960 58624	15516 04118 72058 53449

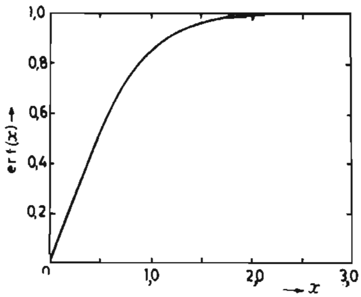
GRAFICI NEKIH SPECIJALNIH FUNKCIJA





Legendre-ovi polinomi

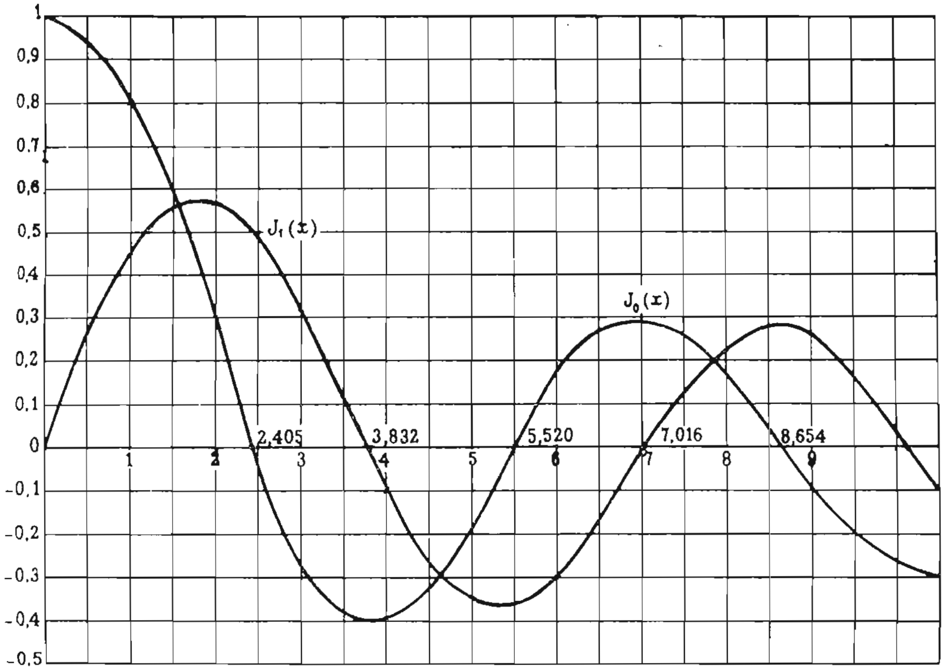


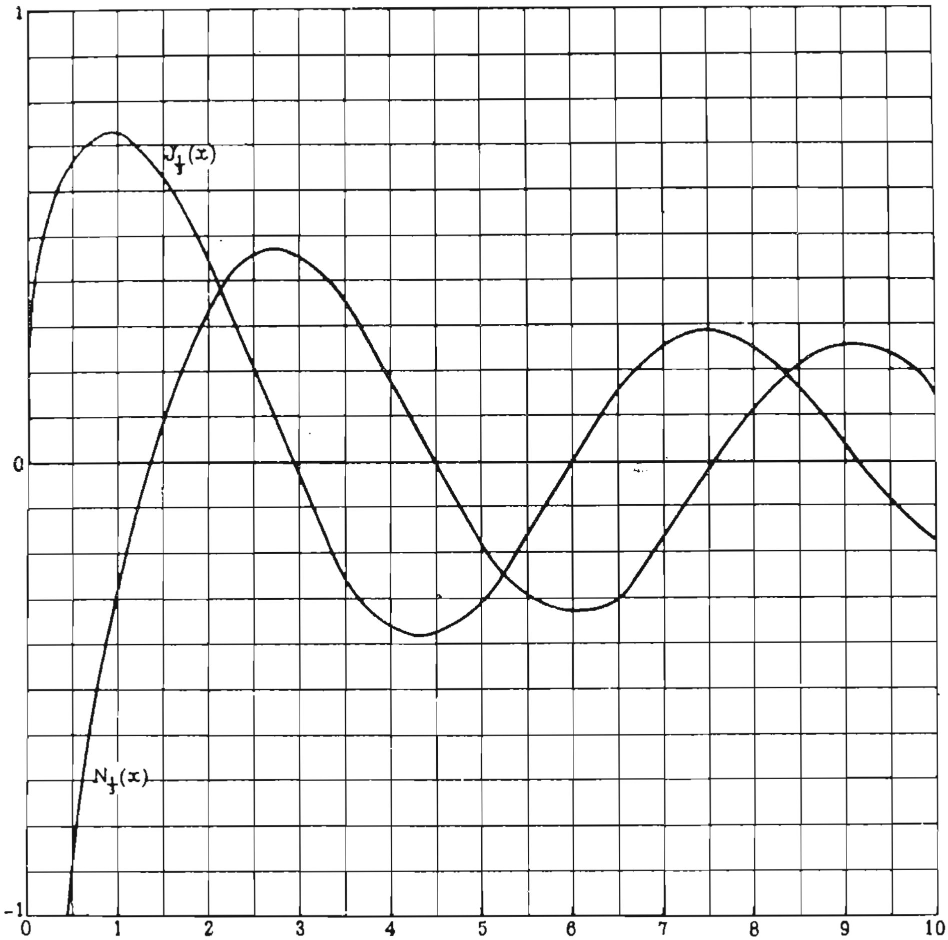


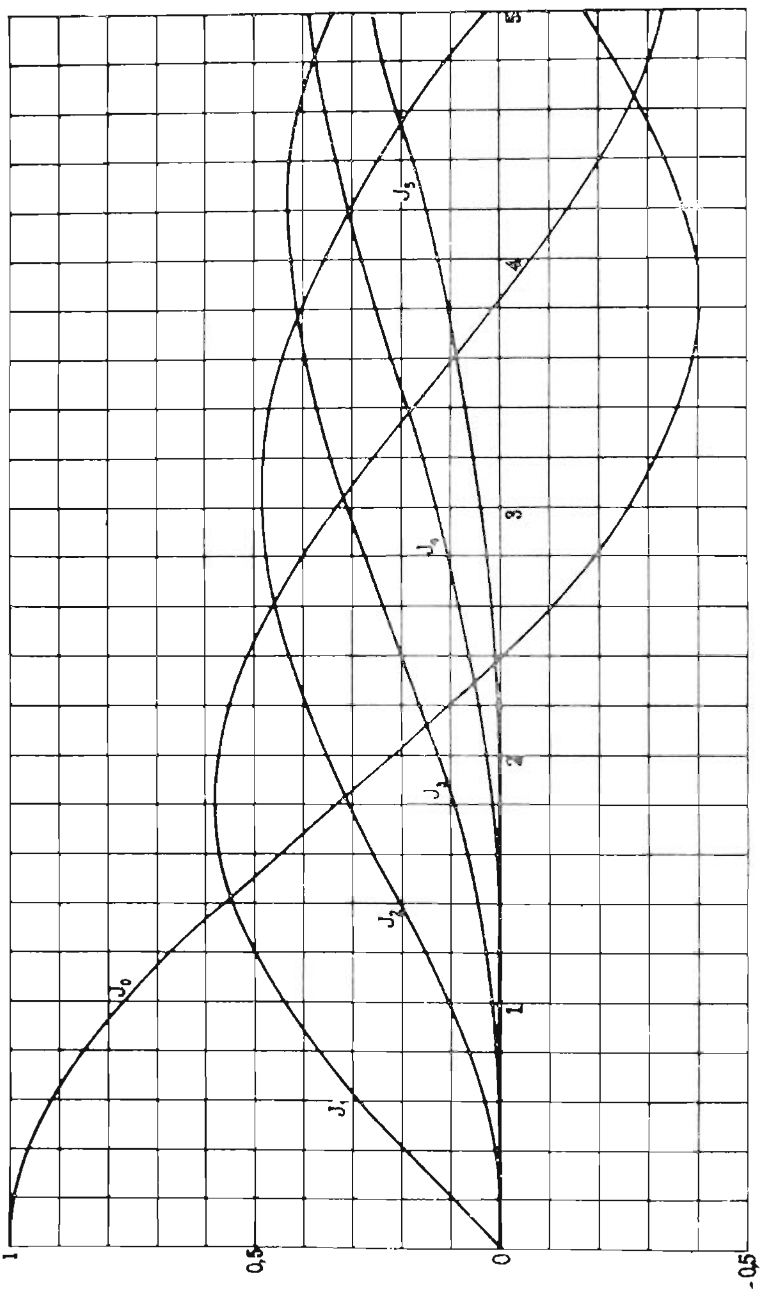
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \qquad (x > 0)$$

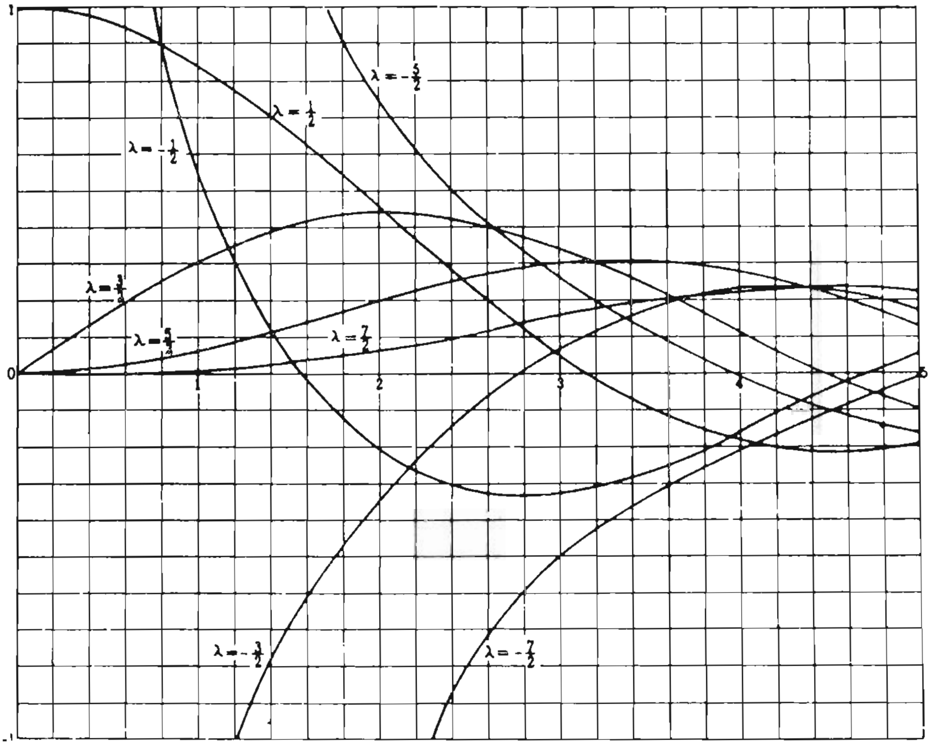
$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

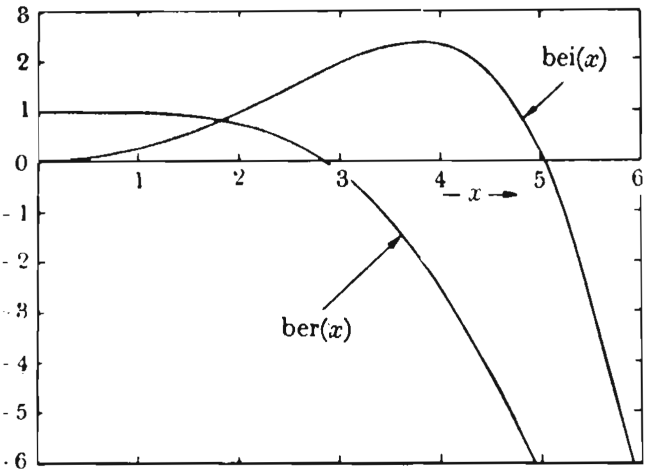

1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
$J_1(x)$
$J_0(x)$
2,405
3,832
5,520
7,016
8,654

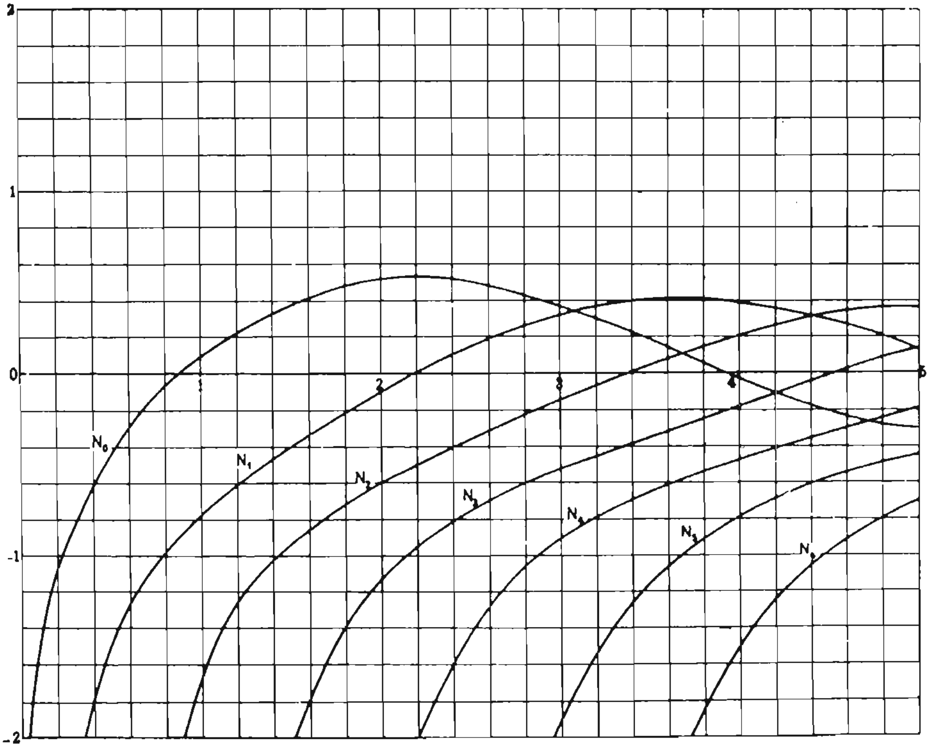

1
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$J_{\frac{1}{3}}(x)$
$N_{\frac{1}{3}}(x)$

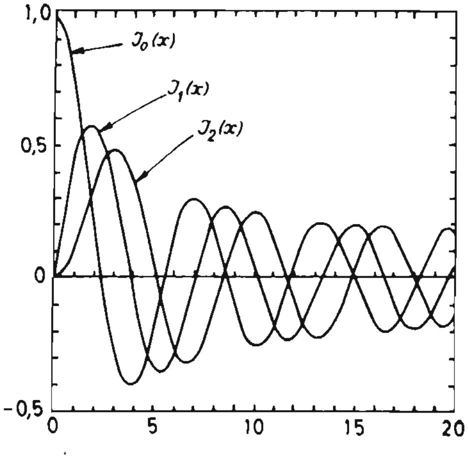

J0
J1
J2
J3
J4
J5
1
2
3
4
5
1
0,5
0
-0,5

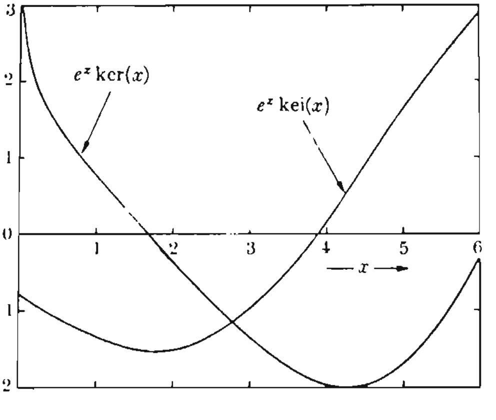
$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{\lambda}(x)$$

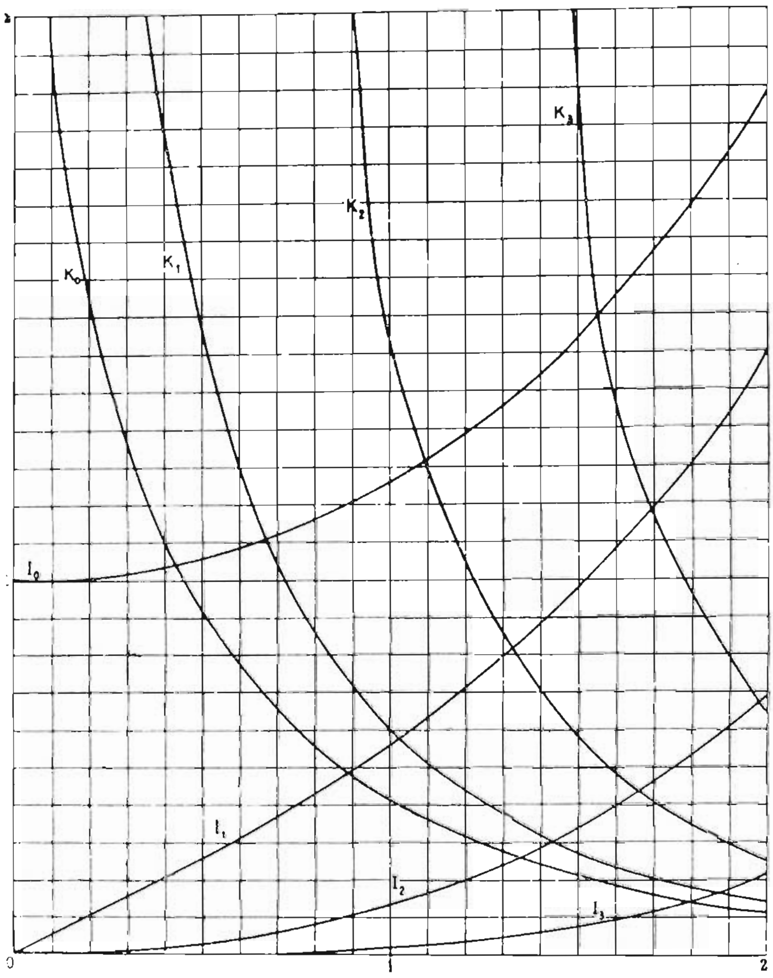


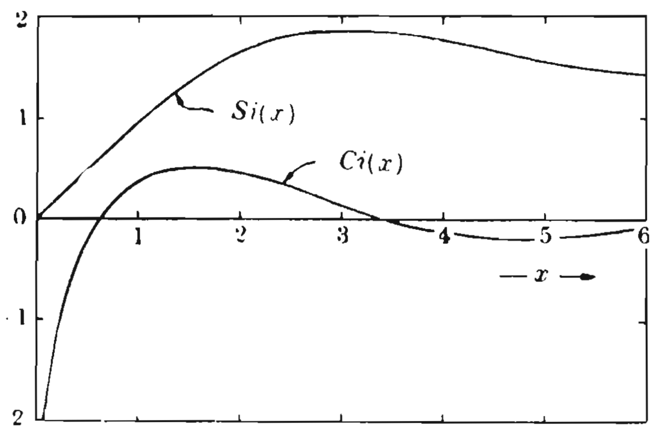



N_0
N_1
N_2
N_3
N_4
N_5
N_6


$J_0(x)$
$J_1(x)$
$J_2(x)$


e^x ker(x)
e^x kei(x)
x





$$\mathrm{Ci}\,(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Si}\,(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Dr DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ
uz saradnju
JOŽA ULČARA i Dr VLADIMIRA DEVIDEA

ZBORNIK MATEMATIČKIH PROBLEMA
sa prilozima i numeričkim tablicama
III

u opštoj redakciji
Dr DRAGOSLAVA S. MITRINOVIĆA

Tiraž: 1.500 primeraka

Obim: 22 štampana tabaka

Slagači:
MIODRAG ĐUKIĆ, KOSTA PETROVIĆ,
NIKOLA POP-KONSTANTINOVIĆ,
BRANKO RAKIĆ

Štampanje završeno oktobra 1960 godine u Beogradskom grafičkom zavodu, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17.