НАПОМЕНА.

Овај спис, који предајем јавности, обухвата теорију алгебарских и трансцендентних једначина, теорију аритметичних редова с интерполацијом, теорију разлагања разломљених функција на простије разломке и најзад теорију разлика функција. Исти спис заједно са оним, који је пре пола године угледао света, чини засебну целину под именом алгебарске анализе. То име служи као обележје оног дела анализе, у коме се питања и задатци претресају и решавају без помоћи инфинитезималних метода.

Теорија једначина, која је један од најважнијих а у исти мах и најинтереснијих делова математике, разрађена је у опширности, коју она потпуно заслужује, и ја мислим, да та опширност не може никако бити од штете, кад се као овде хоће читаоцу да изнесу не само резултати, до којих је дух човечији у току векова трудно дошао, него да му се још и *јасно* обележе путови, којима се до њих и најзгодније и најлакше може доћи. Остале горе поменуте теорије изложене су такође у довољној опширности и надам се онако, како доликује заводу, у коме се предају.

Што се тиче тога, шта је и колико је од поменутих теорија ушло у оквир овога списа, мислим да ће бити најбоље, ако упутим читаоца на садржај или на сам спис. Нека ми је само допуштено свратити његову пажњу на изванредно елегантне методе, помоћу којих се у облику детерминаната добијају различни обрасци у №-ма 35—40 и проналазе услови различности и једнакости корена, на теорију Штурмових функција, Штурмових верижних разломака, Силвестрових функција, на различне методе избацивања (елиминације) помоћу детерминаната и т. д.

При писању овог дела главна ми је брига била, да будем што јаснији, имајући вазда на уму то, да како при предавању науке, тако исто и при писању исте треба гледати на ствар што је могуће више очима почетника. Јер оно, што се писцу чини да је са свим јасно, може врло често и врло лако почетнику бити са свим тамно. Но међу тим не треба никако испустити из вида то, да се код списа овакве врсте и при најбољој вољи не може, са стране јасноће и разумљивости, достићи онај ступањ, који се достиже код других списа лакше врсте.

Ја знам да би, кад би се то само увек могло, најбољи начин излагања, начин који наш дух при изучавању математике као и сваке друге науке може потпунце задовољити, био онај, којим се са свим понајлак и поступно долази до општих истина и закона, и по коме радећи чини нам се, као да ми сами истопрв стварамо науку. И знам да би тек тада учење, праћено неизбежном радозналошћу, постало уживање у правом смислу, уживање благородно јер чисто духовно.

Али такав начин излагања не гледајући на многе друге тешкоће, које му стоје на путу, а које долазе од природе самог предмета, био би овде преко сваке мере спор и дуг, то је једно. Друго млади умови, који су савладали ниже делове математике, већ су толико спремљени а и на апстракције навикнути, да могу без великих тешкоћа корачати и бржим и пречим путем. А на послетку мислим, да и то има извесне дражи за наш нестрпљиви и немирни дух винути се у један мах на висину, са које се и цело поље и поједини делови његови могу лако прегледати. Има извесне дражи добити од један пут опште обрасце, који вам, као оно Питија са свога троношца, одговарају на сва ваша питања, па вам шта више још износе, и на њих одговарају, и таква питања, о којима ви можда никад ни сањали нисте; који ваше непотпуне претпоставке допуњују а погрешне мирно исправљају; који најзад са своје висине сипају јасну светлост на поједине делове теорије и показују вам везу, којом су они међу собом везани. Аналитична метода, која у математици превлађује, јесте она, која наше математичне радове заодева чаробном одећом, којој се ми толико дивимо, која при трудним истраживањима руководи наш дух, буди и снажи нашу уобразиљу и уздиже нашу мисао летом по каткад и до не догледних висина. Докле ослањајући се на друге методе по каткад лутате, докле се радећи по њима можете и са свим изгубити у појединостима, дотле вас аналитична метода одмах у почетку и поузданом руком упућује правој мети, до које вам ваља стићи.

Ја желим, да мој рад буде од користи онима, који се њиме буду служили. То је поред унутрашњег задовољства, које у нами порађа свест о испуњеној дужности, још најлепша награда у овоме — свету.

Већ скоро при крају молим читаоце, да буду добри исправити погрешке, које су на крају дела прибележене. Много их нема, највише их је у првих 20 табака, који су за време мога бављења на страни исправљани. Позиви на алгебарску анализу у овој књизи тичу се првог дела њеног, који је летос наштампан.

Писци, којима сам се при овоме раду помагао, јесу: Briot, Bertrand, Serret, Laurent, Léfebure de Fourçy, Montferrier, Navier, Bourdon, Schlömilch, Herr, Hattendorf, Burg и т. д.

Завршујући сматрам за своју најпријатнију дужност искрено благодарити Господину Стеви Рајичевићу управнику краљевско-српске државне штампарије, што се и сада као и увек до сада свесрдно постарао, те да и спољни облик књиге испадне што лепши.

31 Декембра 1883
у Београду.

Димитрије Нешић,
ПРОФЕСОР МАТЕМАТИКЕ У ВЕЛИКОЈ ШКОЛИ.

Садржај.

ПРВИ ДЕО.

Теорија алгебарских једначина.

А. Једначине са једном непознатом.

I. Општа својства алгебарских једначина.

II. Преображавање једначина.

СТРАНА

III. Највећи заједнички делилац и заједнички корени датих једначина.

IV. Једнаки корени једначина.

V. Симетричне функције.

VI. Примена науке о симетричним функцијама.

VII. Newton-ов образац у облику детерминанте. Услови за једнакост и неједнакост корена.

СТРАНА

VIII. Резултанте алгебарских једначина.

IX. Различне методе избацивања (елиминације) помоћу детерминаната.

X. Наставак о резултантама. Дискриминанте.

XI. Решавање општих једначина.

XII. Особине корена биномних једначина.

XIII Бројне једначине.

ПРВИ ДЕО.

ТЕОРИЈА АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА.

A. Једначине са једном непознатом.

1. Кад је задата буди каква функција x-а $f(x)$, онда је врло лако наћи вредност њену, која одговара ма каквој вредности x-а. Зарад тога треба само заменити x у $f(x)$ његовом вредношћу, при чему ће често бити нужно или корисно, да се $f(x)$ развије у бесконачни ред.

Међу тим много је тежи обрнути задатак, т. ј. наћи вредност, или ако их је више, наћи вредности за x, које поништавају $f(x)$, то ће рећи, за које она добија вредности нули једнаке или најзад још друкче, које задовољавају једначину:

$$1.) \qquad f(x) = 0.$$

Ако се тражи вредност x-а, за коју $f(x)$ добија вредност $= a$, онда се тај задатак своди очевидно на онај, где се тражи вредност x-а, која поништава:

$$2.) \qquad \varphi(x) = f(x) - a.$$

Једначином 1) потпуно је одређена вредност x-а, која поништава $f(x)$, и такву вредност x-а наћи зове се *разрешити* једначину 1). Вредно је напоменути, да x у једначини 1) *губи карактер променљиве количине*, и јавља се као *непозната*.

Према томе, да ли је функција $f(x)$ алгебарска или трансцендентна, зове се и једначина 1) *алгебарска* или *трансцендентна*. У даљем току рада ми ћемо се бавити поглавито са теоријом алгебарских једначина, која је теорија један од најважнијих делова целе анализе.

Онако разрађене теорије трансцендентних једначина, као што је теорија алгебарских једначина, немамо. То се даје лако објаснити самом природом трансцендентних функција, као и бесконачном различношћу истих. Међу тим има појединих метода за разрешавање таквих једначина, које ћемо на своме месту изложити.

I. Општа својства алгебарских једначина.

2. Свака алгебарска једначина са једном непознатом x може се довести најзад на овакав облик:

1.) $$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0.$$

Зарад тога треба само задату једначину ослободити разломака, у којих се имениоцу и корених израза, у којима се под кореним знаком налази непозната x.

Кад је једначина под 1) представљена у облику 1), она се зове *уређеном*. Изложилац m највишег степена од x јесте *цео* и *положан* број, он одређује степен једначине. Количине

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_{m-1},\ a_m,$$

које од непознате x не зависе, зову се *сачиниоци* једначине. Они могу бити ма какви стварни или уображени бројеви. Кад су сачиниоци особени бројеви, једначина се зове *бројном*.

Полином лево од знака једнакости у једначини 1) зове се *полином једначине*. Ми ћемо га у будуће краткоће ради означавати са $f(x)$ или са X. У потпуној једначини m-га степена може бити највише $(m+1)$ чланова. Ако неких чланова у једначини нема, то ће рећи, ако су неки од сачинилаца њених $= 0$, она се зове *непотпуном*.

Свака вредност x-а, која поништава полином једначине, дакле која задовољава задату једначину, зове се *корен* једначине. Разрешити задану једначину значи изнаћи јој корене. Разрешавање једначина оснива се на извесним својствима истих; али пре него што пређемо на излагање истих својстава, ми ћемо доказати, да свака једначина мора имати барем један корен, и ако то не би било потребно, јер смо већ у алгебарској анализи № 166 доказали, да свака једначина m-га степена мора имати m корена, ни више ни мање.

Примедба. Ако ставимо $y = f(x)$, онда је то једначина једне криве линије. Апсцисе тачака, у којима та линија сече апсцисну осу, јесу линеарни представници корена једначине $f(x) = 0$.

3. *Свака једначина m-ог степена мора имати бар један корен облика $p + qi$, где су p и q стварни бројеви и где q и нула може бити.*

Узмимо нека је задата једначина:

1.) $$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0.$$

Кад у полиному $f(x)$ заменимо x са $p + qi$, где су p и q неодређене стварне количине, добијамо:

2.) $$f(p+qi) = (p+qi)^m + a_1 (p+qi)^{m-1} + \ldots + a_{m-1}(p+qi) + a_m$$

Ако сад десно по биномном обрасцу развијемо, добићемо:

$$f(p+qi) = P + Qi, \tag{3.}$$

где су P и Q стварне функције од p и q. Ако означимо са R модуо уображеног израза

$$P + Qi$$

онда је:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

такође стварна функција од p и q. Ако сад количинама p и q дамо све могуће вредности од $-\infty$ до $+\infty$ и те вредности комбинишемо све по две и две на све могуће начине, онда ће и модуо R добити бесконачно много различних вредности, од којих једна, пошто се модуо R узима увек положан, мора нужно бити најмања. Ако су p_0 и q_0 оне вредности за p и q, за које модуо R добија своју најмању вредност R_0, онда је:

$$f(p_0+q_0 i) = P_0 + Q_0 i \quad \text{и} \tag{4.}$$

$$R_0 = \sqrt{P_0^2 + Q_0^2} \tag{5.}$$

Ми сада тврдимо, да је *најмањи модуо* $R_0 = 0$.

Ово што тврдимо биће доказано, ако докажемо, да је неумесна и не може вредити претпоставка, да је најмањи модуо R_0 од нуле различан, јер ћемо тада увек моћи за x наћи вредност $p_0 + q_0 i + z$, где је z тако да је вредност модула R, која одговара тој вредности x-а, мања од R_0.

Нека је дакле модуо R_0, па дакле услед тога и израз

$$P_0 + Q_0 i$$

од нуле различан. Ако у функцији $f(x)$ ставимо

$$x = p_0 + q_0 i + z,$$

где је z у опште облика $\alpha + \beta i$, добићемо

$$f(p_0+q_0 i+z) = (p_0+q_0 i+z)^m + a_1(p_0+q_0 i+z)^{m-1} + \dots$$
$$\dots + a_{m-1}(p_0+q_0 i+z) + a_m,$$

или кад десно од знака једнакости назначене радње свршимо и по растућим степенима z-а уредимо:

$$f(p_0+q_0 i+z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots \tag{6.}$$
$$\dots + u_{m-1} z^{m-1} + z^m.$$

Одавде за $z = 0$ следује:

$$f(p_0 + q_0 i) = u_0$$

или услед једначине под 4):

$$u_0 = P_0 + Q_0 i.$$

Остали сачиниоци у 6):

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \dots\ u_{m-2},\ u_{m-1}$$

зависе такође од p_0, q_0 и сачинилаца једначине 1) и јесу облика $\mu + \nu i$. Ми ћемо вредности тих сачинилаца у 6) означити са

$$P_1 + Q_1 i,\ P_2 + Q_2 i, \dots$$

и тада једначина 6) изгледа овако:

$$7.)\quad f(p_0+q_0i)=P_0+Q_0i+(P_1+Q_1i)z+(P_2+Q_2i)z^2+\ldots\ldots+z^m.$$

Одавде следује:

$$8.)\quad f(p_0+q_0i)=(P_0+Q_0i)\left[1+\frac{P_1+Q_1i}{P_0+Q_0i}z+\frac{P_2+Q_2i}{P_0+Q_0i}z^2+\ldots+\frac{z^m}{P_0+Q_0i}\right]$$

Ако означимо са R' модуо израза на десној страни ове једначине а са ϱ модуо израза:

$$9.)\quad \left[1+\frac{P_1+Q_1i}{P_0+Q_0i}z+\frac{P_2+Q_2i}{P_0+Q_0i}z^2+\ldots\ldots+\frac{z^m}{P_0+Q_0i}\right]$$

онда пошто је R_0 модуо израза

$$P_0+Q_0i$$

следује:

$$10.)\quad R'=R_0.\varrho$$

Пошто је z са свим произвољно, то га одредимо из једначине

$$\frac{P_1+Q_1i}{P_0+Q_0i}z=-\varepsilon$$

Из ње следује:

$$z=-\varepsilon\frac{P_0+Q_0i}{P_1+Q_1i}$$

где је ε мала, положна и стварна количина. Ако сад у 9) заменимо z са овом вредношћу, онда израз под 9), коме је ϱ модуо, јавља се у облику

$$1-\varepsilon+\varepsilon^2k+\varepsilon^3k_1+\varepsilon^4k_2+\ldots+\varepsilon^mk_{m-2}$$

Поједини сачиниоци k у овом изразу јесу облика $\alpha+\beta i$, у осталом до њиних вредности није нам стало. Ако су сад

$$\nu,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \ldots\ldots\ \nu_{m-2}$$

модули сачинилаца k, онда су:

$$1-\varepsilon,\ \varepsilon^2\nu,\ \varepsilon^3\nu_1,\ \varepsilon^4\nu_2\ \ldots\ldots\ \varepsilon^m\nu_{m-2}$$

модули количина

$$1-\varepsilon,\ \varepsilon^2k,\ \varepsilon^3k_1,\ \varepsilon^4k_2,\ \ldots\ldots\ \varepsilon^mk_{m-2}$$

Пошто је сад модуо збира више количина мањи од збира њиних модула, то је:

$$\varrho<1-\varepsilon+\varepsilon^2\nu+\varepsilon^3\nu_1+\varepsilon^4\nu_2+\ \ldots\ldots+\varepsilon^m\nu_{m-2},$$

или:

$$11.)\quad \varrho<1-(\varepsilon-\varepsilon^2\nu-\varepsilon^3\nu_1-\varepsilon^4\nu_2-\ldots-\varepsilon^m\nu_{m-2})$$

Али се ε може узети тако мало (алгебарска анализа № 24), да је

$$\varepsilon>\varepsilon^2\nu+\varepsilon^3\nu_1+\varepsilon^4\nu_2+\ \ldots\ldots+\varepsilon^m\nu_{m-2}.$$

Но тада је израз:

$$\varepsilon - \varepsilon^2\nu - \varepsilon^3\nu_1 - \varepsilon^4\nu_2 - \; . \; . \; . \; . \; - \varepsilon^m\nu_{m-2}$$

положан и за то услед 11):

$$\rho < 1.$$

и онда услед обрасца 10) и

$$R' < R_0,$$

R' јесте модуо вредности, коју полином $f(x)$ добија кад у њему ставимо

$$x = p_0 + q_0 i + z.$$

Ми смо дакле доказали, да се, ако најмањи модуо R_0 није једнак нули, може за z увек наћи таква вредност, да је:

$$R' < R_0.$$

Али тада R_0 није најмањи модуо, као што смо претпоставили. Претпоставка, да је најмањи модуо R_0 од нуле различан, јесте дакле лажна; тај најмањи модуо мора бити дакле једнак нули.

Пошто је $R_0 = 0$, онда на основу једначине 5) морају и P_0 и Q_0 бити једнаки 0, одакле следује:

$$P_0 + Q_0 i = 0.$$

Али је лева страна ове једначине вредност полинома $f(x)$ за

$$x = p_0 + q_0 i\,;$$

дакле је ова вредност x-а корен једначини 1).

Може се десити, да су $P_1 + Q_1 i$, као и још неколико од следећих сачинилаца у једначини 7) једнаки нули. Ако узмемо на ум, да сви сачиниоци у 7) не могу бити једнаки 0, јер би тада

$$f(p_0 + q_0 i + z)$$

било једнако сталној количини

$$P_0 + Q_0 i$$

дакле би, услед неодређености z-а, полином $f(x)$ за сваку вредност x-а имао исту вредност, што не може бити, то онда нека је:

$$\frac{P_n + Q_n i}{P_0 + Q_0 i}\, z^n$$

први од чланова једначине 9), који није $= 0$. Ставимо сад,

$$\frac{P_n + Q_n i}{P_0 + Q_0 i}\, z^n = -\varepsilon^n$$

одакле:

$$z = \varepsilon \sqrt[n]{-\frac{P_0 + Q_0 i}{P_n + Q_n i}}$$

где је опет ε једна мала, стварна и положна количина. Ако сад заменимо у изразу под 9) z овом вредношћу, тај ће се израз јавити у облику;

$$1 - \varepsilon^n + \varepsilon^{n+1}k_{n+1} + \varepsilon^{n+2}k_{n+2} + \ldots + \varepsilon^m k_m.$$

Ако као и горе означимо са ρ модуо овог збира, а са ν_{n+1}, $\nu_{n+2} \ldots \nu_m$ модуле сачинилаца:

$$k_{n+1},\ k_{n+2},\ k_{n+3}\ \ldots\ .\ k_m,$$

наћићемо да је:

$$\rho < 1 - \varepsilon^n + \varepsilon^{n+1}\nu_{n+1} + \varepsilon^{n+2}\nu_{n+2} + \ldots + \varepsilon^m \nu_m,$$

где се опет ε може узети тако мало, да је $\rho < 1$. Дакле се и сада може ε изабрати тако мало, да је $R' < R_0$ и с тога остају у снази сви горњи закључци.

4. Из онога што је доказано у № 95 алгебарске анализе следује већ: *да је полином $f(x)$ задате једначине дељив без остатка сваким кореним чиниоцем једначине*, ако под кореним чиниоцем разумемо разлику између непознате x и ма којег корена једначине. Но ми ћемо то овде доказати на још један начин.

Узмимо нека је α један корен једначине:

$$1.)\quad f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

и замислимо, да је количник, који се добија, кад се полином $f(x)$ подели кореним чиниоцем $(x-\alpha)$:

$$f_1(x) = x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-2}x + b_{m-1},$$

јер тај количник мора бити $(m-1)$-ог степена. Ако је R остатак при тој деоби, онда се у том остатку не може налазити x, пошто је делилац $(x-\alpha)$ првог степена. Дакле вреди за сваку вредност x-а једначина:

$$f(x) = (x-\alpha)\, f_1(x) + R,$$

а одавде за $x = \alpha$ следује:

$$f(\alpha) = R;$$

али како је α корен једначине 1), то је:

$$2.)\qquad f(\alpha) = R = 0,$$

дакле је $R = 0$ и за то је функција $f(x)$ дељива без остатка кореним чиниоцем $(x-\alpha)$.

Из једначине 2) видимо, да остатак деобе у оном случају, кад α није корен једначине, није ништа друго, до вредност, коју полином једначине добија за $x = \alpha$.

Ми ћемо успут да покажемо један прост начин, како се долази до количника.

Узмимо нека је полином, који се има делити са $(x-\alpha)$:

$$3.)\qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m.$$

где смо, ради веће општости, узели, да је први сачинилац различан од јединице. Ако сад претпоставимо да је тражени количник:

$$b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ .\ .\ .\ + b_{m-2}x + b_{m-1}$$

а b_m остатак, онда вреди једначина:

$$(x-\alpha)\,[b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ .\ .\ .\ + b_{m-1}) + b_m =$$
$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ .\ .\ .\ + a_m.$$

Ако лево означено множење свршимо и за тим закључимо по правилу неодређених сачинилаца, добићемо овај низ једначина:

$$b_0 = a_0$$
$$b_1 = b_0\alpha + a_1$$
$$b_2 = b_1\alpha + a_2$$
$$b_3 = b_2\alpha + a_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$b_{m-1} = b_{m-2}\alpha + a_{m-1}$$
$$b_m \;= b_{m-1}\alpha + a_m.$$

Као што се види први сачинилац количника једнак је првом сачиниоцу дељенога полинома а сваки доцнији сачинилац количника нпр. ν-ни добија се, кад се $(\nu-1)$-ви сачинилац количника умножи са α, и производу се дода ν-ни сачинилац дељенога полинома.

При израчунавању сачинилаца количникових ради се најбоље на овај начин:

$$\begin{array}{r|l} & a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3\ \ldots\ldots\ a_m \\ \alpha & \\ & b_0,\quad b_1,\quad b_2,\quad b_3\ \ldots\ldots\ b_m \end{array}$$

То јест напишу се сви сачиниоци дељенога полинома редом, не изузев ни оне, који су $=0$, у једну врсту. Испод a_0 долази $b_0 = a_0$, а сваки доцнији број друге врсте добија се, кад се онај лево од њега помножи са α и томе се производу дода број прве врсте, који је над њим (Хорнеров начин делења).

Пример.

Да се подели са $x-2$ полином

$$2x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 1$$

$$\begin{array}{r|llllll} & 2, & 0, & -3, & 2, & 4, & -1 \\ 2 & 2, & 4, & 5, & 12, & 28, & \underline{55} \end{array}$$

Количник је дакле:

$$2x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 12x + 28$$

а остатак је 55.

5. У № 95 алгебарске анализе доказано је, да ако су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_m$ корени једначине:

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

да се онда полином једначине може представити као производ из a_0 и m корених чинилаца, дакле овако:

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_m).$$

Али истинитост те теореме, коју смо на поменутом месту алгебарске анализе доказали, увиђа се и из доказа теореме:

Да једна једначина m-ог степена са једном непознатом мора имати m корена ни више ни мање.

Узмимо н. пр. нека је дата једначина:

$$X_m = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m = 0.$$

Ова једначина на основу № 3 мора имати бар један корен. Ако је α_1 тај корен, онда полином X_m једначине мора бити дељив са $(x-\alpha_1)$ и за то је:

$$1.) \qquad X_m = X_{m-1}(x-\alpha_1)$$

где је количник X_{m-1} степена $(m-1)$-га. Ако поменути количник ставимо једнак нули, добијамо

$$X_{m-1} = 0;$$

и та једначина мора имати барем један корен; ако је α_2 тај корен, онда је полином X_{m-1} дељив са $(x-\alpha_2)$ и за то је:

$$X_{m-1} = X_{m-2}(x-\alpha_2)$$

где је количник X_{m-2} степена $(m-2)$-ог. Замењујући ово у 1), добијамо:

$$2.) \qquad X_m = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)X_{m-2};$$

ако количник X_{m-2} ставимо $=0$ добијамо:

$$X_{m-2} = 0.$$

Ова једначина опет мора имати бар један корен. Ако је тај корен α_3, онда је полином X_{m-2} дељив са $(x-\alpha_3)$ и за то је:

$$X_{m-2} = X_{m-3}(x-\alpha_3)$$

где је количник X_{m-3} степена $(m-3)$-ег. Кад ово заменимо у 2) добијамо:

$$3) \qquad X_m = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)X_{m-3}.$$

Ако наставиш овако радити и даље, видећемо, да ће израз за X_m добијати све по једног чиниоца више облика $(x-\alpha)$, док ће међу тим степен последњег чиниоца — количника — поступно све са једном јединицом опадати. На тај начин, кад смо, радећи тако и даље добили у изразу за X_m најзад и $(m-2)$-ог чиниоца облика $(x-\alpha)$, онда је последњи чинилац X_2 другог степена, који се с тога може представити и у облику производа:

$$4.) \qquad a_0(x-\alpha_{m-1})(x-\alpha_m)$$

Дакле ћемо најзад наћи да је:

$$5.) \qquad X_m = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_{m-1})(x-\alpha_m)$$

Одавде видимо, да је полином дате једначине $=0$ за сваку од ових m вредности x-а:

$$x = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{m-1},\ \alpha_m;$$

дакле те вредности m на броју, јесу корени задане једначине. Сем тих m, дана једначина:

$$X_m = 0$$

не може имати више корена, јер кад би она имала нпр. α_{m+1} као $(m+1)$-ви корен, он би морао поништити X_m, а то, као што се из једначине 5) види, није могуће.

И тако смо дакле доказали, не само да једначина m-ог степена мора имати m корена ни више ни мање, него смо успут, као што то показује једначина 5), доказали још и то, *да се полином сваке једначине може представити као производ из његовог првог сачиниоца a_0 и m корених чинилаца.*

Може се десити, да се међу кренима једначине 1) налази и таквих, који су једнаки међу собом. И у таквом случају каже се, да једначина 1) има m корена и ако она у ствари има мање од *m различних* корена. Међу кореним чиниоцима у обрасцу 2) биће их онда и једнаких.

У једначини 5) исказана је следећа важна теорема, коју треба запамтити:

Свака рационална и цела алгебарска функција може се представити као производ од m простих чинилаца, тј. *таквих, који су првог степена.*

Још треба запамтити да једначина $(m-1)$-ог степена

$$6.)\qquad f_1(x) = 0,$$

која постаје, кад се количник измеђ полинома $f(x)$ задате једначине и кореног чиниоца $(x-\alpha_1)$ стави једнак нули, има за корене све остале корене $\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_m$ задане једначине.

Исто тако са свим је сад јасно, како се може склопити једначина, кад су нам корени њени познати.

Тако н. пр. једначина, која има за корене: -1, $+2$, и -3 јесте:

$$(x+1)(x-2)(x+3) = 0$$

или:

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0.$$

6. Корени једначине морају очевидно зависити од њених сачинилаца, дакле и обратно сачиниоци једначине морају зависити на извесан начин од њених корена. Ми ћемо да докажемо, да су сачиниоци једначине симетричне функције њених корена.

Ако претпоставимо, да су:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_m$$

корени једначине:

$$1.)\qquad x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$$

онда је

$$x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m =$$
$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_m).$$

Ако узмемо на ум образац 1) у № 83 алгебарске анализе, онда се израз десно од знака једнакости може заменути изразом:

$$x^m - s_1x^{m-1} + s_2e^{m-2} - s_3x^{m-3} + \ldots + (-1)^m s_m,$$

где s_1 значи збир корена једначине 1), s_2 збир комбинација друге класе а без понављања из истих корена; s_3 збир комбинација треће класе без понављања из истих корена и т. д.; s_m збир комбинација m-не класе из истих корена, дакле производ истих. Из једначине:

$$x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m =$$
$$x^m - s_1x^{m-1} + s_2x^{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1}s_{m-1} + (-1)^m s_m,$$

која вреди за сваку вредност x-а, следује на основу правила о неодређеним сачиниоцима:

$$2.)\quad \left|\begin{array}{l} a_1 = -s_1 = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_m) \\ a_2 = s_2 = (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{m-1}\alpha_m) \\ a_3 = -s_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_1\alpha_{m-1}\alpha_m+\ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m = (-1)^m s_m = (-1)^m\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m. \end{array}\right.$$

Дакле *у свакој једначини, у којој је сачинилац првог члана јединица:*

Сачинилац другог члана јесте збир корена узет са противним знаком.

Сачинилац трећег члана јесте збир комбинација друге класе без понављања, а начињених из корена једначине.

Сачинилац четвртог члана јесте са противним знаком узет збир комбинација треће класе без понављања начињених из корена једначине и т. д.

Последњи је члан једнак производу свију корена једначине, узетом са својим или противним знаком како је кад једначина парног или непарног степена, или другим речима: једнак је производу свију са противним знаком узетих корена.

Лако је сад увидети, да кад другог члана у једначини нема, да је онда збир корена $=0$ и да код последњег члана нема, да је тада један корен једначине $=0$.

7. Помоћу теореме у предњој №-и налазимо m једначина — оне под 2) — између m непознатих корена дане једначине. С тога могли бисмо на први мах помислити, да би тражење корена задане једначине било олакшано, кад бисмо једначину 1) у № 6 сменули системом једначина под 2). Али то не стоји, јер како се сви корени једначине 1) јављају у једначинама 2) на са свим исти начин, т. ј. симетрично, то онда једначина са α_1, која се из једначина 2) добија елиминацијом осталих — непознатих — корена $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots \alpha_m$, мора бити истоветна са једначином, која се добија из истих једначина 2) кад се из ових избаце сви непознати корени осем нпр. корена α_2. Према томе једначина са α_1 мора дати све корене задате једначине и с тога она мора бити истоветна са једначином 1) у № 6 само што свуда место x стоји α_1.

И доиста, нека су $s_1, s_2, s_3 \ldots s_{m-1}$ збирови комбинација 1-ве, 2-ге, ... $(m-1)$-ве класе без понављања, начињених из корена $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$. Онда на основу науке о комбинацијама или №-е 83 алгеб. анализе вреде једначине:

$$a_1 = -\alpha_1 - s_1$$

$$a_2 = s_1\alpha_1 + s_2$$

$$a_2 = -s_2\alpha_1 - s_3$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m-1} = (-1)^{m-1}s_{m-2}\alpha_1 + (-1)^{m-1}s_{m-1}$$

$$a_m = (-1)^m . s_{m-1} . \alpha_1 .$$

Кад помножимо прву од ових једначина са α_1^{m-1}, другу са α_1^{m-2}, трећу са α_1^{m-3} ... предпоследњу са α_1, а последњу са $\alpha_1^0 = 1$ и дбивене резултате саберемо, наћиђемо:

$$a_1 \alpha_1^{m-1} + a_2 \alpha_1^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\alpha_1 + a_m = -\alpha_1^m$$

а то је једначина 1), само што место непознате x стоји α_1.

Но овим што смо сазнали није казано и то, да у изузетним приликама, нпр. кад су нам сем образаца под 2) у № 6 познати и други какви односи између корена, није могуће помоћу тих односа и образаца 2) изнаћи корене задате једначине.

Тражимо н. пр. корене једначине:

$$x^3 + px + q = 0,$$

знајући, да су два корена њена једнака.

Ако означимо са α_1 њен прост корен, а са α_2 корен који се у њој два пут јавља, онда је:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \text{ одакле } \alpha_1 = -2\alpha_2$$

Сачинилац p је збир комбинација друге класе без понављања, начињених из корена једначине. Дакле је:

$$p = 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 = -4\alpha_2^2 + \alpha_2^2 = -3\alpha_2^2;$$

одатле:

$$\alpha_2 = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \mp 2\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

где треба узети или само горње или само доње знаке.

8. Пре но што би смо прешли на излагање даљих својстава алгебарских једначина, имали бисмо доказати, *да је полином сваке алгебарске једначине непрекидна функција x-а.* Но то је већ доказано у №-ама 77 и 132 алгеб. анализе, јер је полином једначине цела и рационална функција x-а.

У ономе, што сада долази, није нам дакле до тога стало, да докажемо непрекидност полинома једначине, колико да дођемо до других резултата, који ће нам доцније користити.

Узмимо, нека је задата једначина:

$$1.)\quad f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0.$$

Кад у њој ставимо $x + h$ место x, добићемо:

$$f(x+h) = a_0(x+h)^m + a_1(x+h)^{m-1} + \ldots + \\ + \ldots + a_{m-1}(x+h) + a_m.$$

Кад по биномном обрасцу развијемо и уредимо по растућим степенима од h добићемо:

$$2.)\quad f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \\ \ldots + f^{m-1}(x)\frac{h^{m-1}}{(m-1)!} + f^m(x)\frac{h^m}{m!}$$

где смо ради краткоће ставили:

$$3.)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m \\ f'(x) &= m\,a_0x^{m-1} + (m-1)\,a_1x^{m-2} + (m-2)\,a_2x^{m-3} + \\ &\quad + \ldots + a_{m-1} \\ f''(x) &= m(m-1)\,a_0x^{m-2} + (m-1)(m-2)\,a_1x^{m-3} + \\ &\quad (m-2)(m-3)\,a_2x^{m-4} + \ldots + a_{m-2} \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)\,a_0x^{m-3} + \\ &\quad + (m-1)(m-2)(m-3)\,a_1x^{m-4} + \ldots + a_{m-3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{m-1}(x) &= m(m-1)(m-2)\ldots4.3.2.a_0x + (m-1)(m-2) \\ &\quad \ldots 4.3.2.1.a_1 \\ f^m(x) &= m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots4.3.2.1.a_0. \end{aligned}\right.$$

Помоћу једначине 2) лако је доказати, да при ма којој коначној вредности x-а разлике:

$$f(x+h) - f(x),\ f(x) - f(x-h)$$

теже 0, кад h тежи нули, да је дакле полином $f(x)$ непрекидна функција x-а између граница $x = -\infty$ и $x = +\infty$.

Ако тражимо по упуствима №-е 190 алгеб. анализе први извод задатога полинома, па онда први извод тога извода и т. д. наћи ћемо, да је:

$f'(x)$	први	извод	функције	$f(x)$
$f''(x)$	„	„	„	$f'(x)$
$f'''(x)$	„	„	„	$f''(x)$
$f''''(x)$	„	„	„	$f'''(x)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$f^{m-2}(x)$	„	„	„	$f^{m-3}(x)$
$f^{m-1}(x)$	„	„	„	$f^{m-2}(x)$
$f^{m}(x)$	„	„	„	$f^{m-1}(x)$

Функције $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x) \dots f^{m}(x)$ зову се редом: први, други, трећи . . . m-ни извод функције или полинома $f(x)$.

Као што се из горњих образаца 3) види, први извод $f'(x)$ добија се из $f(x)$, кад се у овој сваки члан помножи са изложиоцем x-а, а сам се изложилац за јединицу смањи. На исти прост начин добија се и сваки други извод из претходећег.

Овде је важно још приметити, да степени узастопних извода поступно опадају са јединицом: $f(x)$ је m-ног

степена, $f'(x)$ $(m-1)$-ног, $f''(x)$ $(m-2)$-ог . . . $f^{m-1}(x)$ је првог, а $f^{m}(x)$ је 0-ог степена, дакле стална количина. Следећи изводи $(m+1)$-ви, $(m+2)$-ги . . . . јесу $= 0$. Сваки доцнији извод има по једног сачиниоца функције $f(x)$ мање. У последњем m-ном изводу налази се само a_0, први сачинилац функције $f(x)$.

Образац 2) зове се Taylor-ов образац. Ми ћемо га у овом делу често употребљавати и у овом облику:

$$4.)\quad f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + f''(x)\,h^2 + \dots + f^{m}(x)h^{m}.$$

где $f'(x)$ значи опет први извод функције $f(x)$, а

$$5.)\qquad f''(x).\ f'''(x),\ f''''(x) \dots f^{m-1}(x),\ f^{m}(x)$$

значе пређашњи други, трећи четврти . . . $(m-1)$-ви, m-ни извод функције $f(x)$, али подељен редом са $2!$, $3!$, $4!$ . . . $(m-1)!$ и $m!$ Ми ћемо функције под 5) које се јављају као сачиниоци у 4.) звати *алгебарским изводима* функције $f(x)$, и то посебице први, други, трећи, и т. д. Што алгебарске изводе означавамо онако исто као и обичне изводе, то неће давати повода никаквој забуни, јер ће се увек из самог рада видити, које изводе имамо на уму, да ли обичне или алгебарске.

Други алгебарски извод постаје из првог онако исто, као што овај постаје из $f(x)$, али само што сваки члан ваља још поделити са 2; $f'''(x)$ постаје из $f''(x)$ онако исто као и $f'(x)$ из $f(x)$ само што сад још сваки члан треба поделити са 3 и т. д.

Пример. Изводи функција:

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 7,$$

јесу:

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 4x - 1,$$

$$f''(x) = 12x^2 - 30x + 4,$$

$$f'''(x) = 24x - 30,$$

$$f''''(x) = 24$$

Алгебарски изводи њени јесу:

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 4x - 1,$$

$$f''(x) = 6x^2 - 15x + 2,$$

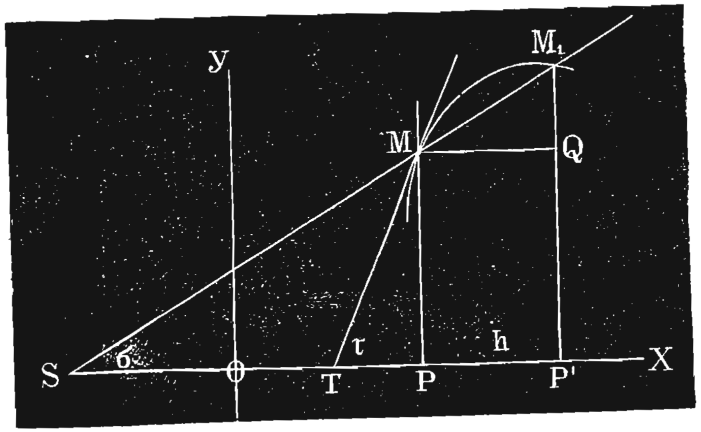
$$f'''(x) = 4x - 5,$$

$$f''''(x) = 1.$$

9. Ако је $f(x) = 0$ задата једначина, и ако ставимо:

6.) $$y = f(x)$$

онда ми можемо по упуствима аналитичне геометрије конструјисати једначину 6) и тада ћемо добити једну криву



Сл. 1.

линију. Рецимо да је та крива линија она у слици 1). Нека су M и M_1 две тачке те линије, и кроз M нека је

повучена дирка MT а кроз M и M_1 сечица M_1S; τ и σ нека су угли, које граде са x-ном осом дирка и сечица.

Ако је сад $PP_1 = h$, $OP = x$, апсциса тачке M_1 и $OP_1 = x + h$ апсциса тачке M_1, онда је:

$$MP = f(x); \quad M_1P_1 = f(x + h), \text{ дакле:}$$

$$M'Q = f(x + h) - f(x) \quad \text{и}$$

$$\frac{M'Q}{MQ} = tg\sigma = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Из ове једначине кад пустимо да h тежи нули, следује:

7.) $$lim\; tg\,\sigma = lim\, \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Али кад h тежи нули, онда се сечица обрће око M и тежи да заузме положај дирке. Граница, којој тежи угао σ, јесте дакле угао τ, и по томе граница којој тежи $tg\sigma$ јесте $tg\tau$. У осталом граници, којој тежи израз:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

јесте [№ 190 алгеб. анал.] $f'(x)$ т. ј. први извод функције $f(x)$. Дакле из једначине 7) за $h = 0$ добијамо:

8.) $$tg\,\tau = f'(x)$$

И по томе *први извод функције $f(x)$ преставља угаоног сачиниоца дирке, која је повучена кроз ону тачку линије 6), чија је апсциса $= x$.*

И ово вреди, па била $f(x)$ алгебарска, цела и рационална функција или не била.

10. У № 8 показали смо лак начин, како се добија први извод једне целе и рационалне алгебарске функције, док смо међу тим у № 190 алгеб. анализе показали општу методу, помоћу које се долази до првог извода ма какве функције. Тамо смо изнашли прве изводе за неколико најважнијих функција и то:

$$x^m,\ (1+x)^m,\ \sin mx,\ \sin x,\ \cos mx,\ \cos x,$$

$$a^x,\ e^x,\ \log x,\ \text{и}\ l\,x.$$

Овде ћемо се упустити мало дубље у теорију извода, пошто ће нам то доцније требати.

1°. Функција $f(x)+c$ и функција $f(x)$ имају на основу, №-е 190 алгеб. анализе исти први извод $f'(x)$. Дакле, можемо казати:

Кад је разлика двеју функција стална, њихни изводи морају бити једнаки.

Одатле опет непосредно следује:

Први извод сталне количине је $= 0$.

Лако је досазати, да и обратно:

Кад је први извод једне функције једнак нули, да се онда функција своди на сталну количину, и

Кад су први изводи двеју функција једнаки, онда разлика тих двеју количина мора бити стална.

2°. Узмимо нека је:

$$F(x) = f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots..$$

Кад заменимо x са $x+h$ добијамо:

$$F(x+h) = f(x+h) + \varphi(x+h) + \psi(x+h) + \ldots.$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

$$+ \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} + \ldots.$$

Одавде, кад пустимо, да h тежи 0 добијамо:

$$F'(x) = f'(x) + \varphi'(x) + \varphi'(x) + \ldots..$$

У овој једначини исказана је теорема:

Први извод збира — алгебарског — више функција једнак је збиру — алгебарском — првих извода тих функција.

3°. Узмимо нека је:

$$F(x) = f(x).\ \varphi(x).$$

Кад заменимо x са $x+h$ имамо:

$$F(x+h) = f(x+h).\ \varphi(x+h).$$

Одузимањем ових двеју једначина добијамо:

$$F(x+h) - F(x) = f(x+h).\ \varphi(x+h) - f(x).\ \varphi(x)$$

$$= f(x+h)\left\{\varphi(x+h) - \varphi(x)\right\} + \varphi(x)\left\{f(x+h) - f(x)\right\}$$

или:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= f(x+h)\left\{\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right\} + \varphi(x)\left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right.$$

Кад сад замислимо, да h аежи нули, онда узимајући на ум да је:

$$lim\, f(x+h) = f(x)$$

добијамо:

$$F'(x) = f(x).\ \varphi'(x) + \varphi(x).\ f'(x).$$

У којој је једначини исказана теорема:

Први извод производа двеју функција једнак је збиру производа, које добијамо, кад сваку функцију помножимо са првим изводом друге.

Ова се теорема лако даје проширити и на производ од ма колико функција. И онда стоји да је први извод производа од m функција = збиру производа који се добијају, кад се први извод сваког чиниоца помножи са производом свију осталих чинилаца.

Из обрасца:

$$F'(x) = f(x).\ \varphi'(x) + \varphi(x).\ f'(x)$$

или и не посредно дознаје се, да је први извод функције $a.\, f(x)$ једнак првом изводу функције $f(x)$ умноженом са a.

4°. Нека је сад дата функција:

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}.$$

Кад заменимо x са $x+h$ имамо:

$$F(x+h) = \frac{\varphi(x+h)}{f(x+h)}.$$

Кад ове две једначине одузмемо, па лево и десно поделимо са h, имаћемо:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x).\ \varphi(x+h) - \varphi(x).\ f(x+h)}{h.\ f(x).\ f(x+h)},$$

или после мале измене десно од знака једнакости

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$\frac{f(x).\left\{\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right\} - \varphi(x)\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}}{f(x).\ f(x+h)}.$$

Сад кад пустимо, да h тежи 0, добијамо:

$$F'(x) = \frac{f(x).\ \varphi'(x) - \varphi(x).\ f'(x)}{\overline{f(x)}^2}.$$

У овој једначини исказана је теорема:

Први извод разломка добија се кад се именилац помножи са првим изводом бројиоца, и од нађеног производа одузме производ из бројиоца и првог извода имениоца, па се разлика подели са квадратом имениоца.

Одавде или непосредно из №-е 190 алгеб. анализе, лако је доказати, *да се први извод разломка, коме је бројилац сталан, добија, кад се бројилац помножи са првим изводом имениоца, производ подели са квадратом имениоца и резултат узме са знаком minus.*

5°. На основу теореме под 3°, ако је:

$$y = [f(x)]^m$$

и m цело и положно, онда први извод те функције, ако га означимо са y' биће:

$$y' = m\,[f(x)]^{m-1} f'(x)$$

То ће рећи: *први извод m-ог степена добија се, кад се први извод функције помножи са њеним изложиоцем и још са (m—1)-вим степеном њеним.*

Ако је изложилац цео а одречан број, онда је на основу онога што је речено под 4°, као и ове последње теореме;

$$y' = \frac{-\,m.\,[f(x)]^{m-1}.\,f'(x)}{[f(x)]^{2m}} = -\,[f(x)]^{-m-1} f'(x).$$

Дакле вреди последња теорема и за целе и за одречне изложиоце.

Ако је изложилац разломљен:

$$y = [f(x)]^{\frac{m}{n}}.$$

где су m и n цели бројеви, онда одатле следује:

$$y^n = [f(x)]^m,$$

одакле

$$n\,y^{n-1} y' = m\,[f(x)]^{m-1}.\,f'(x),$$

или

$$y' = \frac{m[f(x)]^{m-1}\,f'(x)}{n\,y^{n-1}}.$$

или кад се y замени горњом вредношћу, па скрати:

$$y' = \frac{m}{n}\,[f(x)]^{\frac{m}{n}-1}\,f'(x).$$

Дакле вреди теорема и за разломљене изложиоце.

Ако је: $y = \sqrt{f(x)} = [f(x)]^{\frac{1}{2}}$,

онда је:

$$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Дакле први извод квадратног корена једнак је првом изводу функције под кореним знаком подељеном са двогубим квадратним кореном.

6°. Нека је сад:

$$y = \sin f(x)$$

и y' први извод те функције, онда је:

$$y' = \lim \left\{ \frac{\sin f(x+h) - \sin f(x)}{h} \right\}$$

или:

$$y' = \lim \frac{2\cos\frac{1}{2}\left\{f(x+h) + f(x)\right\} \sin\frac{1}{2}\left\{f(x+h) - f(y)\right\}}{h}$$

или:

$$y' = \lim \cos\frac{1}{2}\left\{f(x+h) + f(x)\right\} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\left\{f(x+h) - f(x)\right\}}{\frac{1}{2}\left\{f(x+h) - f(x)\right\}} \times$$

$$\times \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

а одавде најзад:

$$y' = f'(x) \cos f(x)$$

На сличан начин налазимо, да кад је;

$$y = \cos f(x)$$

$$y' = - f'(x) \sin f(x)$$

Исто тако, ако је:

$$y = tg\, f(x),$$

први њен извод јесте:

$$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}.$$

Ако ли је:

$$y = tg\, x$$

онда је:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

7°. Нека је

$$y = a^{f(x)}$$

тада је:

$$y' = lim \left\{ \frac{a^{f(x+h)} - a^{f(x)}}{h} \right\} =$$

$$a^{f(x)}.\, lim \left\{ \frac{a^{f(x+h)-f(x)} - 1}{h} \right\}$$

или:

$$y' = a^{f(x)}.\, lim \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \frac{a^{f(x+h)-f(x)} - 1}{f(x+h) - f(x)} \right\}$$

или најзад:

$$y' = a^{f(x)}.\, la.\, f'(x).$$

Ако ли је $f(x)$ просто x, дакле.

$$y = a^x$$

онда је

$$y' = a^x.\, la.$$

Ако ли је:

$$y = e^{f(x)}$$

онда је:

$$y' = e^{f(x)}.\, f(x)$$

а ако је $f(x) = x$ просто, дакле

$$y = e^x$$

онда је:

$$y' = e^x.$$

8°. Нека је:

$$y = log_a f(x)$$

и y' први извод те функције. Из ове једначине следује:

$$f(x) = a^y$$

а из тога:

$$f'(x) = a^y\, la.\, y'$$

Решимо ову једначину односно y' и за тим заменимо a^y његовом вредношћу, па ћемо добити:

$$y' = \frac{1}{la} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Дакле је први извод логаритма функције једнак модулу логаритамске системе, помноженом са количником између првог извода функције и саме функције.

Ако је:

$$y = l\, f(x)$$

онда остаје $le = 1$, налазимо:

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

9°. Нека је:

$$y = arc\, sin\, f(x).$$

Одавде добијамо најпре:

$$f(x) = sin\, y$$

за тим:

$$f'(x) = y' \cos y$$

Из тога:

$$y' = \frac{f'(x)}{\cos y} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - sin^2 y}}$$

или најзад:

$$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - \left\{ f(x) \right\}^2}}$$

При кореним знаком треба да стоји знак од $\cos y$. Ако се лук завршује у првој или четвртој четврти, метућемо знак $+$ пред корени знак; а ако се лук завршује у другој или трећој четврти, метућемо знак $-$.

Ако је:

$y = arc\, sin\, x$, онда је: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Ако је:

$$y = arc\, cos\, f(x)$$

добијамо на сличан начин:

$$y' = - \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - \left\{ f(x) \right\}^2}},$$

где пред кореним знаком треба да стоји знак од $sin\, y$.

Ако ли је пак $y = arc\, cos\, x$, онда је $y' = - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

10°. Ако је: $y = arc\, tg\, f(x)$

онда је:

$$y' = \frac{f'(x)}{1 + \left\{ f(x) \right\}^2}.$$

Ако ли је најзад

$$y = arc\, tg\, x$$

онда је просто

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Примедба. Кад у једној функцији, која зависи од две или више промењљивих количина, тражимо први извод и при том сматрамо само једну од промењљивих количина као у истини промењљиву, а остале као сталне, онда се каже, да тој функцији тражимо први извод *односно оне промењљиве*, која се при том одиста узима као промењљива. Нађени први извод зове се тада први извод функције *односно* оне промењљиве, коју смо при том сматрали као промењљиву. Тако н. пр. ако функција зависи од промењљивих x, y, z . . . , па јој ми тражимо први извод, али сматрајући при том само x као промењљиву, онда се каже, да јој тражимо први извод односно x, и нађени први извод зове се извод функције односно x.

Тако н. пр. ако је:

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

онда је њен први извод односно x:

$$f_x'(x, y) = 2ax + by$$

а први извод односно y:

$$f_y'(x, y) = bx + 2cy.$$

Исто тако, ако је:

$$f(x, y) = a^{x+y},$$

онда је први извод односно x:

$$f_x'(x, y) = a^{x+y}\, la$$

а такође и први извод односно y је:

$$f_y'(x, y) = a^{x+y}.\, la.$$

11. Узмимо, нека је $f(x)$ стварна функција и нека x остаје стварно. Пошто је:

$$lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

то онда одатле следује, да је за h различно од нуле

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

где је ε количина која тежи нули у исти мах кад и h. Одатле следује:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) + \varepsilon\, .\, h$$

Пошто нам је слободно узети h, које сматрамо као положно, тако мало, да је ε бројно мање од $f'(x)$, то ће за тако мало h знак леве стране бити једнак са знаком првог извода $f'(x)$, то ће рећи положан или одречан, како је кад први извод $f'(x)$ положан или одречан. Одатле закључујемо: *Да докле је год при непрекидном рашћењу x-а први извод положан, дотле ће функција $f(x)$ све једнако расти, а докле је год тај извод одречан дотле ће $f(x)$ опадати.*

Да тај став вреди и онда кад га обрнемо, лако је доказати.

Кад једна непрекидна функција, до некле све расте, па за тим опада, она, пре него што почне опадати, добија вредност, која је у исти мах већа и од предње и од потоње вредности функцијине. Таква вредност функције зове се *maximum* или *највећа вредност* њена. Кад пак функција донекле опада, па за тим расте, онда она пре но што почне расти, добија вредност, која је у исти мах мања од предње и потоње вредности функцијине. Таква вредност функције зове се њен *minimum* или *најмања вредност*.

Пре но што x при свом непрекидном рашћењу добије вредност, за коју је $f(x)$ maximum, мора према горњему први извод $f'(x)$ бити положан, а пошто x пређе ту вредност, мора први извод бити одречан. Исто тако, пре него што x добије вредност, за коју је $f(x)$ минимум, мора први извод $f'(x)$ бити одречан, а пошто x пређе ту вредност, мора први извод бити положан. Дакле на кратко, кад x пређе такву вредност*a*, за коју је $f(x)$ maximum или minimum, мора $f'(x)$ променути свој знак. За саму вредност $x = a$ мора дакле $f'(x)$ бити равна нули или бесконачно великој количини, јер једна функција не може променути свој знак друкче, већ ако прође кроз нулу или кроз ∞. Обично је први извод једне непрекидне функције и сам непрекидна функција, и онда он може свој знак само тако променути, ако прође кроз нулу.

Према томе вредности x-а, за које $f(x)$ *може* бити maximum или minimum јесу оне, које поништавају њен први извод $f'(x)$, велим *може*, јер да би за једну вредност $x = a$ која поништава $f'(x)$ сама функција $f(x)$ била maximum или minimum, треба да, пошто x пређе ту вредност, функција $f'(x)$ свој знак промени. Ако је за $x = a$ $f(x)$ maximum, онда је функција $f'(x)$ најпре положна, за тим за $x = a$ једнака нули, а по том одречна, дакле $f'(x)$ све једнако опада, и с тога њен први извод, а то је други извод $f''(x)$ првобитне функције $f(x)$ мора бити све једнако одречан, дакле одречан и за $x = a$. Ако ли је $f(x)$ за $x = a$ minimum, онда је функција $f'(x)$ најпре одречна, за тим за $x = a$ једнака нули, па онда положна, дакле $f'(x)$ тада све једнако расти и с тога њен први извод $f''(x)$ мора бити све једнако положан, дакле положан и за $x = a$.

Да бисмо дакле нашли maximum и minimum функције $f(x)$, решићемо једначину

$$f'(x) = 0.$$

За једну вредност $x = a$ добивену решењем ове једначине биће $f(x)$ maximum или minimum, како је кад други извод $f''(x)$ за $x = a$ одречан или положан.

Примедба. Угаони сачинилац дирке на линију $y = f(x)$ јесте положан, док је додирна тачка пред тачком линије, која одговара maximum-у, а одречан ако је додирна тачка после тачке линијине, која одговара max. Исти угаони сачинилац јесте одречан или положан, како је кад додирна тачка пред или за тачком линије, која одговара minimum-у.

Примери.

1°. Пита се, кад ће $x^m + z^m$ бити maximum или minimum, ако се претпостави да је $x + z = a$, где је a сталан број. — За $x = \frac{a}{2}$ и $z = \frac{a}{2}$ биће $x^m + z^m$ max. или min. како је кад $m - 1 \lesseqgtr 0$.

2°. Пита се кад ће $x^m . z^n$ бити max. или min., ако је $x + z = a$. — За $x = \frac{am}{m+n}$ и $z = \frac{an}{m+n}$ биће $x^m z^n$ maximum.

3°. Наћи број x, чији је x-ти корен maximum? — Тај је број $x = e$.

4°. Да се проучи ток функције: $y = x - log_a x$. Први извод њен јесте

$$y' = 1 - \frac{1}{la} \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{log_a e}{x}.$$

за $x = 0$ јесте: $y' = -\infty$.

Кад x расти $\frac{log_a e}{x}$ опада, и први извод задате функције остаје одречан, докле x не добије вредност, за коју је $1 - \frac{log_a e}{x} = 0$, а та је вредност $x = log_a e$.

Кад x пређе ту вредност, y' постаје положно и расте приближавајући се граници 1.

Дакле функција y полази од $+\infty$ за $x = 0$ и опада све једнако до свог minimum-а, који одговара на вредности $x = log_a e$; за тим она расте бесконачно, пошто као што се лако може доказати, размера $x : log_a x$ при бесконачном рашћењу x-а бесконачно расте.

12. *Кад је једначини са стварним сачиниоцима:*

1.) $$f(x) = 0$$

$p + qi$ корен, онда јој мора и спрегнути уображени број $p - qi$ бити корен.

Јер кад у једначини ставимо $x = p + qi$ добићемо резултат облика:

$$P + Qi$$

Пошто је $p + qi$ корен једначине, то је:

$$P + Qi = 0,$$

дакле (№ 112 алгебарска анализа):

$$P = 0, \ Q = 0.$$

Али ако у једначини 1) ставимо $x = p - qi$, овда ће се резултат самене од пређашњег за $x = p + qi$ разликовати само знаком од i, дакле ће тај резултат бити:

$$P - Qi$$

и он је $= 0$, пошто је:

$$P = 0 \text{ и } Q = 0,$$

а кад је то, онда је и $p - qi$ корен једначине.

Горња теорема неби вредила, ако би једначина 1) имала уображених сачинилаца. Јер пошто се тада сачиниоци једначина неби променули при прелазу од вредности $x = p + qi$ ка вредности $x = p - qi$, то се тада не би могло тврдити, да ће вредност полинома за $x = p - qi$ бити спрегнута са његовом вредношћу, која одговара вредности $x = p + qi$.

Уображени корени јављају се дакле код *стварних* једначина, т. ј. *таквих, које имају стварне сачиниоце*, увек по двоје, и свака два и два корена, који се разликују само знаком уображеног дела, зове се *спрегнути* корени. Дакле стварна једначина може имати само парни број уображених корена, и према томе *ако је она непарног степена, она мора имати барем један стваран корен, и ако их има више, њихов број мора бити непаран. Ако ли је она — једначина — парнога степена, број стварних корена њених мора бити паран, а може их никако и не бити.*

Спрегнутим коренима $p + qi$ и $p - qi$ одговарају корени чиниоци $x - p - qi$ и $x - p + qi$, којих је производ $(x-p)^2 + q^2$.

Према томе можемо рећи:

Да је полином сваке алгебарске једначине са стварним чиниоцима производ од толико стварних чинилаца првог степена, колико има стварних корена, и од онолико *стварних чинилаца другог степена, колико има спрегова уображених корена.*

Јасно је, да, ако једначина има k корена једнаких броју $p + qi$, да велим она мора имати и толико исто корена једнаких броју $p - qi$.

13. На основу №-е 6 последњи је члан једначине једнак производу свију са противним знаком узетих корена. Пошто је сад производ двају спрегнутих корена вазда положан, и онда кад их узмемо са противним знаком, то је онда увиђавно, *да знак последњега члана у једначини зависи једино од броја положних корена.* Узимајући то на ум, лако ћемо доказати теореме, које долазе:

1°. *Свака стварна једначина непарнога степена мора имати бар један стваран корен, и знак његов противан је знаку последњега члана једначине.*

Јер на основу № 12 број њених стварних корена мора бити непаран. Ако је сад последњи члан једначине положан, то број положних корена мора бити паран, дакле једначина мора имати барем један одречан корен. Ако ли је последњи члан одречан, онда број положних корена мора бити непаран, и с тога једначина мора имати бар *један* положан корен.

2°. *Свака стварна једначина парнога степена, у којој је последњи стални члан одречан, мора имати бар два стварна корена, од којих је један положан а други одречан.*

Јер пошто је последњи члан одречан, то број положних корена мора бити непаран, дакле једначина мора имати бар један положан корен. Но како је једначина парнога степена, и с тога по № 12 број стварних корена њених мора бити паран, то онда и број одречних корена њених јесте непаран и за то она мора имати бар један одречан корен.

Сви корени једне једначине са стварним сачиниоцима могу дакле бити уображени само тако, ако је она парног

степена, и ако је последњи члан њен положан. Кад су сви корени једначине уображени, онда је њен полином производ из првог сачиниоца и чинилаца облика $(x-p)^2 + q^2$. Тада је дакле полином једначине за сваку стварну вредност x-а истог знака са првим сачиниоцем. Ако дакле нађемо, да је полином једначине за једну стварну вредност x-а противног знака са првим сачиниоцем, то одатле можемо са извесношћу закључити, да је једначина мора имати стварних корена.

Примедба. На сличан начин доказује се, да кад су сачиниоци једначине стварни и рационални бројеви и $p + q\sqrt{r}$, где је $\sqrt{r}$ ирационалан број, корен њен, да онда и $p - q\sqrt{r}$ мора бити њен корен. У таквом случају има полином једначине једног чиниоца 2-ог степена са рационалним сачиниоцима.

14. *Кад у једначини:*

$$1.) \qquad f(x) = 0$$

сменемо x са $-x$ онда нова једначина:

$$2.) \qquad f(-x) = 0$$

има исте корене са даном али противно означене.

И доиста, ако н. пр. број α поништава $f(x)$ онда број $-\alpha$ мора поништавати $f(-x)$.

Лако је увидети, да се једначина, која са даном има исте корене, али противно означене, добија, ако се само промене знаци чланова на парним местима, при чему ваља узети у рачун и оне чланове, којих нема или којих су сачиниоци $= 0$.

Тако су н. пр. једначини:

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0,$$

корени: -1, $+2$, и -3. Међу тим једначини:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

корени су: 1, -2, и $+3$.

15. Кад у једном потпуном или непотпуном полиному два узастопна члана имају противни знак, онда се каже да је на том месту *значна мена* или просто *мена*; а кад два узастопна члана имају исти знак, онда је на том месту *значна сљед* или просто *сљед*.

У потпуној једначини m-ног степена има свега $(m+1)$ чланова, одакле следује, да број мена и број сљеди износе — сабрани — број m. На основу односа, који постоје између сачинилаца и корена једначине (№ 6), једначина, која има само стварне и положне корене, може имати само мене, а једначина, која има само стварне а одречне корене може имати само сљеди.

Још ћемо напоменути, да од једног члана у полиному, па до другог неког члана, који има исти знак са првим, број мена мора бити паран; међу тим, тај број мена биће непаран, ако су поменута два члана противно означена.

Ми ћемо овде да докажемо теорему:

Кад се један цео и рационалан полином, са стварним сачиниоцима, помножи са $x-\alpha$, где је α положан број, тада производ има бар једну мену више него множеник.

Нека је дакле:

$$1.)\ a_m x^m + \ldots + a_{n+1} x^{n+1} - a_n x^n - \ldots - a_{p+1} x^{p+1} + a_p x^p + \ldots$$
$$\ldots + a_{s+1} x^{s+1} - a_s x^s - \ldots - a_0$$

дати полином, уређен по падајућим степенима x-а.

Као што се види полином почиње са групом положних чланова, за тим долази група одречних чланова, после опет група положних чланова, и т. д. и најпосле долази последња група са одречним члановима. Међу тим напомињемо, да је за доказ теореме све једно били чланови последње групе одречни, као што смо претпоставили, или положни. У осталом свака група чланова може се састојати и из једног само члана.

Кад полином 1.) умножимо са $x-\alpha$, добићемо као производ:

$$\begin{array}{r|r|r|r} a_m x^{m+1} \ldots - a_n & x^{n+1} \ldots + a_p & x^{p+1} \ldots - a_s & x^{s+1} \ldots \\ - a_{n+1}\alpha & + a_{p+1}\alpha & - a_{s+1}\alpha & + a_0\alpha \end{array}$$

Кад погледамо овај производ, видимо да је његов први члан положан; за њим долази један одречан члан; За овим опет чланови, којима знаке незнамо, па онда долази положан члан и т. д. Као што се дакле види, чланови са извесним и одређеним знаком јављају се тако, да за положним долази увек одречан, а за одречним положан. Да тако мора бити, и да два узастопна члана са одређеним знаком не могу бити једнако означени, лако је увидети из саме радње. Кад сад упоредимо производ са полиномом 1), онда видимо, да свакој мени полинома одговара у производу један члан са одређеним знаком. Ако је дакле k број мена у полиному 1), то онда у производу мора бити $h+2$ члана са одређеним знаком. Пошто сада од сваког члана са одређеним знаком до следећег члана са такође одређеним знаком мора бити барем једна мена, то онда производ мора имати најмање $(k+1)$ мена. И тако је доказано, да производ који смо добили, кад смо умножили полином 1) са $x-\alpha$, мора имати бар једну мену више од полинома 1).

Може се десити, да производ добија више од једне мене, али тада број *добивених* мена у производу мора бити непаран. Ми смо рекли, да у производу од једног члана са одређеним знаком, па до следећега са такође одређеним али противним знаком мора бити барем једна мена; али лако је увидети, да број мена од једног до другог члана може случајно бити и већи од јединице, ако се само узме на ум, да су чланови производа, који стоје између та два члана постали сабирањем противно означених бројева. И тај број мена мора, услед напомене учињене у трећој алинеји ове №-е, бити непаран. Свака група у производу, сем последње, може дакле имати паран број мена више но последња група полинома 1), док међу тим последња група производа има непаран број мена више но последња група полинома 1). Одавде следује, да број добивених мена у производу мора бити непаран.

Да број добивених мена у производу мора бити непаран, лако је увидети и на овај начин:

Ако су у полиному 1) први и последњи члан противно означени, као што смо и претпоставили, онда први и последњи члан производа морају бити једнако означени. А ако су крајњи чланови полинома 1) једнако означени, онда крајњи чланови производа морају бити противно означени. На основу напомене у трећој алинеји ове №-е у првом случају број мена у полинома 1) јесте непаран, а у производу паран; а у другом случају број мена у полиному 1) јесте паран, а у производу непаран. У оба случаја разлика између броја мена у производу и броја мена у полиному јесте непаран број.

16. Узмимо нека је:

$$1.)\qquad f(x) = 0$$

дата једначина са стварним сачиниоцима нека су њени положни корени h на броју:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_h;$$

нека су њени одречни корени k на броју:

$$-\beta_1,\ -\beta_2,\ -\beta_3,\ \ldots\ -\beta_k;$$

и нека су њени уображени корени l на броју;

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \ldots\ \gamma_l.$$

Т да је:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_h)(x+\beta_1)(x+\beta_2)\ldots$$
$$\ldots(x+\beta_k)(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_l),$$

или, ако означимо производ свију корених чинилаца, који постају из одречних и уображених корена, са $\varphi(x)$:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_h)\,\varphi(x).$$

Као што се види $f(x)$ постаје, кад се $\varphi(x)$ поступно помножи са сваким од h корених чинилаца, који постају из положних корена једначине 1). Пошто се сад после умножаја са сваким од тих корених чинилаца јавља у производу барем једна мена више, то је јасно, да ће се у последњем производу, т. ј. у $f(x)$ јавити бар толико мена, колико је положних корена. Дакле стоји — Descartes-ова — теорема:

1°. *Једна једначина не може имати виш положних корена, него што има мена, али их може имати мање.*

Функција $\varphi(x)$ преставља производ свију корених чинилаца. који постају из одречних и уображених корена једначине $f(x)=0$. Ако претпоставимо, да је множење тих чинилаца, из којих се $\varphi(x)$ састоји, заиста и извршено, онди последњи члан у $\varphi(x)$ мора бити положан, јер би иначе једначина $\varphi(x)=0$ имала положних корена. Према томе број мена у $\varphi(x)$ мора бити паран, ако их т. ј. буде имало. Али кад $\varphi(x)$ будемо постуно множили са сваким од корених чинилаца, који постају из h положкорена, онда после сваког таког умножаја добија производ *непаран* број мена, или једну мену и још паран број истих. У последњем производу — $f(x)$ — биће дакле онолико мена, колико је положних корена и још паран број истих. Дакле:

2°. *Разлика између броја мена и броја положних корена јесте паран број,* одакле следује: *да, ако је број мена паран, и број положних корена мора бити паран; а ако је број мена непаран, онда је и број положних корена непаран.*

Ако у једначини $f(x)=0$ заменимо x са $-x$, нова једначина $f(-x)=0$ има исте корене са датом, али само противно означене. Применом теореме 1° на једначину $f(-x)=0$ добијамо теорему:

3°. *Једначина* $f(x)=0$ *неможе имати више одречних корена, него што једначина* $f(-x)=0$ *има мени.*

Ако је дана једначина $f(x)=0$ потпуна и ако заменимо у њој x са $-x$, онда пошто је увек од два узастопна члана један парног, а други непарног степена, један од та два члана промениће свој знак а други не. Одатле сљедује, да ће из сваке мене у $f(x)=0$ постати сљед у $f(-x)=0$, и из сваке следи у $f(x)=0$ постати мена у $f(-x)=0$. Дакле број мена у $f(-x)=0$ једнак је броју следи у $f(x)=0$. Имајући ово, као и теореме 1° и 3°. на уму, можемо изрећи теорему:

4°. *Потпуна једначина не може иммати више положних корена, него ли мена, нити више одречних корена него ли следи.* После тога јасно је да разлика између броја m — степена потпуне једначине — и броја стварних корена мора бити паран број (№ 12).

Ако је $f(x)=0$ потпуна једначина m-нога степена, па дакле и $f(-x)=0$ и v и v_1 бројеви мена у истим једначинама, онда је $v+v_1=m$. Ако ли је $f(x)=0$ непотпуна једначина и ми у њој уметемо између два узастопна члана, између којих нема два или више чланова, један члан са ма каквим знаком, онда број мена остаће у $f(x)$ после тога исти, ако су поменута два узастопна члана противно означени; ако су пак та два члана једнако означени, број мена у $f(x)$ остаће опет исти или ће порасти за две јединице, како је кад уметути члан истога или противнога знака са она два члана између којих се умеће. Ако затим у $f(x)$ уметемо опет један члан, којег у њој нема, број мена или се неће променути или ће порасти за две јединице, и т. д. Закључимо дакле да, кад се у једном полиному умету чланови, којих у њему нема са ма каквим знацима, после чега он постаје потпун, да велим онда број мена или је исти као и пре *или је за паран број постао већи.* То исто вреди и за $f(-x)$. Ако су сада v и v_1' бројеви мена у $f(x)$ и $f(-x)$, а v' и v_1' бројеви мена у истим функцијама, пошто смо их начинили потпунима, онда збир $v'+v_1'$ биће већи од збира $v+v_1$ за паран број $2k$, који број може бити и 0. Но како је $v'+v_1'=m$, то је онда у опште $v+v_1=m-2k$

Сад је опет јасно, да разлика између броја m— степена непотпуне једначине — и броја стварних корена њених мора бити паран број (№ 12).

Ако се из природе самог задатка даје сазнати, *да су сви корени једначине* $f(x)=0$ *стварни, онда број* p

положних корена једнак је броју v мена у $f(x)$, а број n одречних корена једнак је броју v' мена у $f(-x)$. Јер како је:

$$p = v - 2k' \quad \text{и} \quad n = v' - 2k''$$

дакле:

$$p + n = v + v' - 2k' - 2k''$$

$$= m - 2k - 2k' - 2k''$$

то онда да би број $p + n$ стварних корена могао бити једнак броју m, треба да су парни бројеви $2k$, $2k'$, $2k''$ посебице једнаки нули, но онда је:

$$p = v \quad \text{и} \quad n = v'.$$

Ако је $f(x) = 0$ потпуна једначина па дакле и $f(-x) = 0$, онда број v' мена у овој једнак је броју следи у $f(x) = 0$. И тако можемо изрећи теорему:

Потпуна једначина, чији су сви корени стварни, има толико положних корена, колико има мена, и онолико одречних, колико има следи.

Примедба 1. Ако су v и v' бројеви мена у $f(x(= 0$ и $f(-x) = 0$, онда једначина $f(x) = 0$ мора имати бар $m - (v + v') = 2k$ уображених корена.

Примедба 2. Сва једначина са једном само меном има само један и то положан корен, јер пошто је разлика између броја мена и броја положних корена *паран* број, то тај број у овом случају мора бити $= 0$.

Примедба 3. Ако нема једног члана између два једнако означена члана, једначина мора имати бар један спрег уображених корена.

Јер узмимо:

$$x^m + \ldots \pm a_q x^q \pm a_{q-2} x^{q-2} + \ldots + a_m = 0.$$

Пошто између $\pm a_q x^q$ и $\pm a_{q-2} x^{q-2}$ нема мене ни онда, кад заменимо x са $-x$, то је:

$$v + v' \overline{\overline{<}} (m - q) + q - 2$$

или:

$$v + v' \overline{\overline{<}} m - 2$$

дакле, тим пре:

$$p + n \overline{\overline{<}} m - 2$$

Пример 1. Једначина:

$$x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 4 = 0$$

има четири мене, дакле, она може имати највише четири положна корена. Кад у њој ставимо $-x$ место x, добићемо једначину:

$$x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 5x - 4 = 0$$

која има само једну мену и с тога прва једначина може имати највише један одречан корен и тај она мора имати (№ 13 и примедба 2 ове №-е).

Пример 2. Једначина:

$$2x^4 - x - 1 = 0$$

има само једну мену, дакле и само један положан корен. Кад заменемо x са $-x$, онда једначина:

$$2x^4 + x - 1 = 0$$

има опет само једну мену, дакле прва једначина има само један одречан корен. Прва једначина има дакле два уображена корена.

Пример 3. Једначина:

$$x^7 - 1 = 0$$

има само једну мену, а једначина

$$x^7 + 1 = 0$$

која из прве постаје, кад се x смени са $-x$ нема ни једну мену; дакле прва једначина има 6 уображених корена.

II. Преображавање једначина.

Преобразити дану једначину значи извести из ње другу једначину, чији корени зависе од корена задате једначине на извесан и одређени начин. Дате једначине преображавају се у главном за то, да се решавање истих сведе на решавање простијих једначина, и на тај начин посао олакша. Ми ћемо се овде ограничити на најглавније случајеве.

17. *Дата је једначина:*

$$1.)\quad f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

па се тражи друга, чији ће корени бити за k мањи од корена једначине 1).

Ако означимо са y непознату тражене једначине, то онда, пошто је непозната x преставник ма којег корена једначине 1) а y преставник одговарајућег корена тражене једначине, мора бити:

$$y = x - k, \text{ одакле } x = y + k$$

Треба дакле заменути у 1) x са $y+k$ па ће изаћи:

$$2.)\quad f(k+y) = a_0y^m + f^{m-1}(k)y^{m-1} + f^{m-2}(k)y^{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + f''(k)y^2 + f'(k)y + f(k) = 0,$$

где су $f'(k)$, $f''(k)$, $f'''(k) \ldots\ldots f^{m-1}(k)$ вредности, које за $x = k$ добијају први, други ... $(m-1)$-ви — алгебарски — извод функције $f(x)$.

Пример. Узмимо једначину:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$$

чији су корени бројеви -1, 2, -3, 4 и тражимо једначину, чији су корени за 3 мањи

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$	дакле:	$f(3) = -24$
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 26x + 14$	„	$f'(3) = -10$
$f''(x) = 6x^2 - 6x - 13$	„	$f''(3) = 23$
$f'''(x) = 4x - 2$	„	$f'''(3) = 10$
$f^{IV}(x) = 4x$	„	$f^{IV}(3) = 1.$

Дакле је тражена једначина:

$$y^4 + 10y^3 + 23y^2 - 10y - 24 = 0,$$

чији су корени бројеви: -4, -1, -6 и $+1$.

Сачиниоци нове једначине:

$$f(k),\ f'(k),\ f''(k)\ \ldots\ f^m(k)$$

могу се по Budan-у лакше наћи.

Ако т. ј. заменимо у једначини 2) y са $x-k$, онда морамо очевидно добити опет једначину 1), али неуређену. Дакле једначина:

$$3.)\ a_0(x-k)^m + f^{m-1}(k)(x-k)^{m-1} + f^{m-2}(k)(x-k)^{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + f''(k)(x-k)^2 + f'(k)(x-k) + f(k) = 0$$

мора бити истоветна са једначином 1) и за то сваки резултат добивен из *3* мораће се добити и из 1). — Сад кад поделимо полином *3* са $(x-k)$, нађени количник исто тако са $(x-k)$, и кад тако наставимо, т. ј. кад сваки нови количник поделимо са $(x-k)$ остаци при тим узастопним деобама добивени биће очевидно сачиниоци тражене једначине 2) т. ј.

$$f(k),\ f'(k),\ f''(k) \ldots \ldots f^{m-1}(k),\ a_0$$

Ако ову методу применимо на горњи пример и ако узастопне деобе извршимо по методи Хорнеровој (№ 4), добићемо:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 1, & -2, & -13, & 14, & 24 \\
3]. & 1, & 1, & -10, & -16, & |\underline{-24} \\
 & 1, & 4, & 2, & |\underline{-10} & \\
 & 1, & 7, & |\underline{23} & & \\
 & 1, & |\underline{10} & & & \\
 & |\underline{1.} & & & &
\end{array}$$

где подвучени бројеви значе остатке добивене при узастопним деобама. Овде је:

$$f(3) = -24,\ f'(3) = -10,\ f''(3) = 23,\ f'''(3) = 10 \text{ и}$$
$$f^{IV}(3) = 1,$$

дакле је нова једначина:

$$y^4 + 10y^3 + 23y^2 - 10y - 24 = 0$$

као и горе.

Кад се корени дане једначине имају повећати за k онда у свима горњим рачунима треба сменути k са $-k$.

Узмимо нека је дата једначина:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

чији су корени: 1, —3, 4 и тражимо нову једначину, чији су корени за 2 већи. Ако радимо по Budan-у, онда треба горе поменуту деобу извршити са делиоцем $(x+2)$, и онда ћемо добити: $[x-(-2)]$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1, & -2, & -11, & 12 \\
-2]. & 1, & -4, & -3 & |\underline{18} \\
 & 1, & -6, & |\underline{9} & \\
 & 1, & -|\underline{8} & & \\
 & |\underline{1.} & & &
\end{array}$$

Тражена је једначина:

$$y^3 - 8y^2 + 9y + 18 = 0,$$

а корени су јој: 3, —1, и 6.

18. Помоћу преображаја у № 17 у стању смо сад избацити из једначине

$$1.)\qquad f(x) = 0$$

ма који члан њен. Зарад тога треба само у једначини:

$$2.)\qquad a_0 y^m + f^{m-1}(k) y^{m-1} + f^{m-2}(k) y^{m-2} + \dots$$
$$\dots + f''(k) y^2 + f'(k) y + f(k) = 0$$

ставити $= 0$ сачиниоца оног члана њеног, који члан у њој треба да ишчезне. На тај начин добићемо једначину, из које ће се за k израчунати она вредност, за коју ће тај сачинилац бити $= 0$, па дакле и одговарајући члан у 2) отпасти.

Тако ако хоћемо да у 2) нема $(r+1)$-вог члана ми ћемо ставити

$$f^{m-r}(k) = 0$$

и разрешајем ове једначине, која је односно k степена r-ог, наћи ћемо вредности за k, за које ће $(r+1)$-ви члан у 2) отпасти. Али овај начин може се лако употребити само при избацивању другог члана, јер за избацивање даљих чланова ваљало би решавати једначине виших степена, што је са великим тешкоћама скопчано.

Да би смо избацили други члан, морамо ставити:

$$f^{m-1}(k) = 0,$$

али како је по № 8 $f^{m-1}(k) = ma_0 k + a_1$ то имамо даље:

$$ma_0 k + a_1 = 0,$$

одакле:

$$k = -\frac{a_1}{ma_0}.$$

Дакле треба при преображају једначине, који смо у № 17 извршили, узети за k ову вредност, па ће у новој једначини отпасти други члан.

Узмимо н. пр. једначину:

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0,$$

чији су корени: -1, 3, 4.

Да бисмо из ње избацили други члан, треба узети $k = 2$, дакле ћемо тражити једначину, чији су корени за 2 мањи:

	1,	-6,	5,	12
2].	1,	-4,	-3,	$\underline{6}$
	1,	-2,	$\underline{-7}$	
	1,	$\underline{0}$		
	$\underline{1}$			

дакле је нова једначина без другог члана

$$y^3 - 7y + 6 = 0.$$

чији су корени: -3, 1, 2.

Да бисмо из једначине 2) избацили последњи члан, морамо решити једначину:

$$f(k) = 0,$$

која је истоветна са даном, што не треба, да нам је чудно, јер k мора очевидно бити једнако ма ком корену дане једначине 1) за то, што један корен једначине 2) мора тада бити једнак нули.

Најзад не треба мислити, да се по овој методи могу избацити ма колико чланова једначине. Јер кад смо избацили један члан, па хоћемо из нове једначине да избацимо други који члан, онда ће се у трећој једначини јавити опет онај избачени члан.

До вредности за k, за коју ће у једначини 2) отпасти други члан, можемо доћи и овим краћим путем:

Ако сматрамо k за време као познато. и ако узмемо, да су корени једначине 1):

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots \ \alpha_m,$$

онда су корени једначине 2)

$$\alpha_1 - k, \ \alpha_2 - k, \ \alpha_3 - k, \ \ldots \ \alpha_m - k$$

али пошто сачинилац другог члана једначине 2) треба да је једнак нули, то је онда № 6

$$(\alpha_1 - k) + (\alpha_2 - k) + (\alpha_3 - k) + \ldots + (\alpha_m - k) = 0.$$

или:

$$-\frac{a_1}{a_0} - mk = 0$$

дакле

$$k = -\frac{a_1}{ma_0}.$$

19. *Једначина:*

$$1.) \quad f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

да се претвори у другу, чији су корени k-пута већи.

Ако је y непозната тражене једначине, дакле представник ма којег корена њеног, онда је:

$$y = kx, \text{ одакле је } x = \frac{y}{k}.$$

Овом вредношћу треба дакле заменути x у 1) и кад се то учини добија се тражена једначина:

$$\frac{a_0 y^m}{k^m} + \frac{a_1 y^{m-1}}{k^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{m-1} y}{k} + a_m = 0$$

или кад помножимо са k^m:

$$a_0 y^m + a_1 k y^{m-1} + a_2 k^2 y^{m-2} + \ldots + a_{m-1} k^{m-1} y + a_m k^m = 0.$$

Као што се види, нова се једначинз из дате добија, кад се узастопни чланови њени умноже са члановима постепености:

$$1, \ k, \ k^2, \ k^3 \ \ldots \ k^{m-1}, \ k^m,$$

при чему треба узети у рачун и оне чланове једначине 1) којих нема, т. ј. чији су сачиниоци једнаки нули.

Помоћу овог преображаја може се једначина 1) ослободити првог сачиниоца a_0, а да остали сачиниоци остану цели бројеви. Зарад тога треба само ставити $k = a_0$.

Исто тако може се дана једначина, у којој је $a_0 = 1$ помоћу овог преображаја ослободити разломљених сачинилаца, а да јој први сачинилац остане $= 1$. Зарад тога треба узети, да је k једнако најмањем заједничком дељенику свију именилаца, премда у особеним случајевима може за k поднети и мања вредност.

Ако је н. пр. дата једначина:

$$x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{4} = 0$$

онда је 12 најмањи заједнички дељеник именилаца, дакле би требало узети ту вредност за k. Али овде може поднети и број 6. Дакле треба да се помноже чланови задате једначине редом са

$$1, \quad 6, \quad 6^2, \quad 6^3$$

и онда ћемо добити једначину

$$y^3 + 21y^2 - 12y - 270 = 0$$

По кад кад могу се сачиниоци једначине помоћу овог преображаја смањити. Тако н. пр. ако је задата једначина:

$$x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 96x + 64 = 0$$

тражићемо из ње другу, чији су корени два пут мањи. Овде је $k = \frac{1}{2}$, а нова је једначина.

$$y^4 + 2x^3 - 2x^2 - 12x + 4 = 0$$

која је простија од дане.

20. Тражимо најзад из једначине:

1.) $\quad a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$

другу, чији су корени реципрочне вредности ове дане једначине. Овде је:

$$y = \frac{1}{x}, \text{ одакле } x = \frac{1}{y}.$$

Овом дакле вредношћу треба заменути x у 1), и као тражену једначину добићемо, пошто је још умножимо са y^m:

$$a_my^m + a_{m-1}y^{m-1} + \ldots + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0.$$

Ова једначина постаје, као што се види, из задате кад се у овој напишу сачиниоци обрнутим редом.

Примедба. Ми смо прешли оне преображаје једначина, које се у рачунима понајчешће употребљују. Цео рад око преображаја какве једначине није у ствари ништа друго, до избацај (елиминација) једне непознате из двеју једначина са две непознате.

И доиста узмимо нека је:

1.) $\quad f(x) = 0$

задата једначина, а

2.) $\quad \varphi(x, y) = 0$

она, у којој је исказан одношај корена једначине 1) и корена тражене једначине. Цео посао своди се очевидно на избацај x-а из 1) и 2). Кад се у 2) јавља само први степен непознате x-а, онда је лако избацити x и на тај начин добити тражену једначину. Али ако се у 2) јављају и виши степени x-а, онда ствар постаје тежа, и тада ваља прибећи методама елиминације о којима ће доцније бити говора.—

III. Највећи заједнички делилац двају полинома и заједнички корени даних једначина.

21. Претпоставимо, да нам је дат један полином и да је исти разложен на просте чиниоце, а то ће рећи чиниоце, који су првог степена, дакле облика $(x-\alpha)$. Нека је тај полином:

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)^p\,(x-\alpha_2)^q\,(x-\alpha_3)^r\ .\ .\ .\ .$$

Други који полином делиће овај полином тачно, т. ј. без остатка само тако, ако се у том другом полиному налазе исти прости чиниоци са изложиоцима, који су мањи или највише једнаки изложиоцима одговарајућих чинилаца у $f(x)$. Тај други полином, кад се разложи такође на чиниоце, мораће дакле бити облика:

$$a_0^1\,(x-\alpha_1)\ \ (x-\alpha_2)^b\,(x-\alpha_3)^c\ .\ .\ .\ .\ ,$$

где је $a \leq p,\ b \leq q,\ c \leq r\ .\ .\ .\ .$

Све могуће делиоце функције $f(x)$ добићемо, ако за a узмемо вредности: $0,\ 1,\ 2.\ .\ .\ .\ .\ p;$ за b вредности: $0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .\ q;$ за c вредности: $0, 1, 2,\ .\ .\ .\ r$ и т. д. На тај начин број свију могућих делилаца функције $f(x)$ биће:

$$(p+1)\,(q+1)\,(r+1)\ .\ .\ .\ .\ -1.$$

Највећи заједнички делилац двају датих полинома зове се полином, који је од свију заједничких делилаца њихових највишег степена. Као што ћемо доцније видети, највећи заједнички делилац тражи се понајвише ради тога, како би се изнашле вредности за x, које поништавају њега, па дакле и дане полиноме.

Такве ведности x-а јесу корени једначине, која постаје, кад се највећи заједнички делилац стави $= 0$. Па како корени те једначине остају исти и кад се највећи заједнички делилац помножи или подели са каквим од x-а независним бројем, то нам је слободно не градити у будуће никакве разлике између два највећа заједничка делиоца, који се разликују само једним од x-а независним сачиниоцем.

Ако дане полиноме разложимо на просте чиниоце, онда највећи заједнички делилац тих полинома биће једнак производу свију заједничких простих чинилаца њиних, сваки од тих чинилаца узет са мањим од она два изложиоца, који показују, колико се пута он јавља у задатим полиномима. Али се највећи заједнички делилац може наћи и на начин, који је сличан оном у рачуници.

Нека су $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ два полинома уређена по падајућим степенима x-а и нека је $\varphi_1(x)$ нижег или највише истог степена са $\varphi(x)$. Поделимо $\varphi(x)$ са $\varphi_1(x)$ и нека је Q количника $\varphi_2(x)$ остатак, тада је:

1.) $$\varphi(x) = \varphi_1(x)\,.\,Q + \varphi_2(x).$$

Помоћу ове једначине лако је доказати, да је највећи заједнички делилац полинома $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ истоветан са највећим заједничким делиоцем полинома $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Јер, ако је $(x-\alpha)^p$ заједнички чинилац полиномима $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, онда ако ставимо:

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^p\ \psi(x),\ \text{ а }\ \varphi_1(x) = (x-\alpha)^p\ \psi_1(x)$$

биће:

$$\varphi_2(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x)\,Q = (x-\alpha)^p \left\{\psi(x) - \psi_1(x)\,Q\right\}.$$

Као што се види, функција $\varphi_2(x)$ једнака је производу из $(x-\alpha)^p$ и једне целе и рационалне функције x-а и по томе је $(x-\alpha)^p$ чинилац функције $\varphi_2(x)$. Према томе, кад је $(x-\alpha)^p$ заједнички чинилац полиномима $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, он мора бити и заједнички чинилац полиномима $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. И обратно, ако је $(x-\alpha)^p$ заједнички чинилац полиномима $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ он мора бити заједнички чинилац и полиномима $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$.

Пошто дакле сваки заједнички чинилац полинома $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ јесте у исти мах и заједнички чинилац полиномима $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, то онда то исто мора бити случај и са производом свију чинилаца заједничких полинома $\varphi(x)$ и $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$. Дакле највећи заједнички делилац полинома $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ јесте у исти мах и највећи заједнички делилац полиномима $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Према томе тражење највећег заједничког делиоца полиномима $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ своди се на тражење највећег заједничког делиоца полиномима $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Са овим полиномима поступићемо сад онако исто као мало час са $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$. Ми ћемо т. ј. поделити $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Ако је Q_1 количник, а $\varphi_3(x)$ остатак, биће:

$$2.)\qquad \varphi_1(x) = \varphi_2(x) \,.\, Q_1 + \varphi_3(x),$$

одакле закључујемо као и горе. да је највећи заједнички делилац за $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ у исти мах највећи заједнички делилац и за $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$.

Ако сад даље поделимо $\varphi_2(x)$ са $\varphi_3(x)$ и узмемо да не остаје никакав остатак, онда је очевидно $\varphi_3(x)$ највећи заједнички делилац функцијама $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$. Дакле:

Да бисмо нашли највећег заједничког делиоца двају полинома, ми ћемо их најпре уредити по падајућим степенима x-а, за тим ћемо онај, који је вишег степена, поделити са другим; са нађеним остатком поделићемо пређашњег делиоца и тако ћемо наставити рад и даље, то ће рећи, са сваким остатком поделићемо делиоца при оној деоби, при којој је тај остатак нађен. Пошто су узастопни остаци све нижег и нижег степена односно x, то је јасно, да ћемо најзад морати добити остатак, који је или једнак нули, или је различан од нуле, а од x независан. У првом случају последњи делилац јесте највећи заједнички делилац датих полинома. У другом случају полиноми немају никаквог заједничког делиоца и зову се *однoсно прости.*

При тражењу највећег заједничког делиоца слободно је помножити са каквим од x-а независним бројем све чланове ма којег од узастопних дељеника и делилаца, ако је то зарад простијег рачуна потребно. Исто тако кад сви сачиниоци једног ма којег од узастопних остатака имају заједничког чиниоца, овај се може просто изоставити. Јер узмимо да смо н. пр. одмах при првој деоби помножили дељеника са сталним бројем k, како би сачиниоци количника и остатка испали цели бројеви и осим тога узмимо, да сви сачиниоци остатка имају l као заједничког чиниоца, тада ће бити:

$$k\,\varphi(x) = \varphi_1(x) \,.\, Q + l \,.\, \varphi_2(x).$$

Као горе тако и овде, лако се доказује, да ако је $(x-\alpha)^p$ заједнички чинилац полинома $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, он је такође заједнички чинилац и полиномима $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Дакле је слободно продужити радњу са функцијама $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Пример. Узмимо, нека се тражи заједнички делилац функцијама:

$$\varphi(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 8,$$

$$\varphi_1(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6.$$

Прва деоба:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & & & & & & x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6 \\
 & & & & & & \overline{3} \\
3x^5 & & -10x^3 & & +15x & +8 & \\
-3x^5 & +6x^4 & +18x^3 & -12x^2 & -39x & -18 & \\
\hline
 & 6x^4 & +8x^3 & -12x^2 & -24x & -10 &
\end{array}$$

Пре него што пређемо на другу деобу, ми ћемо нађени остатак скратити са *два*, који је број заједнички чинилац свију сачинилаца, и сем тога умножићемо $\varphi_1(x)$ са 3.

Друга деоба:

$$3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5$$
$$x - 5$$

$$3x^5 - 6x^4 - 18x^3 + 12x^2 + 39x + 18$$
$$-3x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 5x$$
$$-10x^4 - 12x^3 + 24x^2 + 44x + 18$$
$$-5x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 22x + 9$$
$$-15x^4 - 18x^3 + 36x^2 + 66x + 27$$
$$+15x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 60x - 25$$
$$2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$$
$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Први остатак при овој деоби скраћен је са два, па умножен са *3*, како би количник и други остатак имали целе сачиниоце.

Други пак остатак скраћен је са *2*.

Трећа деоба:

$$3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5 \mid x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$
$$-3x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 3x \qquad 3x - 5$$
$$-5x^3 - 15x^2 - 15x - 5$$
$$+5x^3 + 15x^2 + 15x + 5$$
$$0$$

Дакле је највећи заједнички делилац:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

И тако је:

$$\varphi(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(3x^2 - 9x + 8)$$

$$\varphi_1(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x^2 - 5x + 6)$$

22. Ако једначине:

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_1(x) = 0$$

имају k заједничких корена, онда ће полиноми $\varphi_1(x)$ и $\varphi(x)$ имати k заједничких простих чинилаца, дакле они имају једну функцију k-ог степена као највећег заједничког делиоца. Ако се највећи заједнички делилац стави $= 0$, онда корени те једначине биће заједнички корени горњих једначина. Ако $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ немају највећег заједничког делиоца, онда ни горње једначине немају заједничких корена.

Пример. Да се реши једначина:

1.) $$x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 8x + 4 = 0.$$

о којој се зна да има два једнака, ал' противно означена корена. Једначина

2.) $$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$$

има исте корене са даном, али само противно означене. Дакле ако су $+a$ и $-a$ корени прве, $-a$ и $+a$ јесу корени ове друге једначине. Дакле те две једначине морају имати два заједничка проста чиниоца, или морају имати једну функцију другог степена као највећег заједничког делиоца. И тог делиоца треба ставити $= 0$, па ће добивена једначина дати заједничке корене једначина 1) и 2).

Али ако узмемо на ум, да заједнички корени једначина:

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_1(x) = 0$$

јесу такође и корени једначине:

$$\varphi(x) + \lambda\varphi_1(x) = 0$$

где је λ ма какав особени број, онда је јасно да заједнички корени једначина:

$$3.) \qquad x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \qquad x^3 - 4x = 0.$$

које постају из једначина 1) и 2) сабирањем или одузимањем истих, јесу у исти мах и заједнички корени једначина 1) и 2). Према томе највећи заједнички чинилац полинома 1) и 2) јесте у исти мах и највећи заједнички чинилац левих страна једначина 3).

Пошто сад једначине 1) и 3) немају заједнички корен $x = 0$, то ћемо имати да поделимо просто

$$x^4 - 5x^2 + 4 \quad \text{са} \quad x^2 - 4.$$

Кад то учинимо наћи ћемо, да је $x^2 - 4$ највећи заједнички делилац. Једначина:

$$x^2 - 4 = 0$$

има $+ 2$ и $- 2$ за корене, и то су заједнички корени и једначина 1) и 2). Да бисмо нашли остала два корена једначине 1), треба поделити полином 1) са $x^2 - 4$ или

по Хорнеру најпре са $x - 2$, па са $x + 2$ добивени количник стави. Кад се други количник $= 0$ добија се једначина, која даје $-1 \pm \sqrt{2}$ као остала два корена једначине 1).

Примедба. У № 189 алгеб. анализе показали смо помоћу детерминаната, како се у напред дознаје, да ли дате једначине имају заједничких корена. Да ово буде, треба да је *резултанта* даних једначина $= 0$.

IV. Једнаки корени једначина.

23. Разрешавање једначина обично је теже онда, кад оне имају једнаких корена, него кад су им сви корени различни. И с тога је важно умети сазнати у свакој прилици, да ли дана једначина има једнаких корена, и ако их има, умети свести разрешавање исте на разрешавање других једначина, које имају само неједнаке корене.

Узмимо нека је:

$$1.) \qquad f(x) = 0$$

задата једначина m-ног степена. Пошто је:

$$f(x) = f\left\{a + (x - a)\right\}$$

онда по обрасцу 4) у № 8 смењујући у њему x са a, а h са $(x-a)$ добијамо:

$$2.) \quad f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a)^2 f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + (x-a)^k f^k(a) + \ldots + (x-a)^m f^m(a),$$

где су изводи алгебарски.

Из ове опет једначине видимо, да ако a поништава $f(x)$ и све њене изводе до $(k-1)$-ога закључно, да велим онда функција $f(x)$ мора бити дељива без остатка са $(x-a)^k$, јер је то случај с десном страном, и да с тога број a мора бити k пута корен једначине 1). И обратно, ако је a корен једначине 1) k пута, онда он мора поништити $f(x)$ и све њене изводе до $(k-1)$-ога закључно, јер кад то не би било, онда би на основу једничине 2) број a морао бити више или мање него k пута корен једначини 1). На тај начин доказали смо теорему:

1° *Број* **a** *јесте* k *пута корен једначине 1), ако он поништава* $f(x)$ *и све њене изводе почев од првог, па до* $(k-1)$*-ог.* закључно

Ако узмемо на ум, да број a, који је k пута корен једначини 1), поништава осем $f(x)$ још и $f'(x)$ као и све њене изводе до $(k-2)$-ог закључно, то је јасно, да је a тада $(k-1)$ пут корен једначине:

$$f'(x) = 0$$

И за то можемо место горње теореме исказати сад ову:

2°. *Број* **a** *јесте* k*-пута корен једначини 1), ако он поништава* $f(x)$, *и ако је сем тога* $(k-1)$*-пута корен једначини*

$$f'(x) = 0.$$

Према томе, ако се у једначини $f(x) = 0$ број α_1 јавља p-пута као корен, α_2 q-пута као корен, α_3 r-пута као корен и т. д. α_h s-пута као корен, биће:

$$f(x) = (x-\alpha_1)^p (x-\alpha_2)^q (x-\alpha_3)^r \,.\,.\,.\,.\, (x-\alpha_h)^s \varphi(x),$$

$$f'(x) = (x-\alpha_1)^{p-1} (x-\alpha_2)^{q-1} (x-\alpha_3)^{r-1} \ldots (x-\alpha_h)^{s-1} \psi(x),$$

где су $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ производи корених чинилаца функција $f(x)$ и $f'(x)$, који им нису заједнички.

Дакле $f(x)$ и њен први извод имају:

$$(x-\alpha_1)^{p-1}, \quad (x-\alpha_2)^{q-1}, \quad (x-\alpha_3)^{r-1}, \ldots (x-\alpha_h)^{s-1}$$

као заједничке чиниоце. У осталом оне не могу имати других заједничких чинилаца, јер кад би н. пр. чинилац $(x-\alpha_i)$, који се у $f(x)$ јавља само један пут, био чинилац и функцији $f'(x)$, онда би, по теореми 1°, број α_i био два пут корен једначини:

$$f(x) = 0.$$

Према томе дакле, сваки чинилац, који се у $f(x)$ јавља само један пут не може се јавити у $f'(x)$ и за то $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не могу имати заједничког делиоца. Дакле можемо сада казати:

3°. *Највећи заједнички делилац функција* $f(x)$ *и* $f'(x)$ *јесте производ корених чинилаца функције* $f(x)$, *који одговарају једнаким коренима њеним, али сваки од тих чинилаца узет један пут мање него у* $f(x)$.

Да бисмо сазнали, да ли једначина $f(x) = 0$ има једнаких корена, тражићемо највећег заједничког делиоца функцијама $f'(x)$ и $f(x)$. Ако га оне немају, једначина неће имати једнаких корена, а ако га имају, онда сваки корен једначине, која постаје кад се тај делилац стави $= 0$ јавиће се један пут више као корен у једначини $f(x) = 0$.

24. Помоћу теореме 3° у № 23 не само да смо у стању сазнати, да ли дата једначина има једнаких корена, него смо још у стању свести и разрешавање дане једначине, која има једнаких корена, на разрешавање других једначина, које их немају.

Означимо са X полином дате једначине, и нека је X_1 производ чинилаца, који се у X јављају само по један пут; нека је X_2 производ чинилаца, који се у X јављају по два пут, али су у X_2 узети сваки само по један пут; нека је даље X_3 производ чинилаца, који се у X јављају по три пут, али су у X_3 узети сваки само по један пут и у опште нека је X_r производ чинилаца, који се у X јављају по r - пута, али су овде у X_r узети сваки само по један пут.

Задати полином можемо тада преставити као производ овако:

$$X = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4$$

При том претпостављамо, као што се види, да у X нема чинилаца, који би се јављали више од четири пута.

Највећи заједнички делилац D полинома X и његовог првог извода биће:

$$D = X_2 X_3^2 X_4^3$$

јер се у том највећем заједничком делиоцу сваки чинилац полинома X јавља један пут мање (теорема 3°). Највећи заједнички делилац D_1 полинома D и његовог првог извода јесте:

$$D_1 = X_3 X_4^2.$$

Најзад највећи заједнички делилац D_2 полинома D_1 и његовог првог извода биће:

$$D_2 = X_4$$

Ако дата једначина:

$$X = 0$$

нема корена, који би се у њој јављали више од четири пута, или што је све једно ако полином X нема корених чинилаца, који би се у њему јављали више од четири пута, онда и D_2 неће имати заједничких чинилаца са својим првим изводом. У противном случају ваља рад наставити онако исто као и досада, док се не дође до резултата, који нема заједничка делиоца са својим првим изводом.

Сад, кад поделимо сваку од горњих четири једначина оном, која за њом долази, добићемо:

$$\frac{X}{D} = Q_1 = X_1 X_2 X_3 X_4$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_2 = X_2 X_3 X_4$$

$$\frac{D_1}{D_2} = Q_3 = X_3 X_4$$

$$D_2 = X_4.$$

Ако сад то исто учинимо са ове четири једначине, добићемо:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1, \quad \frac{Q_2}{Q_3} = X_2, \quad \frac{Q_3}{D_2} = X_3, \quad D_2 = X_4.$$

Разрешавање дане једначине;

$$X = 0.$$

своди се дакле на разрешавање једначина:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0;$$

од којих прва даје просте корене дане једначине, друга двојне, т. ј. оне, који се у њој по два пут јављају; трећа тројне, а четврта четворне корене. Дакле: *да бисмо свели разрешавање дате једначине на разрешавање других једначина, које имају неједнаке корене, тражићемо највећег заједничког делиоца полиному дане једначине и његовом првом изводу; за тим тражићемо највећег заједничког делиоца томе првом највећем заједничком делиоцу и његовом првом изводу* и т. д. *док не дођемо до једног највећег заједничког делиоца, који са првим својим изводом нема заједничких чинилаца, дакле који њиме није дељив. Тада ћемо поделити полином дате једначине са првим највећим заједничким делиоцем, овај са другим* и т. д. *Најзад ћемо поделити сваки од добивених количника са оним који за њим долази и нове количнике ставити* $= 0$. *Тако ћемо наћи једначине, од којих прва даје просте корене дате једначине, друга двојне, трећа тројне* и т. д.

Пример. Нека је дата једначина:

$$X = x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0$$

први извод:

$$X' = 6x^5 + 20x^4 - 12x^3 - 48x^2 + 22x + 12$$

Њихов највећи заједнички делилац јесте:

$$D = x^3 + x^2 - 5x + 3.$$

Први извод полинома D јесте:

$$D' = 3x^2 + 2x - 5.$$

Највећи заједнички делилац полинома D и D' јесте:

$$D_1 = x - 1.$$

Пошто D_1 нема заједничких чинилаца са својим првим изводом, то онда задата једначина нема корена, који би се у њој јављали више од три пута. Дакле је сада:

$$X = X_1 X_2^2 X_3^3$$

Извршујући узастопне деобе онако као што је горе речено, добијамо:

$$\frac{X}{D} = Q_1 = X_1 X_2 X_3 = x^3 + 3x^2 - x - 3$$

$$\frac{D}{D_1} = Q = X_2 X_3 = x^2 + 2x - 3$$

$$D_1 = X_3 = x - 1,$$

а за тим:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1 = x + 1$$

$$\frac{Q_2}{Q_3} = X_2 = x + 3$$

$$D_1 = X_3 = x - 1$$

Дакле је:

$$X = (x+1)(x+3)^2(x-1)^3.$$

и дата једначина има -1 као прост корен, -3 има двапут, а $+1$ три пут као корен.

25. Теорија једнаких корена може се применити у задатку, где се траже односи, који треба да постоје између сачинилаца једначине 2-ог, 3-ег и т. д. степена, па да полином једначине буде односно потпуни квадрат, куб и т. д. Зарад тога треба само тражити услов, који треба да се испуни, па да једначина 2-ог степена има оба корена једнака, да једначина 3-ег степена има сва три корена једнака и т. д.

Узмимо, да се тражи услов, који треба да је испуњен, па да лева страна једначине:

$$1.) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

буде потпуни квадрат или што је све једно, да оба корена једначине буду једнака. Једначина

$$2.) \qquad 2ax + b = 0$$

чија је лева страна први извод левој страни једначине 1) има:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

као корен. Овај број треба дакле да је двојни корен једначине 1) и за то имамо, кад га у 1) заменимо,

$$b^2 - 4ac = 0$$

као услов, да једначина 1) има оба корена једнака.

Узмимо као други пример једначину:

$$3.) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Услов за то, да ова једначина има сва три корена једнака, или да је лева страна њена савршен куб, јесте тај, да број, који јој је три пут корен, буде у исто време и корен једначинама:

$$4.) \qquad 3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad \text{и} \quad 3ax + b = 0$$

које постају, кад се први и други извод полинома 3) ставе $= 0$; и то да буде корен првој два пут, а другој један

пут. Избацајем x-а из једначина 3) и 4) добијамо као тражене услове:

$$3ac - b^2 = 0, \quad 9ad - bc = 0.$$

Први од ова два услова јесте у исти мах услов, да је трином у првој једначини под 4) потпун квадрат, а тако треба и да буде.

Исто тако помоћу теорије највећег заједничког делиоца може се по некад степен једначине снизити као н. пр. онда, кад нам је познат однос између два корена задате једначине. Узмимо н. пр. да је:

$$1.) \qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

задата једначина и да постоји овакав однос између два корена њена a и b:

$$2.) \qquad b = pa + q,$$

где су p и q познати бројеви. Пошто једначина 1) мора бити задовољена количинама a и $pa + q$, то отуда следује, да једначина 1) и једначина

$$3.) \quad (px + q)^m + A_1 (px + q)^{m-1} + A_2 (px + q)^{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + A_{m-1} (px + q) + A_m = 0$$

морају имати један заједнички корен. Њихови полиноми морају дакле имати заједничког делиоца, који кад се нађе и стави $= 0$ изаћи ће нова једначина, која даје вредност корена a заједничког једначинама 1) и 3). Кад ту вредност заменимо у 2) добијамо вредност другог корена $b = pa + q$.

Ако би нова једначина била вишег степена, онда би и једначина 1) имала више парова корена, који би стајали у онаквој вези, каква је исказана у обрасцу 2).

Ако са производом корених чинилаца, који одговарају тако нађеним коренима једначине 1), ову поделимо, онда излази једначина нижег степена, која има за корене све остале корене једначине 1).

Тако н. пр. два корена једначине:

$$x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 71x + 30 = 0$$

стоје у овом односу: $b = 2a + 1$. Кад у овој једначини сменимо x са $2x + 1$ излази:

$$8x^4 - 32x^3 + 36x^2 - 7x - 2 = 0.$$

Заједнички чинилац ових полинома јесте $x-2$, одакле је $a = 2$ и за то $b = 5$. Полином задате једначине дељив је дакле са:

$$(x-2)(x-5);$$

кад се количник стави $= 0$ излази једначина:

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

а корени њени:

$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$ јесу остала два корена задате једначине.

V. Симетричне функције.

26. У № 15 алгебарске анализе ми смо казали, да се једна симетрична функција може сматрати као позната кад нам је познат ма који члан њен, а овај, па дакле и цела функција, могу се сматрати као познати, кад су познати изложиоци његових основака.

Ова примедба даје нам начина, да можемо симетричне функције означавати на један врло прост и разумљив начин, кад су нам познати њихови основци као изложиоци основака једног ма којег члана. Изложиоци основака пишу се т. ј. запетом одвојени као казаљке уз слово S, као што се то види из следећих симетричних функција количина x, y, z.

$$S_1 = x+y+z;\quad S_2 = x^2+y^2+z^2;\quad S_3 = x^3+y^3+z^3$$

$$S_{1,1,} = xy + xz + yz;$$

$$S_{2,1} = x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$$

$$S_{1,1,1,} = xyz;\quad S_{2,1,1} = x^2yz + xy^2z + xyz^2.$$

Број казаљака које стоје уз S, показује у исто доба и број чинилаца, који се у сваком члану јављају. И сад још треба показати, како се поједини чланови симетричних функција налазе.

Узмимо нека су $x, y, z \ldots u, v$, дате количинее, m на броју, из којих се има саставити симетричка функција

$$S_{\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu}$$

где је број казаљака — изложилаца — r. Зарад тога начинимо све могуће комбинације r-не класе а без понављања из основака $x, y, z \ldots u, v$, па за тим сваку од тих комбинација — производа — вежимо са сваком пермутацијом изложилаца $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu$, као што се види из примера, који долази:

Пример. Из количина x, y, z, u, има се саставити симетрична функција:

$$S_{3,2,1}.$$

Комбинације треће класе, а без понављања начињене из основака x, y, z, u, јесу:

$$x y z,\ x y u,\ x z u,\ y z u.$$

Међу тим пермутације изложилаца 1, 2, 3, јесу

$$1\,2\,3,\ 1\,3\,2,\ 2\,1\,3,\ 2\,3\,1,\ 3\,1\,2,\ 3\,2\,1.$$

Дакле је:

$$\begin{aligned} S_{3,2,1} = {} & xy^2z^3 + xy^3z^2 + x^2yz^3 + x^2y^3z + x^3yz^2 \\ & + x^3y^2z + xy^2u^3 + xy^3u^2 + x^2yu^3 + x^2y^3u \\ & + x^3yu^2 + x^3y^2u + xz^2u^3 + xz^3u^2 + x^2zu^3 \\ & + x^2z^3u + x^3zu^2 + x^3z^2u + yz^2u^3 + yz^3u^2 \\ & + y^2zu^3 + y^2z^3u + y^3zu^2 + y^3z^2u. \end{aligned}$$

Број чланова, као што се види, мора бити = броју комбинација помноженом са бројем пермутација. Дакле ако је m број основака у симетричној функцији а r број изложилаца, онда је број чланова симетричне функције:

$$\binom{m}{r} r\,! = m(m-1)\,(m-2)\ldots(m-r+1)$$

при чему се претпоставља, да су сви изложиоци међу собом различни. Али ако међу изложиоцима има више група од p, q, ... s једнаких бројева, онда је број пермутација изложилаца:

$$\frac{r\,!}{p\,!\ q\,!\ldots.\ s\,!}$$

дакле број свију чланова симетричне функције у томе случају:

$$\frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots(m-r+1)}{p\,!\ q\,!\ \ldots\ s\,!}$$

Збир изложилаца у ма ком члану симетричне функције одређује њен ред. Уз S пишу се изложиоци као казаљке почев од највећег па до најмањег, и тада од две симетричне функције каже се да је она више класе, кад у њеном симболу на ранијем месту долази виша казаљка — изложилац —. Тако су S_3, $S_{2,1}$, $S_{1,1,1}$ истога реда, али различите класе. Прва је највише, друга следеће ниже, а трећа најниже класе.

Симетрична функција зове се сложена, кад се она састоји из више делова, који су сваки за се симетрични. Ако се симетрична функција састоји из више рационалних разломака, онда кад се ови саберу, бројилац и именилац новога разломка јесу, за себе узети, целе и рационалне симетричне функције.

27. Нека су x, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_m $(m+1)$ променљивих и нека је $f(x,\ \xi_1,\ \xi_2,\ldots\xi_m)$ функција тих променљивих, дефинисана једначином:

$$1.)\quad f(x,\ \xi_1,\ \xi_2\ldots\xi_m) = (x-\xi_1)\,(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m)$$

Функција f јесте као што се види линеарна функција сваке од m променљивих: ξ_1, $\xi_2\ldots\xi_m$ а цела и рационална, алгебарска функција x-а. Пошто функција f узајамном сменом променљивих ξ_1, $\xi_2\ldots\xi_m$ остаје иста, то је она симетрична функција тих променљивих. Кад множење означено на десној страни једначине 1) свршимо, и производ по падајућим степенима од x уредимо, добићемо:

2.) $$f(x, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) =$$
$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m.$$

Пошто се онако исто, као и у № 6, доказује, да су сачиниоци $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, a_m$ симетричне функције променљивих: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_m$, и то *онакве исте*, као тамо корена $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, то је јасно, да свака функција променљивих $a_1, a_2 \ldots a_m$ јесте у исти мах симетрична функција променљивих $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$. Обратно може се доказати теорема:

1°. *Да се свака симетрична функција променљивих $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ може изразити променљивим сачиниоцима: $a_1, a_2, \ldots a_m$*

Ми сад овде $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ сматрамо као променљиве, али имале те променљиве ма какве вредности, оне су очевидно увек корени једначине:

$$(x-\xi_1)(x-\xi_2) \ldots (x-\xi_m) =$$
$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0.$$

И с тога теорема 1° може гласити овако:

Свака симетрична функција корена једначине може се, а да ове незнамо, изразити сачиниоцима њеним.

При доказивању теореме 1° можемо се ограничити само на целе и рационалне функције, пошто су код ирационалних симетричних функција изрази под кореним знаком и код разломљених симетричних функција бројилац и именилац симетричне функције. Но пре него што приступимо самом доказу, напоменућемо ово, што следује:

Производ двеју симетричних функција јесте опет симетрична функција. Јер ако је P производ двеју симетричних функција U и V, а P^1 производ истих функција, пошто смо само у њима сменули основке, то онда мора бити $P = P^1$. Јер, прво чиниоци U и V као симетричне функције остали су исти, а друго P^1 постаје из P истом сменом основака. Пошто дакле производ P после поменуте смене основака остаје исти, то је он симетричан.

Према томе производ ма колико симетричних функција, па дакле и сваки цели степен једне симетричне функције јесте симетрична функција. Лако је увидети, да ће такав степен једне симетричне функције састојати се из више симетричних функција, које су истога реда, али различних класа.

Тако н. пр. ако симетричну функцију:

$$S_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

подигнемо на други степен, наћи ћемо:

$$S_1^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 2(\xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_3)$$

то јест:

$$S_1^2 = S_2 + 2\, S_{1,1}.$$

Дакле се S_1^2 састоји из двеју симетричних функција S_2 и $S_{1,1}$, које су обе другог реда, али је само друга ниже класе од прве. Исто тако налазимо, да је:

$$S_1^3 = \left\{\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3\right\} + 3\left\{\xi_1^2 \xi_2 + \xi_1^2 \xi_3 + \xi_1 \xi_2^2 + \xi_1 \xi_3^2 + \right.$$
$$\left. + \xi_2^2 \xi_3 + \xi_2 \xi_3^2\right\} + 6 \xi_1 \xi_2 \xi_3$$

или краће:

$$S_1^3 = S_3 + 3\, S_{2,1} + 6\, S_{1,1,1}.$$

28. Приступимо сада доказу теореме 1° у № 26. Нека је:

$$1.)\quad f(x, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m) =$$
$$= x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

и

$$S_{a,\, b\, \ldots\, h,\, k}$$

симетрична функција променљивих $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$, која се има изразити сачиниоцима $a_1, a_2, \ldots a_m$ и која се према томе мора састојати из чланова облика:

$$\xi_1^a\, \xi_2^b\, \xi_3^c\, \xi_4^d \ldots \xi_{n-1}^h\, \xi_n^k.$$

Ми при том претпостављамо, да су изложиоци $a, b, c, d \ldots h, k$ цели и положни бројеви, њих n на броју, и поређани по величини тако, да је:

$$a < b < c < d \ldots < h < k.$$

Саставимо сада из n првих сачинилаца полинома под 1) производ:

$$2.)\quad P = (-a_1)^{a-b}\, a_2^{b-c}\, (-a_3)^{c-d}\, a_4^{d-e} \ldots (\pm a_{n-1})^{h-k}\, (\mp a_n)^k$$

Вредности сачинилаца $a_1, a_2, \ldots a_n$ јесу оне у обрасцима 2) №-е 6, кад само тамо количине α сменимо са количинама ξ. Ако сад у овој последњој једначини заменимо сачиниоце $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ тим њиховим вредностима наћи ћемо:

$$3.)\quad P = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_m)^{a-b} (\xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \ldots)^{b-c} \times$$
$$\times (\xi_1 \xi_2 \xi_3 + \ldots)^{c-d} (\xi_1 \xi_2 \xi_3 \ldots \xi_{n-1} + \ldots)^{h-k} \times$$
$$\times (\xi_1 \xi_2 \xi_3 \ldots \xi_n + \ldots)^k.$$

Да бисмо могли лакше дознати, како ће изгледати производ по свршеном умножају, ми ћемо најпре проматрати једног од чинилаца н. пр. првог:

$$(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_m)^{a-b} = S_1^{a-b} = \xi_1^{a-b} +$$
$$+ \binom{a-b}{1} \xi_1^{a-b-1} (\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \ldots + \xi_m) +$$
$$+ \binom{a-b}{2} \xi_1^{a-b-2} (\xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_m)^2 +$$
$$+ \binom{a-b}{3} \xi_1^{a-b-3} (\xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_m)^3 +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (\xi_2 + \xi_3 \ldots + \xi_m)^{a-b}$$

или кад узастопне означене степене збира:

$$\xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_m$$

развијемо:

$$S_1^{a-b} = \xi_1^{a-b} + \binom{a-b}{1} \left\{ \xi_1^{a-b-1} \xi_2 + \xi_1^{a-b-1} \xi_3 + \ldots \right\} +$$
$$+ \binom{a-b}{2} \left\{ \xi_1^{a-b-2} \xi_2^2 + \xi_1^{a-b-2} \xi_3^2 + \ldots \right\} +$$
$$+ 2\binom{a-b}{2} \left\{ \xi_1^{a-b-3} \xi_2 \xi_3 + \xi_1^{a-b-2} \xi_2 \xi_4 + \ldots \right\} +$$
$$+ \binom{a-b}{3} \left\{ \xi_1^{a-b-3} \xi_2^3 + \xi_1^{a-b-3} \xi_3^3 + \ldots \right\} + \text{и т. д.}$$

Сви су чланови као што се види $(a-b)$-ог реда; и пошто је даље израз симетричан, то се морају у њему јавити сви они чланови, који постају из чланова:

$$4.)\quad \xi_1^{a-b},\quad \xi_1^{a-b-1}\xi_2,\quad \xi_1^{a-b-2}\xi_2^2\ldots$$

узајамном сменом количина:

$$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \xi_3,\ \ldots\ldots \xi_m$$

то ће рећи, у том се изразу морају јавити симетричне функције, које одговарају члановима под 4. На тај начин дакле добијамо:

$$S_1^{a-b} = S_{a-b} + B_1 S_{a-b-1,1} + B_2 S_{a-b-2,2} B_3 S_{a-b-2,1,1} + \\ + B_4 S_{a-b-3,3} + B_5 S_{a-b-3,2,1} + B_6 S_{a-b-3,1,1,1} + \\ + B_7 S_{a-b-4,4} + \ldots.$$

Први чинилац горњег производа 3) јесте дакле једнак збиру са извесним сачиниоцима умножених симетричних функција, које су све $(a-b)$-ог реда, али различитих класа. Посебице је пак:

$$5.)\quad S_{a-b} = \xi_1^{a-b} + \xi_2^{a-b} + \xi_3^{a-b} + \ldots + \xi_m^{a-b}$$

највише класе. На исти начин налазимо, да је други чинилац производа 3) једнак збиру симетричних функција 2 $(b-c)$-ог реда и различитих класа међу којима је:

$$6.)\quad S_{b-c,\ b-c} = \xi_1^{b-c}\xi_2^{b-c} + \xi_1^{b-c}\xi_3^{b-c}\ldots + \xi_{m-1}^{b-c}\xi_m^{b-c}$$

највише класе и т. д.

Претпоследњи чинилац производа 3) исто је тако једнак збиру симетричних функција $(n-1).(h-k)$-ог реда, а различитих класа, међу којима је:

$$7.)\quad S_{h-h,\ h-k} = \xi_1^{h-k}\xi_2^{h-k}\xi_3^{h-k}\ldots\xi_{n-2}^{h-k}\xi_{n-1}^{h-k} + \\ + \xi_1^{h-k}\xi_2^{h-k}\xi_3^{h-k}\ldots\xi_{n-2}^{h-k}\xi_n^{h-k} + \ldots$$

највише класе. Најзад међу симетричним функцијама nk-ог реда, које постају из последњега члана производа 3), највише је класе:

$$8.)\quad S_{k,k,\ldots k} = \xi_1^k\xi_2^k\xi_3^k\ldots\xi_{n-1}^k\xi_n^k + \xi_1^k\xi_2^k\xi_3^k\ldots\xi_{n-1}^k\xi_{n+1}^k + \ldots$$

Кад сад помножимо међу собом све оне збирове симетричних функција, које постају из појединих чинилаца производа P у 3), то ће се онда P јавити као скуп симетричних функција, које ће све бити реда:

$$(a-b) + 2(b-c) + 3(c-d) + 4(d-e) + \ldots + \\ + (n-2)(g-p) + (n-1)(h-k) + nk = \\ = a + b + c + d + e + \ldots + h + k = r,$$

али ће припадати различним класама. Симетрична функција највише класе у производу P, добија се очевидно, кад се помноже међу собом оне симетричне функције појединих чинилаца, које су највише класе. Та симетрична функција највише класе добија се дакле кад се међу собом помноже изрази 5, 6, ... 7, 8. И пошто је свака симетрична функција позната, ако је само познат један члан њезин, то ћемо множећи прве чланове поменутих израза наћи:

$$\xi_1^a\,\xi_2^b\,\xi_3^c\,\xi_4^d\ldots\xi_{n-1}^h\,\xi_n^k$$

као први члан симетричке функције, која је највише класе у производу P. Та симетрична функција јесте она, коју смо горе означили са

$$S_{a,\,b,\,c,\,\ldots\,h,\,k}.$$

Ако означимо са S збир свију осталих симетричних функција, које се налазе у производу P и које су нижих класа, добићемо:

$$P = S_{a,\,b,\,\ldots\,h,\,k} + S$$

одакле

$$S_{a,\,b,\,\ldots\,h,\,k} = P - S$$

И тако смо доказали теорему:

Свака цела, рационална и симетрична функција количина ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_m може се изразити са неколицином првих сачинилаца полинома 1) и симетричним функцијама истога реда, али нижих класа.

Ако сматрамо количине ξ_1, ξ_2, ξ_3 ... ξ_m као корене једначине

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

онда можемо рећи:

Свака цела и рационална функција корена једначине, може се изразити неколицином првих сачинилаца њених и симетричним функцијама истог реда, али нижих класа.

Ако сад из гомиле симетричних функција S издвојимо ону, која је највише класе, то се она такође може изразити неколицином првих сачинилаца полинома 1) и симетричним функцијама истог реда, али нижих класа. И

лако је увидети, да ћемо радећи и даље на тај начин, најзад моћи изразити

$$S_{a,\,b,\,\ldots\,h,\,k}$$

неколицином првих сачинилаца једначине 1) и симетричним функцијама најнижих класа, које функције нису ништа друго, до сами сачиниоци полинома 1).

И тако је теорема, поменута у почетку №-е 27, доказана.

Пример 1. Захтева се, да се нађе симетрична функција

$$S_{2,1}$$

количина: ξ_1, ξ_2, ξ_3 .... ξ_m.

Овде је $a=2$, $b=1$, $c=d=\ldots=k=0$, $n=2$.

Ваља нам дакле развити производ:

$$(-a_1)\,a_2 = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots$$
$$\ldots + \xi_m)(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \ldots + \xi_2\xi_3 + \ldots)$$
$$= \xi_1^2\xi_2 + \xi_1^2\xi_3 + \ldots + \xi_1\xi_2^2 + \ldots + \xi_1\xi_2\xi_3 + \ldots$$

Лако је увидети, да се у овом производу могу јавити само чланови облика:

$$\xi_1^2\xi_2 \quad \text{и} \quad \xi_1\xi_2\xi_3$$

и то сваки члан првог облика један пут, а другог облика три пут. Али збир свију чланова првог облика јесте симетрична функција

$$S_{2,1},$$

збир чланова другог облика јесте симетрична функција:

$$S_{1,1,1}$$

Дакле је: $-a_1 a_2 = S_{2,1} + 3 S_{1,1,1}$

или пошто је:

$$S_{1,1,1} = -a_3$$

најзад:

$$S_{2,1} = 3 a_3 - a_1 a_2$$

Пример 2. Тражи се збир четвртих степена количина x, дакле

$$S_4$$

Овде је:

$$a = 4,\ b = c = d = \ldots\ldots = k = 0;\ n = 1$$

дакле треба развити производ

$$P = (-a_1)^4.$$

$$(-a_1)^4 = (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m)^4 =$$
$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 + \ldots$$
$$\ldots + 2\xi_2\xi_3 + \ldots)^2;$$

још би ваљало развити и овај други степен, међу тим лако је увидети, да ћемо, кад то учинимо, добити само чланове овакog облика:

Чланове облика:	ξ_1^4	сваки по	1 пут
„ „	$\xi_1^3\xi_2$	„ „	4 пута
„ „	$\xi_1^2\xi_2^2$	„ „	6 „

Чланови облика:	$\xi_1^2\xi_2\xi_3$	сваки по	12 пута
„ „	$\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$	„ „	24 „

Према томе је

$$(-a_1)^4 = S_4 + 4S_{3,1} - 6S_{2,2} + 12S_{2,1,1} + 24S_{1,1,1,1},$$

одакле следује

$$S_4 = a_1^4 - 4S_{3,1} - 6S_{2,2} - 12S_{2,1,1} - 24S_{1,1,1,1}$$

На исти начин налазимо из производа:

$$(-a_1)^2 a_2,\quad S_{3,1} = a_1^2 a_2 - 2S_{2,2} - 5S_{2,1,1} + 12S_{1,1,1,1}$$

$$(-a_1)^0 a_2^2 = a_2^2,\quad S_{2,2} = a_2^2 - 2S_{2,1,1} - 6\, S_{1,1,1,1}$$

$$(-a_1)\, a_2^0 (-a_3) = (-a_1)(-a_3):\quad S_{2,1,1} = a_1 a_3 - 4S_{1,1,1,1},$$

али пошто је:

$$S_{1,1,1,1} = a_4$$

то добијамо после свршене замене:

$$S_4 = a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 2a_2^2 + 4a_1 a_3 - 4a_4$$

29. Из самог доказа, који смо у №-и 28 извели следује, да *у израз једне симетричне функције количина ξ могу ући само првих r сачинилаца полинома:*

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

ако је та симетрична функција r-ног реда, јер су следећи сачиниоци:

$$a_{r+1},\quad a_{r+2}\ \ldots\ldots\ a_m$$

већ симетричне функције виших редова:

Дакле стоји теорема:

Кад су у два полинома истога степена или не првих r сачинилаца редом исти у једном и у другом, онда све могуће симетричне функције количина ξ почев од првог па до r-ог реда имају за оба полинома исту вредност.

Од особите су важности збирови, који постају из једноимених целих степена количина ξ, и који се збирови према усвојеном начину означавања имају означити са:

$$S_1, \; S_2, \; S_3, \; S_4 \; . \; . \; .$$

Ми ћемо да докажемо теорему:

Ма каква симетрична функција количина ξ може се изразити збировима једноимених степена њихових.

Узмимо зарад тога нека је:

$$S_{a,\, b,\, c, \ldots\, h,\, k}$$

ма каква симетрична функција r-ог реда, дакле

$$a + b + c + d + \ldots + h + k = r,$$

а n нека је број изложилаца. Поменута симетрична функција састоји се из чланова облика:

$$\xi_1^a \, \xi_3^b \, \xi_2^c \ldots . \; \xi_{n-1}^h \, \xi_n^k.$$

Развимо производ:

$$P = S_a \; S_b \; S_c \; S_d \; . \; . \; . \; S_h \; S_k,$$

где је:

$$S_a = \xi_1^a + \xi_2^a + \xi_3^a + \ldots . + \xi_m^a$$

$$S_b = \xi_1^b + \xi_2^b + \xi_3^b + \ldots . + \xi_m^b$$

$$S_c = \xi_1^c + \xi_2^c + \xi_3^c + \ldots . + \xi_m^c$$

и т. д.

У производу биће очевидно чланова ове врсте:

$$\xi_1^{a+b+c+\ldots+k} = \xi_1^r \quad \text{и} \quad \xi_1^a \, \xi_2^b \, \xi_3^c \ldots \xi_n^k$$

па дакле и њима одговарајуће симетричне функције. Дакле стоји једначина:

$$S_a \; S_b \; S_c \; . \; . \; . \; S_h \; S_k = S_r + S_{a,\, b,\, c, \ldots\, h,\, k} + S,$$

где је S скуп осталих симетричних функција истога реда, са којима се може исто тако поступити.

Пример. Тражи се, да се симетрична функција:

$$S_{3,2,1}$$

изрази збировима једноименованих степена корена ξ. Зарад тога развимо производ:

$$S_3 \, S_2 \, S_1 = (\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 + \ldots)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \ldots) \times$$

$$\times (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots) =$$

$$= \xi_1^6 + \xi_1^5 \, \xi_2 + \xi_1^4 \, \xi_2^2 + \xi_1^3 \, \xi_2^3 + \xi_1^3 \, \xi_2^2 \, \xi_3 + \ldots .$$

Пошто се дакле чланови другчијег облика у производу не могу јавити, и пошто се даље сваки члан облика $\xi_1^3 \xi_2^3$ мора два пут јавити, то је онда даље:

$$S_3 S_2 S_1 = S_6 + S_{5,1} + S_{4,2} + 2 S_{3,3} + S_{3,2,1}$$

или:

$$1.) \quad S_{3,2,1} = S_3 S_2 S_1 - S_6 - S_{5,1} - S_{4,2} - 2 S_{3,3}$$

Исто је тако:

$$S_{5,1} = (\xi_1^5 + \xi_2^5 + \ldots)(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots) = \xi_1^6 + \xi_1^5 \xi_2 + \ldots =$$
$$= S_6 + S_{5,1}$$

дакле је:

$$S_{5,1} = S_5 S_1 - S_6$$

Исто је тако даље:

$$S_4 S_2 = (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \ldots)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots) = \xi_1^6 + \xi_1^4 \xi_2^2 + \ldots =$$
$$= S_6 + S_{4,2},$$

дакле је:

$$S_{4,2} = S_4 \; S_2 - S_6.$$

Најзад је

$$S_3^2 = (\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 + \ldots)^2 = \xi_1^6 + \ldots + 2 \xi_1^3 \xi_2^3 + \ldots =$$
$$= S_6 + 2 S_{3,3}$$

одакле следује

$$2 S_{3,3} = S_3^2 - S_6.$$

Пошто у једначини 1) заменимо последња три члана десно од знака једнакости њиховим вредностима, добијамо:

$$S_{3,2,1} = S_3 S_2 S_1 - S_5 S_1 - S_4 S_2 - S_3^2 + 2 S_6$$

30. У овој №-и показаћемо методу, помоћу које се збирови једноимених степена количина ξ могу врло лако изразити сачиниоцима једначине:

$$1.) \quad x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0.$$

Кад ову једначину помножимо са x^r добијамо:

$$2.) \quad x^{m+r} + a_1 x^{m+r-1} + a_2 x^{m+r-2} + \ldots + a_{m-1} x^{r+1} + a_m x^r = 0$$

Пошто количине $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_m$ задовољавају једначину 1), оне морају задовољити и једначину 2) и за то морају вредети једначине:

$$\xi_1^{m+r} + a_1 \xi_1^{m+r-1} + a_2 \xi_1^{m+r-2} + \ldots + a_{m-1} \xi_1^{r+1} + a_m \xi_1^r = 0$$
$$\xi_2^{m+r} + a_1 \xi_2^{m+r-1} + a_2 \xi_2^{m+r-2} + \ldots + a_{m-1} \xi_2^{r+1} + a_m \xi_2^r = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\xi_m^{m+r} + a_1 \xi_m^{m+r-1} + a_2 \xi_m^{m+r-2} + \ldots + a_{m-1} \xi_m^{r+1} + a_m \xi^r = 0$$

Кад све те једначине саберемо излази:

$$3.) \quad S_{m+r} + a_1 S_{m+r-1} + a_2 S_{m+r-2} + \ldots .$$
$$\ldots + a_{m-1} S_{r+1} + a_m S_r = 0$$

Ово је повратни образац, помоћу којега се збир $(m+r)$-них степена количина ξ даје изразити сачиниоцима полинома 1), пошто су пре тога збирови њиних нижих степена до r-ог закључно већ изражени тим сачиниоцима.

Ако ставимо у 3) $r = 0$ добићемо, пошто је:

$$S_0 = \xi_1^0 + \xi_2^0 + \xi_3^0 + \ldots + \xi_m^0 = m:$$

$$4.)\quad S_m + a_1 S_{m-1} + a_2 S_{m-2} + \ldots + a_{m-1} S_1 + m\, a_m = 0$$

И ова једначина даје S_m т. ј. збир m-них степена количина ξ, кад су нам познати збирови њиних нижих степена.

Ако ставимо у 4) $m = 2, 3, 4, \ldots$, то добијамо изразе, који дају збирове других, трећих, и т. д. степена количина ξ за полиноме, који су односно другог, трећег, четвртог и т. д. степена, и којих су сачиниоци, почев од првог па на десно редом једнаки онима у полиному 1.) Ти изрази по ономе, што смо рекли у почетку №-е 29 морају вредити и за полином 1).

Ако сада у једначини 4) заменимо m редом са: 1, 2, 3 . . . m добићемо:

$$5.)\quad \begin{cases} S_1 + a_1 = 0 \\ S_2 + a_1 S_1 + 2\, a_2 = 0 \\ S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3\, a_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_m + a_1 S_{m-1} + a_2 S_{m-2} + \ldots + a_{m-1} S_1 + m a_m = 0 \end{cases}$$

из којих се једначина потпуно израчунавају функције S_1, S_2, S_3 . . . .

За последњом једначином у 5) долази одмах прва од оних једначина, које постају из једначине 3), кад се у овој стави $r = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Обрасци 5) зову се Newton-ови. Помоћу тих образаца у стању смо дакле, кад је задата једначина, израчунати збирове једноимених степена корена њених.

31. Кад је задата општија једначина:

$$1.)\quad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

којој су $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m$ корени, онда на начин истоветан са оним у № 30 добијамо место образаца 3) и 5) у № 30 ове општије:

$$2.)\quad a_0 S_{m+r} + a_1 S_{m+r-1} + \ldots + a_{m-1} S_{r+1} + a_m S_r = 0$$

и

$$3.)\quad \begin{cases} a_0 S_1 + a_1 = 0 \\ a^0 S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0 \\ a_0 S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 S_m + a_1 S_{m-1} + \ldots + a_{m-1} S_1 + m a_m = 0 \end{cases}$$

где су S_1, S_2, S_3 . . . збирови првих, других, трећих итд. степена корена једначине 1). Помоћу образаца 2), 3) и 4) израчунавају се дакле збирови једноимених степена корена једначине 1) у овој №-и.

Једначина

$$4.)\quad a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

која из једначине 1) постаје, кад се у овој сачиниоци обрнутим редом напишу, има за корене реципрочне вредности корена једначине 1) т. ј:

$$\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}, \frac{1}{\xi_3}, \ldots\ldots \frac{1}{\xi_m},$$

или што је једно исто:

$$\xi_1^{-1},\quad \xi_2^{-1},\quad \xi_3^{-1}, \ldots\ \xi_m^{-1}$$

Ако дакле обрасце ове №-е применимо на једначину 4) добићемо збирове степена реципрочних, или степена с одречним изложиоцима корена једначине 1).

Ако дакле ставимо:

$$S_{-1} = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \dots + \frac{1}{\xi_m} = \xi_1^{-1} + \xi_2^{-1} + \dots + \xi_m^{-1}$$

$$S_{-2} = \frac{1}{\xi_1^2} + \frac{1}{\xi_2^2} + \dots + \frac{1}{\xi_m^2} = \xi_1^{-2} + \xi_2^{-2} + \dots + \xi_m^{-2}$$

и т. д.

то из образаца 4), 3) и 2) ове №-е добијамо:

$$5.) \begin{cases} a_m S_{-1} + a_{m-1} = 0 \\ a_m S_{-2} + a_{m-1} S_{-1} + 2a_{m-2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m S_{-(m+r)} + a_{m-1} S_{-(m+r-1)} + \dots + a_1 S_{-(r+1)} + a_0 S_{-r} = 0 \end{cases}$$

То су обрасци, помоћу којих се израчунавају збирови реципрочних степена корена једначине 1).

9.5

VI. Примена науке о симетричним функцијама.

32. Симетричне функције јављају се при преображавању једначина, кад год су корени тражене једначине извесне рационалне функције корена задате једначине.

Нека су н. пр. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ корени задате једначине. Да бисмо имали један извесан случај пред очима,

ми ћемо претпоставити, да у изразе за поједине корене тражене једначине не улазе више од два корена дате једначине. Ако означимо са $\varphi(\alpha_1\ \alpha_2)$ рационалну функцију, у којој је исказан закон, по коме се из појединих корена задате једначине склапају корени тражене једначине, онда ћемо добити све корене тражене једначине, ако у $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ сменимо α_1 и α_2 са појединим пермутацијама сваке комбинације друге класе која је начињена из корена $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ дате једначине. Корени тражене једначине биће дакле:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2), \quad \varphi(\alpha_1, \alpha_3) \dots \varphi(\alpha_2, \alpha_1) \dots \varphi(\alpha_{m-1}, \alpha_m)$$

Према томе, тражена једначина биће, кад се њен полином престави као производ:

$$[x - \varphi(\alpha_1, \alpha_2)]\,[x - \varphi(\alpha_1, \alpha_3)] \dots [x - \varphi(\alpha_{m-1},\ \alpha_m)] = 0$$

Овај се производ не мења, кад се количине $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ ма како узајамно смене, јер се тада само мења ред, којим узастопце теку чиниоци тога производа. Јасно је дакле, да ће по свршеном умножају чинилаца тога производа сачиниоци узастопних степена од x бити симетричке и рационалне функције корена $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ задате једначине, које се функције по методама пређашње №-е могу лако израчунати из сачинилаца задате једначине.

Али има други у многим приликама згоднији начин рада, који се оснива па простој напомени, да помоћу једначина 2) и 5) у № 30 или 2) и 3) у № 31, можемо лако изнаћи сачиниоце тражене једначине, ако само знамо збирове првих, других и т. д. степена корена њених, и то до онога степена закључно, који је једнак степену њеном, или што је све једно, који је једнак броју њених непознатих сачинилаца.

Да бисмо дакле нашли тражену једначину, ми ћемо пре свега, а према условима задатка одредити, ког ће она морати бити степена. За тим ћемо тражити збирове узастопних степена корена њених, почев од првог степена па до оног, који је једнак степену њеном и помоћу тих збирова тада ћемо израчунати сачиниоце њене. И пошто су поменути збирови симетричне функције корена дане једначине, они се могу израчунати из њених сачинилаца.

Примедба. Ако се $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$, у којој је исказан закон, како корени тражене једначине постају из корена задане, не мења узајамном сменом корена α_1 и α_2, онда је јасно, да сви корени тражене једначине постају, кад се у $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ корени α_1 и α_2 смене појединим *комбинацијама* друге класе начињеним из корена задате једначине. Јасно је такође, да ће и у том случају сачиниоци тражене једначине морати бити симетричне функције дане једначине.

33. Као први пример узећемо овај задатак:

Корени задате једначине нису познати и тражи се једначина, чији су корени збирови од два и два или три и три и т. д. корена дане једначине.

Узмимо, да бисмо имали један извесан случај пред очима, да се на пример тражи једначина, чији се корени добијају, кад се саберу све по два и два корена дане једначине.

Ако су корени задате једначине:

$$1.) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \; .\;.\;.\;. \; \alpha_m$$

онда ће корени нове једначине бити:

$$2.) \quad (\alpha_1+\alpha_2), \; (\alpha_1+\alpha_3), \; (\alpha_1+\alpha_4), \ldots (\alpha_2+\alpha_3), \ldots$$
$$\ldots (\alpha_{m-1}+\alpha_m).$$

Број ових последњих корена једнак је броју комбинација друге класе из m основака, дакле:

$$\binom{m}{2} = \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}$$

и то је степен тражене једначине.

Да бисмо нашли сачиниоце тражене једначине ваља узети на ум, да је први сачинилац исте јединица, а други:

$$-(\alpha_1+\alpha_2) - (\alpha_1+\alpha_3) - \ldots - (a_{m-1}+a_m)$$

а то је као што се види симетрична функција корена дате једначине, која се може израчунати из познатих сачинилаца дане једначине:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3 \; .\;.\;. \; a_m$$

Исто је тако трећи сачинилац тражене једначине:

$$(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3) + (\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_3) +$$
$$+ (\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_3) + \ldots$$

дакле опет симетрична функција корена дате једначине, која се функција може израчунати из познатих сачинилаца дате једначине.

То исто важи и за четвртог, петог, и т. д. и у опште за $(r+1)$-вог сачиниоца. Овај последњи јесте не гледећи на његов знак, збир комбинација r-не класе а без понављања начињених из количина под 2) дакле опет симетрична функција корена дате једначине. Али све те симетричне функције ми смо у стању израчунати помоћу сачинилаца задате једначине. Но то ми овде нећемо чинити, пошто ћемо мало доцније наћи простији начин за израчунавање тражених сачинилаца.

Исто тако, могла би се тражити једначина, чији би корени били облика:

$$(\alpha_1+\alpha_2+k\,\alpha_1\,\alpha_2),\ (\alpha_1+\alpha_3+k\,\alpha_1\,\alpha_3),$$
$$(\alpha_1+\alpha_4+k\,\alpha_1\alpha_4)\dots$$

где су α_1, α_2, $\alpha_3\dots$ корени задате једначине, а k познат број. Степен тражене једначине јесте опет онај исти, као и горе, а сачиниоци њени јесу симетричне функције корена дате једначине.

34. Као другу примену симетричних функција узмимо да се тражи једначина, чији су корени разлике од све два и два корена дате једначине. Пошто се сваки од m корена дате једначине одузима од сваког другог, то је степен тражене једначине $m(m-1)$. Пошто даље тражена једначина има увек по два једнака али противно означена корена, због чега она мора имати увек по два корена чиниоца облика:

$$x-\alpha,\quad x+\alpha,$$

којих је производ $=x^2-\alpha^2$, то је онда јасно, да се у траженој једначини могу налазити само парни степени непознате, да дакле, она мора бити облика:

$$1.)\quad x^{2n}+b_1x^{2n-2}+b_2x^{2n-4}+\dots+b_{n-1}x^2+b_n=0.$$

Ако у ту једначину ставимо: $x^2=z$ она се претвара у:

$$2.)\quad z^n+b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\dots+b_{n-1}z+b_n=0$$

и корени ове једначине јесу квадрати разлика корена дане једначине. Њени сачиниоци исти су као и у једначини 1), али је она простија за рад, јер јој је степен у пола оно-лики, колики је степен једначине 1). Та се једначина зове краће: *једначина квадриратих разлика корена.*

Ако су корени датих једначина:

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \dots\quad \alpha_m;$$

онда ће корени једначине 2) бити

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2,\ (\alpha_1-\alpha_3)^2\ \dots\ (\alpha_1-\alpha_3)^2\ \dots\ (\alpha_{m-1}-\alpha_m)^2$$

За чиниоце b једначине 2) вреде једначине:

$$-b=(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\alpha_1-\alpha_3)^2+\dots+(\alpha_{m-1}-\alpha_m)^2$$
$$b_2=(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2+\dots$$
$$-b_3=(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2+\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Као што се види изрази за поједина b јесу симетричне функције корена дане једначине, које се могу помоћу њених сачинилаца, α_1, α_2, ... α_m израчунати. Међу тим само израчунавање по методи № 28 прилично је заметно, за то ћемо радити на онај лакши у № 32 показани начин.

Помоћу образаца 5) у № 30 израчунавају се из — познатих — сачинилаца једначине збирови других, трећих и т. д. степена корена њених и обратно, из тих збирова, кад су они познати, израчунавају се помоћу истих образаца лако и сачиниоци једначине $a_1, a_2, \ldots a_m$. Кад бисмо дакле могли израчунати за једначину 2) збирове једноимених степена корена њених, онда бисмо лако помоћу образаца 5) могли израчунати и сачиниоце њене b_1, b_2, $b_3 \ldots b_n$.

Сад ако означимо са S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 збирове једноимених степена корена једначине 2) имаћемо:

$$3.) \begin{cases} S'_1 = (\alpha_1-\alpha_2)^2+(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\alpha_1-\alpha_4)^2+\ldots= \\ \qquad = (m-1)\,S_2 - 2\,S_{1,1} \\ S'_2 = (\alpha_1-\alpha_2)^4+(\alpha_1-\alpha_3)^4+\ldots= \\ \qquad = (m-1)\,S_4 - 4\,S_{3,1}+6\,S_{2,2} \\ S'_3 = (\alpha_1-\alpha_2)^6+(\alpha_1-\alpha_3)^6+\ldots= \\ \qquad = (m-1)\,S_6 - 6\,S_{5,1}+15\,S_{4,2}-20\,S_{3,3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

где поједина S десно од знака једнакости јесу извесне симетричне функције корена задате једначине, које се функције из њених сачинилаца могу израчунати.

У изразима за $S'_1, S'_2, S'_3 \ldots$ јавља се као сачинилац функција $S_2, S_4, S_6 \ldots$ број $(m-1)$, а тако мора и бити, јер у S_2 мора се α_1^2, у S_4 мора се α_1^4, у S_6 мора се α_1^6 и т. д. налазити онолико пута, колико дата једначина има корена сем α_1 дакле $(m-1)$ пута; а то вреди и за 2-ги, 4-ти, 6-ти степен и ма којег другог корена задате једначине.

Сачиниоци осталих функција десно од знака једнакости у једначинама 3) јесу биномни сачиниоци, који се јављају у 2-ом, 4-том и т. д. степену бинома $(a-b)$ и то почев од другог биномног сачиниоца и закључно до оног, који је у среди. Најзад знаци чланова обрасца 3) мењају се као у 2-ом, 4-том и т. д. степену бинома $(a-b)$.

Број збирова $S'_1, S'_2, S'_3, \ldots S'_n$, које треба израчунати, једнак је броју сачинилаца b у 2).

Према свему, што смо рекли, ево како ваља удесити рад:

Најпре ваља израчунати збирове:

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots\ S_{2n} = S_{m(m-1)}$$

корена дане једначине. За тим по методи № 28 израчунати функције

$$S_{1,1},\ S_{3,1},\ S_{2,2}\ \ldots$$

и тада обрасци 3) ове №-е дају вредности за:

$$S'_1,\ S'_2,\ S'_3,\ \ldots\ S'_n$$

и најзад из ових последњих количина израчунавају се помоћу образаца 5) у № 30 сачиниоци:

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ b_n$$

једначине 2.

Пример. Дата је једначина:

$$x^3 - 7x + 7 = 0;$$

а тражи се једначина квадрираних разлика корена њених. Овде је:

$$\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{1.2} = 3,$$

дакле је тражена једначина облика:

$$z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 = 0$$

Дакле имају се израчунати три сачиниоца, а према томе и три збира:

$$S_1', \; S_2' \quad \text{и} \quad S_3'$$

У овом је задатку:

$$a_1 = 0, \; a_2 = -7, \; a_3 = 7.$$

Обрасци 5) у № 30 дају:

$$S_1 = 0, \; S_2 = 14, \; S_3 = -21, \; S_4 = 98, \; S_5 = -245$$
$$S_6 = 833$$

Даље по методи № 28 налазимо:

$$S_{1,1} = -7; \; S_{3,1} = -98, \; S_{2,2} = 49, \; S_{5,1} = -833.$$
$$S_{4,2} = 539, \; S_{3,3} = -196.$$

дакле је:

$$S_1' = 2S_2 - 2S_{1,1} = 42$$

$$S_2' = 2S_4 - 4S_{3,1} + 6S_{2,2} = 882$$

$$S_3' = 2S_6 - 6S_{5,1} + 15S_{4,2} - 20S_{3,3} = 18669.$$

Помоћу ових вредности и образаца 5) у № 30 добијамо:

$$b_1 = -42, \; b_2 = 441, \; b_3 = -49$$

Дакле је:

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0$$

тражена једначина, чији су корени квадрирате разлике корена дане једначине:

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Међу тим једначина, чији су корени разлике од два и два корена дате једначине, јесте;

$$x^6 - 42x^4 + 441x^2 - 49 = 0$$

Примедба. На сличан начин као сачиниоци једначине квадрираних разлика, могу се наћи и сачиниоци, чији су корени збирови од два и два корена дате једначине (№ 33).

Нека је:

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

дата једначина; тражена једначина биће облика:

$$z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 = 0$$

јер је сада

$$\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{1.\,2} = 3.$$

Ако су сада: S_1', S_2' и S_3' збирови првих, других и трећих степена корена ове друге једначине, биће:

$$S_1' = (\alpha_1+\alpha_2) + (\alpha_1+\alpha_3) + (\alpha_2+\alpha_3) = 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) =$$
$$= 2S_1$$

$$S_2' = (\alpha_1+\alpha_2)^2 + (\alpha_1+\alpha_3)^2 + (\alpha_2+\alpha_3)^2 = 2S_2 + 2S_{1,1}$$

$$S_3' = (\alpha_1+\alpha_2)^3 + (\alpha_1+\alpha_3)^3 + (\alpha_2+\alpha_3)^3 = 2S_3 + 3S_{2,1}$$

Функције S_1, S_2 и S_3 израчунавају се помоћу образаца 5) у № 30, а $S_{1,1}$, $S_{2,1}$ по методи № 28. И пошто је то учињено, онда су познате и функције:

$$S_1', \quad S_2', \quad S_3'$$

из којих се помоћу образаца 5) у № 30 израчунавају сачиниоци b_1, b_2, b_3.

На сличан начин морали бисмо радити, кад бисмо хтели из дане једначине да изведемо једначину, чији су корени облика:

$$(\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_1\alpha_2), \ (\alpha_1+\alpha_3+k\alpha_1\alpha_3)\ldots$$

За једначину m-ог степена имали бисмо:

$$S_1'=(\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_1\alpha_2)+(\alpha_1+\alpha_3+k\alpha_1\alpha_3)+\ldots= \\ =(m-1)\,S_1+kS_{1,1},$$

$$S_2'=(\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_1\alpha_2)^2+\ldots=(m-1)\,S_2+2S_{1,1}+ \\ +\,2kS_{2,1}+k^2S_{2,2}$$

$$S_3'=(\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_1\alpha_2)^3+\ldots=(m-1)\,S_3+3S_{2,1}+ \\ +\,3k(S_{3,1}+2S_{2,2})+3k^2S_{3,2}+k^3S_{3,3}$$

VII. Њутнов образац у облику детерминанте. Условн за различност и једнакост корена.

35. Нека је опет као у № 27:

$$f(x,\ \xi_1,\ \xi_2\ldots\xi_m)=(x-\xi_1)\,(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m)= \\ =x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$$

где количине ξ можемо сматрати као корене једначине:

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0$$

или као променљиве, услед чега су и сачиниоци a променљиви.

Њутнов образац под 5) у № 30:

$$1.)\quad S_m+a_1S_{m-1}+a_2S_{m-2}+\ldots+a_{m-1}S_1+m\,a_m=0$$

јесте повратни образац, помоћу којег се израчунавају збирови једноимених степена количина ξ. Но лако је из истог обрасца извести помоћу детерминаната други и то независан образац. Ако последњи члан обрасца 1) пребацимо на десну страну, и за тим у њему ставимо:

$m=k,\ k-1,\ k-2\ \ldots\ 2,\ 1$, добићемо:

$$\begin{aligned} S_k+a_1S_{k-1}+a_2S_{k-2}+\ldots+a_{k-1}S_1&=-ka_k \\ S_{k-1}+a_1S_{k-2}+\ldots+a_{k-2}\,S_1&=-(k-1)\,a_{k-1} \\ S_{k-2}+\ldots+a_{k-3}S_1&=-(k-2)\,a_{k-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ S_1&=-a_1. \end{aligned}$$

Одатле добијамо:

$$2.)\quad S_k=-\begin{vmatrix} k\,a_k & a_1 & a_2\ldots a_{k-1} \\ (k-1)\,a_{k-1} & 1 & a_1\ldots a_{k-2} \\ (k-2)\,a_{k-2} & 0 & 1\ldots a_{k-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1\,a_1 & 0 & 0\ldots 1 \end{vmatrix}$$

И ово је *независни* образац, помоћу којег се израчунава збир k-их степена количина ξ из сачинилаца a полинома:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

Ако количине ξ сматрамо као сталне и то као корене једначине:

$$3.)\quad x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

онда се помоћу обрасца 2) на независан начин израчунава збир k-их степена корена њених.

Ако се у једначини 3) ξ_1 јавља α_1-пута као корен, ξ_2 α_2-пута, ξ_3 α_3-пута и т. д. ξ_m α_m-пута, то је онда:

$$4.)\qquad S_k = \alpha_1 \xi_1^k + \alpha_2 \xi_2^k + \ldots + \alpha_r \xi_r^k$$

Помоћу Њутнових образаца може се такође врло лако и сачинилац a_k полинома

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

изразити функцијама S у облику детерминанте. Зарад тога треба само у Њутновој једначини 5) у № 30 узети $m = k$ па онда сматрајући у истима сачиниоце a као непознате решити те једначине односно a_k. Као резултат излази:

$$a_k = (-1)^k \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} S_1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_2 & S_1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k-1 \\ S_k & S_{k-1} & S_{k-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_1 \end{vmatrix}$$

Ако је први сачинилац полинома не јединица већ a_0, онда се десна страна овог обрасца мора још помножити са a_0.

36. У № 178 алгебарске анализе ми смо упоредили детерминанту облика:

$$1.)\quad R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_m \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{m-1} & \xi_2^{m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

која је односно сваке од m промењљивих $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ цела функција $(m-1)$-ог степена, а односно свију промењљивих хомогена функција $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$-ог степена, са производом:

$$2.)\qquad P = P_2 \,.\, P_3 \,.\, P_4 \ldots P_{m-1}\; P_m,$$

где је за $k = 2, 3, 4 \ldots (m-1), m$:

$$3.)\quad P_k = (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k-2}) \ldots (\xi_k - \xi_1)$$

Ми смо тамо нашли, да је производ 2) који је цела функција $(m-1)$-ог степена односно сваке од m промењљивих $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_m$, а хомогена функција $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$-ог степена односно свију тих промењљивих, једнак детерминанти 2) т. ј:

$$4.)\qquad R = P$$

Ми ћемо сада да тражимо квадрат детерминанте R, који се добија, кад се она сама собом помножи. Кад тај посао извршимо по упуствима № 177 алгебарске анализе, добићемо:

$$5.)\qquad R^2 = \begin{vmatrix} 1+1+\dots+1, & \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_m, & \dots & \xi_1^{m-1}+\dots+\xi_m^{m-1} \\ \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_m, & \xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_m^2, & \dots & \xi_1^m+\dots+\xi_m^m \\ \xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_m^2, & \xi_1^3+\xi_2^3+\dots+\xi_m^3, & \dots & \xi_1^{m+1}+\dots+\xi_m^{m+1} \\ \xi_1^3+\xi_2^3+\dots+\xi_m^3, & \xi_1^4+\xi_2^4+\dots+\xi_m^4, & \dots & \xi_1^{m+2}+\dots+\xi_m^{m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{m-1}+\xi_2^{m-1}+\dots+\xi_m^{m-1}, & \xi_1^m+\xi_2^m+\dots+\xi_m^m, & \dots & \xi_1^{2m-2}+\dots+\xi_m^{2m-2} \end{vmatrix}$$

или краће:

$$6.)\qquad R^2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{m-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_m \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{m+1} \\ S_3 & S_4 & \dots & S_{m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m-1} & S_m & \dots & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

али је такође:

$$7.)\qquad R^2 = P^2 = P_2^2\, P_3^2\, P_4^2 \dots P_{m-1}^2\, P_m^2$$

Дакле детерминанта, што је на десној страни једначине 5) или 6) једнака је квадрату производа из разлика, које постају, кад се свака од количина

$$8.)\qquad \xi_1,\quad \xi_2,\quad \xi_3,\ \dots\ \xi_{m-1},\quad \xi_m$$

одузме од свију доцнијих.

Ако количине ξ под 8.) сматрамо као сталне, и то, као корене једначине:

$$9.)\qquad x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

онда, као што се види симетрична функција тих корена под 6) може се помоћу обрасца 2) у № 35 израчунати, а да и не знамо корене.

Ми ћемо детерминанту под 6) означити са Δ_m тако, да је:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{m-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m-1} & S_m & \dots & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

и у исти мах

$$\Delta_m = (\xi_2-\xi_1)^2 (\xi_3-\xi_1)^2 (\xi_4-\xi_1)^2 \dots (\xi_m-\xi_1)^2$$
$$\times (\xi_3-\xi_2)^2 (\xi_4-\xi_2)^2 \dots (\xi_m-\xi_2)^2$$
$$\times (\xi_4-\xi_3)^2 \dots (\xi_m-\xi_3)^2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\times (\xi_m-\xi_{m-1})^2$$

37. Количина Δ_m у № 36 може се изразити и сачиниоцима a функције:

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m =$$
$$= (x-\xi_1)(x-\xi_2) \dots (x-\xi_m)$$

Напишимо детерминанту $(2m-2)$-ог реда:

$$1.)\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & S_0 & S_1 & \dots & S_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 \dots S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_0 & S_1 & S_2 \dots S_{m-3} & S_{m-2} & S_{m-1} & \dots & S_{2m-3} \\ S_1 & S_2 & S_3 \dots S_{m-2} & S_{m-1} & S_m & \dots & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

у којој су сви основци у првих $(m-2)$ врста $= 0$, сем оних, што су у дијагонали детерминанте, која постаје из тих врста. Детерминанта 1) једнака је детерминанти Δ_m №-е 36 (алг. анал. № 171). Детерминанту 1) можемо сад преставити на други начин овако: Први стуб оставимо као што је, другом стубу додајмо са a_1 помножени први стуб, трећем стубу додајмо са a_1 помножени други и са a_2 помножени први стуб, четвртом стубу додајмо са a_1 помножени трећи, са a_2 помножени други и са a_3 помножени први стуб, и т. д.

На тај начин добијамо:

2.) $\Delta_m =$

$$\left|\begin{array}{llll}
1 & a_1 & a_2 & a_3 \dots\dots \\
0 & 1 & a_1 & a_2 \dots\dots \\
0 & 0 & 1 & a_1 \dots\dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 \dots\dots \\
0 & 0 & 0 & \dots\dots \\
0 & 0 & 0 & \dots\dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
S_0, & S_1+a_1S_0, & S_2+a_1S_1+a_2S_0, & S_3+a_1S_2+ \\
 & & & +a_2S_1+a^3S_0 \dots \\
S_1, & S_2+a_1S_1, & S_3+a_1S_2+a_2S_1, & S_4+a_1S_3+ \\
 & & & +a_2S_2+a_3S_1+a_4S_0 \dots
\end{array}\right|$$

Овде оних $(m-1)$ врста, што долазе за $(m-2)$-ом врстом, почињу редом са $(m-2)$, $(m-3)$ и т. д. нула и те врсте јесу:

$$\begin{array}{lllll}
0, & 0 \dots 0, & S_0 & S_1+a_1S_0 & \dots \\
0, & 0 \dots S_0, & S_1+a_1S_0, & S_2+a_1S_1+a_2S_0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Помоћу Њутнових образаца у № 30 могу се основци ове детерминанте простије представити. Јер помоћу тих образаца налазимо:

$$S_0 = m$$

$$S_1 + a_1S_0 = (m-1)\, a_1$$

$$S_2 + a_1S_1 + a_2S_0 = (m-2)\, a_2$$

$$S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + a_3S_0 = (m-3)\, a_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Дакле, кад помоћу ових образаца преставимо простије основке горње детерминанте и за тим последњу врсту још помножимо са — 1, добићемо:

$$3.)\quad \Delta = -\left|\begin{array}{lll}
1 & a_1 & a_2 \dots\dots \\
0 & 1 & a_1 \dots\dots \\
0 & 0 & 1 \dots\dots \\
\dots & \dots & \dots \\
0 & m & (m-1)\, a_1 \dots \\
m & (m-1)\, a_1 & (m-2)\, a_2 \dots \\
a_1 & 2a_2 & 3a_3 \dots\dots
\end{array}\right|$$

Помоћу овог обрасца у стању смо дакле израчунати симетричну функцију Δ_m количина ξ, а да ове не морамо знати, просто из сачинилаца a функције $f(x)$. Дакле нас овај образац ослобођава израчунавања количина S у пређашњој №-и.

Ако је у $f(x)$ први сачинилац a_0 а не јединица онда је лако увидети, да место обрасца 3) вреди овај

$$\Delta_m = -\frac{1}{a_0^{2m-2}}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \dots\dots \\ 0 & a_0 & a_1 \dots\dots \\ 0 & 0 & a_0 \dots\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & ma_0 & (m-1)\,a_1 \dots \\ ma_0 & (m-1)\,a_1 & (m-2)\,a_2 \dots \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 \dots\dots \end{vmatrix}$$

Тако на пример ако је:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

онда је:

$$\Delta_m = -\begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 0, & 3, & 4, & -1 \\ 3, & 4, & -1, & 0 \\ 2, & -2, & -6, & 0 \end{vmatrix} = 36.$$

Пре него што завршимо ову №-у још ћемо да покажемо, како се Δ_m може изразити вредностима, које $f'(x)$ — први извод функције $f(x)$ — добија за $x = \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_m$. Зарад веће општости ми ћемо узети, да је у $f(x)$ први сачинилац различан од 1 и $= a_0$, дакле:

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m =$$
$$= a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)(x-\xi_3)(x-\xi_4)\dots(x-\xi_m)$$

Пошто је сад [№ 10, 3°]:

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & a_0(x-\xi_2)(x-\xi_3)\dots(x-\xi_m) \\ & + a_0(x-\xi_1)(x-\xi_3)\dots(x-\xi_m) \\ & + a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)(x-\xi_4)\dots(x-\xi_m) + \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & + a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\dots(x-\xi_{m-1}) \end{aligned}$$

то је:

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= a_0(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)\dots(\xi_1-\xi_m) \\ f'(\xi_2) &= a_0(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)\dots(\xi_2-\xi_m) \\ f'(\xi_3) &= a_0(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)\dots(\xi_3-\xi_m) \\ & \dots\dots\dots\dots \\ f'(\xi_m) &= a_0(\xi_m-\xi_1)(\xi_m-\xi_2)\dots(\xi_m-\xi_{m-1}) \end{aligned}$$

Множењем ових m једначина добијамо:

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)\dots f'(\xi_m) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}} a_0^m \Delta_m.$$

38. Узимајући да је k један ма који од бројева: 1, 2, 3, ... $(m-1)$, ми ћемо у детерминанти 6) №-е 36 изоставити $(m-k-1)$ последњих врста и $(m-k)$ последњих стубова. Систему, који преостаје, додаћемо као

k-ти стуб z_0, z_1, z_2 . . . . z_k и тако ћемо имати детерминанту:

$$1.)\quad Z_k = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{k-1} & z_0 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_k & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_k & S_{k+1} & \dots & S_{2k-1} & z_k \end{vmatrix}$$

или кад је уредимо по основцима последњег стуба:

$$2.)\quad Z_k = z_0 Z_{k,0} + z_1 Z_{k,1} + z_2 Z_{k,2} + \dots + z_k Z_{k,k}$$

где

$$Z_{k,0},\quad Z_{k,1},\quad Z_{k,2}\ \dots\ Z_{k,k}$$

значе субдетерминанте, које одговарају основцима последњега стуба.

У детерминанти 1):

$$S_0,\quad S_1,\quad S_2,\quad S_3\ \dots$$

јесу збирови нулних, првих, других и т. д. степена количина ξ_1, ξ_2, ξ_3, . . . ξ_m.

Ми бисмо ту детерминанту могли разложити на m^k нових детерминаната, кад бисмо најпре поједина S у њојзи заменули њиним вредностима. Али пошто би свака од тих нових детерминаната, у којој би основци двају стубова били сразмерни, отпала, то би број заосталих детерминаната био:

$$m(m-1)(m-2)\ \dots\ (m-k+1)$$

Али може се радити и на други начин. Ми т. ј. детерминанту 1) можемо разложити овако:

$$3.)\quad Z_k = \Sigma \begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^{k-1}_{\mu_k} & z_0 \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^2_{\mu_2} & \dots & \xi^k_{\mu_k} & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi^k_{\mu_1} & \xi^{k+1}_{\mu_2} & \dots & \xi^{2k-1}_{\mu_k} & z_k \end{vmatrix}$$

Знак Σ захтева да се имају сабрати све оне детерминанте, које постају из детерминанте у 3), кад се у овој:

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3\ \dots\ \mu_k$$

замене редом пермутацијама сваке комбинације k-те класе са понављањем, а начињене из основака 1, 2, 3 . . . $(m-1)$, m. Али је тада $= 0$ свака детерминанта, која постаје, кад се у детерминанти 3) μ_1, μ_2, μ_3 . . . μ_k замени једном пермутацијом такве комбинације, у којој има 2 или више једнаких основака, јер су тада у тој детерминанти основци двају или више стубова сразмерни. Остаје дакле да се саберу само детерминанте, које постају, кад се у 3) μ_1, μ_2 . . . μ_k замене пермутацијама оних комбинација k-те класе, у којима су само различни основци, а број је истих:

$$m(m-1)(m-2)\ \dots\ (m-k+1)$$

Детерминанту у 3) можемо и овако написати:

$$4.)\quad \xi^0_{\mu_1}\,\xi^1_{\mu_2}\dots\xi^{k-1}_{\mu_k}\begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \dots & \xi^0_{\mu_k} & z_0 \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^1_{\mu_k} & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^k_{\mu_1} & \xi^k_{\mu_2} & \dots & \xi^k_{\mu_k} & z_k \end{vmatrix}$$

и тада можемо мало час споменуто сабирање извршити овако.

У 4) сматрајмо $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_k$ као буди коју комбинацију k-те класе без понављања а из основака 1, 2, 3 ... $(m-1)$, m и саберимо резултате добивене пермутовањем казаљака у 4). При том детерминанта у 4) остаје иста, ако т. ј. не узмемо у обзир њен свагдањи знак. Али ако узмемо, да је $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_k$ она пермутација, у којој нема никакве *инверзије,* то добијамо на тај начин:

$$\begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \dots & \xi^0_{\mu_k} & z_0 \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^1_{\mu_k} & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^k_{\mu_1} & \xi^k_{\mu_2} & \dots & \xi^k_{\mu_k} & z_k \end{vmatrix} \Sigma \pm \xi^0_{\mu_1}\,\xi^1_{\mu_2}\dots\xi^{k-1}_{\mu_k}$$

или другаче:

$$5.)\quad \begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \dots & \xi^0_{\mu_k} & z_0 \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^1_{\mu_k} & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{k-1}_{\mu_1} & \xi^{k-1}_{\mu_2} & \dots & \xi^{k-1}_{\mu_k} & z_{k-1} \\ \xi^k_{\mu_1} & \xi^k_{\mu_2} & \dots & \xi^k_{\mu_k} & z_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \dots & \xi^0_{\mu_k} \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^1_{\mu_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{k-1}_{\mu_1} & \xi^{k-1}_{\mu_2} & \dots & \xi^{k-1}_{\mu_k} \end{vmatrix}$$

И сад још остаје да се у 5) $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_k$ замени сваком комбинацијом k-те класе а без понављања из основака 1, 2, 3 ... $(m-1)$, m и да се тако добивене вредности израза под 5) саберу. Дакле је на тај начин:

$$6.)\qquad Z_k = \Sigma \begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \dots & \xi^0_{\mu_k} & z_0 \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^1_{\mu_k} & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{k-1}_{\mu_1} & \xi^{k-1}_{\mu_2} & \dots & \xi^{k-1}_{\mu_k} & z_{k-1} \\ \xi^k_{\mu_1} & \xi^k_{\mu_2} & \dots & \xi^k_{\mu_k} & z_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \dots & \xi^0_{\mu_k} \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \dots & \xi^1_{\mu_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{k-1}_{\mu_1} & \xi^{k-1}_{\mu_2} & \dots & \xi^{k-1}_{\mu_k} \end{vmatrix}$$

Означимо са:

$$P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2},\ \ldots\ \xi_{\mu_k})$$

производ разлика, које постају, кад се свака од количина: $\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2}, \ldots\ \xi_{\mu_k}$ одузме од сваке доцније, то ћемо имати:

$$7.)\qquad P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2}\ \ldots\ \xi_{\mu_k}) =$$

$$(\xi_{\mu_k} - \xi_{\mu_{k-1}})(\xi_{\mu_k} - \xi_{\mu_{k-2}}) \ldots (\xi_{\mu_k} - \xi_{\mu_1})$$
$$\times (\xi_{\mu_{k-1}} - \xi_{\mu_{k-2}}) \ldots (\xi_{\mu_{k-1}} - \xi_{\mu_1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\times (\xi_{\mu_2} - \xi_{\mu_1})$$

Број чинилаца у овом производу јесте $= \frac{1}{2}\mu_k(\mu_k - 1)$

На исти начин као што смо у №-и 178 алгебарске анализе доказали, да је:

$$\Delta = P$$

тако исто налазимо и овде да је:

$$8.)\quad \begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \ldots & \xi^0_{\mu_k} \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \ldots & \xi^1_{\mu_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi^{k-1}_{\mu_1} & \xi^{k-1}_{\mu_2} & \ldots & \xi^{k-1}_{\mu_k} \end{vmatrix} = P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2} \ldots \xi_{\mu_k})$$

На основу овог обрасца имамо сад даље:

$$9.)\quad \begin{vmatrix} \xi^0_{\mu_1} & \xi^0_{\mu_2} & \ldots & \xi^0_{\mu_k} & x^0 \\ \xi^1_{\mu_1} & \xi^1_{\mu_2} & \ldots & \xi^1_{\mu_k} & x^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi^{k-1}_{\mu_1} & \xi^{k-1}_{\mu_2} & \ldots & \xi^{k-1}_{\mu_k} & x^{k-1} \\ \xi^k_{\mu_1} & \xi^k_{\mu_2} & \ldots & \xi^k_{\mu_k} & x^k \end{vmatrix} = P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2} \ldots \xi_{\mu_k},\ x)$$

где је:

$$10.)\qquad P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2} \ldots \xi_{\mu_k},\ x) =$$
$$= (x - \xi_{\mu_1})(x - \xi_{\mu_2})(x - \xi_{\mu_3}) \ldots (x - \xi_{\mu_k})\, P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2} \ldots \xi_{\mu_k})$$

Ако сад у обрасцима 1) и 6) ставимо:

$$z_0 = 1,\ z_1 = x,\ z_2 = x^2, \ldots z_k = x^k$$

добијамо овај интересни образац:

$$11.)\quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{k-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_k & x \\ S_2 & S_3 & \ldots & S_{k+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_k & S_{k+1} & \ldots & S_{2k-1} & x_k \end{vmatrix} =$$

$$= \Sigma\, (x - \xi_{\mu_1})(x - \xi_{\mu_2}) \ldots (x - \xi_{\mu_k}) \Big\{ P(\xi_{\mu_1},\ \xi_{\mu_2} \ldots \xi_{\mu_k}) \Big\}^2$$

На десној страни имају се $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_k$ заменути редом сваком комбинацијом k-те класе без понављања, а из основака $1, 2, 3 \ldots m$ и добивени резултати сабрати. Леву страну у 11) можемо уредити по основцима последњег ступа и тако ћемо добити:

$$12.)\quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{k-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_k & x \\ S_2 & S_3 & \ldots & S_{k+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_k & S_{k+1} & \ldots & S_{2k-1} & x^k \end{vmatrix} =$$

$$= Z_{k,0} + Z_{k,1}x + Z_{k,2}x^2 + \ldots + Z_{k,k}x$$

Овде су:

$$Z_{k,0}, \quad Z_{k,1}, \quad Z_{k,2} \ldots$$

исте субдетерминанте као и у обрасцу 2) и добијају се из детерминанте Z_k по већ познатим правилима. Ако десну страну у 11) развијемо у колико она од x-а зависи, а за тим уредимо по степенима x-а, добићемо, упоредив резултат с десном страном у 12) вредност субдетерминанте:

$$Z_{k,q}$$

преставлену као функцију количина: $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$.

39. До сад смо претпостављали, да су количине $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m$ произвољне и једна од друге независне. Сада ћемо пак претпоставити, да су од тих количина првих k међу собом различите, дакле $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_k$, а свака од осталих $(m-k)$ да је за себе узета, једнака једној од првих k количина.

Јасно је да је сада

$$1.)\quad Z_{k+1} = 0,\ Z_{k+2} = 0 \ldots Z_m = 0.$$

Међу тим функција Z_k своди се сада на производ двеју детерминанта само, то јест сада је:

$$2.)\quad Z_k =$$

$$\begin{vmatrix} \xi_1^0 & \xi_2^0 & \ldots & \xi_k^0 & z_0 \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \ldots & \xi_k^1 & z_1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_k^2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{k-1} & \xi_2^{k-1} & \ldots & \xi_k^{k-1} & z_{k-1} \\ \xi_1^k & \xi_2^k & \ldots & \xi_k^k & z_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^0 & \xi_2^0 & \ldots & \xi_k^0 \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \ldots & \xi_k^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_k^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{k-1} & \xi_2^{k-1} & \ldots & \xi_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

Ако количине $z_0, z_1, z_2 \ldots z_k$ сматрамо као неодређене, онда једначина [№ 37 обр. 2)]:

$$3.)\quad Z_k = 0$$

може на основу правила неодређених сачинилаца само тако вредети, ако су посебице:

$$4.)\quad Z_{k,0} = 0,\ Z_{k,1} = 0, \ldots Z_{k,k} = 0$$

али је сада:

$$Z_{k,k} = \left\{ P(\xi_1, \xi_2 \, . \, . \, . \, \xi_k) \right\}^2$$

и с тога последња једначина под 4) вредиће само тако, ако су бар две ма које од количина $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k$ (види и науку о детерминантама № 169, 4°) међу собом једнаке. Али тада вреде и све остале једначине у 4) за то, што се у њима лево од знака једнакости јавља као заједнички чинилац:

$$P(\xi_1, \xi_2 \, . \, . \, . \, \xi_k)$$

И на тај начин доказали смо теорему:

1°. *Ако је свака од променљивих $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots \xi_m$, за се узета, једнака ма којој од променљивих $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_k$, и ако су количине $z_0, z_1, z_2 \dots z_m$ неодређене, онда једначина:*

$$Z_k = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{k-1} & z_0 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_k & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_k & S_{k+1} & \dots & S_{2k-1} & z_k \end{vmatrix} = 0$$

може само тако бити истинита, ако су ма које две од променљивих $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k$ међу собом једнаке.

И сад је настао тренутак, да се запитамо, који су *нужни* и *довољни* услови, да при са свим неодређеним вредностима количина $z_0, z_1 \dots z_m$ вреде једначине:

$$Z_{r+1} = 0, \; Z_{r+2} = 0, \dots Z_m = 0$$

Узмимо најпре у посао функцију Z_m, која је дефинисана једначином 1) у № 38, кад се тамо узме, да је $k = m$. Услед обрасца 6 у № 38 такође је:

6.) $$Z_m = \frac{\begin{vmatrix} \xi_1^0 & \xi_2^0 & \dots & \xi_m^0 & z_0 \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_m^1 & z_1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_m^2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{m-1} & \xi_2^{m-1} & \dots & \xi_m^{m-1} & z_{m-1} \\ \xi_1^m & \xi_2^m & \dots & \xi_m^m & z_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_1^0 & \xi_2^0 & \dots & \xi_m^0 \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_m^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{m-1} & \xi_2^{m-1} & \dots & \xi_m^{m-1} \end{vmatrix}}$$

Ова једначина постаје из једначине 2) у овој №-и, кад се у овој последњој узме да је $k = m$. *Дакле је:*

7.) $$Z_{m,m} = 0$$

и *нуждан* и *довољан* услов, па да вреди једначина

$$Z_m = 0.$$

Услов 7) биће, према ономе, што је горе доказано испуњен *само онда*, кад су барем две од променљивих: $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_m$ међу собом једнаке.

И сад можемо теорему 1° овде понова применути, па ћемо имати:

2° *Ако су количине $z_0, z_1, z_2 \dots z_m$ неодређене, онда једначине:*

$$Z_{r+1} = 0, \; Z_{r+2} = 0 \dots Z_m = 0$$

биће истините само тако, ако су истините једначине:

$$Z_{r+1,r+1} = 0,\ Z_{r+2,r+2} = 0\ \dots\ Z_{m,m} = 0$$

и овај нужни и довољни услов биће испуњен само онда, кад између m *променљивих* $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$ *има највише њих* r, *које су по вредности међу собом различне.*

40. У овој №-и пронаћићемо помоћу детерминаната знаке, по којима се даје оценити, да ли дана једначина има само различне корене или има и једнаких.

Зарад тога узмимо, нека је дата једначина:

$$1.)\quad f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

и њени непознати корени нека су $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_m$. Ми ћемо овде имати да одговоримо на питање, да ли су сви корени међу собом различни или су $\xi_{r+1}, \xi_{r+2} \dots \xi_m$ само ма каква понављања корена $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$.

Ми ћемо пре свега помоћу образаца Њутнових у № 30 под 5) или образаца у № 35 израчунати вредности за:

$$S_1, S_2, S_3 \dots S_{2m-2}$$

и за тим саставити детерминанту:

$$2.)\qquad \Delta_k = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{k-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{k-1} & S_k & \dots & S_{2k-2} \end{vmatrix}$$

као и детерминанту:

$$3.)\qquad Z_k = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{k-1} & z_0 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_k & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{k-1} & S_k & \dots & S_{2k-2} & z_{k-1} \\ S_k & S_{k+1} & \dots & S_{2k-1} & z_k \end{vmatrix}$$

На основу №-е 36 јесте квадрат количине P т. ј:

$$4.)\quad P^2 = (\xi_m - \xi_{m-1})^2 (\xi_m - \xi_{m-2})^2 \dots (\xi_m - \xi_1)^2$$
$$\times (\xi_{m-1} - \xi_{m-2})^2 \dots (\xi_{m-1} - \xi_1)^2$$
$$\times (\xi_2 - \xi_1)^2$$

једнак детерминанти:

$$5.)\qquad \Delta_m = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{m-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m-2} & S_{m-1} & \dots & S_{2m-3} \\ S_{m-1} & S_m & \dots & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

С погледом на ове обрасце можемо изрећи теорему:

1°. *Непознати корени једначине* 1) *сви су међу собом различни, кад је детертинанта* Δ_m *од нуле различна.*

Даље, узимајући на ум резултате, до којих смо дошли у № 39, можемо изрећи теорему:

2°. *Једначина* 1) *има само r различних корена, а остали корени — $(m-r)$ на броју — јесу само ма каква понављања истих, кад је при неодређеним вредностима количина $z_0, z_1, z_2 \ldots z_m$ функција z_r различна од нуле али је у усто доба*

$$Z_{r+1} = 0,\ Z_{r+2} = 0 \ \ldots \ Z_m = 0$$

Најзад теорема 2° може се простије исказати овако:

3°. *Једначина* 1) *има r различитих корена, а остали $(m-r)$ на броју јесу само ма каква понављања истих, кад је детерминанта $\triangle_r$ различна од нуле, али је у исто доба:*

$$\triangle_{r+1} = 0,\ \triangle_{r+2} = 0 \ \ldots \ \triangle_m = 0$$

Кад смо дознали, да задата једначина m-ог степена има само r различитих корена, онда да бисмо те корене нашли, треба нам само решити једначину:

$$6.)\qquad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{r-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_r & x \\ S_2 & S_3 & \ldots & S_{r+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_r & S_{r+1} & \ldots & S_{2r-1} & x^r \end{vmatrix} = 0$$

Колико се пак пута сваки од тако нађених корена ове једначине јавља као корен у задатој једначини, лако је дознати по методи № 23.

Пример 1. Дата је једначина:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$$

Пита се, да ли су јој сви корени међу собом различни или не? По обрасцу 2) у № 35 налазимо:

$$S_0 = 4,\ S_1 = -2,\ S_2 = 10,\ S_3 = -14,\ S_4 = 34,$$

$$S_5 = -62,\ S_6 = 130.$$

Овде је $\triangle_2$ различно од нуле, а $\triangle_3$ и $\triangle_4$ једнаки нули, дакле, одатле следује, да једначина има само два међу собом различна корена.

Једначина 6) у овом случају јесте:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & x \\ 10 & -14 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & 1 \\ -1, & 5, & x \\ 5, & -7, & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & (x+5) & x \\ -9 & (x^2-7) & x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & (x+5) \\ -1 & (x^2-7) \end{vmatrix} = 0$$

или најзад:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Корени ове једначине јесу $+1$ и -2.

То су корени и задате једначине, само треба видети, колико се пута они јављају као корени задане једначине. Оба та броја поништавају само први извод полинома задане једначине, дакле се сваки од њих јавља два пут као корен у задатој једначини.

Пример 2. пита се, да ли једначина:

$$f(x) = x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0$$

има једнаких корена или не. Овде је:

$$S_0 = 6,\ S_1 = -4,\ S_2 = 22,\ S_3 = -52,\ S_4 = 166.$$

$$S_5 = -484,\ S_6 = 1462.$$

Једначина 6) сада је ово:

$$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 22 & 1 \\ -4 & 22 & -52 & x \\ 22 & -52 & 166 & x^2 \\ -52 & 166 & -484 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

или:

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

Корени ове једначине јесу: $1,\ -1,\ -3$.

Број $+1$ поништава $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$, дакле се он јавља три пута као корен. Број -1 поништава само $f(x)$, дакле се он јавља један пут као корен.

VIII. Резултанте алгебарских једначина.

41. Кад је задато n нехомогених једначина између $(n-1)$ непознатих, па се згодним везивањем тих једначина избаце све непознате, онда се добија једначина, у којој се налазе само сачиниоци заданих једначина. Та нова једначина између сачинилаца задатих једначина зове се њином *резултантом*. У резултанти исказан је однос у коме треба да стоје сачиниоци задатих једначина, или, у њој је исказан услов, који треба да је испуњен, па да све задате једначине могу заједно опстати, то ће рећи, да може имати вредности за непознате, које задовољавају све задате једначине. Лева страна резултанте зове се резултанта полинома задатих једначина.

Тако н. пр. на основу №-е 174 у алгебарској анализи резултанта једначина:

$$ax + b = 0, \quad a_1x + b_1 = 0$$

јесте једначина

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad ab_1 - a_1b = 0$$

Исто тако на основу исте №-е резултанта једначина:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

јесте:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

која се, по методи №-е 189 у алгебарској анализи даје и овако преставити:

$$\begin{vmatrix} (ab_1) & (ac_1) \\ (ac_1) & (bc_1) \end{vmatrix} = 0$$

или кад се развије:

$$(ab_1)\ (bc_1) - (ac_1)^2 = 0$$

т. ј.

$$(ab_1 - a_1 b)\ (bc_1 - b_1 c) - (ac_1 - a_1 c)^2 = 0$$

42. Нека су задате две једначине

$$1.)\quad f(x) =$$

$$= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots . + a_{m-1} x + a_m = 0$$

$$2.)\quad \varphi(x) =$$

$$= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots . + b_{n-1} x + b_n = 0$$

Узмимо даље нека су

$$3.)\qquad \alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3 \ldots . \alpha_m$$

корени једначине 1). Ако су сви ти корени коначни бројеви, a_0 биће различно од 0 и ми ћемо тада имати:

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)\ (x - \alpha_2)\ (x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_m)$$

Услов нуждан и довољан у исти мах, те да један од корена у 3) буде корен и једначини 2), јесте тај, да једна од количина:

$$\varphi(\alpha_1),\quad \varphi(\alpha_2),\quad \varphi(\alpha_3) \ldots \varphi(\alpha_m)$$

буде $= 0$, или да је производ истих:

$$\varphi(\alpha_1)\ \varphi(\alpha_2)\ \varphi(\alpha_3) \ldots \varphi(\alpha_m) = 0$$

Обратно, ако је овај производ $= 0$, један од његових чинилаца мора нужно бити $= 0$, дакле један од корена једначине 1) мора бити корен и једначини 2). Дакле:

Да би једначина 1), чији су сви корени коначни бројеви, имала са једначином 2) један заједнички корен, треба само да је производ:

$$P = \varphi(\alpha_1)\ \varphi(\alpha_2) \ldots . \varphi(\alpha_m)$$

једнак нули.

Исто тако и у једначини:

$$Q = f(\beta_1)\ f(\beta_2)\ f(\beta_3) \ldots f(\beta_n) = 0$$

где су коначни бројеви $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3 \ldots \beta_n$ корени једначине 2) исказан је услов, да један од тих корена буде и корен једначине 1.)

43. Лако је доказати, да се производи P и Q у № 42 разликују међу собом само једним сталним чиниоцем положним или одречним, како је кад mn парно или не, при чему се узима, да су a_0 и b_0 положни бројеви. Јер ако у једначинама:

$$1.)\qquad f(x) = a_0 (x - \alpha_1)\ (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m)$$

$$2.)\qquad \varphi(x) = b_0 (x - \beta_1)\ (x - \beta_2) \ldots (x - \beta_n)$$

сменимо x и то у првој редом са коренима једначине $\varphi(x) = 0$, и добивене резултате помножимо; ако, тако исто сменимо x и у другој са коренима једначине 1) и тако добивене производе опет помножимо, наћићемо:

$$
\begin{aligned}
3.)\qquad Q = {} & a_0(\beta_1-\alpha_1)(\beta_1-\alpha_2)\dots(\beta_1-\alpha_m) \\
& \times a_0(\beta_2-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\dots(\beta_2-\alpha_m) \\
& \dots\dots\dots\dots\dots \\
& \times a_0(\beta_n-\alpha_1)(\beta_n-\alpha_2)\dots(\beta_n-\alpha_m).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4.\qquad P = {} & b_0(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\dots(\alpha_1-\beta_n) \\
& \times b_0(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\dots(\alpha_2-\beta_n) \\
& \dots\dots\dots\dots\dots \\
& \times b_0(\alpha_m-\beta_1)(\alpha_m-\beta_2)\dots(\alpha_m-\beta_n)
\end{aligned}
$$

Као што се види, два и два чиниоца у изразима за P и Q јесу једнаки и противно означени, а међу тим јасно је да је број истих чинилаца у оба израза исти т. ј. $m\,n$. Поделом добијамо:

$$\frac{P}{Q} = (-1)^{mn}\frac{b_0^m}{a_0^n}.$$

Према овоме могу се очевидно

$$5.)\qquad a_0^n P = 0 \quad \text{и} \quad b_0^m Q = 0$$

сматрати као резултанте једначина $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$.

$a_0^n P$ и $b_0^m Q$ разликују се само знаком.

Пример 1. Узмимо једначине:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a_1x^2 + b_1x + c = 0$$

и претпоставимо, да су α, β корени прве, а α_1 и β_1 корени друге једначине. Резултанта:

$$R = b_0^m Q$$

датих једначина овде је:

$$
\begin{aligned}
R = {} & a^2(a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1)(a_1\beta^2 + b_1\beta + c_1) = \\
& = a^2\; a_1^2\alpha^2\beta^2 + a_1b_1\alpha\beta(\alpha+\beta) + a_1c_1(\alpha^2+\beta^2) + \\
& + b_1^2\alpha\beta + b_1c_1(\alpha+\beta) + c_1^2
\end{aligned}
$$

Али је:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a},\quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \text{одакле}\ \alpha^2 + \beta^2 = \frac{b^2-4ac}{a^2}$$

Према томе је сад:

$$
\begin{aligned}
R = {} & a_1^2c^2 - a_1b_1bc + a_1c_1(b^2-4ac) + b_1^2ac - \\
& - b_1c_1ab + c_1^2a^2
\end{aligned}
$$

или:

$$R = (ac_1 - a_1c)^2 - (ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c)$$

или краће:

$$R = (ac_1)^2 - (ab_1)(bc_1)$$

као и у № 40.

Пример 2. Нека је дата једначина:

$$1.) \qquad f(x) = x^3 + px + q = 0$$

Одатле добијамо као први извод:

$$f'(x) = 3x^2 + p.$$

Ако су a, b, c корени дате једначине, онда је такође:

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c),$$

дакле по №-и 10:

$$f'(x) =$$

$$= (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c)$$

Означимо још са α и $-\alpha$ корене једначине:

$$2.) \qquad f'(x) = 3x^2 + p = 0$$

Резултанта једначина 1) и 2) јесте дакле:

$$f'(a)\ f'(b)\ f'(c) = -(b-c)^2 (c-a)^2 (a-b)^2$$

а такође и:

$$3^3 f(\alpha)\ f(-\alpha) = 27(\alpha^3 + p\alpha + q)(-\alpha^3 - p\alpha + q)$$

$$= 4p^3 + 27\,q^2$$

кад т. ј. заменимо α са вредношћу $-\frac{p}{3}$. И тако је дакле:

$$R = -(b-c)^2 (c-a)^2 (a-b)^2 = 4p^3 + 27\,q^2$$

Из овог обрасца следује, *прво*, да су сви корени једначине 1) стварни, ако је количина:

$$4p^3 + 27\,q^2$$

одречна, а за то се опет изискује, да је p у једначини одречно, и *друго* да су два корена једначине једнака, кад је иста количина $= 0$.

44. Из образаца 5) у №-и 43 види се, да кад су познати корени једначине 1) и 2) у №-и 41 да је онда лако добити резултанту R истих у два различита облика:

$$R = a_0^n \varphi(\alpha_1)\ \varphi(\alpha_2)\ .\ .\ .\ \varphi(\alpha_m)$$

$$R_1 = b_0^m f(\beta_1)\ \ f(\beta_2)\ .\ .\ .\ f(\beta_n)$$

У првом обрасцу сваки од m чинилаца φ јесте цела рационална и линеарна функција сачинилаца:

$$b_0,\quad b_1,\quad b_2\ .\ .\ .\ .\ .\ b_n$$

једначине $\varphi(x) = 0$. Дакле је и R као производ тих чинилаца цела, рационална и хомогена функција m-ог степена истих саченилаца.

Исто тако и из другог обрасца увиђа се, да је R цела и рационална и хомогена функција n-га степена сачинилаца:

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2\ .\ .\ .\ .\ a_m$$

једначине $f(x) = 0$. По према ономе, што смо у № 43 сазнали, R и R_1 могу се разликовати само знаковима. Дакле:

Резултанта двеју количина с једном непознатом, једна m-ог а друга n-ог степена, јесте цела и рационална функција њихових сачинилаца. Она је n-ог степена односно сачинилаца једначине m-ог степена, а m-ог степена односно сачинилаца једначине n-ог степена. Али и обратно:

Ако је $\triangle$ цела и рационална функција m-ог степена сачинилаца једначине $\varphi(x) = 0$, која је n-ог степена односно x, ако је даље иста количина $\triangle$ цела и рационална функција n-ог степена сачинилаца једначине $f(x) = 0$, која је односно $\mathbf{x}$ mn-ог степена; и ако је најзад $\triangle = 0$ за сваки заједнички корен поменутих једначина, онда се $\triangle$ разликује од резултанте R тих једначина само једним сталним сачиниоцем. Другим речима $\triangle = 0$ јесте резултанта једначина $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$.

Јер ако је a_k сачинилац једначине $f(x) = 0$ онда су $\triangle$ и резултанта R полиноми истог т. ј. n-ог степена односно a_k. Сад ако су:

$$a'_k, \quad a''_k, \quad a'''_k \; . \; . \; . \; a^n_k$$

корени једначине $R = 0$, кад R сматрамо као функцију од a_k, то онда, кад год a_k добије једну од ових n вредности, биће R једнако нули. Дакле једначине $\varphi(x) = 0$ и $f(x) = 0$ имају један заједнички корен и с тога ће функција $\triangle$ бити такође $= 0$.

Као што се види, функција $\triangle$ једнака је нули за све вредности од a_k, за које је $R = 0$. Пошто су у осталом $\triangle$ и R истога степена односно a_k, то се оне могу разликовати само једним од a_k независним сачиниоцем.

На исти начин дознаје се, да сачиниоци, којима се разликују међу собом R и $\triangle$ јесу независни и од ма ког другог сачиниоца у функцијама $f(x)$ и $\varphi(x)$. Дакле је $\triangle = 0$ резултанта једначина $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$.

45. Кад у једначинама:

$$1.) \quad f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

$$2.) \quad \varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n = 0$$

сменимо x са $x + h$, онда су као што знамо корени нових једначина за h мањи од корена задатих једначина. Јасно је, да ће разлике:

$$\alpha_1 - \beta_1, \; \alpha_1 - \beta_2, \; . \; . \; . \; \alpha_m - \beta_n$$

између 2 и 2 корена задатих једначина бити једнаке разликама између 2 и 2 одговарајућа корена нових једначина. Дакле *резултанта нових једначина једнака је резултанти задатих једначина.*

Исто тако резултанта једначина:

$$3.) \qquad x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \quad x^n \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

које имају као корене реципрочне вредности корена једначина 1) и 2) једнака је резултанти једначина 1) и 2).

Јер за једначине 3) образац 4) у № 43 изгледа сада овако:

$$4.) \quad P^1 = b_n^m \frac{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \dots (\beta_n - \alpha_m)}{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)^n (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)^m}$$

пошто је b_n први сачинилац другој једначини под 3). Бројилац разломака под 4 јесте:

$$\frac{(-1)^{mn} P}{b_0^m}, \text{ а именилац } \frac{a_m^n\, b_n^m}{a_0^n\, b_0^m}$$

Дакле је:

$$P_1 = (-1)^{mn} \frac{a_0^n P}{a_m^n}$$

Дакле је резултанта једначина 3):

$$R^1 = a_m^n P^1 = (-1)^{mn} a_0^n P = \pm R;$$

она се разликује од резултанте датих једначина 1) и 2) највише знаком.

IX. Различне методе избацивања (елиминисања) помоћу детерминаната.

46. Кад две једначине:

$$f(x) = 0 \text{ и } \varphi(x) = 0$$

прва m-ог а друга n-ог степена имају заједнички корен $x = \alpha$ онда леве стране истих морају бити дељиве са $x - \alpha$. Дакле ако помножимо $f(x)$ са $(n-1)$ осталих корених чинилаца функције $\varphi(x)$ а ову са $(m-1)$ осталих корених чинилаца функције $f(x)$, резултати морају бити једнаки. На тој простој напомени оснива се Euler-ова метода избацивања.

Помножимо функцију (fx) са једном произвољном функцијом x-а $(n-1)$-ога степена, а функцију $\varphi(x)$ са другом опет произвољном функцијом x-а $(m-1)$-ог степена и напишимо, да су добивени производи међу собом једнаки. Тако ћемо добити нову једначину између две функције $(m+n-1)$-ог степена, и у тој једначини сем познатих сачинилаца функција $f(x)$ и $\varphi(x)$ налазиће се још $(m+n)$ неодређених сачинилаца. Да би сад нова једначина била доиста идентична морају сачиниоци једнаких степена од x лево и десно од знака једнакости бити један другоме једнаки, или ако је та једначина сведена на нулу, морају поједини сачиниоци њени бити $= 0$.

Ако дакле напишемо, да су сачиниоци једнаких степена од x у новој једначини међу собом једнаки или, кад је та једначина сведена на нулу, ако напишемо, да су њени поједини сачиниоци $= 0$ добићемо $(m+n)$ хомогених једначина првога степена између $(m+n)$ поменутих неодређених сачинилаца.

Да би сад те нове једначине $(m+n)$ на броју могле заједно опстати, треба, да је њина детерминанта $= 0$. Ако је — детерминанту — ставимо $= 0$, добићемо резултанту горњих једначина.

Пример. Ако једначине:

$$1.)\quad ax^2 + bx + c = 0, \quad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

имају један заједнички корен, онда треба да је за ма какво x:

$$(A_1x + B_1)(ax^2 + bx + c) = (Ax + B)(a_1x^2 + b_1x + c_1)$$

или

$$(A_1a - Aa_1)\, x^2 + (A_1b + B_1a - Ab_1 - Ba_1)\, x^2 +$$

$$+ (A_1c + B_1b - Ac_1 - Bb_1)\, x + B_1c - Bc_1 = 0$$

одавде стављајући једнаке нули поједине ове сачиниоце, добијамо четири хомогене једначине између четири непозната сачиниоца A_1, B_1, A и B:

$$\begin{aligned} A_1a \qquad\qquad - Aa_1 &= 0 \\ A_1b + B_1a - Ab_1 - Ba_1 &= 0 \\ A_1c + B_1b - Ac_1 - Bb_1 &= 0 \\ B_1c \qquad\qquad - Bc_1 &= 0 \end{aligned}$$

Из ових једначина на основу № 174 алгеб. анал. следује:

$$2.)\qquad \begin{vmatrix} a & 0 & a_1 & 0 \\ b & a & b_1 & a_1 \\ c & b & c_1 & b_1 \\ 0 & c & 0 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

или:

$$(ac_1)^2 - (ab_1)(bc_1) = 0.$$

и то је резултанта датих једначина, т. ј. услов, да имају један заједнички корен.

Примедба. По Sylvester-овој методи, која је објашњена у №-ма 175 и 189 алг. анал. нашли бисмо као резултанту исту једначину 2), с том разликом само, што би се врсте детерминанте 2) јавиле као стубови и обратно.

47. Друга метода избацивања јесте: Bezout-ова, која је згоднија од Sylvester-ове и Euler-ове у томе, што даје резултанту у облику простије детерминанте. Да бисмо је лакше схватили, ми ћемо је објаснити на овом примеру:

Узмимо, да су нам дате ове две једначине:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0$$

Помножимо ове једначине редом са:

$$\begin{aligned} a_1 \quad &\text{и} \quad a \\ a_1x + b_1 \quad &\text{и} \quad ax + b \\ a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad &\text{и} \quad ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

и одузмимо сваки пут добивене проиводе. На тај начин добићемо три нове једначине:

$$\begin{aligned} (ab_1)\,x^2 \qquad + (ac_1)x \qquad + ad_1 &= 0 \\ (ac_1)\,x^2 + [(ad_1) + (bc_1)]\,x + bd_1 &= 0 \\ (ad_1)\,x^2 \qquad + (bd_1)\,x \qquad + cd_1 &= 0, \end{aligned}$$

одакле по избацају од x^2 и x добијамо:

$$\begin{vmatrix} (ab_1), & (ac_1), & (ad_1) \\ (ac_1), & (ad_1)+(bc_1), & (bd_1) \\ (ad_1), & (bd_1), & (cd_1) \end{vmatrix} = 0,$$

као резултанту даних једначина. Ова детерминанта, чији су основци:

$$(ab_1), \quad (ac_1), \quad (ad_1), \quad (bc_1) \text{ и т. д.}$$

опет детерминанте, али другог реда, јесте као што се види симетрична. Да смо тражили резултанту по Eulerовој или Sylvester-овој методи, ми бисмо добили детерминанту 6-ог реда:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & b_1 & a_1 & 0 \\ c & b & a & c_1 & b_1 & a_1 \\ d & c & b & d_1 & c_1 & b_1 \\ 0 & d & c & 0 & d_1 & c_1 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix} = 0$$

48. Метода избацивања, коју ћу сада да покажем и која је по принципу иста са Bezout-овом методом, носи име инглеског научара: Cayley-a.

Нека су задате једначине:

$$1.)\qquad f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 0$$

Ма која од ових двеју једначина може се сменути једначином:

$$2.)\qquad f(x) + \lambda\varphi(x)$$

где је λ са свим произвољно. Ако узмемо, да је н. пр.

$$\lambda = -\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}$$

онда се једначина 2) претвара у:

$$3.)\qquad f(x)\,\varphi(x_1) - \varphi(x)\,f(x_1) = 0.$$

Ова једначина у којој је x_1 са свим произвољно, може сменути ма коју од једначина 1), а њена лева страна дељива је са $x - x_1$, пошто је она — једначина 3) — задовољена вредношћу $x = x_1$. Ако дакле поделимо једначину 3) са $x - x_1$, онда нова једначина:

$$4.)\qquad F(x, x_1) = 0$$

биће нижег степена, но што је она од двеју једначина под 1), која је вишег степена. Једначина 4) вреди за сваку вредност x-а, која задовољава обе једначине под 1) а у исти мах и за све могуће вредности од x_1. Дакле сачиниоци узастопних степена од x_1 у једначини 4) морају бити сваки за се једнаки 0, кад x значи једну од оних вредности, која је заједнички корен једначина 1). Дакле, кад сачиниоце узастопних степена од x_1 у једначини 4) ставимо свакој посебице $= 0$, добићемо једначине, које су последице задатих, то ће рећи, које вреде за све оне вредности x-а, које су заједнички корени једначина 1). Из тих једначина, којих је број за јединицу већи од највишег x-вог степена избациваћемо поједине степене x-а, сматрајући при том сваки степен x-а као једну непознату.

Пример. Узмимо да се има избацити x из једначина:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{и} \quad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

Из ових једначина саставимо једначину:

$$(ax^2 + bx + c)(a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1) - (a_1x^2 + b_1x + c_1) \times$$
$$\times (ax_1^2 + bx_1 + c) = 0$$

која се може написати и овако:

$$(ab_1)(x-x_1)xx_1+(ac_1)(x^2-x_1^2)+(bc_1)(x-x_1)=0.$$

Кад поделимо са $(x-x_1)$ и уредимо по степенима x-а, добићемо:

$$[(ab_1)x+(ac_1)]x_1+(ac_1)x+(bc_1)=0$$

Одавде по правилу о неодређеним сачиниоцима добијамо:

$$(ab_1)x+(ac_1)=0, \quad (ac_1)x+(bc_1)=0$$

а одавде опет по избацају x-а:

$$\begin{vmatrix} (ab_1) & (ac_1) \\ (ac_1) & (bc_1) \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (ab_1)(bc_1)-(ac_1)^2=0$$

као резултанту даних једначина.

49. Последња метода избацаја, коју још имамо да пређемо, јесте *Cauchy*-јева. Она у ствари није ништа друго, до опет Bezout-ова метода, али усавршена.

Узмимо, да се x има избацити из две једначине обе истог степена:

$$1.)\quad f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0$$

$$2.)\quad \varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m=0$$

Да бисмо сад нашли резултанту ових једначина, пребацимо с лева на десно у обема најпре први члан; за тим прва два, прва три, . . . првих m чланова. На тај начин добићемо m спрегова једначина. Једначине сваког спрега поделимо једну другом, и у новим једначинама, које будемо за тим добили, скратимо бројиоце и имениоце раз-

ломака лево од знака једнакости редом са $x^m, x^{m-1}, \ldots x^2$ и x па ћемо добити овај низ једначина:

$$3.)\left\{\begin{aligned}
&\frac{a_0}{b_0}=\frac{a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}\\
&\frac{a_0x+a_1}{b_0x+b_1}=\frac{a_2x^{m-2}+a_3x^{m-3}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_2x^{m-2}+b_3x^{m-3}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}\\
&\frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{b_0x^2+b_1x+b_2}=\frac{a_3x^{m-3}+a_4x^{m-4}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_3x^{m-3}+b_4x^{m-4}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{a_0x^{m-2}+a_1x^{m-2}+\ldots+a_{m-2}}{b_0x^{m-2}+b_1x^{m-3}+\ldots+b_{m-2}}=\frac{a_{m+1}x+a_m}{b_{m+1}x+b_m}\\
&\frac{a_0x^{m-1}+a_1x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}}{b_0x^{m-1}+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}}=\frac{a_m}{b_m}
\end{aligned}\right.$$

За вредност x-а, која је заједнички корен једначина 1) и 2) морају вредети све ове једначине. Ми ћемо их ослободити именилаца свести на 0, и уредити по степенима x, па ћемо добити:

$$4.)\left\{\begin{aligned}
&A_1x^{m-1}+B_1x^{m-2}+C_1x^{m-3}+\ldots+G_1x+H_1=0\\
&A_2x^{m-1}+B_2x^{m-2}+C_2x^{m-3}+\ldots+G_2x+H_2=0\\
&A_3x^{m-1}+B_3x^{m-2}+C_3x^{m-3}+\ldots+G_3x+H_3=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{m-1}x^{m-1}+B_{m-1}x^{m-2}+C_{m-1}x^{m-3}+\ldots+\\
&\qquad+G_{m-1}x+H_{m-1}=0\\
&A_mx^{m-1}+B_mx^{m-2}+C_mx^{m-3}+\ldots+G_mx+H_m=0
\end{aligned}\right.$$

где је:

$$A_1 = (a_0 b_1),\quad B_1 = (a_0 b_2),\quad \ldots\ldots\ldots\quad H_1 = (a_0 b_m)$$

$$A_2 = (a_0 b_2),\quad B_2 = (a_0 b_3) + (a_1 b_2)\ \ldots\quad H_2 = (a_1 b_m)$$

$$A_3 = (a_0 b_3),\quad B_3 = (a_0 b_4) + (a_1 b_3)\ \ldots\quad H_3 = (a_2 b_m)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{m-1} = (a_0 b_{m-1}),\quad B_{m-1} = (a_0 b_m) + (a_1 b_{m-1})\quad H_{m-1} = (a_{m-2} b_m)$$

$$A_m = (a_0 b_m),\quad B_m = (a_1 b_m)\quad H_m = (a_{m-1} b_m)$$

У овим једначинама ограђени изрази десно од знака једнакости јесу детерминанте другог реда, које су по Cauchy-у и Jacobi-у означене. Из тих једначина видимо, да је свака једначина под 4) $(m-1)$-ог степена и да су сачиниоци истих линеарне функције сачинилаца једначине 1) као и сачинилаца једначине 2).

Једначине 4) јесу првог степена односно $(m-1)$ непознатих:

$$x^{m-1},\ x^{m-2},\ x^{m-3}\ \ldots\ x^2,\ x$$

Пошто вредност x-а, која је заједнички корен једначина 1) и 2), задовољава једначине 4) то онда (№ 174 алгеб. анал.) детерминанта тих једначина мора бити $= 0$, дакле:

$$5.)\quad \triangle = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \ldots & G_1 & H_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ldots & G_2 & H_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & \ldots & G_3 & H_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m-1} & B_{m-1} & C_{m-1} & \ldots & G_{m-1} & H_{m-1} \\ A_m & B_m & C_m & \ldots & G_m & H_m \end{vmatrix} = 0$$

И ова детерминанта, која је m-ог степена односно сачинилаца и једне и друге једначине, јесте резултанта тих једначина.

Пример. Тражи се резултанта једначина:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\quad a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d = 0$$

Из њих добијамо:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{bx^2 + cx + d}{b_1x^2 + c_1x + d_1}$$

$$\frac{ax + b}{a_1x + b_1} = \frac{cx + d}{c_1x + d_1}$$

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1} = \frac{d}{d_1}$$

Кад ове три једначине ослободимо именилаца, сведемо на нулу и уредимо, добићемо, кад се послужимо Cauchy-јевим означавањем детерминаната:

$$(ab_1)\,x^2 + (ac_1)\,x + (ad_1) = 0$$

$$(ac_1)\,x^2 + [(ad_1) + (bc_1)]\,x + (bd_1) = 0$$

$$(ad_1)\,x^2 + (bd_1)\,x + (cd_1) = 0$$

Резултанта ових једначина јесте:

$$\begin{vmatrix} (ab_1) & (ac_1) & (ad_1) \\ (ac_1) & (ad_1) + (bc_1) & (bd_1) \\ (ad_1) & (bd_1) & (cd_1) \end{vmatrix} = 0$$

50. Узмимо сад, да се тражи резултанта једначина:

$$1.)\quad f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

$$2.)\quad \varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где је $m > n$. Ако једначину 2) помножимо са x^{m-n} добићемо из ње једначину истог степена с првом,

$$3.)\quad b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_mx^{m-n} = 0$$

Онако исто као што смо у № 49) из једначина 1) и 2) извели једначине 3), изводимо и овде једначине:

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m}{b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_nx^{m-n}}$$

$$\frac{a_0x + a_1}{b_cx + b_1} = \frac{a_2x^{m-2} + \ldots + a_m}{b_2x^{m-2} + \ldots + b_nx^{m-n}}$$

$$\frac{a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}{b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}} = \frac{a_nx^{m-n} + \ldots + a_m}{b_nx^{m-n}}$$

које се дају преставити и овако:

$$4.)\quad \begin{cases} A_1x^{m-1} + B_1x^{m-2} + \ldots + H_1 = 0 \\ A_2x^{m-1} + B_2x^{m-2} + \ldots + H_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_nx^{m-1} + B_nx^{m-2} + \ldots + H_n = 0 \end{cases}$$

К овим једначинама придружићемо још и ове:

$$5.)\quad \begin{cases} b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \ldots\ldots = 0 \\ \qquad b_0x^{m-2} + \ldots\ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_0x^n + \ldots + b_n = 0 \end{cases}$$

која постаје, кад се једначина 2) поступно помножи са степенима x-а: x^{m-1-n}, $x^{m-2-n} \ldots x^2$, x^1, x^0, којих је $(m-n)$ на броју. На тај начин добијамо у једначинама 4) и 5) један систем од m једначина са $(m-1)$ непознатом: x^{m-1}, $x^{m-2} \ldots x^2$, x, које могу заједно опстати само тако, ако је:

$$6.)\quad \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \ldots & H_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ldots & H_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n & B_n & C_n & \ldots & H_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n \end{vmatrix} = 0$$

Ово је резултанта даних једначина. Она је n-ог степена односно сачинилаца a функције $f(x)$, а m-ог степена односно сачинилаца b функције $\varphi(x)$.

Пример. Тражи се резултанта једначина:

$$7.)\quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,\quad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

Ако другу једначину помножимо са x^2 добићемо:

$$8.)\qquad a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 = 0,$$

која је истог степена са првом под 7).

По горњем упуству добијамо једначине:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{bx^3 + cx^2 + dx + e}{b_1x^3 + c_1x^2}$$

$$\frac{ax + b}{a_1x + b_1} = \frac{c_1x^2 + dx + e}{c_1x^2}$$

које се могу преставити и овако:

$$(ab_1)\,x^3 + (ac_1)\,x^2 - da_1\,x - ea_1 = 0$$

$$(ac_1)\,x^3 + \left\{(bc_1) - da_1\right\}x^2 - (db_1 + ea_1)\,x - eb_1 = 0$$

ка којима придолазе и ове две:

$$a_1\,x^3 + b_1x^2 + c_1x = 0$$

$$a_1\,x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

На тај начин добили смо четири једначине са три непознате: x^3, x^2, x, које могу заједно опстати само тако, ако је њихова детерминанта $= 0$, т. ј.

$$\begin{vmatrix} (ab_1) & (ac_1) & da_1 & ea_1 \\ (ac_1) & (bc_1) - da_1 & db_1 + ea_1 & eb_1 \\ a_1 & b_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & -b_1 & -c_1 \end{vmatrix} = 0$$

а то је резултанта даних једначина под 7).

X. Наставак о резултантама и дискриминанте.

51. У алгебарској анализи № 189 ми смо показали, како се по Sylvester-овој методи налази лако у облику детерминанте резултанта двеју једначина:

$$1.)\quad f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

$$2.)\quad \varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = 0$$

Овде ћемо показати, да тамошња детерминанта по вредности није различна од израза нађених за R и R_1 у №-и 44.

Узмимо нека је u вредност функције $f(x)$, кад замислимо, да x у овој последњој значи један ма који корен једначине 2) онда за тај корен морају вредети једначине:

$$3.)\qquad f(x) - u = 0 \quad и \quad \varphi(x) = 0$$

па дакле и једначине:

$$4.)\ \begin{cases} f(x) - u = 0,\ xf(x) - xu = 0 \ldots x^{n-1}f(x) - x^{n-1}u = 0 \\ \varphi(x) = 0,\qquad x\varphi(x) = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x^{m-1}\varphi(x) = 0 \end{cases}$$

или:

$$\begin{aligned} a_0x^{m+n-1} + a_1x^{m+n-2} + \ldots + (a_m - u)\,x^{n-1} \qquad &= 0 \\ a_0x^{m+n-2} + \ldots + a_{m-1}x^{n-1} + (a_m - u)\,x^{n-2} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_0x^{m+n-1} + b_1x^{m+n-2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; &= 0 \\ b_0x^{m+n-2} + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

Но онда на основу № 189 алг. анал.

$$\psi(u) = 0$$

где $\psi(u)$ значи детерминанту:

$$
5.)\qquad \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & (a_m - u) & \ldots & & \\
0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-1} & (a_m - u) & \ldots & \\
0 & 0 & a_0 & \ldots & a_{m-2} & a_{m-1} & (a_m - u) & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & b_0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}
$$

Ако су дакле:

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \; \ldots \; \beta_n$$

корени једначине 2) онда, кад један ма који од тих корена задовољава обе једначине под 3) мора бити:

$$\psi(u) = \psi[f(x)] = 0$$

то ће рећи, вредност од $u = f(x)$, која одговара томе корену, јесте један корен једначине:

$$6.) \qquad \psi(u) = 0$$

Сви корени ове једначине јесу:

$$f(\beta_1), \quad f(\beta_2), \; \ldots \; f(\beta_n)$$

Као што је познато, кад се последњи сачинилац једначине 6) подели са првим, онда тако добивени количник R мора бити $=$ производу:

$$(-1)^m f(\beta_1) f(\beta_2) f(\beta_3) \; \ldots \; f(\beta_n)$$

Но лако је увидети, да је последњи члан једначине 6):

$$
7.)\qquad R = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & \ldots \\
0 & a_0 & a_1 & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & a_0 & \ldots & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & \ldots \\
0 & b_0 & b_1 & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & b_0 & \ldots & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}
$$

а то је детерминанта $(m + n)$-ог реда у № 189 алгебарске анализе у којој су основци првих n врста сачиниоци функције $f(x)$, а основци последњих m врста сачиниоци функције $\varphi(x)$.

Дакле је:

$$R = b_0^m f(\beta_1) f(\beta_2) \; \ldots \; (f\beta_n)$$

Али из образаца 3) и 4) у № 43 следује:

$$b_0^m f(\beta_1)\, f(\beta_2)\ .\ .\ .\ f(\beta_n) = (-1)^{mn}\, a_0^n\, b_0^m\, \varphi(\alpha_1)\ .\ .\ .\ \varphi(\alpha_m)$$

Дакле је R цела и рационална симетричка функција како корена α, тако и корена β, и осим тога цела и хомогена функција n-ог степена сачинилаца a и цела и хомогена функција m-ог степена сачинилаца b.

$R = 0$ јесте резултанта једначина:

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 0.$$

52. Резултанта R функција $f(x)$ и $\varphi(x)$ јесте у исти мах и резултанта функције:

$$\varphi(x) + \lambda\, f(x)$$

Јер детерминанта 7) остаје иста, пошто се ка m последњих врста њених додају са λ помножене остале врсте (№ 151 алгеб. анализе) и то, ка $(n+1)$-ој прва, ка $(n+2)$-ој друга, ка $(n+3)$-ој трећа и т. д.

Резултанта функција (fx) и $(x-t)\, \varphi(x)$ једнака је производу из резултанте функција $f(x)$ и $\varphi(x)$ и резултанте функција $f(x)$ и $(x-t)$, пошто је тражена резултанта:

$$b_0^m f(\beta_1)\, f(\beta_2)\ .\ .\ .\ f(\beta_n)\, f(t) = R\, f(t)$$

Ако сад једначине:

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 0$$

имају један или више заједничких корена, онда ће $f(x)$ и $\varphi(x)$ имати заједничка делиоца првог или вишег степена, и сачиниоци тога делиоца биће целе и хомогене функције познатих сачинилаца. Јер за сваки заједнички корен морају на основу №-е 51 вредети ових $(m+n)$ једначина:

$$
1.)\quad \left|\begin{array}{l}
a_0x^{m+n-1} + a_1x^{m+n-2} + a_2x^{m+n-3} + \dots + a_m x^{n-1} = 0 \\
\qquad a_0x^{m+n-2} + a_1x^{m+n-3} + \dots\dots = 0 \\
\qquad\qquad a_0x^{m+n-3} + \dots\dots = 0 \\
\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \\
b_0x^{m+n-1} + b_1x^{m+n-2} + b_2x^{m+n-3} + \dots\dots = 0 \\
\qquad b_0x^{m+n-2} + b_1x^{m+n-3} + \dots\dots = 0 \\
\qquad\qquad b_0x^{m+n-3} + \dots\dots = 0 \\
\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.
$$

Дакле детерминанта ових једначина, коју смо били означили са R, мора бити $= 0$. Али тако исто за сваки заједнички корен мора бити $= 0$ очевидно и детерминанта $(n+m-1)$-ог реда, која постаје из $(n+m-1)$ првих једначина под 1).

$$
2.)\quad \begin{vmatrix}
a_0x + a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\
a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\
 & a_0 & a_1 & a_2\ \dots \\
 & \dots & \dots & \dots \\
b_0x + b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\
 & b_0 & b_1 & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots
\end{vmatrix} = R_{11}\, x + R_{10}
$$

То исто вреди и за детерминанту $(n+m-2)$-ог реда, која постаје из $(n+m-2)$ прве једначине под 1).

$$\begin{vmatrix} a_0x^2+a_1x+a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ a_0x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_0x^2+b_1x+b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ b_0x+b_1 & b_3 & b_3 & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = R_{22}x^2+R_{21}x+R_{20}$$

и т. д. Да је истина ово што тврдимо увиђа се овако: Кад последњу једначину од оних под 1) изоставимо, остаће нам још $(m+n-1)$ једначина. Ако сада у овим једначинама из чланова, који су у првом и другом стубу извадимо x^{m+n-2} као заједничког чиниоца, онда у тим једначинама можемо сматрати степене x-а:

$$x^{m+n-2},\ x^{m+n-3},\ \dots\ x^3,\ x^2,\ x$$

као толико непознатих. И пошто је ових непознатих $(m+n-2)$, а број једначина $(m+n-1)$, то оне могу заједно опстати само тако (№ 174 алгеб. анал.), ако је детерминанта сачинилаца тих једначина једнака 0. А та детерминанта јесте она под 2) и т. д.

У осталом истинитост горњег тврђења може се такође лако доказати и згодном применом последње теореме у № 117 алгеб. анал. Треба т. ј. помоћу те теореме преобразити детерминанту 2) тако, да сваки од n првих основака у првом стубу буде $= f(x)$, а сваки од осталих m основака истог стуба, да буде једнак функцији $\varphi(x)$. Тада сви основци првог стуба јесу једнаки нули за ма који заједнички корен једначина:

$$f(x)=0, \quad \varphi(x)=0$$

Сачиниоци:

$$R_{10},\ R_{11},\ R_{20},\ R_{21},\ R_{22} \text{ и т. д.}$$

који се јављају у детерминантама 1) и 2) и т. д. јесу познате субдетерминанте главне детерминанте R, и с тога су оне целе и хомогене функције сачинилаца $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Ако детерминанта R није $=0$ онда $f(x)$ и $\varphi(x)$ немају заједничког чиниоца, или, што је све једно једначине $f(x)=0$ и $\varphi(x)=0$ немају заједничких корена. Ако ли је $R=0$ али не и R_{11} онда (fx) и $\varphi(x)$ имају као заједничког чиниоца функцију првог степена: $R_{11}x+R_{10}$. Ако је $R=0$ и $R_{11}=0$, али не и R_{22}, онда $f(x)$ и $\varphi(x)$ имају као заједничког делиоца функцију другог степена:

$$R_{20}+R_{21}x+R_{22}x^2$$

и т. д. Ако је $R_{22}=0$ онда мора и R_{21} бити $=0$, јер би иначе $f(x)$ и $\varphi(x)$ имале као заједнички корен ∞.

Пример. Нека су задате једначине:

$$f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4=0$$

$$\varphi(x)=2x^3+3x^2-2x-2=0$$

Кад радимо по показаноj методи, наћићемо, да $f(x)$ и $\varphi(x)$ имаjу као заједничког делиоца:

$$x^2 + x - 2$$

или, да дане једначине имају $+1$ и -2 као заједничке корене.

53. Ако је функција $\varphi(x)$ у № 51 и доцнијима први извод функције $f(x)$, онда је њихова резултанта:

$$a_0^{m-1} f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \ldots f'(\alpha_m) =$$

$$= \left| \begin{array}{l}
a_0 \quad a_1 \quad a_2 \ldots a_{m-2} \quad a_{m-1} \quad a_m \\
\qquad a_0 \quad a_1 \ldots\ldots a_{m-2} \quad a_{m-1} \quad a_m \\
\qquad\qquad a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{m-1} \quad a_m \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\longrightarrow \qquad\qquad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \ldots\ldots a_m \\
m\,a_0 \quad (m-1)\,a_1 \quad (m-2)\,a_2 \ldots 2a_{m-2} \quad a_{m-1} \\
\qquad m a_0 \quad (m-1)\,a_1 \ldots\ldots a_{m-1} \\
\qquad\qquad m a_0 \ldots\ldots\ldots 2a_{m-2} \quad a_{m-1} \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad m a_0 \quad (m-1)\,a_1 \ldots a_{m-1}
\end{array} \right|$$

Одозго па до стрелице има $(m-1)$, а од ње па до краја има још m врста. Кад од m-не врсте одузмемо са m помножену прву врсту, онда ће први основак m-не врсте постати $= 0$, и тако ће онда резултанта бити јед-

нака производу из a_0 и једне детерминанте $(2m-2)$-ог реда. Ако ту детерминанту означимо са D, онда је на основу № 37:

$$D = a_0^{m-2} f'(\alpha_1) \ldots f'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{m(m-2)}{1 \cdot 2}} a_0^{2m-2} \Delta_m$$

где Δ_m значи производ квадрата разлика, које постају кад се сваки од m корена:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2 \quad \ldots\ldots \quad \alpha_m$$

одузме од свију доцнијих. Детерминанта D, која је (№ 37) цела и симетрична функција корена $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ а цела и хомогена функција сачинилаца $a_0, a_1, a_2 \ldots a_m$ и то $(2m-2)$-ог степена, зове се *дискриминанта* функције $f(x)$ или једначине $f(x) = 0$.

Дискриминанта производа $f(x)\ \varphi(x)$ јавља се, без обзира на знак као производ из дискриминаната функција $f(x)$ и $\varphi(x)$ и квадрата резултанте истих функција. О истинитости тога можемо се лако уверити, ако дискриминанту производа преставимо као производ из квадрираних разлика свију корена, јер се тада тај производ може лако разложити на поменуте чиниоце.

Кад дискриминанта функције $f(x)$ није $= 0$, онда $f(x)$ и $f'(x)$ немају заједничког чиниоца, или једначина $f(x) = 0$ нема једнаких корена. Али ако је дискриминанта функције $f(x)$ једнака нули, онда $f(x)$ и $f'(x)$ имају заједничка делиоца, дакле и једначина $f(x) = 0$ имаде једнаких корена. Што се тиче израчунавања заједничког делиоца функцијама $f(x)$ и $f'(x)$, вреди оно, што је казано у № 52.

Ако $f(x)$ и $f'(x)$ имају заједничког чиниоца $[\varphi(x)]^k$ и дискриминанта функције $\varphi(x)$ није $= 0$, онда је функција $f(x)$ дељива са $[\varphi(x)]^{k+1}$. Јер ако је:

$$f(x) = [\varphi(x)]^k \cdot \psi(x)$$

онда је

$$f'(x) = k\,[\varphi(x)]^{k-1}\,\varphi'(x)\,\psi(x) + [\varphi(x)]^k\,\psi'(x)$$

Пошто $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ немају заједничког делиоца, јер дискриминанта функције $\varphi(x)$ није $= 0$, и пошто је на основу претпоставке функција $f'(x)$ дељива са $[\varphi(x)]^k$, то онда функција $\psi(x)$ мора бити дељива са $\varphi(x)$, одакле следује, да функција $f(x)$ мора бити дељива са $[\varphi(x)]^{k+1}$.

54. Кад једној хомогеној функцији, која зависи од n променљивих, тражимо први извод односно сваке од тих променљивих, онда резултанта тих n извода зове се *дискриминанта* функције.

Дискриминанта једне хомогене функције са више променљивих добија се дакле, кад се њени изводи односно сваке променљиве ставе $= 0$ и из тако добивених једначина све променљиве избаце. Но ваља приметити да се при том не узимље у обзир бројни сачинилац, који би можда уз дискриминанту стајао.

Тако је дискриминанта функције;

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

резултанта једначина:

$$\frac{1}{2} f'_x(x, y) = ax + by = 0$$

$$\frac{1}{2} f'_y(x, y) = bx + cy = 0$$

то јест детерминанта:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

Дискриминанта функције:

$$f(x, y, z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + hz^2$$

јесте резултанта једначина:

$$\frac{1}{2} f'_x = ax + by + dz = 0$$

$$\frac{1}{2} f'_y = bx + cy + ez = 0$$

$$\frac{1}{2} f'_z = dx + ey + hz = 0$$

дакле детерминанта:

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & h \end{vmatrix} = ach + 2bde - ae^2 - cd^2 - hb^2$$

Даље дискриминанта функције:

$$f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

јесте резултанта једначина:

$$\frac{1}{3}xf'_x = ax^3 + 2bx^2y + cxy^2 \qquad = 0$$

$$\frac{1}{3}yf'_x = \qquad ax^2y + 2bxy^2 + cy^3 = 0$$

$$\frac{1}{3}xf'_y = bx^3 + 2cx^2y + dxy^2 \qquad = 0$$

$$\frac{1}{3}y\,f'_y = \qquad bx^2y + 2cxy^2 + dy^3 = 0$$

у којој изразе:

$$x^3,\ x^2y,\ xy^2,\ y^3$$

сматрамо као променљиве. Избацајем ових добијамо као тражену дискриминанту:

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd)$$

Најзад дискриминанта функције са четири променљиве количине:

$$f(x, y, z, u) = ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2 + 2byz + 2b_1xz +$$

$$+ 2b_2xy + 2cxu + 2c_1yu + 2c_2zu + du^2$$

јесте резултанта једначина

$$\frac{1}{2}f'_x = a\,x + b_2y + b_1z + c\,u = 0$$

$$\frac{1}{2}f'_y = b_2x + a_1y + b\,z + c_1u = 0$$

$$\frac{1}{2}f'_z = b_1x + b\,y + a_2z + c_2u = 0$$

$$\frac{1}{2}f'_u = c\,x + c_1y + c_2z + d\,u = 0$$

то јест, детерминанта:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b_2 & b_1 & c \\ b_2 & a_1 & b & c_1 \\ b_1 & b & a_2 & c_2 \\ c & c_1 & c_2 & d \end{vmatrix}$$

или, кад развијемо ову детерминанту:

$$\Delta = d(aa_1a_2 + 2bb_1b_2 - ab^2 - a_1b_1^2 - a_2b_2^2) + c^2(b^2 - a_1a_2) +$$

$$+ c_1^2(b_1^2 - a_2a) + c_2^2(b_2^2 - aa_1) + 2c_1c_2(ab - b_1b_2) +$$

$$+ 2c_2c(a_1b_1 - b_2b) + 2cc_1(a_2b_2 - bb_1).$$

55. Узмимо сад да нам је дата хомогена функција x-а и y-а m-ог степена

$$1.)\quad f(x, y) =$$

$$= a_0 x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \binom{m}{2} a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{m}{1} a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m,$$

у којој смо појединим члановима додали као чинитеље биномне сачиниоце само зарад тога, да би се прво у изводима функције $f(x, y)$, пошто смо их најпре са m поделили, налазили сачиниоци истог рода и друго, да би $f(x, y)$ била савршени n-ти степен у оном случају, где су сачиниоци

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2 \; \ldots \; a_m$$

чланови једне геометријске постепености.

Са m подељени први изводи функције $f(x, y)$ односно x и y јесу:

$$2.)\quad \frac{1}{m} f'_x =$$

$$= a_0 x^{m-1} + \binom{m-1}{1} a_1 x^{m-2} y + \binom{m-1}{2} a_2 x^{m-3} y^2 + \ldots +$$

$$+ a_{m-1} y^{m-1}$$

$$3.)\quad \frac{1}{m} f'_y =$$

$$= a_1 x^{m-1} + \binom{m-1}{1} a_2 x^{m-2} y + \binom{m \;\; 1}{2} a_3 x^{m-3} y^2 + \ldots +$$

$$+ a_m y^{m-1}$$

и резултанта ових функција јесте дискриминанта функције $f(x, y)$. Та дискриминанта јесте хомогена функција сачинилаца a степена $(2m-2)$-ог.

Ако у 1), 2), и 3) ставимо $y = 1$, онда се $f(x, y)$ претвара у функцију:

$$f(x) = a_0 x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} + \binom{m}{2} a_2 x^{m-2} + \ldots +$$

$$+ \binom{m}{1} a_{m-1} x + a_m$$

са једном само промењљивом x. Функција под 2) претвара се у први извод функције $f(x)$, али са m подељени, а функција под 3) претвара се у функцију:

$$f(x) - \frac{1}{m} x f'(x)$$

Резултанта ове функције и функције $f'(x)$, или што је све једно, резултанта функција:

$$4.)\quad f'(x) \quad \text{и} \quad 5.)\quad m f(x) - x f'(x)$$

није ништа друго до дискриминанта $f(x)$ у № 53. Јер *прво* дискриминанта функције $f(x)$ и резултанта функција 4) и 5) јесу обе целе и хомогене функције сачинилаца a и то $(2m-2)$-ог степена, и *друго* из израза 4) и 5) види се, да заједнички делилац функција $f(x)$ и $f'(x)$ јесте у исти мах заједнички делилац функције $f'(x)$ и оне под 5) одакле следује, да дискриминанта функције $f(x)$ и резултанта функција 4) и 5) морају у исти мах бити $= 0$. И *треће* количник између споменуте дискриминанте и резултанте не зависи од сачинилаца a. Јер кад у детерминанти D у почетку №-е 53, помножимо са бројем m прве $(m-2)$ врсте, па онда одузмемо од њих редом m-ну и доцније врсте, дакле од прве m-ну, од друге $(m+1)$-ву и т. д. добићемо као резултат производ из $(-1)^{m-1} ma_0$ и резултанте функција:

$$mf(x) - xf'(x) \quad \text{и} \quad f'(x)$$

Да бисмо дакле нашли дискриминанту функције $f(x)$, која је цела и рационална функција x-а m-ог степена, треба само резултанту последњих двеју функција тражити, и та резултанта биће тражена дискриминанта. Или треба $f(x)$ начинити хомогеном множећи њене чланове са $y^0, y^1, y^2, y^3, \ldots y^{m-1}, y^m$, па онда тражити тако добивеној функцији $f(x, y)$ дискриминанту, како је у почетку ове №-е показано, а то је резултанта функција:

$$\frac{1}{m} f'_x(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{1}{m} f'_y(x,y).$$

Примери. Дискриминанта функције:

$$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2$$

јесте резултанта функција:

$$a_1 x + a_2 \quad \text{и} \quad a_0 x + a_1$$

дакле:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2$$

Исто је тако дискриминанта функције:

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3$$

резултанта функција:

$$a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3 \quad \text{и} \quad a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2$$

то јест:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \\ a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

или по Cauchy-јевој методи

$$\begin{vmatrix} 2(a_1^2 - a_0 a_2), & (a_1 a_2 - a_0 a_3) \\ (a_1 a_2 - a_0 a_3), & 2(a_2^2 - a_1 a_3) \end{vmatrix}.$$

XI. Решавање општих једначина.

56. Општом једначином зове се једначина, у којој су сачиниоци писмена. Пошто корени сваке једначине јесу функције њених сачинилаца, то се разрешавање општих једначина састоји у тражењу функције, у којој је исказан закон, како буди који корен те једначине зависи од њених сачинилаца. И кад је таква функција нађена, онда нам она мора дати све корене задате једначине. Према томе, ако је задата једначина m-ог степена и поменута функција мора имати m вредности. Тако н. пр.

из ниже алгебре знамо, да нам оба корена квадратне једначине:

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

даје образац:

$$x = -\frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0},$$

велим оба корена, јер се квадратни корен може узети у обрасцу и са знаком $+$ и са знаком $-$.

Али треба сад одмах приметити, да се такве функције, у којима би био исказан закон зависности корена једначине од њених сачинилаца, могу изнаћи само још за једначине 3-ег, 4-ог, али не и вишег степена, као што су то Ruffini и Abel доказали. Само у извесним случајевима као н. пр. кад се из самог облика задате једначине може сазнати природа корена, могуће је да решимо општу једначину и вишег степена од четвртог. То је случај код реципрочних, биномних, триномних и још неких једначина.

Једначине трећег степена.

57. Кад се једначина трећег степена, која се зове и *кубном*, уреди, она изгледа овако:

$$1.)\qquad x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

Пошто се из ове једначине може по методи № 18 избацити други члан, јер зарад тога треба само тражити једначину, чији су корени за $\frac{1}{3}a_1$ мањи од корена дане једначине 1), то онда можемо претпоставити, да нам је дана једначина облика:

$$2.)\qquad x^3 + px + q = 0$$

Између многих метода, које су пронађене за разрешавање кубних једначина оваквих, као што је ова под 2), најпростија ми се чини она, по којој се склапа нова кубна једначина истог облика са задатом 2), и која нова једначина има као познати корен један извесни израз састављен из неодређених количина.

Затим се за те неодређене количине траже вредности, за које су нова и задата једначина истоветне. И за такве вредности неодређених количина онда је горе споменути израз очевидно корен и задане једначине Ставимо дакле:

$$x = u + v$$

Кад подигнемо на трећи степен добијамо:

$$x^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2.$$

или:

$$x^3 = u^3 + v^3 + 3uv\,(u + v)$$

а одавде, кад $u + v$ сменимо са x и за тим једначину сведемо на нулу

$$3.)\qquad x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0.$$

Овој једначини, која је истог облика са једначином 2), $u + v$ јесте корен. То се јасно увиђа из самог рада, а можемо се о томе уверити, такође, ако место x ставимо у 3) вредност $u + v$.

Да би сад једначине 2) и 3) биле истоветне, треба да је:

$$-3uv = p \quad \text{и} \quad -(u^3 + v^3) = q$$

или

$$4.)\qquad uv = -\frac{1}{3}p \quad \text{и} \quad (u^3 + v^3) = -q.$$

То ће рећи вредности за u и v, за које ће једначине 2) и 3) бити истоветне, за које ће дакле вредности израз $(u + v)$ бити корен задате једначине 2) треба да задовољавају једначине 4). Те вредности за u и v добићемо ако разрешимо једначине под 4).

Зарад тога подигнимо прву једначину на трећи степен, па ћемо тада имати:

$$5.)\qquad u^3v^3 = -\frac{1}{27}p^3 \quad \text{и} \quad (u^3 + v^3) = -q.$$

Као што се види, познати су нам збир и производ количина u^3 и v^3. Дакле су (№ 6) вредности ових последњих количина корени квадратне једначине:

$$z^2 + qz - \frac{1}{27}p^3 = 0.$$

Који ћемо пак од та два корена сматрати као вредност од u^3, а који као вредност од v^3, то је услед обрасца $x = u + v$ са свим свеједно.

Узмимо дакле да је:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

из чега следује:

$$6.)\qquad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}$$

И ово би биле вредности за које би:

$$7.)\qquad x = u + v$$

био корен једначине 2). Али треба се сетити да трећи корен из сваког броја $\pm a$ (алг. анал. № 120) има три вредности, које се добијају, кад се ма која од трију вредности трећега корена $\sqrt[3]{\pm a}$ н. пр. обична или аритметична помножи са $\sqrt[3]{+1}$. Услед тога свака од количина u и v има по три вредности. Ако изразе под 6) сматрамо као обичне или аритметичне вредности од u и v, онда је:

$$8.)\qquad u = \sqrt[3]{A},\quad \alpha\sqrt[3]{A},\quad \alpha^2\sqrt[3]{A}$$

$$v = \sqrt[3]{B},\quad \alpha\sqrt[3]{B},\quad \alpha^2\sqrt[3]{B}$$

где су (№ 120 алг. анал.) α и α^2 уображене вредности за $\sqrt[3]{+1}$, т. ј. $\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\alpha^2 = \dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$,

и где A и B стоје краткоће ради место израза под првим к другим кубним кореном под 6). Кад бисмо сад у 7) заменули u и v са сваком од њиних вредности, ми бисмо нашли за x свега *девет* вредности, док међу тим једначина трећег степена може имати само три корена. И сад се морамо запитати, па шта је узрок томе што смо добили за x девет вредности и после које су од тих вредности оне, које су корени једначине 2).

На то питање лако је дати одговора. Једначине под 5) из којих смо израчунавали u и v општије су од оних под 4), у којима су исказани услови, које треба да испуне вредности од u и v, па да њихов збир буде корен једначине 2). Јер кад бисмо место једначине 2) имали да разрешимо једначину:

$$9.) \qquad x^3 + \alpha p x + q = 0$$

или једначину:

$$10.) \qquad x^3 + \alpha^2 p x + q = 0$$

ми бисмо место једначина под 4) добили једначине:

$$11.) \qquad uv = -\frac{\alpha p}{3}, \quad u^3 + v^3 = -q,$$

или једначине:

$$12.) \qquad uv = -\frac{\alpha^2 p}{3}, \quad u^3 + v^3 = -q,$$

али би и из једног и из другог од ових спрегова једначина следовале оне под 5).

Одатле следује, да из једначина под 5) морамо добити за u и v не само оне вредности, за које је једначина 3) истоветна са задатом једначином 2), већ и оне,

за које је свака од једначина 9) и 10) истоветна са задатом 2). Другаче из једначина 5) морамо добити не само оне вредности за u и v, које сабране дају корене једначине 2), већ и оне, које сабране дају корене једначина 9) и 10). И тиме се тачно објашњава то, што заменом вредности нађених за u и v у 7) добијамо за x свега девет вредности. Три од тих вредности јесу корени јеначине 2), друге три корени једначине 9), а остале три јесу корени једначине 10).

Сад остаје још да се испита, које су од тих девет вредности x-а корени једначине 2), које су пак од њих корени једначине 9), а које су најзад корени једначине 10).

1°. Вредности за u и v, за које је:

$$x = u + v$$

корен једначине 2), треба да су, услед првог обрасца под 4), такве, да је њин производ $= -\frac{1}{3} p$.

2°. Вредности за u и v, за које је:

$$x = u + v$$

корен једначине 9, треба да су, услед првог обрасца под 11), такве, да је њихов производ $= -\frac{1}{3} \alpha p$. И најзад

3°. Вредности за u и v, за које је:

$$x = u + v$$

корен једначине 10) треба да су, услед првог обрасца под 12) такве, да је њин производ $= -\frac{1}{3} \alpha^2 p$.

Према свему, што смо до сад рекли, ако под изразима у 6) разумевамо аритметичне вредности од u и v, онда се први корен једначине 2) добија, ако у 7) заменимо u и v са њиним првим вредностима под 8). Тај је дакле корен:

$$13.)\quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + $$
$$+ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Остала два корена јесу:

$$14.)\quad x = \alpha\sqrt[3]{A} + \alpha^2\sqrt[3]{B}, \quad x = \alpha^2\sqrt[3]{A} + \alpha\sqrt[3]{B}$$

где A и B значе прву поткорену количину у 13).

Како ваља у образцу 7) комбиновати вредности од u и v, што су под 8), те да се добију корени једначина 9) и 10) увиђа се из оног, што је речено под 1°, 2° и 3°.

Образац 13) одакле следују са свим просто обрасци 14), зове се Cardan-ов образац, по имену Талијанца, који га је 1595 год. свету обзнанио, и ако тај образац није пронашао он, већ Tartaglia, опет Талијанац.

58. У овоме, што иде ми ћемо сачиниоце p и q сматрати као *стварне* бројеве.

Да бисмо при овој претпоставци испитали природу корена кубне једначине:

$$x^3 + px + q = 0$$

разликоваћемо три случаја:

1°. Ако је:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0,$$

а тај случај може наступити и кад је $p > 0$ и кад је $p < 0$, онда су A и B стварни бројеви и кубна једначина има као што се види из образаца 13) и 14) у № 57 један стваран и два уображена корена.

2°. Ако је:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$

а тај случај може наступити само, кад је p у једначини одречно, онда је:

$$A = B = -\frac{1}{2}q,$$

дакле тада је један корен (обр. 13):

$$x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

а остала два (обр. 14) јесу:

$$x_2 = x_3 = -(\alpha + \alpha^2)\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

Дакле су тада сва три корена стварна, а два су од њих једнака и истог су знака са q.

3°. Ако је:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0\,,$$

а то може бити само онда, кад је $p < 0$, онда су A и B уображени и с тога се сва три корена јављају као уображени. Међу тим, пошто је једначина непарног степена, она мора имати бар један стваран корен. Шта више, ако узмемо у обзир обрасце 13) и 14) у № 57 биће нам јасно, да се случај, кад су сви корени кубне једначине стварни, може десити само при садањој претпоставци. И ми ћемо сада да докажемо, да су при садањој претпоставци сви корени кубне једначине нужно стварни. И доиста ако означимо са P и Q аритметичне вредности од u и v у № 57 имаћемо као корене:

1.) $$x = P + Q$$

2.) $$x = \alpha P + \alpha^2 Q$$

3.) $$x = \alpha^2 P + \alpha Q$$

или ако у ове две последње једначине заменимо α и α^2 њиховим вредностима:

4.) $$x = -\frac{(P+Q)}{2} + \left(\frac{P-Q}{2}\right)\sqrt{-3}$$

5.) $$x = -\frac{(P+Q)}{2} - \left(\frac{P-Q}{2}\right)\sqrt{-3}$$

Да бисмо дакле сад доказали, да су сва три корена кубне једначине стварни, ми ћемо узети, да је први корен 1) онај, који је стваран, јер један стварни корен једначина мора имати, и тада остаје само, да се докаже, да је израз:

$$\left(\frac{P-Q}{2}\right)\sqrt{-3}$$

стваран, па ће одатле већ следовати, да су и остала два корена стварна.

Из образаца, којих је истинитост очигледна:

$$(P-Q)(P^2+PQ+Q^2) = P^3-Q^3$$

$$(P^2+PQ+Q^2) = (P+Q)^2-PQ$$

следује:

$$P-Q = \frac{P^3-Q^3}{(P+Q)^2-PQ}$$

Али ако узмемо на ум значење количина P и Q добићемо:

$$P^3-Q^3 = 2\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

$$PQ = -\frac{1}{3}p$$

Ако сад ставимо:

$$P+Q = a$$

добићемо:

$$P-Q = \frac{2\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{a+\frac{1}{3}p}$$

одакле:

$$\frac{P-Q}{2}\sqrt{-3} = \frac{\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}}{a+\frac{1}{3}p}$$

али је сада:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

дакле је израз:

$$\frac{P-Q}{2}\sqrt{-3}$$

стваран и према томе и остала два корена кубне једначине јесу стварни.

Дакле су доиста у случају:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

сва три корена стварна, и ако се они јављају као уображени. Па пошто стари нису били у стању ослободити поменуте корене њихове уображене одеће, а знали су, да ови — корени — у овом случају морају бити стварни, то су они трећи случај назвали несводљивим (casus irreducibilis). Али и сем тога Cardan-ов образац има и ту ману, што је у првом случају израчунавање стварног корена помоћу њега врло теготно због многих извлачења корена, а да и не помињемо још и то, што помоћу њега добијамо често стваран и рационалан корен у ирационалном облику. То је н. пр. случај са једначином:

$$x^3-6x-40=0.$$

Један корен њен јесте 4, док међу тим Cardan-ов образац даје:

$$x=\sqrt[3]{20+\sqrt{400-8}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{400-8}}$$

или кад се овде назначене радње изврше:

$$x=3{\cdot}999\ \ldots\ .$$

Помоћу тригонометријских функција може се Cardan-ов образац 13), из којег се образац 14) лако изводи за рачун згодно приправити. Ми ћемо при том имати на уму само случај 1° и случај 3°, јер се у случају 2° корени јављају у са свим простом облику. Пошто се, кад је $p>0$ јавља увек први случај 1°, а кад је $p<0$ може се јавити први или трећи случај, како је кад

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\gtrless 0,$$

то ћемо у №-и која долази за овом, разликовати три случаја:

$$p>0,\quad p<0 \text{ и } \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0,\quad p<0 \text{ и } \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

59. *Први случај.* Напишимо Cardan-ов образац у овом облику:

$$1.)\quad x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}}+$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{q}{2}\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}}.$$

Пошто знамо да је сваки положан број тангента једног извесног лука, који је већи од 0, а мањи од $\frac{1}{2}\pi$ то нека је φ онај лук за који је:

$$2.)\quad tg\,\varphi = \sqrt{\frac{4p^3}{27q^2}} \quad \text{или} \quad tg^2\varphi = \frac{4p^3}{27q^2}$$

Одавде следује:

$$\frac{q}{2} = cotg\,\varphi . \sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

Ако још узмемо да је:

$$\sqrt{1+tg^2\varphi} = \frac{1}{cos\,\varphi},$$

онда се претвара образац 1) у овај:

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\frac{1-cos\,\varphi}{sin\,\varphi}} - \sqrt{\frac{p^3}{3}}\sqrt[3]{\frac{1+cos\,\varphi}{sin\,\varphi}}$$

Одавде добијамо даље:

$$3.)\quad x = \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{tg\frac{1}{2}\varphi} - \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{cotg\frac{1}{2}\varphi}$$

Ако сад узмемо, да је ψ онај лук, — између 0 и $\frac{\pi}{2}$ — за који је:

$$4.)\quad tg\,\psi = \sqrt[3]{tg\frac{1}{2}\varphi},$$

онда образац 3) прелази у овај:

$$5.)\quad x = \sqrt{\frac{p}{3}}\,tg\,\psi - \sqrt{\frac{p}{3}}\,cotg\,\psi$$

Овај образац даје нам први и то стварни корен у оном случају, где је $p > 0$. Остала два корена добијају се (обр. 14 у № 57), и то други кад се први члан десно у обрасцу 5) помножи са α, о други са α^2; а трећи, кад се први члан у 5) десно од знака једнакости умножи са α^2, а други са α.

Ми ћемо гледати, да образац 5), који нам даје стварни корен једначине, преставимо што простије.

Он се даје преставити и овако:

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{tg\,\psi - cotg\,\psi\right\} = \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\frac{sin^2\psi - cos^2\psi}{sin\psi\,cos\psi}\right\} =$$

$$= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\frac{cos\,2\,\psi}{sin\,2\,\varphi}$$

или најзад:

$$6.)\quad x = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\,cotg\,2\,\psi$$

Дакле, да бисмо у овом случају, где је $p > 0$, израчунали стварни корен једначине, треба нам најпре из обрасца 2) а помоћу логаритамских таблица израчунати лук φ, а за тим из обрасца 4) израчунати лук ψ. Кад је овај познат, онда из обрасца 6), а помоћу логаритама израчунавамо стварни корен једначине.

За остала два уображена корена налазимо помоћу обрасца 5) лако:

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{cotg\, 2\psi + \frac{1}{sin\, 2\psi}\sqrt{-3}\right\}$$

или ако под 6) израчунати стварни корен означимо са x_1, онда:

$$x = -\frac{1}{2}x_1 \pm \sqrt{p}\,\frac{1}{sin\, 2\psi}\sqrt{-1}.$$

Примедба. У овом првом случају и брже је и лакше је тражити корене једначине момоћу образаца 13) и 14) у № 57 извлачећи друге и треће корене помоћу логаритама.

Други случај. $p < 0,\ \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$

Ако у рачунима, који долазе, будемо под p разумевали бројну вредност сачиниоца од x, ако дакле узмемо да је задата кубпа једначина:

$$x^3 - px + q = 0$$

онда Cardan-ов образац изгледа овако:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Одавде добијамо даље:

$$8.)\quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}}.$$

Но пошто је сада:

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} > 0\,,\ \text{дакле}\ \frac{4p^3}{27q^2} < 1$$

то смемо узети да је:

$$9.)\quad sin\varphi = \sqrt{\frac{4p^3}{27q^2}}\quad \text{или}\quad sin^2\varphi = \frac{4p^3}{27q^2},$$

одакле следује:

$$10.)\qquad \frac{q}{2} = \frac{1}{sin\,\varphi}\sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

Помоћу образаца 9) и 10) образац 8) претвара се у

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\frac{1 - cos\,\varphi}{sin\,\varphi}} - \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\frac{1 + cos\,\varphi}{sin\,\varphi}}$$

Овај образац може се и овако преставити:

$$11.)\quad x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{tg\,\frac{1}{2}\,\varphi} - \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{cotg\,\frac{1}{2}\,\varphi}$$

ако сад ставимо:

12) $tg\,\psi = +\sqrt[3]{tg\,\frac{1}{2}\varphi}$, онда 11) прелази у:

$$13.)\qquad x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\,tg\,\psi - \sqrt{\frac{p}{3}}\,cotg\,\psi$$

Овај образац даје стварни корен једначине. Остала два корена добијају се, и то други, кад се у 12) десно помножи први члан са α, а други са α^2; а трећи корен кад се у 12) помножи први члан са α^2, а други са α.

Образац 12), који даје стварни корен, може се још простије преставити овако:

$$x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{tg\,\psi + cotg\,\psi\right\}$$

или:

$$x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\frac{sin^2\psi + cos^2\psi}{sin\psi\,cos\,\psi}\right\}$$

или:

$$14.)\qquad x = -\frac{2}{sin\,2\psi}\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

За остала два — уображена — корена налазимо из 12) сасма лако:

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\frac{1}{sin\,2\psi} \pm cotg\,2\psi\sqrt{-3}\right\}$$

или још простије, кад означимо са x_1 стварни корен под 14):

$$x = -\frac{1}{2}x_1 \pm \sqrt{p}\,cotg\,2\psi\sqrt{-1}.$$

Трећи случај $p < 0$ и $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$.

Ово је онај пређе поменути несводљиви случај. Ако у рачуну, који долази разумемо под p опет бројну вредност сачиниоца од x, онда је кубна једначина опет

$$x^3 - px + q = 0$$

а Cardan-ов образац може се сада овако преставити:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27}}\sqrt{\frac{27\,q^2}{4p^3} - 1}} +$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27}}\sqrt{\frac{27\,q^2}{4p^3} - 1}}$$

Пошто је услед претпоставке:

$$\frac{27\,q^2}{4p^3} < 1$$

то смемо узети да је:

$$14.)\quad cos\,\varphi = \sqrt{\frac{27\,q^2}{4p^3}},\ \text{дакле}\ cos^2\varphi = \frac{27\,q^2}{4p^3}$$

одавде следује:

$$\frac{q}{2} = cos\,\varphi\sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

и услед тога горњи израз x-а прелази у овај:

$$x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\cos\varphi - i\sin\varphi\right\}^{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\cos\varphi + i\sin\varphi\right\}^{\frac{1}{3}}$$

Ако на треће корене десно од знака равности применимо *Moivre*-ов образац у № 117 алг. анал. добићемо:

$$x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\cos\frac{\varphi+2r\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi+2r\pi}{3}\right\}$$

$$= -\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\cos\frac{\varphi+2r\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+2r\pi}{3}\right\},$$

или најзад;

$$x = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi+2r\pi}{3},$$

где је r ма какав цео број. Према томе изгледа, као да би x имало бесконачно много вредности. Међу тим то није случај, а не може ни бити, јер се све те вредности x-а своде на три међу собом различите. И те вредности добићемо, ако у последњем обрасцу заменимо r са 0, 1, 2. Корени кубне једначине у овом трећем случају јесу дакле:

$$15.)\quad \left\{\begin{aligned} x &= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} \\ x &= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right) = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}-60^\circ\right) \\ x &= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right) = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+60^\circ\right) \end{aligned}\right.$$

и они су, као што се види сви стварни.

60. Корене кубне једначине у трећем случају № 59 можемо наћи и без помоћи Moiovre-овог обрасца.

Узмимо опет, да је:

$$1.)\qquad x^3 - px + q = 0$$

задата једначина и:

$$p < 0,\quad \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$$

Ставимо:

$$2.)\qquad x = r\sin\varphi,$$

где је r један још неодређен стваран број, а φ један такође стваран неодређен лук. Кад једначину 2) подигнемо на трећи степен и нову једначину сведемо на нулу, добићемо:

$$3.)\qquad x^3 - r^3\sin^3\varphi = 0$$

али је, (види моју тригонометрију страна 45):

$$\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi$$

и с тога:

$$r^3\sin^3\varphi = \frac{3r^2}{4}r\sin\varphi - \frac{r^3}{4}\sin 3\varphi$$

Замењујући ово у 3) и стављајући у исти мах x место $r\sin\varphi$, добијамо:

$$4.)\qquad x^3 - \frac{3r^2}{4}x + \frac{r^3}{4}\sin 3\varphi = 0$$

И овој једначини, која је истог облика са једначином 1) израз:

$$x = r \sin \varphi$$

јесте корен. О истинитости тога можемо се уверити простом заменом, а међу тим увиђа се то исто и из самог рада.

Да би сад задата једначина 1) била истоветна са једначином 4), треба да је:

$$5.) \qquad \frac{3r^2}{4} = p \quad \text{и} \quad \frac{r^3}{4} \sin 3\varphi = q$$

За вредности од r и φ, добивене разрешајем ових једначина, биће дакле $x = r \sin \varphi$ корен једначине 1). Из прве једначине под 5) добија се лако r и онда из друге једначине следује:

$$\sin 3\varphi = \frac{4q}{r^3}$$

Из ове једначине треба дакле тражити вредности за φ. Ако узмемо, да нам 3φ значи најмањи од оних лукова, којима је $4q : r^3$ синус, и који се лук из последње једначине, а помоћу логаритама лако добија, онда сви безбројни луци, којима је $4q : r^3$ такође синус, јесу (тригон. № 17, 18 и 20):

$$360 + 3\varphi, \quad 2.360 + 3\varphi, \quad 3.360 + 3\varphi \ldots$$

$$3\varphi, \quad 180 - 3\varphi, \quad 3.180 - 3\varphi, \quad 5.180 - 3\varphi \ldots$$

вредности за сам лук φ јесу дакле:

$$120 + \varphi, \; 240 + \varphi, \; 360 + \varphi, \ldots$$

$$\varphi, \quad 60 - \varphi, \; 180 - \varphi, \; 300 - \varphi \ldots$$

Пошто φ, као што се види, има бесконачно много вредности, то изгледа, да би и једначина 1) имала бесконачно много корена, што не може бити. И доиста синуси свију ових бесконачно многих лукова нису међу собом различни. Синус свакога од тих лукова једнак је синусу једног од ова три лука:

$$\varphi, \quad 60^\circ - \varphi \quad \text{и} \quad -(\varphi + 60^\circ).$$

Према томе, корени једначине 1) јесу:

$$6.) \quad x = r \sin \varphi, \; x = r \sin (60^\circ - \varphi) \; \text{и} \; x = -r \sin (60 + \varphi)$$

Пример 1. Да се реши једначина:

$$x^3 + x + 10 = 0$$

Овде је $p = 1$, $q = 10$, а $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 25 + \frac{1}{27} > 0$, дакле случај 1° у № 58. Сад је:

$$x = \sqrt[3]{-5 + \sqrt{25 + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{25 + \frac{1}{27}}}$$

или:

$$x = \sqrt[3]{-5 + \sqrt{\frac{676}{27}}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{\frac{676}{27}}}$$

$$\log \sqrt{\frac{676}{27}} = 0{\cdot}699\,2915 \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{676}{27}} = 5{\cdot}0037$$

Дакле је сад даље:

$$x = \sqrt[3]{0{\cdot}0037} - \sqrt[3]{10{\cdot}0037}$$

$$log \sqrt[3]{0{\cdot}0037} = 0{\cdot}189\,4006 - 1$$

$$\text{и } \sqrt[3]{0{\cdot}0037} = 0{\cdot}1547$$

$$log \sqrt[3]{10{\cdot}0037} = 0{\cdot}333\,3869$$

$$\text{и } \sqrt[3]{10{\cdot}0037} = 2{\cdot}1547$$

Дакле је сада:

$$x = 0{\cdot}1547 - 2{\cdot}1547$$

и с тога стварни корен $= -2$.

Остала два корена налазимо помоћу образаца 4) и 5) у № 58, а могу се добити и из квадратне једначине, којој је лева страна количник између тринома задате једначине и $(x+2)$. Ти су корени:

$$x = 1 + 2\sqrt{-1}\,, \quad x = 1 - 2\sqrt{-1}$$

Нека читалац реши задану једначину и тригонометријским путем.

Пример 2. Да се реши једначина:

$$x^3 - 9x - 28 = 0$$

Овде је $p = -9$, и $q = -28$ а $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 196 - 27 > 0$ дакле опет случај 1° у № 58. Сад је:

$$x = \sqrt[3]{14 + \sqrt{196 - 27}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{196 - 27}}$$

$$x = \sqrt[3]{14 + 13} + \sqrt[3]{14 - 13}$$

или најзад:

$$x = 3 + 1.$$

Дакле је стварни корен:

$$x = 4$$

Остала два уображена корена на основу образаца 4) и 5) у № 58 јесу:

$$x = -2 + \sqrt{-3}\,, \quad x = -2 - \sqrt{-3}$$

Пример 3. Да се реши једначина:

$$x^3 - 12x + 16 = 0$$

Овде је $p = -12$, $q = +16$; $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 64 - 64 = 0$, дакле случај други под № 58. Сви су корени сада стварни и два су од њих једнака. Ти су корени:

$$x = 2,\ x = 2, \ \text{ и } \ x = -4.$$

Пример 4. Да се реши једначина:

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

Овде је $p = -7$, $q = 6$; $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 9 - \frac{343}{27} < 0$, дакле имамо сада случај 3° у № 58, где су сви корени стварни, али их обрасци под 13) и 14) у № 57 дају у уображеном облику.

Тражимо корене најпре помоћу образаца 15) у № 59.

$$log\, 2\sqrt{\frac{p}{3}} = log\, 2\sqrt{\frac{7}{3}} = log\sqrt{\frac{28}{3}} = 0{\cdot}485\ 0183$$

$$log\, cos\, \varphi = log\sqrt{\frac{243}{343}} = 0{\cdot}925\,1561-1$$

$$\varphi = 32^\circ\, 40'\, 48{\cdot}7'',\quad \frac{1}{3}\varphi = 10^\circ\, 53'\, 36{\cdot}2''$$

$$\frac{1}{3}\varphi - 60^\circ = -49^\circ\, 6'\, 23{\cdot}8''\quad \frac{1}{3}\varphi + 60^\circ = 70^\circ\, 53'\, 36{\cdot}2''$$

$$log\, cos\, \frac{1}{3}\varphi = log\, cos\, 10^\circ\, 53'\, 36{\cdot}2'' = 0{\cdot}992\ 1029 - 1$$

$$log\, cos\left(\frac{1}{3}\varphi - 60^\circ\right) = log\, cos\, 49^\circ\, 6'\, 23{\cdot}8'' = 0{\cdot}816\ 0116-1$$

$$log\, cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 60^\circ\right) = log\, cos\, 70^\circ\, 53'\, 36{\cdot}2'' = 0{\cdot}514\ 9837-1$$

И сад по првом обр. 15) у № 59 имамо:

$$log\,(-x) = \begin{cases} 0{\cdot}485\,0183 \\ 0{\cdot}992\,1029 \end{cases}$$
$$= 0{\cdot}477\,1212,$$

одакле:

$$-x = 3 \quad \text{или} \quad x = -3.$$

као први корен.

Даље по другом обрасцу 15) у № 59 имамо:

$$log\, x = \begin{cases} 0{\cdot}485\,0183 \\ 0{\cdot}816\,0116 \end{cases}$$
$$= 0{\cdot}301\,0299$$

дакле:

$$x = 2.$$

као други корен.

Најзад по трећем обрасцу исте №-е имамо:

$$log\, x = \begin{cases} 0{\cdot}485\,0183 \\ 0{\cdot}514\,9837-1 \end{cases}$$
$$= 0{\cdot}000\,0020$$

дакле:

$$x = 1.$$

као трећи корен.

Нека читалац реши задату једначину и помоћу образаца 5) и 6) у № 60.

Разрешавање кубних једначина помоћу детерминаната.

61. Нека је задата детерминанта:

$$1.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & x \\ b & x & a \\ x & a & b \end{vmatrix}$$

Кад је развијемо по основцима прве врсте, добићемо:

$$\triangle = a\begin{vmatrix} x & a \\ a & b \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & a \\ x & b \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} b & x \\ x & a \end{vmatrix}$$

или

$$\triangle = a(bx - a^2) + b(ax - b^2) + x(ab - x^2)$$

или најзад

$$2.)\qquad \triangle = 3abx - (a^3 + b^3 + x^3)$$

Други од овог различни израз за $\triangle$ добићемо, ако у 1) основцима првог стуба додамо основке другог и трећег стуба, јер тако добијамо:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a+b+x, & b, & x \\ b+x+a, & x, & a \\ x+a+b, & a, & b \end{vmatrix} = (a+b+x)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

одакле видимо да је полином 2) дељив са:

$$a + b + x.$$

Ако у 2) сменимо a са $a\alpha$ и b са $b\alpha^2$, где су α и α^2 уображени кубни корени јединице, добићемо:

$$\triangle = 3a\alpha \,.\, b\alpha^2 .\, x - (a^3\alpha^3 + b^3\alpha^6 + x^3)$$

или:

$$\triangle = 3ab\alpha^3 .\, x - (a^3\alpha^3 + b^3\alpha^6 + x^3)$$

или најзад:

$$\triangle = 3abx - (a^3 + b^3 + x^3)$$

јер је $\alpha^3 = 1$. Полином 2) није се поменутом сменом променуо, и зато је сад:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a\alpha & b\alpha^2 & x \\ b\alpha^2 & x & a\alpha \\ x & a\alpha & b\alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\alpha^2 + x, & b\alpha^2, & x \\ b\alpha^2 + x + a\alpha, & x, & a\alpha \\ x + a\alpha + b\alpha^2, & a\alpha, & b\alpha^2 \end{vmatrix}$$

или:

$$\triangle = (a\alpha + b\alpha^2 + x)\begin{vmatrix} 1 & b\alpha^2 & x \\ 1 & x & a\alpha \\ 1 & a\alpha & b\alpha^2 \end{vmatrix}$$

Дакле је као што видимо, полином 2) дељив и са:

$$a\alpha + b\alpha^2 + x$$

На сличан начин може се доказати, да је полином дељив и са:

$$a\alpha^2 + b\alpha + x$$

Према томе можемо дакле ставити:

$$3abx - (a^3 + b^3 + x^3) =$$

$$= c.\,(a + b + x)\,(a\alpha + b\alpha^2 + x)\,(a\alpha^2 + b\alpha + x)$$

где је c једна неодређена стална количина. Пошто из последње једначине за $a = 0$ и $b = 0$ добијамо:

$$-x^3 = cx^3,$$

то онда следује да је $c = 1$.

Према томе је сада:

$$3.) \qquad a^3 + b^3 + x^3 - 3abx =$$

$$= (a + b + x)(a\alpha + b\alpha^2 + x)(a\alpha^2 + b\alpha + x)$$

Ако овде сменимо x са $-x$, добићемо, пошто затим помножимо лево и десно са -1.

$$x^3 - 3abx - a^3 - b^3 =$$

$$= (x - a - b)(x - a\alpha - b\alpha^2)(x - a\alpha^2 - b\alpha)$$

Одавде видимо, да су:

$$4.) \quad x = a + b, \quad x = a\alpha + b\alpha^2, \quad x = a\alpha^2 + b\alpha$$

корени кубне једначине:

$$5.) \qquad x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0$$

Ако би задата била једначина:

$$6.) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

треба само ставити:

$$ab = -\frac{1}{3}p, \quad a^3 + b^3 = -q,$$

одатле следује онда лако:

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

и кад се у 4) a и b замене овим вредностима, добијамо за једначину 6) иста три корена, која смо у № 57 нашли на други начин.

Једначине четвртог степена.

62. Разрешавање опште једначине:

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

свешћемо на разрешавање једначине истог степена, али у којој нема члана са трећим степеном x-а. Та нова једначина, која постаје, кад се у 1) замени x са (№ 18):

$$x - \frac{1}{4}a_1$$

сад нека је:

$$1.) \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Ставимо:

$$x = u + v + w.$$

Кад подигнемо на квадрат, добићемо:

$$x^2 = (u^2 + v^2 + w^2) + 2(uv + uw + vw)$$

или:

$$x^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(uv + uw + vw)$$

Кад ову једначину подигнемо такође на квадрат, добићемо:

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 + (u^2 + v^2 + w^2)^2 =$$

$$= 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w)$$

Кад ову једначину сведемо на нулу и сменимо: $u+v+w$ са x, добићемо:

$$2.)\qquad x^4 - 2(u^2+v^2+w^2)x^2 - 8uvwx +$$

$$+(u^2+v^2+w^2)^2 - 4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) = 0$$

Ова једначина истог је облика са једначином 1), и као што се из извођења њеног увиђа, један корен њен јесте:

$$x = u + v + w.$$

За оне дакле вредности неодређених количина: u, v и w, за које је једначина 2) истоветна са једначином 1), биће:

$$x = u + v + w$$

корен и једначине 1). Да једначине 1) и 2) буду истоветно, треба да је:

$$3.)\qquad -2(u^2+v^2+w^2) = p$$

$$-8uvw = q$$

$$(u^2+v^2+w^2)^2 - 4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) = r$$

И ово је једначина, која ће нам дати за u, v и w вредности, за које ће једначине 1) и 2) бити истоветне, за које ће дакле вредности израз $u+v+w$ бити корен једначини 1). Али последње једначине могу се представити овако:

$$(u^2+v^2+w^2) = -\frac{1}{2}p$$

$$4.)\qquad (u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) = \frac{p^2-4r}{16}$$

$$u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64}$$

Одавде видимо, да ће вредности за u^2, v^2, w^2 бити корени кубне једначине:

$$5.)\qquad z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2-4r}{16}z - \frac{q^2}{64} = 0$$

Претпоставимо сад да смо ову једначину решили и нашли z_1, z_2 и z_3 као корене њене. Тада је:

$$u = \pm\sqrt{z_1},\quad v = \pm\sqrt{z_2},\quad w = \pm\sqrt{z_3}$$

Ако сад у обрасцу:

$$x = u + v + w$$

заменимо количине u, v и w са сваком од њиних двеју вредности, добићемо за x свега осам вредности, док међу тим једначина 1) има само четири корена. И сад настаје исто питање као и код кубне једначине, т. ј. за што добијамо за x осам вредности, и после које су од тих осам вредности оне, које су корени једначине 1).

И на то питање лако је дати одговора. Последња једначина под 4) одговара не само једначини 1), у којој стоји $+q$, већ и оној, која из једначине 1) постаје, кад се у њој $+q$ смени са $-q$. Једначине под 4) морају према томе дати за u, v и w не само такве вредности за које образац:

$$x = u + v + w$$

даје корене једначине 1), него и такве, за које исти образац даје и корене једначине:

$$6.)\qquad x^4 + px^2 - qx + r = 0$$

И тако је потпуно објашњено то, за што добијамо осам вредности за x. Сад је лако пронаћи и оне четири вредности између поменутих осам, које су корени једначине 1). Из друге једначине под 3) види се, да вредности за u, v и w, помоћу којих се из обрасца:

$$x = u + v + w$$

добијају корени једначине 1), морају бити такве, да је њихов производ:

$$uvw = -\frac{1}{8}q$$

дакле да је тај производ противног знака са сачиниоцем q. Остале четири вредности x-а јесу корени једначине 6)

Дакле корени једначине 1) јесу:

$$x_1 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \quad x_2 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

$$x_3 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \quad x_4 = +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$$

Међу тим корени једначине 6) јесу:

$$x_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \qquad x_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$$

$$x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \qquad x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

63. Какви су корени једначине:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

т. ј. да ли су они стварни или уображени зависи од тога какви су корени једначине 5) у № 62. Пошто је сад последњи члан једначине 5) одречан, то она *мора* имати један положан корен. Остала два корена њена или морају бити оба стварни, или оба уображени (№ 13), и ако су оба стварни, они морају бити оба положни или оба одречни. Дакле на тај начин корени једначине 5) у № 62 или су: 1° сва три положни, или 2° један је положан а два одречна, или најзад, 3° један је положан, а остала два уображена.

Из образаца на крају № 62 види се, да су у случају 1° сви корени једначине четвртог степена стварни. У случају 2° сви су уображени, изузев случај, кад су два одречна корена једначине 5) једнаки, јер тада су два корена једначине четвртог степена стварни а два уображени. У случају 3° опет су два корена стварни а два уображени. Јер ако н. пр. узмемо, да је корен z_1 једначине 5) у № 62 стваран, а z_2 и z_3 да су уображени, и да је:

$$z_2 = a + bi, \quad z_3 = a - bi$$

онда је $\sqrt{z_2} = \sqrt{a+bi}, \quad \sqrt{z_3} = \sqrt{a-bi}.$

Ако сад узмемо даље, да су r и φ модуо и аргуменат уображеног израза $a + bi$, онда по Moivre-овом обрасцу:

$$\sqrt{z_2} = r^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\frac{\varphi + 2r\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi + 2r\pi}{2}\right\}$$

$$\sqrt{z_3} = r^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\frac{\varphi + 2r\pi}{2} - i\sin\frac{\varphi + 2r\pi}{2}\right\}$$

Дакле је збир корених израза:

$$\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

стваран, одакле следује с погледом на прва четири обрасца на крају № 62 да су корени x_1 и x_2 стварни, а корени x_3 и x_4 уображени.

Читалац нека реши једначину:

$$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$$

Једначина 5) № 62 сада је:

$$z^3 - \frac{15}{2}z^2 + \frac{129}{16}z - 9 = 0$$

Кад се сврши добија се: $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = -4$.

Реципрочне једначине.

64. Тако се зову једначине, које се не мењају кад се у њима x смени са $\frac{1}{x}$. Тако једначина:

$$x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0$$

у којој су, као што се види, сачиниоци, који су од оба краја једнако удаљени, једнаки, јесте реципрочна. Јер кад у њој сменимо x са $\frac{1}{x}$, изаћи ће:

$$\frac{1}{x^m} + a_1\frac{1}{x^{m-1}} + a_2\frac{1}{x^{m-2}} + \ldots + a_2\frac{1}{x^2} + a_1\frac{1}{x} + 1 = 0$$

или кад помножимо са x^m и за тим чланове обрнуто напишемо:

$$x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0$$

а то је иста једначина са задатом.

Реципрочне једначине зову се тако за то, што кад им је н. пр. број α корен, мора им и $\frac{1}{\alpha}$ бити корен.

Да бисмо сада сазнали облик, којим се реципрочне једначине од осталих разликују, ми ћемо разликовати два случаја: *први,* кад је једначина непарног степена и *други* кад је једначина парног степена.

Узмимо да нам је дата ма какова једначина непарног степена:

$$1.)\quad x^{2m+1} + a_1x^{2m} + a_2x^{2m-1} + \ldots + a_{2m-1}x^2 + a_{2m}x + a_{2m+1} = 0$$

Ако је ова једначина реципрочна, онда према горњој одредби она се не сме променути, кад се у њој x смени са $\frac{1}{x}$. Ако ту смену извршимо, добићемо:

$$\frac{1}{x^{2m+1}} + \frac{a_1}{x^{2m}} + \frac{a_2}{x^{2m-1}} + \ldots + \frac{a_{2m-1}}{x^2} + \frac{a_{2m}}{x} + a_{2m+1} = 0$$

или кад помножимо са x^{2m+1}, поделимо са a_{2m+1} и обрнуто напишемо:

$$2.)\quad x^{2m+1}+\frac{a_{2m}}{a_{2m+1}}x^{2m}+\frac{a_{2m-1}}{a_{2m+1}}x^{2m-1}+\ldots+$$

$$+\frac{a_2}{a_{2m+1}}x^2+\frac{a_1}{a_{2m+1}}x+\frac{1}{a_{2m+1}}=0$$

Да би ова једначина била реципрочна са 1), треба да је:

$$\frac{a_{2m}}{a_{2m+1}}=a_1,\ \frac{a_{2m-1}}{a_{2m+1}}=a_2,\ldots$$

$$\ldots\frac{a_2}{a_{2m+1}}=a_{2m-1},\ \frac{a_1}{a_{2m+1}}=a_{2m},\ \frac{1}{a_{2m+1}}=a_{2m+1}$$

Захтев исказан у последњој од ових једначина истоветан је са овим $a_{2m+1}^2=+1$ одакле $a_{2m+1}=\pm 1$.

Ако узмемо за a_{2m+1} прву вредност, онда следује:

$$a_{2m}=a_1,\ a_{2m-1}=a_2,\ \ldots a_2=a_{2m-1},\ a_1=a_{2m}$$

Ако ли узмемо за $a_{2m+1}=-1$, онда излази:

$$a_{2m}=-a_1,\ a_{2m-1}=-a_2,\ \ldots a_2=-a_{2m-1},\ a_1=-a_{2m}$$

Одатле следује, *да је једначина непарног степена реципрочна само тако, ако су у њој сачиниоци, који су од оба краја једнако удаљени, једнаки, и при том или једнако или противно означени.*

Узмимо сада, да нам је дата ма каква једначина парног степена:

$$3.)\quad x^{2m}+a_1x^{2m-1}+a_2x^{2m-2}+\ldots+$$

$$+a_mx^m+\ldots+a_{2m-2}x^2+a_{2m-1}x+a_{2m}=0$$

где је a_mx^m средњи члан, од којег лево и десно има по m чланова.

Кад у једначини 3) сменимо x са $\frac{1}{x}$, добијамо:

$$\frac{1}{x^{2m}}+\frac{a_1}{x^{2m-1}}+\frac{a_2}{x^{2m-2}}+\ldots+\frac{a_m}{x^m}+\ldots+\frac{a_{2m-1}}{x}+a_{2m}=0$$

и одатле, кад са x^{2m} помножимо, па за тим са a_{2m} поделимо и обрнуто напишемо:

$$4.)\quad x^{2m}+\frac{a_{2m-1}}{a_{2m}}x^{2m-1}+\frac{a_{2m-2}}{a_{2m}}x^{2m-2}+\ldots+\frac{a_m}{a_{2m}}x^m+\ldots+$$

$$+\frac{a_2}{a_{2m}}x^2+\frac{a_1}{a_{2m}}x+\frac{1}{a_{2m}}=0$$

Да би једначине 3) и 4) биле истоветне треба да је:

$$\frac{a_{2m-1}}{a_{2m}}=a_1,\ \frac{a_{2m-2}}{a_{2m}}=a_2\ldots\frac{a_m}{a_{2m}}=a_m\ldots$$

$$\frac{a_2}{a_{2m}}=a_{2m-2},\ \frac{a_1}{a_{2m}}=a_{2m-1},\ \frac{1}{a_{2m}}=a_{2m}$$

Из последње од ових једначина следује:

$$a_{2m}^2=1,\ \text{одакле}\ a_{2m}=\pm 1.$$

Ако узмемо за a_{2m} прву вредност, $+1$, добијамо:

$$a_{2m-1}=a_1,\ a_{2m-2}=a_2,\ \ldots\ a_m=a_m,\ \ldots$$

$$a_2=a_{2m-2},\ a_1=a_{2m-1}$$

Ако ли узмемо за a_{2m} другу вредност — 1, добићемо:

$$a_{2m-1}=-a_1,\ a_{2m-2}=-a_2\ldots a_m=-a_m\ldots$$

$$a_2=-a_{2m-2},\ a_1=-a_{2m-1}$$

од којих једначина она у средини $a_m=-a_m$ може опстати само тако, ако је $a_m=0$.

Према томе дакле:

Свака једначина парног степена јесте реципрочна, кад су у њој сачиниоци, који су од оба краја наједнако удаљени, једнаки и при том једнако или противно означени, у ком последњем случају нема средњег члана у једначини.

65. Узмимо да нам је дата 1° реципрочна једначина непарног степена:

1.) $$x^{2m+1}+a_1x^{2m}+a_2x^{2m-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+1=0$$

у којој су сачиниоци што су од оба краја подједнако удаљени, не само једнаки, него и једнако означени. Ова једначина мора имати — 1 као корен, о чему се непосредном заменом у 1) можемо уверити. Дакле полином једначине 1) мора бити дељив са $x+1$. Ако се та деоба изврши и нађени количник стави = 0, онда нова једначина мора очевидно бити опет реципрочна и то таква, у којој су сачиниоци једнако удаљени од обадва краја једнако означени. О томе се можемо уверити непосредном деобом полинома под 1) са $(x+1)$.

Узмимо сад 2°, да нам је дата реципрочна једначина парног или непарног степена:

2.) $$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-2}x^2+a_{m-1}x+a_m=0$$

у којој су сачиниоци, који су наједнако од оба краја удаљени, супротно означени. Средњега члана у једначини 2) нема за то, што, ако је она непарнога степена, број је чланова паран, а ако је она парног степена средњег члана не може бити (№ 64). Једначина 2) има $+1$ као корен, о чему се можемо уверити стављајући у 2) $x=+1$. Дакле полином у 2) дељив је са $x-1$. Ако се та деоба изврши и количник стави = 0, добићемо једначину, која ће бити реципрочна, и то опет таква, у којој су сачиниоци, једнако удаљени од оба краја, једнако означени. О томе се можемо непосредном деобом између полинома 2) и $(x-1)$ и уверити.

Ако је једначина 2) парног степена, онда кад количник, који добијамо делећи полином 2) са $x-1$ ставимо = 0, добићемо реципрочну једначину парнога степена, у којој ће, као што мало час рекосмо, сачиниоци, од оба краја наједнако удаљени, бити једнако означени. Кад дакле полином те нове једначине, којој је корен број -1, поделимо са $x+1$, па добивени количник ставимо = 0, добићемо по ономе, што дознасмо у 1°, реципрочну једначину парног степена, у којој су сачиниоци једнако удаљени од оба краја, једнако означени и којој су корени сви остали корени једначине 2).

Дакле једначина 2) има $+1$ и -1 као корен.

Ми смо дакле у стању свести сваку реципрочну једначину непарног степена, делећи је са $x-1$ или са $x+1$, како је кад једна или друга деоба могућа, на једначину парног степена, у којој су сачиниоци једнако удаљени од оба краја, једнако означени. То смо исто у стању постићи и са једном једначином парног степена, у којој су од оба краја једнако удаљени сачиниоци противно означени, јер за то треба само полином једначине поделити са $(x-1)$ најпре, а нађени количник са $x+1$, или и обратно, или најзад треба поделити полином одмах са

$$x^2-1=(x+1)(x-1).$$

Из свега тога следује, да се при даљем разматрању реципрочних једначина можемо ограничити само на оне, у којима су сачиниоци чланова једнако удаљених од оба краја, једнако означени.

Лако је сад доказати, да се из такве реципрочне једначине може извести нова, чији је степен половина њеног степена. Узмимо нека је задата једначина:

$$3.)\quad x^{2m}+a_1x^{2m-1}+a_2x^{2m-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+1=0$$

Кад поделимо ову једначину са x^m и за тим узмемо заједно два и два члана, који су од оба краја подједнако удаљени, добићемо:

$$4.)\quad \left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+a_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+a_2\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\ldots+$$

$$+a_{m-2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a_{m-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_m=0$$

Ако ставимо:

$$5.)\qquad x+\frac{1}{x}=z$$

моћи ћемо биноме облика: $x^r+\frac{1}{x^r}$ преставити као рационалну функцију z-а. Јер из

$$\left(x^r+\frac{1}{x^r}\right)z=\left(x^r+\frac{1}{x^r}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

следује:

$$\left(x^r+\frac{1}{x^r}\right)z=x^{r+1}+\frac{1}{x^{r+1}}+x^{r-1}+\frac{1}{x^{r-1}}$$

или:

$$x^{r+1}+\frac{1}{x^{r+1}}=\left(x^r+\frac{1}{x^r}\right)z-\left(x^{r-1}+\frac{1}{x^{r-1}}\right)$$

одакле уједно увиђамо, да ће израз $x^r+\frac{1}{x^r}$ морати бити r-ог степена односно z, пошто је једначина 5) првог степена односно z. Ако сад у последњој једначини ставимо редом:

$$r=1,\ 2,\ 3\ \ldots\ m$$

добићемо:

$$6.)\quad \left|\begin{array}{l} x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2 \\ x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z \\ x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2 \\ x^5+\frac{1}{x^5}=z^5-5z^3+5z \end{array}\right.$$

. . . .

Као што се види, леве стране ових једначина јесу чланови повратнога реда, којима је скала: $z, -1$. Сваки члан тога реда добија се дакле, кад се онај, који је први пред њим помножи са z, а онај, који је други пред њим са -1.

Ако у једначини 4) заменимо поједине биноме њиним вредностима из образаца 6) добићемо једначину, чији је степен односно z половина степена задате једначине 3), дакле m. Да је m степен нове једначине, следује из тога, што је вредност бинома:

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)$$

односно z m-нога степена, а међу тим у једначини 4) нема изложилаца већих од m. Ако су сада корени те нове једначине $z_1, z_2, \ldots z_m$, онда из сваког од њих, а помоћу обрасца 5), у коме је исказан однос између корена нове и задате једначине, добијамо по две реципрочне вредности за x:

7.) $$x = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2}, \quad x = \frac{z - \sqrt{z^2-4}}{2} = \frac{2}{z + \sqrt{z^2-4}}$$

дакле свега $2m$ корена једначине 3)

Пример. Да се реши реципрочна једначина:

1') $$x^8 - 2x^7 + x^6 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

Њен је полином дељив са $x - 1$ и $x + 1$. Кад извршимо ту деобу добијамо:

2') $$x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

одакле:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

Или по примени обрасца 5):

3') $$z^3 - 2z^2 - z + 2 = 0$$

Из ове једначине по № 18) добијамо:

4') $$y^3 - \frac{21}{9}y + \frac{20}{27} = 0$$

као једначину, чији су корени за $k = \frac{2}{3}$ већи од корена једначине 3'). Из 4') добијамо по № 19:

5') $$u^3 - 21u + 20 = 0$$

као једначину чији су корени три пут већи од корена једначине 4'.

Једначина 5') спада у несводљив случај. Њени корени јесу: $u = 1, -5, 4$. Дакле су корени једначине 4').

$$y = \frac{1}{3}, \quad -\frac{5}{3}, \quad \frac{4}{3},$$

а корени једначине 3') јесу:

$$z = 1, \quad -1, \quad 2$$

Из ових корена, а помоћу образаца 7) добијамо 6 корена једначине 2'). Ти корени са горе нађена два: -1, и $+1$, јесу:

$$x = 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Решавање биномних и триномних једначина.

66. Свака једначина облика:

$$1.)\qquad x^m \pm a = 0$$

зове се *биномна* — двочлана — једначина. Свака таква једначина може се, кад се у њој стави $x = z\sqrt[m]{a}$ свести на ову простијег облика:

$$z^m \pm 1 = 0$$

и с тога ћемо од сад узимати у претрес само такве биномне једначине. Узмимо најпре да нам је дата једначина:

$$2.)\qquad x^m - 1 = 0$$

Из ње добијамо да је:

$$x = \sqrt[m]{+1}$$

Као што се види, корени једначине 2) нису ништа до m вредности m-ог корена из $+1$. Те се вредности добијају (алг. анал. № 120, 2°) кад се у обрасцу:

$$3.)\qquad x = \cos\frac{2r\pi}{m} \pm i\sin\frac{2r\pi}{m}$$

r замени редом са:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots \frac{m}{2}$$

или са:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots \frac{m-1}{2}$$

како је кад m парно или непарно. Кад у поменутој №-и алгебарске анализе и то у обрасцима 3) и 4) сменимо n са m, онда имамо све корене једначине 2) у случају кад је m парно, као и онда кад је m непарно.

Двама спрегнутим коренима једначине 2)

$$\cos\frac{2r\pi}{m} + i\sin\frac{2r\pi}{m}\,,\qquad \cos\frac{2r\pi}{m} - i\sin\frac{2r\pi}{m}$$

одговарају корени чиниоци:

$$x - \cos\frac{2r\pi}{m} - i\sin\frac{2r\pi}{m}\,,\qquad x - \cos\frac{2r\pi}{m} + i\sin\frac{2r\pi}{m}$$

Производ истих јесте стваран израз:

$$4.)\qquad x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{m} + 1.$$

Из овог израза добијамо редом све корене чиниоце бинома x^m-1, кад у њему заменимо r редом са горе поменутим вредностима. Вредност израза 4) за $r=0$ јесте:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1),$$

али чиниоца $(x-1)$ треба само један пут узети, јер као што се види из обрасца 3), кад у њему ставимо $r = 0$, јединица се јавља само један пут као корен једначине 2), дакле и $(x-1)$ само један пут као корени чинилац њен. У осталом то се увиђа и отуда, што $f(x) = x^m - 1$ и њен први извод $f'(x) = mx^{m-1}$ немају заједничка делиоца. Кад је m парно, онда вредност израза за $r = \frac{m}{2}$ јесте:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1),$$

али чиниоца $x+1$ треба опет само један пут у рачун узети јер се и -1 у случају, кад је m парно јавља само један пут као корен једначине 2).

Ако је дакле m парно, онда је:

5.) $$x^m - 1 =$$

$$= (x-1)(x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{m} + 1\right)\times$$

$$\ldots\ldots \times\left(x^2 - 2x\cos\frac{m-2}{m}\pi + 1\right).$$

А ако је m непарно онда је:

6.) $$x^m - 1 =$$

$$= (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{m} + 1\right)\times$$

$$\ldots\ldots \times\left(x^2 - 2x\cos\frac{m-1}{m}\pi + 1\right).$$

67. Узмимо, да нам је дата једначина:

7.) $$x^m + 1 = 0$$

Из ове једначине следује:

$$x = \sqrt[m]{-1},$$

дакле су њени корени m вредности m-ог корена из -1, и с тога се добијају, кад се у обрасцу (алг. анал. 120, образац 5).

8.) $$x = \cos\frac{2r+1}{m}\pi \pm i\sin\frac{2r+1}{m}\pi,$$

r замени редом са:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots \frac{m}{2} - 1,$$

или са:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots \frac{m-1}{2},$$

како је кад m парно или непарно. У обрасцима 7) и 8) поменуте №-е алгеб. анализе, кад у њима сменимо n са m имамо за оба случаја свих m корена једначине 7).

Производ од свака два спрегнута корена чиниоца јесте стваран и облика:

$$x^2 - 2x\cos\frac{2r+1}{m}\pi + 1,$$

и с тога, кад је m парно, биће:

9.) $$x^m + 1 = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{m} + 1\right)\times$$

$$\times\left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{m} + 1\right)\cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{m-1}{m}\pi + 1\right)$$

а кад је m непарно:

10.) $$x^m + 1 =$$

$$= (x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{m} + 1\right) \times$$

$$\times \left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{m} + 1\right) \cdots \left(x^2 - 2x\cos\frac{m-2}{m}\pi + 1\right)$$

Ако у једначини 1) № 66 ставимо: $\alpha = \sqrt[m]{a}$, онда једначина 1) изгледа овако:

11.) $$x^m \pm \alpha^m = 0$$

и резултати, до којих смо у овим двема №-ама дошли, вредиће и за ову једначину, ако само свуда сменимо x са $\frac{x}{\alpha}$. Ако то учинимо н. пр. у обрасцима 5), 6), 9) и 10) онда ћемо имати производе за биноме $x^m - a^m$ и $x^m + \alpha^m$. У тим производима место чинилаца $x-1$, $x+1$, $\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{m} + 1\right)$, јавиће се чиниоци.

$$x - \alpha,\quad x + \alpha,\quad x^2 - 2\alpha x\cos\frac{k\pi}{m} + \alpha^2$$

68. При разрешавању једначина:

12.) $$x^m - 1 = 0,\quad x^m + 1 = 0$$

ми смо претпоставили, да су нам познате вредности израза $\sqrt[m]{+1}$ и $\sqrt[m]{-1}$. Али то није било нужно. Јер да бисмо изнашли све корене једначине 12) ставимо:

$$x = k(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

где неодређене количине k и φ треба одредити тако, да овај израз буде корен једначина 12). Ако зарад тога заменимо у првој једначини под 12), x са овим изразом добићемо:

$$k^m\cos m\varphi - 1 + i\,k^m\sin m\varphi = 0.$$

Ова једначина распада се, пошто је k различно од нуле, на ове две

$$k^m\cos m\varphi - 1 = 0,\quad \sin m\varphi = 0.$$

Из прве једначине следује $m\varphi = h\pi$. Али, ако узмемо на ум, да услед прве једначине $\cos m\varphi$ мора бити положан, то ће нам бити јасно, да $m\varphi$ мора изнети само паран број полупериферија (π). Дакле је на тај начин $m\varphi = 2r\pi$, али је онда услед прве од последњих једначина $k = 1$.

Дакле је:

$$x = \cos\frac{2r\pi}{m} + i\sin\frac{2r\pi}{m}$$

И овај образац даје све корене једначине: $x^m - 1 = 0$, кад у њему стављамо редом:

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ (m-1).$$

На сличан начин може се радити и са једначином: $x^m + 1 = 0$.

И овде ћемо најзад приметити још и то, да два и два спрегнута корена једначине $x^m \pm 1 = 0$ стоје у реципрочном односу. Јер:

$$\cos\frac{2r\pi}{m} + i\sin\frac{2r\pi}{m},\quad \cos\frac{2r\pi}{m} - i\sin\frac{2r\pi}{m}$$

јесу два ма која спрегнута корена једначине: $x^m - 1 = 0$ и производ истих јесте једнак јединици. Исто тако:

$$\cos\frac{2r+1}{m}\pi + i\sin\frac{2r+1}{m}\pi,\ \cos\frac{2r+1}{m}\pi - i\sin\frac{2r+1}{m}\pi$$

јесу два ма која спрегнута корена једначине: $x^m + 1 = 0$, и производ истих јесте једнак јединици.

У осталом истинитост овога, што тврдимо, увиђа се такође лако, ако само напоменемо како једначине:

$$x^m - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^m + 1 = 0$$

јесу рципрочне једначине.

69. *Триномне* — трочлане — једначине, јесу облика:

$$1.) \qquad x^{2m} + px^m + q = 0.$$

Оне се могу увек свести на биномне једначине. Јер, кад једначину 1) решимо као квадратну, добићемо:

$$2.) \qquad x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Ако је сада:

$$\frac{p^2}{4} - q > 0,$$

дакле корени израз у 2) стваран, онда ваља само решити биномну једначину:

$$x^m + \left(\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = 0.$$

Али ако је:

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

дакле корени израз у 2) уображен, а тај случај наступа само онда, кад је $q > 0$, онда треба друкче радити.

У том случају из једначине 2) добијамо:

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

1°. Узмимо најпре нека је $p < 0$. Ако под p сада разумевамо бројну вредност сачинилаца од x у једначини 1.), онда је:

$$x^m = \frac{p}{2}\left\{1 \pm i\,\frac{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{\frac{1}{2}p}\right\}$$

или ако ставимо:

$$3.) \qquad tg\,\varphi = \frac{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{\frac{1}{2}p}$$

добијамо простије:

$$4.) \qquad x^m = \frac{p}{2}\left\{1 \pm i\,tg\,\varphi\right\}$$

Пошто из 3) следује:

$$5.) \qquad \frac{1}{2}p = \cos\varphi\sqrt{q}$$

то онда кад још ставимо: $a^m = \sqrt{q}$, добијамо из 4)

$$x^m = a^m(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$$

А из ове једначине следује:

$$x = a(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{1}{m}}$$

или:

$$x = a\left\{\cos\frac{(\varphi + 2k\pi)}{m} \pm i\sin\frac{(\varphi + 2k\pi)}{m}\right\},$$

и из овог обрасца добијају се за $k = 0, 1, 2, 3 \ldots (m-1)$ сви корени једначине:

$$x^{2m} - px^m + q = 0,$$

или пошто је сада $p = 2a^m \cos\varphi$ и $q = a^{2m}$. корени једначине:

7.) $$x^{2m} - 2a^m\cos\varphi . x^m + a^{2m} = 0.$$

Лако је увидети, да се лева страна ове једначине даје преставити као производ m квадратних чинилаца, који су сви облика:

8.) $$x^2 - 2ax\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{m} + a^2$$

Поједини од тих чинилаца добијају се стављајући овде:

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ (m-1)$$

2° Ако је p у једначини 1) положно, онда узимајући опет на ум једначину 5), добијамо и у овом случају:

$$x^m = -a^m(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

или:

$$x^m = +a^m\left\{\cos(\pi + \varphi) \pm i\sin(\pi + \varphi)\right\}$$

и одавде:

9.) $$x = a\left\{\cos\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{m} \pm i\sin\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{m}\right\}$$

И овде, као и у 1) може се лако доказати, да се лева страна једначине:

$$x^{2m} + 2a^m\cos\varphi . x^m + a^{2m} = 0$$

може преставити као производ корених чинилаца облика:

10.) $$x^2 - 2ax\cos\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{m} + a^2$$

Израз:

$$x^2 - 2ax\cos\alpha + a^2$$

преставља, као што је познато, квадрат стране троугла, којег су остале две стране x и a нагнуте једна ка другој под углом α. Одатле следује, да се горепоменути квадратни чиниоци, којих је у сваком од два случаја 1° и 2° m на броју, могу лако конструјисати. Зарад тога повуцимо једну праву, одређене дужине, која преставља x, а из левог н. пр. краја њеног као средишта опишимо са полупречником a један круг. За тим повуцимо из средишта круга полупречнике, који су нагнути према правој x у првом случају под углима:

$$\frac{\varphi}{m},\quad \frac{\varphi + 2\pi}{m},\quad \frac{\varphi + 4\pi}{m}\ \ldots\ldots\ \frac{\varphi + (m-1)\pi}{m},$$

а у другом случају под углима:

$$\frac{\varphi+\pi}{m}, \quad \frac{\varphi+3\pi}{m}, \quad \frac{\varphi+5\pi}{m} \ldots\ldots \frac{\varphi+(2m-1)\pi}{m}.$$

Тако повучени полупречници биће стране m узастопних троуглова, којима је друга страна вазда x, а треће су им стране праве, које везују крајеве повучених полупречника са десним крајем праве x-а. Пошто сад квадрати тих трећих страна у случају 1° престављају узастопне квадратне чиниоце, тринома 8), а у случају 2° квадратне чиниоце тринома 10), то смемо изрећи као доказану теорему:

Производ квадрата трећих страна свију m троуглова у првом случају 1° јесте једнак бројној вредности тринома

$$x^{2m} - 2a^m \cos\varphi . x^m + a^{2m}$$

а у другом случају једнак бројној вредности тринома:

$$x^{2m} + 2a^m \cos\varphi . x^m + a^{2m}.$$

Ову је теорему *Moivre* доказао. Ако узмемо да је $\varphi = 0$, онда

Производ трећих страна поменутих m троуглова јесте у првом случају једнак биному: $x^m - a^m$ који је корен квадратни из тринома:

$$x^{2m} - 2a^m x^m + a^{2m},$$

а у другом случају једнак је биному $x^m + a^m$, који је корен квадратни из тринома:

$$x^{2m} + 2a^m x^m + a^{2m}$$

Ову теорему, која је особен случај Moivre-ове теореме доказао је Roger Cotes пре Moivre-а.

У случају, кад је дат бином $x^m - a^m$, и m је парно, први и $\left(\frac{m}{2}+1\right)$-ви Cotes-ов троугао прелази у једну праву линију. Кад је дат бином $x^m + a^m$ онда само кад је m непарно прелази $\left(\frac{m+1}{2}\right)$-ви троугао у праву линију.

XII. Особине корена биномних једначина.

70. Сви корени једначине:

1.) $$x^m - 1 = 0$$

добијају се, кад се у обрасцу:

2.) $$x = \cos\frac{2k\pi}{m} + i \sin\frac{2k\pi}{m}$$

k замени вредностима:

$$0, 1, 2, 3. \ldots . (m-1)$$

У № 120 алг. анал. ми смо то доказали, као и то, да за сваку другу вредност од k, која је различна од поменутих m вредности, x добија вредност, која је једнака једној од већ нађених m вредности. Такође смо доказали, да за две вредности од k, којих је збир $= m$, или штоје све једно да за два аргумента, чији је збир $= 2\pi$, x добија две спрегнуте вредности.

Ако опишемо један круг са полупречником јединицом, па га за тим поделимо на m једнаких делова, онда узастопни корени једначине 1), означимо их са x_0, x_1, x_2, ... x_m, преставлени су узастопним подеоним тачкама.

1°. Ако вредностима, које x добија за $k = a$ и $k = b$ означимо са x_a и x_b, онда је по обрасцу 2)

$$x_a = cos\frac{2a\pi}{m} + i\, sin\frac{2a\pi}{m}$$

$$x_b = cos\frac{2b\pi}{m} + i\, sin\frac{2b\pi}{m}$$

Кад ове две једначине, помножимо, добићемо:

$$x_a\, x_b = cos\frac{2\,(a+b)\,\pi}{m} + i\, sin\frac{2\,(a+b)\,\pi}{m}$$

а то је вредност, коју x добија, кад се у 2) стави $k=a+b$. Дакле је та вредност, коју ћемо означити са x_{a+b} један корен једначине 1) и ми имамо:

$$x_a\, x_b = x_{a+b}$$

т. ј.

Производ двају корена једначине 1) *јесте корен исте једначине.*

На сличан начин доказује се и:

Количник двају корена једначине 1) *јесте корен исте једначине.*

Степени корена једначине 1) *јесу опет корени њени.*

Тако је на пример:

$$(x_a)^r = x_{ra}.$$

2°. У № 116 алг. анал. ми смо већ доказали, да ако су a и m *односно прости* бројеви, т. ј. такви, који сем јединице немају никаквог заједничког делиоца, да велим онда остатци, које добијамо делећи бројеве:

$$0a,\ 1a,\ 2a,\ 3a,\ .\ .\ .\ (m-1)a$$

са бројем m, морају бити сви међу собом различни и да сваки од тих m остатака мора бити једнак једном од бројева:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ .\ (m-1).$$

Поделимо као и горе круг на m једнаких делова, па онда обилазећи круг у једном и истом смислу вежимо буди коју подеону тачку A са a-ом испред ње, a-ту са оном која је $2a$-та испред A, $2a$-ту са оном, која је $3a$-та пред A и т. д. тако, да су бројеви тачака, које на тај начин узастопце прелазимо узастопне множине броја a. Ако је 1 казаљка прве подеоне тачке испред A, тада, да бисмо добили казаљке подеоних тачака, код којих при том везивању тачака узастопце застајемо, одбићемо од бројева тачака, које узастопце прелазимо, множине броја m. На тај начин казаљке тачака, код којих поступно застајемо, јесу остатци, које добијамо, делећи са m узастопне множине броја a. Према томе, ако су a и m односно прости бројеви, пре него што се могнемо вратити полазној тачци A, мораћемо застати код сваке подеоне тачке и на тај начин добићемо један правилни *звездасти* полигон.

Узмимо сада корен:

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m},$$

који из обрасца 2) добијамо за $k = 1$. Кад погледамо на образац 2), увидећемо да су корени $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$ којих је m на броју, редом једнаки члановима геометријске постепености:

$$x_1^0,\ x_1^1,\ x_1^2,\ x_1^3,\ \ldots\ x_1^{m-1}$$

Овај низ корена одговара обичном правилном полигону од m страна. Узастопна темена тога полигона претстављају редом те корене.

Узмимо сада корен:

$$x_a = \cos\frac{2a\pi}{m} + i\sin\frac{2a\pi}{m}$$

који из обрасца 2 добијамо за $k = a$. Ми претпостављамо, да су a и m односно прости бројеви. Узастопни степени корена x_a:

$$x_a^0,\ x_a^1,\ x_a^2\ \ldots\ x_a^{m-1}$$

једнаки су (1^0) вредностима:

$$x_0,\ x_a,\ x_{2a},\ x_{3a}\ \ldots\ x_{(m-1)a}.$$

Тачке круга, које овим вредностима одговарају, јесу узастопна темена *звездастог* полигона од m страна, који постаје, кад се једна ма која подеона тачка A веже са a-ом после ње, ова са $2a$-ом и т. д. Из овог следује јасно, да у последњих m бројева имамо свих m међу собом различних корена једначине 1).

И тако сад имамо теорему:

Ако су a *и* m *односно прости бројеви, онда подижући корен x_a на степене* 0-ти, 1-ви, 2-ги . . . $(m-1)$-ви *добијамо све међу собом различне корене једначине* 1).

3^0. *Али ако* a *и* m *нису односно прости бројеви, и ако им је* c *заједнички делилац, онда узастопни степени корена x_a не дају све корене једначине* 1) *него само онолико, колико јединица има у* $\frac{m}{c}$. *Јер ако узмемо да је:*

$$m = cm^1,\ a = ca^1$$

имаћемо

$$x_a = \cos\frac{2a\pi}{m} + i\sin\frac{2a\pi}{m} = \cos\frac{2a^1\pi}{m^1} + i\sin\frac{2a^1\pi}{m^1}$$

одакле видимо, да је x_a корен и једначине $x^{m^1} - 1 = 0$. Па како су a^1 и m^1 односно прости бројеви, то онда узастопни степени корена x_a дају свих m^1 корена последње једначине и никоје друге. Ти су корени у исти мах и корени једначине 1).

Корени једначине 1), којих узастопни степени дају све корене њене, зову се *примитивни* корени исте једначине. Из до сада реченога лако је увидети *да једначина* 1) *мора имати само онолико примитивних корена, колико има бројева мањих од* m, *који* су такови, да са m сем јединице немају никаквог другог заједничког делиоца.

Такође је лако увидети *прво: да сваки корен једначине* 1), *који није примитивни корен њен, јесте примитивни корен биномне једначине нижег степена* $x^{m^1} - 1 = 0$, *где је* m^1 *делилац изложиоца* m.

Друго, да примитивни корени једначине 1) *не могу бити корени никоје једначине, која би била нижег степена.* И *треће, да, ако је* m *прост број т. ј. такав, да сем јединицом и самим собом није дељив са никојим другим бројем, да онда сви корени дане једначине, сем јединице, јесу примитивни.*

71. У овој №-и остаје нам да докажемо још неколико особина корена биномне једначине.

1°. Ми смо видели, да ако је x_a примитиван корен једначине 1), да су онда:

$$x_a^0,\ x_a^1,\ x_a^2\ \dots\ x_a^{m-1}$$

сви корени њени. Ако сваки од њих подигнемо на n-ти степен, добићемо геометријску постепеност:

$$x_a^0,\ x_a^n,\ x_a^{2n}\ \dots\ x_a^{(m-1)n}$$

Збир те геометријске постепености јесте:

$$S_n = \frac{x_a^{mn} - x_a^0}{x_a^n - 1}$$

Пошто је x_a корен једначине $x^m - 1 = 0$, то је $x_a^m = 1$, па дакле и $x_a^{mn} = 1$. Дакле је и $S_n = 0$. Али ако је n множина m-а, онда је сваки члан постепености $= 1$ па дакле је и $S_n = m$. И тако стоји.

Збир једноимених степена биномне једначине 1) *јесте једнак* 0, *осим у случају, кад је изложилац степена множина од* m, *јер тада је тај збир* $= \mathrm{m}$. Ово се у осталом дознаје лако и помоћу Њутновог обрасца у № 30.

2°. Корени једначине $x^m - 1 = 0$ добијају се из обрасца:

$$x = \cos\frac{2k\pi}{m} + i \sin\frac{2k\pi}{m}$$

за $k = 0, 1, 2, \dots (m-1)$. Корени једначине $x^n - 1 = 0$ добијају се опет из обрасца

$$x = \cos\frac{2k'\pi}{n} + i \sin\frac{2k'\pi}{n},$$

за $k = 0, 1, 2 \dots (n-1)$. Ако су m и n односно прости бројеви, онда поменуте две биномне једначине немају осем јединице никаквих других заједничких корена. Јер да два корена тих једначина буду једнаки, треба да је:

$$\frac{2k\pi}{m} = \frac{2k'\pi}{n} \quad \text{или} \quad \frac{k}{m} = \frac{k'}{n} \quad \text{или} \quad kn = k'm$$

дакле, пошто је производ kn дељив са m, и пошто су даље m и n односно прости бројеви, требало би, да је k дељиво са m, али то није могуће, јер је $k < m$.

Узмимо сада да m и n имају c као највећег заједничког делиоца, дакле $m = cm'$, $n = cn'$.

Заједничке корене добићемо помоћу оних вредности за k и k' за које је $\frac{k}{m} = \frac{k'}{n}$ или $kn = k'm$. Одатле изводимо да k и k' морају бити облика $k = m't$ и $k' = n't$. Али се тада једнаки аргументи своде на $\frac{2t\pi}{c}$, одакле видимо, да заједнички корени једначина јесу корени једначине $x^c - 1 = 0$, и добијају се кад се у обрасцу

$$x = \cos\frac{2t\pi}{c} + i \sin\frac{2t\pi}{c}$$

стави редом:

$$t = 0, 1, 2, \dots (c-1).$$

Дакле: *Заједнички корени једначина* $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$ *јесу корени једначине* $x^c - 1 = 0$, *где је* $\mathbf{c}$ *највећи заједнички чинилац изложилаца* m *и* n.

Лако је доказати, да *ако су* m *и* n *односно прости бројеви, да велим онда добијамо све корене једначине:* $x^{mn} - 1 = 0$ *множећи сваки корен једначине* $x^m - 1 = 0$ *са сваким кореном* $x^n - 1 = 0$.

Јер ако узмемо да је k један ма који од бројева $0, 1, 2, 3 \ldots (m-1)$, а тако исто и k' један ма који од бројева $0, 1, 2, 3 \ldots (n-1)$, онда аргуменат производа оних корена, који одговарају бројевима k и k' биће:

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{2k'\pi}{n} = \frac{2(kn+k'm)\pi}{m\,n}$$

Одавде се већ види јасно, да је производ корен једначине $x^{mn} - 1 = 0$. Само остаје још да се докаже, да су сви производи, којих је mn на броју, међу собом различити. Узмимо зарад тога, да су k_1 и k_1' друга два броја, узета из горе поменута два низа бројева. Аргуменат производа она два корена, који одговарају новим бројевима k_1 и k_1' јесте:

$$\frac{2(k_1 n + k_1' m)\pi}{m\,n}$$

и тај нови производ јесте, као што се види, опет корен једначине $x^{mn} - 1 = 0$. Овај други корен различан је од оног првог, јер да они буду једнаки, треба да је разлика њихових аргумената:

$$\frac{2(kn + k'm)\pi}{m\,n} - \frac{2(k_1 n + k_1' m)\pi}{m\,n} = 2h\pi$$

где је h ма какв цео број. Но одавде следује:

$$(k-k_1)\,n + (k'-k_1')\,m = hmn$$

Пошто су десна страна и други члан леве стране дељиви са m, треба да је и први члан леве стране дељив са m, а то не може бити, јер су m и n односно прости бројеви, а $(k-k_1) < m$. Дакле су сви производи различни и они су корени једначине $x^{mn} - 1 = 0$.

4°. Најзад лако је доказати теорему:

Кад су m *и* n *односно прости бројеви, онда све* **примитивне** *корене једначине* $x^{mn} - 1 = 0$, *добијамо множећи сваки примитивни корен прве од двеју једначина*

$$x^m - 1 = 0, \qquad x^n - 1 = 0$$

са сваким примитивним кореном друге.

Јер нека су k и m односно прости бројеви, а тако исто k' и n. Онда вредности k одговара један примитивни корен прве једначине. Исто тако броју k' одговара један примитивни корен друге једначине. Производ тих двају корена јесте

$$\cos\frac{2\,(kn + k'm)\,\pi}{mn} + i\,\sin\frac{2\,(kn + k'm)\,\pi}{mn}$$

и он је очевидно један корен једначине $x^{mn} - 1 = 0$. И да је тај корен прост, биће доказано, ако само докажемо да су изрази:

$$(kn + k'm) \quad \text{и} \quad mn$$

односно прости бројеви. А то и јесте. Јер кад би ова два израза имали заједничког делиоца c онда, пошто c дели други израз то би оно морало делити m или n. Узмимо да оно дели m. Пошто сад c дели други израз и други сабирак првог израза оно би морало делити и kn, а то не може бити јер су k, m и n по претпоставци односно прости бројеви. Дакле је доиста горњи производ примитивни корен једначине $x^{mn} - 1 = 0$.

Ако k и m или k' и n нису односно прости бројеви онда је то случај и са:

$$kn + k'm \quad \text{и} \quad nm$$

и онда дакле горњи производ није примитивни корен једначине $x^{mn} - 1 = 0$.

72. Последње две теореме у № 71 важне су за то, што се помоћу њих разрешавање једначине:

$$1.) \qquad x^{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \cdots} - 1 = 0$$

где су a, b, c, ... прости и међу собом различни бројеви, своди на разрешавање једначина:

$$x^{a^{\alpha}} - 1 = 0, \quad x^{b^{\beta}} - 1 = 0, \quad x^{c^{\gamma}} - 1 = 0 \ . \ . \ .$$

које су од њих простије. Јер ако изнађемо по један примитивни корен за сваку од њих онда производ тих примитивних корена биће један примитивни корен једначине 1). И тај примитивни корен њен подигнут на узастопне степене 0-ни, 1-ви, 2-ги . . . даће све корене њене.

Ми смо у №-и 70 дознали, да корени задате биномне једначине, који нису примитивни корени њени, јесу корени друге које биномне једначине, која је таква да је изложилац њеног степена делилац изложиоцу степена задате једначине. Тако они корени једначине:

$$2.) \qquad x^{a^{\alpha}} - 1 = 0$$

који нису примитивни, јесу корени једначине:

$$x^{a^{\alpha-1}} - 1 = 0$$

Пошто смо такође доказали, да примитивни корени биномне једначине не могу бити корени биномне једначине, чији је степен нижи од њеног, то је јасно, да је број примитивних корена једначине 2) једнак:

$$a^{\alpha} - a^{\alpha-1} = a^{\alpha-1}(a-1)$$

Исто тако бројеви примитивних корена једначина

$$x^{b^{\beta}} - 1 = 0, \qquad x^{c^{\gamma}} - 1 = 0 \ . \ . \ .$$

јесу односно једнаки:

$$b^{\beta-1}(b-1), \qquad c^{\gamma-1}(c-1) \ . \ . \ . \ .$$

Из свега тога следује, да горња једначина 1) има примитивних корена на броју свега:

$$a^{\alpha-1}\, b^{\beta-1}\, c^{\gamma-1} \ . \ . \ . \ \times (a-1)(b-1)(c-1) \ldots$$

Ако је сад:

$$m = a^{\alpha}\ {}^{\beta}\, c^{\gamma} \ . \ . \ . \ .$$

онда образац :

$$N = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\ldots.$$

показује, колико има бројева мањих од m, који са њим немају никаквог заједничког делиоца, сем јединице.

Правилни полигони.

73. Кад један круг, чији полупречник сматрамо као јединицу, поделимо на m једнаких делова и за тим вежемо буди коју подеону тачку са n-ом испред ње, ову последњу опет са n-ом испред ње и т. д. док се најзад не вратимо полазној тачки, онда добијамо, као што смо то већ видели. један правилан полигон од m страна. Кад су m и n односно прости бројеви, онда је то исто случај и са m и $m - n$. Кад сад буди коју тачку вежемо са $(m-n)$-ом после ње, ову опет са $(m-n)$-ом после ње и т. д. добићемо очевидно исти полигон од m страна, само што ће се стране тога полигона добијати обрнутим редом. Одатле следује (№ 72) да је број правилних полигона од m страна $= \frac{1}{2} N$, ако број N показује, колико има бројева мањих од m, који су са m односно прости.

Према томе можни су: само један равнострани троугао, и правилни шестоугаоник; петоугла пак има два, обични, који постаје, кад се свака од подеоних тачака веже са оном, која непосредно следује, или, што је све једно, кад се свака подеона тачка веже са четвртом од ње, и звездасти петоугаоник, који постаје, кад се свака подеона тачка веже са другом, или пак трећом после ње. Правилних седмоугаоника има три, обични, који постаје,

кад се свака од 7 подеоних тачака веже са оном, која непосредно следује или са оном, која је 6-та од ње, и два звездаста. Један од ових постаје, кад се свака подеона тачка веже са другом од ње, или са петом од ње, и други који постаје, кад се свака подеона тачка веже са трећом од ње или са четвртом од ње. Исто тако има и три деветоугаоника, један обичан и два звездаста; само два десетоугаоника, један обичан и један звездаст.

Правилна подела круга на једнаке делове, као и израчунавање страна правилних полигона стоје у присној вези са разрешавањем биномне једначине:

$$x^m - 1 = 0$$

Јер ако су m и n односно прости, и ако означимо са u_n страну полигона, која постаје, кад се свака подеона тачка веже с оном, која за њом долази као n-та, онда је:

$$1.)\qquad u_n = 2\sin\frac{n\pi}{m} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1 - \cos\frac{2n\pi}{m}\right\}}$$

или:

$$2.)\qquad u_n = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2n\pi}{m}}$$

Али је $\cos\frac{2n\pi}{m}$ стваран део у изразу примитивног корена x_n. Према томе, кад смо једном израчунали примитивне корене биномне једначине, можемо лако наћи и стране правилних полигона. Но може се у приликама и простије радити. Јер ако је m непарно, а n парно и $= 2n'$ онда је:

$$\sin\frac{n\pi}{m} = \sin\frac{2n'\pi}{m}$$

сачинилац од i у изразу примитивног корена $x_{n'}$; ако ли је пак n непарно, дакле $m-n$ парно, онда ће се узети:

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{m}.$$

Има биномних једначина, које се без помоћи тригонометријских функција дају алгебарски разрешити. Упоређујући вредности корена нађене на овај последњи начин са оним, које су нађене помоћу обрасца:

$$3.)\qquad x = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$$

добијамо тада вредности за синусе и косинусе извесних лукова или стране извесних правилних полигона.

74. У овој №-и бавићемо се равностраним троуглом, правилним шестоугаоником, петоугаоником и десетоугаоником.

1°. Изналажај страна равностраног троугла и правилног шестоугаоника зависи од биномне једначине:

$$1.)\qquad x^3 - 1 = 0$$

Ову је једначину алгебарски лако решити. Један корен њен јесте јединица, а остала 2 корена њена јесу корени квадратне једначине:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

чија је лева страна количник, који се добија кад се x^3-1 подели са $x-1$. Корени једначине 1) јесу:

$$1,\quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

а вредности тих истих корена нађених тригонометријским путем, помоћу обрасца 3) у №-и 73, јесу:

$$1,\quad \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

Из упоређаја ових вредности са оним више њих добијамо:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},\qquad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

а одатле, пошто су $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$ суплементи, а $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$ комплементи:

$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\qquad \cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Као што смо видели, има само један правилан шестоугаоник и један равностран троугао.

Страна шестоугаоника (№ 73) јесте:

$$2\sin\frac{\pi}{6} = 1,$$

а страна равностраног троугла

$$2\, sin\, \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

2°. Изналажај страна правилног петоугаоника и десетоугаоника зависи од биномне једначине:

$$1.) \qquad x^5 - 1 = 0$$

Један корен њен јесте $= 1$. Кад леву страну поделимо са $x-1$ и количник $= 0$ ставимо, добијамо реципрочну једначину:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Кад је израчунамо, добићемо:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_2 = -\frac{(\sqrt{5}+1)}{4} + i\, \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x_3 = -\frac{(\sqrt{5}+1)}{4} - i\, \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Ово су четири примитивна корена задане једначине 1). Из упоређаја ових вредности са вредностима истих корена, нађених помоћу образаца 3) у № 73 добијамо:

$$cos\, \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \qquad sin\, \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$cos\, \frac{4\pi}{5} = -\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}, \qquad sin\, \frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

И помоћу ових образаца налазимо стране правилних петоугаоника и десетоугаоника.

Страна обичног петоугаоника (№ 73) јесте:

$$2\, sin\, \frac{\pi}{5} = 2\, sin\, \frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

Страна звездастог петоугаоника јесте:

$$2\, sin\, \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$

Исто тако страна обичног десетоугаоника:

$$2\, sin\, \frac{3\pi}{10} = 2\, cos\, \frac{\pi}{5} = -2\, cos\, \frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

75. У овој нумери бавићемо се са правилним петнајстоугаоником (pentidecagone).

Правилних петнајстоугаоника има (№ 73) свега 4. Један је обичан а остала четири јесу звездати, и добијамо их, кад сваку од 15 подеоних тачака вежемо са сваком другом, или са сваком четвртом или са сваком седмом после ње.

Изналажај страна ових полигона зависи од разрешаја једначине:

1.) $$x^{15}-1=0$$

Корени ове једначине добијају се (№ 73, 3°), кад сваки корен прве од ових двеју једначина:

2.) $$x^{5}-1=0 \quad \text{и} \quad x^{3}-1=0$$

помножимо са сваким кореном друге. Исто тако свих 8 примитивних корена једначине 1) добићемо, ако (№ 71, 4) сваки од четири примитивна корена прве једначине под два помножимо са сваким од два примитивна корена друге једначине под 2). Кад упоредимо вредности тих осам примитивних корена са онима, које добијамо помоћу обрасца у 73, добићемо:

$$\cos\frac{2\pi}{15} \pm i\sin\frac{2\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1+\sqrt{5}+\sqrt{3\,(10-2\sqrt{5})}\right] \pm$$

$$\pm \frac{i}{8}\left[\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$$

$$\cos\frac{4\pi}{15} \pm i\sin\frac{4\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1-\sqrt{5}+\sqrt{3\,(10+2\sqrt{5})}\right] \pm$$

$$\pm \frac{i}{8}\left[\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]$$

$$\cos\frac{8\pi}{15} \pm i\sin\frac{8\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1+\sqrt{5}-\sqrt{3\,(10-2\sqrt{5})}\right] \pm$$

$$\pm \frac{i}{8}\left[\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$$

$$\cos\frac{14\pi}{15} \pm i\sin\frac{14\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1+\sqrt{5}+\sqrt{3\,(10+2\sqrt{5})}\right] \pm$$

$$\pm \frac{i}{8}\left[\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]$$

И одавде добијамо лако (№ 73) као стране горе поменута четири 15-угаоника:

$$s_1 = 2\sin\frac{\pi}{15} = 2\sin\frac{14\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]$$

$$s_2 = 2\sin\frac{2\pi}{15} = 2\sin\frac{13\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$$

$$s_3 = 2\,sin\,\frac{4\pi}{15} = 2\,sin\,\frac{11\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right]$$

$$s_4 = 2\,sin\,\frac{7\pi}{15} = 2\,sin\,\frac{8\pi}{15} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right]$$

Ако желимо имати једначину којој су корени само 8 примитивних корена једначине 1), треба нам само (№ 70, 3) из једначине 1) истиснути 5 корена једначине:

$$x^5 - 1 = 0$$

делећи леву страну једначине 1) с левом страном ове једначине, па ћемо добити:

2.) $$x^{10} + x^5 + 1 = 0$$

И сад нам још остаје да одавде истиснемо два уображена корена једначине:

$$x^3 - 1 = 0$$

делећи са $x^2 + x + 1$ леву страну једначине 2). На тај начин добићемо реципрочну једначину

$$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

из које за: $x + \frac{1}{x} = z$

следује:

$$z^4 - z^3 - 4z^2 + 4z + 1 = 0$$

Одавде добијамо једначину, којој су корени стране горе поменута четири петнајстоугаоника, кад ставимо (№ 73, обр. 2)

$$z = 2 - y^2$$

На тај начин налазимо:

$$y^8 - 7y^6 + 14y^4 - 8y^2 + 1 = 0$$

76. У овој №-и још ћемо да покажемо начин израчунавања стране 17-тоугаоника. Одредба истих зависи од разрешаја биномне једначине:

1.) $$x^{17} - 1 = 0$$

Пошто је изложилац 17 непаран број, то су сви корени ове једначине сем јединице примитивни (№ 70, 3°) и за то треба умети наћи само један од њих.

Што се тиче броја правилних 17-тоугаоника, њих свега има 8, један обичан, а седам звездастих.

Ако ставимо:

2.) $$\alpha = cos\,\frac{2\pi}{17} + i\,sin\,\frac{2\pi}{17}$$

онда сви корени једначине 1) сем јединице:

$$x_1,\ x_2,\ x_3\ .\ .\ .\ .\ x_{16}$$

добијају се, кад се α подигне на први, други ... 16-ти закључно степен.

Кад леву страну једначине 1) поделимо са кореним чиниоцем $(x-1)$ и за тим количник $=0$ ставимо, добићемо једначину:

$$3.)\qquad x^{16}+x^{15}+\ .\ .\ .\ +x^2+x+1=0.$$

Разрешењем ове једначине добијамо такође свих 16 од јединице различних корена једначине 1), које добијамо на горе поменути начин и из тригонометријског обрасца 2).

Из ове реципрочне једначине следује за

$$4.)\qquad x+\frac{1}{x}=u$$

једначина, која је односно u осмога степена (№ 65). Нека је та једначина:

$$5.)\qquad f(u)=0$$

Лева страна њена јесте цела и рационална функција од u. Кад смо корене ове једначине т. ј:

$$u_1,\ u_2,\ u_3\ .\ .\ .\ u_8$$

израчунали, онда помоћу обрасца:

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{u^2}{4}-1}$$

налазимо и све корене једначине 3), који су корени у исти мах и корени једначине 1). Ако је k један од бројева: 1, 2, 3 . . . 8, онда је:

$$6.)\qquad u_k=x_k+\frac{1}{x_k}=\alpha^k+\frac{1}{\alpha^k}=2\cos\frac{2k\pi}{17}$$

одакле следује, да су сви корени једначине 5) стварни. Од тих корена довољно ће нам бити да знамо само један према ономе, што горе споменусмо. Ако је један од њих нађен н. пр. u_1, онда се α_1 израчунава из обрасца:

$$7.)\qquad \alpha_1=x_1=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{u_1^2}{4}-1}$$

Кад сваки од осам корена:

$$u_1,\ u_2,\ u_3\ .\ .\ .\ u_8$$

једначине 5) помножимо са сваким доцнијим и при том множењу будемо пазили на образац 6) добићемо ових 28 једначина:

$$\begin{array}{lll}
u_1u_2=u_1+u_3 & u_2u_3=u_1+u_5 & u_4u_5=u_1+u_8\\
u_1u_3=u_2+u_4 & u_2u_4=u_2+u_6 & u_4u_6=u_2+u_7\\
u_1u_4=u_3+u_5 & u_2u_5=u_3+u_7 & u_4u_7=u_3+u_8\\
u_1u_5=u_4+u_6 & u_2u_6=u_4+u_8 & u_4u_8=u_4+u_5\\
u_1u_6=u_5+u_7 & u_2u_7=u_5+u_8 & u_5u_6=u_1+u_6\\
u_1u_7=u_6+u_8 & u_2u_8=u_6+u_7 & u_5u_7=u_2+u_5\\
u_1u_8=u_7+u_8 & u_3u_4=u_1+u_7 & u_5u_8=u_3+u_4\\
 & u_3u_5=u_2+u_8 & u_6u_7=u_1+u_4\\
 & u_3u_6=u_3+u_8 & u_6u_8=u_2+u_3\\
 & u_3u_7=u_4+u_7 & u_7u_8=u_1+u_2\\
 & u_3u_8=u_5+u_6 &
\end{array}$$

Ових 28 једначина можемо сад распоредити по групама тако, да су казаљке десно од знака једнакости у ма којој од њих једнаке казаљкама лево од знака једнакости у једначини, која одмах за њом долази. На тај начин добијамо три групе сваку са по 8 једначина и једну групу са 4 једначине. У последњој једначини сваке групе казаљке десно од знака једнакости исте су са казаљкама лево од знака једнакости у првој једначини.

Ми ћемо узети да проматрамо само ону групу, у којој су четири једначине, а то је:

9.)
$$u_1 u_4 = u_3 + u_5$$
$$u_3 u_5 = u_2 + u_8$$
$$u_2 u_8 = u_6 + u_7$$
$$u_6 u_7 = u_1 + u_4$$

Сада ћемо ставити:

10.)
$$u_1 u_4 = z_1,$$
$$u_3 u_5 = z_2,$$
$$u_2 u_8 = z_3,$$
$$u_6 u_7 = z_4,$$

и сад из једначина 9) следује:

11.)
$$u_1 + u_4 = z_4 \quad u_1 u_4 = z_1$$
$$u_6 + u_7 = z_3 \quad u_6 u_7 = z_4$$
$$u_2 + u_8 = z_2 \quad u_2 u_8 = z_3$$
$$u_3 + u_5 = z_1 \quad u_3 u_5 = z_2$$

Ако смо сад у стању израчунати вредности непознатих z_1, z_2, z_3 и z_4 онда помоћу ових осам једначина добијамо лако и вредности за поједина u, која нам представљају непознате корене једначине 5). Тако н. пр. из прве једначине под 11) видимо, да су вредности непознатих u_1 и u_4 корени једне квадратне једначине. Кад исту решимо, наћићемо да је:

12.)
$$u_1 = \frac{1}{2} z_4 + \sqrt{\frac{1}{4} z_4^2 - z_1}$$
$$u_4 = \frac{1}{2} z_4 - \sqrt{\frac{1}{4} z_4^2 - z_2}$$

Да су овде знаци у вредностима од u_1 и u_4 добро узети увиђа се из једначине 6).

Сад можемо сваку од количина z_1, z_2, z_3, z_4 помножити са сваком од оних, које за њом долазе и на тај начин добићемо шест нових образаца, којих леве стране можемо помоћу образаца 11) и 8) развити. За нас су од тих 6) образаца важна ова два:

$$z_1 z_3 = u_3 + u_8 + u_4 + u_7 + u_1 + u_6 + u_2 + u_5$$
$$z_2 z_4 = u_1 + u_3 + u_7 + u_8 + u_2 + u_6 + u_4 + u_5$$

Десне стране ових једначина јесу истоветне.

Кад се погледа на једначину 6), онда је лако увидети, да је лева страна ових једначина једнака збиру свију корена једначине 3) и због тога $= -1$ (№ 6). И тако сад имамо:

$$z_1 z_3 = -1, \quad z_2 z_4 = -1.$$

Помоћу једначина 11) налазимо:

$$z_1 + z_3 = u_3 + u_5 + u_6 + u_7$$

$$z_2 + z_4 = u_1 + u_2 + u_4 + u_8$$

Ако десне стране ових једначина означимо са y_1 и y_2 добићемо:

13.) $$y_1 = u_3 + u_5 + u_6 + u_7$$

$$y_2 = u_1 + u_2 + u_4 + u_8$$

дакле:

$$z_1 + z_3 = y_1 , \quad z_1 z_3 = -1$$

$$z_2 + z_4 = y_2 , \quad z_2 z_4 = -1$$

Кад бисмо могли непознате y_1 и y_2 израчунати, ми бисмо онда помоћу ових једначина лако нашли и непознате z_1, z_3 и z_2, z_4. Тако бисмо н. пр. нашли:

14.) $$\begin{cases} z_1 = \dfrac{y_1}{2} + \sqrt{\dfrac{y^2}{4} + 1} \\ z_2 = \dfrac{y_2}{2} - \sqrt{\dfrac{y^2}{4} + 1} \end{cases}$$

Да бисмо сад y_1 и y_2 израчунали, саберимо најпре а за тим помножимо једначине 13) па ће изаћи:

15.) $$y_1 + y_2 = -1 , \quad y_1 y_2 = -4$$

Дакле су y_1 и y_2 корени квадратне једначине. Разрешајем исте налазимо:

16.) $$y_1 = -\frac{(1 + \sqrt{17})}{2}$$

$$y_2 = -\frac{(1 - \sqrt{17})}{2}$$

И тако помоћу једначина 16), 14), 12) и 7) добијамо један корен $x_1 = \alpha$ једначине 1), из којег се остали на познати начин налазе. Да су знаци у 14) и 16) добро узети, нека се подруди читалац да сазна сам.

Добар

XIII. Бројне једначине.

77. Једначина облика:

1.) $$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

зове се бројном — нумеричном — кад су сачиниоци a истински бројеви. Разрешавање бројних једначина битно је различно од разрешавања општих једначина. При разрешавању општих једначина траже се обрасци, у којима је исказан закон, како буди који корен једначине зависи од њених сачинилаца и такав један образац, кад је једном нађен мора дати све корене једначине просто за то, што се не може наћи разлога, за што би нам тај образац дао један корен једначине пре него ли ма који други. Корени бројних једначина јесу извесни стварни или уображени бројеви, који се сваки посебице независно од осталих израчунавају. Зарад тога нужно је пронаћи границе сваком појединои корену, то ће рећи два броја, између којих се он и само он један налази. Методе згодне за тај посао ми ћемо мало доцније изложити.

Ми ћемо од сада претпостављати, да су сачиниоци a стварни бројеви; противни случај ми ћемо изреком напоменути.

Исто тако слободно нам је претпоставити, да су сачиниоци a рационални бројеви, јер ако су неки од њих ирационални, ми их можемо заменути рационалним разломцима, који се од њих за ма колико мало разликују. Кад су пак сви сачиниоци једначине рационални, онда смо у стању помоћу преображаја у № 17 и следећим преставити једначину у облику једначине 1) тако, да су сви сачиниоци цели бројеви сем првог, који је једнак јединици.

Ако узмемо, да је једначина 1) *онаква, како мало час казасмо, онда је лако доказати, да стварни корени њени морају бити цели или ирационални бројеви, а никако рационални разломци.*

Јер кад би $x = \frac{p}{q}$, где су p и q цели и односно прости бројеви, био корен једначине:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ . \ . \ . + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

онда би морала вредсти једначина:

$$\frac{p^m}{q^m} + a_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + a_2 \frac{p^{m-2}}{q^{m-2}} + \ldots + a_{m-1} \frac{p}{q} + a_m = 0$$

или, по умножају са q^{m-1}, једначина

$$\frac{p^m}{q} + a_1 p^{m-1} + a_2 p^{m-2} q + a_3 p^{m-3} q^2 + \ldots + a_{m-1} p q^{m-2} +$$
$$+ a_m q^{m-1} = 0$$

а то не може бити, јер збир из једног разломка и целог броја никад не може бити $= 0$.

78. *Ако полином* $f(x)$ *задате једначине добија за* $x = a$ *и* $x = b$ *две противно означене вредности н. пр.* $f(a) = + A$, *и* $f(b) = - B$, *онда између* a *и* b *мора се налазити бар један корен једначине, или може их бити и више, али број истих мора бити непаран.*

Јер пошто је $f(x)$ као цела и рационална, функција непрекидна од $x = - \infty$, до $x = + \infty$, то се она при непрекидном мењању x-а мора и сама непрекидно мењати од прве своје вредности $f(x) = + A$ до последње $f(b) = - B$, дакле она не може прескочити ни једну вредност, која лежи између тих крајњих вредности њених. Између тих крајњих вредности њених, пошто су оне противно означене, лежи и нула. Она вредност x-а, за коју је $f(x) = 0$, јесте корен једначине. Дакле доиста између $x=a$ и $x=b$ лежи барем један корен једначине $f(x) = 0$. Али их може бити и више као што рекосмо горе, и тада је број истих непаран. И доиста може се н. пр. десити, да се $f(x)$ од прве своје вредности $f(a) = + A$ овако мења. Она постепено добија све мање и мање вредности, постаје $= 0$, па онда добија одречне вредности, донекле све веће и веће, а после све мање и мање; за тим постаје опет $= 0$, па онда добија донекле све веће, па за тим све мање положне вредности, постаје трећи пут равна нули, па онда добија све веће одречне вредности до $- B$ закључно. Дакле у том случају има једначина три корена између $x = a$ и $x = b$; и тако даље.

Ако ли $f(x) = 0$ за $x = a$ и $x = b$ добија две једнако означене вредности, н. пр. $f(a) = +A$, а $f(b) = +B$, онда се на начин са свим сличан овоме може доказати, да $f(x)$ при свом непрекидном мењању од прве па до последње вредности своје или никако не постаје $=$ нули, у ком случају између a и b нема ниједног корена, или пак при том $f(x)$ постаје парни број пута $= 0$, у ком случају између a и b има паран број корена.

У осталом може се ово на овај још увиђавнији начин доказати:

Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_r$ корени једначине, који леже између a и b, и од којих неки могу бити и једнаки међу собом. Тада можемо ставити:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_r)\,\varphi(x)$$

где је $\varphi(x)$ количник, који се добија, кад се $f(x)$ подели са производом корених чинилаца, који постају из корена $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_r$. Количине $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ јесу једнаког знака, јер у противном случају а услед непрекидности функције $f(x)$, па дакле и функције $\varphi(x)$ морало би $\varphi(x)$ бити равно нули за једну вредност $x = \alpha_{r+1}$, која лежи између a и b, дакле би се противно претпоставци још и корен α_{r+1} осим корена $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ налазио између a и b. Ако сад за $x = a$ и $x = b$ $f(x)$ добије противно означене вредности, онда пошто су $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ једнако означене, морају производи:

$$(a-\alpha_1)(a-\alpha_2)(a-\alpha_3)\ldots(a-\alpha_r)$$

$$(b-\alpha_1)(b-\alpha_2)(b-\alpha_3)\ldots(b-\alpha_r)$$

бити противно означени, па како су сви чиниоци првог производа одречни, ако узмемо да је $a < b$, што је допуштено, док су међу тим сви чиниоци другог производа положни, то онда број тих чинилаца мора бити непаран, дакле и број корена $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_r$, што су између a и b мора бити такође непаран.

Ако ли $f(x)$ за $x = a$ и $x = b$ добија једнако означене вредности, онда и горњи производи морају бити једнако означени, дакле број њихових чинилаца мора бити паран, дакле тада између a и b има паран број корена, који број може бити и нула.

79. Кад x при свом непрекидном мењању пређе један корен α задате једначине $f(x) = 0$, полином $f(x)$ постаје $= 0$, али не мења увек свој знак. Јер ако h замислимо тако мало, да између $\alpha - h$ и $\alpha + h$ не лежи више ни један корен задате једначине, онда на основу онога, што је у № 78 доказано $f(\alpha - h)$ и $f(\alpha + h)$ морају бити једнако или противно означене, како се кад α јавља као корен једначине парни или непарни број пута. *Дакле $f(x)$ мења свој знак или не мења, како се кад корен, који x прелази, јавља у једначини непарни или парни број пута.*

У осталом лако је то доказати и непосредно. Јер ако се α јавља r-пута као корен, онда је:

$$f(x) = (x-\alpha)^r\,\varphi(x)$$

Ако сменимо x са $\alpha - h$ и $\alpha + h$ добићемо:

$$f(\alpha-h) = (-h)^r\,\varphi(\alpha-h),$$

$$f(\alpha+h) = (h)^r\,\varphi(\alpha+h).$$

Пошто су количине $\varphi(\alpha-h)$ и $\varphi(\alpha+h)$ једнако означене, то ће $f(\alpha-h)$ и $f(\alpha+h)$ бити истог или противног знака, како је кад r парно или непарно.

И сад из онога, што смо доказали у овој №-и и оној пред њом, потичу као просте последице неке теореме, које смо раније на други начин доказали.

Свака једначина непарног степена мора имати непарни број стварних корена, дакле најмање један такав корен. Јер за $x = -\infty$ и $= +\infty$ постаје $f(x) = -\infty$ и $= +\infty$.

Свака једначина парног степена мора имати паран број стварних корена, којих се број може и на нулу свести. Јер и за $x = -\infty$ и $x = +\infty$ $f(x)$ постаје сада $= +\infty$.

Свака једначина парног степена, у којој је последњи члан одречан, мора имати бар два стварна корена. Јер сада $f(x)$ за $x = 0$ и $x = -\infty$ а тако исто и за $x = 0$ и $x = +\infty$ постаје $= -\infty$ и $= +\infty$.

Примедба. До резултата, до којих смо дошли у овој №-и и № 78 можемо доћи и геометријским путем. Ако $y = f(x)$ конструјишемо, добићемо једну криву линију. Ако је сад н. пр. $f(a) = +A$ и $f(b) = -B$, онда тачке, које одговарају апсцисама $x = a$ и $x = b$ морају лежати на противним странама апсцисне осе, и за то линија у своме току мора пресећи апсцисну осу најмање један пут или непарни број пута. — Међу тим већ знамо да сваком пресеку одговара један корен једначине. Али ако је $f(a) = +A$ и $f(b) = +B$, онда тачке, које одговарају апсцисама $x = a$ и $x = b$, леже на истој страни апсцисне осе и за то је линија у своме току или никако не сече, или је сече у више тачака, чији је број паран.

Границе стварних корена.

80. При израчунавању стварних корена важно је знати, или умети наћи два броја између којих се налазе сви корени једначине, који су стварни. Сваки број који је већи од највећег положног корена зове се *горња граница* стварних корена једначине. Горња граница стварних

корена једначине $f(-x) = 0$ узета са знаком (мање) —, јесте доња граница стварних корена задате једначине. Према томе свака једначина има небројено много горњих и доњих граница. Али се при том захтева, да размак тих граница буде што мањи, а то ће бити, ако је разлика између горње границе и највећег положног корена а тако исто и разлика између доње границе и — бројно — највећег одречног корена што мања.

У № 24 алгеб. анал. ми смо нашли, да кад је M бројна вредност највећег сачиниоца у полиному једначине

$$1.)\quad a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

да је велим онда за:

$$2.)\qquad x = 1 + \frac{M}{a_0}$$

а и за сваку већу вредност x-а, први члан полинома већи од збира свију доцнијих чланова. Одатле следује, да за вредност x-а под 2) као и за сваку од ње већу полином једначине 1) не може бити $= 0$. Дакле је та вредност x-а горња граница стварних корена једначине 1). Ако је $a_0 = 1$, дакле задата једначина облика:

$$3.)\quad x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-2}x^2 + a_{m-1}x + a_m = 0$$

онда је горња граница стварних корена њених

$$4.)\qquad x = 1 + M.$$

Дакле: *горња граница положних корена добија се, кад се јединици дода бројна вредност највећег сачиниоца једначине.*

Лако је међу тим доказати онако као у № 24 алгеб. анал. да ће број под 4) бити горња граница стварних корена и онда, кад је M бројна вредност највећег одречног сачиниоца.

Мању доњу границу од ове можемо наћи, ако водимо рачуна о првом одречном члану полинома једначине.

Нека је M бројна вредност највећег одречног сачиниоца, а први одречни члан нека је $(k+1)$-ви дакле онај у коме стоји x^{m-k}.

Лако је увидети, да сада треба x одредити само тако, да је:

$$x^m > M\left\{x^{m-k} + x^{m-k-1} + \ldots + 1\right\}$$

или

$$x^m > M\left\{\frac{x^{m-k+1}-1}{x-1}\right\}$$

што можемо написати и овако:

$$\frac{x^{m-k+1}\left\{(x-1)\,x^{k-1} - M\right\} + M}{x-1} > 0$$

Одавде видимо, да ће полином једначине 1) бити положан за сваку положну вредност x-а, за коју је:

$$(x-1)\,x^{k-1} \geqq M$$

дакле тим пре вредност x-а, за коју је:

$$(x-1)\,(x-1)^{k-1} = M$$

а и за сваку већу. Из ове једначине следује:

5.) $$x = 1 + \sqrt[k]{M}$$

Дакле за ову вредност x-а а и за сваку већу полином једначине биће увек положан.

И тако:

Горњу границу корена једначине 3) добијамо кад додамо јединици k-ти корен из бројне вредности највећег одречног сачиниоца, где $(k+1)$ значи казаљку места првог одречног члана једначине.

81. Newton је пронашао једну методу, по којој се изналази често као горња граница стварних корена број мањи од оних, које налазимо по методама прошле нумере. Ево у чему се састоји та метода:

Једначина, у којој су сви чланови положни, не може очевидно имати положних корена (№ 6 и 14), и кад у таквој једначини будемо замењивали x са све већим и већим положним вредностима полином једначине, остајући положан добијаће такође све веће и веће положне вредности.

Сад ако из дане једначине изнађемо нову, чији су корени за h мањи од корена дане једначине, и ако смо h изабрали такво, да сви сачиниоци нове једначине испадну положни, онда је јасно, да нова једначина не може имати ни један положан корен. Број h, за који су корени нове једначине мањи од корена задате једначине, мора дакле тада бити већи од највећег положног корена задате једначине.

Нова једначина јесте као што знамо:

$$f^{m}(h)y^m + f^{(m-1)}(h)y^{m-1} + \ldots + f'(h)y + f(h) = 0$$

И по томе, да бисмо нашли горњу границу стварних корена једначине $f(x) = 0$, треба наћи за h што мању вредност, која је таква, да за њу сви изводи функције $f(x)$ као и она сама испадну положни, и та вредност јесте горња граница стварних корена.

Ми знамо, да су узастопни изводи функције $f(x)$:

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x) \ldots f^{(m-1)}(x),\ f^{m}(x)$$

односно x редом:

$(m-1)$-ог, $(m-2)$-ог, $(m-3)$-ег, . . . 2-ог, 1-ог, 0-ог

степена. Пошто је $f^{m}(x)$ сталан и положан број, то ћемо тражити за x вредност, за коју $f^{(m-1)}(x)$ испада положна, а то је лако, пошто је она првог степена. За тим ћемо исту вредност x-а поступно повећавати, ако је потребно дотле, докле сви изводи функције $f(x)$, као и она сама, не постану положни. Вредности пак, које функција $f(x)$ и њени узастопни изводи добијају за $x = a$, тражићемо најзгодније, делећи те изразе по Хорнеру са $x - a$, јер ми знамо, да је остатак деобе вредност дељене функције за $x = a$.

Најзад ваља приметити, да кад смо при тражењу вредности x-а, за коју функције:

$$1.)\qquad f^{m}(x),\ f^{m-1}(x)\ \ldots\ f'(x),\ f(x)$$

испадају све положне, нашли, да су првих r функција под 2) положне, а не и све остале, за н. пр. $x = a$, да велим онда при огледању следећег већег броја није потребно враћати се на оних r узастопних функција под 2), које су већ за мањи број $x = a$ биле све положне, просто за то, што све функције и за сваки већи број морају бити положне. Истинитост тога тврђења лако је увидети. Узмимо образац:

$$2.)\quad f^{r}(a+l) = f^{r}(a) + f^{r+1}(a)l + f^{r+2}(a)l^{2} + \cdots + \\ + f^{m-1}(a)\, l^{m-r-1} + f^{m}(a)\, l^{m-r}$$

где је r положан број.

Из овога видимо, да ако су за $x = a$ r-ни извод функције и сви њени виши изводи положни, да велим онда r-ни извод мора бити положан и за сваку већу вредност x-а. Према овоме, ако је количина: $f^{(m-1)}(a)$ била положна, то ће исто бити случај и са количином $f^{(m-1)}(a+l)$, где је l ма колики положни број. Ако је количина $f^{(m-2)}(a$ била положна, мораће бити и количина $f^{(m-2)}(a+l)$ и т. д.

82. У № 80 већ смо казали, да доња граница стварних корена задате једначине јесте са знаком — узета горња граница стварних корена једначине $f(-x) = 0$

Ако положне корене једначине за себе сматрамо, а одречне опет за себе, онда се могу тражити горња и доња граница како положних, тако и одречних корена. Горња граница положних корена, то је пређашња горња граница стварних корена. Доња граница положних корена, то је број мањи од најмањег положног корена. Доња граница одречних корена јесте пређашња доња граница стварних корена, а горња граница одречних корена, јесте одречни број, који је — бројно — мањи од — бројно — најмањег одречног корена једначине.

Да бисмо сад изнашли доњу границу положних корена једначини:

$$1.)\qquad f(x) = 0$$

треба само наћи горњу границу g положних корена једначини:

$$2.)\qquad f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Пошто је најмањи положни корен једначине 1) једнак јединици подељеној са највећим положним кореном једначине 2), то је јасно, да је $\frac{1}{g}$ доња граница положних корена задате једначине 1).

Горња граница одречних корена једначине 1) јесте очевидно, са знаком — узета, доња граница положних корена једначине:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Но треба приметити, да се обично узимље нула и као доња граница положних и као горња граница одречних корена задате једначине.

Ако се повратимо на № 24 алгеб. анализе видећемо да је:

$$3.) \qquad x = \frac{a_0}{a_0 + M},$$

где је a_0 први сачинилац а број M бројна вредност највећег сачиниоца једначине, такође доња граница положних корена једначине. На начин у № 24 алг. анал. показани доказује се да је израз под 3) доња граница положних корена и онда, кад M значи бројну вредност највећег одречног сачиниоца у једначини. Ако је $a_0 = 1$, онда образац 3) прелази у $x = \frac{1}{1+M}$.

Лако је увидети, да кад сви чланови једначине, у којима стоје непарни степени x-а имају један и исти знак, а сви чланови са парним степенима противни знак, да велим онда није нужно тражити границе одречних корена, пошто их једначина у таком случају не може ни имати.

Пример. Нека је задата једначина:

$$2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 11x - 4 = 0.$$

Траже се границе њиних корена. По обрасцу 2) у № 80 горња граница g положних корена јесте:

$$g = 1 + \frac{7}{2} = 4{\cdot}5$$

По обрасцу 5) исте №-е налазимо као горњу границу положних корена:

$$g = 1 + \sqrt{\frac{7}{2}} = 2{\cdot}88$$

дакле мало мању ~~но~~ мало час.

Тражимо сад горњу границу положних корена по методи Newton-овој.

Сад је:

$$f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 11x - 4$$

$$f'(x) = 10x^4 + 16x^3 - 15x^2 - 14x + 11$$

$$f''(x) = 20x^3 + 24x^2 - 15x - 7$$

$$f'''(x) = 20x^2 + 16x - 5$$

$$f^{IV}(x) = 10x + 4$$

$$f^{V}(x) = 2$$

За $x = 0$ $f^{\text{v}}(x)$ и $f^{\text{IV}}(x)$ положне су али не и све остале. За $x = 1$ положне су све, дакле је:

$$g = 1$$

Дакле смо по Newton-овој методи нашли као горњу границу положних корена најмањи број.

Тражимо сада доњу границу одречних корена.

Сад је:

$$f\,(-x) = 2x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 11x + 4$$

$$f'(-x) = 10x^4 - 16x^3 - 15x^2 + 14x + 11$$

$$f''(-x) = 20x^3 - 24x^2 - 15x + 7$$

$$f'''(-x) = 20x^2 - 16x - 5$$

$$f^{\text{IV}}(-x) = 10x - 4$$

$$f^{\text{V}}(-x) = 2$$

Први цео број за који испадају положне све ове функције, јесте $+\,2$, а то је горња граница положних корена једначине $f(-x) = 0$, дакле је $-\,2$ доња граница одречних корена задате једначине. Дакле сви стварни корени њени леже између $-\,2$ и $+\,1$. Овде бисмо, пошто је размак између бројева $-\,2$ и $+\,1$ могли узети нулу као заједничку границу и то као доњу границу положних и горњу границу одречних корена. Но ми ћемо при свем том да тражимо споменуте две границе. Овде је:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x^5 - 11x^4 + 7x^3 + 5x^2 - 4x - 2$$

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = 20x^4 - 44x^3 + 21x^2 + 10x - 4$$

$$f''\left(\frac{1}{x}\right) = 40x^3 - 66x^2 + 21x + 5$$

$$f'''\left(\frac{1}{x}\right) = 40x^2 - 44x + 7$$

$$f^{\text{IV}}\left(\frac{1}{x}\right) = 20x - 11$$

$$f^{\text{V}}\left(\frac{1}{x}\right) = 4$$

Најмањи цео број, за који испадају положне све ове функције јесте $+\,2$, и то је горња граница положних корена једначине:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

дакле је $\frac{1}{2}$ доња граница положних корена задате једначине. За $x = 2$ функција $f''\left(\frac{1}{x}\right)$ јесте $= 0$, али она на основу обрасца 2) у № 81 мора опет за то бити положна за сваку положну вредност x-а већу од јединице.

Приступимо најзад и истраживању горње границе одречних корена.

Сада је:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = 4x^5 + 11x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 4x + 2,$$

$$f'\left(-\frac{1}{x}\right) = 20x^4 + 44x^3 + 21x^2 - 10x - 4$$

$$f''\left(-\frac{1}{x}\right) = 40x^3 + 66x^2 + 21x - 5$$

$$f'''\left(-\frac{1}{x}\right) = 40x^2 + 44x + 7$$

$$f^{IV}\left(-\frac{1}{x}\right) = 20x + 11$$

$$f^{V}\left(-\frac{1}{x}\right) = 4$$

Први цео број за који су све ове функције положне јесте $+1$. Дакле је -1 горња граница одречних корена задате једначине.

По обрасцу 3) ове №-е налазимо као доњу границу положних корена $\frac{2}{9}$, а као горњу границу одречних корена $-\frac{2}{5}$.

83. Newton-ова метода, помоћу које тражимо горњу границу положних корена може се у неколико изменути. Место да из дане једначине тражимо одмах једначину, у којој су сви чланови положни, која дакле једначина нема ни једног положног корена, ми можемо поступно смањивати корене дане једначине све са једном јединицом. Тим хоћемо да кажемо то, да из дане једначине можемо поступно извести читав један низ нових једначина, чији су корени за једну, две, три и т. д. јединице мањи од корена дане једначине. На тај начин радећи за цело ћемо најзад добити једначину, у којој су сви чланови положни, или која нема ни једног положног корена. Кад бројимо све те нове једначине почев од прве па до оне, у којој су сви чланови положни, онда казаљка места последње једначине јесте горња граница положних корена задате једначине.

Узмимо као пример за то једначину:

$$x^4 + 6x^3 - 76x^2 + 31x + 294 = 0$$

Као полиноме једначина, чији су корени за 1, 2, 3 . . . мањи од корена задате једначине, добијамо:

1.) $\quad 1 + 10 - 52 - 99 + 256,$

2,) $\quad 1 + 14 - 16 - 169 + 116,$

3.) $\quad 1 + 18 + 32 - 155 - 54,$

4.) $\quad 1 + 22 + 92 - 33 - 158,$

5.) $\quad 1 + 26 + 164 + 221 - 76,$

6.) $\quad 1 + 30 + 248 + 631 + 336.$

Ми смо написали само узастопне сачиниоце тих полинома, а бројеви које смо лево написали, показују, за колико су јединица корени полинома који стоје десно мањи од корена задате једначине. Пошто су у шестом полиному сви чланови положни, то је шест горња граница положних корена задате једначине. Ако овако будемо радили и са једначином $f(-x) = 0$ добићемо доњу границу одречних корена задате једначине.

Овај начин и ако није простији од Newton-овог, опет има неких добрих страна. Пошто су последњи чланови узастопних једначина очевидно вредности, које полином задате једначине добија за $x = 1, 2, 3, 4 \ldots$. то је онда r очевидно корен задате једначине, кад је последњи члан r-не једначине $= 0$. Дакле тражећи по овој методи горњу границу положних корена задате једначине, налазимо успут рационалне корене њене, ако их, т. ј. она има. Из истог разлога, а на основу №-е 78 и 79 из броја мена у последњем стубу дознаје се и то, да ли има ирационалних корена између два и два узастопна броја. Тако н. пр. горња једначина има један положан и ирационалан корен између 2 и 3, а други такав између 5 и 6. Ако најзад у једној од нових једначина нема једног члана између два једнако означена члана, онда та једначина, па дакле и задата мора имати уображених корена (№ 16).

Лако је најзад увидети, да се при поступном смањивању корена задате једначине *мора* најзад наићи на такву једначину у којој су сви чланови положни. Јер корене задате једначине ми можемо смањити са тако великим бројем, да не само сви стварни корени, него и стварни делови уображених корена постану одречни. Но тада ће једначине имати чинилаца само једног од ова два облика: $(x+\alpha)$ или $(x+p-qi)(x+p+qi) = [(x+p)^2+q^2]$, али у производу таквих чинилаца не може очигледно бити ни једне мене. И тако при поступном смањивању корена задане једначине могу се губити мене, али никако придолазити. И тако сад можемо сматрати као доказану ову теорему:

Ако су a *и* b *два ма каква броја и* $b > a$, *онда прва од ових двеју једначина:*

$$f(x+b) = 0, \quad f(x+a) = 0$$

не може никако имати више мена од друге. Корени ових двеју једначина јесу за b и a мањи од корена једначине $f(x) = 0$.

Тражење рационалних корена.

84. Кад је задата једначина, коју треба решити, облика:

$$1.)\ x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-2}x^2 + a_{m-1}x + a_m = 0,$$

где су сви сачиниоци a цели бројеви, онда на основу онога, што смо рекли у № 77 рационални корени њени морају бити цели бројеви, и осим тога чиниоци последњега члана a_m (№ 6). Да бисмо дакле нашли рационалне корене једначине 1) разложићемо њен последњи члан a_m на његове просте и сложене чиниоце, па ћемо онда сваког од тих чинилаца узетог најпре са знаком + па са знаком — огледати, да ли је корен или не задате једначине. То огледање можемо извршити двојако т. ј. или замењујући у једначини x са поменутим чиниоцем, у ком случају резултат замене мора бити $= 0$, ако је огледани број корен, или пак делећи по Horner-овој методи полином једначине са разликом између x и огледаног броја, у ком случају остатак деобе мора бити $= 0$ (№ 4) ако је огледани број корен.

Ако смо изнашли границе стварних корена, онда при том огледању чинилаца, треба се само ограничити на оне чиниоце његове, који леже између горње и доње границе стварних корена, ако хоћемо себи да уштедимо излишан посао.

Али има још један згодан начин, помоћу којег се испитује, да ли је број α корен дане једначине или не. Ако је број α корен једначине, онда он мора једначину задовољавати, дакле мора вредети једначина:

$$\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + a_2\alpha^{m-2} + \ldots + a_{m-2}\alpha^2 + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

Кад све ове чланове сем оног последњег пребацимо на супротну страну, за тим поделимо лево и десно са α, добићемо:

$$2.)\quad \frac{a_m}{\alpha} = -\alpha^{m-1} - a_1\alpha^{m-2} - \ldots - a_{m-3}\alpha^2 - a_{m-2}\alpha - a_{m-2}$$

Одавде видимо, да последњи члан једначине мора бити дељив са α, ако је овај број корен једначине 1), што смо ми пређе (№ 6) дознали на други начин.

У једначини 2) пребацимо члан $-a_{m-2}$ на лево, па за тим поделимо лево и десно са α, па ћемо добити:

$$3.)\quad \frac{b_1 + a_{m-1}}{\alpha} = -\alpha^{m-2} - a_1\alpha^{m-3} - \ldots - a_{m-3}\alpha - a_{m-2}$$

где је краткоће ради стављено:

$$\frac{a_m}{\alpha} = b_1$$

Из 3) видимо, да пошто је десна страна цео број, то исто мора бити случај и са левом, дакле збир $b_1 + a_{m-1}$ мора бити дељив са α. Пребацимо сада даље a_{m-2} на леву страну, и поделимо лево и десно са α, па ћемо добити:

$$4.)\quad \frac{b_2 + a_{m-2}}{\alpha} = -\alpha^{m-3} - a_1\alpha^{m-4} - \ldots - a_{m-4}\alpha - a_{m-3}$$

где смо краткоће ради ставили:

$$b_2 = \frac{b_1 + a_{m-2}}{\alpha}$$

Из 4) видимо да и збир $b_2 + a_{m-2}$ мора бити дељив са α.

Ако наставимо пребацивати на лево чланове, који су десно и у исти мах делити са α, добићемо после $(m-1)$ таквих рачуна:

$$m)\qquad \frac{b_{m-2} + a_2}{\alpha} = -\alpha - a_1$$

где је b_{m-2} цео број. Одавде видимо, да је збир $b_{m-2} + a_2$ дељив са α. Ако сад пребацимо и a_1 на леву страну и поделимо са α добићемо:

$$m+1)\qquad \frac{b_{m-1} + a_1}{\alpha} = -1\,,$$

где смо краткоће ради ставили:

$$b_{m-1} = b_{m-2} + a_2$$

Ако леви израз у једначини $m+1$), који је израз цео број, означимо са b_m, онда та једначина изгледа овако:

$$b_m = -1 \quad \text{или} \quad b_m + 1 = 0$$

Овако се исто може радити и онда, кад је први сачинилац у једначини не 1 него a_0, само што ће последња једначина тада бити:

$$b_m + a_0 = 0$$

Дакле да би број α могао бити корен задане једначине, треба:

Да је количник измеђ последњег члана и броја α цео број.

Даље, кад томе количнику додамо сачиниоца од x^1, узетог са његовим знаком, па добивени збир поделимо са α нови количник треба да је опет цео број.

Кад томе количнику додамо сачиниоца од x^2, узетог са његовим знаком, и добивени збир поделимо са α, количник треба да је опет цео број и т. д.

На послетку треба да су сви ови на показани начин добивени количници цели бројеви, и сем тога да је збир из последњег количника и првог сачиниоца једначине једнак нули.

Ову методу показао је први Newton.

Пример. Траже се рационални корени једначине:

$$x^4 + 3x^3 - 31x^2 - 63x + 90 = 0.$$

Сви прости и сложени чиниоци последњег члана 90 јесу:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 15,\ 18,\ 30,\ 45,\ 90.$$

Кад потражимо границе стварних корена задане једначине по Newton-овој методи, онда успут дознајемо, да су $+5$ и -6 корени задате једначине. Сви дакле корени задате једначине леже између $+6$ и -7. И према томе од горњих чинилаца броја 90 треба огледати, да ли су корени само првих пет, узетих најпре са знаком $+$, па са знаком $-$. Ми ћемо то урадити по последњој Newton-овој методи, а остављамо читаоцу, да он то уради и по другим двема методама. Међу тим, да ли су $+1$ и -1 корени једначине најпростије се уверавамо простом заменом. И ако то учинимо видећемо, да је број $+1$ корен једначине а број -1 не.

Огледајмо сада бројеве $+2$ и -2 по Newton-овој методи.

$$\frac{90}{2} = 45,\ 45-63 = -18,\ \frac{-18}{2} = -9,\ -9-31 = -40,$$

$$-\frac{40}{2} = -20,\ -20+3 = -17,\ -\frac{17}{2} = -8{\cdot}5,$$

дакле $+2$ није корен.

$$\frac{90}{-2} = -45,\ -45-63 = -108,\ \frac{-108}{-2} = 54,$$

$$54-31 = 23,\ \frac{23}{-2} = -11{\cdot}5,$$

и -2 дакле није корен.

Огледајмо сада бројеве $+3$ и -3:

$$\frac{90}{3} = 30,\ 30-63 = -33,\ \frac{-33}{3} = -11$$

$$-11-31 = -42,\ \frac{-42}{3} = -14,\ -14+3 = -11$$

$$\frac{-11}{3} = -3\tfrac{2}{3}$$

дакле ни $+3$ није корен.

$$\frac{90}{-3} = -30, \ -30 - 63 = -93, \ \frac{-93}{-3} = 31$$

$$31 - 31 = 0, \frac{0}{-3} = 0, \ 0 + 3 = 3$$

$$\frac{3}{-3} = -1, \ -1 + 1 = 0$$

дакле је -3 корен једначине.

Ми смо већ напоменули, да су рационални корени задате једначине $+5$, $+1$, -6 и -3. Пошто је једначина четвртога степена, то смо нашли све корене њене и с тога није потребно огледати још и бројеве -5 и $+6$.

85. Ако је број чинилаца последњега члана a_m, који се налазе између стварних корена једначине, велики, онда се број огледа може смањити помоћу једне методе, коју ћемо сада да изложимо.

Ако у полиному једначине заменимо x са $+1$ и -1, онда ће резултати замене бити: $f(+1)$ и $f(-1)$. Али оба ова броја јесу такође последњи чланови у оним двема једначинама, којих су корени односно за јединицу мањи и већи од корена дане једначине. Одавде следује, да само они чиниоци последњега члана узети са знаком $+$ или $-$, *могу а не морају* бити корени задане једначине, који, кад се од њих одузме јединица, деле $f(+1)$, а кад им се дода јединица деле $f(-1)$ без остатка.

Ако би који од бројева $f(+1)$ или $f(-1)$ био једнак нули, онда би $+1$ или -1 био корен једначине. У таквом случају требало би тај корен најпре истиснути из једначине, па онда применути ово правило.

Узмимо н. пр. да је дата једначина:

$$x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 38x + 60 = 0$$

Чиниоци последњега члана јесу:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 30, 60.$$

Пошто су границе стварних корена $+4$ и -6, то онда треба огледати само бројеве 1, 2, 3 и -1, -2, -3, -4, -5. Овде су сад:

$$f(+1) = 12, \quad f(-1) = 80.$$

$+1$ и -1 нису корени. Огледајмо да ли су остали бројеви корени. Са $2 - 1 = 1$ дељив је број 12, али са $2 + 1 = 3$ није дељив број 80, дакле $+2$ није корен.

Са $3 - 1 = 2$ дељив је број 12, а са $3 + 1 = 4$ дељив је број 80, дакле $+3$ може бити, и ми дознајемо по једној од показаних метода, да је он доиста корен.

Са $-2 - 1 = -3$ дељив је број 12, а са $-2 + 1 = -1$ дељив број 80, дакле може бити корен; али ако огледамо, видећемо да није.

Исто тако број -3 може бити корен, али кад га огледамо видећемо, да није

Број -4 не може бити корен. А број -5 може бити и јесте доиста корен.

У извесним приликама сваки је оглед излишан. Тако н. пр. кад је дата једначина

$$x^4 - 143x^3 + 21x^2 - 82x + 360 = 0$$

онда налазимо 143 као горњу границу стварних корена њених. Дакле бисмо имали да огледамо све чиниоце броја

360 сем броја 180 а таквих је 21 свега. Али пошто је сада:

$$f(+1) = 157 \quad f(-1) = 607$$

то је лако увидети да једначина нема рационалних корена, јер бројеви 157 и 607 као прости бројеви не могу бити дељиви са ниједним, јединицом увећаним или смањеним, чиниоцем последњега члана.

86. Кад смо тражили по једној од показаних метода рационалне корене једначине, онда не треба одмах помислити, да остали још неоткривени корени једначине морају бити ирационални или уображени. Јер лако може бити да једначина има једнаких корена. Да ли једначина има доиста једнаких корена или не, могли бисмо се уверити помоћу познатих метода. Међу тим много је простије и лакше, кад дану једначину поделимо поступно са сваким од оних корених чинилаца, који постају из већ нађених корена, и за тим нову једначину подвргнемо истим рачунима као и дану.

Пример 1. Траже се рационални корени једначине:

$$x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$$

По једној од показаних метода налазимо као корене задате једначине само бројеве $x = 1$ и $x = -2$. Али кад полином једначине поделимо са кореним чиниоцима $(x-1)$ и $(x+2)$ и нађени количник ставимо једнак нули, добићемо једначину:

$$x^3 - 3x + 2 = 0,$$

чија су три корена у исти мах и корени задате једначине. Као рационалне корене ове једначине налазимо

$+1$ и -2. Кад леву страну последње једначине поделимо са кореним чиниоцима $(x-1)$ и $(x+2)$ и нађени количник ставимо једнак нули, добићемо једначину:

$$x + 2 = 0$$

чији корен -2 јесте последњи корен дане једначине. И тако, једначина има $+1$ три пута, а -2 два пута као корен.

Пример 2. Траже се рационални корени једначине:

$$x^6 - 6x^5 + 2x^4 + 46x^3 - 67x^2 - 84x + 180 = 0$$

Најпре налазимо помоћу познатих већ метода, да су само -2 и $+3$ корени њени. Кад поделимо полином са кореним чиниоцима $(x+2)$ и $(x-3)$, и количник ставимо једнак нули добијамо једначину:

$$x^4 - 7x^2 + 4x + 20$$

Рационални корени њени јесу: опет $+3$ и -2. Кад поделимо леву страну једначине са $(x-3)$ и $(x+2)$, добијамо квадратну једначину:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Корени њени јесу: $x = 2 + \sqrt{-1}$ и $x = 2 - \sqrt{-1}$

Дакле су корени задате једначине:

$$-2,\ -2,\ +3,\ +3,\ 2 + \sqrt{-1},\ 2 - \sqrt{-1}$$

87. У № 24 видели смо, помоћу којих се рачуна добијају полиноми једначина:

1.) $X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0 \ldots$

Прва има као корене само просто корене задате једначине, т. ј. оне који се у њој јављају само по један пут; друга има као корене само двојне корене задате једначине, т. ј. такове корене, који се у њој јављају по два пут, али се у $X_2 = 0$ налази сваки само по један пут; трећи има као корене само тројне корене задате једначине, али се сваки од њих у X_3 јавља само по један пут и т. д. Пошто су горепоменути рачуни деобе, то је онда са свим јасно, да ако су сачиниоци полинома X задате једначине рационални, да велим онда то исто мора бити случај и са полиномима: $X_1, \; X_2, \; X_3 \ldots .$ Ако претпоставимо сад, да је од свију корена једначине:

$$X = 0$$

a једини, који се у њој јавља α пута онда ће полином X_α бити односно x првог степена, и за то корен a, који се добија решењем једначине:

$$X_\alpha = 0$$

која је првог степена, а има рационалне сачиниоце, мора бити рационалан, и тако имамо теорему:

Кад једна једначина са рационалним сачиниоцима има један једини корен, који се у њој јавља α пута онда тај корен мора бити рационалан.

Кад једначина трећег степена има једнаких корена, онда она може имати или један прост корен и један двојан, или само један тројан корен. По мало час доказаној теореми корени једначине у оба су случаја рационални.

Исто тако кад једначина четвртог степена има једнаких корена, она може имати или два проста корена и један двојни, или два двојна корена, или најзад један прост и један тројни, или један четворни корен. На основу доказане теореме у првом случају двојни корен а у трећем и четвртом случају сви корени морају бити рационални, али у другом случају, два двојна корена у опште су ирационални, јер се добијају решавањем једне квадратне једначине.

Кад најзад једначина петог степена има једнаких корена, она може имати или три проста корена и један двојан, или један прост корен и два двојна, или два проста и један тројан, или један двојан и један тројан, или један прост и један четворан, или најзад један петоран корен. У сваком од тих шест случајева једначина мора имати бар један рационалан корен.

Према томе дакле

Кад каква једначина са стварним сачиниоцима, која је највише петог степена, има једнаких корена, онда она мора имати бар један рационалан корен, сем кад је полином једначине четвртог степена и савршен квадрат.

Резултат овог разматрања јесте ово:

Ако је једначина највише петог степена, онда није нужно испитивати, да ли она има једнаких корена или не, што је обично доста заметан и дуг посао, већ пошто смо сазнали, да полином једначине није потпуни квадрат, треба на исту применути просто методе, по којима тражимо рационалне корене. Али ако је степен једначине виши од петог, она може имати једнаких корена и ако нема рационалних.

Пример 1. Дата је једначина:

$$x^5 + 5x^4 + x^3 - 16x^2 - 20x - 16 = 0$$

Рационални корени њени јесу: 2, — 2, — 4. Кад поделимо њен полином са кореним чиниоцима:

$$x - 2 \quad x + 2, \quad x + 4$$

и количник ставимо $= 0$, добијамо једначину:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

одакле налазимо:

$$x = -1 \pm \sqrt{-3}$$

као последња два и то ирационална корена дане једначине.

Пример 2. Дата је једначина:

$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

Као једини рационални корен ове једначине налазимо $+1$. Кад са $(x-1)$ поделимо једначину и количник ставимо једнак нули, добијамо:

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0.$$

која нема рационалних корена. Сад може лако бити, да ова једначина има два двојна ирационална корена, у ком је случају њена лева страна потпуни квадрат. Тај је случај овде доиста, и лева је страна квадрат полинома:

$$x^2 - 2x - 1,$$

дакле су остала четири корена дате једначине:

$$1 + \sqrt{2},\ 1 + \sqrt{2},\ 1 - \sqrt{2},\ 1 - \sqrt{2}$$

Примедба. Да је горњи полином потпун квадрат једног полинома, може се овако дознати. Нека је трином:

$$x^2 + px + q$$

онај, чији је квадрат једнак горњем полиному. Онда мора вредети једначина:

$$x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)\,x^2 + 2pq\,x + 9^2 =$$
$$= x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1,$$

дакле, на основу правила о неодређеним сачиниоцима добијамо једначине:

$$2p = -4,\ p^2 + 2q = 2,\ 2pq = 4,\ q^2 = 1$$

Ако се сад за p и q могу наћи такве вредности да су све ове једначине задовољене, онда за те вредности квадрат горњег тринома биће једнак поменутом полиному четвртог степена.

Из прве две од последњих једначина добијамо:

$$p = -2,\ q = -1,$$

које вредности задовољавају последње две једначине, и по томе је доиста квадрат тринома:

$$x^2 - 2x - 1$$

једнак поменутом полиному.

XIV. Тражење ирационалних корена.

Раздвајање корена.

88. Ми смо видели како се лако налазе рационални корени. С тога, кад нам је дата каква једначина, да је разрешимо, ми ћемо пре свега пронаћи све рационалне корене њене, па онда са кореним чиниоцима, који одговарају тим коренима, поделити полином задане једначине. Пошто се може лако десити, да једначина има и једнаких корена, то онда треба помоћу познатих метода испитати, да ли она има једнаких корена или не, па ако их има, треба је ослободити и тих корена. Пошто смо све то урадили, имаћемо посла са једначином, чији су корени сви различни и чији су стварни корени ирационални бројеви.

Разлог, за што треба једначину ослободити и једнаких корена, јесте тај, да у будуће, кад полином једначине за две довољно блиске вредности x-а буде добио протвно означене вредности, можемо извесно тврдити, да између те две вредности x-а лежи један и то само један корен једначине. Према томе дакле у будуће ми ћемо претпостављати, да имамо посла само са таковим једначинама, које немају ни рационалних ни једнаких корена и кад буде било говора о стварним коренима, онда под истима треба разумевати неједнаке и ирационалне корене.

Радња око истраживања ирационалних корена распада се у две оделите и са свим различне радње. У првој траже се најпре за сваки корен две границе, између којих се тај корен и само он налази. Та радња зове се *раздвајање корена*. У другој пак радњи израчунава се сваки корен посебице.

Да бисмо раздвојили ирационалне корене, а са израчунавањем ових понајпре ћемо се бавити, можемо радити овако:

Пошто смо изнашли горњу и доњу границу стварних корена, ми ћемо заменути x у полиному дате једначине најпре са доњом границом стварних корена, а за тим са свима целим бројевима, који леже између те доње и горње границе и најзад и са самом горњом границом. При том претпостављамо, да су обе границе цели бројеви. Како се сад између сваке две узастопне вредности x-а, за које полином добија противно означене вредности, мора налазити барем један стваран корен једначине (№ 78), то је увиђавно, да ће сви стварни корени једначине бити раздвојени, ако је полином при поменутим заменама x-а онолико пута свој знак променуо, колики је број стварних корена, које једначина по № 16 може *највише* имати.

Узмимо као пример једначину:

$$1.) \qquad f(x) = x^3 - 7x + 1 = 0$$

Ова једначина по № 16 може имати највише два положна и највише један одречан корен. Границе њених стварних корена јесу $+3$ и -3. Дакле треба у једначину 1) ставити редом: $x = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$ и тада добијамо за:

$$x = -3 \qquad f(-3) = -5$$

$$x = -2 \qquad f(-2) = +7$$

$$x = -1 \qquad f(-1) = +7$$

$$x = 0 \qquad f(0) = +1$$

$$x = +1 \qquad f(+1) = -5$$

$$x = +2 \qquad f(+2) = -5$$

$$x = +3 \qquad f(+3) = +7$$

Кад погледамо на низ узастопних вредности полинома $f(x)$, видећемо, да бар један корен мора бити између -3 и -2, бар један између 0 и $+1$ и најзад бар један између $+2$ и $+3$. Пошто једначина не може имати више од три стварна корена, то су, као што се види, раздвојени сви корени једначине, и по један и то само један лежи између сваке две од мало час поменутих граница.

89. Врло се ретко догађа да се на мало час показани начин могу раздвојити сви стварни корени једначине. Јер у највише прилика број мена у низу вредности функције $f(x)$ није онолики, колико стварних корена по № 16 једначина може највише имати. У таквој прилици не треба одмах помислити, да корени, који нам недостају, морају бити сви уображени онда, кад је број истих паран. Јер прво између две узастопне вредности x-а, за које је полином добио противно означене вредности, може лежати више од једног корена, али у непарном броју. Исто тако између две узастопне вредности x-а, за које је полином добио једнако означене вредности, може не бити ни један корен, али их може и бити и то у парном броју. Истина вероватноћа, да ће се сви стварни корени најзад морати раздвојити биће све већа и већа, што год је мањи размак оних вредности, којима x у једначини поступно замењујемо. Али на тај начин, ако једначина има стварних корена, који се међу собом за врло мало разликују, може се посао прво јако отегнути, а друго, ако једначина има и уображених корена, може се тај посао отегнути без краја, а да опет нисмо на чисто.

Међу тим лако је увидети, да би се сви корени једначине морали открити, кад бисмо као размак оних вредности, којима x узастопце замењујемо, узели такав један број, који је бројно мањи, но најмања од оних разлика, које постају, кад се сваки корен једначине од свију осталих одузме.

Такав један број може се по Lagrange-у наћи. У № 34 ми смо показали, како се добија једначина квадрираних разлика, т. ј. она чији су корени једнаки квадратима разлика корена задате једначине. Пошто су квадрати разлика стварних корена задате једначине положни, то ћемо тражити доњу границу положним коренима квадриране једначине. Ако је g та граница, онда је очигледно број $\delta = \sqrt{g}$ мањи од најмање разлике корена задате једначине. Ако је δ, као што је то понајчешће случај, ирационалан број, онда ћемо узети непосредно мањи цео број ε, или ако би било $\varepsilon = 0$, прву десетну цифру броја δ као размак оних вредности, којима ћемо x у задатој једначини поступно замењивати. И кад тако будемо радили сви ће стварни корени задате једначине морати бити откривени и раздвојени.

Кад се ова Lagrange-ова метода проматра са чисто теоријског гледишта, нема јој се шта замерити, она је савршена, јер решава потпунце задатак о раздвајању корена. Али гледана са практичког гледишта она се мора одбацити. Јер прво, тражење једначине квадрираних разлика по себи је врло заметан и тежак посао, а после и број вредности, којима треба заменути поступно x може бити врло велики.

Ако из дане једначине изведемо нову, чији су корени k пута већи, и ако је број δ мањи од најмање разлике корена задате једначине, биће број $k\delta$ мањи од најмање разлике корена нове једначине. Ако је дакле k довољно велики број, тако, да је $k\delta > 1$, онда ће очевидно сви корени нове једначине бити раздвојени, ако у њој будемо x замењивали целим бројевима, почев од доње, па до горње границе стварних корена њених. Из корена те нове једначине, пошто су они једном нађени, добијају се корени дане једначине, кад оне прве поделимо са k.

Пример. Да се раздвоје корени једначине:

1.) $$f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Границе њених корена јесу $+2$ и -4. Кад заменимо x поступно са свима вредностима, почев од -4 па до $+2$, онда $f(x)$ мења свој знак само један пут.

Она је за $x = -4$ одречна, а за $x = -3$ положна. Дакле још два корена нису откривена. Ако x будемо замењивали са вредностима, којих је размак 0·5 опет ће $f(x)$ само један пут променути свој знак. Она је за $x = -3{\cdot}5$ одречна, а за $x = -3$ положна, и тако опет не достају још два корена. Ако најзад узмемо, да је размак вредности, којима ћемо x замењивати поступно, још мањи н. пр. 0·1, онда ће сви корени бити раздвојени. Ми ћемо т. ј. наћи, да је:

$$f(-3{\cdot}1) = -, \quad f(-3) = +$$

$$f(1{\cdot}3) = + \quad f(1.4) = -$$

$$f(1{\cdot}6) = - \quad f(1{\cdot}7) = +$$

Дакле један корен лежи између $-3{\cdot}1$ и -3, други између 1·3 и 1·4, а трећи између 1·6 и 1·7.

У № 34 нашли смо као једначину квадрираних разлика:

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0$$

Доња граница њених стварних, то јест положних корена, јер одречних знамо да не може ни имати, што се у осталом и одатле увиђа, што је једначина потпуна а нема следи, доња граница велим јесте број $\delta = \frac{1}{9}$. Тај број мора бити мањи од најмање разлике корена задате једначине, дакле тим ће пре то бити случај са 0·1. Ако дакле у датој једначини замењујемо x почев од -4 па до $+2$ са вредностима, којих је размак 0·1 онда сви корени једначине морају бити откривени, што смо и видели, да је истина.

Изведимо из дане једначине једначину, чији су корени два пута већи. Та нова једначина јесте ова:

2.) $$\varphi(x) = x^3 - 28x + 56 = 0$$

Границе њених корена јесу $+4$ и -7. Овде је горе поменуто $k = 2$. Ова једначина као и дана може на основу № 16 имати највише један одречан корен, и овај она мора имати (№ 13), и највише два положна. Кад сад у овој једначини 2) замењујемо x са целим вредностима, почев од -7 до $+4$, наћи ћемо, да је: $\varphi(-7) = -$ а $\varphi(-6) = +$, одакле следује, да одречни корен једначине 2) лежи између -6 и -7. Пошто она не може имати више одречних корена, то онда није нужно замењивати x са осталим бројно мањим одречним вредностима него треба одмах прећи на 0 и положне вредности 1, 2, 3 и 4. Пошто тада налазимо:

$$\varphi(+2) = +, \quad \varphi(+3) = -, \quad \varphi(+4) = +$$

то онда остала два положна корена леже један између 2 и 3, а други између 3 и 4.

Примедба. Није згорег напоменути на овом месту да *услов, који треба да је испуњен, па да сви корени какве једначине буду стварни и неједнаки, јесте тај, да је једначина квадрираних разлика потпуна и да има само мене.*

И доиста, ако су корени дане једначине сви стварни и неједнаки, онда су квадрати разлика тих корена сви положни и међу собом различни. Једначина квадрираних разлика има дакле само положне и неједнаке корене и с тога је она потпуна и без икаквих следи. Али ако би између корена дане једначине било и уображених онда квадрат двају спрегнутих уображених корена $a + bi$ и $a - bi$ дакле одречан број $-b^2$ јесте корен једначине квадрираних разлика. У таквом дакле случају једначина квадрираних разлика има следи или је непотпуна. Ако ли дана једначина има и једнаких корена, онда једначина квадриратих разлика мора имати један или више корена једнаких нули.

Штурмова теорема.

90. Помоћу ове теореме, са којом ћемо се у овој и још неколико доцнијих №-а бавити, можемо увек сазнати тачан број корена, који се налазе између два ма каква стварна броја. Са гледишта чисте теорије може се рећи, да је ова теорија оличено савршенство. Помоћу ње не само да смо у стању изнаћи, колико је стварних корена између два ма каква стварна броја, него смо услед тога у стању и раздвојити све те корене једно од друго.

Претпоставимо, да нам је дата једначина:

$$1.)\quad f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

где под сачиниоцима a разумем стварне истинске бројеве. Први извод полинома $f(x)$ јесте $f'(x)$. Сад са $f(x)$ и $f'(x)$ радимо онако, као кад бисмо им тражили највећег заједничког делиоца, само сваком остатку пре но што га узмемо за делиоца променимо знак. На тај начин добићемо овај низ једначина:

$$\begin{aligned}
f(x) &= q_1 \; f'(x) - f_2(x)\\
f'(x) &= q_2 \; f_2(x) - f_3(x)\\
f_2(x) &= q_3 \; f_3(x) - f_4(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_{n-2}(x) &= q_{n-1} f_{n-1}(x) - f_n(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_{r-2}(x) &= q_{r-1} f_{r-1}(x) - f_r(x)\\
f_{r-1}(x) &= q_r \; f_r(x),
\end{aligned}$$

где је $r \leqq m$, т. ј. степену једначине 1). Функције:

$$3.)\qquad f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ f_3(x) \ldots f_r(x)$$

зову се *Штурмове функције*, а количници:

$$q_1,\quad q_2,\quad q_3,\quad q_4 \ldots\ldots q_r$$

Штурмови количници. Пошто смо претпоставили, да су сачиниоци функције $f(x)$ стварни, то је онда очевидно то исто случај и са Штурмовим функцијама и количницима. Обично су количници q линеарне функције x-а. У таквом случају, који ћемо звати *обичним*, количника има на броју

r, а Штурмових функција под 3) има свега $(r+1)$, и прва је од њих m-ног степена, а степен сваке доцније за јединицу је нижи.

Али се може десити, да један од количника или више њих премаша први степен, и кад је то, онда је број количника мањи од r. У таквом случају ми ћемо при општим разматрањима казаљку ма којег количника изабрати тако, да је казаљка тога количника једнака степену производа, који добијамо, кад тај количник помножимо са свима који су пред њим. А код Штурмових функција опет изабраћемо казаљке тако, да број, који означава степен дотичне функције, и казаљка те функције дају сабрани број m.

Ми ћемо у ономе што долази разликовати ова два случаја:

$$r = m \quad \text{и} \quad r < m$$

Први случај: $r = m$

91. Кад је $r = m$, онда је последња Штурмова функција $f_r(x)$ нулног степена, т. ј. од x независан број. Она мора бити од нуле различна, јер би иначе услед једначина 2) све функције Штурмове, па дакле и $f(x)$ биле идентично равне нули. На основу истих једначина 2) $f_r(x)$ јесте највећи заједнички делилац функцији $f(x)$ и њеном првом изводу $f'(x)$. Но како тај заједнички делилац $f_r(x)$ није функција x-а, него сталан број, то онда на основу № 23 једначина нема једнаких корена и функције $f(x)$ и $f'(x)$ не могу никако бити једнаке нули за једну и исту вредност x-а.

Кад у Штурмовим функцијама под 3) заменимо x са ма каквим стварним бројем н. пр. са a, онда ће одговарајуће вредности свију тих функција бити такође стварне. И ако не водимо рачуна о самим вредностима истих

функција него само о њиховим знацима, дакле ако само знаке тих вредности будемо бележили, добићемо један низ знакова, који ћемо звати *Штурмовим значним низом за* $x = a$. Помоћу извесних особина тога значног низа ми ћемо доказати Штурмову теорему.

Кад је за једну особену вредност $x = a$ једна од оних Штурмових функција, које леже између прве и последње, равна нули, онда за ту исту вредност x-а две оближње Штурмове функције добијају *супротно означене и од нуле различне вредности.* Јер ако је за $x = a$ Штурмова функција $f_n(x) = 0$, онда услед једначина 2) оближње функције $f_{n-1}(x)$ и $f_{n+1}(x)$ морају бити противног знака. Од нуле морају бити различне те оближње Штурмове функције за то, што у опште две узастопне Штурмове функције не могу бити никад равне нули за једну и исту вредност x-а. Јер кад би н. пр. функције $f_n(x)$ и $f_{n+1}(x)$ биле равне нули за $x = a$, онда би за ту вредност x-а услед једначина 2) морале бити $= 0$ све остале Штурмове функције; дакле би тада имали:

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad f'(x) = 0$$

а то се коси са оним, што смо на крају прве алинеје овог првог случаја сазнали да стоји и мора стојати.

Ако је сад $f_n(a) = 0$, то можемо наћи један тако мали број δ, да између $a - \delta$ и $a + \delta$ не лежи ни једна вредност x-а, за коју би функције $f_{n-1}(x)$ и $f_{n+1}(x)$ биле равне нули. Штурмов значни низ изгледаће дакле на оном месту, где стоје функције:

$$f_{n-1}(x), \quad f_n(x) \quad \text{и} \quad f_{n+1}(x)$$

на један од ових начина:

	$f_{n-1}(x)$	$f_n(x)$	$f_{n+1}(x)$
За $x = a - \delta$	$-$	$\pm$	$+$
$x = a$	$-$	0	$+$
$x = a + \delta$	$-$	$\pm$	$+$

	$f_{n-1}(x)$	$f_n(x)$	$f_{n+1}(x)$
За $x = a - \delta$	$+$	$\pm$	$-$
$x = a$	$+$	0	$-$
$x = a + \delta$	$+$	$\pm$	$-$

Али вредио ма који од ових случајева, вазда ћемо имати једну мену и једну след на местима, која одговарају функцијама: $f_{n-1}(x)$, $f_n(x)$ и $f_{n+1}(x)$, и то како у значним низовима за $x = a - \delta$ и $x = a + \delta$, тако и у значном низу за $x = a$, пошто и у овом значном низу а на поменутом месту имамо једну мену и једну след па сменули ми нулу са знаком $+$ или $-$. Пошто то исто стоји, ако би која и од осталих функција, што су између $f(x)$ и $f_r(x)$ била $= 0$ за $x = a$, то смемо изрећи теорему:

1°. *Кад променљива x при свом непрекидном рашћењу пређе вредност a, која поништава једну или више од оних Штурмових функција, што стоје измеђ прве и последње, онда у значном низу за непосредно већу вредност $x = a + \delta$ има исто онолико мена, колико их има у оном, који одговара непосредно мањој вредности $x = a - \delta$.*

92. Да бисмо сазнали, како стоји са бројем мена и у оном случају, кад x пређе једну вредност c, која поништава саму функцију $f(x)$, која је вредност дакле корен једначине $f(x) = 0$, морамо најпре доказати теорему:

2°. *Да, кад x расти од $c - \delta$ до $c + \delta$ функција $f(x)$ и њен први извод $f'(x)$ јесу противног знака, пре него x пређе корен c, а да су истог знака, пошто x пређе исти корен.*

И доиста, кад x расти од $c - \delta$ до c, онда, ако је први извод $f'(x)$ при том све једнако положан, функција $f(x)$ расти, па пошто је она за $x = c$ равна нули, то је она пре тога била одречна. А ако је први извод од $x = c - \delta$ до $x = c$ све једнако одречан, $f(x)$ опада и пошто је она за $x = c$ равна нули, то је она пре тога била положна. Дакле за вредности x-а од $c - \delta$ па до корена c $f(x)$ и $f'(x)$ противног су знака.

Исто тако кад x расти од c до $c + \delta$, онда, ако је први извод $f'(x)$ при том све једнако положан, функција $f(x)$ расти и пошто је за $x = c$ равна нули, она је положна. Ако ли је први извод при том одречан, $f(x)$ опада, и пошто је за $x = c$ равна нули, то је она одречна. Дакле за вредности x-а од c па до $c + \delta$ $f(x)$ и $f'(x)$ истог су знака (види № 11).

У осталом ово, што смо доказали, увиђа се и из једначина:

$$f(c-\delta) = -\delta f'(c) + \delta^2 f''(c) - \ldots \pm \delta^m f^m(c)$$

1.)

$$f(c+\delta) = \quad \delta f'(c) + \delta^2 f''(c) + \ldots + \delta^m f^m(c)$$

где смо десно изоставили $f(c)$, јер је она $= 0$, пошто је c корен једначине $f(x) = 0$.

Ми можемо положни број δ узети тако мали, да су први чланови десно од знака једнакости бројно већи од збира свију доцнијих чланова, а осим тога да између

$c - \delta$ и $c + \delta$ не лежи ни једна вредност x-а, која би поништила $f'(x)$. Пошто су тада количине:

$$f'(c-\delta),\quad f'(c),\quad f'(c+\delta)$$

истога знака, а из једначина се види, да су

$$f(c-\delta) \text{ и } f'(c)$$

противног и

$$f(c+\delta) \text{ и } f'(c)$$

истог знака, онда је јасно, да су и

$$f(c-\delta) \text{ и } f'(c-\delta)$$

такође противног, а

$$f(c+\delta) \text{ и } f'(c+\delta)$$

истог знака. Но може се на сличан начин и лако доказати, да су $f(x)$ и $f'(x)$ противног знака, пре него пређе x вредност c, а истога знака пошто x пређе вредност c и онда, кад је c више пута корен једначини $f(x) = 0$. Читалац може ово што смо нашли оправдати и геометријским путем, ако конструише једначину $y = f(x)$, где је $f(x)$ полином задате једначине 1).

Узмимо сад, да је c један од корена једначине 1), а δ тако мали број, да између $x = c - \delta$ и $x = c + \delta$ нема ни једне вредности x-а за коју би и први извод $f'(x)$ био једнак нули. Пошто се на основу теореме 1° у № 91 број мена у значном низу неће променути, ако би за $x = c$ била једнака нули једна или више од оних Штурмових функција, које долазе после $f'(x)$, то је онда довољно видети како стоји само са знацима функција $f(x)$ и $f'(x)$ у значним низовима пре и после $x = c$.

И ту су могућа само ова два случаја:

		$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
за	$x = c - \delta$	$-$	$+$	$+$	$-$
	$x = c$	0	$+$	0	$-$
	$x = c + \delta$	$+$	$+$	$-$	$-$

Одавде видимо, да се, пошто је x прешло корен c изгубила једна мена и то она, коју су градиле функција $f(x)$ и $f'(x)$ пре $x = c$. Дакле можемо изрећи теорему:

3°. *Кад x при свом непрекидном растењу пређе један корен* **c** *задате једначине, губи се једна мена; т. ј. у значном низу одмах иза $x = c$ има једна мена мање, него у оном пре $x = c$.*

Претпоставимо сад, да су:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ .\ .\ .\ \alpha_k$$

k корена задате једначине, који се налазе између два броја a и b, где је $a < b$ и узмимо, да су ти корени поређани по својој величини, т. ј. тако, да је сваки већи од оног пред њим.

Ако сад у Штурмовим функцијама 3) у № 90 заменимо x најпре са a, добићемо један значан низ и у њему извесан број мена. При непрекидном рашћењу x-а од $x = a$ до $x = \alpha_1 - \delta$ тај број мена неће се променути, пошто између те две границе нема ни једног корена једначине 1). Највише се може променути положај тих мена, а то ће бити, ако у том размаку имадне вредности, које поништавају једну или више Штурмових функција, што стоје између $f'(x)$ и $f_r(x)$. За $x = \alpha_1 - \delta$ функције $f(x)$ $f'(x)$ морају бити противног, а за $x = \alpha_1 + \delta$ истог знака, дакле се једна мена на том месту изгубила, пошто је x прошло корен α_1, или другаче значни низ за $x = \alpha_1 + \delta$ има једну мену мање, од оног за $x = \alpha_1 - \delta$.

Кад x даље расти од $x = \alpha_1 + \delta$ до $x = \alpha_2 - \delta$ број мена неће се променути, јер и у том размаку нема ни једног корена једначине 1). Али место следи, коју су $f(x)$ и $f'(x)$ у значном низу за $x = \alpha_1 + \delta$ градиле, стоји у значном низу за $x = \alpha_2 - \delta$ мена, јер услед теореме 2° $f(x)$ и $f'(x)$ морају бити увек противног знака пре него што x пређе један корен једначине. И ова мена дошла је и могла је доћи само отуда, што је $f'(x)$ у размаку од $x = \alpha_1 + \delta$ до $x = \alpha_2 - \delta$ морала свој знак променути; а та промена знака дошла је опет отуда, што је x у истом размаку прешло један или више — али у непарном броју — корена једначине: $f'(x) = 0$. Међу тим и та промена знака није могла променути број, него само положај мена (теор. 1° у № 91). Према свему овоме у значном низу за $x = \alpha_2 - \delta$ има дакле онолико исто мена, колико их је било и у значном низу за $x = \alpha_1 + \delta$. Пошто x пређе и други корен α_2, онда се опет губи једна мена, јер мена, коју су $f(x)$ и $f'(x)$ градиле за $x = \alpha_2 - \delta$ претвара се у след за $x = \alpha_2 + \delta$. И тако у значном низу за $x = \alpha_2 + \delta$ има две мене мање, него у ономе за $x = \alpha$. Кад овако и даље наставимо умовати, наћи ћемо, да пошто је x прешло и k-ти корен $x = \alpha_k$, у значном низу за $x = \alpha_k + \delta$ мора бити k мена мање него у првом значном низу. Пошто између α_k и b нема ни једног више корена једначине, то онда и у значном низу за $x = b$ мора бити k мена мање него у значном низу за $x = a$.

Дакле је доказана теорема:

4°. *Ако су a и b два стварна броја и $a < b$, онда значни низ за $x = b$ не може имати никада више мена од низа за $x = a$, али их може имати мање. И колико год мена мање има значни низ за $x = b$ од значног низа за $x = a$, толико има стварних корена између a и b.*

И ово је *Штурмова теорема*

93. У овој №-и учинићемо неколико не безначајних примедаба о Штурмовој теореми.

1'.) Да бисмо избегли у Штурмових функција разломљене сачиниоце ми можемо при узастопним деобама множити — а ако је потребно и делити — дељенике и делиоце са ма каквим, али *положним* бројевима. Последица тога биће само та, што ће Штурмове функције бити помножене — или подељене — са положним бројевима, што очигледно нема утицаја на њихов знак.

2'.) Ако се међу Штурмовим функцијама налази једна $f_k(x)$, која не мења свога знака при рашћењу x-а од a до b, а то ће бити, ако између тих граница нема ни једног корена једначине:

$$f_k(x) = 0,$$

онда, да бисмо дознали број стварних корена, који се налазе између a и b, можемо слободно прекинути низ Штурмових функција са $f_k(x)$ и доцније функције по све занемарити. И онда, колико је год мена мање у значном низу, који добијамо, кад ставимо $x = b$ у функцијама:

$$5.) \qquad f(x),\ f'(x),\ f_2(x)\ .\ .\ .\ f_k(x),$$

него што их је у значном низу, који се добија, када у истим функцијама ставимо $x = a$, толико ће стварних корена морати бити између $x = a$ и $x = b$.

Јер *прво,* кад год x при свом непрекидном рашћењу од $x = a$ до $x = b$ пређе један корен једначине $f(x) = 0$, значни низ, који одговара функцијама 5), губи по једну мену: *друго,* ако која вредност x-а, која се налази између a и b поништава коју од ових функција, што су између $f(x)$ и $f_k(x)$, онда се број значних мена не мења; и *треће,* $f_k(x)$ на основу претпоставке има при том вазда исти знак као пре $f_r(x)$. Јасно је дакле, да онолико корена мора бити између a и b, колико се мена изгубило, кад је x при свом рашћењу од a па до b прешло вредност b.

Према овоме, што смо рекли, кад при тражењу Штурмових функција наиђемо на једну $f_k(x)$, која нема стварних корена, онда са том функцијом можемо слободно прекинути тражење Штурмових функција, јер пошто $f_k(x)$ нема стварних корена, то она има увек један и исти знак за сваку могућу вредност x-а.

Ова примедба даје се лако применути на Штурмову функцију, која је трећа идући с десна на лево и која је односно x другог степена. Јер корени те функције, која је другог степена дакле облика:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

јесу уображени, ако је $b^2 - 4ac < 0$.

3'). Последња Штурмова функција јесте сталан и од x-а независан број. Како нам сад није стало до његове вредности, него само до знака, то онда, да бисмо овај дознали, треба имати на уму (№ 91 друга алинеја), да тај знак мора бити противан знаку вредности, коју трећа Штурмова функција с десна добија за ону вредност x-а, која поништава претпоследњу функцију, која је првог степена.

4'). Ако би за један од бројева a и b или за оба та броја, између којих хоћемо да знамо колико има стварних корена, једна или више од Штурмових функција биле равне нули, онда та околност не треба да нас ни мало буни. Јер ако су једна или више од оних функција, које се налазе између прве и последње равне нули, онда, као што већ знамо, свака од њих лежи између двеју функција, чије су вредности противнога знака. Метнули дакле у значном низу место функције, која постаје равна нули, нулу или знак $+$ или знак $-$ или најзад не водили о њој никаква рачуна, у сваком случају имаћемо на дотичном месту једну само мену.

Ако је пак $f(a) = 0$, онда је прво: a корен једначине. Да бисмо нашли колико још корена има између a и b, могли бисмо упоредити значни низ за $x = b$ са оним за $x = a + \delta$. Али како у овом последњем низу $f(x)$ и $f'(x)$ имају исти знак, то онда тај низ и онај за $x = a$, кад у овом занемаримо прву нулу, имају исти број мена, и по томе између a и b биће још онолико корена, колико је мена мање у значном низу за $x = b$ него у оном за $x = a$.

Лако је на слични начин увидети, да ако је $f(b) = 0$ једначина има онолико корена између a и b колико је мена мање у значном низу за $x = b$, него у оном за $x = a$. Јер у овом случају место да тражимо, колико је корена између a и b, могли бисмо тражити, колико их је између a и $b + \delta$. Али то није нужно, јер у значном низу за $x = b$, кад прву нулу изоставимо, има онолико исто мена, колико их је и у значном низу за $x = b + \delta$, пошто у овом низу $f(x)$ и $f'(x)$ имају једнак знак. Дакле у овом случају просто ваља поредити низове за $x = a$ и $x = b$ као и у обичним приликама.

Ако је најзад и $f(a) = 0$ и $f(b) = 0$, онда у значним низовима за $x = a$ и $x = b$ треба занемарити прве нуле, и тада, ако је у значном низу за $x = b$ k мена мање, него у оном за $x = a$, биће $(k+1)$ корена од a па до b урачунавајући ту и корене a и b.

5'). Најзад кад је једначина m-ног степена, а број је Штурмових функција потпун, онда број уображених корена можемо сазнати, гледајући просто на знаке првих чланова тих функција. Јер ако узимајући у обзир само знаке првих чланова тих функција имамо n мена дакле $m - n$ следи, онда за $x = -\infty$ значни низ, који даје Штурмове функције имаће $m-n$ мена, а значни низ за $x = +\infty$ имаће n мена, дакле разлика између броја мена у значном низу за $x = -\infty$ и броја мена у значном низу за $x = +\infty$ износи $m-2n$, и толико је свега стварних корена. Дакле је $2n$ број уображених корена. И тако дакле стоји:

Дана једначина има онолико спрегова уображених корена, колико има мена у значном низу, који постаје из знакова првих чланова Штурмових функција.

94. Што се тиче саме употребе Штурмове теореме, има се рећи ово, што иде:

Да бисмо нашли, колико свега положних корена има једначина, замениђемо у Штурмовим функцијама x са нулом најпре, а после са таквим једним бројем g, за који су први чланови тих функција већи од збира свију доцнијих чланова њиних, за који су дакле број знаци вредности тих функција истоветни са знацима вредности првих њиних чланова. Изнад тога броја g не може бити више ни једног положног корена једначине. Јер кад је за $x = g$ први члин од $f(x)$ већи од збира свију доцнијих, то ће тим пре бити за вредности веће од g, што се јасно увиђа, кад се $f(x)$ напише у овом облику:

$$A_0 x^m \left[1 + \frac{A_1}{A_0 x} + \frac{A_2}{A_0 x^2} + \dots\right]$$

Пошто се сад за $x = 0$ све Штурмове функције своде на своје последње чланове, и пошто су даље за $x = g$ све функције истог знака са првим својим члановима, то је јасно, да ће се на први поглед Штурмових функција моћи лако сазнати, колики је број мена у значним низовима за $x = 0$ и $x = g$, а да те значне низове и не бележимо. На основу Штурмове теореме број свију положних корена јесте онолики, колико је мена мање у значном низу за $x = g$, него у оном за $x = 0$.

На са свим сличан начин дознаје се и број свију одречних корена, ако се само узме на ум то, да почев од једне извесне границе $-g'$ па на даље у одречном смислу свака Штурмова функција па дакле и $f(x)$ не мења више свој знак, који је знак истоветан са знаком њеног првог члана, и да изнад тога броја $-g'$ не лежи више ни један одречан корен.

Зарад простијег посла узимљу се место $+g$ и $-g'$ обично $+\infty$ и $-\infty$ са којим се симболима означавају бројеви у положном и одречном смислу, који расту бесконачно, које дакле можемо замислити бројно веће од ма како великог броја, дакле и тако велике да су за њих први чланови Штурмових функција већи од збира свију доцнијих чланова њиних, усљед чега изнад тих бројева неће и не може више бити стварних корена једначине.

Све ово, што смо рекли, кад у кратко сведемо, имаћемо:

a). Да бисмо дознали, колико свега стварних корена има једначина, замениђемо x у Штурмовим функцијама:

$$f(x), \quad f'(x), \quad f_2(x) \;\dots\; f_r(x)$$

 20

са $-\infty$ и $+\infty$. Колико је мена мање у значном ñизу за $x=+\infty$ него у оном за $x=-\infty$, толико свега стварних корена мора имати једначина.

b). Да бисмо дознали, колико је од тих корена положних, а колико одречних, замениһемо у Штурмовим функцијама x и са нулом. Колико је мена у значном низу за $x=0$ мање него у оном за $x=-\infty$, толико је свега одречних корена, а колико је мена у значном низу за $x=+\infty$ мање него у оном за $x=0$ толико је свега положних корена.

Најзад, ако хоћемо да раздвојимо корене н. нр. положне треба овако радити:

Замењујмо x у Штурмовим функцијама најпре са целим бројевима, којих је размак мало повеһи н. пр. 10, дакле са:

$$0, \quad 10, \quad 20, \quad 30 \; . \; . \; . \; .$$

дотле, док не наиђемо на број, за који значни низ има онолико исто мена колико и за $x=+\infty$. Изнад тога броја не може више бити ни једног корена. Упоређујући за тим значне низове, који одговарају узастопним бројевима 0, 10, 20, 30 . . , видеһемо, између која два узастопна броја има корена, и то још колико их има. Кад између два ма која узастопна броја н. пр. између 10 и 20 има више корена, онда, да бисмо их раздвојили, замениһемо x у Штурмовим функцијама најпре са 15 и видеһемо, да ли између 10 и 15 или само између 15 и 20 или у исти мах и између 15 и 20 и 10 и 15 има корена. У првом случају замениһемо x у Штурмовим функцијама са целим бројевима између 10 и 15 у другом између 15 и 20, а у трећем између 10 и 20. Ако при том нађемо, да између два узастопна цела броја има више од једног

корена, замењиваһемо у Штурмовим функцијама x са вредностима, којих је размак мањи од јединице и т. д.

Међу тим, пошто смо дознали, да има више од једног корена између два узастопна броја, онда те корене можемо после тога лакше раздвојити по № 88. На пр. ако смо дознали, да између 15 и 16 има више од једног корена, онда да бисмо их раздвојили, замењиваһемо x у $f(x)$ са 15·1, 15·2, 15·3 . . . до 16. На исти овај начин можемо покушати, да раздвојимо и корене за које будемо нашли, да леже између два броја, којих је размак 0·1. Н. пр. ако више од једног корена има између 15·2 и 15·3 замењиваһемо x у $f(x)$ са 15·21, 15·22, 15·23 . . . до 15·3, и ако при том не успемо, можемо покушати, да их раздвојимо помоһу Штурмових функција и т. д. У осталом ми һемо доцније показати једну простију методу, помоһу које смо у стању не само увек раздвојити, него и израчунати корене, који се један од другог разликују за врло мало. Помоһу досадањих метода довољно је раздвојити корене, којих разлика не износи мање од 0·1.

95. Штурмова теорема даје нам начин, да можемо сазнати услове, који треба да су испуњени, па да сви корени једначине буду стварни. Пошто сви стварни корени леже између два броја $-g'$ и $+g$, које можемо узети колико нам драго велике, то онда мало час поменути услови исти су са онима, који треба да су испуњени, па да у значном низу за $x=+g$ буде онолико мена мање него у низу за $x=-g'$ колики је степен једначине. Ако је дакле једначина m-ног степена, онда у низу за $x=g$ треба да је m мена мање него у ономе за $x=-g'$. Али да би низ Штурмових функција могао дати m мена, треба да тих функција буде барем $(m+1)$. Но како их више од $(m+1)$ не може ни бити, јер је полином једначине т. j. $f(x)$ m-ног степена, то онда треба

да их буде равно $(m+1)$. Отуда следује, да степен сваке Штурмове функције треба да буде за јединицу нижи од степена оне, која је пред њом.

Ми већ знамо, да су за врло велике положне и одречне вредности x-а вредности Штурмових функција истог знака са вредностима њиних првих чланова, одакле следује, да је при овом послу довољно, ако водимо рачуна о знацима само првих чланова тих функција.

Узмимо нека је задата једначина:

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0.$$

Први члан полинома $f(x)$ јесте x^m, а први члан првог извода $f'(x)$ јесте mx^{m-1}. Што се тиче првих чланова доцнијих Штурмових функција, они зависе сем од x-а још и од сачинилаца функције $f(x)$ и добијају се помоћу узастопних деоба извршених онако, како је при доказу Штурмове теореме напоменуто. Нека су први чланови узастопних Штурмових функција ово:

$$6.) \quad x^m, \quad mx^{m-1}, \quad b_2 x^{m-2}, \quad b_3 x^{m-3} \dots, b_m,$$

где последњи члан не зависи од x. Тражени услов, да сви корени једначине буду стварни, исти је дакле са оним, који треба да је испуњен, па да низ количина под 6) за $x = +g$ покаже m мена мање него ли за $x = -g'$ а да то буде, треба само да тај низ количина покаже m мена, кад се у њему x замени са $-g'$, а m следи, кад се x замени са $+g$. Али у низу количина 6) степен сваке доцније нижи је за једну јединицу само од степена оне, која је пред њом, и према томе низ количина под 6) треба да има само мена за $x = -g'$, а само следи за $x = +g$. Према свему томе услови, који треба да су испуњени, па да сви корени једначине буду стварни, јесу ти, да сачиниоци количина под 6) морају бити сви положни, дакле:

$$b_2 > 0, \quad b_3 > 0, \; . \; . \; . \; b_m > 0$$

Број тих услова не може бити већи од $(m-1)$, али може бити мањи, ако су неке од ових неједначина последице осталих.

Тако н. пр. ако је дата кубна једначина:

$$x^3 + px + q = 0$$

Штурмове су функције:

$$f(x) = x^3 + px + q$$

$$f'(x) = 3x^2 + p$$

$$f_2(x) = -\frac{2p}{3}x - q$$

$$f_3(x) = -\frac{4p^3 + 27q^2}{4p^2}$$

Овде је:

$$b_2 = -\frac{2p}{3}, \quad b_3 = -\frac{4p^3 + 27q^2}{4p^2}$$

Да би дакле сви корени кубне једначине били стварни, треба да су b_2 и b_3 већи од нуле, дакле:

$$p < 0 \quad \text{и} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

а то су услови стварности, које смо већ нашли (№ 58).

Пример 1. Дата је једначина:

$$f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0$$

Да се испита, колико стварних корена она има, и да се њени корени раздвоје. — Овде је:

$$f'(x) = 3x - 7, \quad f_2(x) = 2x - 3, \quad f_3(x) = +1$$

Дакле је:

	$f(x)$	$f'(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
За $x = -\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x = 0$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x = +\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$

У значном низу за $x = -\infty$ има три мене, у оном за $x = 0$ две, а у оном за $x = +\infty$ ни једна. И тако једначина има три стварна корена, и то један одречан а два положна.

Даље су за $x = -10$ и $x = +10$ значни низови:

За $x = -10$	$-$	$+$	$-$	$+$
„ $x = +10$	$+$	$+$	$+$	$+$

Из упоређаја ових низова са оним за $x = +\infty$ и $x = -\infty$ види се, да изнад -10 и $+10$ нема корена. Даље:

За $x = -5$	$-$	$+$	$-$	$+$
„ $x = +5$	$+$	$+$	$+$	$+$

Дакле сви корени леже између -5 и $+5$. Ако у горњим Штурмовим функцијама замењујемо даље, добићемо:

За $x = -4$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x = -3$	$+$	$+$	$-$	$+$

У првом од ова два низа има три, у другом има две мене, дакле јединцати одречни корен лежи између -4 и -3. Даље је:

за $x = 0$	$+ - - +$
„ $x = 1$	$+ - - +$
„ $x = 2$	$+ + + +$

Одавде видимо, да оставша два корена леже између $+1$ и $+2$. Ако бисмо хтели да их раздвојимо, лакше ће бити, да радимо по методама № 88 но то нећемо чинити, јер смо тамо корене ове једначине већ раздвојили.

Пример 2. Дата је једначина:

$$f(x) = 2x^4 - 13x^2 + 10x - 19 = 0$$

Овде су осем ове следеће Штурмове функције:

$$f'(x) = 4x^3 - 13x + 5,$$

$$f_2(x) = 13x^2 - 15x + 38.$$

Последње две Штурмове функције нису нам потребне, јер као што се види корени једначине $f_2(x) = 0$ јесу уображени и по томе $f_2(x)$ остаје вазда истог знака за сваку могућу вредност x-а. Овде дакле налази своје примене примедба 2') у № 93. Довољно је то јест, имати посла само са знацима низова, који одговарају првим трима Штурмовим функцијама. Замењујући x са $-\infty$, 0, $+\infty$, добијамо:

	$f(x)$	$f'(x)$	$f_2(x)$
за $x = -\infty$:	+	−	+
„ $x = 0$:	−	+	+
„ $x = +\infty$:	+	+	+

Дакле једначина има само два стварна корена, један положан, а други одречан, и два уображена Значни су низови:

за $x = -10$:	+	−	+
„ $x = -5$:	+	−	+
„ $x = 10$:	+	+	+
„ $x = 5$:	+	+	+

Дакле одречни корен лежи између 0 и -5, а положни између 0 и $+5$. Даље је:

за $x = +4$:	+	+	+
„ $x = +3$:	+	+	+
„ $x = +2$:	−	+	+

Дакле положни корен лежи између $+2$ и $+3$. Даље је:

за $x = -4$:	+	−	+
„ $x = -3$:	−	−	+

Дакле одречни корен лежи између -4 и -3.

Пример 3. Задата је једначина:

$$f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 16 = 0$$

Овде су:

$$f'(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 3$$

$$f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 8$$

$$f_3(x) = 2x - 7$$

$$f_4(x) = -153.$$

Сада је значни низ:

за $x = -\infty$	−	+	−	−	−
„ $x = 0$	+	−	−	−	−
„ $x = +\infty$	+	+	+	+	−

Одакле следује, да једначина има само један стваран и то одречан корен. Даље је:

за $x = -10$	−	+	−	−	−
„ $x = -5$	−	+	−	−	−
„ $x = -4$	−	+	−	−	−
„ $x = -3$	+	+	−	−	−

Одавде је очевидно, да јединцати стварни корен лежи између — 3 и — 4.

Примедба. Код ових примера учињена је употреба од примедбе 1[1]) у № 93.

Други случај $r < m$

96. Кад је $r < m$, онда је последња Штурмова функција $f_r(x)$, која је $(m-r)$-ог степена, највећи заједнички делилац функцији $f(x)$ и њеном првом изводу $f'(x)$. Но тада на основу науке о једнаким коренима једначина има само r различних корена: $x_1, x_2, x_3 \ldots x_r$, а остали корени $x_{r+1}, x_{r+2} \ldots x_m$ јесу само извесна понављања првих.

Ако сад узмемо на ум, да заједничка мера дељеника и делиоца мора делити и остатак, то је онда јасно, да се сада Штурмове функције могу и овако представити:

$$1.)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= (x-x_{r+1})(x-x_{r+2})\ldots(x-x_m)\ F(x)\\ f'(x) &= (x-x_{r+1})(x-x_{r+2})\ldots(x-x_m)\ F_1(x)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_n(x) &= (x-x_{r+1})(x-x_{r+2})\ldots(x-x_m)\ F_n(x)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_r(x) &= (x-x_{r+1})(x-x_{r+2})\ldots(x-x_m)\ F_r(x)\end{aligned}\right.$$

Ми ћемо функције:

$$F(x),\ F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots\ F_n(x)\ \ldots\ F_r(x)$$

звати *простијим* Штурмовим функцијама. Прва од њих, т. ј. $F(x)$ јесте r-ног степена, $F_n(x)$ јесте $(r-n)$-ога степена, а последња $F_r(x)$ јесте сталан и од нуле различан број

Ако сад функције:

$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x)\ \ldots\ f_n(x)\ \ldots\ f_r(x)$$

заменимо овим њиним вредностима у једначинама 2) № 90 и за тим скратимо у свакој од њих лево и десно са заједничким чиниоцем:

$$(x-x_{r+1})(x-x_{r+2})\ \ldots\ (x-x_m)$$

онда ћемо лако увидети, да *теорема* 1° у № 91 *вреди и сада за* **простије** *Штурмове функције.*

Ако се сад стварни број x_1 јавља као корен једначине α_1-пута, то онда можемо ставити:

$$2.)\qquad f(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}\varphi(x).$$

где $(x-x_1)$ не може бити делилац функције $\varphi(x)$, пошто једначина $f(x) = 0$ има број x_1 само α_1 пута као корен. Из једначине 2) добијамо за први извод функције $f(x)$:

$$3.)\quad f'(x) = (x-x_1)^{\alpha_1-1}\left\{\alpha_1\varphi(x) + (x-x_1)\,\varphi'(x)\right\}$$

где $\varphi'(x)$ значи први извод функције $\varphi(x)$. Из једначина 2) и 3) узимајући у обзир оне под 1) добијамо:

$$4.)\quad \frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1}\left\{\alpha_1 + (x-x_1)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right\}$$

Ако узмемо, што је увек могуће, δ тако мало, да за $x = x_1 - \delta$ и $x = x_1 + \delta$ чинилац:

$$\alpha_1 + (x - x_1)\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$$

испадне положан, онда је увиђавно, да ће количник

$$\frac{F_1(x)}{F(x)}$$

бити одречан за $x = x_1 - \delta$, а положан за $x = x_1 + \delta$, или што је све једно, да ће функције $F(x)$ и $F_1(x)$ бити противно означене за $x = x_1 - \delta$, а једнако означене за $x = x_1 + \delta$. Дакле према овоме и теорема 2° па дакле и теорема 3° у № 92 вреди такође и за *простије* Штурмове функције. Али функције:

5). $\qquad f(x),\ f'(x),\ f_2(x)\ .\ .\ .\ f_r(x)$

морају очевидно за ма какву вредност x-а дати значни низ са истим бројем мена и следи, као и функције:

6.) $\qquad F(x),\ F_1(x),\ F_2(x)\ .\ .\ .\ F_r(x)$

јер функције 5) постају, кад функције 6) помножимо са заједничким чиниоцем:

7.) $\qquad (x - x_{r+1})(x - x_{r+2})\ .\ .\ .\ (x - x_m)$

Одатле следује, да функције под 5) морају бити истог знака са одговарајућим под 6) и то за ма какву вредност x-а, ако је за ту вредност x-а чинилац 7) положан, а противног знака, ако је чинилац 7) одречан. У осталом лако је увидети, да је тај чинилац за сваку — стварну — вредност x-а стваран.

Одатле следује још јасније, да *теореме* 1° и 3° *морају вредети за* **простије** *Штурмове функције.*

Према свему, што смо до сада рекли, можемо исказати теорему:

1°. *Ако су a и b стварни бројеви и $a < b$, онда значни низ за $x = b$ не може имати више мена него ли онај за $x = a$, а може их имати мање; и колико год их је мање у значном низу за $x = b$, него ли у значном низу за $x = a$, толико различних корена једначине $f(x) = 0$ морају лежати између бројева a и b.*

Пример. Нека је задата једначина:

$$f(x) = x^5 + 3x^4 - 46x^3 - 18x^2 + 621x - 945 = 0$$

Овде је сада:

$$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 138x^2 - 36x + 621$$

$$f_2(x) = 31x^3 - 9x^2 - 783x + 1593$$

$$f_3(x) = x^2 - 6x + 9$$

Овде је $f_3(x)$ последња Штурмова функција, дакле је она заједнички делилац функција $f(x)$ и $f'(x)$, и с тога задата једначина има једнаких корена. Значни су низови:

за $x = -\infty$:	$-$	$+$	$-$	$+$
„ $x = 0$:	$-$	$+$	$+$	$+$
„ $x = +\infty$:	$+$	$+$	$+$	$+$

Једначина дакле има три различна стварна корена, један положан а два одречна. Даље је

за $x = -5$: $\quad 0 \quad - \quad + \quad +$

одакле видимо, да је -5 један од одречних корена.

Овде налази примене примедба учињена у № 93, 4' друга алинеја. То јест између 0 и -5 нема више ни једног корена једначине. Други корен — одречни — мора се дакле налазити изнад броја -5. За $x = -6$ и $x = -7$ имамо:

$$\text{за } x = -6: \quad - \quad - \quad - \quad +$$

$$\text{„ } x = -7: \quad 0 \quad + \quad - \quad +$$

Дакле између -5 и -6 нема ни једног корена. Други одречни корен једначине јесте, као што се види из значног низа за $x = -7$, број -7.

Да бисмо нашли границе положног корена, заменимо у Штурмовим функцијама x са $+10$, па ћемо добити:

$$\text{за } x = +10: \quad + \quad + \quad + \quad +$$

Кад упоредимо овај значни низ са оним за $x = +\infty$, видећемо да изнад броја $+10$ нема корена. Замењујмо дакле даље:

$$\text{за } x = +5: \quad + \quad + \quad + \quad +$$

Дакле изнад $+5$ нема корена. Замењујмо даље:

$$\text{за } x = +4: \quad + \quad + \quad + \quad +$$

$$\text{„ } x = +3: \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Као што се види $x = 3$ јесте корен задате једначине, и пошто су за ту вредност x-а први и други извод функције $f(x)$ једнаки нули, а трећи извод $f'''(x)$ једнак 80, то је број 3 три пута корен задатој једначини. Разлог, зашто се значни низ Штурмових функција за $x = +3$ састоји из самих нула, дају нам једначине 1) у овој №-и.

97. Кад су сачиниоци једначине:

$$1.)\quad f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

уображени, дакле:

$$a_1 = b_1 + c_1 i, \quad a_2 = b_2 + c_2 i \; \ldots \; a_m = b_m + c_m i$$

где поједина a и b значе стварне бројеве, па се траже стварни корени једначине 1), онда можемо пре свега, узевши у полиному $f(x)$ стварне делове заједно, а уображене заједно, представити једначину у овом облику:

$$2.)\qquad f(x) = \varphi(x) + i\,\varphi_1(x) = 0$$

где је:

$$\varphi(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m$$

$$\varphi_1(x) = \qquad c_1 x^{m-1} + \ldots + c_{m-1} x + c_m$$

За стварне вредности x-а може вредети једначина 2) само тако, ако је:

$$3.)\qquad \varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_1(x) = 0$$

Заједнички корени ових двеју једначина јесу стварни корени једначине 2) или 1). Ако је сада $\varphi_r(x)$ највећи заједнички делилац функције $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, то су онда корени једначине:

$$4.)\qquad \varphi_r(x) = 0$$

заједнички корени једначина 3), па дакле и стварни корени једначине 2) или 1). Пошто су сачиниоци једначине 4) стварни, то се онда по досадањим методама испитује, да ли она има стварних корена, и ако их има, онда се они израчунавају по методама, које ћемо доцније показати.

Штурмов верижни разломак.

98. Ми опет претпостављамо, да су сачиниоци једначине:

$$f(x) = 0$$

стварни бројеви.

Помоћу једначине 2) у № 90 можемо лако добити следећи верижни разломак, који ћемо звати *Штурмовим верижним разломком:*

$$1.)\qquad \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)} = q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \cdots - \cfrac{1}{q_r}}}$$

Ми ћемо узастопне приближне разломке овог верижног разломка означити са:

$$2.)\qquad \frac{p_{11}}{1},\ \frac{p_{12}}{p_{22}},\ \frac{p_{13}}{p_{23}}\ \ldots\ \frac{p_{1r}}{p_{2r}}.$$

За израчунавање тих приближних разломака служе обрасци (алгеб. анал. № 148):

$$3.)\qquad \begin{cases} p_{11} = q_1 \\ p_{12} = q_2 p_{11} - 1 \\ p_{13} = q_3 p_{12} - p_{11} \\ \cdots\cdots \\ p_{1r} = q_r p_{1,r-1} - p_{1,r-2} \end{cases}$$

$$4.)\qquad \begin{cases} p_{22} = q_2 \\ p_{23} = q_3 p_{22} - 1 \\ p_{24} = q_4 p_{23} - p_{22} \\ \cdots\cdots \\ p_{2r} = q_r p_{2,r-1} - p_{2,r-2} \end{cases}$$

Разлика последњих двају приближних разломака јесте (алг. анал. № 148 обр. 5):

$$\frac{p_{1r}}{p_{2r}} - \frac{p_{1,r-1}}{p_{2,r-1}} = \frac{-1}{p_{2r}\,p_{2,r-1}}$$

Одавде добијамо:

$$p_{1r}\,p_{2,r-1} - p_{1,r-1}\,p_{2r} = -1$$

или:

$$5.)\qquad p_{1,r-1}\,p_{2r} = 1 + p_{1r}\,p_{2,r-1}$$

Кад погледамо на једначине 3) увидећемо лако, да вреди теорема:

1°. *Кад је у низу функција:*

$$1,\ p_{11},\ p_{12},\ p_{13}\ \cdot\cdot\cdot\ p_{1r}$$

једна од оних, које се налазе између крајних 1 *и* p_{1r} *за* $x = a$ *равна нули, онда су две обли;кне функције различне од нуле и противно означене.*

Јер кад би ма које две узастопне од тих функција за исту вредност $x = a$ биле равне нули, онда би на основу једначина 3) и све остале функције, које су пред њима, морале бити $= 0$, а то не може бити, јер се коси са другом једначином под 3).

На исти начин, како се доказује теорема 1° у № 91, могли бисмо доказати и овде, *да поменута теорема вреди не само за значни низ Штурмових функција него и за значни низ функција:*

$$1,\ p_{11},\ p_{12},\ \cdot\cdot\cdot\ p_{1r}.$$

И то нам даје повода испитати, да случајно и теорема 3° у № 92 не вреди за значни низ ових последњих функција. Зарад тога узмимо последњи приближни разломак Штурмовог верижног разломка:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{p_{1r}}{p_{2r}} = \frac{p_{1r}\,p_{1,r-1}}{p_{2r}\,p_{1,r-1}}$$

Али ово се услед обрасца 5) претвара у:

$$6.)\qquad \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{p_{1r}}{p_{1,r-1}} \cdot \frac{p^2_{1,r-1}}{1 + p_{1r}\,p_{2,r-1}}$$

Али је p_{1r} цела функција x-а r-ног степена, као и $F(x)$, а тако је исто и p_{2r} цела функција x-а $(r-1)$-ог степена као и $F_1(x)$. Одатле следује нужно:

$$7.)\qquad \frac{p_{1r}}{F(x)} = \frac{p_{2r}}{F_1(x)} = c,$$

где је c сталан број. Из ове једначине видимо да једначине:

$$F(x) = 0\,,\quad p_{1r} = 0$$

имају исте корене. Ако је сада x_1 такав један и то стваран корен, онда се може увек наћи један тако мали број δ, да $p_{1r}\,p_{2,r-1}$ буде <1 и да количник:

$$\frac{p^2_{1,r-1}}{1 + p_{1r}\,p_{2,r-1}}$$

буде положан и то како за $x = x_1 - \delta$ тако и за $x = x_1 + \delta$. Узимајући сад ово на ум дознајемо из обрасца 6), да су оба количника:

$$\frac{p_{1r}}{p_{1,r-1}}\,,\quad \frac{F(x)}{F_1(x)}$$

једнако означени, како пре, тако и после $x = x_1$, то јест оба су одречни за $x = x_1 - \delta$ а оба положни за $x = x_1 + \delta$. Дакле су:

$$p_{1r}\quad \text{и}\quad p_{1,r-1}$$

противно означени за $x = x_1 - \delta$ а једнако означени за $x = x_1 + \delta$. Према овоме можемо изрећи теорему:

2°. *Кад променљива x при свом непрекидном рашћењу пређе једну вредност x_1, која поништава функцију $f(x)$, онда значни низ функција:*

$$8.)\qquad 1,\ p_{11},\ p_{12},\ p_{13},\ \cdot\cdot\cdot\ p_{1r}$$

губи једну мену т. ј. у значном низу тих функција за $x = x_1 + \delta$ има једна мена мање него ли у низу за $x = x_1 - \delta$.

Из теореме 1° и 2° следује, *да се за Штурмову теорему 1° у № 96 место значног низа Штурмових функција може употребити значни низ функција* 8).

99. Напишимо једначине 2) у № 90 овако:

$$
\begin{array}{lll}
 & f_2(x) & = q_1 f'(x) - f(x) \\
 & -q_2 f_2(x) + f_3(x) & = -f'(x) \\
1.) & f_2(x) - q_3 f(x) + f_4(x) & = 0 \\
 & \cdots\cdots\cdots & \\
 & f_{n-2}(x) - q_{n-1} f_{n-1}(x) + f_n(x) & = 0
\end{array}
$$

У овим једначинама сматрајмо функције:

$$f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots\ f_n(x)$$

као непознате. Детерминанта сачинилаца на левој страни јесте $= 1$, дакле ако хоћемо да израчунамо $f_n(x)$ добићемо:

$$
2.)\quad f_n(x) = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \{q_1 f'(x) - f(x)\} \\
-q_2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -f'(x) \\
1 & -q_3 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 1 & -q_4 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -q_{n-1} & 0
\end{vmatrix}
$$

Детерминанта може се представити као разлика:

$$3.)\qquad R\, f'(x) - S\, f(x)$$

где је:

$$
4.)\quad R = (-1)^{n-2} \begin{vmatrix}
q_1 & 1 & 0 & 0, & \ldots & 0 & 0 \\
-1 & -q_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 1 & -q_3 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -q_4 & \ldots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -q_{n-2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -q_{n-1}
\end{vmatrix}
$$

$$
4.)\quad S = (-1)^{n-2} \begin{vmatrix}
-q_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
1 & -q_3 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 1 & -q_4 & \ldots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \ldots & -q_{n-2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -q_{n-1}
\end{vmatrix}
$$

Да бисмо множење са $(-1)^{n-2}$ означено у 4) и 5) извршили, променићемо у 4) знаке свима основцима, који стоје у другој, четвртој, шестој и т. д. врсти и за тим свима основцима, који стоје у трећем, петом, седмом и т. д. стубу. Исто тако у 5) променићемо знаке основцима свију врста, којих су казаљке непарне, а затим основцима свију стубова, којих су казаљке парне. На тај начин добићемо:

$$6.)\quad R=\begin{vmatrix} q_1 & 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 1 & q_2 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_3 & 1 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_4 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots q_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 1 & q_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$7.)\qquad S = R_{q_1}$$

где под R_{q_1} разумемо субдетерминанту детерминанте 6) и то ону, која одговара основку њеном q_1. Али кад од једначина 3) у № 98 узмемо $(n-1)$ првих, а од једначина 4) $(n-2)$ првих, онда из њих добијамо простом елиминацијом:

$$8.)\qquad R = p_{1,n-1}, \quad S = p_{2,n-1}.$$

Према томе једначина 2) сада гласи:

$$9.)\qquad f_n(x) = p_{1,n-1}\, f'(x) - p_{2,n-1}\, f(x)$$

у ком је обрасцу исказана веза Штурмових функција са функцијама $f(x)$ и $f'(x)$ као и са бројиоцима и имениоцима приближних разломака Штурмовог верижног разломка. Не треба испустити из вида, да су:

$$p_{1,n-1} \quad \text{и} \quad p_{2,n-1}$$

целе функције x-а, прва $(n-1)$-ог и друга $(n-2)$-ог степена.

Силвестрове функције.

100. Једначина 9) у № 99 јесте особени случај ове општије једначине:

$$1.)\qquad \chi_{m-n}(x) = \varphi_{n-1}(x)\, f'(x) - \psi_{n-2}(x)\, f(x)$$

у којој су $\chi_{m-n}(x)$, $\varphi_{n-1}(x)$ и $\psi_{n-2}(x)$ целе и рационалне алгебарске функције x-а, и то прва $(m-n)$-ог, друга $(n-1)$-ог, а трећа $(n-2)$-ог степена. Кад из једначине 1) и једначине 9) избацимо $f'(x)$ добићемо:

$$2.)\qquad f_n(x)\varphi_{n-1}(x) - \chi_{m-n}(x)\, p_{1,n-1} = f(x)\left\{\psi_{n-2}(x)\, p_{1,n-1} - \varphi_{n-1}(x)\, p_{2,n-1}\right\}$$

Оба производа лево од знака равности јесу $(m-1)$-ог степена, док је међу тим десно већ први чинилац m-ног степена. Дакле једначина 2) може само тако вредити, ако су обе стране идентично једнаке нули т. ј.

$$3.)\qquad \frac{\chi_{m-n}(x)}{f_n(x)} = \frac{\varphi_{n-1}(x)}{p_{1,n-1}} = \frac{\psi_{n-2}(x)}{p_{2,n-1}} = \lambda_{n-1}$$

Кад λ_{n-1} неби било стално него функција x-а, онда би λ_{n-1} морало бити бесконачно велика количина првог степена за сваки — стварни или уображени — корен једначине:

$$4.)\qquad p_{1,n-1} = 0,$$

и то само за корене те једначине. То би исто морало бити са λ_{n-1} и за сваки корен једначине:

$$5.) \qquad p_{2,n-1} = 0$$

и то опет само за корене те једначине.

Али између бројилаца и именилаца двају узастопних приближних разломака постоји однос:

$$p_{1,n-1}\, p_{2,n-2} - p_{2,n-1}\, p_{1,n-2} = -1$$

одакле следује да $p_{1,n-1}$ и $p_{2,n-1}$ немају никаквог заједничког делиоца, који би од јединице био различан. Према томе корени једначине 4) различни су од корена једначине 5). Претпоставка дакле, да је λ_{n-1} функција x-а, даје повода несугласици, која се не може уклонити. Дакле мора бити:

$$\lambda_{n-1} = c$$

где је c сталан број. Дакле сва разрешења функционе једначине 1) налазе се у једначинама:

$$6.) \qquad \begin{aligned} \chi_{m-n}(x) &= \lambda_{n-1}\, f_n(x), \\ \varphi_{n-1}(x) &= \lambda_{n-1}\, p_{1,n-1}, \\ \psi_{n-2}(x) &= \lambda_{n-1}\, p_{2,n-1}, \end{aligned}$$

где је λ_{n-1} један и исти, али у осталом са свим произвољан сталан број. Ако од безбројних разрешења узмемо једно, онда је њиме и вредност од λ_{n-1} одређена.

Ако су само r корена једначине:

$$f(x) = 0$$

међу собом различни и то:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \; \ldots \; x_r$$

а остали:

$$x_{r+1}, \quad x_{r+2} \; \ldots \; x_m$$

само извесна понављања истих, онда функције:

$$f_{r+1}(x), \quad f_{r+2}(x) \; \ldots$$

идентично су $= 0$. Та околност даје нам повода потражити независно разрешење функционе једначине 1.) Зарад тога треба нам се осврнути на № 39 и № 40, и то посебице на теорему 2° № 39.

Ми ћемо покушати, да у функцији:

$$3.) \quad Z_k = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & z_0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & z_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & z_{n-1} \end{vmatrix}$$

сменимо неодређене количине:

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \; \ldots \; z_{n-1}$$

извесним функцијама x-а и за тим потражити, да ли се функције:

$$\chi_{m-n}(x), \quad \varphi_{n-1}(x), \quad \psi_{n-2}(x)$$

дају тако одредити, да функциона једначина 1) буде задовољена. Једначина 1) може се представити и овако:

$$1'). \qquad \frac{\chi_{m-n}(x)}{f(x)} = \varphi_{n-1}(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - \psi_{n-2}(x)$$

где је:

$$8.) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{x-x_k}$$

$$= \frac{\alpha_1}{x-x_1} + \frac{\alpha_2}{x-x_2} + \frac{\alpha_3}{x-x_3} + \ldots + \frac{\alpha_r}{x-x_r}$$

где бројеви $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_r$, којих је збир $= m$, показују, колико су пута корени даној једначини количине:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \; \ldots \ldots \; x_r.$$

Образац 8) лако је доказати. Пошто је:

$$f(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2} \ldots (x-x_r)^{\alpha_r}$$

то онда, кад узмемо десно и лево природне логаритме, добићемо:

$$lf(x) = \alpha_1 l(x-x_1) + \alpha_2 l(x-x_2) + \ldots + \alpha_r l(x-x_r)$$

Пошто су први изводи двеју једнаких функција једнаки, то онда по упуствима № 10 добијамо из ове једначине непосредно образац 8).

Да видимо, да ли се може узети да је:

$$9.) \qquad \varphi_{n-1}(x) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & 1 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & z^{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & z^{n-1} \end{vmatrix}$$

Кад ову једначину помножимо са оном под 8) и то леву страну левом, а последњи стуб десне детерминанте десном страном, т. ј. са количином:

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{x-x_k}$$

и кад при том узмемо на ум, да је

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_r = m = S_0$$

добићемо

$$10.) \quad \varphi_{n-1}(x)\frac{f'(x)}{f(x)} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & v_0 + 0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & v_1 + P_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & v_{n-2} + P_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & v_{n-1} + P_{n-1} \end{vmatrix}$$

где је за $p = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$ узето краткоће ради:

$$11.) \qquad v_p = \sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k x^p}{x-x_k}$$

као и

$$12.) \quad P_p = S_{p-1} + S_{p-2}x + S_{p-3}x^2 + \ldots + S_0 x^{p-1}$$

Дакле сад смемо ставити, да је:

$$13.)\quad \psi_{n-2}(x) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-2} & 0 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & P_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \dots & S_{2n-4} & P_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-3} & P_{n-1} \end{vmatrix}$$

Захтев, који треба сада да је испуњен, па да вреди функциона једначина 1) јесте:

$$14.)\quad \frac{\chi_{m-n}(x)}{f(x)} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-2} & v_0 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & v_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \dots & S_{2n-4} & v_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-3} & v_{n-1} \end{vmatrix}$$

На основу једначина 9) и 13) функције:

$$\varphi_{n-1}(x) \quad \text{и} \quad \psi_{n-2}(x)$$

јесу целе функције x-а, и то прва $(n-1)$-ог, а друга $(n-2)$-ог степена, као што смо и тражили да буде. У једначинама 9), 13) и 14) имаћемо дакле једно разрешење функционе једначине 1), ако само будемо доказали још и то, да се израз функције: $\chi_{m-n}(x)$ у једначини 14) јавља као цела функција x-а $(m-n)$-ог степена. Тај доказ извршићемо у следећој №-и.

101. Да бисмо сада и то доказали, радићемо на начин, који иде. Ставимо за $p = 0, 1, 2 \dots (n-1)$:

$$1.)\quad w_p = v_p f(x) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k^p \cdot \frac{f(x)}{x-x_k}$$

$$= \alpha_1 x_1^p \frac{f(x)}{x-x_1} + \alpha_2 x_2^p \frac{f(x)}{x-x_2} + \dots + \alpha_r x_r^p \frac{f(x)}{x-x_r}$$

И кад то, што рекосмо, учинимо, онда ћемо из једначине 14) у № 100, кад је лево и десно помножимо са $f(x)$ — десно последњи стуб детерминанте — добити:

$$2.)\quad \chi_{m-n}(x) \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-2} & w_0 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & w_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \dots & S_{2n-4} & w_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-3} & w_{n-1} \end{vmatrix}$$

Кад по Horner-овом начину делења поделимо функцију $f(x)$ са $(x-x_k)$ добићемо као количник једну целу функцију $(m-1)$-ог степена и тај количник јесте:

$$3.)\quad \frac{f(x)}{x-x_k} = x^{m-1} + \left.\begin{matrix} a_1 \\ x_k \end{matrix}\right\} x^{m-2} + \left.\begin{matrix} a_2 \\ a_1 x_k \\ x_k^2 \end{matrix}\right\} x^{m-3} + \dots$$

$$+ \left.\begin{matrix} a_{m-2} \\ a_{m-3} x_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k^{m-2} \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} a_{m-1} \\ a_{m-2} x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k^{m-1} \end{matrix}\right\}$$

Ако десну страну ове једначине уредимо по падајућим степенима од x_k добићемо:

$$\frac{f(x)}{x-x_k}=\left.\begin{array}{c}x^{m-1}\\ a_1x^{m-2}\\ a_2x^{m-3}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{m-2}x\\ a_{m-1}\end{array}\right|+\left.\begin{array}{c}x^{m-2}\\ a_1x^{m-3}\\ a_2x^{m-4}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{m-3}x\\ a_{m-2}\end{array}\right|x_k+\left.\begin{array}{c}x^{m-3}\\ a_1x^{m-4}\\ a_2x^{m-5}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{m-4}x\\ a_{m-3}\end{array}\right|x_k^2+\ldots+\left.\begin{array}{c}x\\ a_1\end{array}\right\}x_k^{m-2}+x_k^{m-1}$$

Како постају сачиниоци деснога реда из полинома $f(x)$, лако је увидети. Треба само у овоме поступно смањивати изложиоце његових чланова са 1, 2, 3, 4 и т. д. Ако сад краткоће ради означимо сачиниоце узастопних чланова десног реда са:

$$f_{m-1}(x),\ f_{m-2}(x),\ f_{m-3}(x)\ \ldots$$

и у опште сачиниоца h-тог члана са $f_{m-h}(x)$, тако, да је:

$$4.)\quad f_{m-h}(x)=x^{m-h}+a_1x^{m-h-1}+a_2x^{m-h-2}+\ldots$$
$$+a_{m-h-1}x+a_{m-h},$$

добићемо:

$$5.)\quad \frac{f(x)}{x-x_k}=f_{m-1}(x)+x_kf_{m-2}(x)+x_k^2f_{m-3}(x)+\ldots$$
$$+x_k^{m-2}f_1(x)+x_k^{m-1}$$

Ми смо горе ставили:

$$w_p=\alpha_1x_1^p\frac{f(x)}{x-x_1}+\alpha_2x_2^p\frac{f(x)}{x-x_2}+\ldots+\alpha_rx_r^p\frac{f(x)}{x-x_r}$$

Кад на ову једначину применимо образац 5) добићемо:

$$w_p=\alpha_1x_1^p\Big\{f_{m-1}(x)+x_1f_{m-2}(x)+x_1^2f_{m-3}(x)+\ldots$$
$$+x_1^{m-2}f_1(x)+x_1^{m-1}\Big\}$$
$$+\alpha_2x_2^p\Big\{f_{m-1}(x)+x_2f_{m-2}(x)+x_2^2f_{m-3}(x)+\ldots$$
$$+x_2^{m-2}f_1(x)+x_2^{m-1}\Big\}$$
$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+\alpha_rx_r^p\Big\{f_{m-1}(x)+x_rf_{m-2}(x)+x_r^2f_{m-3}(x)+\ldots$$
$$+x_r^{m-2}f_1(x)+x_r^{m-1}\Big\}$$

Извршимо десно од знака једнакости означена множења са:

$$\alpha_1x_1^p,\ \alpha_2x_2^p,\ \alpha_3x_3^p,\ \ldots\ \alpha_rx_r^p$$

па за тим саберимо по вертикалним стубовима и збир чланова, који постају из $(n-1)$ првих стубова, узмимо заједно, а тако исто и збир чланова. који постају из осталих $(m-n+1)$ стубова. Ако још узмемо на ум, да се:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_r$$

јављају редом:

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_r$ — пута као корени једначине $f(x)=0$, услед чега је у опште:

$$\alpha_1x_1^p+\alpha_2x_2^p+\alpha_3x_3^p+\ldots+\alpha_rx_r^p=S_p$$

добиђемо:

$$w_p = \left\{ S_p f_{m-1}(x) + S_{p+1} f_{m-2}(x) + \ldots + S_{p+n-2} f_{m-n+1}(x) \right.$$
$$+ \left\{ S_{p+n-1} f_{m-n}(x) + S_{p+n} f_{m-n-1}(x) + \ldots \right.$$
$$\left. + S_{p+m-2} f_1(x) + S_{p+m-1} \right\}$$

Ако ставимо краткоће ради:

6.) $Q_p = S_p f_{m-1}(x) + S_{p+1} f_{m-2}(x) + \ldots + S_{p+n-2} f_{m-n+1}(x)$

7.) $R_{p+n-1} = S_{p+n-1} f_{m-n}(x) + S_{p+n} f_{m-n-1}(x) + \ldots$
$$+ S_{p+m-2} f_1(x) + S_{p+m-1}$$

добиђемо даље:

8.) $$w_p = Q_p + R_{p+n-1}$$

Ако сад помоћу овог обрасца заменимо у детерминанти обрасца 2) количине:

$$w_0, \quad w_1, \quad w_2 \ldots w_{n-1}$$

њиним вредностима, моћи ће се иста детерминанта разложити на два сабирка (алг. анал. № 171) и тако ћемо онда имати:

$$\chi_{m-n}(x) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & Q_0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & Q_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & Q_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & Q_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & R_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & R_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & R_{2n-3} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & R_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Ако помоћу обрасца 6) заменимо поједина Q у првој од ових двеју детерминаната њиним вредностима, видећемо, да ће се иста детерминанта моћи разложити на неколико нових детерминаната, од којих је свака на основу № 169, 4° и № 170 алг. анал. једнака нули. Услед тога добијамо из последње једначине:

$$9.)\quad \chi_{m-n}(x) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & R_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & R_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & R_{2n-3} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & R_{2n-2} \end{vmatrix}$$

И тако је сада доказано, да је функција $\chi_{m-n}(x)$ једначином 14) у № 100 дата као цела функција x-а $(m-n)$-ог степена. И тиме је доказано то, да нам једначине 9), 13) и 14) дају потпуно разрешење функцијоне једначине 1). Функције:

$$\chi_{m-n}(x) \quad \text{и} \quad \varphi_{n-1}(x)$$

пронашао је *Sylvester*, али не у облику детерминаната. Образац 9) изнашао је *Cayley*.

Примери.

a). Да се помоћу обрасца 11) у № 38 докаже да је:

10.) $$\varphi_{n-1}(x) = \Sigma\,(x-x_{\mu_1})(x-x_{\mu_2}) \ldots$$
$$\ldots(x-x_{\mu_{n-1}}) \left\{ P(x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \ldots x_{\mu_{n-1}}) \right\}^2$$

b.) Да се докаже, да кад се $\varphi_{n-1}(x)$ узме као у обрасцу 10) *a*) и

$$11.)\qquad \chi_{m-n}(x) = \Sigma \frac{f(x)}{(x-x_{\mu_1})(x-x_{\mu_2})\dots(x-x_{\mu_n})} \times$$

$$\left\{P(x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \dots x_{\mu_n})\right\}^2,$$

да је онда функцијона једначина 1) задовољена.

c). Да се из израза функције $\chi_{m-n}(x)$ у 11) *b*) изведе израз исте функције, који је под 14), № 100.

102. Напишимо функцијону једначину 1) №-е 100 и ону, која из ње постаје, кад се *n* смени са $(n+1)$

$$\chi_{m-n}(x) = f'(x)\,\varphi_{n-1}(x) - f(x)\,\psi_{n-2}(x)$$

$$\chi_{m-n-1}(x) = f'(x)\,\varphi_n(x) - f(x)\,\psi_{n-1}(x)$$

Кад из ових једначина избацимо $f'(x)$, добићемо:

$$1.)\qquad \chi_{m-n}(x)\,\varphi_n(x) - \chi_{m-n-1}(x)\,\varphi_{n-1}(x)$$

$$= f(x)\left\{\varphi_{n-1}(x)\,\psi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)\,\psi_{n-2}(x)\right\}$$

Ако на чиниоце у загради десно од знака једнакости применимо обрасце 6) у № 100, добићемо:

$$\varphi_{n-1}(x).\psi_{n-1}(x) - \varphi_n(x).\psi_{n-2}(x)$$

$$= \lambda_{n-1}\,\lambda_n\left\{p_{1,n-1}\,p_{2n} - p_{1n}\,p_{2,n-1}\right\} = \lambda_{n-1}\,\lambda_n$$

јер је на основу обрасца 5) №-е 148 алг. анал.

$$p_{1,n-1}\,p_{2n} - p_{1n}\,p_{2,n-1} = 1$$

Према томе једначина 1) претвара се у ову:

$$2.)\qquad \chi_{m-n}(x)\,\varphi_n(x) - \chi_{m-n-1}(x)\,\varphi_{n-1}(x) = \lambda_{n-1}\lambda_n\,f(x),$$

где су обе стране целе функције x-а. Из обрасца 9) у № 100 и обрасца 9) у № 101 дознајемо лако, да су сачинилац од x^{m-n} у функцији $\chi_{m-n}(x)$ и сачинилац од x^n у функцији $\varphi_n(x)$ међу собом једнаки. Сваки је од њих т. ј.

$$3.)\qquad = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix} = \Delta_n$$

Упоређивањем сачинилаца од x^m лево и десно од знака једнакости у једначини 2) добијамо:

$$4.)\qquad \lambda_{n-1}\,\lambda_n = \Delta_n^2$$

Ако претпоставимо, да су количине:

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3\ \dots\ \Delta_r$$

све од нуле различне, добићемо:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \Delta_2^2, \qquad \lambda_2 \lambda_3 = \Delta_3^2,$$
$$\lambda_3 \lambda_4 = \Delta_4^2, \qquad \lambda_4 \lambda_5 = \Delta_5^2,$$
$$\lambda_5 \lambda_6 = \Delta_6^2, \qquad \lambda_6 \lambda_7 = \Delta_7^2,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$\lambda_{2p-1}\lambda_{2p} = \Delta_{2p}^2, \qquad \lambda_{2p-2}\lambda_{2p-1} = \Delta_{2p-1}^2$$

Кад производ левих једначина поделимо са производом десних, добићемо:

$$\lambda_1 \lambda_{2p} = \frac{\Delta_2^2 \Delta_4^2 \Delta_6^2 \ldots \Delta_{2p}^2}{\Delta_3^2 \Delta_5^2 \Delta_7^2 \ldots \Delta_{2p-1}^2}$$

Али је на основу образаца 6) у № 100 и образаца 3) у № 98:

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 . q_1$$

Даље делећи (№ 98) $f(x)$ са $f'(x)$ добијамо:

$$q_1 = \frac{1}{m} x + \frac{a_1}{m^2}$$

Даље из образаца 9) у № 100 добијамо за $n = 2$

$$\varphi_1(x) = S_0 x - S_1 = mx + a_1$$

Из последње две једначине следује:

$$\varphi_1(x) = m^2 q_1$$

одакле увиђамо да је:

$$\lambda_1 = m^2 = S_0^2 = \Delta_1^2$$

и за то:

$$6.) \qquad \lambda_{2p} = \frac{\Delta_2^2 \Delta_4^2 \Delta_6^2 \ldots \Delta_{2p}^2}{\Delta_1^2 \Delta_3^2 \Delta_5^2 \ldots \Delta_{2p-1}^2},$$

$$7.) \qquad \lambda_{2p-1} = \frac{\Delta_1^2 \Delta_3^2 \Delta_5^2 \ldots \Delta_{2p-1}^2}{\Delta_2^2 \Delta_4^2 \Delta_6^2 \ldots \Delta_{2p-2}^2}.$$

Услед горе учињене претпоставке о количинама Δ сва λ испадају коначна и положна.

Исто тако ни једна од Sylvester-ових функција, а те су:

$$f(x),\ f'(x),\ \chi_{m-2}(x)\ \ldots\ \chi_{m-r}(x)$$

и

$$1,\quad \varphi_1(x),\quad \varphi_2(x) \ldots \varphi_r(x)$$

не може у овом случају бити идентично једнака нули, јер је у свима њима сачинилац највишег степена различан од нуле. Дакле је и број Штурмових функција:

$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x)\ \ldots\ f_r(x)$$

потпун, т. ј. једнак броју $(r+1)$, а узастопни имениоци:

$$q_1,\quad q_2,\quad q_3\ \ldots\ q_r$$

у Штурмовом верижном разломку јесу сви линеарне функције x-а.

Ако сад узмемо у обзир једначине 6) и 7) ове №-е и једначине 6) у № 100, то ћемо видети, да вреди теорема:

1°. *Кад је у свима Sylvester-овим функцијама:*

$$f(x),\ f'(x),\ \chi_{m-2}(x)\ \ldots\ \chi_{m-r}(x)$$

сачинилац највишег степена од x различан од нуле, онда при примени Штурмове теореме могу се оне узети место Штурмових функција.

Кад се најзад још обазремо на последњи став № 98 онда лако увиђамо, да вреди и теорема:

2°. *Кад је у свима Sylvester-овим функцијама:*

$$1,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\ \ldots\ \varphi_r(x)$$

сачинилац највишег степена од x различан од нуле, онда се и оне могу употребити место Штурмових функција при примени Штурмове теореме.

103. Сад ћемо да пређемо на случај, кад је сачинилац од x^{m-n+1} у функцији $\chi_{m-n+1}(x)$ различан од нуле, и кад су равни нули сачиниоци првих k чланова у функцији $\chi_{m-n}(x)$, док је међу тим сачинилац од x^{m-n-k} различан од нуле. Узмимо функцију Z_{n-1} коју смо већ у № 40 обр. 3) дефинисали:

$$1.)\quad Z_{n-1} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-2} & z_0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \ldots & S_{2n-4} & z_{n-2} \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-3} & z_{n-1} \end{vmatrix}$$

Ако узмемо на ум образац 9) у № 101 а особито последњи стуб тамошње детерминанте, то ћемо онда лако наћи, да је мало час учињена претпоставка поред $(r-1)$

првих идентичних једначина исказана у следећим једначинама:

$$2.)\qquad Z_{n-1,n-1} \gtrless 0$$

$$3.)\quad \left| \begin{array}{l} S_0\ Z_{n-1,0} + S_1\ Z_{n-1,1} + \ldots + S_{n-1}\ Z_{n-1,n-1} = 0 \\ S_1\ Z_{n-1,0} + S_2\ Z_{n-1,1} + \ldots + S_n\ Z_{n-1,n-1} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ S_{n+k-2}\ Z_{n-1,0} + S_{n+k-1}\ Z_{n-1,1} + \ldots + S_{2n+k-3}\ Z_{n-1,n-1} = 0 \end{array} \right.$$

$$4.)\quad S_{n+k-1}\ Z_{n-1,0} + S_{n+k}\ Z_{n-1,1} + \ldots + S_{2n+k-2}\ Z_{n-1,n-1} = M$$

где је M различно од нуле. У овим једначинама симбол

$$Z_{n-1,r}$$

означава ону субдетерминанту детерминанте 1) која одговара основку z_r њеног последњег стуба.

Из ових претпоставака добијају се на начин, који иде, врло важни резултати.

Ми ћемо да узмемо функцију:

$$5.)\quad Z_{n+p-1} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n+p-2} & z_0 \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n+p-1} & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n+p-2} & S_{n+p-1} & \ldots & S_{2n+2p-4} & z_{n+p-2} \\ S_{n+p-1} & S_{n+p} & \ldots & S_{2n+2p-3} & z_{n+p-1} \end{vmatrix}$$

где претпостављамо, да је p апсолутан цео број и $< k$. Пошто је услед претпоставке, коју смо горе учинили,

$Z_{n-1,n-1}$ различно од нуле, то можемо са том количином помножити једначину 5) лево и десно. Множење детерминанте на десној страни биће извршено, ако основке њеног n-ог стуба, који почиње са S_{n-1}, будемо помножили са поменутом количином. И кад то множење n-тог стуба будемо извршили, ми ћемо, ослањајући се на последњу у № 171 алгеб. анал. исказану теорему додати основцима помноженог n-ог стуба одговарајуће основке $(n-1)$ првих стубова помножене редом са:

$$Z_{n-1,0},\ Z_{n-1,1},\ Z_{n-1,2}\ \ldots$$

И за тим ће основци n-ог стуба бити:

$$S_0 Z_{n-1,0} + S_1 Z_{n-1,1} + \ldots + S_{n-1} Z_{n-1,n-1}$$

$$S_1 Z_{n-1,0} + S_2 Z_{n-1,1} + \ldots + S_n\ Z_{n-1,n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{n+p-1} Z_{n-1,0} + S_{n+p} Z_{n-1,1} + \ldots + S_{2n+p-2} Z_{n-1,n-1}$$

Пошто смо сад узели, да је $p < k$, то су на основу једначина 3) сви ови основци једнаки нули, а због тога је онда и

$$Z_{n-1,n-1} \times Z_{n+p-1} = 0$$

или пошто је први чинилац услед неједначине под 2) различан од нуле:

$$6.)\qquad Z_{n+p-1} = 0$$

за $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (k-1)$.

Али ако узмемо $p = k$, онда се поменута последња теорема у № 171 алгеб. анал. као и горњи обрасци 3) и 4) могу употребити тако, да најзад изађе као резултат једначина:

$$7.)\qquad (Z_{n-1,n-1})^k Z_{n+k-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} S_0 & \ldots & S_{n-2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & z_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & \ldots & S_{2n-3} & 0 & 0 & \ldots & 0 & z_{n-1} \\ S_n & \ldots & S_{2n-2} & 0 & 0 & \ldots & M & z_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n+k-2} & & S_{2n+k-4} & 0 & M & \ldots & & z_{n+k-2} \\ S_{n+k-1} & & S_{2n+k-3} & M & & & & z_{n+k-1} \end{vmatrix}$$

У стубовима, где је M, стоје више тога основка саме нуле; а основци испод M нису забележени за то, што од њих вредност детерминанте на основу треће теореме у № 171 алг. анал. и не зависи. Кад ту теорему овде узастопце више пута применимо, добићемо:

$$8.)\quad (Z_{n-1,\,n-1})^k Z_{n+k-1} = (-)^{\frac{k(k+1)}{1.2}} M^k Z_{n-1}$$

Али је количник:

$$(-1)^{\frac{k(k+1)}{1.2}} M^k : (Z_{n-1,\,n-1})^k$$

стална и од нуле различна количина, коју ћемо означити краткоће ради са M_{n+k}. И тада ћемо добити из 8):

$$9.) \qquad Z_{n+k-1} = M_{n+k} \cdot Z_{n-1}$$

Кад у Z_{n+p-1} заменимо неодређене количине:

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2 \; . \; . \; . \; . \; z_{n+p-1}$$

одређеним функцијама x-а, онда детерминанта постаје равна функцијама:

$$\chi_{m-n-p}(x), \quad \varphi_{n+p-1}(x), \quad \psi_{n+p-2}(x).$$

Једначине 6) и 9) дају дакле:

$$10.) \qquad \chi_{m-n-p}(x) = 0$$

$$\varphi_{n+p-1}(x) = 0$$

$$\psi_{n+p-2}(x) = 0$$

за $p = 0, 1, 2, \ldots (k-1)$; а иначе:

$$11.) \qquad \chi_{m-n-k}(x) = M_{n+k} \cdot \chi_{m-n}(x)$$

$$\varphi_{n+k-1}(x) = M_{n+k} \cdot \varphi_{n-1}(x)$$

$$\psi_{n+k-2}(x) = M_{n+k} \cdot \psi_{n-2}(x).$$

104. Кад су, као што смо то у № 103 претпоставили, у Sylvester-овој функцији $\chi_{m-n}(x)$ првих k сачинилаца једнаки нули, а $(k+1)$-ви сачинилац то јест онај, који је уз x^{m-n-k}, различан од нуле, дакле кад степен

Sylvester-ове функције од $(m-n)$-ог спада на $(m-n-k)$-ти онда на основу образаца 6) у № 100 мора то исто бити случај и са Штурмовом функцијом: $f_n(x)$. Делећи $f_{n-1}(x)$ са $f_n(x)$ добићемо количник $(k+1)$-ог степена, који ћемо количник означити са q_{n+k}, и остатак, који је $(m-n-k-1)$-ог степена. Истинитост овог тврђења лако је увидети, ако се само узме на ум то, да је $f_{n-1}(x)$ степена $(m-n+1)$ а $f_n(x)$ услед садање претпоставке степена $(m-n-k)$-ог. Сада је Штурмова функција:

$$1.) \qquad f_{n-1}(x) = q_{n+k} f_n(x) - f_{n+k+1}(x).$$

У низу Штурмових функција 2) № 90 јавља се дакле празнина, јер нема Штурмових функција:

$$f_{n+1}(x), \quad f_{n+2}(x) \; . \; . \; . \; . \; f_{n+k}(x)$$

Ове Штурмове функције *изузев последњу* одговарају Sylvester-овим функцијама

$$\chi_{m-n-1}(x), \quad \chi_{m-n-2}(x) \; . \; . \; . \; \chi_{m-n-k+1}(x)$$

које су идентично $= 0$. Ако ове Sylvester-ове функције изоставимо, то ће се у низу Sylvester-ових функција јавити празнина, која одговара оној код Штурмових функција. Али је број Штурмових функција, којих нема, за јединицу већи од броја Sylvester-ових функција, којих такође нема. Функција $f_n(x)$ одговара у исти мах двема Sylvester-овим функцијама

$$2.) \qquad \chi_{m-n}(x) = \lambda_{n-1} f_n(x)$$

$$3.) \qquad \chi_{m-n-k}(x) = \lambda_{n+k-1} f_n(x)$$

и као што се из прве једначине 11) у № 103 лако увиђа, производ:

$$\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n+k-1}$$

истог је знака са сталним чиниоцем M_{n+k} у једначинама 11) поменуте №-е.

Али став, да је производ двају обилжњих λ положан, вреди за размаке, у којима нема горе поменутих празнина. Ако дакле у *непотпуном* низу Sylvester-ових функција не бројимо мене и следи, које долазе на поменуте празнине, онда поменути низ има исто онолико мена и исто онолико следи, колико их има и у низу Штурмових функција. Оне прекобројне мене и следи исте су за $x = a$ и $x = b$. Ако је дакле код Штурмове теореме питање само о томе, колико нестаје мена, када x при свом непрекидном рашћењу од вредности $x = a$, пређе на вредност $x = b$, онда при пребројавању мена и следи за $x = a$ и $x = b$ све једно је, узимали ми у рачун поменуте прекобројне мене и следи или не.

Дакле стоји теорема:

1°. *Низ Sylvester-ових функција:*

$$f(x) \quad f'(x), \ \chi_{m-1}(x) \ . \ . \ . \ \chi_{m-r}(x)$$

може код Штурмове теореме заменити низ Штурмових функција у сваком случају.

Ако у низу Штурмових функција има празнина, онда се у низу бројилаца Штурмовог верижног разломка налазе тачно на истим местима такође празнине. Али непотпуни низ Sylvester-ових функција χ стоји према Штурмовим функцијама, што се тиче значног низа, онако исто, као што стоји непотпуни низ Sylvester-ових функција φ према бројиоцима Штурмовог верижног разломка. О овима вреди увек став на крају № 98. Дакле можемо исказати теорему:

2°. *Низ Sylvester-ових функција:*

$$1, \ \varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ . \ . \ . \ \varphi_r(x)$$

може се код Штурмове теореме употребити место Sturm-ових функција у сваком случају.

Budan-ова теорема.

105. У № 96 а помоћу обрасца 4) ми смо нашли, да је количник $f(x) : f'(x)$ одречан за $x = x_1 - \delta$ а положан за $x = x_1 + \delta$, ако је број x_1 корен једначине $f(x) = 0$ и ако је број δ положан али тако мали, да између $x_1 - \delta$ и $x_1 + \delta$ нема више ни једног од x_1 различног стварног корена једначине. И ово на основу поменуте №-е вреди, па био x_1 прост корен једначине, или јој он био више пута корен.

Претпоставимо, да је x_1 α-пута корен задатој једначини. Тада је:

$$1.) \qquad f(x) = (x - x_1)^{\alpha} \varphi(x).$$

Кад се изведу узастопни изводи функције $f(x)$ почев од првог па до α-ог, они се онда могу краће представити овако:

$$f'(x) = (x - x_1)^{\alpha-1}\,\varphi_1(x)$$

$$f''(x) = (x - x_1)^{\alpha-2}\,\varphi_2(x)$$

2.) $$f'''(x) = (x - x_1)^{\alpha-3}\,\varphi_3(x)$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$f^{\alpha-1}(x) = (x - x_1)\,\varphi_{\alpha-1}(x),$$

$$f^{\alpha}(x) = \varphi_{\alpha}(x)$$

Узастопне функције φ у овим једначинама не могу за $x = \alpha$ бити $= 0$ из разлога, који се лако даје увидети. Ми можемо дакле δ изабрати тако мало, да је свака од поменутих функција једног и истог знака за све вредности x-а почев од $x = x_1 - \delta$ па до $x = x_1 + \delta$. Међутим су функције:

$$f(x),\; f'(x),\; f''(x)\;\ldots\; f^{\alpha-1}(x),\; f^{\alpha}(x)$$

за $x = x_1$ све $= 0$. Дакле можемо и овде применути теорему горе поменуте №-е 96 и на тај начин имаћемо теорему:

1°. *Кад се x_1 јавља α пута као стварни корен једначине $f(x) = 0$, онда су количници:*

$$\frac{f(x)}{f'(x)},\; \frac{f'(x)}{f''(x)},\;\ldots\; \frac{f^{\alpha-1}(x)}{f^{\alpha}(x)}$$

сви одречни за $x = x_1 - \delta$, а сви положни за $x = x_1 + \delta$, и значни низ, који постаје из функција:

$$f(x),\quad f'(x),\;\ldots\; f^{\alpha-1}(x),\quad f^{\alpha}(x)$$

губи α мена, кад променљива x при свом непрекидном мењању пређе вредност x_1, која је α пута корен једначини $f(x) = 0$.

Узмимо сада, да је ξ β-пута корен једначине:

$$f^{k}(x) = 0,$$

која постаје, кад се k-ти извод функције $f(x)$ стави једнак нули, али у исти мах претпоставимо, да је за $x = \xi$ $(k-1)$-ви извод функције $f(x)$, т. ј. $f^{k-1}(x)$ различан од нуле. Сад вреде дакле једначине:

$$f^{k}(x) = (x - \xi)^{\beta}\varphi_{k}(x)$$

$$f^{k+1}(x) = (x - \xi)^{\beta-1}\varphi_{k+1}(x)$$

3.) $$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$f^{k+\beta-1}(x) = (x - \xi).\,\varphi_{k+\beta-1}(x),$$

$$f^{k+\beta}(x) = \varphi_{k+\beta}(x).$$

У овим једначинама вредности функција φ не могу никад бити $= 0$ за $x = \xi$.

Пошто положни број δ можемо узети тако мали, да је свака од функција φ једног и истог знака за све вредности x-а, које се налазе између $x = \xi - \delta$ и $x = \xi + \delta$, то можемо на узастопне изводе:

$$f^{k}(x),\; f^{k+1}(x),\; f^{k+2}(x)\;\ldots\; f^{k+\beta}(x)$$

применути теорему 1°. Значни низ, који постаје из ових функција, губи дакле β мена, кад x при свом непрекидном мењању пређе број ξ, који је β пута корен једначини: $f^{k}(x) = 0$.

Остаје нам да испитамо, како стоји са знацима функција $f^{k-1}(x)$ и $f^{k}(x)$, зарад чега ћемо морати разликовати два случаја, т. ј. да ли је β парно или непарно.

Ако је β паран број, онда из прве једначине под 3) увиђамо лако, да су: $f^{k}(\xi - \delta)$ и $f^{k}(\xi + \delta)$ истога знака. Но то исто вреди и за $f^{k-1}(\xi - \delta)$ и $f^{k-1}(\xi + \delta)$, јер на основу претпоставке ξ није корен једначине:

$$f^{k-1}(x) = 0$$

Дакле функције $f^{k-1}(x)$ и $f^{k}(x)$ од $x = \xi - \delta$ па до $x = \xi + \delta$ не губе мену или след, коју су градиле.

Ако је пак β непаран број, онда су:

$$f^{k}(\xi - \delta) \quad \text{и} \quad f^{k}(\xi + \delta)$$

противног знака, а међу тим су:

$$f^{k-1}(\xi - \delta) \quad \text{и} \quad f^{k-1}(\xi + \delta)$$

истога знака. Дакле ће количник

$$\frac{f^{k-1}(\xi + \delta)}{f^{k}(\xi + \delta)}$$

бити положан или одречан, како је кад количник

$$\frac{f^{k-1}(\xi - \delta)}{f^{k}(\xi - \delta)}$$

одречан или положан. Дакле тада функције:

$$f^{k-1}(x) \quad \text{и} \quad f^{k}(x)$$

од $x = \xi - \delta$ па до $x = \xi + \delta$ или губе једну мену или је добијају. Дакле стоји теорема:

2°. *Ако је $x = \xi$ β-пута корен једначини $f^{k}(x) = 0$ и ако је $f^{k-1}(\xi)$ различно од нуле, онда значни низ функција:*

$$f^{k-1}(x),\ f^{k}(x),\ f^{k+1}(x)\ .\ .\ .\ f^{k+\beta}(x)$$

губи паран број значних мена, кад променљива x при свом непрекидном рашћењу пређе број ξ. Број изгубљених мена или је β, или $\beta \pm 1$, како је кад β паран или непаран број. И ова теорема вреди и онда, ако би случајно било $f(\xi) = 0$, у ком би случају наравно $k > \alpha$ било.

Из теорема 1° и 2° следује ова:

3°. *Ако су a и b стварни бројеви, и $b > a$ онда значни низ функција:*

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x)\ .\ .\ .\ f^{m}(x)$$

не може за $x = b$ имати више мена, него ли за $x = a$. И број мена, којих нестаје при непрекидном прелазу од $x = a$, до $x = b$ или је једнак броју корена, што су између a и b, или је тај број мена за паран број већи.

И ово је Budan-ова теорема, коју неки зову и Fourier-овом за то, што ју је и овај, али много доцније и независно од првог, доказао.

Descartes-ова теорема у № 16 јавља се као особени случај Budan-ове. Јер за једну довољно велику вредност $x = +g$ значни низ функција:

4.) $f(x),\ f'(x),\ f''(x)\ .\ .\ .\ f^{m}(x)$

имаће очевидно само следи. Али за $x = 0$ ове функције постају једнаке сачиниоцима једначине $f(x) = 0$ (№ 17) помноженим можда са извесним положним бројевима, што немења знак поменутим сачиниоцима. Одатле следује, да при рашћењу x-а од $x = 0$ до $x = +g$ низ функција 4) мора изгубити онолико мена, колико их има у једначини $f(x) = 0$. Дакле број стварних корена између 0 и $+g$ може бити највише једнак броју мена у задатој једначини. Но ово је Descartes-ова теорема.

Rolle-ова теорема.

106. Она гласи овако:

1°. *Између два узастопна корена x_1 и x_2 једначине $f(x) = 0$ мора се налазити барем један корен једначине $f'(x) = 0$.* Јер за врло мало δ количници:

1.) $$\frac{f(x_1+\delta)}{f'(x_1+\delta)} \quad \text{и} \quad \frac{f(x_2-\delta)}{f'(x_2-\delta)}$$

морају бити противнога знака и то први положан а други одречан. Функције $f(x)$ и $f'(x)$ јесу непрекидне и $f(x)$ при непрекидном рашћењу x-а од $x_1+\delta$ до $x_2-\delta$ не може постати равна нули, јер на основу претпоставке између те две границе нема ни једног корена једначине $f(x) = 0$. Дакле количник:

$$\frac{f(x)}{f'(x)},$$

који је за $x = x_1+\delta$ положан, а за $x = x_2-\delta$ одречан, дакле између тих граница свој знак мења, може свој знак промепути само тако, ако $f'(x)$ при мењању x-а од $x = x_1$ до $x = x_2$ постане $= 0$ најмање један пут или непаран број пута.

Из овога, што на послетку рекосмо, следује, да се између два узастопна корена једначине $f'(x) = 0$ може налазити највише један корен једначине $f(x) = 0$ а може их никако и не бити. Јер кад би x_1 и x_2 били два *различна* корена једначине $f(x) = 0$, који се налазе између два узастопна корена ξ_1 и ξ_2 једначине $f'(x) = 0$, онда би се на основу теореме 1° морао налазити између x_1 и x_2 најмање један корен ξ_3 последње једначине. И тај би се корен ξ_3 налазио између ξ_1 и ξ_2, што је противно претпоставци, да су последња два броја узастопни корени једначине $f'(x) = 0$.

Ако бисмо пак претпоставили, да се између ξ_1 и ξ_2 налази само корен x_3 једначине $f(x) = 0$, али који јој је корен барем два пута, онда би исти број x_3 морао бити барем један пут корен једначини $f'(x) = 0$, али то је опет противно претпоставци, да су ξ_1 и ξ_2 два узастопна корена једначине $f'(x) = 0$.

Дакле стоји теорема:

2°. *Кад су $x = \xi_1$ и $x = \xi_2$ два узастопна — разуме се стварна — корена једначине $f'(x) = 0$, онда се између њих може налазити највише један стваран и то прост корен једначине $f(x) = 0$.*

Rolle-ова теорема остаје очевидно у важности, ако би за један од два узастопна корена x_1 и x_2 једначине $f(x) = 0$ или и за оба била $f'(x) = 0$, јер количници под 1) јесу и тада противнога знака. Даље иста теорема вреди и за трансцендентне једначине, само ако је први извод $f'(x)$ непрекидна функција између $x=x_1$ и $x=x_2$.

Из до сада реченога увиђавно је, *да ако смо у стању решити једначину*:

$$2.) \qquad f'(x) = 0$$

да смо у стању дознати и број стварних корена једначине $f'(x) = 0$.

Јер узмимо да су:

$$a^1,\ b^1,\ c^1\ \ldots\ l^1$$

стварни корени једначине 2) поређани према својој величини тако, да нигде пред мањим кореном не стоји већи. Ако сад у задатој једначини:

$$3.) \qquad f(x) = 0$$

заменимо x редом са:

$$4.) \qquad -\infty,\ a^1,\ b^1,\ c^1\ \ldots\ l^1,\ +\infty,$$

онда, ако $f(x)$ за две узастопне вредности x-а добија противно означене вредности, између те две вредности x-а мора се налазити један корен задате једначине 3) (№ 78) и то, услед теореме 2° *само један*. Ако ли $f(x)$ добија једнако означене вредности за две узастопне вредности x-а, онда између тих вредности x-а не може бити ни једног корена једначине 3), јер их више од једнога између тих вредности x-а не може ни бити. Према томе при поменутом замењивању x-а при свакој промени знака

функције $f(x)$ открива се по један и то само један корен једначине 3).

Ако је n број стварних корена једначине $f'(x) = 0$, онда ћемо у 4) имати $(n+2)$ броја, одакле следује, да ће једначина $f(x)$ моћи имати највише $(n+1)$ стварних корена.

Такође је јасно, да ако су сви корени задате једначине 3) стварни, да је то онда исто случај и са коренима једначине 2). Јер између свака два узастопна корена задате једначине, а има их m, мора се налазити један корен једначине $f'(x) = 0$ и то само један, јер би у противном случају ова једначина, која је $(m-1)$-ог степена, имала више од $(m-1)$ корена, што не може бити.

107. У овој №-и тражићемо помоћу Rolle-ове теореме услове, који треба да су испуњени, па да сви корени кубне једначине буду стварни.

Пошто сваку кубну једначину можемо ослободити њеног другог члана, то можемо узети као задату једначину:

$$1.) \qquad f(x) = x^3 + px + q = 0$$

Овде је:

$$2.) \qquad f'(x) = 3x^2 + p = 0$$

Да би сва три корена једначине 1) могли бити стварни, треба да су стварни корени једначине 2), а за то се изискује, да је $p < 0$. Узмимо да је овај услов испуњен, онда су стварни корени једначине 2):

$$a' = -\sqrt{-\frac{1}{3}p}, \quad b' = \sqrt{-\frac{1}{3}p}$$

Ако су сада a, b и c стварни корени једначине 1), онда $f(x)$ мора, пошто x пређе први корен a, бити положна, јер је била одречна за све вредности x-а од $-\infty$ до првог корена a. Пошто при рашћењу x-а од a до b функција $f(x)$ остаје све једнако положна и a' лежи између a и b (№ 106) то је онда:

$$f(a') > 0 \quad \text{или} \quad -\left(\sqrt{-\frac{1}{3}p}\right)^3 - p\sqrt{-\frac{1}{3}p} + q > 0$$

или што је све једно:

$$3.) \qquad -\frac{1}{3}p\sqrt{-\frac{1}{3}p} > -\frac{1}{2}q$$

Пошто x пређе корен b, $f(x)$ мења свој знак, т. ј. постаје одречна и остаје таква, докле год x не пређе и трећи корен c једначине 1). Пошто изнад c нема више ни једног корена, то онда $f(x)$ остаје положна за све вредности x-а веће од c. Пошто b' лежи између b и c, то је онда:

$$f(b') < 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{3}p\sqrt{-\frac{1}{3}p} < -\frac{1}{2}q$$

или што је све једно:

$$4.) \qquad -\frac{1}{3}p\sqrt{-\frac{1}{3}p} > \frac{1}{2}q$$

Неједначине 3) и 4) разликују се само знаком десне стране, а ако их подигнемо на квадрат, добићемо једнаке резултате.

Ако је q положно, онда је неједначина 3) увек задовољена, јер је $p < 0$ на основу претпоставке, а неједначину 4) можемо подићи на квадрат, пошто је због $p < 0$ и лева страна положна.

Ако је q одречно, онда је неједначина 4) увек задовољена због $p < 0$, а неједначину 3) можемо подићи на квадрат, јер су обе стране положне.

Дакле и у једном и у другом случају остаје као други услов, који треба да је испуњен, па да корени једначине 1) буду сви стварни:

$$5.) \qquad -\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0,$$

а први је услов $p < 0$. Но пошто неједначина 5) повлачи за собом као нужну последицу овај први услов, то онда смемо казати, да је у неједначини 5) исказан једини услов, који треба да је испуњен, па да сви корени једначине 1) буду стварни.

П р и м е д б а. Нека читалац сам помоћу геометријских конструкција учини очигледном Rolle-ову теорему.

XV. Методе за приближно израчунавање ирационалних корена.

Помоћу разних метода, које смо до сад прешли, ми смо у стању за сваки — стварни и ирационални — корен задате једначине изнаћи две границе a и b, којих је разлика колико хоћемо мала. Ми ћемо претпоставити, да та разлика није већа од 0·1. Онда свака од двеју граница може се сматрати као приближна вредност траженога корена, који се између њих налази, до на 0·1.

У будуће ми ћемо се ограничити на израчунавање само положних корена, јер израчунавање одречних корена једначине $f(x) = 0$ своди се на израчунавање положних корена једначине $f(-x) = 0$.

Newton-ова метода.

108. Узмимо да је $f(x)$ цела функција x-а са стварним сачиниоцима. Ако пустимо, да x у тој функцији порасти за h, који број узимамо такође, да је стваран, добићемо:

$$1.)\qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}R,$$

где R представља познату целу и рационалну функцију од x и h (№ 8 обр. 4). Кад погледамо на функцију z-а:

$$2.)\qquad f(x+z) - f(x) - zf'(x) - \frac{z^2}{2}R,$$

видимо, да је она равна нули за $z=0$, а тако исто на основу једначине 1) још и за $z=h$. На основу Rolle-ове теореме, њен први извод, који се добија, кад је сматрамо само као функцију z-а, мора дакле бити једнак нули за једну вредност $z=h'$, која се налази између $z=0$ и $z=h$. Али први извод функције под 2), кад ју сматрамо као функцију само z-а, јесте (№ 10).

$$3.)\qquad f'(x+z) - f'(x) - zR.$$

Ова функција, која је такође цела, једнака је нули за $z=0$ и сем тога као што мало час рекосмо за $z=h'$ Први њен извод, кад је сматрамо као функцију само z-а, мора дакле опет на основу Rolle-ове теореме бити једнак нули за једну вредност $z=h''$, која се налази између $z=0$ и $z=h'$. Али тај први извод функције 3) јесте:

$$f''(x+z) - R;$$

дакле је на тај начин

$$f''(x+h'') - R = 0,$$

одакле следује:

$$R = f''(x+h'')$$

Овде је h'' број, који се налази између 0 и h, који према томе можемо означити са θh, ако узмемо да је θ број, који се налази између 0 и $+1$. Према томе последњи образац сада изгледа:

$$R = f''(x+\theta h),$$

и једначина 1) претвара се у ову:

$$4.)\qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x+\theta h),$$

где је као што рекосмо $0 < \theta < +1$.

Образац 4) морали смо извести, пре него што смо приступили излагању Newton-ове методе. Али да читаоцу неби ништа нејасно остало, мислимо да је потребно проговорити још неколико речи о количинама $f'(x+z)$ и $f''(x+z)$, на које смо наишли приликом извођења обрасца 4). Те две количине јесу први и други извод функције $f(x+z)$, кад у тој функцији само z сматрамо као промењиво. Али није тешко увидети, да те две количине јесу први и други извод функције $f(x+z)$ и онда, кад у њој само x сматрамо као промењиво. Јер на основу № 190 алгеб. анал.

$$lim\,\frac{f(x+z+h) - f(x+z)}{h}$$

остаје исти, кад h тежи нули, па сматрали ми x или z као променљиво, то јест сматрали ми h као промену x-а или z-а. То се исто може рећи и за:

$$\lim \frac{f'(x+z+h) - f'(x+z)}{h}$$

и т. д. Овим је дакле успут доказана теорема:

Кад се у једној функцији $f(x+z)$ збир променљивих x и z јавља као једна променљива, онда први, други, а тако исто и сваки доцнији извод те функције остају исти, па сматрали ми при њиховом извођењу x као променљиво а z као стално, или обратно.

109. Нека је сада x_1 корен алгебарске једначине:

1.) $$f(x) = 0,$$

а a и b нека су границе, којих је разлика највише $= 0{\cdot}1$.

Ако узмемо a као прву приближну вредност траженога корена, а са h означимо *поправку* (коректуру) те прве приближне вредности т. ј. број, који треба додати ка a, па да изађе права вредност траженог корена x_1, онда је:

$$f(a+h) = 0.$$

јер је $a + h = x_1$, које је корен једначине 1). Али последња једначина може се и овако написати (№ 108).

$$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a + \theta h) = 0.$$

Одавде добијамо као вредност поправке:

2.) $$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{h^2}{2!} \frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}$$

Али ако сад узмемо b као прву приближну вредност траженога корена x_1, и ако означимо са k поправку те приближне вредности, т. ј. број, који треба одузети од b, па да изађе права вредност траженог корена, имаћемо:

$$f(b-k) = 0$$

или (№ 108)

$$f(b) - kf'(b) + \frac{k^2}{2!} f''(b-\theta' k) = 0,$$

где је θ' положно и мање од један. Из ове једначине добијамо:

3.) $$k = \frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{k^2}{2!} \frac{f''(b-\theta' k)}{f'(b)}$$

Пошто корен x_1 лежи између a и b, којих је разлика на основу претпоставке највише $= 0{\cdot}1$, то су h и k мањи од $0{\cdot}1$, а њихови квадрати мањи од $0{\cdot}01$. Према томе можемо узети, да је приближно тачно:

4.) $$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}, \quad \text{и} \quad k = \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Ако узмемо број $a < x_1$ као прву приближну вредност корена x_1, онда први образац под 4) даје њену поправку и то приближно тачну. Друга приближна вредност тада је:

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Тај први образац под 4) даје очевидно поправку и ове друге и сваке доцније приближне вредности. Треба само зарад тога сменути a у том обрасцу са оном приближном вредношћу, којој се тражи поправка.

Тако исто кад пођемо од b као прве приближне вредности, други образац под 4) даје нам њену поправку и тада је друга приближна вредност траженога корена:

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Поправка ове као и сваке доцније приближне вредности добија се, кад се у другом обрасцу под 4) b смени са приближном вредношћу, којој се тражи поправка.

У највише прилика друга и свака доцнија приближна вредност траженога корена тачнија је од оне, коју смо одмах пре ње нашли. Али то не бива увек. И доиста да бисмо полазећи од a или од b, добили тачније вредности траженога корена, треба да су количине:

$$-\frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{и} \quad \frac{f(b)}{f'(b)}$$

обе положне, јер би иначе приближне вредности:

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

биле и то прва $a' < a$, а друга $b' > b$ дакле би се од траженог корена више разликовале, него ли a и b. Кад погледамо даље на обрасце 2) и 3) увидећемо, да и количине:

$$-\frac{h^2}{2!}\,\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}, \quad \frac{k^2}{2!}\,\frac{f''(b-\theta' k)}{f'(b)}$$

треба да су такође положне, ако хоћемо, да смо са свим извесни, да су a' и b' тачније вредности траженога корена од a и b.

Ми смо горе претпоставили, да је разлика бројева a и b највише $= 0{\cdot}1$. Али ми можемо помоћу познатих нам метода бројеве a и b, између којих лежи тражени корен x_1, изабрати тако, да између њих не лежи ни један корен једначина:

$$5.) \qquad f'(x) = 0 \quad \text{и} \quad f''(x) = 0$$

а то ћемо бити увек у стању да учинимо, ако само једначине:

$$f(x) = 0, \; f'(x) = 0 \quad \text{и} \quad f''(x) = 0$$

немају заједничких корена. А ово ће последње опет вазда бити, ако задата једначина $f(x) = 0$ нема једнаких корена.

Претпостављајући дакле, да једначине 5) немају између a и b ни једног корена, ми смемо тврдити, да су количници:

$$-\frac{f(a)}{f'(a)}, \; \frac{f(b)}{f'(b)}$$

оба положни. Јер ако је н. пр. $f(a)$ одречна, онда је $f(b)$ положна, дакле функција $f(x)$ при рашћењу x-а од a до b расти и зато је при том први извод $f'(x)$ вазда положан. Дакле је тада количник:

$$-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

положан, а тако исто и други:

$$\frac{f(b)}{f'(b)}$$

Ако ли је $f(a)$ положна, онда је $f(b)$ одречна, дакле тада $f(x)$ опада, кад x расти од a до b, и за то $f'(x)$

мора бити све једнако одречна. Јасно је дакле, да су и у овом случају оба поменута количника положни.

Пошто сад по претпоставци нема између a и b ни једног броја, који би поништавао функције $f'(x)$ и $f''(x)$, то онда:

$$f''(a+\theta h) \quad \text{и} \quad f''(b-\theta' k)$$

морају имати исти знак, а тако исто и $f'(a)$ и $f'(b)$. С тога дакле једна од двеју количина:

$$6.) \qquad -\frac{h^2}{2!}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}, \quad \frac{k^2}{2!}\frac{f''(b-\theta' k)}{f'(b)}$$

мора бити положна.

Према томе, ако само између a и b нема ниједног корена функција $f'(x)$ и $f''(x)$, ми ћемо помоћу једне од поправака под 4) добити за цело тачнију вредност за тражени корен од пређашње.

Ако су $f'(x)$ и $f''(x)$ противно означене за вредности x-а од a до b, онда је први количник под 6) положан а други одречан, дакле тада треба поћи од a као прве приближне вредности, чију поправку налазимо помоћу првог обрасца под 4). Ако ли су $f'(x)$ и $f''(x)$ једнако означене, онда је први количник под 6) одречан, а други положан, дакле тада треба поћи од b, чију поправку даје други образац под 4).

Али кад погледамо на количнике:

$$-\frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{и} \quad \frac{f(b)}{f'(b)},$$

за које смо доказали, да су положни, онда ћемо лако увидети, да кад $f'(a)$ и $f''(a)$ имају противне знаке, да

велим онда $f(a)$ и $f''(a)$ имају једнаке знаке; и да код $f'(b)$ и $f''(b)$ имају исте знаке, да онда $f(b)$ и $f''(b)$ имају такође исте знаке.

Ако сад узмемо добро на ум ово, што сад рекосмо, као и оно у алинеји пре тога, увидећемо, да при тражењу узастопних приближних вредности траженога корена x_1, који лежи између приближних вредности a и b, *треба поћи од a или од b као од прве приближне вредности, како кад за $x=a$ или за $x=b$ функције $f(x)$ и $f''(x)$ имају једнак знак.* У првом случају поправке узастопних приближних вредности налазе се помоћу првог обрасца под 4), а у другом случају помоћу другог обрасца под 4).

Лако је најзад наћи и горњу границу погрешке, коју чинимо, кад се при израчунавању поправке служимо у место образаца под 2) и 3) обрасцима под 4). Кад се служимо првим или другим обрасцем под 4), онда занемарујемо положне количине:

$$-\frac{h^2}{2!}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)} \quad \text{или} \quad \frac{k^2}{2!}\frac{f''(b-\theta' k)}{f'(b)}$$

и то су дакле погрешке које чинимо, служећи се првим или другим обрасцем под 4) при израчунавању поправке. Ако хоћемо да изнађемо горњу границу погрешке:

$$7.) \qquad -\frac{h^2}{2!}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}$$

без обзира на знак, треба само да заменимо h^2 са $(b-a)^2$ и $f''(a+\theta h)$ са бројно највећом од оних вредности, које $f''(x)$ добија при рашћењу x-а од $x=a$ до $x=b$. На сличан начин налази се без обзира на знак и горња граница погрешке:

8.) $$\frac{k^2}{2!}\,\frac{f''(b-\theta'k)}{f'(b)}$$

110. Newton-ова метода, коју смо у № 109 објаснили, може се помоћу геометријских конструкција тако рећи очигледном учинити.

Као што нам је већ познато, стварни корени једначине $f(x)=0$ представљени су апсцисама тачака, у којима линија $y=f(x)$ пресеца апсцисну осу. Ако је сад a приближна вредност корена, онда је $f(a)$ ордината оне линијине тачке, којој је број a апсциса. Кад повучемо дирку линије $y=f(x)$, којој су a и b апсциса и ордината, онда је једначина те дирке:

$$y-f(a)=f'(a)\,(x-a).$$

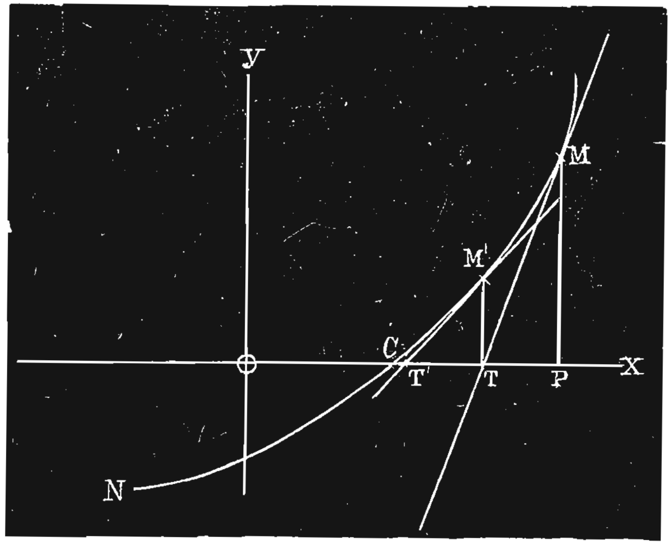
Та дирка пресеца апсцисну осу у тачци, чија је апсциса:

$$x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Као што се види, апсциса те тачке јесте друга приближна вредност траженога корена, коју добијамо по Newton-овој методи.

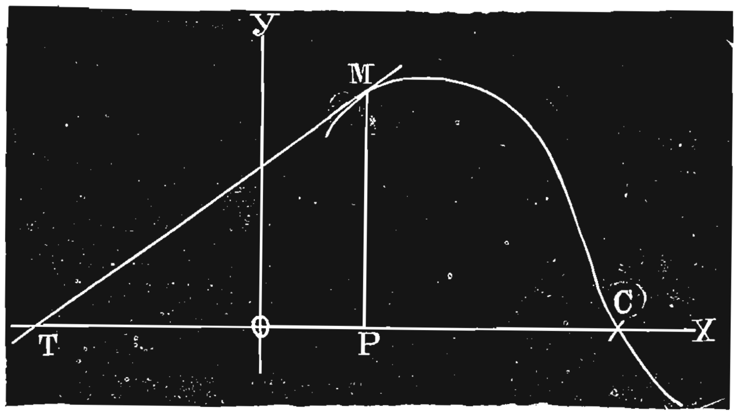
Нека је сад MN линија, којој је $y=f(x)$ једначина, а C непозната тачка, у којој линија пресеца апсцисну осу. OC представља линеарно тражени корен једначине $f(x)=0$. У тачци M, којој је апсциса $a=OP$, а приближна вредност траженога корена $OC=x_1$, повуцимо дирку. Апсциса тачке T, где дирка пресеца апсцисну осу, јесте још приближнија вредност за $OC=x_1$. Ако поновимо исту конструкцију, т. ј. ако у тачци M', којој је апсциса OT,

повучемо дирку, апсциса тачке T', где та дирка пресеца апсцисну осу, биће још приближнија вредност за OC итд.



Сл. 2.

Из овог геометријског представљаја Newton-ове методе, види се, да у извесним приликама, место да се помоћу



Сл. 3.

те методе приближавамо непознатом корену једначине, ми се од њега удаљавамо. На пр. ако би (сл. 3) једначина представљена геометријски дала овакву линију, онда тачка T, у којој дирка, повучена кроз тачку M, пресеца апсцисну осу, место да је ближа тачци C но што је P, она је од C даља.

У № 109 ми смо показали услове, који треба да су испуњени, па да можемо бити са свим сигурни, да ћемо помоћу Newton-ове методе добијати све тачније вредности непознатог корена x_1, који се налази између граница a и b. Ти су услови:

1°. Између a и b лежи само један корен једначине $f(x) = 0$.

2°. Између a и b не лежи ни један корен једначина $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$.

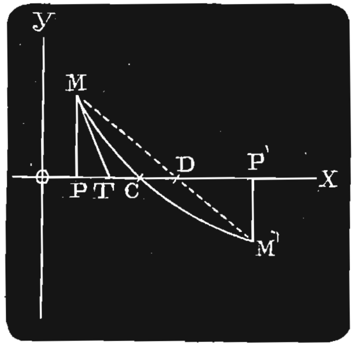
И кад су ови услови испуњени, онда да бисмо могли добијати све тачније вредности за x_1, треба поћи од a или b као прве приближне вредности, како су кад $f(x)$ и $f''(x)$ за $x = a$ или за $x = b$ једнаког знака. Све ово геометријски тумачено значи:

1'. Линија $y = f(x)$ треба да сече само један пут апсцисну осу између својих двеју тачака M и M', којима су a и b апсцисе.

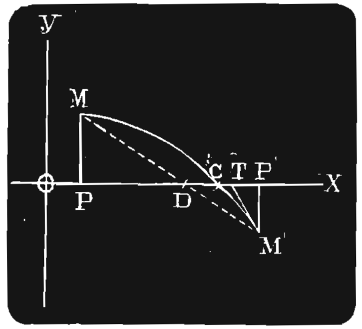
2'. Линија не сме имати између тачака M и M', maximal-них ни minimal-них тачака, т. ј. таквих, да кроз њих повучене дирке иду паралелно са апсцисном осом. Она у поменутом размаку не сме имати ни превоја (point d' inflexion, Beugungspunkt), т. ј. тачака, за које је угаони сачинилац дирке т. ј. $f'(x)$ maximum или minimum.

Према томе линија између M и M' мора изгледати на један од четири начина показана у сликама 4, 5, 6 и 7. Линија то јест мора између тачака M и M' показивати или само испупченост или само издубљеност према одречном смислу ординатне осе.

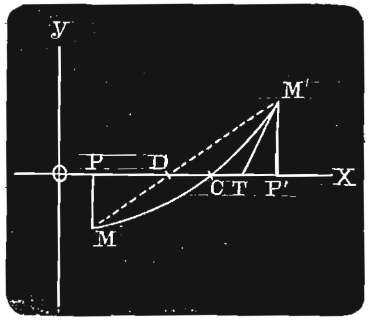
У случају сл. 4 ордината почев од M до M' опада, њен први извод $f'(x)$, т. ј. угаони сачинилац дирке све једнако је одречан и расти. Дакле први извод $f''(x)$ првог извода т. ј. други извод функције $f(x)$ све једнако



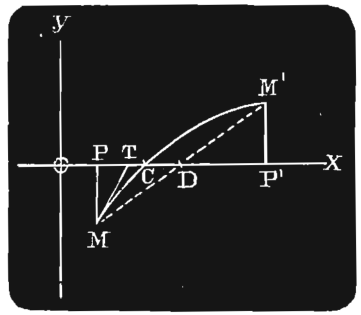
Сл. 4.



Сл. 5.



Сл. 6.



Сл. 7.

је положан. У случају слике 4) $f(a)$ и $f''(a)$ јесу дакле једнако означене и обе положне. Да би дакле тачка T била ближа тачци C него тачка P или P', треба повући дирку кроз M.

На сличан начин увиђа се, да су у случају сл. 5 $f(b)$ и $f''(b)$ једнаког знака, т. ј. обе одречне, и да тада ваља повући дирку кроз тачку M'.

У случају сл. 6 $f(b)$ и $f''(b)$ опет су истог знака, т. ј. обе положне и тада треба повући дирку опет кроз M'.

Најзад у случају слике 7) $f(a)$ и $f''(a)$ једнаког су знака, и тада треба повући дирку кроз M.

Пример. Нека је дата једначина:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0$$

По познатим методама налазимо, да су границе појединих корена: 0 и $+1$, 2 и 3, -5 и -6. Ми ћемо се најпре бавити са израчунавањем најмањег корена, који се налази између 0 и $+1$. Као уже границе налазимо за тај корен 0·3 и 0·4. Сада је:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 17$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

Пошто су за $x = 0{\cdot}3$ $f(x)$ и $f''(x)$ једнако означене, то ћемо 0·3 узети као прву приближну вредност траженога корена, од које вредности полазимо. Као приближну вредност поправке налазимо по Newton-овој методи:

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{0{\cdot}197}{14{\cdot}93} 0{\cdot}01319\ldots$$

Тражимо сада погрешку помоћу обрасца 8) у № 109. Функција $f''(x)$ јесте положна и расти при рашћењу x-а од $x = 0{\cdot}3$ до $x = 0{\cdot}4$, јер је при том њен први извод $f'''(x)$ све једнако положан. Одатле следује, да је:

$$f''(0{\cdot}3 + \theta h) < f''(0{\cdot}4)$$

Али је:

$$f''(0{\cdot}4) = 8{\cdot}4\,, \qquad f'(0{\cdot}3) = -14{\cdot}93$$

дакле је учињена погрешка:

$$1.) \qquad \varepsilon < \frac{h^2 \times 8{\cdot}4}{2 \times 24{\cdot}93} < h^2 \times 3{\cdot}4$$

Пошто је $h < 0{\cdot}1$, јер тражени корен стоји између 0·3 и 0·4 то је $\varepsilon < 0{\cdot}003$. Одатле опет следује, да је за цело $h < 0{\cdot}014 + 0{\cdot}003 = 0{\cdot}017$. Кад заменимо h са 0·017 у неједначини 1) добијамо:

$$\varepsilon < 0{\cdot}017^2 \times 0{\cdot}3 < 0{\cdot}0001.$$

Прва вредност поправке налази се између 0·0131 и 0·0133. Ако узмемо дакле $h = 0{\cdot}0132$, онда ће тражени корен бити:

$$x = 0{\cdot}3132$$

са погрешком, која је највише $= 0{\cdot}0001$.

Други положни корен једначине налази се између 2 и 3. Уже границе истога јесу: 2·6 и 2·7. $f''(x)$ јесте положна од $x = 2{\cdot}6$ до $x = 2{\cdot}7$ закључно, док је међу тим $f(x)$ одречна за $x = 2{\cdot}6$ а положна за $x = 2{\cdot}7$. Дакле ћемо ову последњу вредност узети као прву приближну вредност траженога корена, од које полазимо. Као поправку исте налазимо по Newton-овој методи:

$$h = \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{0{\cdot}653}{21{\cdot}07} = 0{\cdot}03099$$

Тражимо сада погрешку, са којом смо израчунали ову поправку. Пошто је први извод функције $f''(x)$ то јест $f'''(x)$ вазда положан при мењању x-а од $x = 2{\cdot}6$ до $x = 2{\cdot}7$, то онда $f''(x)$ непрестано расти, кад x расти од $x = 2{\cdot}6$ до $x = 2{\cdot}7$ и за то је:

$$f''(2{\cdot}7 - \theta' k) < f''(2{\cdot}7)$$

Али је:

$$f''(2{\cdot}7) = 22{\cdot}2\,, \qquad f'(2{\cdot}7) = 21{\cdot}07.$$

Дакле је учињена погрешка:

$$\varepsilon < \frac{k^2 \times 22{\cdot}2}{2 \times 21{\cdot}07} < k^2 \times 0{\cdot}6$$

Пошто је $k < 0{\cdot}1$, то је јасно, да је $\varepsilon < 0{\cdot}006$. Дакле је за цело k мање и од $0{\cdot}031 + 0{\cdot}006 = 0{\cdot}037$ или тим пре $k < 0{\cdot}04$. Замењујући k овом вредношћу мало више налазимо да је:

$$\varepsilon < 0{\cdot}04^2 \times 0{\cdot}6 < 0{\cdot}001$$

Дакле k лежи између $0{\cdot}030$ и $0{\cdot}032$. Ако узмемо $k = 0{\cdot}031$, онда ће тражени корен бити:

$$x = 2{\cdot}669,$$

са погрешком, која је највише $= 0{\cdot}001$.

Примедба. Кад смо један корен једначине $f(x) = 0$ израчунали са m децимала:

$$x = \alpha_0{\cdot}\alpha_1\alpha_2 \;.\;.\;.\; \alpha_{m-1}\alpha_m$$

лако је дознати на начин који иде, да ли је погрешка мања од једне јединице на m-ном десетном месту т. ј.

да ли је мања од $\frac{1}{10^m}$. Ми ћемо т. ј. заменити у $f(x)$ x редом са:

$$\alpha_0{\cdot}\alpha_1\alpha_2 \;.\;.\;.\; \alpha_{m-1}(\alpha_m - 1)$$

$$\alpha_0{\cdot}\alpha_1\alpha_2 \;.\;.\;.\; \alpha_{m-1}\alpha_m$$

$$\alpha_0{\cdot}\alpha_1\alpha_2 \;.\;.\;.\; \alpha_{m-1}(\alpha_m + 1)$$

и пазићемо на знаке, које $f(x)$ добија. Ако $f(x)$ добија за прве две вредности x-а противно означене вредности, онда се корен налази између њих. Ако ли $f(x)$ добија противно означене вредности за последње две од горњих вредности x-а, онда ће се корен налазити између њих. Наступио сад један или други од та два случаја, број

$$\alpha_0{\cdot}\alpha_1\alpha_2 \;.\;.\;.\; \alpha_{m-1}\alpha_m$$

разликоваће се од праве вредности траженога корена за мање од $\frac{1}{10^m}$. Али ако су у оба та случаја резултати замена истога знака, онда разлика између $\alpha_0{\cdot}\alpha_1\alpha_2 \;.\;.\;.\;.\; \alpha_{m-1}\alpha_m$ и праве вредности траженога корена јесте већа од $\frac{1}{10^m}$. Тада ћемо дакле према потреби појачати или ослабити у $\alpha_0{\cdot}\alpha_1\alpha_2 \;.\;.\;.\; \alpha_{m-1}\alpha_m$ последњу децималу α_m са једном или више јединица, док не добијемо такве бројеве, који дају резултате са противним знаком.

На тај начин радећи налазимо, да први корен у примеру № 110 лежи између $0{\cdot}3132$ и $0{\cdot}3133$.

Regula falsi.

111. Ову методу треба претпоставити Newton-овој у оним случајевима, кад је у близини траженога корена:

$$f'(x) = 0 \quad \text{или} \quad f''(x) = 0$$

Ево у чему се састоји та метода. Кад променљива x, од које зависи буди каква функција — алгебарска или трансцендентна, — добија редом вредности од $x = a$ до $x = b$, а размак је бројева a и b врло мали, онда се може без осетне погрешке узети, да су промене функције сразмерне одговарајућим променама x-а. Ето то је принцип, на коме се оснива ова метода, а на коме се, што није тешко увидети, оснива и Newton-ова метода.

Ако је сада $h < b - a$, онда је на основу поменутог принципа:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

одакле, кад узмемо да је $x = a + h$ корен једначине $f(x) = 0$, следује:

1.) $$h = -\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

дакле је приближна вредност траженога корена

2.) $$x_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)} = a + \frac{(b-a)\,f(a)}{f(a) - f(b)}$$

која се једначина може и овако написати:

3.) $$x_1 = b + \frac{(b-a)\,f(b)}{f(a) - f(b)} = b - \frac{(b-a)\,f(b)}{f(b) - f(a)}$$

Помоћу ових образаца налази се из двеју приближних вредности непознатог корена још тачнија вредност истога. Ако је та нова приближна вредност c, онда из ње и једне од пређашњих a или b, а помоћу ових образаца налази се још тачнија вредност корена и т. д. Самоваља знати, који је од два броја a и b згодније узети при тражењу друге приближне вредности корена. Очевидно ону, која се од траженог корена мање разликује, дакле a или b, како је кад $f(a) < f(b)$ или обратно.

До обрасца 2), у коме је исказана метода Regula falsi, као и у обрасцу 3), који из обрасца 2) следује, можемо доћи и помоћу геометрије. Јер ако погледамо на слике 4), 5), 6) и 7) у № 110, у којима нам $OC = x_1$ представља непознати корен, онда је лако увидети, да нам ова метода даје OD као приближну вредност корена OC, она дакле смењује лук MCM' правом MM'. Сад једначина праве MM' јесте:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Ако у овој једначини ставимо $y = 0$, да бисмо добили OD, наћићемо после тога:

$$x = OD = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

дакле исти образац 1).

Кад $f'(x)$ и $f''(x)$ нису $= 0$ ни за једну вредност од $x = a$ до $x = b$, као што смо то ми код Newton-ове методе претпоставили, дакле кад линија $y = f(x)$ у своме току од $x=a$ до $x=b$ нема ни максималних ни минималних тачака нити пак превоја, онда тачка C, у којој линија пресеца апсцисну осу, лежи увек између тачке D, у којој права MM' пресеца апсцисну осу, и тачке T, у којој ју пресеца дирка повучена према упутству Newton-ове методе кроз тачку M или M'. Одатле сад следује, да ако је приближна вредност, нађена помоћу Newton-ове методе, мања од траженог корена, онда она, која је нађена помоћу ове методе, мора бити већа од њега и обратно.

Применом обеју метода и Newton-ове и Regula falsi код једног и истог примера ослобођавамо се израчунавања погрешке, пошто тада увек знамо, на колику тачност можемо рачунати.

Примедба. Нека читалац помоћу слика 4), 5), 6) и 7) у № 110 просто геометријски изведе обрасце 2) и 3) у овој №-и.

Пример. Нека је дата једначина:

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0$$

Сви корени ове једначине јесу стварни. Границе њине јесу: -1 и -2, -1 и 0, 1 и 2 и 5 и 6. Ми ћемо да израчунамо онај корен, који се налази између 5 и 6. Тешње границе тога корена јесу 5·7 и 5·8. Помоћу Newton-ове методе добијамо:

$$x = 5{\cdot}8 - 0{\cdot}0506 = 5{\cdot}7494$$

резултат, који је већи од траженога корена. Помоћу методе Regula falsi и то по обрасцу 1) ове №-е добијамо међутим:

$$h = -\frac{0{\cdot}1 \times 9{\cdot}2949}{19{\cdot}9045} = -0{\cdot}0466$$

јер је: $f(5{\cdot}7) = -9{\cdot}2949$, $f(5{\cdot}8) = 10{\cdot}6096$, дакле по обрасцу 2) ове №-е:

$$x = 5{\cdot}7466$$

резултат, који је мањи од траженог корена. Ми ћемо узети да је:

$$x = 5{\cdot}748$$

са погрешком до на 0·002.

Лагранжова метода.

112. По тој методи добија се тражени корен у облику простог верижног разломка, т. ј. таквог, коме су делимични бројиоци положне јединице а делимични имениоци стварни цели и положни бројеви. Ми ћемо овде опет показати само, како се по овој методи израчунавају положни корени, јер израчунавање одречних корена своди се на израчунавање положних корена једначине $f(-x)=0$.

Претпоставимо да се између a и $a+1$ налази само један корен једначине:

$$1.)\quad f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + a_3x^{m-3} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0.$$

Кад овде ставимо:

$$x = a + \frac{1}{z_1}$$

онда, као што је познато, корени нове једначине биће реципрочне вредности корена оне једначине, чији су корени за a мањи од корена дате једначине. Једначина, која се после поменуте замене добија, биће:

$$2.)\quad \varphi(z_1) = f(a)\, z_1^m + f'(a)\, z_1^{m-1} + f''(a)\, z_1^{m-2} + \dots$$
$$+ f^{m-1}(a)\, z_1 + f^m(a) = 0.$$

Пошто на основу претпоставке једначина 1) има само један корен између a и $a+1$, то онда једначина 2) може имати само један стваран и положан корен, *који је већи од јединице,* јер у противном случају једначина 1) имала би више корена између a и $a+1$, а то нисмо претпоставили.

Ако сад тај корен једначине 2) лежи између b и $b+1$, онда ћемо ставити у једначини 2):

$$z_1 = b + \frac{1}{z_2}$$

и нова једначина биће:

$$2.)\quad \psi(z_2) = \varphi(b)\, z_2^m + \varphi'(b)\, z_2^{m-1} + \varphi''(b)\, z_2^{m-2} + \dots$$
$$+ \varphi^{m-1}(b)\, z_2 + \varphi^m(b) = 0,$$

о којој се као мало час доказује, да мора имати један и то само један стваран и положан корен, који је већи од јединице. Ако се тај корен налази између c и $c+1$, ставићемо у једначину 3)

$$z_2 = c + \frac{1}{z_3}$$

и нова једначина биће:

$$4.)\quad \chi(z_3) = \psi(c)\, z_3^m + \psi'(c)\, z_3^{m-1} + \psi''(c)\, z_3^{m-2} + \dots$$
$$+ \psi^{m-1}(c)\, z_3 + \psi^m(c) = 0,$$

која опет има само један корен, који је већи од јединице. И овако можемо наставити, докле нам је воља. Пошто смо n пута овако радили, као што је показано, наћи ћемо:

$$5.)\quad x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots + \cfrac{1}{l + \cfrac{1}{z_{n+1}}}}}}$$

Овде су $a, b, c, d \dots l$ познати цели и положни бројеви. Пошто је за x добивени верижни разломак збирљив и сви су делимични бројиоци и имениоци положни, то се на основу № 142 и № 146 у алгебарској анализи права вредност непознате x налази између приближних разломака:

$$\frac{Z_{0,n-1}}{N_{0,n-1}} \quad \text{и} \quad \frac{Z_{0,n}}{N_{0,n}}$$

Што је n веће, тим ће тачније вредност x-а бити израчуната. Но не треба прећутати, да је ова лагранжова метода, и ако у теорији врло проста, у применама врло заметна, и то нарочито у послу израчунавања делимичних именилаца. Међу тим је Лагранж гледао ту тешкоћу да уклони, но ми нећемо у то овде улазити (види I. A. Serret Algèbre supérieure T. I. p. 353).

Пример. Дата је једначина:

$$1') \qquad f(x) = x^3 - 5x - 3 = 0$$

Границе њених корена јесу 2 и 3, 0 и -1, и -2 и -1. Тражимо корен, што је између 2 и 3. Сада је $a = 2$ и да бисмо нашли сачиниоце једначине 2) т. ј. $\varphi(z_1) = 0$, ми ћемо радити по Budan-у (№ 17):

$$x^3 - 5x - 3 = 0$$

$$\begin{array}{lllll} 2] & 1, & 2, & -1 & \underline{-5} \\ & 1, & 4, & \underline{7} & \\ & 1, & \underline{6} & & \\ & \underline{1} & & & \end{array}$$

Дакле је сад горња једначина 2):

$$\varphi(z_1) = -5z_1^3 + 7z_1^2 + 6z_1 + 1 = 0$$

или

$$2') \qquad \varphi_1(z_1) = 5z_1^3 - 7z_1^2 - 6z_1 - 1 = 0$$

Ова једначина има само једну мену, дакле може имати највише један положан корен, и тај, као што смо горе видели, она мора имати. Тај корен, за који такође знамо, да мора бити > 1, налази се између 2 и 3. Дакле је $b = 2$ сада, и да бисмо нашли сачиниоце једначине 3) т. ј. $\psi(z_2) = 0$, ми ћемо опет радити по Budan-у.

$$5z_1^3 - 7z_1^2 - 6z_1 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{lllll} 2] & 5 & 3 & 0 & \underline{-1} \\ & 5 & 13 & \underline{26} & \\ & 5 & \underline{23} & & \\ & \underline{5} & & & \end{array}$$

Дакле је горња једначина 3) сада:

$$3') \qquad \psi(z_2) = z_2^3 - 26z_2^2 - 23z_2 - 5 = 0$$

И ова једначина има само једну мену, дакле она може имати само један положан корен, а тај, као што смо видели, мора бити > 1. Он лежи између 26 и 27. Сада је $c = 26$

$$z_2^3 - 26z_2^2 - 23z_2 - 5 = 0$$

$$\begin{array}{lllll} 26] & 1 & 0 & -23 & \underline{-603} \\ & 1 & 26 & \underline{+653} & \\ & 1 & \underline{52} & & \\ & \underline{1} & & & \end{array}$$

Дакле је сада:

$$4') \qquad \chi(z_3) = 603z_3^3 - 653z_3^2 - 52z_3 - 1 = 0.$$

Јединцати положни корен ове једначине налази се између 1 и 2. Дакле је сада $d = 1$. Дакле:

$$603z_3^3 - 653z_3^2 - 52z_3 - 1 = 0$$

1]	603	-50	-102	$-\underline{103}$
	603	553	$\underline{451}$	
	603	$\underline{1156}$		
	$\underline{603}$			

Дакле је сада:

5') $\mu(z_4) = 103z_4^3 - 451z_4^2 - 1156z_4 - 603 = 0.$

Једини положни корен ове једначине налази се између 6 и 7. Сада је $e = 6$. Дакле:

$$103z_4^3 - 451z_4^2 - 1156z_4 - 603 = 0$$

6]	103	167	-154	$-\underline{1527}$
	103	785	$\underline{4556}$	
	103	$\underline{1403}$		
	$\underline{103}$			

Дакле је сада:

6') $\nu(z_5) = 1527z_5^3 - 4556z_5^2 - 1403z_5 - 103 = 0$

Једини положни корен ове једначине лежи између 2 и 3. Сада је $f = 3$. Дакле је и т. д.

И тако сад добијамо:

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{26 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

Помоћу последњих образаца на стр. 413 алг. анал. са свим је лако доказати, да је разлика између праве вредности верижног разломка и његовог m-ног приближног разломка мања од јединице подељене са квадратом имениоца m-ног приближног разломка.

Узастопни приближни разломци горњег верижног разломка јесу:

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{132}{53},\ \frac{137}{55},\ \frac{954}{383},\ \frac{2999}{1204}$$

Они који стоје на непарним местима јесу мањи, а они на парним већи од праве вредности верижног разломка. Кад последњи приближни разломак претворимо у десетни и узмемо га као вредност траженога корена, добићемо:

$$x = 2{\cdot}49086378.$$

При том је према горњем погрешка мања него

$$\frac{1}{1204^2} = 0{\cdot}0000007$$

Horner-ова метода.

113. Узмимо нека је:

$$1.)\quad f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + a_3x^{m-3} + \dots$$
$$+ a_{m-1}x + a_m = 0$$

задата једначина. Ако сад из ове једначине изведемо другу, чији су корени за α мањи од корена једначине 1), и при том α изаберемо тако, да се последњи члан нове једначине:

$$2.)\quad f^m(\alpha)y^m + f^{m-1}(\alpha)\,y^{m-1} + \dots + f'(\alpha)\,y + f(\alpha) = 0$$

може као врло мали занемарити, то се онда може приближно тачно нула узети као корен једначине 2) и по томе α као корен једначине 1). На овој простој примедби оснива се Horner-ова метода, која се може сматрати као усавршена Newton-ова метода.

Узмимо нека је:

$$3.)\qquad x = \alpha_0;\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ \dots$$

тражени корен једначине 1). α_0 јесте цео број, а α_1, α_2, α_3 . . . јесу цифре, које стоје на првом, другом, трећем и т. д. десетном месту. Број $x = \alpha_0;\alpha_1$ јесте приближна вредност тога корена или мања од оних двеју за 0·1 разликујућих се граница, између којих се тражени корен 3) налази. Једначина, чији су корени за $\alpha_0;\alpha_1$ мањи од корена задате једначине, јесте:

$$4.)\quad v_0x^m + v_1x^{m-1} + v_2x^{m-2} + \dots + v_{m-2}x^2 + v_{m-1}x + v_m = 0$$

где узастопна слова v стоје само краткоће ради место количина:

$$f^m(\alpha_0;\alpha_1),\ f^{m-1}(\alpha_0;\alpha_1)\ \dots\ f''(\alpha_0;\alpha_1),\ f'(\alpha_0;\alpha_1),\ f(\alpha_0;\alpha_1),$$

то јест место вредности, које изводи — алгебарски — функције $f(x)$ и она сама добијају за $x = \alpha_0;\alpha_1$

Једначина 4) има само један корен

$$5.)\qquad x = 0{\cdot}0\,\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ \dots\ .$$

који је $< 0{\cdot}1$, јер ми претпостављамо, да се између бројева $\alpha_0;\alpha_1$ и $\alpha_0;(\alpha_1 + 1)$ налази само један корен једначине 1). Пошто је дакле корен 5) у једначини 4) мањи од 0·1, то ћемо приближну вредност истога $0{\cdot}0\alpha_2$ наћи, кад у једначини 4) занемаримо све чланове са степенима x-а који су виши од првог, дакле кад узмемо, да је:

$$v_{m-1}x + v_m = 0.$$

Одатле следује:

$$6.)\qquad x = -\frac{v_m}{v_{m-1}}.$$

Дакле на тај начин друга децимала траженога корена једначине 1), или општије, прва од нуле различна децимала тога корена, која после α_1 долази, добија се, кад се последњи сачинилац једначине 4) подели са претпоследњим, и у количнику тражи само прва од нуле различна цифра.

Нека је сад даље:

$$7.)\quad v_0^1x^m + v_1^1x^{m-1} + \dots + v_{m-1}^1x + v_m^1 = 0$$

једначина, чији су корени за $0{\cdot}0\alpha_2$ мањи од корена једначине 4), дакле за $\alpha_0;\alpha_1\alpha_2$ мањи од корена једначине 1). Једначина 7) има само један корен $x = 0{\cdot}00\alpha_3\alpha_4 \ldots$ који је $< 0{\cdot}01$, и који се опет приближно тачно израчунава из једначине:

$$v'_{m-1}\, x + v'_m = 0$$

одакле следује:

8.) $$x = 0{\cdot}00\alpha_3 = -\frac{v'_m}{v'_{m-1}}$$

Трећа или још општије прва од нуле различна децимала траженога корена, која после α_2 долази, добија се дакле опет, кад се последњи сачинилац једначине 7) подели са предпоследњим.

Нека је даље:

9.) $$v''_0 x^m + v''_1 x^{m-1} + \ldots + v''_{m-1}\, x + v''_m = 0$$

једначина, чији су корени за $0{\cdot}00\alpha_3$ мањи од корена једначине 7). Једначина има само један корен: $x = 0{\cdot}000\alpha_4\alpha_5 \ldots$ који је $< 0{\cdot}001$ и који се израчунава из једначине:

$$v''_{m-1}\, x + v''_m = 0$$

из које следује:

10.) $$x = 0{\cdot}000\alpha_4 = -\frac{v''_m}{v''_{m-1}}$$

И на овај начин ваља посао наставити дотле, докле за тражени корен нисмо добили онолики број десетних места, колико се тражило. Цела радња, особито ако при израчунавању количина v будемо радили по Budan-овој

методи № 18, јесте лака и проста. Последњи, од x-а независни, чланови нових једначина јесу из лако појмљивих узрока све мањи и мањи, и они се имају увек израчунавати са онолико децимала, колико их се у корену траже или највише са једном више. Поменути последњи чланови почев од v_m па на даље увек су међу собом једнако означени за то, што права вредност непознатог корена лежи увек с једне и исте стране узастопних приближних вредности:

$$\alpha_0;\alpha_1,\ \alpha_0;\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_0;\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \text{ и т. д.}$$

то јест она је већа од свију тих приближних вредности. Међу тим последњи члан v_m прве једначине, која после задате долази, има са a_m исти знак или не, како се кад између 0 и $\alpha_0;\alpha_1$ налази паран или непаран број корена, где се и нула узимље као паран број.

Што се тиче тачности, са којом се узастопне децимале α_2, α_3, $\alpha_4 \ldots$ траженога корена добијају из:

$$-\frac{v_m}{v_{m-1}},\ -\frac{v'_m}{v'_{m-1}},\ -\frac{v''_m}{v''_{m-1}}, \ldots\ldots$$

ваља приметити, да се, особито у почетку рада, може десити, да понека од тих децимала испадне већа или мања него што треба. Али ако је то случај, онда ће се то одмах у следећој једначини показати. Тако н. пр. ако је:

$$-\frac{v_m}{v_{m-1}} = 0{\cdot}0\alpha_2$$

испало мање, него што треба, то онда, кад из следеће једначине тражимо:

$$-\frac{v'_m}{v'_{m-1}} = 0{\cdot}00\alpha_3,$$

наћићемо, да је $\alpha_3 > 9$, а то несме бити. Ми ћемо дакле тада α_2 са јединицом повисити, и радњу поновити. Ако ли би пак α_2 испало веће него што треба, онда би последњи члан следеће једначине добио противни знак, јер би се тада тражени корен налазио између бројева $\alpha_0\alpha_1$ и $\alpha_0\alpha_1\alpha_2$, а међу тим знамо, да је:

$$v_m = f(\alpha_0\alpha_1) \quad \text{и} \quad v'_m = f(\alpha_0\alpha_1\alpha_2)$$

Исто је тако лако увидети, да последња два члана сваке од нових једначина морају бити противнога знака, чиме се објашњава одречни знак у обрасцима 6), 8) и 10). Јер пошто последњи члан у узастопним новим једначинама бројно опада, то онда полином $f(x)$ у близини од

$$x = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ . \ . \ .$$

расти или опада, како је кад последњи члан нових једначина одречан или положан. У првом случају мора дакле сачинилац претпоследњег члана као први извод функције $f(x)$, бити за ту вредност x-а као и за приближне $\alpha_0\alpha_1$, $\alpha_0\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ и т. д. положан, а у другом одречан.

Пре него што пређемо на примере, поновићемо горњу примедбу, да се последњи од x-а независни чланови имају са онолико децимала израчунавати, са колико се децимала тражи непознати корен. Што се тиче сачинилаца осталих чланова у појединим једначинама, које после задате долазе у њима се задржавају увек само онолико децимала, колико их утиче на последњу децималу последњега члана.

Пример. Дата је једначина:

$$1') \qquad f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Границе њених корена јесу: 0 и + 1, 4 и 5, — 1 и — 2.

1°. Тражимо најпре први корен, коме су 0·8 и 0·9 уже границе, са девет децимала. Приближна вредност тога корена до на 0·1 јесте:

$$x = 0{\cdot}8 = \alpha_0\alpha_1$$

Тражимо једначину, чији су корени за 0·8 мањи.

	1,	— 4,	— 2,	+ 4
0·8]	1,	— 3·2	— 4·56	0·352
	1,	— 2·4	— 6·48	
	1,	— 1·6		
	1			

Нова једначина јесте дакле:

$$2') \qquad x^3 - 1{\cdot}6x^2 - 6{\cdot}48x + 0{\cdot}352 = 0$$

Из ње добијамо:

$$0{\cdot}0\alpha_2 = \frac{0{\cdot}352}{6{\cdot}48} = 0{\cdot}05$$

Дакле је сада $x = 0{\cdot}85$. Тражимо сада једначину, чији су корени за 0·05 мањи од корена једначине 2').

$$\begin{array}{lllll}
 & 1, & -1{\cdot}6, & -6{\cdot}48, & 0{\cdot}352 \\
0{\cdot}05] & 1, & -1{\cdot}55, & -6{\cdot}5575, & \underline{0{\cdot}024125} \\
 & 1, & -1{\cdot}50, & \underline{-6{\cdot}6325} & \\
 & 1, & \underline{-1{\cdot}45} & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array}$$

Тражена једначина јесте:

$$3') \quad x^3 - 1{\cdot}45x^2 - 6{\cdot}6325x + 0{\cdot}024125 = 0$$

Из ње добијамо:

$$0{\cdot}00\alpha_3 = \frac{0{\cdot}0241}{6{\cdot}63} = 0{\cdot}003$$

и тако је сада $x = 0{\cdot}853$. Тражимо сада једначину, чији су корени од корена једначине 3') за 0·003 мањи

$$\begin{array}{lllll}
 & +1, & -1{\cdot}45, & -6{\cdot}6325, & +0{\cdot}024125 \\
0{\cdot}003] & 1, & -1{\cdot}447, & -6{\cdot}636841, & \underline{0{\cdot}00421447} \\
 & 1, & -1{\cdot}444, & \underline{-6{\cdot}641173,} & \\
 & 1, & \underline{-1{\cdot}441} & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array}$$

Тражена једначина:

$$4') \quad x^3 - 1{\cdot}441x^2 - 6{\cdot}641173x + 0{\cdot}004214477 = 0$$

даје четврту децималу корена:

$$0{\cdot}000\alpha_4 = \frac{0{\cdot}0042}{6{\cdot}64} = 0{\cdot}0006$$

дакле је сада $x = 0{\cdot}8536$. Тражимо сада из 4') једначину, чији су корени за 0·0006 мањи.

$$\begin{array}{lllll}
 & 1, & -1{\cdot}441, & -6{\cdot}641173, & 0{\cdot}004214477 \\
0{\cdot}\overset{3}{0}6 & 1, & -1{\cdot}441, & -6{\cdot}642038, & \underline{0{\cdot}000229254} \\
 & 1, & -1{\cdot}44, & \underline{-6{\cdot}64290} & \\
 & 1, & \underline{-1{\cdot}44} & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array}$$

Тражена је једначина:

$$5') \quad x^3 - 1{\cdot}4x^2 - 6{\cdot}64290x + 0{\cdot}000229254 = 0$$

из које добијамо пету децималу:

$$0{\cdot}0000\alpha_5 = \frac{0{\cdot}000229\ldots}{6{\cdot}64\ldots} = 0{\cdot}00003$$

Дакле је сада $x = 0{\cdot}85363$.

У једначини 5') занемарили смо, и то у другом и трећем сачиниоцу, децимале. Јер пошто последњи члан треба да има девет тачних децимала, а број, са којима се сада имају смањити корени једначине 5'), јесте 0·00003, дакле он сам већ има пет децимала, то предпоследњи сачинилац треба да има $9 - 5 = 4$ децимале и једну зарад поправке дакле свега пет. Други пак треба да има $5 - 5 + 1 = 1$ децималу. Тражимо сада једначину, чији су корени за 0·00003 мањи од корена једначине 5')

$$
\begin{array}{llllll}
& 1, & -1\cdot4, & -6\cdot64290, & +0\cdot000229254 \\
0\cdot0\overset{4}{3}] & 1, & -1\cdot4, & -6\cdot64294, & \underline{0\cdot000029966} \\
& 1, & -1\cdot4, & -\underline{6\cdot6430,} & \\
& 1, & \underline{-1\cdot4} & & \\
& \underline{1} & & &
\end{array}
$$

Тражена једначина јесте:

6') $x^3 - 1\cdot4x^2 - 6\cdot6430x + 0\cdot000029966 = 0$

Пошто број, за који ће се корени ове једначине морати смањити, има 6 децимала, то би ваљало у предпоследњем сачиниоцу задржати само четири децимале, што ће и учињено, а у оном пред њим $4 - 6 + 1 = -1$, одакле следује, да нам ни јединице тога сачиниоца не требају. Одатле следује, да се претпоследњи сачинилац у доцнијим једначинама неће мењати и према томе тражење последњих децимала непознатог корена своди се на деобу.

$$0\cdot000029966 : 6\cdot643 = 0\cdot000004511$$

3394

7 ;

7

Тражени корен тачан до на девет десетних места јесте: $x = 0\cdot853634511$.

2°. Тражимо сада други положан корен, који се налази између 4 и 5. Кад као овде корен има и цели део уза се, онда није нужно тражити му уже границе, то ће рећи, тражити и његове десетне делове, јер се ови помоћу Horner-ове методе барем врло приближно налазе. При тражењу тога корена бићемо у писању мало краћи.

$$
\begin{array}{lllll}
& 1, & -4, & -2, & +4 \\
4] & 1, & 0 & -2 & \underline{-4}\,^{1)} \\
& 1, & 4, & \underline{14} & \\
& 1, & \underline{8} & & \\
& \underline{1} & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
& 1, & 8, & 14, & -4; & 4 : 14 = 0\cdot2 \\
0\cdot2] & 1, & 8\cdot2, & 15\cdot64 & \underline{-0\cdot872} & \\
& 1, & 8\cdot4, & \underline{17\cdot32} & & \\
& 1, & \underline{8\cdot6} & & & \\
& \underline{1} & & & &
\end{array}
$$

---

[1]) Ова мена долази отуда, што је прескочен корен 0·8, који се налази између 0 и +4.

$$1, \quad 8{\cdot}6, \quad 17{\cdot}32, \quad -0{\cdot}872,$$
$$0{\cdot}872 : 17 = 0{\cdot}04$$

$$0{\cdot}04] \; 1, \quad 8{\cdot}64, \quad 17{\cdot}6656, \quad \underline{-0{\cdot}165376}$$
$$1, \quad 8{\cdot}68 \quad \underline{18{\cdot}0128}$$
$$1, \quad \underline{8{\cdot}72}$$
$$\underline{1}$$

$$1, \quad 8.72, \quad 18{\cdot}0128, \quad -0{\cdot}165376:$$
$$0{\cdot}165 : 18 = 0{\cdot}009$$

$$0{\cdot}\overset{2}{0}9] \; 1, \quad 8{\cdot}729, \quad 18{\cdot}091361, \quad \underline{-0{\cdot}002553751}$$
$$1, \quad 8{\cdot}738, \quad \underline{18{\cdot}170003}$$
$$1, \quad \underline{8{\cdot}747}$$
$$\underline{1}$$

$$1, \quad 8{\cdot}747, \quad 18{\cdot}170003, \quad -0{\cdot}002553751;$$
$$0{\cdot}00255 : 18 = 0{\cdot}0001$$

$$0{\cdot}\overset{3}{0}1] \; 1, \quad 8{\cdot}747, \quad 18{\cdot}170878, \quad \underline{-0{\cdot}000736662}$$
$$1, \quad 8{\cdot}747, \quad \underline{18{\cdot}17175}$$
$$1, \quad \underline{8{\cdot}747}$$
$$\underline{1}$$

$$1. \quad 8{\cdot}747, \quad 18{\cdot}17175, \quad -0{\cdot}000736662;$$

$$0{\cdot}000736 : 18 = 0{\cdot}00004$$

$$1, \quad 8{\cdot}7, \quad 18{\cdot}17210, \quad -0{\cdot}000009778$$

$$- \quad - \quad 18{\cdot}17175$$

Остале децимале корена тражиһемо путем деобе, дакле:

$$0{\cdot}000009778 : 18{\cdot}17 = 0{\cdot}000000538$$

Дакле је тражени корен, израчунат са 9 децимала:

$$x = 4{\cdot}249140538$$

3°. Трећи, одречан корен, који се налази између — 1 и — 2 израчунаћемо помоћу једначине:

$$1''). \qquad f(-x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$1, \quad 4, \quad -2, \quad -4,$$

$$1.] \qquad 1, \quad 5, \quad 3 \quad -1,$$

$$1, \quad 6, \quad 9,$$

$$1, \quad 7,$$

$$1,$$

1, 7, 9, — 1;

1 : 9 = 0·1

0·1] 1, 7·1 9·71 — 0·029

1, 7·2 10·43

1, 7·3

1

1, 7·3 10·43, — 0·029:

0·029 : 10 = 0·002

$0{\cdot}\overset{2}{0}2]$ 1, 7·302, 10·444604, — 0·008110792

1, 7·304, 10·459212

1, 7·306

1

1, 7·306, 10·459212, — 0·0008110792

0·0081 : 10·4 = 0·0007

$0{\cdot}\overset{3}{0}7]$ 1, 7·307, 10·464327, — 0·000785763

1, 7·31, 10·46944

1, 7·31

1

1, 7·31, 10·46944, —0·000785763

0·00078 : 10 = 0·00007

$0{\cdot}\overset{4}{0}7]$ 1, 7·31, 10·46995, — 0·000052867

1, 7·31, 10·4705

1, 7·31

1

Доцније децимале корена добијају се помоћу деобе:

0·000052867 : 10·4705 = 0·000005049

5145

957

Дакле је корен једначине 1"): $x = 1{\cdot}102775049$ и по томе корен једначине 1'): $x = -1{\cdot}102775049$

Примедба. Ми смо при објашњавању Horner-ове методе претпоставили, да је тражени корен од свију осталих одвојен т. ј. да су му нађене две границе, између којих се само он налази. А то, као што знамо можемо увек постићи.

Израчунавање једнаких и наблизу једнаких корена.

114. Кад дана једначина има једнаких корена, онда, као што знамо, можемо увек извести из ове једначину, која има за корене оне корене дате једначине, који се у њој јављају само по један пут, само по два пут, или само по три пут и т. д. И онда те нове једначине мо-

жемо решавати по методама, које смо прешли у ово неколико досадањих №-а. Али ако би дана једначина имала и једнаких корена, па би се захтевало, да се они из ње непосредно израчунају, онда је лако увидети, да се при том Newton-ова и Horner-ова метода не могу просто применити. Јер код тих двеју метода израчунава се поправка приближне вредности траженога корена x_1 помоћу количника:

$$1.) \qquad -\frac{f(x)}{f'(x)},$$

кад се у њему x замени том приближном вредношћу. Ако сад тражени корен није прост, већ даној једначини припада два или више пута као корен, онда је $f(x_1) = 0$ и $f'(x_1) = 0$. Дакле ће за узастопне приближне вредности траженога корена и бројилац и именилац тежити све више и више и више нули, и по томе тај разломак неће нам моћи дати ту поправку.

Што се тиче методе Regula falsi и она нас при том издаје, јер није тешко доказати, да би, ако се тражени корен јавља k-пута као корен једначине, требало решити једначину k-ог степена. И доиста, ако је x_1 тражени корен, а a и b две приближне вредности његове, између којих се он не мора налазити, и ако су h_1 и h_2 поправке тих приближних вредности, тако, да је:

$$x_1 = a + h, \quad x_1 = b + h_2$$

онда је:

$$1.) \left\{ \begin{aligned} f(a) &= f(x_1 - h_1) = f(x_1) - h_1 f'(x_1) + h_1^2 f''(x_1) - \dots \\ &\qquad + h_1^m f^m(x_1), \\ f(b) &= f(x_1 - h_2) = f(x_1) - h_2 f'(x_1) + h_2^2 f''(x_1) - \dots \\ &\qquad + h_2^m f^m(x_1) \end{aligned} \right.$$

Пошто су h_1 и h_2 врло мали бројеви, то можемо узети, да је приближно тачно:

$$2.) \quad f(a) = -h_1 f'(x_1), \quad f(b) = -h_2 f'(x_1),$$

где је $f(x_1) = 0$ за то, што је x_1 корен задате једначине $f(x) = 0$. Из 2) добијамо деобом:

$$3.) \qquad \frac{f(a)}{f(b)} = \frac{h_1}{h_2}$$

или пошто је: $h_1 = x_1 - a$, $h_2 = x_1 - b$:

$$4.) \qquad \frac{f(a)}{f(b)} = \frac{x_1 - a}{x_1 - b}$$

одакле следују са свим лако обрасци 2) и 3) у № 111.

Али ако је x_1 k-пута корен задатој једначини, онда је:

$$f(x_1) = 0, \; f'(x_1) = 0, \; f''(x_1) = 0 \; \dots \; f^{k-1}(x_1) = 0,$$

дакле се онда из 1) место обрасца 3) добија:

$$5.) \qquad \frac{f(a)}{f(b)} = \frac{h_1^k}{h_2^k} \quad \text{или} \quad \frac{f(a)}{f(b)} = \frac{(x_1 - a)^k}{(x_1 - b)^k}$$

и да бисмо одавде израчунали x_1, треба решити једначину k-тог степена.

Међу тим може се и Horner-ова метода са незнатном изменом исте применити и у овом случају.

115. Узмимо нека је $x = a + h$ корен датој једначини:

$$1.) \qquad f(x) = 0$$

више од један пут, где под a разумевамо приближну вредност тога корена, а под h поправку њену. Кад у 1) ставимо $x = a + h$, добићемо:

$$2.)\qquad \varphi(h) = v_0 h^m + v_1 h^{m-1} + \ldots . \\ + v_{m-4}h^4 + v_{m-3}h^3 + v_{m-2}h^2 + v_{m-1}h + v_m = 0.$$

одакле видимо, да је поправка h корен једначине:

$$3.)\qquad \varphi(z) = v_0 z^m + v_1 z^{m-1} + \ldots . \\ + v_{m-4}z^4 + v_{m-3}z^3 + v_{m-2}z^2 + v_{m-1}z + v_m = 0$$

и њој је поправка h онолико исто пута корен, колико је пута $a + h$ корен једначини 1). Ако је сад $a + h$ два пут корен једначини 1), дакле h два пут корен једначини 3), онда h мора бити једанпут корен једначини:

$$4.)\quad \varphi'(z) = m.v_0 z^{m-1} + \ldots + 3v_{m-3}z^2 + 2v_{m-2}z + v_{m-1} = 0$$

Сад кад будемо смењивали a са све приближнијим вредностима траженога корена једначине 1), при чему ће поправка h тежити нули, т. ј. постајати све мања и мања, онда ће $v_{m-1} = f'(a)$ тежити нули, али не и $v_{m-2} = f''(a)$, јер је по претпоставци $a + h$ само два пут корен једначини 1). То се у осталом јасно увиђа и из једначине 4). Јер кад би осим v_{m-1} и v_{m-2} тежило нули, кад a тежи траженом корену једначине 1) а h нули, онда би $h = 0$ био два пут корен једначини 4). дакле и три пут корен једначини 3), и за то би онда тражени корен био три пут корен једначини 1), а ми смо претпоставили да јој је он корен само два пут.

Ако се сад a разликује мало од траженог корена, дакле, ако је h мало, онда из једначине 2), која постаје, кад се у једначини 3) z замени вредношћу h, добијамо приближно тачно:

$$h = -\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}}.$$

Овај израз треба дакле у случају двојних корена, употребити као поправку приближне вредности место израза под 6) у № 113.

Да бисмо дакле добили узастопне децимале двојнога корена, ми ћемо у узастопним једначинама, које добијамо поступним смањивањем корена задате једначине, поделити другог сачиниоца с десна са двогубим трећим сачиниоцем опет с десна и резултат узети са противним знаком.

Ако се тражени корен јавља три пут као корен задате једначине, онда његова поправка h мора задовољити осим једначине 3) и 4) још и ову:

$$5.)\qquad \varphi''(z) = m(m-1)\, v_0 z^{m-2} + \ldots . \\ + 2.3v_{m-3}z + 2v_{m-2} = 0.$$

из које добијамо приближно тачно за $z = h$:

$$2.3v_{m-3}\, h + 2v_{m-2} = 0$$

или:

$$h = -\frac{v_{m-2}}{3v_{m-3}}.$$

Дакле: узастопне децимале тројнога корена добијамо, кад у узастопним једначинама, које налазимо смањујући поступно корене дате једначине, поделимо, идући с десна на лево, трећег сачиниоца са трогубим четвртим и резултат заузмемо противним знаком.

Радећи овако и даље доћи ћемо до закључка, да се помоћу Horner-ове методе добијају узастопне децимале траженога корена помоћу израза:

$$6.)\quad -\frac{v_m}{v_{m-1}},\ -\frac{1}{2}\frac{v_{m-1}}{v_{m-2}},\ -\frac{1}{3}\frac{v_{m-2}}{v_{m-3}},\ldots -\frac{1}{k}\frac{v_{m-k+1}}{v_{m-k}},$$

како се кад тражени корен јавља један пут, два пут, три пут . . . или k-пута као корен задате једначине.

Нека читалац огледа сам показану методу на примеру:

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

Ова једначина има два спрега једнаких корена, један између 1·6 и 1·7, а други између — 0·6 и — 0·7. Међу тим треба приметити, да се корени ове једначине могу такође лако наћи помоћу једне биквадратне једначине која се добија, кад се корени дане смање за $\frac{1}{2}$.

У осталом може се ствар проматрати и на овај начин. Узмимо нека се тражени корен једначине 1) јавља два пут као корен. Онда је h два пут корен једначини 3). Ако сад претпоставимо, да је h довољно мало, онда је приближно тачно.

$$v_{m-2}\,h^2 + v_{m-1}\,h + v_m = 0$$

Али, пошто је h двојни корен једначине 3), то из једначине 4) добијамо опет приближно тачно:

$$2v_{m-2}h + v_{m-1} = 0$$

из које смо једначине горе добили за h вредност $-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}}$. Ако из последњих двеју једначина избацимо v_{m-2}, добићемо:

$$h = -\frac{2v_m}{v_{m-1}}$$

На тај начин изрази:

$$-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}},\quad -\frac{2v_m}{v_{m-1}}$$

морају дати за h скоро једнаке приближне вредности, које ће се једна од друге разликовати тим мање, што је h мање.

Ако се тражени корен једначине јавља три пут као њен корен, онда вреде приближно тачно ове једначине:

$$v_{m-3}h^3 + v_{m-2}h^2 + v_{m-1}h + v_m = 0$$

$$3v_{m-3}h^2 + 2v_{m-2}h + v_{m-1} = 0$$

$$2.\ 3v_{m-3}h + 2v_{m-2} = 0.$$

Последња од ових једначина даје нам: $h = -\frac{v_{m-2}}{3v_{m-3}}$, вредност, коју смо горе нашли. Из прве две налазимо избацујући најпре v_{m-3} а после v_{m-2}:

$$h = -\frac{v_{m-1}}{v_{m-2}} \quad \text{и} \quad h = -\frac{3v_m}{v_{m-1}}$$

Ако би се тражени корен јављао 4-пута као корен, нашли бисмо радећи на сличан начин:

$$-\frac{v_{m-3}}{4v_{m-4}}, -\frac{2v_{m-2}}{3v_{m-3}}, -\frac{3v_{m-1}}{2v_{m-2}}, -\frac{4v_m}{v_{m-1}}$$

и т. д. и бројне вредности тих израза разликоваће се тим мање, што је год h мање.

116. Помоћу резултата, до којих смо дошли у № 115, у стању смо применити Horner-ову методу на раздвајање и израчунавање наблизу једнаких корена.

Претпоставимо, да задата једначина има два наблизу једнака корена, којима су заједнички: цели део α_0 и k првих децимала: $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, тако, да се та два корена разликују међу собом тек $(k+1)$-ом децималом и доцнијим. Кад смо по једној од познатих метода н. пр. Штурмовој, нашли заједничку приближну вредност $\alpha_0{;}\alpha_1$ тих двају корена, онда ћемо смањити корен дане једначине за $\alpha_0{;}\alpha_1$ па ћемо онда из нове једначине као и из доцнијих, на сличан начин т. ј. смањивањем њиних корена за $0{\cdot}0\alpha_2$, $0{\cdot}00\alpha_3$ и т. д. добивених, израчунавати остале заједничке децимале помоћу обрасца $-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}}$, јер се односно тих децимала оба корена могу сматрати као једнаки. Тако добивене заједничке децимале морају бити једнаке са онима, које добијамо помоћу количника $-\frac{2v_m}{v_{m-1}}$, што нам може служити као овера, да те децимале припадају доиста обојим коренима. И на тај начин радићемо дотле, док нисмо дошли до $(k+1)$-ве децимале, од које се па на даље оба корена међу собом разликују. А то ће се открити само собом тиме, што се за ту децималу неће добити иста вредност из оба количника, или ако би се то по некад и десило, онда ће за $(k+1)$-ву децималу, добивену из $-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}}$ последњи члан једначине свој

знак променути, што служи као миг, да смо мањи од два наблизу једнака корена прешли. Остале међу собом различне децимале оба корена наћићемо на обичан начин помоћу количника $-\frac{v_m}{v_{m-1}}$, при чему ће само прве неједнаке децимале оба корена, т. ј. α_{k+1} и α^1_{k+1} задавати мало посла док их не нађемо. За α_{k+1} треба узети највећи број, за који последњи члан једначине, што долази одмах за оном, која је дала последњу — k-ту — заједничку децималу, има још исти знак са последњим чланом ове друге једначине. А за α^1_{k+1} треба опет узети највећи број, за који је последњи члан прве од поменутих двеју једначина још противнога знака са последњим чланом друге једначине.

На сличан начин треба радити, кад једначина има више од два н. пр. r на близу једнаких корена. Ако су цели део и k првих децимала исти у свима тим коренима, и ако је опет $\alpha_0{;}\alpha_1$ заједничка приближна вредност тих корена, ми ћемо смањити корене једначине за $\alpha_0{;}\alpha_1$ и из нове једначине, а помоћу обрасца:

$$1.) \qquad -\frac{v_{m-r+1}}{r\,v_{m-r}}$$

израчунаћемо другу заједничку децималу $0{\cdot}0\alpha_2$. За тим ћемо смањити за $0{\cdot}0\alpha_2$ корене нове једначине, коју тако добијемо, а помоћу обрасца 1) израчунаћемо трећу децималу $0{\cdot}00\alpha_3$ и т. д. док нисмо нашли свих k — заједничких децимала, односно којих се морају поменутих r корена сматрати као једнаки. Нађене заједничке децимале морају бити исте са онима, које се добијају помоћу количника:

2.) $$-\frac{r\,v_m}{v_{m-1}}$$

Корени ће се раздвојити код $(k+1)$-ве децимале, а то ће се познати или по томе, што за $(k+1)$-ву децималу нећемо добити исту вредност из оба обрасца 1) и 2) или по томе, што ће последњи члан једначине свој знак променути, а то ће онда бити сигуран знак, да смо најмањи од r наблизу једнаких корена већ прешли. $(k+1)$-ву као и даље децимале тога корена налазимо после помоћу обрасца $-\frac{v_m}{v_{m-1}}$. Али полазећи од исте једначине, од које полазимо при израчунавању $(k+1)$-ве и доцнијих децимала најмањег корена, ми можемо лако израчунати $(k+1)$-ву као и доцније децимале и свију осталих наблизу једнаких корена, ако су $(k+1)$-ве децимале тих корена међу собом различне, јер се тада ти корени могу лако раздвојити и за тим сваки од њих за се помоћу обрасца $-\frac{v_m}{v_{m-1}}$ даље израчунавати. Али ако би неки од поменутих r корена имали и $(k+1)$-не децимале једнаке, онда ће се границе појединим групама таквих корена, који се још и у $(k+1)$-ој децимали слажу, открити просто нестанком извесног броја значних мена — сагласно са Budan-овом теоремом № 105. На сваку од тих група треба посебице применути методу израчунавања наблизу једнаких корена.

Пример. Нека је дата једначина:

$$f(x) = x^4 + 40x^3 + 185x^2 - 198x + 48 = 0$$

која има два наблизу једнака корена између граница 0·4 и 0·5. Смањимо корене једначине са 0·4 па за тим радимо према горњем упуству.

	1,	+ 40,	+ 185,	— 198,	+ 48
0·4]	1,	40·4,	201·16,	— 117·536	0·9856
	1,	40·8,	217·48,	— 30·544	
	1,	41·2,	233·96		
	1,	41·6			
	1				

$$-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}} = 0{\cdot}06\,, \quad -\frac{2v_m}{v_{m-1}} = 0{\cdot}06$$

	1,	+41·66,	+236·4596,	—16·356424,	+0·00421456
0·06]	1,	41·72,	238·9628,	—2·018656	
	1,	41·78,	241·4696		
	1,	41·84			
	1				

$$-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}} = 0{\cdot}004\,, \quad -\frac{2v_m}{v_{m-1}} = 0{\cdot}004$$

1,	+ 41·85,	+ 241·6370,	— 1·052108,	+ 0·00000613
. . . . . .		241·8044,	— 0·084890	
		241·9718		

$$-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}} = 0\cdot0001\,, \quad -\frac{2v_m}{v_{m-1}} = 0\cdot00007$$

Као што се види, прве три заједничке децимале оба корена добијамо исте из оба обрасца:

$$-\frac{v_{m-1}}{2v_{m-2}}\,, \quad -\frac{2v_m}{v_{m-1}}$$

дакле је 0·464 заједнички део у оба корена. Код четвртог десетног места корени се раздвајају. Ако смањимо корене последње једначине са 0·0001, онда последњи члан нове једначине остаје још положан; ако ли смањимо корене поменуте последње једначине са 0·0002, онда последњи члан нове једначине мења знак т. ј. постаје одречан и најзад постаје опет положан, кад корене поменуте последње једначине смањимо са 0·0003. Дакле је 1 четврта децимала првог а 2 другог корена, и по томе су они раздвојени и могу се сад сваки за се даље израчунавати.

За мањи од та два корена имамо:

1,	+ 42,	+ 241·972,	— 0·08489,	0·00000613
		241·98,	— 0·06069,	0·00000006
			— 0·03649	

Кад поделимо последњи члан претпоследњим, добићемо: 0·000002, и корен са шест тачних децимала биће $x = 0\cdot464102$.

За други пак корен имамо:

	1,	+ 42,	+ 241·972,	— 0·08489,	+ 0·00000613
$0\cdot\overset{3}{0}2]$			241·98	— 0·03649	— 0·00000117
			241·99	+ 0·01191	
			242		
$0\cdot\overset{4}{0}4]$			242	0·0216	0·00000031
				0·0313	

Дакле други корен: $x = 0\cdot464249$.

Разрешавање трансцендентних једначина.

117. Метода Newton-ова и Regula falsi могу се корисно и скоро без икакве измене употребити и при разрешавању сваке трансцендентне једначине $f(x) = 0$, ако су само $f(x)$ и њени изводи непрекидне функције и то, ако не за све могуће вредности x-а, а оно бар за један извезан низ тих вредности, оних, које проматрамо. Јер поменуте две методе као и остале претпостављају, да су $f(x)$ и њени изводи непрекидне функције x-а између оних граница, између којих тражимо корен једначине. У осталом ми ћемо доцније показати још једну методу израчунавања корена.

Али пре но што се пређе израчунавању корена трансцендентних једначина, треба корене најпре раздвојити. За тај посао не може се Штурмова теорема увек ни згодно употребити, али може Rolle-ова, као што ћемо видети из примера, који ће доћи.

Да се Newton-ова метода сме применити и на трансцендентне једначине, може се видети из онога, што сад одмах долази. Rolle-ова теорема као и образац 4) у № 108 вреде за $f(x)$ очевидно и онда, кад је она трансцендентна, ако су само она и њени изводи непрекидне функције за онај низ вредности x-а, који проматрамо.

Ако је:

$$f(x) = 0$$

задата трансцендентна једначина, a приближна вредност једног корена њеног, а $a + h$ тачна вредност истога, онда по обрасцу 4) №-е 108, кад још узмемо на ум то, да је $f(a + h) = 0$, добијамо:

$$0 = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a + \theta h)$$

одакле као и тамо налазимо даље

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{h^2}{2!} \frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}$$

Дакле је:

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

приближна вредност поправке. На исти начин налазимо и овде као и у № 108, да је:

$$k = \frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{k^2}{2!} \frac{f''(b - \theta' b)}{f'(b)}$$

поправка друге границе b траженога корена, а приближна вредност те поправке:

$$k = \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Regula falsi претпоставља, да се на довољно малом размаку $x = a$, $x = b$ може узети, да су промене функције $f(x)$ сразмерне променама x-а. Но то вреди за $f(x)$, па била она алгебарска или трансцендентна, ако је она само непрекидна између $x = a$, $x = b$ и ако је разлика $(b - a)$ довољно мала. Дакле и Regula falsi сме се употребити при решавању трансцендентних једначина.

Примери:

1°. Узмимо да се има да реши једначина:

$$x^x = 100$$

Ако узмемо обичне логаритме лево и десно, добићемо:

$$f(x) = x \log x - \log 100 = 0.$$

и то је сада једначина, коју треба решити. Ако означимо са M модуо обичне логаритамске системе, т. ј. број: 0·4342945 . . . , онда су први и други извод функције $f(x)$:

$$f'(x) = \log x + M, \quad f''(x) = \frac{M}{x}$$

Од 0 до 1 нема корена, јер је функција $f(x)$ за вредности x-а између тих граница вазда одречна. Замењујући x са узастопним целим и положним бројевима налазимо:

$$\text{за } x = 2: \quad f(x) = -1{\cdot}40$$

$$\text{за } x = 3: \quad f(x) = -0{\cdot}57$$

$$\text{за } x = 4: \quad f(x) = +0{\cdot}41$$

Одавде се види, да се један корен једначине налази између 3 и 4. Узимајући на ум, да је:

$$M = \frac{1}{l\,10} = log\, e$$

где је e основица природне логаритамске системе, налазимо да је први извод $f'(x) = 0$ за $x = \frac{1}{e}$, и да остаје положан за све веће вредности x-а. Одатле, као што знамо, следује, да $f(x)$ расти, кад x расти од $\frac{1}{e}$ до $+\infty$, и према томе $f(x)$ постаје само један пут $= 0$ и то између горе поменутих граница 3 и 4.

Помоћу обрасца 1) у № 111 налазимо као поправку прве приближне вредности 3:

$$h = \frac{0{\cdot}57}{0{\cdot}98} = 0{\cdot}5$$

Нова приближна вредност јесте дакле $x = 3{\cdot}5$. И сад налазимо:

$$\text{за } x = 3{\cdot}5: \quad f(x) = -0{\cdot}09576186$$

$$\text{за } x = 3{\cdot}6: \quad f(x) = +0{\cdot}00268900$$

Дакле се корен налази између $3{\cdot}5$ и $3{\cdot}6$ и то ближе другом него првом броју. Ако сад применимо Newton-ову методу и пођемо од $3{\cdot}6$ наћи ћемо као поправку:

$$k = 0{\cdot}0027145$$

Што се тиче погрешке, њу ћемо (№ 109) наћи помоћу обрасца:

$$\varepsilon < \frac{k^2}{2!}\,\frac{f''(3{\cdot}5)}{f'(3{\cdot}6)} < \frac{k^2 \times 0{\cdot}13}{2 \times 0{\cdot}99} < k^2 \times 0{\cdot}07$$

пошто је k бројно $< 0{\cdot}1$, то је $\varepsilon < 0{\cdot}0007$. Одатле узимајући горњу приближну вредност од k на ум, закључујемо да је:

$$k < 0{\cdot}0028 + 0{\cdot}0007 = 0{\cdot}0035.$$

Замењујући k са $0{\cdot}0035$ у горњи образац за погрешку ε налазимо даље:

$$\varepsilon < 0{\cdot}0035^2 \times 0{\cdot}07 < 0{\cdot}000001.$$

Према томе права вредност поправке k налази се између $+0{\cdot}027145$ и $+0{\cdot}0027155$. Узимајући $k = 0{\cdot}002715$ наћићемо тражени корен са 6 тачних децимала: $x = 3{\cdot}597285$.

2°. Да се реши једначина:

$$1.) \qquad e^{2x} = \frac{x+1}{x-1},$$

где је $e = 2{\cdot}7182818284\ldots$ основица природне логаритамске системе. Кад узмемо лево и десно логаритме, добићемо:

2.) $$f(x) = 2x - l\frac{x+1}{x-1} = 0.$$

Ако немамо при себи таблицу природних логаритама, онда, ако нећемо да израчунавамо непосредно помоћу редова природне логаритме бројева, можемо их наћи (№ 87 алг. анал.), кад помножимо обичне логаритме бројева са:

$$l\,10 = 2\cdot3025851.$$

Први и други извод функције $f(x)$ јесу:

$$f'(x) = 2 + \frac{2}{x^2-1}, \quad f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

Пошто $f'(x)$ почев од $x = 1 + \delta$, где је δ врло мали и положан број, па до $x = +\infty$ остаје положна, то $f(x)$ расти и остаје непрекидна, кад x расти од $x = 1 + \delta$ до $x = +\infty$. Она је за $x = 1 + \delta$ одречна, а за $x = 2$ положна, одакле следује да једначина 2), па дакле и једначина 1.) има *само један* корен и то између 1 и 2.

Из једначине 2) добијамо:

$$\text{за } x = 1\cdot1: \quad f(x) = -0\cdot844522437$$

$$\text{за } x = 1\cdot2: \quad f(x) = +0\cdot002104727$$

Тражени корен дакле налази се између 1·1 и 1·2 и много је ближи другом, него ли првом корену.

При рашћењу x-а од $x = 1 + \delta$ до $x = +\infty$ први и други извод не мењају знака, јер их ни једна од оних вредности, које x при том добија, не поништава, и за то се Newton-ова метода може применути.

Пошто су у овом примеру $f(x)$ и $f''(x)$ истог знака за $x = 1\cdot1$ а противног за $x = 1\cdot2$, то би ради веће сигурности требало поћи од $x = 1\cdot1$ као прве приближне вредности. Али пошто се 1·2 од траженог корена врло мало разликује, то ћемо поћи од тога броја.

Узимајући дакле $x = 1\cdot2$ у обрасцу:

$$k = \frac{f(b)}{f'(b)}$$

добићемо:

$$k = 0\cdot00032.$$

Дакле је тачнија вредност траженог корена:

$$x = 1\cdot19968$$

Пошто је погрешка од k одречна, то права вредност корена јесте мања од ове. Да видимо, да ли се корен случајно не налази између: 1·19967 и 1·19968.

$$\text{За } x = 1\cdot19967: \quad f(x) = -0\cdot000106788$$

$$\text{„ } x = 1\cdot19968: \quad f(x) = +0\cdot000008999$$

Дакле се доиста налази тражени корен између поменутих бројева. Примењујући поново Newton-ову методу налазимо:

$$\text{За } x = 1\cdot199678, \quad f(x) = -0\cdot0000044,$$

$$\text{„ } x = 1\cdot199679, \quad f(x) = +0\cdot0000022.$$

Ако применимо још један пут Newton-ову методу и водимо рачуна о погрешци поправке, или ако применимо у исти мах и Newton-ову методу и Regula falsi, наћићемо као тражени корен са 8 тачних децимала:

$$x = 1{\cdot}19967867$$

3°. Да се реши једначина:

$$1.)\qquad f(x) = x - tg\,x = 0.$$

Ова једначина не мења се, кад у њој сменимо x са $-x$, одакле следује, да кад јој је н. пр. број α корен, да јој онда мора бити корен и број $-\alpha$. Ми ћемо се дакле ограничити на израчунавање само положних корена.

Али да би једначина могла бити задовољена, треба да је $tg\,x$ положна, кад је x положно. Луци, који задовољавају једначину 1), морају се дакле завршивати у 1-ој, 3-ој, 5-ој и т. д. $(2n+1)$-ој четврти. Вредности тих лукова, који задовољавају једначину 1), морају се према томе налазити између $n\pi$ и $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, где је n ма какав цео и положан број. У свакој од тих четврти лук и његова тангента расту све једнако, али лук расти много спорије од тангенте, јер лук расти од $n\pi$ до $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, док међу тим његова тангента расти од 0 до $+\infty$. Дакле у свакој од поменутих четврти завршује се један, и то *само један лук,* који је корен једначини 1), што се у осталом може увидети и отуда, што први извод функције $f(x)$ т. ј:

$$f'(x) = -\,tg^2 x$$

не постаје никако $= 0$, кад x расте од $n\pi$ до $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$.

Међу тим лако је увидети, да кад лук расте од $n\pi$ па до извесне границе, која је граница у 3-ој, 5-ој и свакој доцнијој непарној четврти већа од $\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi$, да је онда лук $x > tg\,x$ и за то (fx) положна; а кад прешав ту границу x расте до $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, онда је $x < tg\,x$ и за то $f(x)$ постаје одречна. Једначина 1) има дакле бесконачно много корена, и први њен корен, т. ј. онај, који се завршује у 1-ој четврти, јесте $= 0$. Међу тим у свакој доцнијој непарној четврти, крај лука, који је корен једначине 1), према ономе, што смо већ видели, све се већма удаљава од почетка те четврти. Но то се још боље може увидети из онога, што сад долази.

Узмимо да су $n\pi + \alpha$ и $(n+k)\pi + \beta$, где су луци α и β мањи од $\frac{1}{2}\pi$, n-ти и $(n+k)$-ти корен једначине 1). Тада је:

$$tg\,(n\pi+\alpha) = n\pi + \alpha$$

$$tg\left\{(n+k)\,\pi + \beta\right\} = (n+k)\,\pi + \beta$$

и због тога:

$$(n+k)\,\pi + \beta > n\pi + \alpha,$$

па дакле и:

$$tg\left\{(n+k)\,\pi + \beta\right\} > tg\,(n\pi+\alpha)$$

или:

$$tg\,\beta > tg\,\alpha,$$

одакле најзад следује:

$$\beta > \alpha.$$

Ми ћемо да тражимо најмањи положни и од нуле различни корен једначине 1), а то је онај, који се завршује у 3-ој четврти. Кад лук x расти од π па до $\pi + \frac{1}{4}\pi$, онда $tg\, x$ расти од 0 па до $+1$, и за то тражени корен не може се налазити између π и $\pi + \frac{1}{4}\pi$, него се мора налазити између $\frac{3}{4}\pi$ и $\frac{3}{2}\pi$ или 3·9 и 5. Огледајмо најпре лук 4·5. Ако ставимо $x = 4{\cdot}5 = \pi + x^1$ онда је $x^1 = 1{\cdot}3584$ или у степенима одприлике $= 77^\circ\, 50'$. У таблицама тражићемо најпре $log\, tg\, x^1$ па из овога онда и саму $tg\, x^1$ и наћићемо:

$$tg\, x^1 = tg\, x = 4{\cdot}6384.$$

Дакле је за $x = 4{\cdot}5$: $f(x) = -0{\cdot}1384$.

Одавде закључујемо, да је број 4·5 већи од траженога корена. Заменимо у 1) x са 4·4. Ако опет ставимо $x = 4{\cdot}4 = \pi + x^1$ онда је у степенима $x' = 72^\circ\, 6'$

$$tg\, x = tg\, x^1 = 3{\cdot}0960.$$

Дакле је:

$$\text{за } x = 4{\cdot}4: \quad f(x) = +1{\cdot}3040,$$

и по томе је 4·4 мање од траженог корена. Он се дакле налази између 4·4 и 4·5 и то много ближе овом другом броју.

Помоћу методе Regula falsi добијамо као поправку $k = 0{\cdot}009$, дакле као нову приближну вредност 4·49. Замењујући добијамо:

$$\text{за } x = 4{\cdot}49: \; x' = 77^\circ 15' 30'' \; tg\, x' = 4{\cdot}223$$

и

$$f(x) = +0{\cdot}0677$$

$$\text{за } x = 4{\cdot}50: \; x' = 77^\circ 49' 50''. \; tg\, x' = 4{\cdot}6372 \text{ и}$$

$$f(x) = -0{\cdot}1372$$

Корен се дакле налази између 4·49 и 4·50. Помоћу Regula falsi добијамо као поправку $h = 0{\cdot}0033$, дакле као нову приближну вредност 4·4933. Ми ћемо да огледамо број 4·4934 и 4·4935; и кад то учинимо, наћићемо:

$$\text{за } x = 4{\cdot}4934: \; x' = 77^\circ 27' 10''{\cdot}3, \; tg\, x' = 4{\cdot}493210$$

$$\text{и} \quad f(x) = +0{\cdot}000190.$$

$$\text{за } x = 4{\cdot}4935: \; x' = 77^\circ 27' 30''{\cdot}9, \; tg\, x = 4{\cdot}495328$$

$$\text{и} \quad f(x) = -0{\cdot}001828.$$

Дакле се корен налази између 4·4934 и 4·4935 и ближи је првом броју него ли другом. Помоћу Regula falsi добијамо као поправку приближне вредности 4·4934 број 0·0000094, дакле као следећу приближну вредност

$$x = 4{\cdot}4934094$$

4°. Нека читалац реши сам ове задатке:

1') $$f(x) = x - cos\, x = 0.$$

Ова једначина има само један корен између 0 и $+1$, јер је за $x = 0$: $f(x) = 1$, а за $x = \frac{1}{2}\pi : f(x) = +\frac{1}{2}\pi$

Лако је увидети да она нема одречних корена, нити више од поменутог једног положног. Јер између $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}\pi$ први извод $f'(x)$ није $= 0$, а за вредности x-а веће од $\frac{\pi}{2}$ лук x већи је од $\cos x$. Тражени корен са седам тачних децимала јесте:

$$x = 0{\cdot}7390852$$

2')
$$x + \sin x = \frac{1}{3}\pi$$

$$x = 0{\cdot}536267 \quad \text{или} \quad x = 30^\circ 43' 33''$$

3')
$$x - \cot g\, x = 0$$

$$x = 0{\cdot}8603334 \quad \text{или} \quad x = 49^\circ 17' 36''{\cdot}55$$

4')
$$(e^x + e^{-x}) \cos x - 2 = 0$$

$$x = 4{\cdot}73004099.$$

Метода узастопних замена.

118. Ова је метода од најпростијих и најзгоднијих у оним случајевима, где је природа самог задатка таква, да се она може применити. Ево у чему се она састоји:

Треба дану једначину представити у облику

1.)
$$x = f(x)$$

т. ј. треба у њојзи непознату оставити само на једној страни неводећи бриге о томе, што ће се можда она налазити и на другој страни заједно са познатим бројевима.

Занемарујући сад десно оне чланове, у којима је непозната, добићемо прву приближну вредност за тражени корен. И ту ћемо вредност заменити опет место x десно од знака једнакости и т. д. И на тај прост начин радићемо дотле, док нисмо добили вредност непознате са оноликом тачношћу, колика се захтевала.

Нека је почев од друге приближне вредности па на даље a ма која а $a + h$ тачна вредност траженог корена. Тада је:

$$a + h = f(a + h)$$

Али је:

$$f(a + h) - f(a) = h \left\{ f'(a) + \delta \right\}$$

дакле је и

$$a + h - f(a) = h \left\{ f'(a) + \delta \right\}$$

Погрешка дакле, коју чинимо, кад узимамо $f(a)$ као тражени корен, скоро је једнака производу $hf'(a)$, одакле следује, да се метода може употребити само онда, кад је $f'(a) < 1$. Кад се метода може употребити, онда цифре које припадају заједно узастопним приближним вредностима траженога корена, припадају и тачној вредности његовој.

Пример Траже се корени једначине:

$$\frac{10^x}{\sqrt{x}} = 329476$$

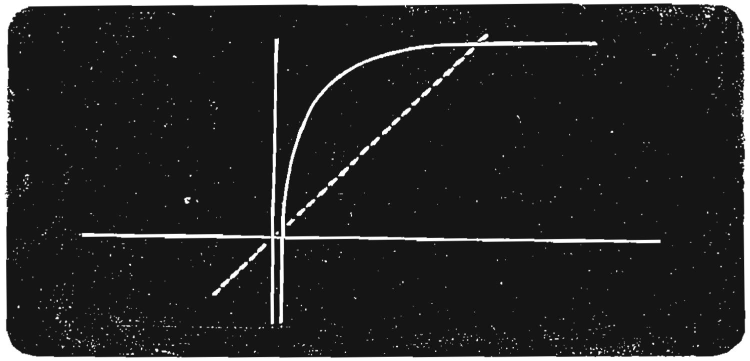
Ова једначина не може имати одречних корена, пошто је за такве вредности x-а именилац лево уображен. Да бисмо нашли положне корене њене, ми ћемо зарад простијега посла узети лево и десно логаритме, и тако ћемо добити:

$$1.) \qquad x = \frac{1}{2} \log x + 5{\cdot}5178238.$$

Ова једначина, можемо узети, да је постала избацајем y-а из двеју једначина:

$$y = x \text{ и } y = \frac{1}{2} \log x + 5{\cdot}5178238$$

од којих прва представља праву, која полови координатни угао, а друга тако звану логаритамску линију, којој је асимтота ординатна оса.



Сл. 8.

Апсцисе тачака, у којима се секу те две линије, јесу корени задате једначине. Једна је од тих тачака са свим близу почетка, а друга има апсцису, која лежи између 5 и 6. Дакле дата једначина има само два корена.

Пошто је вредност последњег члана једначине скоро $= 6$, то ћемо овај број узети као прву приближну вредност корена, а кад тај број заменимо у једначину 1), добићемо тачнију вредност корена:

$$x = \frac{1}{2} \log 6 + 5{\cdot}5178 = 5{\cdot}9069$$

Замењујући ову другу вредност у једначину 1) добићемо:

$$x = \frac{1}{2} \log 5{\cdot}9069 + 5{\cdot}5178238 = 5{\cdot}9035036$$

и кад тако продужимо, добијаћемо поступно:

$$x = \frac{1}{2} \log 5{\cdot}9035036 + 5{\cdot}5178238 = 5{\cdot}9033787$$

$$x = \frac{1}{2} \log 5{\cdot}9033787 + 5{\cdot}5178238 = 5{\cdot}9033741$$

$$x = \frac{1}{2} \log 5{\cdot}9033741 + 5{\cdot}5178238 \quad \text{или}$$

$$x = 5{\cdot}9033740$$

Овај резултат тачан је до на 7 децимала јер је:

$$\log x = \log 5{\cdot}9033740 = 0{\cdot}7711004$$

$$\frac{1}{2} \log x = 0{\cdot}3855502$$

$$5{\cdot}5178238$$

одакле: $\frac{1}{2} \log x + 5{\cdot}5178\ldots = 5{\cdot}9033740 = x.$

Ако се повратимо на општа разматрања у почетку ове №-е 118, наћи ћемо да је:

$$f(x) = \frac{1}{2} \log x + 5{\cdot}5178238$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\log e}{x}.$$

Пошто је сад x скоро $\doteq 6$, то је онда наблизу $f'(x) = \frac{1}{20}$ и према томе свака нова приближна вредност скоро двадесет пута приближнија, него она пред њом.

Сад тражимо и други корен једначине, који се налази између 0 и $+1$. Како је тражена вредност x-а врло мала, то можемо занемарити леву страну једначине 1), и онда ћемо имати:

$$\frac{1}{2} \log x = - \ 5{\cdot}5178238$$

$$\log x = -11{\cdot}0356476$$

$$= + \ 0{\cdot}9643524 - 12.$$

Дакле је:

$$x = 0{\cdot}000\ 000\ 000\ 092\ 119\ 7$$

и то тачно до на 17 децимала.

119. У овој ћемо №-и да применимо методу узастопних замена на квадратну једначину.

Кад је у једначини:

1.) $$ax^2 + bx + c = 0$$

сачинилац a врло мали, онда образац

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

није згодан, јер пошто смо добили приближну вредност бројиоца, треба је поделити са врло малим бројем $2a$. Дакле ћемо тада поделити и погрешку вредности бројиочеве са врло малим бројим, и тако ће погрешка корена испасти врло велика. Но томе се може помоћи методом узастопних замена.

Тражимо најпре корен, који се разликује врло мало од $-\frac{c}{b}$, а кад смо га нашли, лако је наћи и други корен, пошто је њин збир $= -\frac{b}{a}$.

Напишимо једначину 1) овако:

2.) $$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}$$

Овде је:

$$f(x) = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}, \quad f'(x) = -\frac{2ax}{b}.$$

Пошто је a врло мало, то је $f'(x) < 1$ и за то се може применити метода.

Прва приближна вредност јесте:

$$x = -\frac{c}{b}$$

Другу приближну вредност наћи ћемо, кад ову заменимо у једначину 2)

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}$$

И ова друга приближна вредност биће са гледишта примена већ доста тачна. Трећу приближну вредност могли бисмо добити, кад бисмо заменили ову другу у једначину 2). И кад то учинимо добићемо:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left\{-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}\right\}^2$$

$$= -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{a^3c^4}{b^7}$$

Међу тим треба се зауставити код трећег члана десно и узети као приближне обрасце:

$$x = -\frac{c}{b},\ x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3},$$

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^3}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5},$$

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{5a^3c^4}{b^7}$$

Као што се види, свака од ових вредности изводи се из оне пред њом, кад се овој дода један члан као поправка, и *погрешка* корена после тога додавања *увек је врло мала наспрам додатог члана*, а то је битни захтев при сваком приближном рачуну. Тако кад узмемо да је $x = -\frac{c}{b}$, погрешка је наспрам $-\frac{c}{b}$ врло мала, пошто је та погрешка помножена са врло малим бројем a. Ако ли узмемо да је:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}$$

погрешка је опет на спрам $-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}$ врло мала, пошто је та погрешка помножена са врло малим бројем a^2. Према овоме лако је, па зауставили се ми код ма кога члана, сазнати, да ли је нађена приближна вредност корена мања или пак већа од њега. Зарад тога треба само гледати на знак првог занемареног члана.

Пример. Да се израчуна дубина бунара, кад је t број секунада, који је протекао између тренутка, кад је камен пуштен у бунар, и тренутка, кад је звук од удара камена о дно дошао до нас, при чему се отпор ваздуха не узима у рачун.

Време t састоји се из два дела t_1 и t_2. Време t_1 јесте оно, које је требало камену, да прође дубину x бунара, а t_2 време, које је требало звуку, па да пређе исти простор.

Из Физике и Механике познато је да је:

$$x = \frac{gt_1^2}{2}$$

где је $g = 9{\cdot}80944$ метара. Одатле следује:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Такође је и

$$x = vt_2$$

где је $v = 340$ метара брзина звука. Одавде следује:

$$t_2 = \frac{x}{v}$$

Дакле је сада:

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v}$$

Одавде простим рачуном добијамо:

$$1.)\qquad \frac{x^2}{v^2} - 2\left\{\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right\} x + t^2 = 0$$

Оба корена ове једначине јесу положна, пошто је њихов збир:

$$2\left\{\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right\}$$

положан, и њихов производ t^2v^2 такође положан. Међутим само један корен одговара задатку, пошто бунар не може имати две различите дубине.

Из једначине 1) добијамо:

$$x = \frac{\frac{t}{v} \pm \sqrt{\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{t^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}$$

Први корен као што се види већи је од vt; дакле тај корен не одговара задатку, јер пошто је $x = vt_2$ и $t_2 < t$, то мора бити $x < vt$, дакле само други корен одговара задатку.

Сачинилац од x^2 у једначини 1) мањи је од јединице, јер је он раван броју $\frac{1}{340^2}$. Дакле се смемо послужити обрасцем:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}$$

јер само мањи корен одговара задатку.

Претпоставимо, да је $t = 10''$ н. пр. онда је:

$$a = \frac{1}{340^2},\quad b = -2\left\{\frac{10}{340} + \frac{1}{g}\right\},\quad c = 100.$$

Кад заменимо g његовом вредношћу добијамо $b = -0{\cdot}26278$ и сад помоћу логаритама добијамо даље:

$$log\left(-\frac{c}{b}\right) = log\,\frac{100}{0{\cdot}26278} = 2{\cdot}5804077$$

Као прву приближну вредност траженога корена налазимо:

$$x = -\frac{c}{b} = 380{\cdot}55 \text{ метара.}$$

Израчунајмо сада поправку: $-\frac{ac^2}{b^3}$

$$log\left(-\frac{ac^2}{b^3}\right) = log\,\frac{100^2}{340^2 \times 0{\cdot}26278^3} = 0{\cdot}6782653,$$

$$-\frac{ac^2}{b^3} = 4{\cdot}76 \text{ метара;}$$

дакле је друга приближна вредност:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} = 385{\cdot}31$$

Ова је вредност тачна до на један метар.

120. Проматрајмо поново једначину:

1.) $$x - tg\,x = 0$$

са којом смо већ имали посла. Ми смо у № 117 видели, да ова једначина има бесконачно много положних корена и израчунали смо најмањи од нуле различни корен. А овде ћемо да тражимо образац, помоћу којег ћемо израчунати ма који од узастопних корена њених.

Ми смо видели, да крај сваког лука, који је корен овој једначини, пада у четврт непарнога реда. Одатле следује, да је $(n+1)$-ви корен $<(2n+1)\frac{\pi}{2}$. Ако означимо са α одстојање $(n+1)$-ог корена од почетка оне четврти, у којој се он завршује, добићемо:

2.) $$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \alpha$$

Одавде добијамо даље:

$$tg\,x = tg\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} - \alpha\right\} = cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$$

Но пошто из једначине 1) следује $tg\,x = x$, то је даље

$$x = \frac{1}{tg\,\alpha} \quad \text{или} \quad tg\,\alpha = \frac{1}{x}.$$

Једначина 2) може се сад овако представити:

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + arc\,tg\,\frac{1}{x}.$$

Кад други члан ове једначине, који је десно од знака једнакости, заменимо његовим редом (№ 106 алгеб. анал.) добићемо:

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \dots$$

Одавде, кад лук лево од знака једнакости означимо са a, добијамо:

3.) $$x = a - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$$

И ово је образац, помоћу којега можемо наћи са коликом хоћемо приближношћу ма који од бесконачно многих корена једначине 1).

Прва приближна вредност $(n+1)$-ог корена јесте: $x = a$, друга $x = a - \frac{1}{a}$. Трећу ћемо наћи, кад у једначини 3) заменимо у 2-ом и 3-ем члану десно од знака једнакости x са $\left(a - \frac{1}{a}\right)$ а занемаримо све доцније чланове. Та трећа приближна вредност јесте дакле:

$$x = a - \frac{1}{a - \frac{1}{a}} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a}\right)^3}$$

или, ако десно назначене деобе извршимо и занемаримо чланове са a^5 и т. д.:

$$x = a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1}{3a^3} = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}$$

Четврту приближну вредност $(n+1)$-ог корена добићемо, ако са овом последњом вредношћу заменимо x десно у једначини 3) и занемаримо члан са x^7 и т. д. Деобе назначене у оставшим члановима извршићемо занемарујући при том све чланове са a^7 и т. д. На тај начин добићемо:

$$x = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} - \frac{13}{15a^5}$$

Нову приближну вредност могли бисмо наћи, кад бисмо ову заменили у једначину 3) занемарујући при том 9-ти степен x-а, а при извршивању деобе назначене у оставшим члановима 9-ти степен од a и т. д.

Да бисмо сад нашли узастопне корене једначине 1) заменићемо a његовом вредношћу $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ а n поступно са 1, 2, 3 и т. д.

Неколико речи о ирационалним једначинама.

122. Методе, помоћу којих се израчунавају корени бројних једначина, захтевају, да би се лакше могле применити, да се непозната x не налази у датој једначини нигде под кореним знаком. Одатле се види, колико је важно умети урационалити дату ирационалну једначину, т. ј. претворити је у другу, која је рационална, и у којој дакле непозната не стоји нигде под кореним знаком.

Узмимо једначину:

$$\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt[3]{b_0x + b_1} + c = 0$$

где c не мора бити стално, него и ма каква рационална функција x-а. Да бисмо је урационалили, ми ћемо подићи лево и десно на трећи степен, па ћемо добити:

$$(a_0x + a_1 + 3c^2)\sqrt{a_0x + a_1}$$

$$= -\left\{(3a_0c + b_0)x + 3a_1c + b_1 + c^3\right\}$$

и сад још остаје да подигнемо лево и десно на квадрат, па да једначина буде урационаљена.

Кад се у једначини налазе само два корена израза, и корени је изложилац бар у једног $= 2$, онда се на показани начин увек лако излази на крај, јер само треба вазда избацити најпре онај од два корена израза, код кога је корени изложилац већи.

Узмимо као бројни пример:

1.) $$x + 3\sqrt{x} = 10$$

Одавде добијамо:

$$10 - x = 3\sqrt{x}$$

и кад подигнемо лево и десно на квадрат:

2.) $$100 - 29x + x^2 = 0$$

Први корен $x = 4$ ове једначине задовољава задату једначину, а други $x = 25$ не. Разлог овој на први мах чудноватој појави лежи у томе, што је једначина 2) општија од задате, јер она постаје не само из задате него и из једначине:

$$3.) \qquad x - 3\sqrt{x} = 10$$

за то, што се при квадрирању мора добити исти резултат, па узео се знак $+$ или $-$ пред изразом $3\sqrt{x}$.

Ако једначину 1) схватимо општије, т. ј. тако, да се корена количина може узети и са знаком $+$ и са знаком $-$, онда она стоји као представник двеју једначина:

$$4.) \quad x - 10 + 3\sqrt{x} = 0, \; x - 10 - 3\sqrt{x} = 0$$

Једначина добивена множењем ових мора дати очевидно корене обеју једначина. Та нова једначина јесте:

$$(x - 10 + 3\sqrt{x})(x - 10 - 3\sqrt{x}) = 0$$

или:

$$(x^2 - 10)^2 - 9x = 0$$

или најзад

$$x^2 - 29x + 100 = 0,$$

а то је иста рационална једначина 2). Овај начин урационаљивања згодан је особито онда, кад се у једначини јављају више корена.

Узмимо једначину:

$$\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt{b_0x + b_1} + \sqrt{c_0x + c_1} = 0$$

Ова једначина, кад корене изразе схватимо као двозначне, стоји као представник једначина:

$$\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt{b_0x + b_1} + \sqrt{c_0x + c_1} = 0$$

$$\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt{b_0x + b_1} - \sqrt{c_0x - c_1} = 0$$

$$\sqrt{a_0x + a_1} - \sqrt{b_0x + b_1} + \sqrt{c_0x + c_1} = 0$$

$$-\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt{b_0x + b_1} + \sqrt{c_0x + c_1} = 0$$

Једначина, која постаје множењем ових, јесте:

$$-(a_0x + a_1)^2 - (b_0x + b_1)^2 - (c_0x + c_1)^2$$

$$+ 2(a_0x + a_1)(b_0x + b_1) + 2(a_0x + a_1)(c_0x + c_1)$$

$$+ 2(b_0x + b_1)(c_0x + c_1) = 0$$

или кад је уредимо:

$$(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 - 2a_0b_0 - 2a_0c_0 - 2b_0c_0)x^2 +$$

$$2(a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1 - a_0b_1 - a_0c_1 - b_0a_1 - b_0c_1 - c_0a_1 - c_0b_1)x$$

$$+ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2a_1b_1 - 2a_1c_1 - 2b_1c_1) = 0$$

Као бројни пример нека послужи једначина:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} + \sqrt{6x+7}$$

Из ње добијамо на мало час показани начин:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

којој су: $x = +3$ и $x = -1$ корени. Први број задовољава дату једначину, кад се само последњи члан узме са знаком $-$, а други је задовољава, кад се или други или трећи члан узме са знаком $-$.

122. На горе показани начин може се радити и онда, кад се у једначини налазе и корени виши од дру-

гог. Само тада треба имати на уму, да n-ти корен има n-различних вредности, које се добијају, кад се аритметична вредност n-тог корена помножи са свима вредностима количине $\sqrt[n]{+1}$.

$$\sqrt{a_0 x + a_1} + \sqrt[3]{b_0 x + b_1} + c = 0$$

Ако означимо аритметичну вредност првог члана са u, а другог са v, и узмемо на ум да су 1, α и α^2 вредности за $\sqrt[3]{+1}$, имаћемо овај низ једначина:

$$1.)\quad \left\{\begin{array}{l} u + v + c = 0 \\ u + \alpha v + c = 0 \\ u + \alpha^2 v + c = 0 \\ -u + v + c = 0 \\ -u + \alpha v + c = 0 \\ -u + \alpha^2 v + c = 0 \end{array}\right.$$

Производ прве три једначине јесте:

$$(u + c)^3 + (u + c)^2 (1 + \alpha + \alpha^2)\, v$$
$$+ (u + c)(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3)\, v^2 + \alpha^3 v^3 = 0$$

Али је као што знамо:

$$\alpha + \alpha^2 = -1, \ \alpha^3 = +1$$

Дакле због овога једначина се претвара у ову:

$$(u + c)^3 + v^3 = 0$$

или:

$$(v^3 + 3cu^2 + c^3) + u\,(3c^2 + u^2) = 0$$

Исто тако лако налазимо као производ последњих трију једначина под 1):

$$(v^3 + 3cu^2 + c^3) - u\,(3c^2 + u^2) = 0$$

Дакле је производ свих шест једначина под 1)

$$(v^3 + 3cu^2 + c^3)^2 - u^2 (u^2 + 3c^2)^2 = 0$$

Кад у овој једначини заменимо u^2 и v^3 вредностима њиховим:

$$u^2 = a_0 x + a_1, \quad v^3 = b_0 x + b_1$$

добићемо после са свим лаког свођаја рационалну једначину:

$$2.)\quad a_0 x^3 + \left\{3 a_0^2 (a_1 - c^2) - b_0 (6 a_0 c + b_0)\right\} x^2$$
$$+ \left\{3 a_0 (a_1 - c^2)^2 - 6 a_0 b_1 c_1 - 2 b_0 (3 a_1 c + b_1 + c^3)\right\} x$$
$$+ (a_1 - c)^3 - b_1 (6 a_1 c + b_1 + 2c^3) = 0$$

Као бројни пример узмимо:

$$\sqrt{x + 4} + \sqrt[3]{x + 3} + 1 = 0$$

Из ове једначине постаје рационална једначина:

$$x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$$

одакле следује:

$$x = -3, \quad x = -4, \quad x = +5$$

Прва и трећа вредност задовољавају дату једначину, кад се у њој узме први члан са знаком —, а друга је задовољава онакву, каква је.

123. Избацивање корених израза из задате једначине може се свести на избацај (елиминацију) више непознатих из више једначина. — Узмимо н. пр. једначину:

$$\sqrt{a_0x + a_1} + \sqrt[3]{b_0x + b_1} + c = 0$$

Ако ставимо:

$$\sqrt{a_0x + a_1} = y, \quad \sqrt[3]{b_0x + b_1} = z$$

дакле:

$$a_0x + a_1 = y^2, \quad b_0x + b_1 = z^3$$

добићемо три једначине:

$$y + z + c = 0$$

$$a_0x + a_1 - y^2 = 0, \quad b_0x + b_1 - z^3 = 0$$

Избацајем y-а и z-а из ових трију једначина добићемо тражену рационалну једначину. Кад z заменимо његовом вредношћу из прве једначине у последње две, добијамо:

$$y^2 - (a_0x + a_1) = 0$$

$$y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + (b_0x + b_1 + c^3) = 0$$

Да бисмо сад избацили из ове две једначине и y, ми ћемо радити по Sylvester-овој методи. Дакле ћемо помножити прву једначину редом са y^2, y^1 и y^0, а другу са y^1 и y^0 и тако ћемо добити ових пет једначина:

$$y^4 + 0y^3 - uy^2 + 0y + 0 = 0$$

$$0y^4 + y^3 + 0y^2 - uy + 0 = 0$$

$$0y^4 + 0y^3 + y^2 + 0y - u = 0$$

$$y^4 + 3cy^3 + 3c^2y^2 + vy + 0 = 0$$

$$0y^4 + y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + v = 0$$

где смо само краткоће ради ставили:

$$u = a_0x + a_1, \quad v = b_0x + b_1 + c^3$$

Пошто имамо пет једначина са 4 непознате, y^1, y^2, y^3 и y^4, то детерминанта њиних сачинилаца мора бити $= 0$, дакле:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -u \\ 1 & 3c & 3c^2 & v & 0 \\ 1 & 0 & 3c & 3c^2 & v \end{vmatrix}$$

Кад у овој детерминанти са -1 помножену прву врсту додамо четвртој, онда су сви основци првог стуба сем његовог првог основка равни нули, и онда се (№ 171 алгеб. анал) детерминанта своди на ову 4-ог реда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -u \\ 3c & 3c^2+u & v & 0 \\ 1 & 3c & 3c^2 & v \end{vmatrix} = 0$$

Кад у овој детерминанти додамо са u помножени први стуб трећем, онда сви чланови прве врсте сем првог, који је јединица, јесу једнаки нули, и детерминанта се своди на ову детерминанту трећег реда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -u \\ 3c^2+u & 3cu+v & 0 \\ 3c & 3c^2+u & v \end{vmatrix} = 0$$

Ако најзад у овој детерминанти додамо са u помножени први стуб трећем, онда опет сви чланови прве врсте осем првог — јединице — јесу $= 0$ и детерминанта се своди на ову:

$$\begin{vmatrix} 3cu+v, & u(u+3c^2) \\ u+3c^2, & 3cu+v \end{vmatrix} = 0$$

одакле сљедује:

$$u\,(u+3c^2)^2-(v+3cu)^2=0$$

или кад u и v заменимо њиховим вредностима

$$(a_0x+a_1)\,(a_0x+a_1+3c^2)^2$$
$$-\left\{3c(a_0x+a_1)+b_0x+b_1+c^3\right\}^2=0$$

а то је једначина 2) у № 122 само мало друкчије написана.

В. Једначине са две и више непознатих.

123. Кад је једначина са две или више непознатих цела и рационална односно свију непознатих, онда се степен њен управља по збиру изложилаца непознатих у ономе члану, где је тај збир највећи.

Према томе у *потпуној* једначини m-ог степена са две непознате x и y морају бити сви чланови, у којих збир изложилаца непознатих x и y није већи од m. Да бисмо једначину што простије написали, ми можемо у њој скупити увек заједно све оне чланове њене, у којима се налази један и исти степен једне непознате, н. пр. x-а, и за тим је уредити по степенима x-а. После тога једначина ће изгледати овако:

1.) $a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0$

Ако тако исто учинимо и са другом такође задатом једначином, која је n-ог степена, она ће изгледати овако:

2.) $b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}x+b_n=0.$

У једначинама 1) и 2) сачиниоци a_0 и b_0 морају бити независни од y, иначе би степен прве био виши од m-ог, а друге од n-ог. Из истог узрока могу сачиниоци a_1 и b_1 односно y бити највише првог степена, сачиниоци a_2 и b_2

највише другог, сачиниоци a_3 и b_3 највише трећег и т. д., и најзад сачиниоци a_m и b_n могу бити односно y: први највише m-ог, а други највише n-ог степена.

Кад у једначини нема свију чланова, које она према висини свога степена може имати, она се зове *непотпуна*. Сачиниоци чланова, којих нема, могу се сматрати као $= 0$.

Пошто a_0 и b_0 од y не зависе, то нам је слободно поделити њима једначине 1) и 2).

Претпоставимо сад нека су нам задате једначине 1) и 2), у којима, ако хоћемо, можемо узети, да су a_0 и b_0 једнаки јединици, нека су нам велим оне задате с тим да их решимо. А под тим разумемо, да имамо наћи за непознате x и y такве спрегове вредности, које у једначинама место x и y стављене исте једначине задовољавају. Ако је:

$$x = \alpha, \quad y = \beta$$

такав један спрег вредности, које задовољавају обе једначине у исти мах, онда се тај спрег зове *корени спрег* или *разрешење* даних једначина 1) и 2). Ако су задате једначине вишег степена, оне ће имати више разрешења; али број ових, као што ћемо доцније видети и као што се из № 176 алгеб. анал. увиђа, не може никад бити већи од mn, ако су m и n степени задатих једначина. Број тих разрешења једнак је производу mn, ако су једначине потпуне; у противном случају он је мањи од mn.

Пре свега ваља показати, по чему се распознаје, да једна вредност y-а одговара задатим једначинама, а тим хоћемо да кажемо, да их она у свези са извесном вредношћу x-а задовољава.

Узмимо нека је $y = \beta$ једна од тражених вредности y-а. Пошто она у свези са извесном вредношћу x-а задовољава задате једначине, то онда та вредност y-а мора бити та-

ква, да кад је заменимо у обе једначине, после чега ће се у њима налазити само непозната x, да онда велим обе једначине морају имати бар једну извесну вредност x-а као заједнички корен. И том заједничком корену одговараће заједнички делилац двају полинома. Тај делилац, који је функција x-а, биће првог или вишег степена односно x, како кад вредности $y = \beta$ одговарају једна или више вредности x-а.

И обратно свака вредност y-а, која је таква, да кад је заменимо у задате једначине, ове после тога добијају извесну функцију x-а као заједничког делиоца, свака таква вредност y-а одговара задатим једначинама. Јер она тада очевидно задовољава задате једначине у свези са вредношћу или вредностима x-а, које поништавају заједничког делиоца.

124. Али пре сваке замене полиноми задатих једначина не могу имати заједничког делиоца, који би био функција обеју непознатих или једне само од њих, сем ако су задате једначине неодређене, што ми не претпостављамо. Јер ако задате једначине представимо краће са:

$$3.) \qquad A = 0\,, \quad B = 0$$

и ако узмемо да је:

$$A = A'C\,, \quad B = B'C$$

где је C функција x-а и y-а, онда очевидно свако од бесконачно многих разрешења неодређене једначине $C = 0$ јесте и разрешење једначина 3), и ове су дакле неодређене

Ако ли је C само функција x-а, онда свака од оно неколико вредности x-а, које даје једначина $C = 0$, у свези са ма каквом вредношћу y-а задовољава једначине 3) и оне су опет неодређене. Исто тако кад је C само функција y-а, свака од неколико вредности y-а, које даје једначина $C = 0$, у свези са ма каквом вреднošћу x-а мора задовољити једначине 3), које су дакле и тада неодређене.

Закључимо дакле: *да кад год су задате једначине одређене, т. ј. кад имају одређени број разрешења, њини полиноми не могу пре сваке особене замене имати заједничког делиоца, који би био функција обеју непознатих или само једне од њих.*

Да бисмо нашли сва разрешења задатих једначина, ми ћемо из њих најпре избацити (елиминисати) једну непознату, н. пр. x, и на тај начин добићемо нову једначину само са непознатом y. Корени те једначине, која се зове *решавајућа једначина* или *резултанта* даних једначина, биће тражене вредности y-а, које одговарају датим једначинама. Ми ћемо сад да покажемо једну методу елиминације, која потиче непосредно из онога, што смо до сад говорили.

Ми смо видели, да је значајна особина сваке вредности y-а, која одговара задатим једначинама, та, да кад њоме заменимо y у тим једначинама, њини полиноми после тога имају извесну функцију x-а као заједничког делиоца, који пре те замене полиноми нису имали, изузев случај, кад су једначине неодређене, а тај случај ми сада не замишљамо. И тога заједничког делиоца могли бисмо наћи, кад бисмо полиномима, после поменуте замене y-а, тражили на већ познати начин највећег заједничког делиоца.

Али у почетку посла ми још незнамо ни вредности y-а ни вредности x-а, које одговарају задатим једначинама. Међу тим ми смо при свем том у стању наћи решавајућу једначину. Зарад тога ми ћемо са полиномима једначина радити онако, као кад бисмо им тражили нај-

већег заједничког делиоца. Узастопни остатци биће односно x све нижег и нижег степена, и најзад ће се јавити један остатак, који не зависи од x, већ је само функција y-а. Да су нам познате биле тражене вредности y-а, и да смо једном ма којом од њих још у почетку рада заменили y, ми бисмо место поменуте функције y-а нашли нулу као последњи остатак. Но пошто је очевидно са свим све једно, заменили ми y у почетку или на крају рада таквом једном вредношћу, то онда излази, да последња функција y-а или последњи остатак мора бити $= 0$ за сваку вредност y-а, која одговара датим једначинама. Дакле:

Решавајућа једначина, која даје тражене вредности y-а, добија се, кад се последњи остатак стави $= 0$.

Питање је још, како се налазе вредности x-а, које одговарају вредностима y-а нађеним помоћу решавајуће једначине. Зарад тога узмимо на ум то, да је претпоследњи остатак при горе поменутом раду облика: $a + bx$, где су a и b функције само y-а, и да је тај претпоследњи остатак за сваку нађену вредност y-а заједнички чинилац датих полинома, претпостављајући наравно, да у овима место y стоји иста вредност као и у том остатку. Одатле следује, да ћемо вредности x-а, које одговарају нађеним вредностима y-а, т. ј. које с њима у свези задовољавају обе дане једначине, наћи, кад претпоследњи остатак ставимо $= 0$, тако добивену једначину решимо односно x, па онда у изразу за x заменимо редом y нађеним вредностима. Према свему до сад реченоме излази дакле:

Да се сва разрешења датих једначина налазе разрешењем једначина, које постају из последња два остатка, нађена при примени методе највећег заједничког делиоца на задате полиноме.

Примедба. Ако су задати полиноми уређени по степенима y-а а не x-а, онда ће се у решавајућој једначини налазити само непозната x. Претпоследњи остатак у том случају биће облика: $a' + b'y$, где су a' и b' функције само x-а.

125. У овој №-и намера нам је да покажемо још јасније, да су сва разрешења датих једначина доиста истоветна са разрешењима једначина, које постају, кад се горе поменута последња два остатка ставе $= 0$.

Ми при том можемо претпоставити, да полиноми задатих једначина немају заједничког делиоца, који би био функција обеју непознатих или само једне од њих. Јер ако би задате једначине имале заједничког делиоца, који би био функција обеју непознатих, то би се само собом открило, кад бисмо на задате полиноме применили методу највећег заједничког делиоца, јер би тада последњи остатак био $= 0$, а претпоследњи би био заједнички делилац полинома. Задате једначине биле би неодређене, оне би т. ј. имале бесконачно много разрешења. Кад бисмо у таковом случају скратили задате једначине са нађеним заједничким делиоцем, онда полиноми нових једначина не би више имали заједничког делиоца, који би био функција обеју непознатих.

Да ли пак полиноми задатих једначина имају као заједничког делиоца једну функцију само x-а или само y-а, може се дознати одмах у почетку рада. Зарад тога уредимо полиноме најпре по степенима н. пр. x-а, а за тим тражимо заједничког делиоца сачиниоцима узастопних степена од x како у једном тако и у другом полиному. Ако би било таквог заједничког делиоца, како за један тако и за други полином, онда би заједнички делилац тих делилаца био и заједнички делилац полинома задатих једначина, и ако тај заједнички делилац полинома није особени број него функција y-а, онда би задате једначине (№ 124) биле опет неодређене. Али кад бисмо их скратили и са тим заједничким делиоцем, оне би после тога могле имати као заједничког делиоца још само какву функцију x-а. Да бисмо дознали, да ли је то случај или не, ми ћемо полиноме уредити поново, али по степенима y-а и за тим ћемо тражити заједничког делиоца сачиниоцима и једног и другог полинома. Заједнички делилац тако нађених делилаца биће заједнички делилац полиномима задатих једначина, са којим се оне могу скратити.

Претпостављајући дакле, да полиноми задатих једначина немају никаква заједничка делиоца, радимо са њима онако, као кад бисмо им тражили највећег заједничког делиоца, користећи се при том свима познатим рачунским олакшицама. Те олакшице састоје се с једне стране у томе, што се узастопни дељеници имају помножити како кад са једним особеним бројем или функцијом y-а, и то зарад тога, како сачиниоци количника и остатка не би били разломци, а с друге стране у томе, што се узастопни остатци зарад простијег посла имају скратити са особеним бројем, који би се јавио као чинилац — заједнички — њихових чланова. Зарад онога што ће доћи, ми претпостављамо, да ако би сачиниоци којег остатка имали какву функцију y-а као заједничког чиниоца, да тај остатак није скраћен с том функцијом. Цео низ узастопних радова може се представити овим једначинама:

$$
1.)\quad
\begin{aligned}
KA &= BQ + R \\
K_1B &= RQ_1 + R_1 \\
K_2R &= R_1Q_2 + R_2 \\
K_3R_1 &= R_2Q_3 + R_3 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
K_nR_{n-2} &= R_{n-1}Q_n + R_n
\end{aligned}
$$

где су K, K_1, K_2 . . . K_n најпростији чиниоци, са којима је ваљало помножити дотичне дељенике, те да сачиниоци количника и остатка испадну цели. Из прве једначине 1) следује, да свако разрешење задатих једначина:

$$2.) \qquad A = 0 \quad \text{и} \quad B = 0$$

т. ј. сваки спрег вредности x-а и y-а, које поништавају у исти мах и A и B, морају поништити и први остатак R. Дакле сва разрешења задатих једначина 2) јесу у исти мах и разрешења једначина:

$$3.) \qquad B = 0 \quad \text{и} \quad R = 0$$

На исти начин дознајемо из друге једначине под 1), да сва разрешења једначина 3), па дакле и једначина 2) јесу у исти мах и разрешења једначина:

$$4.) \qquad R = 0 \quad \text{и} \quad R_1 = 0$$

Из треће једначине под 1) дознајемо, да сва разрешења једначина 4), па дакле и једначина 3) и једначина 2) јесу у исти мах и разрешења једначина:

$$5.) \qquad R_1 = 0 \quad \text{и} \quad R_2 = 0$$

Продужавајући овако и даље наћи ћемо најзад, да сва разрешења задатих једначина јесу у исти мах разрешења сваког од ових спрегова једначина:

$$\left.\begin{matrix} B = 0 \\ R = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} R = 0 \\ R_1 = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \ldots \quad \left.\begin{matrix} R_{n-1} = 0 \\ R_n = 0 \end{matrix}\right\}$$

Последње две једначине јесу оне у № 124 поменуте, које постају из последња два остатка. Друга од тих једначина има само непознату y, и решењем те једначине добијају се све вредности за ту непознату, које одговарају задатим једначинама.

Повратимо се опет на једначине 1), које ћемо сада прелазити у обрнутом смислу, т. ј. одоздо на горе. Из последње једначине под 1), видимо, да свако разрешење једначина:

$$6.) \qquad R_{n-1} = 0, \quad R_n = 0$$

мора поништити $K_n R_{n-2}$, а то може бити, ако је или $K_n = 0$ или $R_{n-2} = 0$. Одатле следује, да се међу разрешењима једначина 6) морају налазити разрешења једначина:

$$7.) \quad \left.\begin{matrix} K_n = 0 \\ R_{n-1} = 0 \end{matrix}\right\}, \qquad 8.) \quad \begin{matrix} R_{n-2} = 0 \\ R_{n-1} = 0 \end{matrix}$$

Прелазећи на претпоследњу једначину, дознаћемо на сличан начин, да се међу разрешењима једначина 8) морају налазити разрешења једначина:

$$\left.\begin{matrix} K_{n-1} = 0 \\ R_{n-2} = 0 \end{matrix}\right\}, \qquad \begin{matrix} R_{n-3} = 0 \\ R_{n-2} = 0 \end{matrix}$$

и ако тако и даље продужимо, заустављајући се код сваке од једначина под 1), доћи ћемо најзад до закључка, да се међу разрешењима једначина 6), које постају из последња два остатка, морају налазити разрешења свију ових спрегова једначина:

$$\left.\begin{aligned} K_n &= 0 \\ R_{n-1} &= 0 \end{aligned}\right\} \cdot \left.\begin{aligned} K_{n-1} &= 0 \\ R_{n-2} &= 0 \end{aligned}\right\} \; \cdots\cdots \; \left.\begin{aligned} K &= 0 \\ B &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 0 \end{aligned}\right\}$$

И на тај начин видимо, да су једначине 6) општије од задатих, јер оне имају као разрешења не само разрешења задатих једначина, него и разрешења свију оних спрегова једначина, који постају, кад се ставе једнаки нули сваки делилац, као и количина K, са којом је одговарајући дељеник био помножен.

Закључимо дакле из свега тога, да решавајућа једначина $R_n = 0$, коју добијамо применом методе највећег заједничког делиоца, има истина као корене све вредности y-а, које одговарају задатим једначинама, али да она може имати као корене и такве вредности y-а, које никако не одговарају задатим једначинама, или које су им, као што се то каже, *стране*. Ми рекосмо: *може*, јер се дешава по кад кад, да ни један спрег једначина, које следују:

$$9.)\quad \left.\begin{aligned} K_n &= 0 \\ R_{n-1} &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} K_{n-1} &= 0 \\ R_{n-2} &= 0 \end{aligned}\right\} \; \cdots\cdots \; \left.\begin{aligned} K &= 0 \\ B &= 0 \end{aligned}\right\}$$

нема разрешења, у ком је случају $R_n = 0$ права решавајућа једначина. Један ма који спрег једначина од оних под 9) неће имати ни једног разрешења онда, кад свака вредност y-а, коју даје прва једначина тога спрега, поништава све оне чланове друге једначине истога спрега у којима се налази x. *Први спрег једначина под* 9) *нема и не може никад имати разрешења.*

126. Ако би неке од једначина под 9) имале разрешења, која ће се, као што смо видели, налазити међу разрешењима једначина 6):

$$R_{n-1} = 0, \quad R_n = 0$$

онда та разрешења треба у опште напустити, јер она не одговарају задатим једначинама. Ми рекосмо *у опште*, јер има случајева, где по неко разрешење једначина под 9) јесте разрешење и самих задатих једначина. Узмимо н. пр. да смо са $K_3 = (y - \beta)$ морали помножити четвртог дељеника R_1 у једначинама под 1) № 125. Ако је сад $(y - \beta)$ чинилац не само првом члану одговарајућег делиоца R_2 него и самом том делиоцу, онда ће се он морати јавити као чинилац и у свима доцнијим остацима до последњега закључно, као што се то може увидети из једначина 1) у № 125. Пошто је сад за $y = \beta$ $R_2 = 0$, $R_3 = 0$ и т. д. при ма каквој вредности x-а, то је онда јасно, да ће R_1 *при тој вредности* y-а морати бити последњи делилац. Ако дакле K_2. K_1 и K нису $= 0$ за $y = \beta$, онда је увиђавно, да ће $y = \beta$ у свези са вредношћу x-а, која се помоћу ње добија из једначине $R_1 = 0$, морати задовољити и задане једначине.

Кад смо на тај начин сазнали оне корене једначине $R_n = 0$, који не одговарају задатим једначинама, онда да бисмо добили праву решавајућу једначину, треба само R_n поделити са кореним чиниоцима, који постају из тих корена.

Примери

1°. Да се реше једначине:

$$x^3 - 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x - y^3 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 - 2yx + y^2 - y = 0.$$

При првој деоби добија се $x - y$ као количник, а као остатак:

$$R = x - 2y$$

При другој и последњој деоби добија се x као количник, а као други и последњи остатак:

$$R_1 = y^2 - y$$

Пошто ни једног дељеника нисмо морали множити, то је:

$$y^2 - y = 0$$

права решавајућа једначина; корени су њени:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = +1.$$

Кад претпоследњи остатак $x - 2y$ ставимо $= 0$ добићемо:

$$x = 2y$$

Кад овде заменимо y са нађеним вредностима, наћићемо као одговарајуће вредности x-а

$$x = 0, \quad x = 2.$$

2°. Да се реше једначине:

$$(y-1)\,x^2 + 2x - 5y + 3 = 0$$

$$yx^2 + 9x - 10y = 0$$

Првог дељеника, а то је први задати полином, треба помножити са y, како би сачиниоци количника и остатка испали цели. Први је количник $(y-1)$ а први остатак:

$$R = (-7y + 9)\,x + 5y^2 - 7y$$

При другој деоби, при којој је дељеник помножен са $(-7y + 9)^2$, добија се као количник:

$$yx + (-5y^3 + 7y^2 - 63y + 81)$$

а као остатак и то последњи:

$$R_1 = 25y^5 - 70y^4 - 126y^3 + 414y^2 - 243y$$

Решавајућа једначина, која се добија, кад се овај остатак стави $= 0$, даје за y ове вредности:

$$y = 0,\ 1,\ 3,\ -\frac{3 \pm 3\sqrt{10}}{5}$$

Кад ове вредности заменимо у једначину, која постаје, кад се претпоследњи остатак стави $= 0$, наћи ћемо као одговарајуће вредности x-а:

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 5 \mp \sqrt{10}$$

Но сад треба видети, да ли међу нађеним разрешењима има и таквих, која не одговарају задатим једначинама.

Пошто смо првог дељеника помножили са y, то треба решити ове једначине:

$$y = 0, \quad yx^2 + 9x - 10y = 0$$

Једно разрешење ових једначина јесте $x = 0$, $y = 0$, и то разрешење треба одбацити.

Други дељеник био је помножен са $(-7y + 9)^2$ дакле треба решити једначине:

$$-7y + 9 = 0, \ (-7y + 9)\,x - 5y^2 - 7y = 0$$

Но оне немају разрешења, и за то услед множења другог дељеника није придошао никакав стран корен решавајућој једначини. На тај начин остају само четири разрешења задатих једначина:

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ x = 1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = 3 \\ x = 2 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-3+3\sqrt{10}}{5} \\ x = -5-\sqrt{10} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-3-3\sqrt{10}}{5} \\ x = -5+\sqrt{10} \end{array}\right\}$$

3°. Да се реше једначине:

$$x^3 - 3(y-1)x^2 + (3y^2 - 6y - 1)x -$$
$$- y^3 + 3y^2 + y - 3 = 0$$
$$x^2 + 2(y+2)x + y^2 + 4y + 3 = 0$$

Остатак при првој деоби скраћен са 4 јесте:

$$R = 3y(y+1)x + y^3 + 6y^2 + 5y.$$

При другој деоби треба дељеника, а то је други задати полином, помножити са $3y^2(y+1)^2$. Остатак при деоби са 4 скраћен јесте:

$$R_1 = y^6 + 3y^5 + y^4 - 3y^3 - 2y^2$$

или

$$R_2 = y^2(y^4 + 3y^3 + y^2 - 3y - 2)$$

Кад се овај остатак, који је последњи, стави $= 0$ и добивена једначина реши, налазимо као корене њене:

$$y = 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ -1,\ -2$$

Но питање је сад, да ли међу овим коренима има и таквих, који не одговарају датим једначинама. Једини корени, који би могли не одговарати задатим једначинама, могли би бити $y = 0$ и $y = -1$, који долазе од чинилаца y и $y+1$ увучених у рачун при другој деоби. Да бисмо испитали, да ли $y = 0$ одговара задатим једначинама, треба решити једначине:

$$y = 0,\ 3y(y+1)x + y^3 + 6y^2 + 5y = 0$$

Као што се види сви чланови друге једначине за $y = 0$ јесу $= 0$, јер је y чинилац полиному; дакле ваља вредности $y = 0$ тражити одговарајућу вредност x-а из једначине:

$$x^2 + 2(y+2)x + y^2 + 4y + 3 = 0$$

Одавде за $y = 0$ следује једначина:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

и њени корени: $x = -1$, $x = -3$ одговарају вредности $y = 0$. Дакле су (№ 126):

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = -1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = -3 \end{array}\right\}$$

разрешења задатих једначина.

Да бисмо испитали, да ли $y = -1$ одговара задатим једначинама, треба решити једначине:

$$y + 1 = 0,\ 3y(y+1)x + (y^3 + 6y^2 + 5y) = 0$$

Али чланови друге једначине постају $=0$ за $y=-1$, јер је $(y+1)$ чинилац њеној левој страни; дакле треба вредности $y=-1$ одговарајуће вредности x-а тражити (№ 126) из једначине:

$$x^2+2(y+2)x+y^2+4y+3=0$$

Одавде за $y=-1$ добијамо:

$$x^2+2x=0$$

и њени корени $x=0$, $x=-2$ одговарају вредности $y=-1$. Дакле су:

$$\left.\begin{array}{l} y=-1 \\ x=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=-1 \\ x=-2 \end{array}\right\}$$

такође разрешења задатих једначина. Остала два разрешења јесу, као што је лако наћи:

$$\left.\begin{array}{l} y=1 \\ x=2 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=1 \end{array}\right\}$$

4°. $$y^3x^2-3y^3x-y^2+2=0$$

$$(y^2-3y+2)x^2+(y-1)x-3y+1=0$$

Пошто су оба полинома истог степена односно x, то је све једно, узели ма који од њих за првог дељеника. Ако узмемо први полином као дељеника, треба га помножити са (y^2-3y+2). Први је остатак:

$$R=(-3y^5+8y^4-5y^3)x+(2y^4+2y^3-6y+4)$$

Први сачинилац остатка може се представити као производ овако:

$$-y^3(y-1)(3y-5)$$

Други члан остатка нема ни једног од ових чинилаца. Пошто се даље први сачинилац другог задатог полинома може написати овако:

$$(y-1)(y-2)$$

то је онда јасно, да другог дељеника треба помножити са:

$$y^6(y-1)(3y+5)^2$$

Други и последњи остатак узет са противним знаком и стављен $=0$, даје једначину:

$$27y^{10}-136y^9+214y^8-112y^7+65y^6-100y^5+30y^4$$
$$-24y^3+120y^2-112y+32=0.$$

Сад треба видети, да ли ова једначина има и таквих корена, који задатим једначинама не одговарају. При првој деоби увучени су у рачун чиниоци $(y-1)$ и $(y-2)$, дакле треба најпре решити једначине:

$$y-1=0, \quad (y^2-3y+2)x^2+(y-1)x-3y+1=0$$

Но оне немају разрешења и за то $+1$ не јавља се као корен горње једначине 10-ог степена.

А сад ваља решити једначине:

$$y-2=0, \quad (y^2-3y+2)x^2+(y-1)x-3y+1=0$$

Једно разрешење истих јесте:

$$y = 2, \quad x = 5$$

и њега треба одбацити. Дакле горња једначина 10-ог степена има страног чиниоца $(y-2)$, са којим кад се она скрати, излази као истинска решавајућа једначина:

$$27y^9 - 82y^8 + 50y^7 - 12y^6 + 41y^5 - 18y^4$$

$$- 6y^3 - 36y^2 + 48y - 16 = 0$$

127. У овој №-и прећи ћемо неколико особених случајева, који се могу десити при тражењу решавајуће једначине.

1°. При узастопним деобама може се десити, да по неки делилац има какву функцију y-а као чиниоца. Тада зарад простијег посла треба тога делиоца скратити са тим његовим чиниоцем. Али се онда обично губе по неки корени решавајуће једначине. Но помоћу једначина 1) у № 125 врло је лако доказати, да се ти изгубљени корени могу добити решењем двеју једначина, које постају, кад се ставе једнаки нули: функција y-а, са којом је био помножен дотични делилац и одговарајући дељеник. Ако је тај дељеник био односно x r-нога степена, онда да бисмо у таквом случају добили потпуну решавајућу једначину, треба помножити последњи остатак са $\left\{\varphi(y)\right\}^r$, ако је са $\varphi(y)$ био скраћен дотични делилац.

2°. Вредности x-а, које одговарају вредностима y-а, добивеним помоћу решавајуће једначине, налазе се, видели смо из једначине, која постаје из претпоследњег остатка, т. ј. из:

$$1.) \qquad R_{n-1} = a + bx = 0$$

Али се при том може десити, да по нека вредност $y = \beta$, коју нам даје решавајућа једначина, поништава a и b тако, да се из једначине 1) не може наћи вредност x-а, која одговара вредности $y = \beta$. Али пошто, као што смо то већ видели, свако разрешење датих једначина поништава не само полиноме, него и сваки од узастопних остатака, то ћемо дакле тражити одговарајућу вредност x-а из једначине:

$$R_{n-2} = a' + b'x + c'x^2 = 0$$

где су a', b', c' у опште функције y-а. Тада ће дакле вредности $y = \beta$ одговарати две вредности x-а. Али ако би и остатак R_{n-2} за $y = \beta$ био идентично $= 0$, онда бисмо морали тражити одговарајуће вредности x-а из једначине:

$$R_{n-3} = 0$$

која је односно x трећег степена. У том случају одговарале би вредности $y = \beta$ три вредности x-а и т. д.

Међу тим треба напоменути, да ако се при узастопним деобама буду скраћивали делиоци са њиховим чиниоцима, акоових то јест буде било, да се велим онда у једначини, која постаје из последњег остатка, неће никад јавити такви корени, који би поништавали идентично предпоследњи остатак или још који пред њим.

3°. Ако је у задатим једначинама:

$$A = 0, \quad B = 0$$

$A = A'C$, где је C функција само y-а, онда се оне очевидно могу сменити овим једначинама:

$$\left.\begin{array}{l} A' = 0 \\ B = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} C = 0 \\ B = 0 \end{array}\right\}$$

Ако је сад $R^1_n = 0$ решавајућа једначина првом од ових спрегова, онда је $CR^1_n = 0$ решавајућа једначина задатим једначинама.

Ако ли су $A = A'C$, $B = B'C'$ где су C и C' функције само y-а, које немају заједничка делиоца, који би био функција y-а, онда се дане једначине могу сменити овима:

$$\left.\begin{array}{l} A' = 0 \\ B' = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} A' = 0 \\ C' = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} B' = 0 \\ C = 0 \end{array}\right\}$$

Али ако функције C и C' имају као заједничког делиоца функцију y-а D тако, да је:

$$C = C_1 D \quad \text{и} \quad C' = C'_1 D$$

онда су дане једначине облика:

$$A'C_1 D = 0\,, \quad B'C'_1 D = 0$$

и оне су, при ма каквој вредности x-а, задовољене сваким од бесконачно много корена једначине $D = 0$. Задате једначине тада су дакле неодређене. Али ако из задатих полинома истиснемо заједничког чиниоца D, онда су нове једначине:

$$A'C_1 = 0 \quad B'C'_1 = 0$$

одређене и ако је $R'_n = 0$ њихова решавајућа једначина, онда је:

$$R'_n\, C_1\, C'_1 = 0$$

решавајућа једначина задатих једначина.

На сличан начин ваља умовати, кад су:

$$C,\ C',\ C_1,\ C'_1 \text{ и } D$$

функције само x-а.

Ако најзад полиноми A и B задатих једначина имају као заједничког чиниоца једну функцију x-а и y-а, онда су задате једначине неодређене, што смо ми већ једном приликом напоменули. И тај заједнички чинилац открива се сам собом при примени методе највећег заједничког делиоца на задате полиноме.

4°. Ако се као последњи остатак при узастопним деобама јави особен какав број, онда се задате једначине косе, т. ј. тада нема никаквог спрега вредности за x и y, који би их задовољавао.

Примери.

1°. Да се реше једначине:

$$x^3 - 4yx^2 + 5y^2x - 2y^2 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + (6-y)\,x - 2y^2 = 0$$

Узимајући први полином за дељеника добијамо као први остатак:

$$-4(y-1)\,x^2 + (5y^2+y-6)\,x - 2y^2\,(y-1)$$

Кад га скратимо са његовим чиниоцем $(y-1)$, добићемо:

$$-x^2+(5y+6)x-2y^2$$

и то ће бити други делилац. Кад други и последњи остатак скратимо са -64 и ставимо га $=0$, добијамо једначину:

$$2y^6-27y^5+108y^4-108y^3=0.$$

Једначина, која постаје из претпоследњег остатка, јесте:

$$(17y^2-36y+36)x-(10y^3+12y^2)=0.$$

Решењем ових двеју једначина добијамо:

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \text{ 3 пут, } \quad \left.\begin{matrix} x=6 \\ y=6 \end{matrix}\right\} \text{ 2 пут, } \quad \left.\begin{matrix} x=3 \\ y=\frac{3}{2} \end{matrix}\right\}$$

При другој деоби скратили смо делиоца са $(y-1)$, дакле нађеним разрешењима придолазе још и разрешења ових једначина:

$$y-1=0, \; x^3-4x^2+(6-y)x-2y^2=0$$

а та су разрешења:

$$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\} \text{ 2 пут, } \quad \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$$

Праву решавајућу једначину добили бисмо, кад бисмо помножили са $(y-1)^3$ једначину, која је постала из последњег остатка.

2°. Да се реше једначине:

$$x^2+(y+2)x-6y^2-4y=0,$$

$$x^2+3x-y^2-5y-4=0.$$

Кад узмемо први полином као деђеника, добијамо као први остатак:

$$(y-1)x-5y^2+y+4.$$

Кад дељеника при другој деоби помножимо са $(y-1)^2$, добијамо после извршене деобе као други и последњи остатак:

$$24y^4+2y^3-52y^2+2y+24.$$

Кад га ставимо $=0$ и решимо једначину, добићемо:

$$y=-\frac{3}{4}, \; -\frac{4}{3}, \; 1, \; 1.$$

Одговарајуће вредности x-а тражићемо из једначине:

$$(y-1)x-5y^2+y+4=0.$$

За $y=-\frac{3}{4}$ јесте $x=\frac{1}{4}$; за $y=-\frac{4}{3}$ јесте $x=-\frac{8}{3}$; а за $y=1$ јесте $x=\frac{0}{0}$. Дакле ћемо вредности x-а, које одговарају вредности $y=1$, наћи из друге задате једначине, кад у њој ставимо $y=1$, дакле из:

$$x^2+3x-10=0.$$

Корени ове једначине јесу $x=2$, $x=-5$ и те одговарају вредности $y=1$.

3°. Да се реше једначине:

$$yx^3 - (y^3 - 3y - 1)\,x + y = 0,$$

$$x^2 - y^2 + 3 = 0.$$

Остатак је при првој деоби $(x+y)$ а при другој број $+\,3$, дакле се задате једначине косе. Да задате једначине не могу заједно опстати, може се лако и на други начин увидети. Јер из прве деобе следује, да се једначина 1) може представити овако:

$$(x^2 - y^2 + 3)\,yx + x + y = 0:$$

али она, кад погледамо на другу задату једначину, своди се на ову:

$$x + y = 0.$$

Кад ову помножимо са $(x-y)$, добијамо:

$$x^2 - y^2 = 0,$$

који се резултат очевидно коси са:

$$x^2 - y^2 + 3 = 0.$$

4°. Да се реше једначине:

$$x^2 - (3y+1)\,x + 2y^2 - y = 0,$$

$$x^2 - 2\,(2y-1) + 3y^2 - 2y = 0.$$

Као први остатак добијамо:

$$(y-1)\,x - y\,(y-1);$$

кад га скратимо са $(y-1)$, онда је други делилац $(x-y)$, којим је други дељеник дељив. Дакле је $(x-y)$ заједнички чинилац задатих полинома. И доиста ти се полиноми могу написати и овако:

$$(x-y)\,(x-2y+1)\,, \quad (x-y)\,(x-3y+2).$$

Задате једначине јесу неодређене.

5°. Да се реше једначине:

$$2(x^2-1)\,y^3 - (x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1)\,y^2 -$$

$$(x^5 - 2x^3 + x)\,y = 0,$$

$$(x-1)\,y^5 + x\,(x-1)\,y^4 - x^2\,(x-1)\,y^3 - x^3\,(x-1)\,y^2 = 0.$$

Оне се могу представити овако:

$$y(x-1)\,(x+y)\,(x+1)\,(x^2-2y-1) = 0$$

$$y(x-1)\,(x+y)\,y\,(x^2-y^2) = 0.$$

Стављајући једнаке нули сваког од заједничких чинилаца добићемо:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = \text{неодр.} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = \text{неодр.} \\ x = 1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y = \text{неодр.} \\ x = -\,y \end{array}\right\}$$

Стављајући једнаке нули остале чиниоце добијамо ова 4 спрега једначина:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x+1=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-2y-1=0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=0 \\ x+1=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x^2-y^2=0 \\ x^2-2y-1=0 \end{array}\right\}.$$

И кад их редом разрешимо, наћи ћемо ова разрешења:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x=-1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=\pm 1 \\ x=-1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=1\pm\sqrt{2} \\ x=1\pm\sqrt{2} \end{array}\right\}.$$

6°. Да се разреше једначине:

$$(yx-6)\,(x^2-1)=0,$$

$$(2x-3y)\,(x^2-y^2)=0.$$

Њих можемо написати и овако:

$$(yx-6)\,(x+1)\,(x-1)=0,$$

$$(2x-3y)\,(x+y)\,(x-y)=0.$$

Комбинујући чиниоце прве једначине са чиниоцима друге добићемо:

$$\left.\begin{array}{l} yx-6=0 \\ 2x-3y=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2x-3y=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ 2x-3y=0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} yx-6=0 \\ x+y=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+y=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x+y=0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} yx-6=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\}.$$

Разрешења ових па дакле и задатих једначина јесу:

$$\left.\begin{array}{l} y=\pm 2 \\ x=\pm 3 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=+\frac{2}{3} \\ x=+1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=-\frac{2}{3} \\ x=-1 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\pm\sqrt{-6} \\ x=\mp\sqrt{-6} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=-1 \\ x=+1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=+1 \\ x=-1 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\pm\sqrt{6} \\ x=\mp\sqrt{6} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=+1 \\ x=+1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=-1 \\ x=-1 \end{array}\right\}.$$

Примедба. Из овога примера увиђа се, како се могу склопити једначине, кад су нам њихова разрешења позната.

128. Друга метода, по којој се увек добија права решавајућа једначина, јесте ова, која сад долази.

Узмимо да су нам дате једначине:

$$1.)\ A=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0,$$

$$2.)\ B=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n=0,$$

где су a_0 и b_0 од x-а и y-а независни бројеви а сва остала a и b у опште узев функције y-а, што смо већ и у № 123 видели.

Сад кад решимо прву једначину односно x, добићемо за исту непознату m вредности:

$$x_1 = \varphi_1(y), \quad x_2 = \varphi_2(y), \quad x_3 = \varphi_3(y) \ \ldots$$

$$x_m = \varphi_m(y),$$

и свака од тих m вредности мора задовољити једначину 1), па дали ми x-у у осталом ма какву вредност. Ако ли те вредности заменимо у једначину 2), добићемо овај низ једначина:

$$3.) \quad \begin{cases} B_1 = b_0 x_1^n + b_1 x_1^{n-1} + b_2 x_1^{n-2} + \ldots + b_n = 0 \\ B_2 = b_0 x_2^n + b_1 x_2^{n-1} + b_2 x_2^{n-2} + \ldots + b_n = 0 \\ B_3 = b_0 x_3^n + b_1 x_3^{n-1} + b_2 x_3^{n-2} + \ldots + b_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_m = b_0 x_m^n + b_1 x_m^{n-1} + b_2 x_m^{n-2} + \ldots + b_n = 0 \end{cases}$$

Леве стране ових једначина јесу у опште узев ирационалне функције y-а и ми сад тврдимо, да свака вредност $y = \beta$, која поништава једну ма коју од тих функција, мора одговарати задатим једначинама. Јер узмимо да β поништава н. пр. прву функцију B_1. Ако још узмемо да је α вредност од x_1 за $y = \beta$, онда спрег вредности $x = \alpha$, $y = \beta$ мора задовољити једначину 1), јер смо већ видели, да је $x = x_1$ морати задовољити, па имало y у осталом ма какву вредност. Пошто сад $y = \beta$ задовољава усљед претпоставке једначину $B_1 = 0$, која није ништа друго но једначина 2), али у којој је x смењено са x_1, то онда дакле $y = \beta$ задовољава једначину 2) у свези са

вредношћу $x = \alpha$, коју вредност има $x = x_1$ за $y = \beta_1$ *Дакле доиста свака вредност y-а, која поништава једну од функција под* 3) *одговара задатим једначинама.*

Обратно свака вредност y-а, која одговара задатим једначинама, мора поништити једну од функција под 3).

Одатле закључујемо, да ће производ свију функција под 3) дати, кад га ставимо $= 0$, праву решавајућу једначину. Та је дакле једначина:

$$4.) \qquad B_1 B_2 B_3 \ \ldots \ B_m = 0.$$

На први мах чини се, као да би требало решити једначину 1), те да би се могла добити једначина 4), али то није нужно. Јер лева страна једначине 4) јесте симетрична функција количина x_1, x_2, x_3 . . . x_m, пошто узајамном сменом ових количине B_1, B_2, B_3, ... B_m једна у другу прелазе. Дакле лева страна једначине 4) може се (№ 27) исказати сачиниоцима једначине 1).

Узмимо као пример ове две једначине:

$$x^2 + (2y - 10)\, x + y^2 - 10y + 21 = 0$$

$$x^2 - (2y - 6)\, x + y^2 - 6y + 5 = 0$$

Ако означимо корене прве једначине са x_1, x_2, то је онда:

$$B_1 = x_1^2 - (2y - 6)\, x_1 + y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$B_2 = x_2^2 - (2y - 6)\, x_2 + y^2 - 6y + 5 = 0$$

Множењем ових једначина добијамо:

$$\left.\begin{array}{l} B_1B_2 = x_1^2x_2^2 - (2y-6)(x_1^2x_2+x_2^2x_1) + \\ + (y^2-6y+5)(x_1^2+x_2^2) + (2y-6)x_1x_2 \\ -(2y-6)(y^2-6y+5)(x_1+x_2) + (y^2-6y+5)^2 \end{array}\right\} = 0$$

Али је:

$$x_1 + x_2 = -(2y-10)$$

$$x_1x_2 = y^2 - 10y + 21,$$

и по томе:

$$x_1^2x_2^2 = y^4 - 20y^3 + 142y^2 - 420y + 441,$$

$$x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = x_1x_2(x_1+x_2) = -2y^3 + 30y^2 - 142y + 210,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2y^2 - 20y + 58.$$

Кад ове изразе заменимо у горњу једначину $B_1B_2=0$, добићемо као решавајућу једначину:

$$y^4 - 16y^3 + 92y^2 - 224y + 192 = 0$$

Корени су њени:

$$y = 2,\ 4,\ 4,\ 6.$$

Као одговарајуће вредности x-а (№ 123) налазимо:

$$x = 1,\ 3,\ -1,\ 1.$$

Ова метода, која даје увек истинску решавајућу једначину, јесте врло заметна, кад је степен задатих једначина виши од другог.

Још нам остаје да докажемо, да степен решавајуће једначине 4) не може бити виши од mn; а то ће бити учињено, кад докажемо, да степен ни једног члана решавајуће једначине не може бити више од mn. Пошто се решавајућа једначина добија множењем једначина 3), то ће онда буди који члан њен бити:

$$b_\alpha b_\beta b_\gamma b_\delta \ldots b_\lambda . x_1^{m-\alpha} . x_2^{m-\beta} . x_3^{m-\gamma} . x_4^{m-\delta} \ldots x_\lambda^{m-\lambda} = LM$$

Али су сачиниоци b_α, b_β, b_γ, . . . b_λ највише α-ог, β-ог, γ-ог, . . . λ-ог степена односно y и с тога је производ L истих цела функција y-а највише μ-ог степена, где је:

$$\mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \lambda.$$

Број μ не може бити већи од mn, јер ни један од бројева α, β, γ, δ, . . . λ није већи од m а број истих опет није већи од n. Други чинилац M јесте функција количина x_1, x_2, x_3 . . . . x_λ највише $(nm-\mu)$-ог степена, где је:

$$nm - \mu = m - \alpha + m - \beta + m - \gamma + \ldots + m - \lambda,$$

и он је — M — симетрична функција тих количина. Према томе моћи ће се M изразити збировима узастопних степена количина x_1, x_2, x_3, . . . x_λ почев од 1-ог па до $(nm-\mu)$-ог степена. Ако сад узмемо на ум, да су сачиниоци a_0, a_1, a_2, . . . a_m једначине 1) функције y-а највише 0-ог, 1-ог, 2-ог, . . . m-ог степена, то ће нам онда бити јасно, да ћемо, кад поменуте збирове степена изразимо сачиниоцима a_0, a_1, a_2 . . . a_m помоћу образаца у №-ма 30 и 31, да ћемо велим за те збирове степена добити као вредности извесне функције y-а, које

$(nm-\mu)$-ти степен не могу премашити. Пошто је дакле један чинилац L горепоменутог члана решавајуће једначине највише μ-ог степена а други чинилац M највише $(nm-\mu)$-ог степена, то онда степен тога члана може бити највише $(nm-\mu+\mu)$ или nm.

Ако су обе задате једначине потпуне, онда је степен решавајуће једначине тачно mn, као што се даје лако извести из мало час извршеног доказа.

129. Трећи начин добијања решавајуће једначине јесте овај, који ћемо сад показати.

Нека су:

$$1.)\quad a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

$$2.)\quad b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m = 0$$

задате једначине. Ми претпостављамо, као што се види, да су обе истог степена, јер у противном случају ми бисмо могли учинити, да оне буду истог степена. Зарад тога требало би само помножити са одговарајућим степеном x-а ону једначину, која је нижег степена.

Кад сад помножимо једначину 1) са b_0 а једначину 2) са a_0 и резултате одузмемо, добићемо нову једначину, која је $(m-1)$-ог степена односно x:

$$3.)\quad c_1x^{m-1} + c_2x^{m-2} + c_3x^{m-3} + \ldots + c_m = 0$$

где је: $c_1 = a_1b_0 - a_0b_1$, $c_2 = a_2b_0 - a_0b_2$ и т. д.

Али ако једначину 1) помножимо са b_m, једначину 2) са a_m и резултате опет одузмемо, добићемо избацив заједничког чиниоца x још једну једначину $(m-1)$-ог степена:

$$4.)\quad d_1x^{m-1} + d_2x^{m-2} + d_3x^{m-3} + \ldots + d_m = 0$$

На тај начин ми смо из задатих једначина извели друге две, којих је степен односно x за јединицу нижи т. ј. $(m-1)$. Сад на сасвим исти начин можемо из једначина 3) и 4) извести друге две, којих је степен односно x опет за јединицу нижи т. ј. $(m-2)$. И ако на тај начин продужимо и даље, мораћемо најзад добити две једначине, које су првог степена односно x. Кад из истих избацимо x, добићемо једначину са непознатом само y. Та једначина даје вредности за y, а њима одговарајуће вредности за x даје једна од поменутих једначина, које су 1-ог степена односно x.

Но не треба изгубити из вида то, да у највише случајева поменута једначина са непознатом само y неће бити права решавајућа једначина, јер услед тога, што су у току рада увучене извесне функције y-а као чиниоци, може она дати за y и такве вредности, које не одговарају задатим једначинама.

Пример. Да се реше једначине:

$$x^2 - (2y+5)x + (y^2 + 5y + 6) = 0$$

$$x^2 - 4yx + (4y^2 - 1) = 0$$

Одузимањем ових једначина добијамо:

$$(2y-5)x - 3y^2 + 5y + 7 = 0$$

а одавде:

$$x = \frac{3y^2 - 5y - 7}{2y - 5}$$

Кад помножимо прву једначину са $(4y^2-1)$, другу са (y^2+5y+6), резултате одузмемо и затим скратимо са x, добићемо:

$$(3y^2-5y-7)\,x-4y^3+26y+5=0$$

и одавде:

$$x=\frac{4y^3-26y-5}{3y^2-5y-7}$$

Кад овај израз x-а ставимо једнак оном горе, добићемо:

$$\frac{3y^2-5y-7}{2y-5}=\frac{4y^3-26y-5}{3y^2-5y-7}$$

или кад као што треба сведемо:

$$y^4-10y^3+35y^2-50y+24=0$$

Корени ове једначине јесу:

$$y=1,\ 2,\ 3,\ 4\,;$$

вредности x-а, које им одговарају, јесу:

$$x=3,\ 5,\ 5,\ 7.$$

130. Последњи начин добијања решавајуће једначине бива помоћу детерминаната. Узмимо, да су нам задате једначине:

$$1.)\quad A=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_m=0$$

$$2.)\quad B=b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_0x^{n-2}+\ldots+b_n+0$$

где су a_0 и b_0 стални бројеви а сва остала a и b познате нам функције y-а (№ 123). Решавајућу једначину добићемо, ако помоћу једне од познатих нам већ метода Sylvester-ове, Cauchy-јеве и т. д. избацимо из њих непознату x. Кад смо из добивене решавајуће једначине (резултанте) израчунали вредности за y, онда је лако наћи и вредности x-а, које им одговарају. Ако је н. пр. $y=\beta$ једна од нађених вредности y-а, онда за $y=\beta$ морају полиноми 1) и 2) имати један или више заједничких корена, или другаче. они морају имати као заједничког чиниоца једну функцију x-а првог или вишег степена, како кад поменутој вредности $y=\beta$ одговарају једна или више вредности x-а. Како се пак налазе заједнички корени двеју једначина, ми смо у пређашњим №-ма доста и опширно и јасно показали (види у осталом и №-е 173 и 189 алгеб. анализе).

Пример. Да се реше једначине:

$$x^3-4yx^2+5y^2x-2y^3=0$$

$$x^3-4x^2+(6-y)\,x-2y^2=0.$$

Кад се резултанта ових једначина нађена по Bezout-овој или Cauchy-јевој методи стави једнака нули, добијамо:

$$\begin{vmatrix} 4(y-1) & -(5y^2+y-6), & 2y^2(y-1) \\ -(5y^2+y-6), & 2y\,(y-1)\,(y+12) & 0 \\ 2y^2(y-1), & 0 & -12y^3(y-1) \end{vmatrix}=0$$

Ова се детерминанта може написати и овако:

$$\begin{vmatrix} 4(y-1), & -(5y+6)(y-1), & 2y^2(y-1) \\ -(5y+6)(y-1), & 2y(y-1)(y-12), & 0 \\ 2y^2(y-1) & 0 & -12y^3(y-1) \end{vmatrix} = 0$$

Кад се заједнички чиниоци стубова као и последње врсте извуку напоље (№ 171 алгеб анал.), онда излази:

$$4y^3(y-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -(5y+6) & 1 \\ -(5y+6) & 2y(y+12) & 0 \\ y & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

или кад последњој врсти додамо са три помножену прву врсту:

$$4y^3(y-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -(5y+6), & 1 \\ -(5y+6), & 2y(y+12), & 0 \\ (y+12), & -3(5y-6), & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Одавде пак (№ 171 алгеб. анал. трећа теорема) добијамо:

$$4y^3(y-1)^3 \begin{vmatrix} -(5y+6), & 2y(y+12) \\ (y+12), & -3(5y+6) \end{vmatrix} = 0$$

или, кад детерминанту развијемо, најзад:

$$4y^3(y-1)^3 \left\{2y^3 - 37y^2 + 108y - 108\right\} = 0$$

И ово је решавајућа једначина. Корени су њени:

$$y = 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 6,\ 6,\ \frac{3}{2}.$$

Помоћу метода изложених у №-ма 175 и 176 алгеб. анализе као и № 52 или № 123 и доцнијих ове науке налазимо лако, да су одговарајуће вредности за x:

$$x = 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 6,\ 6,\ 3.$$

Што се најзад тиче разрешења више од две једначине са онолико исто непознатих колико је једначина, има се ово приметити: Треба их најпре уредити по степенима једне непознате н. пр. x-а, па онда из две и две, не испуштајући при том ни једну из рачуна, избацити непознату x. На тај начин добићемо нове једначине, којих је број за јединицу мањи од броја задатих једначина, и у којима се непозната x више не налази. Из тих једначина треба за тим извести на исти начин нов низ једначина, којих је број опет за јединицу мањи и у којима још једне непознате нема, и тако ваља наставити, док најзад нисмо нашли две једначине са две само непознате, из којих се ове по показаним методама могу израчунати. Њима одговарајуће вредности осталих непознатих могу се онда лако израчунати редом из једначина, на које смо у рачуну раније нашли. Само треба при том добро пазити на то, да се разрешења, која задатим једначинама не одговарају, открију и затим одбаце.

131. Пре него што завршимо овај одељак, да покажемо још једну примену метода елиминације.

Узмимо да је дата једначина m-ог степена:

1.) $\quad f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$

и да се тражи једначина, чији је сваки корен позната и одређена функција двају одговарајућих корена једначине 1).

Узмимо даље, да је у обрасцу:

2.) $$y = \varphi(x_1, x_2),$$

где y представља непознати корен тражене једначине, а x_1 и x_2 ма која два корена једначине 1), исказан закон, како ма који корен тражене једначине зависи од два ма која корена дате једначине.

Пошто су сад x_1 и x_2 корени једначине 1), то онда морају вредити ове једначине:

3.) $$f(x_1) = x_1^m + a_1 x_1^{m-1} + \dots + a_{m-1} x_1 + a_m = 0$$

4.) $$f(x) = x_2^m + a_1 x_2^{m-1} + \dots + a_{m-1} x_2 + a_m = 0.$$

И ми сад тврдимо, да се тражена једначина добија елиминацијом корена x_1 и x_2 из једначина 2), 3) и 4). И доиста једначина са непознатом y, која се јавља као резултат елиминације, остаје иста, па стајало у 2), 3) и 4) место x_1 и x_2 ма која друга два корена задате једначине.

Пређимо сад на овај особени случај истога задатка: Да се нађе једначина, чији су корени разлике све од два и два корена једначине 1). Тражена једначина зове се *једначина простих разлика.*

Узмимо, да су:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\ x_m$$

корени задате једначине 1). Ако означимо са y непознату тражене једначине, онда y представља једну ма коју од ових разлика:

$$x_1 - x_1,\ x_1 - x_2\ \dots\ x_1 - x_m,\ x_2 - x_1,\ x_2 - x_2,\ \dots$$

Пошто су сад x_1 и x_2 корени једначине 1) то стоје ове две једначине:

5.) $$x_1^m + a_1 x_1^{m-1} + \dots + a_{m-1} x_1 + a_m = 0$$

6.) $$x_2^m + a_1 x_2^{m-1} + \dots + a_{m-1} x_2 + a_m = 0$$

Али из једначине:

$$y = x_2 - x_1 \quad \text{следује} \quad x_2 = x_1 + y.$$

Кад x_2 заменимо овом његовом вредношћу у 6), добићемо:

7.) $$y^m + f^{m-1}(x_1)\, y^{m-1} + f^{m-2}(x_1)\, y^{m-2} + \dots$$
$$+ f''(x_1)\, y^2 + f'(x_1)\, y + f(x_1) = 0,$$

где су сачиниоци узастопних степена од y вредности, које добијају полином задате једначине 1) и његови узастопни изводи за $x = x_1$. Али пошто је x_1 корен једначине 1), то је онда у једначини 7) $f(x_1) = 0$ и за то је сада:

8.) $$y^m + f^{m-1}(x_1)\, y^{m-1} + \dots + f'(x_1)\, y = 0$$

или пошто скратимо са y:

9.) $$y^{m-1} + f^{m-1}(x_1)\, y^{m-2} + \dots + f'(x_1) = 0$$

Једначина простих разлика добија се дакле, кад се из једначина 3) и 9) избаци x_1. Пошто се резултат елиминације не мења, кад у истим једначинама сменимо x_1 са ма којим другим кореном једначине 1) или и са њиховим заједничким представником x, то можемо казати, да се једначина простих разлика добија, кад се из једначина:

$$10.)\quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ y^{m-1} + f^{m-1}(x) y^{m-2} + \ldots + f'(x) = 0 \end{array} \right.$$

избаци x.

Једначину 9) добили смо, кад смо једначину 8) скратили са y. Тиме је истиснут корен $y = 0$ једначине простих разлика, дакле онај, који постаје, кад се ма који корен задате једначине одузме сам од себе. На тај начин корени једначине, која се добија из једначина 10), постају, кад се сваки корен задате једначине одузме од свију осталих.

Најзад треба приметити, да ако задата једначина има једнаких корена, да ће онда и једначина простих разлика имати корена једнаких нули, дакле тада у њој неће бити једног или више чланова с десног краја.

132. Облик и склоп једначине простих разлика може се напред сазнати. Јер ако су опет $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ корени задате једначине, то онда свакој разлици тих корена одговара друга разлика, која се од ње само знаком разликује. Тако н. пр разлици $x_2 - x_1$ одговара разлика противнога знака $x_1 - x_2$, разлици $x_3 - x_2$ одговара разлика противнога знака $x_2 - x_3$ и т. д. Дакле видимо, да кад је $+\alpha$ корен једначине простих разлика, да јој онда мора бити корен и $-\alpha$. Дакле једначина простих разлика може се представити овако:

$$(y-\alpha)(y+\alpha)(y-\beta)(y+\beta)(y-\gamma)(y+\gamma)\ldots = 0$$

или овако:

$$(y^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)(y^2-\gamma^2)\ldots = 0$$

Као што се види, степен једначине простих разлика јесте паран, и у њој се могу налазити само парни степени непознате y. Њен је степен једнак броју разлика, које се могу начинити из m корена задате једначине, дакле $m(m-1) = 2n$. Према томе једначина простих разлика, уређена по степенима y-а, изгледаће овако:

$$1.)\quad y^{2n} + b_1 y^{2n-2} + b_2 y^{2n-4} + \ldots + b_{n-1} y^2 + b_n = 0.$$

Кад у овој једначини ставимо $y^2 = z$, она се претвара у:

$$2.)\quad z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_{n-1} z + b_n = 0,$$

чији је степен половина степена једначине разлика, и чији су корени квадрати разлика из корена задате једначине:

$$3.)\quad x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0.$$

Једначина 2) јесте дакле једначина квадрираних разлика, коју смо ми пређе и то на два разна начина извели.

Најзад треба приметити још и ово, што иде. Пошто се разлике корена $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ не мењају, кад те корене повећамо или пак смањимо за исти број a, онда можемо ради простијег рада избацити најпре из задате једначине други члан $a_1 x^{m-1}$, па ново добивеној једначини тражити једначину простих и једначину квадрираних разлика; те ће једначине одговарати и задатој једначини.

Узмимо, да је дата једначина:

$$1')\qquad f(x) = x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Овде је:

$$f'(x) = 3x - 7; \quad f''(x) = 3x; \quad f'''(x) = 1.$$

Дакле је сада једначина 7) №-е 131:

$$y^2 + 3xy + 3x^2 - 7 = 0$$

или:

$$2.) \qquad 3x^2 + 3xy + y^2 - 7 = 0.$$

Кад се по једној ма којој од познатих нам метода из 1') и 2') избаци x, излази као једначина простих разлика:

$$y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 400 = 0,$$

а као једначина квадрираних разлика:

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 400 = 0.$$

Корени су ове једначине: 1, 16, 25.

C. Cauchy-јева теорема о раздвајању уображених корена и њена примена.

133. Узмимо, да нам је дата једначина m-ог степена:

$$1.) \quad f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1} z + a_m = 0,$$

где сачиниоци a могу бити стварни или уображени, и где је a_0 у сваком случају од нуле различно. Да ли једначина 1) има једнаких корена или не, треба као што то већ знамо, да тражимо највећег заједничког делиоца тој функцији $f(z)$ и њеном првом изводу $f'(z)$; ако те две

функције немају заједничког делиоца, који би био функција z-а, онда су сви корени међу собом различни. Али ако оне имају као заједничког чиниоца функцију r-ог степена $\varphi(z)$, онда једначина 1) има само $(m-r)$ међу собом различних корена, а остали корени, којих је r на броју, јесу само извесна понављања оних првих. У том је случају:

$$f(z) = \varphi(z)\,\psi(z)$$

и једначина:

$$\psi(z) = 0$$

има као корене све корене дане једначине 1), али сваки само по један пут. Ми дакле можемо претпоставити, да су сви корени једначине 1) међу собом различити. — Да бисмо сад раздвојили уображене корене једначине 1), ми ћемо се користити теоремом 2) у № 164 алгеб. анализе, коју теорему можемо сада и овако исказати:

1°. *Кад променљива z опише један пут од почетка до краја и у положном смислу једну једноставну затворену линију, која је у коначној даљини од почетка, и на којој не лежи ни једна корена тачка функције $f(z)$, онда последња вредност функције $\frac{1}{2\pi i} lf(z)$ већа је од своје прве вредности за онолико јединица, колико је корена једначине $f(z) = 0$ у унутрашњости поменуте линије.*

Означимо са w вредност функције $f(z)$ за $z = x + yi$, па ћемо имати:

$$w = u + vi = \rho e^{\theta i}$$

где су u и v стварне количине, а тако исто модуо ρ као и аргуменат θ. Представник уображене количине w јесте тачка равни, којој су u и v правоугаоне, а ρ и θ полне координате.

Пошто су сад u и v алгебарске целе и рационалне функције променљивих x и y, то се оне морају непрекидно мењати при непрекидном мењању тих променљивих. (№ 33 и 77 алг. анал.) и морају бити коначне, докле су год y и x коначни. Осем тога u и v јесу једнозначне функције x-а и y-а, и кад z описав једноставну затворену линију добије поново своју прву вредност, онда ће то исто бити случај и са количинама u и v.

Претпостављајући сад, да променљива z описује једноставну затворену линију онако, како је то у теореми 1° наглашено, ми ћемо прву вредност од w означити са w_0 а последњу са w_ω. Узмимо да је:

$$w_0 = u_0 + v_0 i = \rho_0 e^{\theta_0 i}$$

$$w_\omega = u_\omega + v_\omega i = \rho_\omega e^{\theta_\omega i}$$

тада је: $w_\omega = w_0$, $u_\omega = u_0$, $\rho_\omega = \rho_0$

дакле:

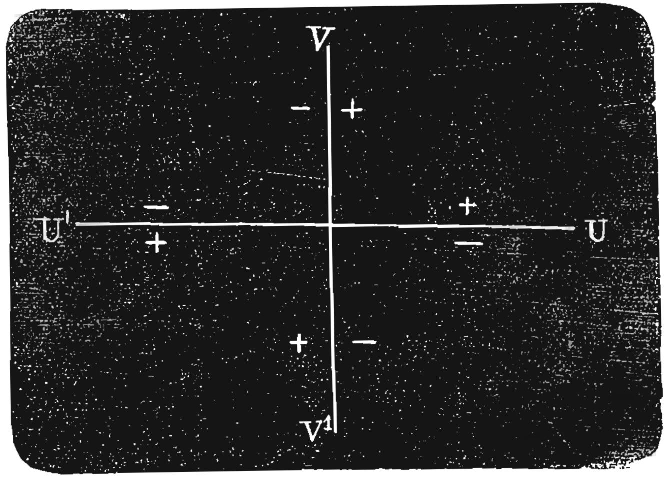
$$3.) \qquad \log w_\omega - \log w_0 = (\theta_\omega - \theta_0)\, i$$

Ако сад у унутрашњости линије, коју z описује, има k простих корена једначине 1), онда је на основу теореме 1):

$$4.) \qquad \theta_\omega - \theta_0 = 2k\pi$$

и обратно кад једначина 4) стоји, онда се у унутрашњости поменуте линије, коју z описује, налазе k простих корена једначине 1). Али у исто доба ми дознајемо из једначине 4), да кад z у својој бројној равни описује један пут поменуту линију, да онда велим и w у својој бројној равни прелази у наоколо око почетка 0 и непрекидно једну опет једноставну и затворену линију *и то k-пута узастопце.*

Да бисмо сад кретање тачке w изближе испитали, ми ћемо кроз почетак 0 бројне равни, која одговара променљивој w, повући две координатне осе $U'U$ и $V'V$, на које се преносе вредности од u и v. Десна пола U-осе и горња пола V-осе нека су положне поле њине, а друге поле њине нека су одречне поле њине. Ми ћемо код сваке поле тих оса разликовати положну и одречну страну онако, као што је на слици то показано:



Сл. 9.

Пошто је:

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{u}{v}$$

то онда, кад променљива w описује у својој бројној равни поменуту криву линију, количник $\frac{u}{v}$ биће положан, кад се описани лук завршује у првој или трећој четврти, а одречан, кад се завршује у другој или последњој четврти.

Сад кад промењлива w обиђе при кретању у својој бројној равни један пут око почетка 0, онда ће број њених прелаза са положне на одречну страну V-осе бити за две јединице већи од броја њених прелаза са одречне на положну страну исте осе. Исто је тако број њених прелаза са одречне на положну страну U-осе за две јединице већи од броја њених прелаза са положне на одречну страну исте осе.

Одавде опет следује јасно, да број прелаза количине $\frac{u}{v}$ из положног стања у одречно а кроз нулу јесте за две јединице већи од броја њених прелаза из одречног стања у положно опет кроз нулу; и да број прелаза исте количине из одречног стања у положно, а кроз ∞ јесте за две јединице већи од броја њених прелаза из положног стања у одречно опет кроз ∞.

Кад узмемо на ум ово што рекосмо, као и то, да услед једначине 4) промењлива w прелази своју линију од почетка па до краја k пута узастопце, док међу тим промењлива z пређе своју линију само један пут од почетка па до краја, то смемо исказати ову теорему:

2°. *Кад промењлива z опише у својој бројној равни једанпут и у положном смислу једну једноставну затворену линију, која се налази у коначној даљини од почетка, и кад при том количник $\frac{u}{v}$ пређе чешће из положног стања у одречно, а кроз нулу, него ли обрнуто из одречног стања у положно, а опет кроз нулу, онда је разлика између броја прелаза прве и броја прелаза друге врсте паран број и два пут већи од броја простих корена једначине:*

$$u + vi = 0$$

који се налазе у унутрашњости z-ом описане линије.

И ово је Cauchy-јева теорема. Она вреди и онда, кад се у унутрашњости линије, коју z описује, више корених тачака поклапају. Али тада треба r корених тачака, које се поклапају, сматрати не као једну, већ као r простих корених тачака. Једноставну и затворену линију треба при том изабрати тако, да на њој нема ни једне корене тачке функције $f(z)$.

Што смо у почетку претпоставили, да задата једначина $f(z) = 0$ нема једнаких корена, било је због тога, да бисмо олакшали раздвајање корена. Корени ће бити раздвојени, кад је у бројној равни z-а обележена за сваки корен једна линија, у чијој се унутрашњости он и само он један налази. Најбоље је узети за такве линије правоугаонике, којих су стране паралелне са осом x-а и осом y-а. У странама, које су паралелне са осом x-а има y сталну вредност, а у странама, које су паралелне са осом y-а, има x сталну вредност. На тај начин тражење уображених корена своди се на тражење стварних корена једначинама са једном само непознатом.

Место теореме 1°, кад узмемо на ум оно, што смо пре ње говорили, можемо узети ову теорему:

2°. *Кад промењлива z опише у својој бројној равни један пут и у положном смислу једну једноставну затворену линију, која је у коначној даљини од почетка, и кад при том количник $\frac{v}{u}$ пређе чешће из одречног стања у положно а кроз нулу, него ли обрнуто из положног стања у одречно опет кроз нулу, онда је разлика између броја прелаза прве и броја прелаза друге врсте паран број и два пут већи од броја простих корена једначине:*

$$u + vi = 0$$

што су у унутрашњости z-ом описане линије.

133. Правоугаоник у z-овој бројној равни, у чијој се унутрашњости налази само један уображен корен једначине $f(x) = 0$, можемо смањити дотле, да је само у двема тачкама његове периферије $u = 0$, и само у двема другим тачкама $v = 0$. Ако вежемо тачке у којима је $u = 0$, а тако исто и тачке у којима је $v = 0$, и ако кроз пресек тако добивених правих повучемо паралелне са координатним осама, онда ће онај првашњи правоугаоник бити разложен на четири мања правоугаоника. Помоћу онога, што смо сазнали у № 132, можемо онда лако пронаћи онај од та четири правоугаоника, у коме се тражени корен налази. Понављајући овај рад више пута, моћи ћемо наћи непознати уображени корен са сваком могућом приближношћу.

У осталом могу се уображени корени једначине израчунавати и то лакше путем елиминације. Ставимо у задатој једначини:

$$1.) \qquad f(z) = 0$$

$z = x + yi$. Тада ће се задата једначина претворити у једначину облика:

$$2.) \qquad u + vi = 0,$$

где су u и v целе и рационалне функције x-а и y-а. Једначина 2) распада се у једначине:

$$3.) \qquad u = 0, \quad v = 0.$$

Ако је сад $x = \alpha$, $y = \beta$ једно разрешење ових једначина, онда је очевидно:

$$z = \alpha + \beta i$$

један уображени корен једначине 1). Што се пак тиче разрешавања једначина под 3) са двема непознатима x и y, ми смо за тај посао показали више метода.

Читалац нека сам реши једначину:

$$z^4 - z + 1 = 0$$

која има само један положан и два уображена корена.

ДРУГИ ДЕО.

РАЗЛИЧНИ, ЗБИРНИ И АРИТМЕТИЧНИ РЕДОВИ И ИНТЕРПОЛАЦИЈА.

I. Различни редови.

134. Кад у једном задатом реду:

1.) $$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots$$

који може бити ма какав, одузмемо сваки члан од онога, који је одмах за њим, добићемо нов ред количина.

$$u_2-u_1,\ u_3-u_2,\ u_4-u_3;\ \ldots\ u_{n+1}-u_n,\ \ldots$$

Чланови овог новог реда зову се прве разлике чланова задатог реда. И то посебице u_2-u_1 зове се прва разлика од u_1; u_3-u_2 зове се прва разлика од u_2 и у опште сваки члан новог реда зове се прва разлика оног члана задатог реда 1), који је у дотичном члану новога реда одузет. Прве разлике чланова задатог реда означавамо стављајући слово $\triangle$ пред одузетим чланом, дакле овако:

2.) $$\triangle u_1 = u_2-u_1,\ \triangle u_2 = u_3-u_2\ \ldots$$

$$\triangle u_n = u_{n+1}-u_n$$

Према овоме ред првих разлика или краће *први различни ред* биће представљен на овај начин:

3.) $$\triangle u_1,\ \triangle u_2,\ \triangle u_3,\ \ldots\ \triangle u_n,\ \triangle u_{n+1}\ \ldots$$

Са овим редом првих разлика можемо радити онако исто као и са задатим редом. Ми можемо т. ј. и у реду 3) одузети сваки члан од онога, који је за њим, и тако ћемо добити нови ред:

$$\triangle u_2-\triangle u_1,\ \triangle u_3-\triangle u_2,\ \ldots\ \triangle u_{n+1}-\triangle u_n\ \ldots$$

Чланови овог реда, који су прве разлике чланова реда 3), зову се *друге разлике* чланова реда 1), и они би се према усвојеном начину означавања имали означити стављањем слова $\triangle$ пред одузети члан, дакле овако:

$$\triangle\triangle u_1 = \triangle u_2-\triangle u_1,\ \triangle\triangle u_2 = \triangle u_3-\triangle u_2\ \ldots$$

Али зарад краткоће слово $\triangle$ пише се само један пут, а уз њега се десно и озго пише казаљка 2. На тај начин ред других разлика, или краће: *други различни ред* биће представљен овако:

4.) $$\triangle^2 u_1,\ \triangle^2 u_2,\ \triangle^2 u_3\ \ldots\ \triangle^2 u_{n+1}\ \ldots$$

Кад са овим другим редом разлика радимо онако исто, као што смо радили са задатим редом 1) и са редом 3), добићемо ред трећих разлика:

5.) $$\triangle^3 u_1,\ \triangle^3 u_2,\ \triangle^3 u_3\ \ldots\ \triangle^3 u_n,\ \triangle^3 u_{n+1}\ \ldots$$

где је:

$$\triangle^3 u_1 = \triangle^2 u_2-\triangle^2 u_1,\ \ldots\ \triangle^3 u_n = \triangle^2 u_{n+1}-\triangle^2 u_n,\ \ldots$$

На тај начин можемо наставити и даље, и тако ћемо добити узастопце редове четвртих, петих . . . m-них разлика. Чланови реда m-них разлика означавају се са:

$$\Delta^m u_1, \ \Delta^m u_2 \ . \ . \ . \ \Delta^m u_n, \ \Delta^m u_{n+1} \ . \ . \ .$$

где је у опште:

$$6.) \qquad \Delta^m u_n = \Delta^{m-1} u_{n+1} - \Delta^{m-1} u_n$$

Из последњег обрасца под 2) следује:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$$

што ће рећи: $(n+1)$-ви т. ј. *ма који члан задатог реда једнак је предњем, — n-ом — члану истог реда, више n-ти члан реда првих разлика.* Исто тако из обрасца 6) следује:

$$\Delta^{m-1} u_{n+1} = \Delta^{m-1} u_n + \Delta^m u_n$$

а то ће рећи: $(n+1)$-ви, *т. ј. ма који члан у реду m-тих т. ј. ма којих разлика једнак је предњем n-ом члану истога реда више n-ти члан у реду m-них разлика, који одмах следује.*

Ако задати ред има коначан број чланова н. пр. $(m+1)$, онда ће у реду m-тих разлика бити само један члан. Јер очевидно у реду првих разлика биће један члан мање него у задатом реду, у реду других разлика биће два члана мање, у реду трећих разлика три члана мање, и т. д. у реду m-них разлика биће m чланова мање, дакле ће тај ред имати само један члан.

Између чланова задатог реда и чланова узастопних различних редова постоје извесни односи, који су са свим независни од тога, какви су чланови задатог реда.

И ми ћемо се у №-ама, што долазе, бавити тражењем тих односа.

135. На основу предње №-е имамо редом:

$$1.) \qquad \Delta u_n = u_{n+1} - u_n$$

$$\Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n = u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n)$$

или:

$$2.) \qquad \Delta^2 u_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$$

$$\Delta^3 u_n = \Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_n = \Delta u_{n+2} - 2\Delta u_{n+1} + \Delta u_n$$

$$= u_{n+3} - u_{n+2} - 2(u_{n+2} - u_{n+1}) + u_{n+1} - u_n$$

или:

$$3.) \qquad \Delta^3 u_n = u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n$$

И овде ћемо сад стати. Кад погледамо на једначине 1), 2) и 3), видимо да у њима владају ови закони:

a) Казаљка од u у првом члану десно од знака једнакости већа је од казаљке истог слова лево од знака једнакости за онолико јединица, колико износи горња казаљка од Δ.

b) Казаљка од u десно опада поступно са јединицом, док најзад не постане $= n$.

c) Као сачиниоци узастопних чланова десно јављају се биномни сачиниоци и то у једначини 1) они, који се јављају у реду за $(x-a)^1$; у једначини 2) они, који се јављају у реду за $(x-a)^2$; у једначини 3) они, који се јављају у реду за $(x-a)^3$.

И сад треба доказати, да ови закони вреде у опште, т. ј. за ма који члан у реду ма којих разлика. Ми ћемо се послужити начином доказивања познатим под именом више индукције.

Претпоставимо, да поменути закони владају у изразу за $\Delta^m u_n$ то ће рећи за n-ти члан у реду m-них разлика. Тада је дакле:

$$4.)\qquad \Delta^m u_n = u_{n+m} - \binom{m}{1} u_{n+m-1} + \binom{m}{2} u_{n+m-2} - \ldots$$

$$+ (-1)^{m-2}\binom{m}{m-2} u_{n+2} + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1} u_{n+1} +$$

$$+ (-1)^m \binom{m}{m} u_n.$$

Пошто овај образац на основу претпоставке вреди за ма који члан ма којег различног реда, то смемо сменити у њему n са $n+1$ и кад то учинимо, добићемо:

$$5.)\qquad \Delta^m u_{n+1} = u_{n+m+1} - \binom{m}{1} u_{n+m} + \binom{m}{2} u_{n+m-1} - \ldots$$

$$+ (-1)^{m-2}\binom{m}{m-2} u_{n+3} + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1} u_{n+2}$$

$$+ (-1)^m \binom{m}{m} u_{n+1}$$

Али је по обрасцу 6) у № 134:

$$\Delta^{m+1} u_n = \Delta^m u_{n+1} - \Delta^m u_n.$$

Дакле, кад одузмемо једначину 4) од једначине 5) добићемо:

$$\Delta^{m+1} u_n = u_{n+m+1} - (m+1) u_{n+m} + \left\{\binom{m}{2} + \binom{m}{1}\right\} u_{n+m-1} + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-2}\left\{\binom{m}{m-2} + \binom{m}{m-3}\right\} u_{n+3}$$

$$+ (-1)^{m-1}\left\{\binom{m}{m-1} + \binom{m}{m-2}\right\} u_{n+2}$$

$$+ (-1)^m \left\{\binom{m}{m} + \binom{m}{m-1}\right\} u_{n+1} + (-1)^{m+1}\binom{m+1}{m+1} u_n$$

где смо у последњем члану место $\binom{m}{m}$ метнули $\binom{m+1}{m+1}$, што је све једно, јер су оба израза $= 1$.

Али из науке о комбинацијама и то обрасца 7) у № 27 знамо да је у опште:

$$\binom{m}{r} + \binom{m}{r-1} = \binom{m+1}{r}$$

Помоћу овог обрасца своди се последња једначина на ову:

$$\Delta^{m+1} u_n = u_{n+m+1} - \binom{m+1}{1} u_{n+m} + \binom{m+1}{2} u_{n+m-1} + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-2}\binom{m+1}{m-2} u_{n+3} + (-1)^{m-1}\binom{m+1}{m-1} u_{n+2}$$

$$+ (-1)^m \binom{m+1}{m} u_{n+1} + (-1)^{m+1}\binom{m+1}{m+1} u_n.$$

У овој једначини, која је нужна последица једначине 4), владају као што видимо исти закони, који владају у једначини 4). Дакле смо доказали, да ако горе поменути закони вреде за ма какву целу и положну вредност m-а, они морају вредити и за вредност m-а, која је за јединицу већа. Но непосредним рачуном ми смо доказали, да он вреди за $m = 1$, 2 и 3; дакле он вреди у опште.

Из обрасца 4), чија је општост сада доказана, види се, *да је n-ти, т. ј. буди који члан у реду m-них разлика одређен n-им чланом задатог реда и са још m следећих чланова истога реда.*

Тако н. пр. ако је дат ред бројева:

$$1,\ 5,\ 10,\ 17,\ 21,\ 29,\ 37$$

онда је:

$$\Delta^5 u_1 = \Delta^5 1 = 29 - 5.\ 21 + 10.\ 17 - 10.\ 10 + 5.\ 5 - 1.$$

136. Опет на основу №-е 134 добијамо:

1.) $$u_2 = u_1 + \Delta u_1$$

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2 = u_1 + \Delta u_1 + \Delta u_1 + \Delta^2 u_1$$

или:

2.) $$u_3 = u_1 + 2\Delta u_1 + \Delta^2 u_1$$

$$u_4 = u_3 + \Delta u_3 = u_1 + 2\Delta u_1 + \Delta^2 u_1 + \Delta u_2 + \Delta^2 u_2$$

$$= u_1 + 2\Delta u_1 + \Delta^2 u_1 + \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_1 + \Delta^3 u_1$$

или:

3.) $$u_4 = u_1 + 3\Delta u_1 + 3\Delta^2 u_1 + \Delta^3 u_1$$

Да не идемо даље, видимо, да у једначинама 1), 2) и 3) влада овај закон:

Члан n-ти задатог реда добија се, кад се први члан тога реда и први чланови узастопних различних редова до $(n-1)$-га закључно помноже редом са биномним сачиниоцима, који се јављају у $(n-1)$-ом степену бинома $(x-a)$.

Сад треба још доказати, да тај закон вреди не само за $n = 2$, 3 и 4, што смо непосредним рачуном доказали, него да он вреди у опште.

Претпоставимо дакле да тај закон вреди за u_n и докажимо, да он онда мора вредити и за u_{n+1}. Услед претпоставке стоји:

4.) $$u_n = u_1 + \binom{n-1}{1}\Delta u_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 u_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 u_1 + \ldots$$

$$+ \binom{n-1}{r-1}\Delta^{r-1} u_1 + \binom{n-1}{r}\Delta^r u_1 + \ldots + \Delta^{n-1} u_1$$

Пошто смо претпоставили, да овај образац вреди за u_1 и његове узастопне разлике Δu_1 $\Delta^2 u_1$, $\Delta^3 u_1 \ldots \Delta^{n-1} u_1$, то он мора вредити и за количину Δu_1 и њене узастопне разлике $\Delta^2 u_1$, $\Delta^3 u_1$, $\Delta^4 u_1 \ldots \Delta^n u_1$. Дакле је на тај начин:

5.) $$\Delta u_n = \Delta u_1 + \binom{n-1}{1}\Delta^2 u_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^3 u_1 + \ldots$$

$$+ \binom{n-1}{r-1}\Delta^r u_1 + \ldots + \Delta^n u_1$$

Али је:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$$

Кад дакле саберемо једначине 4) и 5), добићемо:

$$u_{n+1} = u_1 + \left\{\binom{n-1}{1}+1\right\}\Delta u_1 + \left\{\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{1}\right\}\Delta^2 u_1 +$$

$$+\left\{\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{2}\right\}\Delta^3 u_1 + \dots$$

$$+\left\{\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}\right\}\Delta^r u_1 + \dots + \Delta^n u_1$$

Или кад сведемо помоћу обрасца:

$$6.)\qquad \binom{m}{r}+\binom{m}{r-1}=\binom{m+1}{r},$$

$$u_{n+1} = u_1 + \binom{n}{1}\Delta u_1 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_1 + \binom{n}{3}\Delta^3 u_1 + \dots$$

$$+\binom{n}{r}\Delta^r u_1 + \dots + \Delta^n u_1.$$

Дакле видимо, да горе поменути закон мора вредити за $(n+1)$, ако само вреди за n. Но ми смо непосредним рачуном дознали, да он вреди за $n = 2$, 3 и 4, дакле он вреди у опште.

137. Узмимо, да нам је дат ред:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots u_n + \dots$$

и да се тражи збирни образац тога реда, т. ј. образац за збир S_n првих n чланова његових. Поступним радом добијамо:

$$1.)\quad \begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_2 = u_1 + u_2 = 2u_1 + \Delta u_1 \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 3u_1 + 3\Delta u_1 + \Delta^2 u_1 \\ S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4u_1 + 6\Delta u_1 + 4\Delta^2 u_1 + \Delta^3 u_1 \end{cases}$$

Да не идемо даље, видимо, да се у изразима за узастопна S јављају као чиниоци, изузев првог биномног сачиниоца (1), сви остали биномни сачиниоци, који се показују у првом, другом, трећем и четвртом степену бинома $(x+a)$.

И сад треба доказати, да закон, који влада у обрасцима 1), вреди у опште. Претпоставимо дакле, да он вреди за S_n, па докажимо да он онда мора вредити и за S_{n+1}.

Услед претпоставке имамо:

$$2.)\quad S_n = nu_1 + \binom{n}{2}\Delta u_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 u_1 + \dots + \Delta^{n-1} u_1$$

Пошто је сад:

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1},$$

то онда, кад заменимо S_n његовом вредношћу под 2) а u_{n+1} опет његовом вредношћу, која се добија, кад се у обрасцу 4) № 136 n смени са $(n+1)$, налазимо:

$$S_{n+1} = nu_1 + \binom{n}{2}\Delta u_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 u_1 + \dots + \Delta^{n-1} u_1$$

$$+\quad u_1 + \binom{n}{1}\Delta u_1 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_1 + \dots + \Delta^n u_1$$

или кад помоћу обрасца 6) у № 136 сведемо:

$$S_{n+1} = (n+1)\,u_1 + \binom{n+1}{2}\Delta u_1 + \binom{n+1}{3}\Delta^2 u_1 + \ldots + \Delta^n u_1$$

Дакле видимо, да кад горе поменути закон, који је у обрасцу 2) исказан, вреди за извесну вредност n-а, да он мора вредити и за непосредно већу, — разуме се целу — вредност n-а.

Не треба никако сметнути с ума, да обрасци до сада изведени вреде, па био дати ред:

$$u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots$$

ма какав, правилан или неправилан, општи или особен. Међу тим треба напоменути, да обрасци, они под 4) у №-и 136 за u_n и овај овде за S_n, нису ни од каквеособите вајде у оном случају, кад дати ред није такав, да су сви чланови једног извесног различног реда његовог једнаки нули. Јер да бисмо н. пр. помоћу обрасца 4) могли наћи u_n, треба да знамо количине u_1, Δu_1, $\Delta^2 u_1$, $\ldots$ $\Delta^n u_1$, а за то се опет услед обрасца 4) у № 135 изискује, да су нам већ познати чланови $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$ датога реда. Дакле да бисмо помоћу реченог обрасца 4) могли израчунати u_n, треба да нам је оно само већ дато. Али права корист општих чланова датих редова састоји се у томе, да помоћу њих можемо из неколико само првих чланова реда и казаљке места траженога члана наћи тај члан, па била у осталом казаљка места траженога члана ма колико велика. Слично овоме може се казати и о обрасцу за S_n.

II. Аритметични редови.

138. Тако се зову редови, у којих су чланови једног извесног различног реда сви међу собом једнаки. Тада је тај различни ред последњи. Задати ред зове се аритметичан ред m-ог степена, кад су сви чланови његовог m-ог различног реда међу собом једнаки, дакле кад он има само m различних редова а не више.

Претпоставимо сада, да је ред:

$$1.)\qquad u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n,\ u_{n+1}\ \ldots$$

са којим смо имали посла у неколико предњих №-а, аритметичан m-ог степена. Тада ће $\Delta^m u_1$ бити сталан члан m-ног различног реда, а чланови свију доцнијих различних редова биће $= 0$. При споменутој дакле претпоставци, да је ред 1) аритметичан m-ог степена, обрасци 4) у № 136 и 2) у № 137 прекинуће се са оним чланом, у коме стоји $\Delta^m u_1$. Ти ће дакле обрасци овако изгледати:

$$2.)\qquad u_n = u_1 + \binom{n-1}{2}\Delta u_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 u_1 + \ldots + \binom{n-1}{m}\Delta^m u_1$$

$$3.)\qquad S_n = n u_1 + \binom{n}{2}\Delta u_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 u_1 + \ldots + \binom{n}{m+1}\Delta^m u_1$$

Сваки од ова два обрасца има $(m+1)$ чланова, и кад се погледа само на последњи члан сваког од њих, увидеће се, да сваки од њих захтева, да су познати $(m+1)$ првих чланова реда 1). Према томе да бисмо могли наћи општи члан и збирни образац аритметичног реда 1-ог, 2-ог, 3-ег и т. д. степена, треба да су нам дати редом 2, 3, 4 и т. д. прва члана задатог реда.

Из образаца 2) и 3) добијамо:

За аритметичне редове првог степена:

$$u_n = u_1 + (n-1)\,\triangle u_1$$

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\triangle u_1$$

а то су још из ниже алгебре познати обрасци за општи члан и збир од n чланова аритметичне постепености;

За аритметичне редове другог степена:

$$u_n = u_1 + (n-1)\,\triangle u_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}\triangle^2 u_1,$$

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}\triangle u_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\triangle^2 u_1$$

и т. д.

Ако радње, које су у обрасцима 2) и 3) само назначене, и извршимо, па за тим све по степенима n-а уредимо, добићемо изразе за u_n и S_n у овим облицима:

4.) $u_n = a_1 + a_2 n + a_3 n^2 + a_4 n^3 + \ldots + a_{m+1} n^m$

5.) $S_n = b_1 n + b_2 n^2 + b_3 n^3 + \ldots\ldots + b_{m+1} n^{m+1}$

Из обрасца 4) закључујемо, да се свака цела и рационална функција, која зависи од једне променљиве и која је m-ог степена, може сматрати као општи члан једног аритметичног реда m-ог степена. И из те функције добијају се узастопни чланови одговарајућег реда, кад се променљива количина, од које функција зависи, буде замењивала редом са 1, 2, 3, 4 и т. д.

Исто тако из обрасца 5) закључујемо, да се свака цела и рационална функција — једне променљиве — $(m+1)$-ог степена, у којој нема сталног — од променљиве независног — члана, може сматрати као збирни образац једног аритметичног реда m-ог степена. Успут напомињемо то, да не само у збирном обрасцу аритметичног реда, него и у збирном обрасцу ма каквог реда несме бити члана, који би био независан од n, ако смо т. ј. означили са n број сабраних чланова. Јер кад узмемо да је n т. ј. број сабраних чланова $=0$, онда мора и збир бити $=0$, а то може само тако бити случај, ако су сви чланови у збирном обрасцу функције n-а.

Последњи члан a_{m+1} у обрасцу 4) добија се при свођају обрасца 2) само из његовог последњег члана, јер само у том последњем члану има m чинилаца, од којих је сваки односно n првог степена. И лако је из самог тог свођаја сазнати да је:

$$a_{m+1} n^m = \frac{n^m}{m!}\triangle^m u_1$$

одакле следује:

6.) $\triangle^m u_1 = 1.\ 2.\ 3 \ldots m.\ a_{m+1}$

И у овој једначини показан је начин, како се добија стални члан последњег различног реда, кад нам је општи члан аритметичног реда дат у облику 4).

Тако н. пр. узмимо, да је:

$$u_n = 2 - 3n + 5n^2$$

Пошто је ова функција 2-ог степена, то је ред, који из ње постаје, аритметичан 2-ог степена, т. ј. он има два различна реда и стални члан другог различног реда јесте:

$$\triangle^2 u_1 = 1.2.5 = 10.$$

И доиста ред, који постаје из дате функције и његова два различна реда јесу:

4, 16, 38, 70, 112, 164 . . . .

12, 22, 32, 42, 52 . . . .

10, 10, 10, 10, ...

139. Из онога, што рекосмо о обрасцу 4) у № 138, следује:

a). Да су *m*-ни степени чланова аритметичне постепености:

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h\ ,\ .\ .\ \left\{a+(n-1)h\right\}\ .\ .\ .\ .$$

чланови новог и то аритметичног реда *m*-ог степена. Јер општи члан новога реда јесте:

$$\left\{a+(n-1)h\right\}^m,$$

а он ће развијен изгледати овако:

$$\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2 + \ldots + \alpha_{m+1} n^m$$

Тако је н. пр. ред:

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3,\ 6^3\ .\ .\ .\ .$$

или што је све једно ред:

1, 8, 27, 64, 125, 216 . . . .

аритметичан трећег степена. Његови су различни редови:

7, 19, 37, 61, 91 . . . .

12, 18, 24, 30 . . . .

6, 6, 6, ...

b). *m*-ни степени чланова аритметичног реда *r*-ог степена јесу чланови новога реда, који је аритметичан *mr*-ог степена. Јер ако је:

$$a_1 + a_2 n + a_3 n^2 + \ldots . + a_{r+1} n^r$$

општи члан задатог аритметичног реда *r*-ог степена, онда је:

$$\left\{a_1 + a_2 n + a_3 n^2 + \ldots + a_{r+1} n^r\right\}^m$$

општи члан новог аритметичног реда, који мора бити *mr*-ог степена, јер му је, као што се види, општи члан цела и рационална функција *n*-а *mr*-ог степена.

Тако н. пр. ред:

4, 16, 38, 70, 112, 164 . . . .

са којим смо имали посла у №-и 138, јесте аритметичан другог степена. Кад његове чланове подигнемо на квадрат, добићемо нов ред, који је аритметичан 4-ог степена. Тај је ред:

16, 256, 1444, 4900, 12544, 26896 . . .

Његови различни редови јесу:

240, 1188, 3456, 7644, 14352 . . .

948, 2268, 4188, 6708 . . .

1320, 1920, 2520 . . .

600, 600 . . .

Општи члан новог реда јесте:

$$[2 - 3n + 5n^2]^2.$$

c.) Кад више аритметичних редова саберемо члан по члан, онда ред, који постаје из добивених збирова, јесте опет аритметичан, и степен му је једнак са степеном реда, који је највишег степена од свију сабраних редова, просто зато, што је општи члан новог реда = збиру општих чланова задатих редова. Тако су н. пр. редови:

1, 3, 5, 7, 9, 11, . . .

1, 4, 9, 16, 25, 36, . . .

—9, — 10, 1, 30, 83, 166, . . .

аритметични редом 1-ог, 2-ог, 3-ег степена. Кад их саберемо члан по члан, добијамо аритметичан ред 3-ег степена:

—7, —3, 15, 53, 117, 213 . . .

Његови су различни редови:

4, 18, 38, 64, 96, . . .

14, 20, 26, 32, . . .

6 6 6 . . .

Исто тако, кад прва два реда саберемо члан по члан па тако добивени ред одузмемо члан по члан од трећега, добићемо аритметичан ред трећег степена:

— 11, — 17, — 13, 7, 49, 119 . . .

Његови различни редови јесу:

— 6, 4, 20, 42, 70 . . .

10, 16, 22, 28 . . .

6, 6, 6 . . .

Из онога, што је овде речено, следује очевидно, да се може увек узети, да је ред, коме је:

$$u_n = a_1 + a_2 n + a_3 n^2 + \ldots + a_{m+1} n^m$$

општи члан, постао сабирањем редова, којима су:

$$a_1,\ a_2 n,\ a_3 n^2,\ a_4 n^3\ \ldots\ a_{m+1} n^m$$

општи чланови, који су дакле редови односно 0-ог, 1-ог, 2-ог, 3-ег . . . m-ог степена.

d.) Најзад, кад помножимо више аритметичних редова члан по члан, онда нови ред јесте аритметичан и његов степен једнак је збиру степена задатих редова, којих смо одговарајуће чланове множили. Јер општи члан новог реда једнак је производу општих чланова умножених редова. Ако су дакле општи чланови умножених редова били α-ог, β-ог, γ-ог . . . λ-ог степена, онда је општи члан новог реда $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)$-ог степена, дакле је нови ред аритметичан тога степена.

Пример нека узме и изради сам читалац, а ми ћемо у овој №-и напоменути још само то, да у обрасцима за u_n и S_n под 2) и 3) у № 138 има свега $(m+1)$ параметара, одакле следује, да је за одредбу општег члана и збирног обрасца аритметичног реда m-ога степена потребно имати свега $(m+1)$ услова. У осталом ти услови могу бити ма какви; али је најпростије, кад су познати $(m+1)$ првих чланова.

140. У № 138 дознали смо, да из једне функције, која је цела, рационална и m-ог степена односно оне промењљиве од које она зависи, да велим из такве функције постаје аритметичан ред m-ог степена, кад само поменуту промењљиву количину будемо замењивали редом са 1, 2, 3, 4 . . . Но лако је закључити из онога, што је речено под *a*) и *c*) у № 139, да из такве функције постаје аритметичан ред m-ог степена и онда, кад промењљиву те функције будемо замењивали члановима ма какве аритметичне постепености:

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h\ \ldots$$

У осталом то се даје лако увидети и на овај начин. Ако је $f(x)$ цела и рационална функција x m-ног степена, онда је ред, који из ње добијамо стављајући:

$$x = a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h\ \ldots$$

истоветан са редом, који добијамо стављајући:

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots .$$

у функцију

$$f\left\{a+(x-1)h\right\}.$$

Но ова функција јесте односно x m-ог степена, дакле је горње тврђење доказано.

Ако је члан са највишим степеном x-а у $f(x)$: $a_{m+1}x^m$, онда је у $f\left\{a+(x-1)h\right\}$ члан са највишим степеном x-а очевидно $a_{m+1}h^m x^m$. Дакле је (№ 138, 6):

$$m!\, a_{m+1}h^m$$

стална разлика аритметичног реда, који постаје из $f\left\{a+(x-1)h\right\}$ за $x = 1, 2, 3, 4\ \ldots$ или из $f(x)$ за $x = a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h\ \ldots$

Пример. Да се нађе општи члан и збирни образац реда:

$$-2,\quad 4,\quad 28,\quad 82,\quad 178,\quad 328\ \ldots$$

$$6,\quad 24,\quad 54,\quad 96,\quad 150\ \ldots$$

$$18,\quad 30,\quad 42,\quad 54\ \ldots$$

$$12,\quad 12,\quad 12\ \ldots$$

Овде је $u_1 = -2$, $\Delta u_1 = 6$, $\Delta^2 u_1 = 18$, $\Delta^3 u_1 = 12$, $m = 3$.

Помоћу обрасца 2) и 3) у № 138 добијамо:

$$u_n = -2 + (n-1)6 + \binom{n-1}{2}.18 + \binom{n-1}{3}.12$$

$$S_n = -2n + \binom{n}{2}6 + \binom{n}{3}.18 + \binom{n}{4}.12$$

или кад се сведе:

$$u_n = 2n^3 - 3n^2 + n - 2$$

$$S_n = \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{2}n^2 - 2n$$

Општи члан и збирни образац задатог реда могу се наћи и друкче, ако се само узме на ум, што је у № 138 речено о обрасцима 4) и 5). Пошто је задати ред аритметичан трећег степена то на основу № 138 можемо претпоставити, као да су:

$$u_n = a_1 + a_2 n + a_3 n^2 + a_4 n^3$$

$$S_n = b_1 n + b_2 n^2 + b_3 n^3 + b_4 n^4.$$

општи члан и збирни образац задатога реда. Сад остаје, да се још израчунају непознати сачиниоци a и b у овим обрасцима.

Пошто за $n = 1, 2, 3$ и 4 мора бити $u_n = -2, 4, 28$ и 82, онда имамо као једначине, које ће дати сачиниоце a:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= -2 \\ a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 &= 4 \\ a_1 + 3a_2 + 9a_3 + 27a_4 &= 28 \\ a_1 + 4a_2 + 16a_3 + 64a_4 &= 82 \end{aligned}$$

Решили ми сад ове једначине на обичан начин или помоћу детерминаната, добићемо:

$$a_1 = -2,\ a_2 = 1,\ a_3 = -3,\ a_4 = 2$$

Да бисмо сачиниоце b у горњем обрасцу за S_n израчунали, треба само узети на ум то, да тај образац за $n = 1, 2, 3, 4$ мора дати збир од 1, 2, 3 и 4 прва члана задатога реда, и да према томе за поменуте вредности n-а S_n мора бити редом $= -2, 2, 30, 112$. На тај начин добијамо овај низ једначина:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 2, \\ 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 + 16b_4 &= 2, \\ 3b_1 + 9b_2 + 27b_3 + 81b_4 &= 30, \\ 4b_1 + 16b_2 + 64b_3 + 256b_4 &= 112 \end{aligned}$$

из којих се поједина b могу израчунати или на обичан начин или помоћу детерминаната. У оба случаја добијамо:

$$b_1 = -2,\ b_2 = -\frac{1}{2},\ b_3 = 0,\ b_4 = \frac{1}{2}$$

141. Узмимо нека нам је дат аритметичан ред 1-ог степена, т. ј. аритметична постепеност:

1.) $1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d,\ \ldots$

Кад збирове од 1, 2, 3, 4 . . . n, $(n+1)$, . . . првих чланова овога реда сматрамо као чланове новог реда, онда тај нови ред:

2.) $1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d,\ 5+10d\ \ldots$

јесте аритметичан другог степена.

Исто тако збирови од 1, 2, 3, 4, 5, . . . првих чланова реда 2) биће чланови аритметичног реда трећег степена. Тај је ред:

3.) $1,\ 3+d,\ 6+4d,\ 10+10d,\ 15+20d,\ldots$

На исти начин могли бисмо добити из реда 3) аритметичан ред 4-ог степена, из овог опет аритметичан ред 5-ог степена и т. д.

Сви тако добивени редови 1), 2), 3) и т. д. зову се збирни или фигурни редови 1-ог, 2-ог, 3-ег и т. д. степена. Ред 2) зове се ред полигонских бројева, а особени редови, који из њега постају за $d = 1, 2, 3\ \ldots$ зову се редови троугаоних, четвороугаоних, петоугаоних и т. д. бројева. Исто тако ред 3) зове се ред пирамидних бројева, а особени редови, који из њега постају за $d = 1, 2, 3,\ldots$ зову се редови тространо-пирамидних, четворострано-пирамидних, петострано-пирамидних и т. д. бројева.

Помоћу обрасца 2) у № 138 налазимо као општи члан и збирни образац реда 2):

$$4.)\quad \begin{cases} u_n = 1 - \frac{1}{2}dn + \frac{1}{2}dn^2, \\ S_n = \frac{(3-d)}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}dn^3 \end{cases}$$

Кад у овим обрасцима ставимо $d = 1, 2, 3\ \ldots$ добићемо као општи члан и збирни образац за:

a) ред троугаоних бројева: 1, 3, 6, 10, 15 . . .

$$u_n = \frac{n(n+1)}{1\,.\,2},\quad S_n = \frac{n(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.};$$

b) ред четвороугаоних бројева: 1, 4, 9, 16 . . .

$$u_n = n^2,\quad S_n = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.}$$

c) ред петоугаоних бројева: 1, 5, 12, 22 . . .

$$u_n = \frac{n(3n-1)}{1\,.\,2},\quad S_n = \frac{n^2(n+1)}{1\,.\,2}\quad \text{и т. д.}$$

Исто тако помоћу обрасца 3) у № 138 налазимо као општи члан и збирни образац реда 3):

$$5.)\quad \begin{cases} u_n = \frac{3-d}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}dn^3 \\ S_n = \frac{4-d}{12}n + \frac{12-d}{24}n^2 + \frac{2+d}{12}n^3 + \frac{d}{24}n^4. \end{cases}$$

Као што се види, општи члан реда пирамидних бројева једнак је збирном обрасцу реда полигонских бројева. А тако мора и бити, јер је n-ти члан реда 3) једнак збиру првих n чланова реда 2).

За $d = 1, 2, 3\ \ldots$ добијамо из последња два обрасца општи члан и збирни образац за редове 3-страно, 4-страно, 5-страно и т. д. пирамидних бројева.

Дакле је:

a) за ред 3 страно-пирамидних бројева:

$$u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.} \quad S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.};$$

b) за ред 4-страно-пирамидних бројева:

$$u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.}, \quad S_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{1\,.\,3\,.\,4\,.};$$

c) за ред 5-страно-пирамидних бројева:

$$u_n = \frac{n^2(n+1)}{1\,.\,2\,.}, \quad S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\,.\;2\,.\;3\,.\;4\,.}, \text{ и т. д.}$$

Читалац нека изведе сам следећа два обрасца за збирни ред *k*-ог степена:

$$6.)\quad \begin{cases} u_n = \dfrac{n(n+1)\ldots\{n+(r-2)\}}{1\,.\;2\,.\,.\,.\,.\,.\,r}\Big\{r + d\,(n-1)\Big\} \\[2ex] S_n = \dfrac{n(n+1)\ldots\{n+(r-1)\}}{1\,.\;2\,.\,.\,.\,.\,(r+1)}\Big\{r + 1 + d\,(n-1)\Big\} \end{cases}$$

Неће бити згорега овде напоменути, да се из онолико ђулади једнаке величине, колико сваки члан троугаоног реда има јединица, може начинити гомила у облику троугла, а из онолико ђулади, колико сваки члан 4-угаоног реда има јединица, гомила у облику квадрата. Исто тако из онолико ђулади опет једнаке величине, колико сваки члан 3-страно-пирамидног реда има јединица, може се начинити гомила у облику тростране пирамиде, а из онолико ђулади, колико сваки члан 4-страно-пирамидног реда има јединица, гомила у облику 4-стране пирамиде.

На завршетку ове №-е да пређемо још неколико редова, који се јављају при множењу редова, који су облика:

$$7.)\quad a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + \cdots$$

Ти су редови заједно са њиховим општим члановима и збирним обрасцима:

$$8.)\quad \begin{cases} 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n \\[1ex] 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \dbinom{n+1}{2} \\[1ex] 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \dbinom{n+1}{2} = \dbinom{n+2}{3} \\[1ex] 1 + 4 + 10 + 20 + \ldots + \dbinom{n+2}{3} = \dbinom{n+3}{4} \\[1ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[1ex] 1 + m + \dbinom{m+1}{2} + \ldots + \dbinom{n+m-2}{m-1} = \dbinom{n+m-1}{m} \end{cases}$$

Како ови редови један из другог постају као и општи чланови, који се налазе у последњем стубу и збирни обрасци, који се налазе десно од знакова једнакости, ваља да није нужно напомињати, јер су сви ти редови аритметични редом 0-ог, 1-ог, 2-ог . . . *m*-ог степена.

Кад помножимо два реда онаквог облика као онај под 7), онда број сабирака у *k*-том сачиниоцу производа једнак је *k*-том члану другог реда под 8). Исто тако кад помножимо три реда онаквог облика као онај под 7), онда број сабирака у k-том сачиниоцу производа једнак је k-том члану трећег реда под 8). У опште у производу m редова онаквог облика као онај под 7) број сабирака k-тог сачиниоца једнак је k-том члану последњега реда под 8). Ти редови зову се такође *фигурни*.

142. У овој №-и решићемо неколико задатака, који се могу сматрати као примена онога, што смо мало час о збирним редовима говорили.

1°. Ђулад једнаке величине наслагана су у облику тростране пирамиде. Пита се колико је ђулади у n-ом слоју идући одозго на доле, и после колико је свега ђулади у првих n-слојева.

Лако је увидети из самог начина склапања те пирамиде, да број ђулади у узастопним слојевима одозго на доле мора бити редом: 1, 3, 6, 10 . . . а ово је ред троугаоних бројева. Дакле n-ти члан тога реда:

$$\frac{n(n+1)}{1.\,2}$$

показује колико у n-ом слоју има ђулади, а збир првих n чланова истога реда, а то је n-ти члан 3-страно-пирамидног реда:

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1.\,2.\,3.}$$

показује, колико је свега ђулади у првих n-слојева идући одозго на доле.

Према овоме читалац ће и сам моћи у свакој прилици лако наћи, колики је број ђулади у целој таквој пирамиди, као и колики је број ђулади у једној зарубљеној тространој пирамиди, у којој т. ј. нема неколико горњих слојева.

2°. Ђулад једнаке величине наслагана су у облику четворостране пирамиде. Пита се колико је ђулади у n-том слоју идући озго на доле и колико у свих n слојева.

И овде је лако увидети из самог начина, како постаје пирамида, да број ђулади у узастопним слојевима идући озго на доле мора бити редом раван 1, 4, 9, 16, 25 . . . . , а то је ред четвороугаоних бројева. Дакле n-ти члан овог реда:

$$n^2$$

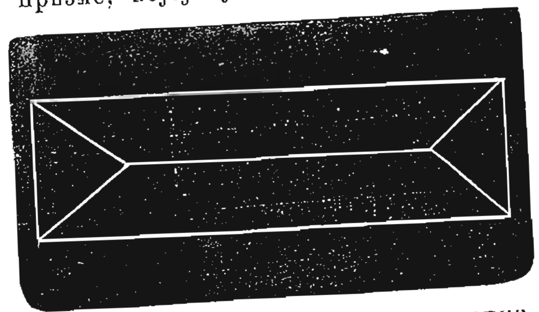
показује, колико у n-ом слоју има ђулади, а збирни образац тога реда, а то је n-ти члан четворострано-пирамидног реда:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\,2.\,3.}$$

показује, колико у првих n слојева идући озго на доле има свега ђулади.

И овде нека читалац сам изнађе, колико у свакој прилици има ђулади у целој таквој пирамиди, као и онда, кад би она била зарубљена.

3°. Ђулад једнаке величине наслагана је у облику тростране призме, којој су основе косо зарубљене, и која



једном својом пљоштом, а та је правоугаоник, лежи на земљи. Та је призма дакле овог облика.

Пита се колико је ђулади у n-ом слоју озго на доле, и после колико је ђулади у првих n-слојева.

У првом слоју озго има само један низ ђулади, и има их m. У другом слоју мора бити свега два слоја и у сваком по $(m+1)$ ђуле. дакле једно више него у првом слоју. У олуку, који постаје из ова два низа ђулади, леже оних m ђулади првог слоја. У трећем слоју мора бити три низа сваки са $(m+2)$ ђулета. У два олука, који постају из та три низа, стају ђулад првог и другог низа другог слоја. У опште у n-том слоју биће n низова ђулади сваки са $(m+n-1)$ ђулади.

Из овога што рекосмо следује, да у узастопним слојевима идући озго на доле има редом онолико ђулади, колико имају јединица узастопни чланови реда:

$$m,\ 2(m+1),\ 3(m+2), \ldots n(m+n-1) \ldots$$

У n-ом слоју биће дакле онолико ђулади, колико n-ти члан овога реда има јединица, дакле: $n(m+n-1)$.

А у n првих слојева биће онолико ђулади, колики је збир првих n чланова тога реда. Али тај ред јесте аритметичан другог степена и његови су различни редови:

$$(m+2),\ (m+4),\ (m+6),\ (m+8)\ \ldots$$

$$2,\qquad 2,\qquad 2,\ \ldots$$

Помоћу обрасца 3) у № 138 добијамо као збирни образац овог реда:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+3m-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

и тај образац показује дакле, колико у првих n слојева има ђулади.

143. Ред:

$$1.)\qquad 1^m,\ 2^m,\ 3^m,\ 4^m, \ldots\ldots n^m \ldots\ldots$$

видели смо у № 139 да је аритметичан m-ог степена и према томе у стању смо му наћи збирни образац, па имало m ма какву целу и положну вредност. Међу тим ми ћемо збирни образац реда 1) овде нарочито извести. Означимо са $S(n^m)$ збир првих n чланова реда 1) и ставимо:

$$2.)\qquad S(n^m) = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$$

$$= a_1 n^{m+1} + a_2 n^m + a_3 n^{m-1} + \ldots + a_{m+1} n,$$

јер смо видели, да збирни образац аритметичног реда m-ог степена мора бити функција n-а степена $(m+1)$-ог, у којој нема члана, који би био независан од n. Кад једначину 2) одузмемо од оне, која из ње постаје сменом броја n са $(n+1)$ добићемо:

$$(n+1)^m = a_1\left\{(n+1)^{m+1} - n^{m+1}\right\} +$$

$$+ a_2\left\{(n+1)^m - n^m\right\} +$$

$$+ a_3\left\{(n+1)^{m-1} - n^{m-1}\right\} +$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+ a_{m+1}\left\{(n+1) - n\right\}$$

или кад развијемо и по степенима n-а уредимо:

$$n^m + \binom{m}{1} n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \binom{m}{3} n^{m-3} + \dots + 1 =$$

$$a_1\binom{m+1}{1} n^m + \left\{ \begin{matrix} a_1\binom{m+1}{2} \\ a_2\binom{m}{1} \end{matrix} \right\} n^{m-1} + \left| \begin{matrix} a_1\binom{m+1}{3} \\ a_2\binom{m}{2} \\ a_3\binom{m-1}{1} \end{matrix} \right| n^{m-2} +$$

$$\left| \begin{matrix} a_1\binom{m+1}{4} \\ a_2\binom{m}{3} \\ a_3\binom{m-1}{2} \\ a_4\binom{m-2}{1} \end{matrix} \right| n^{m-3} + \dots + \left| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m+1} \end{matrix} \right|$$

Одавде по правилу неодређених сачинилаца добијамо:

$$a_1 = \frac{1}{m+1}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{m}{12}, \quad a_4 = 0,$$

$$a_5 = -\frac{m(m-1)(m-2)}{120.\ 2.\ 3}, \quad a_6 = 0,$$

$$a_7 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{252.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

и т. д. Последња упоређајем сачинилаца добивена једначина јесте:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{m+1} = 1.$$

Помоћу ње уверавамо се у исти мах, да ли су вредности сачинилаца a добро израчунате.

Кад вредности нађене за сачиниоце a заменимо у једначину 2), добићемо образац:

$$3.)\qquad S(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \binom{m}{1} n^{m-1} -$$

$$- \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{4} \binom{m}{3} n^{m-3} + \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{6} \cdot \binom{m}{5} n^{m-5} -$$

$$- \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{8} \binom{m}{7} n^{m-7} + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{10} \cdot \binom{m}{9} n^{m-9} - \dots$$

Као што се из обрасца 2) увиђа, треба овај образац у сваком особеном случају продужити само дотле, докле је то могуће, а да изложилац од n не постане мањи од $+1$.

У овом обрасцу јављају се у сачиниоцима бројеви Bernouilli-јеви:

$$\frac{1}{6}, \ \frac{1}{30}, \ \frac{1}{42}, \ \frac{1}{30}, \ \frac{5}{66}, \text{ и т. д.}$$

на које смо наишли и у алгебарској анализи № 103, где смо такође показали, како се они израчунавају.

Помоћу обрасца 3) у стању смо сада наћи збирне обрасце свима оним редовима, којих су општи чланови целе и рационалне функције n-а. Тако н. пр. ако је:

$$u_n = a + bn + cn^2$$

општи члан неког реда, онда су чланови његови:

$$u_1 = a + b + c$$

$$u_2 = a + 2b + 2^2c$$

$$u_3 = a + 3b + 3^2c$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$u_n = a + bn + cn^2$$

Дакле је збир првих n чланова тога реда:

$$S(a + bn + cn^2) =$$

$$na + b(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + c(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

Пошто је према усвојеном начину означавања у почетку ове №-е:

$$n = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots . + n^0 = S(n^0)$$

то је даље:

$$S(a + bn + cn^2) = a\,S(n^0) + b\,S(n) + c\,S(n^2)$$

На сличан начин нашли бисмо, да је у опште:

$$4.) \qquad S(a + bn + cn^2 + \ldots + kn^m) =$$

$$= a\,S(n^0) + b\,S(n) + c\,S(n^2) + \ldots + k\,S(n^m)$$

што је у осталом по себи увиђавно.

И сад после овога можемо показати још један начин како се добија образац 3).

Очевидно је:

$$n^m = S(n^m) - S(n-1)^m$$

па дакле и:

$$S(n^m) - n^m = S(n-1)^m$$

Ако сад $(n-1)^m$, где је m цео и положан број, развијемо по биномном обрасцу, добићемо:

$$S(n^m) - n^m = S\left\{n^m - \binom{m}{1} n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2}\right.$$

$$\left. - \binom{m}{3} n^{m-3} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{1} n + (-1)^m\right\}$$

Одавде, кад једначину 4) узмемо у обзир, добијамо даље:

$$S(n^m) - n^m = S(n^m) - \binom{m}{1} S(n^{m-1}) + \binom{m}{2} S(n^{m-2}) -$$

$$-\binom{m}{3} S(n^{m-3}) + \ldots + (-1)^{m-1} S(n) + (-1)^m\,S(n^0).$$

Ако ову једначину решимо по $S(n^{m-1})$ и за тим у новој једначини сменимо m са $(m+1)$, добићемо:

$$5.) \quad S(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{m}{2} S(n^{m-1}) - \frac{m(m-1)}{2.\,3} S(n^{m-1}) + \ldots .$$

$$+ (-1)^m \frac{1}{m+1} S(n^0)$$

Из овог обрасца добићемо образац 3), ако у овом обрасцу (5) сменимо m поступно са $(m-1)$, $(m-2)$, $(m-3)$ и т. д., и ако тим путем добивене вредности за $S(n^{m-1})$, $S(n^{m-2})$ и т. д. будемо заменили у једначину 5).

Нека читалац сам помоћу обрасца 3) нађе збирне обрасце за редове, којима су чланови први, други, трећи и т. д. степени бројева 1, 2, 3, 4, . . . n, ... Исто тако нека нађе збирни образац аритметичном реду m-ог степена:

$$a^m + (a+h)^m + (a+2h)^m + \ldots + \left\{a + (n-1)h\right\}^m$$

Ако краткоће ради ставимо $a + (n-1)\,h = k$, онда је тај тражени образац ово:

$$S(k^m) = \frac{k^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)\,h} + \frac{1}{2}(k^m - a^m)$$

$$+ B_1 \frac{h}{2}\binom{m}{1}(k^{m-1} - a^{m-1})$$

$$+ B_3 \frac{h^3}{4}\binom{m}{3}(k^{m-3} - a^{m-3})$$

$$+ B_5 \frac{h^5}{6}\binom{m}{5}(k^{m-5} - a^{m-5})$$

$+$ и т. д.

где слова B значе Bernouilli-јеве бројеве.

144. Различни редови налазе своје и то корисне примене нарочито при израчунавању сваковрсних таблица. Ми ћемо да покажемо, како се при том ради.

Узмимо функцију:

$$1.)\quad y = f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_{m+1} x^m$$

која је цела и рационална функција x-а m-ног степена, па претпоставимо да се тражи таблица вредности, које та функција добија за вредности x-а, којих је размак сталан, које су дакле чланови једне аритметичне постепености. Из № 138 и 140 знамо, да ред, коме су чланови вредности, које y при том поступно добија, мора бити аритметичан m-ог степена. Због тога треба дакле израчунати непосредно само $(m+1)$ првих вредности функције (y-а), а све доцније вредности њене можемо за тим наћи простим сабирањем, а помоћу различних редова, који постају из реда y-ових вредности. Ако се сетимо обрасца:

$$2.)\quad u_{n+1} = u_n + \Delta u_n,\quad \Delta^{m-1} u_{n+1} = \Delta^{m-1} u_n + \Delta^m u_n$$

онда видимо, на како се лак начин може помоћу другог обрасца продужити и то докле нам је воља, претпоследњи т. ј. $(m-1)$-ви различни ред, а помоћу овог $(m-2)$-ги и т. д. до првог различног реда закључно, помоћу којег се после а уз припомоћ првог обрасца и главни ред y-вих вредности може продужити докле се хоће.

Узмимо н. пр. да се има саградити таблица вредности, које добија функција:

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$$

за вредности $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots$ до 1000. Ред, који постаје из одговарајућих вредности y-а, јесте аритметичан трећег степена, и с тога треба израчунати непосредно из функције само 4 прве вредности њене. Остале треба тражити помоћу различних редова. Цео рад изгледа овако:

x	y	$\triangle$	$\triangle^2$	$\triangle^3$
0	— 5	2	2	6
1	— 3	4	8	6
2	1	12	14	6
3	13	26	20	6
4	39	46	26	6
5	85	72	32	6
6	157	104	38	6
7	261	142	44	.
8	403	186	50	.
9	589	236	.	.
10	825	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Помоћу другог обрасца под 2) продужени су редови других и првих разлика, а помоћу другог обрасца продужен је ред y-вих вредности.

Пошто у рачунима можемо погрешити, то нам ваља од времена на време контролисати рад тиме, што ћемо вредност функције непосредно и из обрасца израчунати. Ако се вредности функције не могу са свим тачно него само приближио тачно наћи, што ће бити случај, кад у функцијама има ирационалних сачинилаца или пак разломљених, који се десетним разломком не могу тачно исказати, онда морамо рачунати са више децимала, него што мислимо на крају рада задржати. Јер лако је увидети, да погрешка, која долази услед занемарених децимала, може услед непрестаног сабирања напослетку толико нарасти, да се осети и на оним десетним местима, која хоћемо да су нам тачна.

На сличан начин и са врло малом изменом ради се и онда, кад функција $y = f(x)$, за коју се хоће да сагради таблица њених вредности, није цела и рационална. У таквом случају наравно да низ функцијиних вредности неће бити аритметичан ред, али се он може приближно као такав сматрати. Јер кад у таквом случају изведемо узастопне различне редове реда функцијиних вредности, ми ћемо видети, да ће чланови једног известног различног реда, па дакле и чланови свију доцнијих различних редова, бити тако мали, да се могу просто занемарити, а да се погрешка, која отуда произлази, не осети на оном десетном месту, које хоћемо да нам је још тачно.

Замислимо задату функцију развиту у бесконачни ред тако да је:

$$y = f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_{m+1} x^m + \ldots$$

Претпоставимо сада, да за вредности x-а почев од a па до b, за које је ред збирљив, члан $a_{m+1} x^{m+1}$ и сви доцнији не утичу на r-ту децималу y-ве вредности. Тада можемо за тај низ вредности x-а узети, до на r децимала тачно:

$$y = f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_{m+1} x^m.$$

Тада ће дакле вредности y-а, које одговарају поменутом низу вредности x-а, бити до r-те децимале закључно чланови аритметичног реда m-ог степена.

Пошто за различне низове вредности x-а, вредности y-а неће једнако нагло опадати, то је јасно, да ће се услед тога мењати степен аритметичног реда, па дакле и број различних редова, које треба у рачун узимати. За то треба рачун поделити на партије и за сваку израчунати непосредно из обрасца $y = f(x)$ потребни број функцијиних вредности заједно са њиним разликама.

Узмимо примера ради, да смо при израчунавању логаритама целих бројева дошли до $\log a = \log 6000 = 3{\cdot}7781513$. Логаритме бројева 6001, 6002 и 6003 можемо непосредно помоћу обрасца израчунати, а логаритме свију доцнијих бројева до близу броја 6040 можемо за тим много лакше помоћу различних редова наћи.

Из обрасца

$$l(a+\delta) = la + l\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)$$

следује образац за обичне логаритме:

$$\log(a+\delta) = Mla + Ml\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)$$

или кад $l\left(1+\frac{\delta}{a}\right)$ развијемо помоћу обрасца 5) у № 87 алгеб анал. у ред:

$$3.)\qquad \log(a+\delta) = Mla + M\frac{\delta}{a} - \frac{M}{2}\frac{\delta^2}{a^2} + \frac{M}{3}\frac{\delta^3}{a^3} - \dots$$

Сад ако овде узмемо да је $a = 6000$ а δ ма који од бројева 1, 2, 3 . . . 40 н. пр. највећи 40, онда је због $M = 0{\cdot}434$ . . . (№ 88 алгеб. анал.) вредност четвртог члана у последњој једначини $< 0{\cdot}000\,000\,049$. Ако се дакле тај члан и сви остали занемаре при израчунавању логаритама бројева од 6000 до 6040, онда погрешка у израчунатим логаритмима, која отуд долази, мања је од $0{\cdot}000\,000\,049$ (№66 алгеб. анализе). Дакле ће првих 7 децимала у нађеним логаритмима бити тачне. Ако се дакле траже логаритми са 7 тачних децимала, онда можемо у обрасцу 3), који их даје, напустити четврти члан и све доцније и онда ћемо имати за поменути низ вредности x-а и до на 7 децимала тачно:

$$4.)\qquad \log(a+\delta) = Mla + M\frac{\delta}{a} - M\frac{\delta^2}{a^2}.$$

Дакле логаритме свију целих бројева од 6000 до 6040 смемо до на 7 децимала тачно сматрати као чланове аритметичног реда другог степена. Због тога дакле пошто већ имамо $\log$ 6000, морамо још израчунати и $\log$ 6001 и $\log$ 6002 непосредно помоћу обрасца 4), а логаритме свију доцнијих бројева помоћу различних редова.

Рад изгледа од прилике овако:

	y	$\triangle$	$\triangle^2$
log 6000 =	3·7781513	723·74,	— 0·12
„ 6001 =	2236·74	723·62,	
„ 6002 =	2960·36	723·50,	
„ 6003 =	3683·86	723·38,	
„ 6004 =	4407·24	723·26,	
„ 6005 =	5130·50	723·14,	
„ 6006 =	5853·64	723·02,	
. . . . .	. . . . .	. . . . .	

Прве и друге разлике изражене су јединицама седмог десетног места.

III. Интерполација или уметање редова.

145. *Интерполовати* задати ред значи уметнути између свака два узастопна члана његова по један и исти број његових чланова, који се владају по истом закону. Уметнути чланови зову се *уметци*. Нови интерполацијом задатог реда добивени ред зове се краће *интерполовани ред*.

Кад је познат или се може наћи општи члан задатог реда, у коме је општем члану исказан закон тога реда, онда је ствар врло лака.

Узмимо н. пр. да је:

$$1.)\quad y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots + a_{m+1} x^m$$

општи члан задатог реда. Тај ред јесте дакле аритметичан m-ога степена и његове узастопне чланове добијамо, стављајући у 1) $x = 1, 2, 3, 4 \ldots$ Али кад у истом обрасцу 1) будемо замењивали x са члановима аритметичне постепености;

$$2.)\quad 1, 1+\frac{1}{k}, 1+\frac{2}{k}, 1+\frac{3}{k}, \ldots 1+\frac{k-1}{k}, 2, 2+\frac{1}{k}, \ldots$$

којој је $\frac{1}{k}$ разлика, онда ред, који постаје из одговарајућих вредности функције под 1), биће опет аритметичан m-ог степена (№ 140). И у том новом реду јавиће се али само у извесним и то једнаким размацима и чланови задатог реда. Као што се лако увиђа из самог низа вредности под 2), у новом реду биће између свака два узастопна члана задатога реда по $(k-1)$ нових чланова или *уметака*.

Да бисмо дакле нашли ред, у коме између свака два и два члана задатог аритметичног реда има по $(k-1)$ нових чланова, треба само у x-том члану задатог реда замењивати x са члановима аритметичне постепености, којој је $\frac{1}{k}$ разлика. Ако у x-ном члану задатог реда сменимо x са $1+\frac{z}{k}$, онда функција m-ог степена од z, коју добијамо, представља $(z+1)$-ви члан новог реда. Та је функција дакле општи члан новог реда, који даје чланове његове за $z = 0, 1\ 2, 3 \ldots$

Успут приметимо још, да кад је размак вредности, којима замењујемо x у општем члану задатог реда, цео број h, да се велим онда у новом реду јављају као његов први, други, трећи и т. д. члан први, $(h+1)$-ви, $(2h+1)$-ви и т. д. члан задатог реда.

Узмимо примера ради ред:

3.) $\quad -4,\ 3,\ 22,\ 59,\ 120,\ 211\ \ldots$

Његови су различни редови:

$$7,\quad 19,\quad 37,\quad 61,\quad 91\ \ldots$$
$$12,\quad 18,\quad 24,\quad 30\ \ldots$$
$$6,\quad 6,\quad 6,\ \ldots$$

дакле је он аритметичан трећег степена.

Његов општи члан јесте:

$$y = x^3 - 5.$$

Ако сад хоћемо, да између свака два и два члана датога реда уметнемо по три нова члана, онда треба само у 4) стављати редом $x = 1,\ 1+\frac{1}{4},\ 1+\frac{2}{4},\ 1+\frac{3}{4},\ 2,\ 2+\frac{1}{4},\ 2+\frac{2}{4},\ 2+\frac{3}{4}, 3 \ldots.$ Или можемо одмах тражити $(z+1)$-ви члан новога реда стављајући у 4) $x = 1+\frac{z}{4}$, пошто је сада $(k-1) = 3$. На тај начин добијамо:

5.) $$A_{z+1} = \frac{z^3 + 12z^2 + 48z - 256}{64}$$

као општи члан интерполованог реда. Но пошто је овај аритметичан 3-ег степена, то је довољно помоћу обрасца 5) наћи само 4 прва члана његова а све доцније помоћу различних редова, као што је то у № 144 показано.

Ако је у опште ред:

6.) $\quad u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\ \ldots\ u_n\ \ldots$

аритметичан m-ог степена, онда је његов x-ни члан (№ 138)

$$u_x = u_1 + \binom{x-1}{1}\triangle u_1 + \binom{x-1}{2}\triangle^2 u_1 + \ldots + \binom{x-1}{m}\triangle^m u_1$$

Кад у овом обрасцу ставимо $x = 1 + \frac{z}{k}$, добићемо $(z+1)$-ви члан новог реда, у коме између свака два члана реда 6) има по $(k-1)$ нових чланова. Дакле је:

$$A_{z+1} = u_1 + \frac{z}{k}\triangle u_1 + \binom{\frac{z}{k}}{2}\triangle^2 u_1 + \ldots + \binom{\frac{z}{k}}{m}\triangle^m u_1$$

Или кад биномне сачиниоце развијемо и за тим бројиоце њихове ослободимо разломака:

7.) $$A_{z+1} = u_1 + \frac{z}{k}\triangle u_1 + \frac{z(z-k)}{1.\,2.\,k^2}\triangle^2 u_1 + $$
$$+ \frac{z(z-k)(z-2k)}{1.\ 2.\ 3.\ k^3}\triangle^3 u_1 + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{z(z-k)(z-2k)\ldots\{z-(m-1)k\}}{1.\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ mk^m}\triangle^m u_1$$

И ово је општи образац за интерполацију аритметичних редова. Помоћу овог обрасца добијамо општи члан интерполованог реда у сваком особеном случају. Међу тим, да бисмо могли продужити докле хоћемо интерполовани ред, није баш нужно изналазити његов општи члан. Ако је дани па дакле и тражени ред аритметичан, онда треба израчунати непосредно помоћу обрасца 7) само онолико првих чланова последњега реда, колики је његов степен и још један члан више. Помоћу тих чланова и различних редова, који из њих постају, можемо лако продужити тражени интерполовани ред, докле хоћемо.

Ако узмемо горњи ред 3):

$$-4,\ 3,\ 22,\ 59,\ 120,\ 211,\ \ldots$$

чије смо различне редове горе нашли, и ставимо у образац 7):

$$u_1 = -4,\ \triangle u_1 = 7,\ \triangle^2 u_1 = 12,\ \triangle^3 u_1 = 6,\ k = 4$$

онда добијамо образац 5), који нам представља $(z+1)$-ви члан интерполованог реда, у коме између свака два члана реда 3) стоје три уметка.

Ако ли у обрасцу 7) после мало час поменутих замена ставимо редом $z = 0, 1, 2, 3, 4$, добијамо као пет првих чланова траженог интерполованог реда:

$$-4,\ -\frac{195}{64},\ -\frac{13}{8},\ \frac{23}{64},\ 3\ldots$$

или другаче:

$$8.)\quad -\frac{256}{64},\ -\frac{195}{64},\ -\frac{104}{64},\ \frac{23}{64},\ \frac{192}{64},\ldots$$

Различни редови овог реда јесу:

$$\frac{61}{64},\quad \frac{91}{64},\quad \frac{127}{64},\quad \frac{169}{64}\ldots.$$

$$\frac{30}{64},\quad \frac{36}{64},\quad \frac{42}{64}\ldots.$$

$$\frac{6}{64},\quad \frac{6}{64}\ldots.$$

и сад бисмо могли лако на познати начин продужити интерполовани ред 8) колико нам је воља.

146. Ако функција $y = f(x)$, у којој је исказан закон реда, није цела и рационална, онда ред, који из ње постаје за вредности x-а, којих је размак сталан, неће бити аритметичан. Међу тим кад тражимо узастопне различне редове тога реда, видећемо, да ће чланови једног извесног различног реда и свију доцнијих бити тако мали, да се они с погледом на тачност, која се у рачуну захтева, могу сматрати као једнаки нули, и да се они према томе могу просто занемарити. Ако је то н. пр случај са члановима $(m+1)$-ог различног реда и свију доцнијих, и ми због тога све те редове напустимо, као да их и нема, ако дакле сматрамо чланове m-ог различног реда као једнаке и према томе функцију $y = f(x)$ приближно тачно као целу и рационалну m-ог степена, онда можемо по методама № 145 интерполовати ред функцијиних вредности, које одговарају вредностима x-а сталног размака. Интерполацијом добивене вредности функцијине биће наравно приближно тачне, али се рачун може увек удесити тако, да оне буду тачне у онолико децимала у колико ми хоћемо.

Нека читалац зарад бољег разумевања ове ствари проучи пажљиво 7-му и неколико доцнијих алинеја у № 144 а ми ћемо целу ствар да објаснимо још боље примерима.

Пример 1. Као први пример узмимо онај у № 144, где су се тражили логаритми свију целих бројева почев од 6000 па до 6040. Место да израчунавамо као тамо логаритме бројева, којих је размак јединица, ми можемо најпре израчунавати логаритме бројева, којих је размак већи н. пр. 10, дакле бројева 6010, 6020, 6030 и 6040, пошто *log* 6000 узимамо као већ познат. После тога тражићемо путем интерполације и логаритме осталих бројева, који су између оних првих.

Из обрасца 3) у № 144:

$$\log(a+\delta) = Mla + M\frac{\delta}{a} - \frac{M}{2}\frac{\delta^2}{a^2} + \frac{M}{3}\frac{\delta^3}{a^3} - \ldots .$$

видели смо, да је за $a = 6000$ и $\delta = 10$, 20, 30 и 40 вредност трећег члана мања од пола јединице седмог десетног места. Ако дакле хоћемо логаритме са 7 децимала онда, као што смо горе напоменули, можемо при израчунавању тих логаритама занемарити тај трећи члан и све доцније а да се погрешка не осети на 7-ом десетном месту. Дакле до на 7 децимала тачно можемо сматрати ред логаритама бројева 6000, 6010, 6020, 6030 и 6040 као аритметичан другог степена.

Пошто је већ познат:

$$\log a = Mla = \log 6000 = 3{\cdot}7781513$$

то онда из једначине:

$$\log(a+\delta) = \log a + M\frac{\delta}{a} - \frac{M}{2}\cdot\frac{\delta^2}{a^2}$$

добијамо за $a = 6000$ и $\delta = 10$, 20, 30, 40:

		$\triangle$	$\triangle^2$
log 6000	= 3·7781513	7232	— 12
„ 6010	= 3·7788745	7220	— 12
„ 6020	= 3·7795965	7208	— 12
„ 6030	= 3·7803173	7196	.
„ 6040	= 3·7810369	.	.

где су прве разлике исказане у јединицама 7-ог десетног места.

Да бисмо сад нашли логаритме свију целих бројева почев од 6000 до 6040, треба између свака два и два логаритма под 1) уметнути по 9 нових чланова. Зарад тога треба у општем интерполационом обрасцу 7) у № 145 пошто су ред логаритама под 1) а тако исто и тражени интерполовани ред до на 7 децимала тачно аритметични другог степена, ставити

$$u_1 = 3{\cdot}7781513, \quad \triangle u_1 = 0{\cdot}0007232$$

$$\triangle^2 u_1 = -\,0{\cdot}0000012, \quad \triangle^3 u_1 = \triangle^4 u_1 = \ldots = 0, \; k = 10$$

На тај начин добићемо:

$$A_{z+1} = 3{\cdot}7781513 + \frac{7}{10}\cdot 0{\cdot}0007232 - \frac{z(z-10)}{2.\,10^2}$$

$$\times\ 0{\cdot}0000012$$

или кад се сведе:

$$2.)\quad A_{z+1} = 3{\cdot}7781513 + 723{\cdot}8z - 0{\cdot}06z^2$$

где су последња два сачиниоца исказана у јединицама 7-ог десетног места. Овај образац може се до на 7 децимала тачно сматрати као општи члан траженог интерполованог реда.

Када бисмо сад у обрасцу 2) ставили редом $z = 0$, 1, 2, 3 . . . 40 добили бисмо све тражене логаритме. Али пошто је ред, који из њих постаје, до на 7 децимала тачно, аритметичан другог степена, то треба помоћу обрасца 2), пошто је већ *log* 6000 познат, израчунати само *log* 6001 и *log* 6002 стављајући у 2) $z = 1$ и 2. А остале логаритме треба тражити помоћу различних редова. Почетак рада показан је у таблици, која долази мало ниже и у којој смо прве и друге разлике исказали опет јединицама 7-ог децималног места. Осму и девету децималу узели смо зарад поправке, јер као што смо већ напоменули у № 144 погрешке, које долазе од занемарених децимала, могу услед непрестаног сабирања најзад толико нарасти, да се дотакну и седмог децималног места у логаритмима.

Мало час поменута таблица јесте ово:

log	△	△²
3·7781513	723·74	— 0·12
223674	723·92	— 0·13
296036	723·50	.
368386	723·38	.
440724	723·26	.
513050	723·14	.
585364	723·02	
657666	722·90	
729956	722·78	
802234	722·66	
874500	.	
.	.	
.	.	
.	.	

Није згорег овом приликом напоменути, да кад се као овде израчунава какав ред помоћу приближних разлика његових чланова, да се велим погрешке, које долазе од занемарених децимала у последњем различном реду, јављају али наравно повећане и у претходећим различним редовима као и у главном реду, али само опе у тим редовима расту по законима фигурних бројева (№ 141).

На начин, који је овде показан, израчунато је врло много таблица, као логаритамске, тригонометријске и т. д. Помоћу функције, ако је она позната, или опитима, ако је она непозната, изналази се само врло мали број вредности њених, а остале се вредности после траже путем интерполације. Израчунати или опитима нађени бројеви при том се увек сматрају приближно тачно као чланови аритметичног реда, вишег или нижег степена, како кад то захтева тачност, коју у рачуну мислимо постићи.

147. У опште, кад је $u = \varphi(x)$ непозната функција, али је познат низ вредности њених:

1.) $$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_{m+1}$$

које одговарају такође познатим вредностима x-а:

2.) $$x_1,\ x_2,\ x_3\ \ldots\ x_{m+1}$$

онда се може захтевати, да изнађемо вредности непознате функције, које одговарају ма којим другим вредностима x-а, што су између x_1 и x_{m+1}. Јасно је да се тај задатак не може решити са свим тачно, него само приближно тачно. Зарад тога ми ћемо морати тражити једну функцију $f(x)$, која ће при израчунавању вредности непознате функције $\varphi(x)$ моћи ову бар приближно заменити. Функција $f(x)$ мора очевидно бити таква, да и она за горње вредности x-а добија вредности:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_{m+1}$$

Пошто је разлика вредности, које добијају функције $\varphi(x)$ и $f(x)$ за сваку од горњих вредности x-а, једнака нули, то је јасно, да ће се вредности тих функција, које одговарају вредностима x-а, што су између ма које две узастопне од оних под 1), међу собом мало разликовати. Дакле се без осетне погрешке $f(x)$ може узети место непознате функције $\varphi(x)$ за све вредности x-а, што су између x_1 и x_{m+1} и то узети тим слободније, што је год мањи размак горњих вредности x-а.

Као што се види, ова је радња опет интерполација. Лако је осем тога увидети, да је овај задатак неодређен, т. ј. да има бесконачно много функција, које за вредности x-а: $x_1,\ x_2\ .\ .\ .\ .\ x_{m+1}$ добијају вредности: $u_1,\ u_2,\ u_3\ .\ .\ .\ u_{m+1}$. Јер једини услов, који функција $f(x)$ има да испуни, јесте тај, да она за вредности x-а под 2) добија вредности под 1). Ово се тврђење у осталом даје геометријски најлакше и најувиђавније оправдати.

И доиста ако горње вредности x-а сматрамо као апсцисе, а њима одговарајуће вредности непознате функције $u = \varphi(x)$, што су под 1), за ординате, онда помоћу истих вредности добијамо $(m+1)$ тачака у равни. Сад тражити функцију $f(x)$, која би у горепоменутом послу могла заменити функцију $\varphi(x)$, значи толико, колико тражити линију, која би могла заменити непознату линију, којој припадају $(m+1)$ поменутих тачака. Али пошто линија, која непознату линију $u = \varphi(x)$ треба да замени, има само један услов да испуни, а тај је да она пролази такође кроз $(m+1)$ поменутих тачака, то је онда јасно, да таквих линија има бесконачно много. Међу тим непрекидност, која се обично огледа у природним законима, налаже нам, да између линија, које пролазе кроз $(m+1)$ поменутих тачака, узмемо као заменика непознате линије увек ону, која показује највише правилности, или боље, чији се ток највише слаже са током, који је овлаш обележен поменутим тачкама.

Међу тим задатак постаје са свим одређен, кад придодамо још један услов, н. пр. да непозната функција $\varphi(x)$ има бити цела и рационална m-ог степена, дакле за једну јединицу нижег степена од броја познатих вредности њених. Јер кад би биле могуће две целе и рационалне функције x-а m-ог степена $\varphi(x)$ и $f(x)$, које би за горе поменутих $(m+1)$ вредности x-а имале једнаке вредности, онда би једначина:

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0,$$

која може бити највише m-ог степена, имала $(m+1)$ корена: x_1, x_2, x_3, . . . x_{m+1} а то не може бити, јер једначина m-ог степена има само m корена, ни више ни мање.

У највише прилика размак вредности x-а, којима одговарајуће вредности непознате функције знамо, јесте сталан. Ми смо тај случај већ имали у № 146, али није згорега претрести га овде још један пут.

148. Узмимо дакле, да је $u = \varphi(x)$ непозната функција x-а, и да су:

1.) $$u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots\ u_{m+1}$$

вредности, које та непозната функција добија за вредности x-а:

2.) $$x_1,\ x_1+k,\ x_1+2k,\ \ldots\ x_1+mk$$

Пошто образац 4) у № 136 вреди у опште, то ће рећи, па био задати ред ма какав, то је онда:

$$u_{m+1} = u_1 + \frac{m}{1}\triangle u_1 + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\triangle^2 u_1 + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots\{m-(m-1)\}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,m}\triangle^m u_1.$$

Сменимо овде u_{m+1} са u и ставимо:

$$x = x_1 + mk$$

одакле следује:

$$m = \frac{x - x_1}{k}$$

па ћемо на тај начин добити:

3.) $$u = u_1 + \frac{x-x_1}{k}\triangle u_1 + \left\{\frac{x-x_1}{k}\right\}\left\{\frac{x-x_1}{k} - 1\right\}\frac{\triangle^2 u_1}{1.\,2} +$$

$$\ldots + \left\{\frac{x-x_1}{k}\right\}\left\{\frac{x-x_1}{k} - 1\right\}\ldots$$

$$\ldots\left\{\frac{x-x_1}{k} - (m-1)\right\}\frac{\triangle^m u_1}{m!}$$

И ми сад тврдимо, да ова функција x-а испуњава оне услове, које треба да испуни једна функција, те да може заменити непознату функцију $\varphi(x)$. Она је понајпре цела и рационална функција x-а m-ог степена, као што се то јасно види из њеног последњег члана, који је производ m чинилаца сваки првог степена односно x. Даље за вредности x-а под 2) она добија редом оне вредности, које стоје под 1). Јер ако узмемо да је r ма који од бројева 0, 1, 2, 3 . . . m, онда за $(r+1)$-ву вредност x-а:

$$x = x_1 + rk$$

функција под 3) добија вредност:

$$u = u_1 + r\triangle u_1 + \binom{r}{2}\triangle^2 u_1 + \ldots + \binom{r}{m}\triangle^m u_1$$

а то је очевидно $(r+1)$-ва вредност од оних под 1).

Према томе може се функција под 3) узети као заменик непознате функције $u = \varphi(x)$, дакле као функција, која приближно зависи од x онако као и непозната функција $\varphi(x)$. Кад у обрасцу 3) заменимо x са вредношћу x', која се вредност налази између x_1 и $x_{m+1} = x_1 + mk$, онда ће тај образац дати за u вредност u', која ће бити приближна вредност праве вредности $\varphi(x')$. При том треба добро имати на уму то, да је k стални размак оних вредности x-а, којима одговарајуће вредности непознате функције $\varphi(x)$ знамо. Ако ставимо:

$$x - x_1 = z$$

онда се образац 3) претвара у:

$$5.)\quad u = u_1 + \frac{z}{k}\triangle u_1 + \frac{z(z-k)}{1.\ 2.\ k^2}\triangle^2 u_1 + \frac{z(z-k)(z-2k)}{1.\ 2.\ 3.\ k^3}\triangle^3 u_1 + \ldots \frac{z(z-k)(z-2k)\ldots\{z-(m-1)k\}}{1.\ 2\ 3.\ \ldots\ldots m\ k^m}\triangle^m u_1$$

а то је — Newton-ов — образац 7) у № 145. При употреби тога обрасца треба имати на уму то, да z значи разлику између вредности x-а, за коју тражимо вредност непознате функције $\varphi(x)$ и вредности x-а, која одговара првој познатој вредности исте функције.

Кад су друге разлике вредности под 1) тако већ мале, да се могу занемарити, онда се образац 4) своди на овај:

$$5.)\qquad u = u_1 + \frac{z}{k}\triangle u_1$$

који се може написати и овако:

$$\frac{u-u_1}{\triangle u_1} = \frac{z}{k} = \frac{x-x_1}{k}$$

Тада се дакле *узима*, да су промене непознате функције сразмерне променама променљиве, од које она зависи, да дакле једнаким променама променљиве одговарају једнаке промене непознате функције, или што је све једно, да су прве разлике њене међу собом једнаке. Тако се т. ј. помоћу обрасца 5) ради, кад се траже логаритми тригонометријских функција, који се не налазе у таблицама.

Али при употреби таблица дешава се и противан случај, где се познатој вредности функције u, која се вредност у таблицама тачно не налази, тражи одговарајућа вредност x-а. Ако се друге разлике могу занемарити, онда добијамо из 4):

$$5.)\qquad z = x - x_1 = k\,\frac{u-u_1}{\triangle u_1}$$

где се под u_1 разуме таблична вредност функције u, која долази непосредно пред познатом вредности њеном, а међу тим као u_2 узимље се таблична вредност функције, која долази непосредно за поменутом познатом вредношћу њеном.

Али ако последњи образац неби дао довољно тачан резултат, другим речима, ако би се и више разлике морале узети у рачун, морали бисмо решити једначину вишег степена. Но то можемо избећи овако:

Из 4) добијамо:

$$6.)\quad z = \frac{u - u_1}{\frac{1}{k}\Delta u_1 + \frac{z-k}{1.2.k^2}\Delta^2 u_1 + \frac{(z-k)(z-2k)}{1.\ 2.\ 3.\ \ k^3}\Delta^3 u_1 + \ldots}$$

Ако овде занемаримо више разлике, т. ј. $\Delta^2 u_1$, $\Delta^3 u_1$ и т. д. онда овај образац даје као прву приближну вредност за $z = x - x_1$ ону, коју даје и образац 5). Ако прву приближну вредност заменимо десно у обрасцу 6) и при том занемаримо $\Delta^3 u_1$ и све више разлике, онда добијамо као другу приближну вредност:

$$z = \frac{u - u_1}{\frac{1}{k}\Delta u_1 + \frac{z-k}{1.2.\ k^2}\Delta^2 u_1}$$

Кад смо ову израчунали, онда помоћу ње добијамо као четврту приближну вредност:

$$z = \frac{u - u_1}{\frac{1}{k}\Delta u_1 + \frac{z-k}{1.2.k^2}\Delta^2 u_1 + \frac{(z-k)\,(z-2k)}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ k^3}\Delta^3 u_1}$$

и т. д.

Примедба. По методи овде изложеној ради се и онда, кад је $u = \varphi(x)$ позната функција, али није згодна за израчунавање.

Пример 1. Тражи се $tg\,30^\circ 15'$, кад је дато:

$$x_1 = 30^\circ\ \ 0' \qquad u_1 = 0{\cdot}5773503$$

$$x_2 = 30^\circ\,30' \qquad u_2 = 0{\cdot}5890450$$

$$x_3 = 31^\circ\ \ 0' \qquad u_3 = 0{\cdot}6008606$$

$$x_4 = 31^\circ\,30' \qquad u_4 = 0{\cdot}6128008$$

$$x_5 = 32^\circ\ \ 0' \qquad u_5 = 0{\cdot}6248694$$

Тражимо узастопне разлике вредности од u:

$u = tg\,x$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0·5773503	+ 116947	+ 1209	+ 37	+ 1
0·5890450	118156	1246	38	
0·6008606	119402	1284		
0·6128008	120686			
0·6248694				

Овде је $k = 30'$ а $z = 15'$, дакле радећи по обрасцу 4) добијамо:

$$u = tg\,30^\circ\,15' = 0{\cdot}5773503 + \frac{1}{2} \times 0{\cdot}0116947$$

$$- \frac{1}{8} \times 0{\cdot}0001209 + \frac{1}{16} \times 0{\cdot}0000037$$

где смо четврту разлику $+1$ занемарили, пошто не утиче на седму децималу. Даље је:

$$
\begin{aligned}
u = tg\, 30^{\circ}\, 15' = {} & 0{\cdot}5773503 \\
& + 0{\cdot}00584735 \\
& - 0{\cdot}00001511 \\
& + 0{\cdot}00000023 \\
\hline
& = 0{\cdot}5831828
\end{aligned}
$$

Пример 2. Да се са таблицама десетомесних логаритама бројева од 1 до 1000 у рукама нађе логаритам броја:

$$\pi = 3{\cdot}1415926536$$

са десет децимала. Ми ћемо логаритме у тој таблици сматрати као познате вредности функције u а бројеве као вредности x-а, па ћемо имати:

x	$log\, x$	$\triangle$	$\triangle^2$	$\triangle^3$	$\triangle^4$
3·14	0·4969296481	13809057	— 43769	277	— 3
3·15	0·4983105538	13765288	— 43492	274	
3·16	0·4996870826	13721796	— 43218		
3·17	0·5010592622	13678578			
3·18	0·5024271200				

Овде је $k = 0{\cdot}001$, $z = 0{\cdot}0015926533$; $u_1 = 0{\cdot}4969296481$;

$$\triangle u_1 = 0{\cdot}0013809057;\quad \triangle^2 u_1 = -0{\cdot}0000043769;$$

$$\triangle^3 u_1 = 0{\cdot}0000000277;\quad \triangle^4 u_1 = -0{\cdot}0000000003$$

Даље је:

$$\frac{z}{k} = 0{\cdot}15926533,\quad \frac{(z-k)}{2k} = -0{\cdot}42036732,$$

$$\frac{z-2k}{3k} = -0{\cdot}61357821,\quad \frac{z-3k}{4k} = -0{\cdot}71018366$$

Са овим вредностима а помоћу обрасца 4) добијамо лако:

$$log\, \pi = 0{\cdot}4971498727$$

149. Вратимо се к обрасцу у № 148:

$$
\begin{aligned}
1.)\quad u = u_1 + \frac{x-x_1}{k}\triangle u_1 + \left\{\frac{x-x_1}{k}\right\}\left\{\frac{x-x_1}{k} - 1\right\}\frac{\triangle^2 u_1}{1.\,2} + \\
\ldots + \left\{\frac{x-x_1}{k}\right\}\left\{\frac{x-x_1}{k} - 1\right\}\ldots \\
\ldots\left\{\frac{x-x_1}{k} - (m-1)\right\}\frac{\triangle^m u_1}{m!}
\end{aligned}
$$

Као што из онога, што смо у № 148 говорили, следује, ми смо у стању наћи увек помоћу овог обрасца непознату функцију x-а, за коју знамо, да је цела и рационална и да добија $(m+1)$ извесних вредности за толико исто познатих вредности x-а.

Тако н. пр. ако се тражи цела и рационална функција x-а, која за $x = -2, -1, 0, 1$ и 2 добија вредности: 67, 14, 3, 4, 11, треба узети на ум да је сада:

$$u_1 = 67,\ \triangle u_1 = -53,\ \triangle^2 u_1 = 42,\ \triangle^3 u_1 = -30,$$

$$\triangle^4 u_1 = 24,\ x_1 = -2 \text{ и } k = 1$$

па ћемо помоћу горњег обрасца добити:

$$u = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3$$

Ако су у горњем обрасцу 1) количине u_1, $\triangle u_1$, $\triangle^2 u_1$, . . . све положне и ако је чинилац:

$$\frac{x - x_1}{k} - (m-1),$$

који је најмањи од сродних му чинилаца у истом обрасцу, такође положан, онда ће и сви остали чиниоци тога рода у горњем обрасцу 1) бити положни. Дакле ће тада функција u као збир положних чланова бити положна. Али ако је поменути чинилац и једнак нули, то ће исто бити случај, јер тада ће само последњи члан десно од знака једнакости у обрасцу 1) нестати, док ће међу тим сви остали чланови бити положни. Из

$$\frac{x - x_1}{k} - (m-1) = 0$$

добијамо:

1.) $$x = x_1 + (m-1)\,k$$

За ову вредност x-а дакле као и за сваку другу од ње већу биће функција u у почетку ове №-е положна. Дакле је вредност x-а под 1) горња граница корена једначине, која се добија, кад се функција u стави $= 0$.

Али ако су количине u_1, $\triangle u_1$, $\triangle^2 u_1$, . . . на изменце положне и одречне за н. пр. $x = x_1$, онда је x_1 доња граница корена, јер лако је увидети, да ће за сваку од x_1 мању вредност x-а функција под 1) бити вазда једног и истог знака.

Узмимо н. пр. једначину:

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 7 = 0.$$

Ред вредности, које функција $f(x)$ добија за $x = 0$, 1, 2, 3, и различни редови тога реда јесу:

$$\begin{array}{ccccccc} 7, & & 11, & & 31, & & 73 \\ & 4, & & 20, & & 42 & \\ & & 16, & & 22 & & \\ & & & 6 & & & \end{array}$$

Овде је $u_1 = 7$, $\triangle u_1 = 4$, $\triangle^2 u = 16$, $\triangle^3 u_1 = 6$. Све те количине јесу положне и с тога пошто је сада $k = 1$, $m = 3$, и $x_1 = 0$, горња граница корена једначине јесте:

$$x = 2.$$

Исто тако ред вредности функције $f(x)$ за $x = -6$, -5, -4, -3 са различним редовима јесте:

$$\begin{array}{cccc} -17, & 17, & 31, & 31 \\ & 4 & 14 & 0 \\ & -20 & -14 & \\ & & 6 & \end{array}$$

Овде је сада $u_1 = 17$, $\triangle u_1 = 34$, $\triangle^2 u_1 = -20$, $\triangle^3 u_1 = 6$, Те су дакле количине наизменце положне и одречне, дакле је $x = x_1 = 6$ доња граница корена горње једначине.

150. Newton-ов образац 3) и 4) у № 148 претпоставља, да је размак оних вредности променљиве, којима одговарају познате вредности функције, сталан. Образац Lagrange-ов, који ћемо сада да изведемо, то не претпоставља. Узмимо дакле, да су:

$$x_1,\ x_2,\ x_3\ \ldots\ x_{m+1}$$

познате вредности променљиве x, којима одговарају такође познате вредности:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_{m+1}$$

непознате функције $u = \varphi(x)$. Размак познатих вредности x-а може бити сталан или не.

Ставимо непознату функцију:

$$1.)\quad u = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots + a_{m+1} x^m$$

И сад треба непознате сачиниоце a израчунати тако, да ова једначина за $x = x_1,\ x_2,\ x_3\ \ldots\ x_{m+1}$ да као одговарајуће вредности $u = u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots\ u_{m+1}$. Такве

вредности за непознате сачиниоце a израчунавају се помоћу $(m+1)$ једначина:

$$u_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + \ldots + a_{m+1} x_1^m$$

$$u_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 + \ldots + a_{m+1} x_2^m$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$u_{m+1} = a_1 + a_2 x_{m+1} + a_3 x_{m+1}^2 + \ldots + a_{m+1} x_{m+1}^m$$

Али место да решавамо ове једначине на обичан начин или пак помоћу детерминаната, згодније је радити овако: Из линеарног облика једначина увиђамо, да сваки непознати сачинилац н. пр. a_1 мора бити облика:

$$a_1 = u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 + \ldots + u_{m+1} p_{m+1}$$

где су поједина p функције бројева $x_1,\ x_2,\ x_3\ \ldots\ x_{m+1}$.

Ако сад заменимо у 1) поједине сачиниоце a тим њиховим вредностима и после те замене уредимо једначину по количинама $u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots\ u_{m+1}$, она ће се јавити у овом облику:

$$2.)\quad u = u_1 q_1 + u_2 q_2 + u_3 q_3 + \ldots + u_{m+1} q_{m+1}$$

где су поједина q целе и рационалне функције m-ог степена променљиве x. Према условима задатка мора једначина 2) за $x = x_1$ дати $u = u_1$ а за то се опет изискује, да је за ту вредност x-а:

$$q_1 = 1,\ q_2 = q_3 = q_4 = \ldots = q_{m+1} = 0$$

И из истог основа мора за $x = x_2$ бити:

$$q_2 = 1, \text{ и } q_1 = q_3 = q_4 = \ldots = q_{m+1} = 0$$

и т. д. На кратко ма који од ових сачинилаца н. пр. q_k мора бити такав, да је он једнак јединици за $x = x_k$ а једнак нули за сваку од осталих вредности: $x = x_1, x_2, x_3 \ldots x_{k-1}, x_{k+1} \ldots x_{m+1}$. Према томе количина q_k, која је функција m-ог степена променљиве x, и која мора бити $= 0$ за сваку од m вредности $x = x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_{m+1}$ може се узети, да је облика:

$$3.)\quad q_k = c(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots (x-x_{m+1})$$

где је c од променљиве x независан број. Тај број c лако је наћи, само ако узмемо на ум, да за $x = x_k$ мора бити $q_k = 1$. Према томе је дакле:

$$1 = c(x_k - x_1)(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_{m+1}).$$

и кад c вредношћу, која се одавде добија, заменимо у обрасцу 3), наћи ћемо:

$$q_k = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{m+1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{m+1})}$$

Ако у овом општем обрасцу заменимо k редом вредностима $1, 2, 3 \ldots (m+1)$, добићемо интерполациони образац Lagrange-ов.

$$4.)\quad \begin{aligned} u = {} & \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{m+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{m+1})}\, u_1 \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_{m+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{m+1})}\, u_2 \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m+1})}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)\ldots(x_3-x_{m+1})}\, u_3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_{m+1}-x_1)(x_{m+1}-x_2)\ldots(x_{m+1}-x_{m-1})}\, u_{m+1} \end{aligned}$$

Кад бисмо развили разломке, и после уредили по степенима променљиве x, ова би се једначина јавила у облику обрасца 1). Једначина 4) јесте m-ог степена и она за $x = x_1, x_2, x_3 \ldots x_{m+1}$ даје за u вредности: $u_1, u_2, u_3 \ldots u_{m+1}$. Свака друга једначина, која би била нађена по ма којој другој методи и испуњавала би исте захтеве као и једначина 4), морала би бити са овом истоветна. Јер смо ми видели, да кад су две целе и рационалне функције x-а m-ог степена једнаке за више од m вредности x-а, да оне морају бити истоветне. Најзад из самог извођења обрасца 4) може се увидети, да је задатак интерполације са свим неодређен. Јер ако се не постави, у осталом са свим произвољан и ничим не оправдан услов, да непозната функција има бити цела и рационална, онда можемо ставити, да је:

$$q_k = \frac{\sqrt{x-x_1}\,\sqrt{x-x_2}\ldots\sqrt{x-x_{m+1}}}{\sqrt{x_k-x_2}\,\sqrt{x_k-x_3}\ldots\sqrt{x_k-x_{m+1}}}$$

или:

$$q_k = \frac{tg(x-x_1)\,tg(x-x_2)\ldots tg(x-x_{m+1})}{tg(x_k-x_1)\,tg(x_k-x_2)\ldots tg(x_k-x_{m+1})}$$

ТРЕЋИ ДЕО.

Разлагање рационалних разломака на простије разломке.

151. Ми ћемо претпоставити, да нам је дат разломак, коме су и бројилац и именилац полиноми уређени по степенима x-а. Ми ћемо даље претпоставити, да је разломак чиста разломљена функција x-а, јер у противном случају ми бисмо могли поделив бројиоца имениоцем разложити дани разломак на два дела, од којих је један цела, а други чисто разломљена функција x-а. И најзад ми ћемо претпоставити, да бројилац и именилац немају никаквог заједничког делиоца, јер бисмо га у противном случају могли скратити са тим делиоцем. Претпостављајући дакле, да је такав разломак:

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

наш ће сада задатак бити, да покажемо, како се он може представити као збир више простијих рационалних разломака. Ми ћемо још претпоставити, да су нам познати корени једначине, која постаје, кад именилац $F(x)$ ставимо једнак нули. Тада су нам дакле познати и корени чиниоци функције $F(x)$.

Случај неједнаких корена.

152. Ми претпостављамо, да је именилац разломка:

$$1.) \qquad \frac{f(x)}{F(x)}$$

функција x-а m-ог степена, услед чега бројилац може бити највише $(m-1)$-ог степена. Корени $a, b, c, d \dots k, l$, једначине:

$$F(x) = 0$$

узећемо најпре, да су сви међу собом различни. И ми сад тврдимо, да се дати разломак може разложити на m разломака, као што следује:

$$2.) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l}$$

где су бројиоци $A, B, C \dots K, L$ стални бројеви. Да бисмо ово што тврдимо и оправдали, треба само доказати, да се за $A, B, C, \dots K, L$ могу увек наћи такве вредности, да је за њих једначина 2) идентична, т. ј. лева страна једнака десној за сваку вредност x-а.

Претпоставимо за време, да $A, B, C \dots K, L$ у једначини 2) већ имају такве вредности. Онда је једначина идентична, па очевидно и свака од оних, које сад одмах долазе. Кад једначину 2) помножимо са $F(x)$, добићемо:

$$3.) \qquad f(x) = \frac{AF(x)}{x-a} + \frac{BF(x)}{x-b} + \dots + \frac{KF(x)}{x-k} + \frac{LF(x)}{x-l}$$

Или кад количнике, који се добијају, кад се $F(x)$ подели редом са $(x-a)$, $(x-b)$, . . . $(x-l)$, означимо са: $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ . . . $F_m(x)$:

$$4.)\quad f(x) = AF_1(x) + BF_2(x) + CF_3(x) + \dots + LF_m(x).$$

Пошто је ова једначина идентична, то она мора вредити за сваку вредност x-а, па дакле и за $x = a$, b, $c \dots k$, l. Ако у њој ставимо $x = a$ н. пр., онда ће сви чланови десно сем првог ишчезнути, јер свака од функција:

$$F_2(x),\ F_3(x),\ F_4(x)\ \dots\ F_m(x)$$

има $(x-a)$ као чиниоца. На тај начин добијамо:

$$f(a) = AF_1(a)$$

одакле следује:

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)}$$

Исто тако за $x = b$ добијамо из једначине 4)

$$B = \frac{f(b)}{F_2(b)}$$

и т. д. и најзад

$$L = \frac{f(l)}{F_m(l)}$$

Према томе:

Да бисмо нашли бројиоца ма којем од m разломака десно од знака једнакости у једначини 2) *н. пр. разломку*

$$\frac{H}{x-h}$$

треба поделити $F(x)$ *са* $x - h$ *и ако је* $\varphi(x)$ *добивени количник, онда је:*

$$H = \frac{f(h)}{\varphi(h)}$$

Да бисмо изнашли вредности појединих бројилаца ми смо претпоставили, да се задати разломак може разложити онако, како је показано у једначини 2), из које су после нужно следовале једначине 3) и 4). Треба дакле сада доказати, да су за нађене вредности бројилаца, које су вредности очевидно једино можне, поменуте једначине идентичне. Зарад тога узмимо на ум само то, да кад бројиоце заменимо нађеним вредностима, да је онда једначина 2) задовољена сваком од m вредности $x = a$, b, c . . . k, l. То је исто случај и са једначинама 3) и 4). Пошто је сад у једначини 4) десно од знака једнакости сваки члан $(m-1)$-ог степена односно x, док је међу тим услед претпоставке $f(x)$ највише $(m-1)$-ог степена, то је онда једначина 4) $(m-1)$-ог степена. Па пошто је број горњих вредности x-а, које ју задовољавају, већи од њеног степена, то она мора бити идентична (№ 147). То дакле исто мора бити случај за нађене вредности бројилаца и са једначином 3) као и са једначином 2).

Помоћу једне Euler-ом учињене примедбе можемо израчунати бројиоце простијих разломака, а да не морамо делити $F(x)$ са $(x-a)$, $(x-b) \dots (x-l)$. Јер из једначине:

$$F(x) = (x-h)\,\varphi(x)$$

следује, кад узмемо лево и десно прве изводе:

$$F'(x) = (x-h)\,\varphi'(x) + \varphi(x),$$

а одатле за $x = h$:

$$F'(h) = \varphi(h)$$

услед чега добијамо сада:

$$H = \frac{f(h)}{F'(h)}$$

Дакле можемо сада казати:

Да бисмо добили бројиоце простијих разломака:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{B}{x-b}, \ldots \ldots \frac{L}{x-l},$$

треба само заменити у:

$$\frac{f(x)}{F'(x)}$$

x редом са a, b, c, ... l.

153. Умовање у № 152 независно је од тога, да ли су сви сачиниоци једначине:

$$1.) \qquad F(x) = 0$$

стварни или не, као и од тога, да ли су сви неједнаки корени њени стварни или не. Међу тим у оном случају, кад су сачиниоци њени стварни, а међу коренима њеним има и уображених, могу се уображени разломци, којих ће тада бити, избећи на врло прост начин. Треба само то узети на ум, да сваком уображеном корену једначине 1): $a + bi$ мора одговарати други њен корен $a - bi$. Ако сад означимо са A и B бројиоце простих разломака, којима ће имениоци бити:

$$x - a - bi \quad \text{и} \quad x - a + bi$$

онда ће бити:

$$A = \frac{f(a+bi)}{F'(a+bi)}, \qquad B = \frac{f(a-bi)}{F'(a-bi)}$$

или:

$$A = P + Qi, \qquad B = P - Qi$$

Дакле ће збир разломака, који одговарају поменутим уображеним коренима, бити:

$$\frac{P+Qi}{x-a-bi} + \frac{P-Qi}{x-a+bi} = \frac{2P(x-a) - 2bQ}{(x-a)^2 + b^2}$$

Из овог дакле видимо, да сваком спрегу уображених корена, који се у једначини 1) један пут само јавља, одговара један стваран разломак облика:

$$\frac{Rx + S}{(x-a)^2 + b^2}$$

Примедба. И ако из самога рада у № 152 јасно следује, да се за задати разломак може добити само један систем простих разломака а не више, опет за то мислимо, да неће згорега бити, ако то овде нарочито докажемо.

Јер узмимо да смо, радећи по једној методи, нашли да је задати разломак:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{L}{x-l},$$

а радећи по другој методи, да смо нашли:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A'}{x-a'} + \frac{B'}{x-b'} + \frac{C'}{x-c'} + \ldots + \frac{L'}{x-l'}$$

Из ових двеју једначина следује једначина:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{L}{x-l}=$$

$$\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots+\frac{L'}{x-l'},$$

или кад помножимо лево и десно са $(x-a)$

$$A+(x-a)\left\{\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{L}{x-l}\right\}$$

$$=(x-a)\left\{\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots+\frac{L'}{x-l'}\right\},$$

За $x=a$ лева страна своди се на A, а десна страна кад ни један од именилаца у загради не би био $=(x-a)$, свела би се на нулу. Дакле један од десних именилаца мора бити $=(x-a)$. Ако претпоставимо да је то случај са првим имениоцем, онда је:

$$A+(x-a)\left\{\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{L}{x-l}\right\}$$

$$=A'+(x-a)\left\{\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots+\frac{L'}{x-l'}\right\}$$

За $x=a$ следује из ове једначине: $A=A'$. Дакле су већ први разломци у оба система једнаки. Ако та два једнака разломка изоставимо, онда имамо једначину:

$$\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{L}{x-l}=\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots$$

$$+\frac{L'}{x-l'}.$$

помоћу које се на сличан начин доказује, да су једнаки и разломци:

$$\frac{B}{x-b},\quad \frac{B'}{x-b'}\quad \text{и т. д.}$$

Дакле су оба низа горњих разломака идентични.

Пример 1. Да се разложи на простије разломке:

$$1.)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{2x^3+5x^2-6}{x^4+2x^3-x^2-2x}$$

Корени једначине:

$$x^4+2x^3-x^2-2x=0$$

јесу: $x=0,\ 1,\ -1,\ -2$. Дакле се дати разломак може разложити овако:

$$2.)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x+2}.$$

Да бисмо нашли бројиоце, ми ћемо радити по другој методи, т. ј. послужићемо се првим изводом:

$$F'(x)=4x^3+6x^2-2x-2,$$

и тако ћемо добити:

$$A = \frac{f(0)}{F'(0)} = \frac{-6}{-2} = 3; \quad B = \frac{f(1)}{F'(1)} = \frac{1}{6},$$

$$C = \frac{f(-1)}{F'(-1)} = -\frac{3}{2}, \qquad D = \frac{f(-2)}{F'(-2)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

Дакле је:

$$\frac{2x^3+5x^2-6}{x^4+2x^3-x^2-2x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{6(x-1)} - \frac{3}{2(x+1)} + \frac{1}{3(x+2)}$$

Ако бисмо се пак хтели послужити првом методом, морали бисмо имати на уму, да је сада:

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 6$$

$$F_1(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2, \quad F_2(x) = x^3 + 3x^2 + 2x,$$

$$F_3(x) = x^3 + x^2 - 2x, \qquad F_4(x) = x^3 - x.$$

Дакле је:

$$A = \frac{f(0)}{F_1(0)} = \frac{-6}{-2} = 3, \quad B = \frac{f(1)}{F_2(1)} = \frac{1}{6},$$

$$C = \frac{f(-1)}{F_3(-1)} = -\frac{3}{2}, \qquad D = \frac{f(-2)}{F_4(-2)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3},$$

као што смо нашли мало час.

Најзад могли бисмо бројиоце израчунати и по правилу неодређених сачинилаца. Јер пошто је једначина 2), у којој место симбола на левој страни треба да стоји дати разломак, идентична, то онда, кад ту једначину

ослободимо именилаца и уредимо лево и десно по степенима x-а, одговарајући сачиниоци лево и десно морају бити једнаки.

Пример 2. Да се разложи на простије разломке:

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2+1)}$$

Једначина $F(x) = 0$ има -1 и $\pm i$ као корене. Дакле је

$$1.) \qquad \frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)}$$

По једној од двеју метода налазимо $A = \frac{3}{2}$. Кад заменимо A том вредношћу у једначину и за тим први члан пребацимо лево, па најзад помножимо лево и десно са имениоцем:

$$2.) \qquad (x+1)(x^2+1),$$

онда из нове једначине можемо по правилу неодређених сачинилаца добити B и C. Или можемо одмах једначину 1) помножити са имениоцем под 2), уредити лево и десно по степенима x-а и затим израчунати A, B и C по правилу неодређених сачинилаца.

Или најзад можемо и овако радити. Из једначине

$$x^2 - x + 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

добијамо за $x = -1$, а то је вредност, која поништава имениоца од A:

$$3 = 2A \text{ или } A = \frac{3}{2}.$$

Кад то заменимо у последњу једначину и за тим први члан пребацимо лево, добићемо:

$$-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = (Bx+C)(x+1).$$

Десна страна дељива је са $(x+1)$, дакле то мора бити случај и са левом. Кад се деоба сврши, излази:

$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = (Bx+C)$$

одакле по правилу неодређених сачинилаца добијамо:

$$B = C = -\frac{1}{2}.$$

Дакле:

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{(x+1)}{2(x^2+1)}$$

Случај једнаких корена.

154. Кад једначина $F(x) = 0$ има и једнаких корена, онда се разлагање задатог разломка у простије разломке не може извршити ни по једној од метода у № 152. Јер ако је $x = a$ корен, који поменутој једначини више пута припада, онда се:

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)} = \frac{f(a)}{F'(a)}$$

јавља као апсолутно бесконачно велика количина. Дакле треба тражити друге методе.

Зарад тога претпоставимо, да је a k-пута корен једначини $F(x) = 0$. Тада је:

1.) $$F(x) = (x-a)^k F_1(x)$$

где је $F_1(x)$ производ корених чинилаца, који постају из осталих од a различних корена.

Пре свега по једној од метода №-е 152 може се разломак:

$$\frac{f(x)}{(x-a)F_1(x)}$$

који постаје, кад се именилац датог разломка:

2.) $$\frac{f(x)}{F(x)}$$

скрати са $(x-a)^{k-1}$, разложити овако:

3.) $$\frac{f(x)}{(x-a)F_1(x)} = \frac{A_k}{x-a} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$$

Можност овог разлагања не зависи очевидно ни уколико од тога, да ли је разломак лево од знака једнакости чист или не. Овде је A_k од x независан број, а $f_1(x)$ цела и рационална функција x-а највише $(m-2)$-ог степена, јер из ове једначине 3) следује:

$$A_k = \frac{f(a)}{F_1(a)} \text{ (№ 152) и}$$

4.) $$f_1(x) = \frac{f(x) - A_k F_1(x)}{x-a}$$

Кад поделимо једначину 1) са $(x-a)^{k-1}$ добићемо:

$$5.)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}F_1(x)}$$

Одавде дакле видимо, да се дати разломак 2) у оном случају, где му је именилац облика под 1), где другим речима једначина $F(x) = 0$ има k корена једнаких броју a, може увек разложити на два разломка, од којих један има за бројиоца сталан број а за имениоца $(x-a)^k$, а други, који је чист разломак, има у имениоцу само $(k-1)$-ви степен чиниоца $(x-a)$.

Са другим разломком десно од знака једнакости у једначини 4) можемо онако исто радити, као и са задатим и т. д. и на тај начин добићемо редом

$$6.)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}F_1(x)} &= \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{k-2}F_1(x)}, \\ \frac{f_2(x)}{(x-a)^{k-2}F_1(x)} &= \frac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}} + \frac{f_3(x)}{(x-a)^{k-3}F_1(x)}, \\ &\;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{f_{k-1}(x)}{(x-a)F_1(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{f_k(x)}{F_1(x)} \end{aligned}\right.$$

Из једначина 5) и 6) добијамо најзад:

$$7.)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{f_k(x)}{F_1(x)}$$

где услед горњег обрасца 4) бројилац и именилац последњег разломка немају заједничког делиоца. Дакле смо доказали истину:

Кад се $(x-a)$ јавља у $F(x)$ k-пута као чинилац али не више пута, онда међу простијим разломцима, на које је задати разломак 2) разложен, биће k разломака, којима су бројиоци стални бројеви, а имениоци сви степени бинома $(x-a)$ почев од првог па до k-ог.

Ако би се $(x-b)$ јављало h пута као чинилац у $F(x)$, па дакле и у имениоцу $F_1(x)$ последњега разломка под 7), онда бисмо на сличан начин могли добити за тај последњи разломак $(h+1)$ разломака. Првих h разломака имали би за бројиоце опет сталне бројеве, а за имениоце све степене бинома $(x-b)$ почев од првог па до h-тог, а $(h+1)$-ви разломак био би чист разломак и т. д.

И овде на са свим сличан начин као и у № 153 може се доказати нарочито, да се за дати разломак може добити, па разлагали по ма којој методи, увек само један и исти низ разломака.

Сад нам још остаје, да покажемо разне методе израчунавања бројилаца простијих разломака. То ћемо учинити у №-и, која долази.

155. *Прва метода.* Кад смо у сваком особеном случају написали једначину 7) у № 154, онда је помножимо са имениоцем $F(x)$, па ћемо добити:

$$1.)\qquad f(x) = F_1(x)\left\{A_k + A_{k-1}(x-a) + \ldots + A_1(x-a)^{k-1}\right\} + f_k(x)(x-a)^k$$

Кад у овој једначини заменимо x са a, дакле бројем, који поништава имениоца од A_k, добијамо:

$$A_k = \frac{f(a)}{F_1(a)}$$

Ако сада A_k у једначини 1) заменимо овом вредношћу, па пребацимо лево:

$$A_k F_1(x)$$

онда ће десна страна бити дељива са $(x-a)$, па због тога и лева страна. Ако дакле поделимо ту нову једначину са $(x-a)$, па после поделе опет ставимо $x = a$, добићемо:

$$A_{k-1} = \frac{\varphi(a)}{F_1(a)},$$

где $\varphi(x)$ значи количник: $f(x) - A_k F_1(x)$ леве стране последње поменуте једначине са $(x-a)$. Ако сад у последњој поменутој једначини заменимо A_{k-1} овом вредношћу, па за тим пребацимо лево:

$$A_{k-1} F_1(x),$$

онда ће после тога једначина бити опет дељива са $(x-a)$. Кад ту деобу извршимо, па опет ставимо $x = a$, добићемо:

$$A_{k-2} = \frac{\psi(a)}{F_1(a)},$$

где $\psi(x)$ значи количник између $\varphi(x) - A_{k-1}F_1(x)$ са $(x-a)$ и т. д.

Друга метода. Кад једначину 7) помножимо и лево и десно са $(x-a)^k$, добићемо:

$$2.)\qquad \frac{f(x)}{F_1(x)} = A_k + A_{k-1}(x-a) + \dots$$
$$+ A_1(x-a)^{k-1} + (x-a)^k \frac{f_k(x)}{F_1(x)}$$

Ако у овој једначини ставимо краткоће ради десно:

$$x - a = z,$$

она се претвара у:

$$3.)\qquad \frac{f(x)}{F_1(x)} = A_k + A_{k-1}z + A_{k-2}z^2 + \dots$$
$$+ A_1 z^{k-1} + z^k \frac{f_k(a+z)}{F_1(a+z)}$$

Али је с друге стране:

$$\frac{f(x)}{F_1(x)} = \frac{f\{a + (x-a)\}}{F_1\{a + (x-a)\}} = \frac{f(a+z)}{F_1(a+z)}$$

или кад бројиоца и имениоца десно развијемо по Taylor-овом обрасцу (№ 8):

$$4.)\qquad \frac{f(x)}{F_1(x)} = \frac{f(a) + zf'(a) + z^2 f''(a) + \dots}{F_1(a) + zF_1'(a) + z^2 F_1''(a) + \dots}$$

где су изводи у бројиоцу и имениоцу десно од знака једнакости *алгебарски* (№ 8).

Сад кад деобу, која је у 4) десно од знака једнакости означена, извршимо, и количник уредимо по растућим степенима z-а, остатци узастопце добивени биће односно z све вишег и вишег степена. Према томе мораће се најзад јавити један остатак, који је односно z k-ог — или вишег — степена, у ком ће случају дотични члан количника бити односно z степена $(k-1)$-ог. Ту ћемо онда при деоби стати. И пошто је већ нађени количник $(k-1)$-ог степена односно z, то ћемо имати:

$$5.)\qquad \frac{f(x)}{F_1(x)} = C_1 + C_2 z^2 + \dots + C_k z^{k-1} + \frac{z^k \varphi(z)}{F_1(a+z)}$$

Из једначина 3) и 5) добијамо по правилу неодређених сачинилаца (№ 78 алгеб. анал.):

$$A_k = C_1,\ A_{k-1} = C_2,\ \ldots\ A_1 = C_k$$

Дакле смо доказали:

Да су бројиоци разломака у обрасцу 7) № 154 k *првих сачинилаца количника, који се добија, кад се* $f(a+z)$ *подели са* $F_1(a+z)$ *и количник уреди по растућим степенима* z-а.

Трећа метода. Кад једначину 7) у № 154 т. ј.:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{f_k(x)}{F_1(x)}$$

помножимо са:

$$F(x) = (x-a)^k F_1(x)$$

добићемо:

$$f(x) = \Big\{A_1(x-a)^{k-1} + A_2(x-a)^{k-2} + \ldots$$

$$+ A_{k-1}(x-a) + A_k\Big\} F_1(x) + (x-a)^k f_k(x).$$

Ова једначина, кад ставимо краткоће ради:

$$6.)\quad \varphi(x) = A_1(x-a)^{k-1} + A_2(x-a)^{k-2} + \ldots$$

$$+ A_{k-1}(x-a) + A_k$$

претвара се у ову:

$$7.)\qquad f(x) = \varphi(x)\, F_1(x) + (x-a)^k f_k(x).$$

Кад функцији $f(x)$ будемо тражили помоћу последње једначине њен први извод, првом изводу опет његов први извод, и тако продужимо и даље, докле најзад нисмо добили и $(k-1)$-ви извод функције $f(x)$, добићемо овај низ једначина:

$$8.)\quad \left\{\begin{aligned} f'(x) &= \varphi(x)\, F_1'(x) + \varphi'(x)\, F_1(x) + \ldots \\ f''(x) &= \varphi(x)\, F_1''(x) + 2\varphi'(x)\, F_1'(x) \\ &\quad + \varphi''(x)\, F_1(x) + \ldots \\ f'''(x) &= \varphi(x) F_1'''(x) + 3\varphi'(x)\, F_1''(x) + 3\varphi''(x)\, F_1'(x) \\ &\quad + \varphi'''(x)\, F_1(x) + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

У једначинама 7) и 8) сменимо x са a, па ћемо добити:

$$f(a) = \varphi(a)\, F_1(a),$$

$$f'(a) = \varphi(a)\, F_1'(a) + \varphi'(a)\, F_1(a),$$

$$f''(a) = \varphi(a)\, F_1''(a) + 2\varphi'(a)\, F_1'(a) + \varphi''(a)\, F_1(a),$$

$$f'''(a) = \varphi(a)\, F_1'''(a) + 3\varphi'(a)\, F_1''(a) + 3\varphi''(a)\, F_1'(a)$$

$$+ \varphi'''(a)\, F_1(a),$$

. . . .

Али је на основу обрасца 6):

$$\varphi(a) = A_k,\ \varphi'(a) = 1!\, A_{k-1},\ \varphi''(a) = 2!\, A_{k-2},$$

$$\varphi'''(a) = 3!\, A_{k-3} \text{ и т. д.}$$

Дакле је најзад:

$$
9.)\quad \left|\begin{aligned}
&f(a) = A_k F_1(a),\\
&f'(a) = A_k F_1'(a) + A_{k-1} F_1(a),\\
&f''(a) = A_k F_1''(a) + 1!\binom{2}{1} A_{k-1} F_1'(a) + 2!\, A_{k-2} F_1(a)\\
&f'''(a) = A_k F_1'''(a) + 1!\binom{3}{1} A_{k-1} F_1''(a)\\
&\qquad + 2!\binom{3}{2} A_{k-2} F_1'(a) + 3!\, A_{k-3} F_1(a),\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.
$$

Прва од ових једначина даје A_k, друга A_{k-1}, трећа A_{k-2} и т. д.

Лако је у осталом увидети, зашто при тражењу узастопних извода функције $f(x)$ нисмо водили никаква рачуна о другом члану десно у једначини 7). То је било за то, што би сви изводи тога члана од првог па до $(k-1)$-ог и онако за $x = a$ ишчезли.

Пример. Да се разложи у простије разломке:

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3 (x+1)^2 (x-2)}$$

Овај разломак може се разложити овако:

$$10.)\quad \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^3 (x+1)^2 (x-2)} = \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} +$$

$$+ \frac{A_1}{(x-1)} + + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{C}{(x-2)}$$

Радимо најпре по првој методи. Из ове једначине следује:

$$11.)\qquad x^2 - x + 1 = A_3(x+1)^2 (x-2)$$

$$+ A_2(x-1)(x+1)^2 (x-2) + A_1(x-1)^2 (x+1)^2 (x-2)$$

$$+ B_2(x-1)^3 (x-2) + B_1(x-1)^3 (x+1)(x-2)$$

$$+ C(x-1)^3 (x+1)^2.$$

За $x = 1$, $x = -1$ и $x = 2$ добијамо редом:

$$A_3 = -\frac{1}{4},\quad B_2 = \frac{1}{8},\quad C = \frac{1}{3}.$$

Сад кад заменимо A_3, B_3 и C овим вредностима у једначину 10) и за тим чланове, у којима су ти сачиниоци, бацимо лево, добићемо, после простог свођаја лево од знака једнакости:

$$- 8x^5 + 5x^4 + 37x^3 - 19x^2 - 29x + 14$$

$$= 24A_2(x-1)(x+1)^2 (x-2) + 24A_1(x-1)^2 (x+1)^2 (x-2)$$

$$+ 24B_1(x-1)^3 (x+1)(x-2).$$

Десна је страна дељива са:

$$(x-1)(x+1)(x-2)$$

дакле то исто мора бити случај и са левом. Кад ту деобу свршимо излази:

$$- 8x^2 - 11x + 7 =$$

$$24A_2(x+1) + 24A_1(x-1)(x+1) + 24B_1(x-1)^2.$$

Из ове једначине за $x = +1$ и $x = -1$ добијамо:

$$A_2 = -\frac{1}{4}, \quad B_1 = \frac{5}{48}.$$

Кад ово у последњу једначину заменимо и за тим први и трећи члан пребацимо лево, добићемо после простог свођаја:

$$-\frac{21}{2}x^2 + \frac{21}{2} = 24\,A_1(x^2-1)$$

или:

$$-7(x^2-1) = 16A_1(x^2-1)$$

одакле следује најзад:

$$A_1 = -\frac{7}{16}$$

И тако је задани разломак:

12.) $$\frac{x^2-x+1}{(x-1)^3\,(x+1)^2\,(x-2)} =$$

$$-\frac{1}{4(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{7}{16(x-1)} + \frac{1}{8(x+1)^2}$$

$$+\frac{5}{48(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)}$$

Тражимо сада бројиоце по другој методи.

Да бисмо израчунали најпре бројиоце A_3, A_2 и A_1, треба узети на ум, да је сада $k = 3$ и $a = 1$ и

$$\frac{f(x)}{F_1(x)} = \frac{x^2-x+1}{(x+1)^2\,(x-2)} = \frac{x^2-x+1}{x^3-3x-2}$$

Ако сад ставимо $x - 1 = z$, добијамо:

$$\frac{f(1+z)}{F_1(1+z)} = \frac{1+z+z^2}{-4+3z^2-z^3}$$

Или кад деобу извршимо дотле, док нисмо добили члан са z^2 у количнику:

$$\frac{f(4+z)}{F_1(1+z)} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}z - \frac{7}{16}z^2 + \frac{(16+25z+7z^2)z^3}{16(-4+3z^2+z^3)}$$

Као што се види, сачиниоци количника јесу доиста вредности сачинилаца A_3, A_2 и A_1.

Кад последњу једначину поделимо лево и десно са z^3 и за тим заменимо z са $(x-1)$, добићемо:

13.) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2-x+1}{(x-1)^3\,(x+1)^2\,(x-2)}$$

$$= -\frac{1}{4(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{7}{16(x-1)} + \frac{7x^2+11x-2}{16(x+1)^2\,(x-2)}$$

И сад остаје да се разложи последњи разломак. Сада је за овај разломак:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{7x^2+11x-2}{16(x+1)^2\,(x-2)}, \quad \frac{f(x)}{F_1(x)} = \frac{7x^2+11x-2}{16(x-2)}$$

Сад је дакле $k = 2$, $a = -1$. Кад у овој једначини ставимо $x + 1 = z$ или $x = z - 1$ добићемо:

$$\frac{f(z-1)}{F_1(z-1)} = \frac{-6-3z+7z^2}{-48+16z}$$

Кад према упуству №-е 155 означену деобу извршимо само дотле, док нисмо добили члан у количнику само са првим степеном z-а, наћи ћемо:

$$\frac{f(z-1)}{F_1(z-1)}=\frac{1}{8}+\frac{5}{48}z+\frac{z^2}{3(-3+z)}.$$

Као што се види, сачиниоци количника јесу вредности бројилаца B_2 и B_1. Сад кад ову једначину поделимо лево и десно са z^2 и затим ставимо $z=x+1$, добићемо:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{7x^2+11x-2}{16(x+1)^2(x-2)}=\frac{1}{8(x+1)^2}+\frac{5}{48(x+1)}$$

$$+\frac{1}{3(x-2)}$$

Кад ово заменимо у 12), добијамо за дати разломак исти низ разломака као и по првој методи.

Радимо најзад и по трећој методи. Сада је:

$$f(x)=x^2-x+1,\ f'(x)=2x-1,\ f''(x)=2$$

$$F_1(x)=(x+1)^2(x-2)=x^3-3x-2,$$

$$F_1'(x)=3x^2-3,\ F_1''(x)=6x,\ F_1'''(x)=6.$$

Одавде опет стављајући $a=1$, ако хоћемо да израчунамо најпре бројиоце A_3, A_2, A_1, добијамо:

$$f(1)=1,\ f'(1)=1,\ f''(1)=2,$$

$$F_1(1)=-4,\ F_1'(1)=0,\ F_1''(1)=6,\ F_1'''(1)=6.$$

И сад из обрасца 8) добијамо:

$$1=-4A_3 \quad \text{дакле} \quad A_3=-\frac{1}{4},$$

$$1=-4A_2 \quad \text{"} \quad A_2=-\frac{1}{4},$$

$$2=6A_3-8A_1 \quad \text{"} \quad A_1=-\frac{7}{16}.$$

Да бисмо изнашли бројиоце B_2 и B_1, треба у обрасцима 8) узети $a=-1$, даље:

$$f(x)=x^2-x+1,\ f'(x)=2x-1,$$

$$F_1(x)=(x-1)^3(x-2)=x^4-5x^3+9x^2-7x+2;$$

$$F_1'(x)=4x^3-15x^2+18x-7$$

и према томе:

$$f(-1)=3,\ f'(-1)=-3,\ F_1(-1)=24,\ F_1'(-1)=-44.$$

И сад помоћу првог и другог обрасца под 8), гдеваља још ставити $k=2$, $A_k=B_2$, $A_{k-1}=B_1$, добијамо:

$$3=24B_2 \quad \text{дакле} \quad B_2=\frac{1}{8};\ -3=-44B_2+24B_1,$$

дакле:

$$B_1=\frac{5}{48}$$

Што се тиче бројиоца C, њега је лакше израчунати помоћу обрасца (№ 152):

$$\frac{f(x)}{F_1(x)}=\frac{x^3-x+1}{(x-1)^3(x+1)^2}$$

стављајући у њему $x = a = 2$ и на тај начин добијамо опет:

$$C = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Случај уображених корена.

156. У предњој №-и 155 нисмо никакве претпоставке чинили односно корена једначине $F(x) = 0$, т. ј. да ли су они сви стварни или да ли међу њима има и уображених. Ако међу коренима има и уображених, онда ће чиниоци, који им одговарају, бити облика

$$(x - \alpha - \beta i)^k$$

и тим чиниоцима одговараће разломци облика:

$$\frac{A_1}{(x - \alpha - \beta i)}, \quad \frac{A_2}{(x - \alpha - \beta i)^2} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

где су бројиоци A уображени бројеви.

Ако претпоставимо да именилац и бројилац датог разломка:

$$1.) \qquad \frac{f(x)}{F(x)}$$

имају *само стварне сачиниоце*, онда се по методи, која иде, могу истиснути уображени разломци, или још боље, могу се они и не уводити у рачун.

Како се ради, кад у случају стварних сачинилаца један спрег уображених корена $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$ припада једначини $F(x) = 0$ само један пут, видели смо у № 153. За то ћемо сада показати, како се ради онда, кад такав један спрег припада једначини $F(x) = 0$ н. пр. k-пута.

Ако се спрег $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ јавља k-пута као спрег корена, онда се и сваки од два корена чиниоца:

$$x - \alpha - \beta i \quad \text{и} \quad x - \alpha + \beta i$$

или што је све једно њихов производ:

$$2.) \qquad (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

мора јавити k-пута као чинилац у $F(x)$, и ми сад тврдимо, *да тада међу разломцима, на које је разломак* 1) *разложен, мора бити k разломака, којима су бројиоци облика:*

$$P + Qi$$

а имениоци сви степени чиниоца 2) *почев од k-ог па до првог.*

Да бисмо то доказали, ставимо:

$$F(x) = \left\{(x - \alpha)^2 + \beta^2\right\}^k F_1(x)$$

где други чинилац десно значи производ корених чинилаца, који постају из осталих корена различних од $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$. За сваку могућу вредност количина P_k и Q_k очевидно вреди једначина;

$$3.) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{\{(x - a)^2 + \beta^2\}^k . F_1(x)} = \frac{P_k x + Q_k}{\{(x - \alpha)^2 + \beta^2\}^k}$$

$$+ \frac{f(x) - (P_k x + Q_k) . F_1(x)}{\{(x - a)^2 + \beta^2\}^k . F_1(x)}.$$

И пошто, као што рекосмо, ова једначина вреди за ма какво P_k и Q_k, то ћемо за те количине узети оне вредности, при којима су:

$$x = \alpha + \beta i,\ x = \alpha - \beta i$$

корени једначине:

$$4.)\qquad f(x) - (P_k x + Q_k).\ F_1(x) = 0$$

која постаје, кад се стави $= 0$ бројилац другог разломка десно од знака једнакости у 3), и за те вредности, које ћемо сад одмах наћи, биће онда:

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2$$

делилац поменутог бројиоца. Из реченога следује, да тражене вредности за P_k и Q_k даје једначина:

$$f(\alpha \pm \beta i) - \left\{P_k(\alpha \pm \beta i) + Q_k\right\}.F_1(\alpha \pm \beta i) = 0.$$

или кад ставимо:

$$f(\alpha \pm \beta i) = A \pm Bi,\ F_1(\alpha \pm \beta i) = C \pm Di:$$

$$(A \pm Bi) - \left\{P_k(\alpha \pm \beta i) + Q_k\right\}.\ (C \pm Di) = 0,$$

Стављајући сад стварни део ове једначине $= 0$ за себе, а за себе опет сачиниоца од i, добијамо даље:

$$5.)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\beta D - \alpha C)\ P_k - CQ_k + A = 0 \\ &(\beta C - \alpha D)\ P_k + DQ_k - B = 0 \end{aligned}\right.$$

Из ових једначина, које су првог степена односно P_k и Q_k, добијамо вредности тих количина. Заједнички именилац

$$\beta(C^2 + D^2)$$

тих вредности не може очевидно бити $= 0$. Јер то би само тако могло бити, ако би први или други чинилац тога имениоца био $= 0$. Али то не може бити, јер кад би $\beta = 0$ било, онда не би било уображених корена. А кад би $C^2 + D^2 = 0$ било, одакле би следовало $C = 0$, $D = 0$ и $C \pm Di = 0$, онда би то значило, да су $x = \alpha + \beta i$ и $x = \alpha - \beta i$ корени једначине $F_1(x) = 0$, а то не може бити, јер смо ми претпоставили, да је сваки од тих бројева само k-пута корен једначини $F(x) = 0$. Према свему томе једначина 5) даће у сваком случају за P_k и Q_k одређене, стварне и коначне вредности.

Замислимо сада, да у једначини 3) P_k и Q_k имају већ вредности добивене решењем једначина 5). Тада је бројилац другог разломка десно од знака једнакости у једначини 3) дељив са $\{(x-a)^2 + \beta^2\}$ и кад то учинимо, онда се једначина 3) претвара у једначину:

$$6.)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{P_k x + Q_k}{\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^k} + \frac{f_1(x)}{\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^{k-1} F_1(x)}$$

где $f_1(x)$ значи количник између $f(x) - (P_k x + Q_k).F_1(x)$ и $\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}$.

Кад образац 6 применимо на његов други разломак десно, добићемо:

$$\frac{f_1(x)}{\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^{k-1} F_1(x)} = \frac{P_{k-1}(x) + Q_{k-1}}{\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^{k-1}}$$

$$+ \frac{f_2(x)}{\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^{k-1} F_1(x)}$$

И кад тако наставимо и даље, видећемо, да ћемо најзад морати добити:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{P_k x+Q_k}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^k}+\frac{P_{k-1}x+Q_{k-1}}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{k-1}}+\dots$$

$$+\frac{P_1x+Q_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{f_k(x)}{F_1(x)}$$

и тиме је горње тврђење оправдано.

Лако је доказати, да је последњи разломак чист и да су му бројилац и именилац односно прости т. ј. да немају заједничког делиоца.

Кад овај резултат доведемо у свезу са оним у № 154, онда смемо изрећи теорему:

Ако је именилац задатог разломка:

$$F(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\dots(x^2+px+q)^k\dots(x^2+rx+s)^n$$

где неки од изложилаца могу бити $=1$, онда се дати разломак може овако разложити:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_1}{(x-a)}$$

$$+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}+\dots+\frac{B_1}{(x-b)}$$

. . . .

$$+\frac{P_kx+Q_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{P_{k-1}x+Q_{k-1}}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\dots+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)}$$

. . . .

$$+\frac{R_nx+S_n}{(x^2+rx+s)^n}+\frac{R_{n-1}x+S_{n-1}}{(x^2+rx+s)^{n-1}}+\dots+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)}$$

Како се израчунавају бројиоци A, B и т. д., т. ј. они, којих имениоци постају из стварних корена једначине $F(x)=0$, то је у прећашњим №-ама показано. А што се тиче количина P, Q, R, S, које се налазе у разломцима, којих имениоци постају из спрегова уображених корена, оне би се могле израчунати по првој и трећој методи №-е 153. Међу тим обично је згодније израчунавати их помоћу методе неодређених сачинилаца.

Пример. Да се разломак:

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2}$$

разложи на простије разломке. Ми ћемо ставити:

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+1)^2}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+1)}$$

Кад помножимо једначину лево и десно са $F(x)$ добићемо:

$$1=A(x+1)(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)^2+(P_2x+Q_2)\,x(x+1)$$

$$+(P_1x+Q_1)\,x(x+1)(x^2+1)$$

За $x=0$ и $x=-1$ добијамо из ове једначине:

$$A=1,\ B=-\frac{1}{4}.$$

Кад заменимо A и B овим вредностима у последњој једначини, за тим пребацимо прва два члана с десна на лево и сведемо добићемо:

$$-3x^5-4x^4-6x^3-8x^3-3x$$

$$=(P_2x+Q_2)\,x(x+1)+(P_1x+Q_1)\,x(x+1)(x^2+1)$$

Десна је страна дељива са $x(x+1)$, дакле мора бити и лева. По свршеној деоби излази:

$$-3x^3-x^2-5x-3=4(P_2x+Q_2)+4(P_1x+Q_1)(x^2+1)$$

или кад развијемо и уредимо десно:

$$-3x^3-x^2-5x-3=4P_1x^3+4Q_1x^2$$
$$+4(P_1+P_2)x+4(Q_1+Q_2)$$

а одавде по правилу неодређених сачинилаца:

$$P_1=-\frac{3}{4}.\quad Q_1=-\frac{1}{4},\quad P_1+P_2=-\frac{5}{4},$$
$$Q_1+Q_2=-\frac{3}{4}$$

и из последњих двеју једначина још:

$$P_2=-\frac{1}{2},\quad Q_2=-\frac{1}{2}$$

Дакле најзад:

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{(x+1)}{2(x^2+1)^2}-\frac{(3x+1)}{4(x^2+1)}.$$

ЧЕТВРТИ ДЕО.

О разликама функција.

157. Кад каква количина u зависи од једне или више промењљивих количина $x, y, z \ldots$ и ми у њојзи пустимо, да те промењљиве добијају различите вредности:

$$x,\ y,\ z\ldots,\ x_1,\ y_1,\ z_1\ldots,\ x_2,\ y_2,\ z_2\ldots \text{ и т. д.}$$

онда ће и функција u добијати различне вредности:

$$1.)\qquad u,\ u_1,\ u_2\ \ldots.$$

Закон, по коме се поступно мењају промењљиве, од којих u зависи, мора бити познат.

Обично се узима, да је размак вредности, које добија свака промењљива, сталан, н. пр. $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle z\ldots$ за поједине промењљиве $x, y, z\ldots$ Ми ћемо то од сад и претпоставити.

Кад са редом 1) радимо онако исто као у № 134, онда први чланови:

$$\triangle u,\ \triangle^2 u,\ \triangle^3 u,\ \ldots$$

узастопних различних редова, који су чланови у опште опет функције од $x, y, z\ldots$ зову се редом прва, друга, трећа ... разлика функције u. Те прве чланове узастопних различних редова треба само знати, јер је тада лако наћи помоћу њих и све остале чланове тих редова. На пример $(n+1)$-ви члан заданог реда 1), као и ма којег различног реда, добићемо, ако само у првом члану дотичнога реда сменимо $x, y, z \ldots$ са $x+n\triangle x, y+n\triangle y, z+n\triangle z \ldots$

Пошто је прва разлика $\triangle u$ функције u разлика између другог и првог члана реда 1), а међу тим се други члан овога добија, кад у првом члану тога реда сменимо $x, y, z \ldots$ са $x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z \ldots$ то можемо казати:

Прва разлика задате функције добија се, кад у њојзи сменимо променљиве $x, y, z \ldots$ са $x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z \ldots$ и кад за тим од тако добивене нове вредности функцијине одузмемо њу саму.

На исти начин добија се очевидно и прва разлика прве разлике т. ј. друга разлика $\triangle^2 u$ задате функције; даље прва разлика друге разлике или трећа разлика $\triangle^3 u$ задате функције и т. д.

Кад у обрасцу 4) №-е 135 сменимо u_n са u, добијамо образац:

$$2.)\quad \triangle^m u = u_m - \binom{m}{1} u_{m+1} + \binom{m}{2} u_{m+2} - \ldots + (-1)^m u,$$

помоћу којег налазимо ма коју разлику задате функције u просто из чланова реда 1), дакле са свим независно од нижих разлика функције.

Исто тако помоћу обрасца 4) у № 136 налазимо као $(n+1)$-ви члан реда 1):

$$3.)\quad u_n = u + \binom{n}{1}\triangle u + \binom{n}{2}\triangle^2 u + \ldots + \triangle^n u,$$

помоћу којег обрасца дакле налазимо вредност функције u, која одговара вредностима $x+n\triangle x, y+n\triangle y, z+n\triangle z \ldots$ променљивих $x, y, z \ldots$ и то налазимо помоћу саме задате функције и њених узастопних разлика.

Диференцовати задату функцију:

$$u = f(x, y, z \ldots)$$

значи тражити јој узастопне разлике, а упуства за то исказана су према ономе, што смо горе говорили, у обрасцима:

$$\triangle u = f(x+\triangle x,\ y+\triangle y,\ z+\triangle z \ldots) - f(x,\ y,\ z \ldots)$$

$$\triangle^{m+1} u = \triangle^m f(x+\triangle x,\ y+\triangle y,\ z+\triangle z \ldots)$$

$$-\triangle^m f(x,\ y,\ z \ldots)$$

Кад се при тражењу узастопних разлика дате функције претпоставља као овде, да се све променљиве, од којих она зависи, мењају у исти мах, онда се оне — разлике — зову *потпуне*, а у противном случају разлике се зову *непотпуне.*

Јасно је по себи, а и врло је лако доказати, да се стални чиниоци функција јављају као чиниоци и њиних разлика, да је дакле у опште:

$$\triangle(Au) = A.\triangle u$$

Такође је врло лако доказати, да кад је дата функција једнака збиру више ма каквих функција, да је тада њина разлика једнака збиру појединих састојака њених. На тај начин тражење разлика полинома своди се на тражење разлика самих монома.

Ми ћемо од сада претпостављати, да имамо посла једино са функцијама једне променљиве. Ако је дакле:

$$u = f(x),$$

онда упуство за добијање њене прве разлике, као и осталих виших разлика њених, исказано је у обрасцима:

$$4.)\quad \begin{cases} \Delta u = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \\ \Delta^{m+1} u = \Delta^{m+1} f(x) = \Delta^{m} f(x+\Delta x) - \Delta^{m} f(x) \end{cases}$$

Образац 2) у овом случају, где је $u = f(x)$, може се написати и овако:

$$5.)\quad \Delta^{m} f(x) = f(x+m\Delta x) - \binom{m}{1} f\left\{x + (m-1)\Delta x\right\}$$

$$+ \binom{m}{2} f\left\{x + (m-2)\Delta x\right\} - \binom{m}{3} f\left\{x + (m-3)\Delta x\right\}$$

$$+ \binom{m}{4} f\left\{\quad + (m-4)\Delta x\right\} - \ldots + (-1)^{m} fx)$$

Исто тако и образац 3) може се сада написати и овако:

$$6.)\quad f(x+n\Delta x) = f(x) + \binom{n}{1}\Delta f(x) + \binom{n}{2}\Delta^{2} f(x) +$$

$$+ \binom{n}{3}\Delta^{3} f(x) + \ldots + \Delta^{n} f(x)$$

158. Ако узмемо као задату функцију:

$$u = ax^{m}$$

где претпостављамо, да је m положно, онда је на основу обрасца:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x):$$

$$\Delta u = a\left\{mx^{m-1}\Delta x + \binom{m}{2} x^{m-2}\overline{\Delta x}^{2} + \ldots + \overline{\Delta x}^{m}\right\}$$

Дакле је, као што се види, степен прве разлике сваког монома за јединицу нижи.

То исто дакле мора вредити и за сваки цели полином, пошто је разлика полинома једнака збиру разлика његових појединих чланова. Из овога следује, да је m-на разлика полинома, који је m-ог степена односно x, стална т. ј. од x независна.

1_0. Узмимо н. пр. полином:

$$1.)\qquad u = ax^{m} + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$

Да бисмо нашли његову m-ну разлику, треба у њему, као и у узастопним његовим разликама водити рачуна само о њиховим првим члановима, јер остали чланови тих полинома и њихових разлика и онако ће отпасти при поступном диференцовању, и према томе неће имати никаква утицаја на крајњи резултат. Треба дакле тражити само m-ну разлику првом члану ax^{m} полинома 1) и та ће разлика бити у исти мах и m-на разлика полинома 1). На тај начин имамо:

$$2.)\qquad max^{m-1}\Delta x$$

као први члан разлике првог полиномовог члана. Даље имамо као први члан разлике израза 2):

$$3.)\qquad m(m-1)\, ax^{m-2}\overline{\Delta x}^{2}$$

Даље као први члан разлике израза 3):

$$4.)\qquad m(m-1)(m-2)\,ax^{m-3}\overline{\Delta x}^{3},\ \text{и т. д.}$$

Настављајући дакле овако и даље, наћићемо најзад:

$$\Delta^{m}u = m(m-1)(m-2)\ldots 3.\,2.\,1.\,a.\,\overline{\Delta x}^{m},$$

а то је m-на разлика полинома 1). Пошто је она стална, то су све остале више разлике $= 0$. Дакле смемо рећи:

Свака цела и рационална функција једне променљиве има само m разлика а више не.

Ако у обрасцу 5) №-е 147 узмемо да је:

$$f(x) = x^{m}$$

а m је цео и положан број, онда је:

$$\left\{x+m\Delta x\right\}^{m} - \binom{m}{1}\left\{x+(m-1)\Delta x\right\}^{m}$$

$$+\binom{m}{2}\left\{x+(m-2)\Delta x\right\}^{m} - \binom{m}{3}\left\{x+(m-3)\Delta x\right\}^{m}+\ldots$$

$$+(-1)^{m}x^{m} = m!\,\overline{\Delta x}^{m}$$

и

$$\left\{x+(m+r)\Delta x\right\}^{m} - \binom{m+r}{1}\left\{x+(m+r-1)\Delta x\right\}^{m}$$

$$+\binom{m+r}{2}\left\{x+(m+r-2)\Delta x\right\}^{m} - \ldots + (-1)^{m+r}x^{m} = 0$$

где је r цео и положан број > 0.

Из последње од двеју једначина дознајемо, да је за свако цело и положно m:

$$m^{m} - \binom{m}{1}(m-1)^{m} + \binom{m}{2}(m-2)^{m} - \binom{m}{3}(m-3)^{m} + \ldots = m!$$

а за свако цело и положно $n > m$:

$$n^{m} - \binom{n}{1}(n-1)^{m} + \binom{n}{2}(n-2)^{m} - \binom{n}{3}(n-3)^{m} + \ldots = 0$$

2°. Разлике факторијела добијају се врло лако, кад је разлика вредности, које променљива x поступно добија, једнака разлици факторијела. Узмимо н. пр. да је:

$$u = [x, \Delta x]^{m}$$

Тада је:

$$\Delta u = [x+\Delta x, \Delta x]^{m} - [x, \Delta x]^{m}$$

Па како је (види науку о комбинацијама страна 95 и доцније):

$$[x+\Delta x, \Delta x]^{m} = [x+\Delta x, \Delta x]^{m-1}(x+m\Delta x)$$

и даље:

$$[x, \Delta x]^{m} = x\,[x+\Delta x, \Delta x]^{m-1}$$

то је онда даље:

$$\Delta u = m\Delta x\,[x+\Delta x, \Delta x]^{m-1}$$

Али је услед претпоследњег обрасца за Δu:

$$\Delta\,[x+\Delta x, \Delta x]^{m-1} = (m-1)\,\Delta x\,[x+2\Delta x, \Delta x]^{m-2}$$

и по томе је:

$$\Delta^2 u = m(m-1)\,\overline{\Delta x}^2\,[x+2\Delta x, \Delta x]^{m-2}$$

И кад на овај лак начин продужимо и даље, наћи ћемо најзад, да је:

$$\Delta^n u = \Delta^n [x, \Delta x]^m = m(m-1)(m-2)\ldots$$

$$\ldots(m-n+1)\,\overline{\Delta x}^n\,[x+n\Delta x, \Delta x]^{m-n}$$

3°. Ако је:

$$u = \frac{1}{[x, \Delta x]^m}$$

онда је:

$$\Delta u = \frac{1}{[x+\Delta x, \Delta x]^m} - \frac{1}{[x, \Delta x]^m}$$

или:

$$\Delta u = \frac{x}{x\,[x+\Delta x, \Delta x]^m} - \frac{x+m\Delta x}{(x+m\Delta x)\,[x, \Delta x]^m}$$

или најзад:

$$\Delta u = \frac{-m\Delta x}{[x, \Delta x]^{m+1}}$$

Одавде добијамо на исти начин даље:

$$\Delta^2 u = \frac{m(m+1)\,\overline{\Delta x}^2}{[x, \Delta x]^{m+2}},$$

$$\Delta^3 u = \frac{-m(m+1)(m+2)\,\overline{\Delta x}^3}{[x, \Delta x]^{m+3}}$$

и у опште:

$$\Delta^n u = (-1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)\,\overline{\Delta x}^n}{[x, \Delta x]^{m+n}}$$

Ако у обрасцима 5) и 6) №-е 157 узмемо да је:

$$f(x) = \frac{1}{[x, \Delta x]^m}$$

добићемо прво:

$$(-1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)\,\Delta x^n}{[x, \Delta x]^{m+n}}$$

$$= \frac{1}{[x+n\Delta x, \Delta x]^m} - \binom{m}{1}\frac{1}{[x+(n-1)\Delta x, \Delta x]^m}$$

$$+\binom{m}{2}\frac{1}{[x+(n-2)\Delta x, \Delta x]^m}$$

$$-\binom{m}{3}\frac{1}{[x+(n-3)\Delta x, \Delta x]^m} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{[x, \Delta x]^m}$$

и друго:

$$\frac{1}{[x+n\Delta x, \Delta x]^m} = \frac{1}{[x, \Delta x]^m} - \binom{n}{1}\frac{m\Delta x}{[x, \Delta x]^{m+1}}$$

$$+\binom{n}{2}\frac{m(m+1)\overline{\Delta x}^2}{[x, \Delta x]^{m+2}} - \binom{n}{3}\frac{m(m+1)(m+2)\overline{\Delta x}^3}{[x, \Delta x]^{m+3}} +$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)\overline{\Delta x}^n}{[x, \Delta x]^{m+n}}$$

4°. Ако је:

$$u = a^x$$

онда је:

$$\Delta u = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x}-1)$$

$$\Delta^2 u = a^x(a^{\Delta x}-1)^2,$$

$$\Delta^3 u = a^x(a^{\Delta x}-1)^3,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\Delta^m u = a^x(a^{\Delta x}-1)^m$$

Ако у обрасцу 5) № 157 узмемо, да је:

$$f(x) = a^x,$$

онда добијамо, пошто лево и десно скратимо са a^x:

$$(a^{\Delta x} - 1) = a^{m\Delta x} - \binom{m}{1} a^{(m-1)\Delta x} + \binom{m}{2} a^{(m-2)\Delta x}$$

$$- \binom{m}{3} a^{(m-3)\Delta x} + \dots .$$

а то ништа друго није, до познати биномни образац.

5°. Ако је:

$$u = log\, x$$

онда је:

$$\triangle u = log(x + \triangle x) - log\, x = log\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right),$$

или кад развијемо по обрасцу 5) №-е 87 алгеб. анализе:

$$\triangle u = M\left\{\frac{\triangle x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^3 - \dots\right\}$$

где је $M = 0{\cdot}43429448 \dots$ модуо Бригове системе.

Да бисмо добили и више разлике, узмимо на ум, да је:

$$log\,(x + \triangle x) = log\, x + log\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)$$

$$log\,(x + 2\triangle x) = log\, x + log\left(1 + \frac{2\triangle x}{x}\right)$$

$$log\,(x + 3\triangle x) = log\, x + log\left(1 + \frac{3\triangle x}{x}\right)$$

Ако развијемо логаритме десно по мало час поменутом обрасцу алг. анал., онда уз припомоћ обрасца 5) у № 157 добијамо:

$$\triangle u = M\left\{\frac{\triangle x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^3 - \dots\right\}$$

$$\triangle^2 u = M\left\{ \quad - \left(\frac{\triangle x}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^3 - \dots\right\}$$

$$\triangle^3 u = M\left\{ \quad 2\left(\frac{\triangle x}{x}\right)^3 - \dots\right\}$$

. . . .

6°. Ако је:

$$u = sin\, x$$

добићемо са свим лако:

$$\triangle u = 2\, sin\frac{\triangle x}{2}\, cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) = 2 sin\frac{\triangle x}{2} sin\left(x + \frac{\triangle x + \pi}{2}\right)$$

$$\triangle^2 u = \left(2\, sin\frac{\triangle x}{2}\right)^2 sin\left(x + 2\,\frac{\triangle x + \pi}{2}\right)$$

. . . .

$$\triangle^m u = \left(2\, sin\frac{\triangle x}{2}\right)^m sin\left(x + m\,\frac{\triangle x + \pi}{2}\right).$$

Ако у обрасцима 5) и 6) у № 157 узмемо да је:

$$f(x) = sin\, x,$$

онда добијамо обрасце:

$$\sin(x+m\Delta x)-\binom{m}{1}\sin\left\{x+(m-1)\Delta x\right\}$$

$$+\binom{m}{2}\sin\left\{x+(m-2)\Delta x\right\}$$

$$-\binom{m}{3}\sin\left\{x+(m-3)\Delta x\right\}+\ldots+(-1)^m\sin x$$

$$=\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^m\sin\left\{x+m\frac{\Delta x+\pi}{2}\right\}$$

и

$$\sin(x+m\Delta x)$$

$$=\sin x+\binom{m}{1}\left\{2\sin\frac{\Delta x}{2}\right\}\sin\left\{x+\frac{\Delta x+\pi}{2}\right\}$$

$$+\binom{m}{2}\left\{2\sin\frac{\Delta x}{2}\right\}^2\sin\left\{x+2\frac{\Delta x+\pi}{2}\right\}$$

$$+\binom{m}{3}\left\{2\sin\frac{\Delta x}{2}\right\}^3\sin\left\{x+3\frac{\Delta x+\pi}{2}\right\}$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+\left\{2\sin\frac{\Delta x}{2}\right\}^m\sin\left\{x+m\frac{\Delta x+\pi}{2}\right\}.$$

7°. На са свим сличан начин налазимо:

$$\Delta^m u=\Delta^m\cos x=\left\{2\sin\frac{\Delta x}{2}\right\}^m\cos\left\{x+m\frac{\Delta x+\pi}{2}\right\},$$

$$\cos(x+m\Delta x)-\binom{m}{1}\cos\left\{x+(m-1)\Delta x\right\}$$

$$+\binom{m}{2}\cos\left\{x+(m-2)\Delta x\right\}-\ldots+(-1)^m\cos x$$

$$=\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^m\cos\left\{x+m\frac{\Delta x+\pi}{2}\right\},$$

$$\cos(x+m\Delta x)$$

$$=\cos x+\binom{m}{1}\left\{2\sin\frac{\Delta x}{2}\right\}\cos\left\{x+\frac{\Delta x+\pi}{2}\right\}$$

$$+\binom{m}{2}\left\{2\sin\frac{\Delta x}{2}\right\}^2\cos\left\{x+2\frac{\Delta x+\pi}{2}\right\}$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+\left\{2\sin\frac{\Delta x}{2}\right\}^m\cos\left\{x+m\frac{\Delta x+\pi}{2}\right\}.$$

159. Помоћу онога, што до сад пређосмо, у стању смо диференцовати сваку функцију.

Узмимо н. пр. да је:

$$1.) \qquad u = \varphi(x) . \psi(x)$$

Тада је:

$$2.) \quad \Delta u = \varphi(x + \Delta x . \psi(x + \Delta x) - \varphi(x) . \psi(x)$$

Али како је:

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)\,, \quad \Delta\psi(x) = \psi(x + \Delta x) - \psi(x),$$

одакле следује:

$$\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + \Delta\varphi(x)\,, \quad \psi(x + \Delta x) = \psi(x) + \Delta\,\psi(x),$$

то онда множењем ових једначина добијамо:

$$\varphi(x + \Delta x) . \psi(x) + \Delta\psi(x) =$$

$$\varphi(x)\,\psi(x) + \psi(x) . \Delta\varphi(x) + \varphi(x)\,\Delta\psi(x) + \Delta\varphi(x) . \Delta\psi(x)$$

И кад ово заменимо у једначину 1), добиһемо:

$$\Delta u = \varphi(x)\,\Delta\psi(x) + \Delta\varphi(x\,\left\{\psi(x) + \Delta\psi(x)\right\}$$

Другу разлику наһи ћемо радеһи исто тако. Она је:

$$\Delta^2 u = \varphi(x)\Delta^2\psi(x) + 2\Delta\varphi(x)\left\{\Delta\psi(x) + \Delta^2\psi(x)\right\}$$

$$+ \Delta^2\varphi(x)\left\{\psi(x) + 2\Delta\psi(x) + \Delta^2\psi(x)\right\}$$

И у опште кад је m ма какав цео број:

$$3.) \quad \Delta^m u = \varphi(x)\Delta^m\psi(x) + m\Delta\varphi(x)\left\{\Delta^{m-1}\psi(x) + \Delta^m\psi(x)\right\}$$

$$+ \binom{m}{2}\Delta^2\varphi(x)\left\{\Delta^{m-2}\psi(x) + 2\Delta^{m-1}\psi(x) + \Delta^m\psi(x)\right\}$$

$$+ \binom{m}{3}\Delta^3\varphi(x)\left\{\Delta^{m-3}\psi(x) + 3\Delta^{m-2}\psi(x)\right.$$

$$\left. + 3\Delta^{m-1}\psi(x) + \Delta^m\psi(x)\right\}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Општи члан деснога реда јесте:

$$\binom{m}{n}\Delta^n\varphi(x)\left\{\Delta^{m-n}\psi(x) + \binom{n}{1}\Delta^{m-n-1}\psi(x) + \binom{n}{2}\Delta^{m-n-2}\psi(x)\right.$$

$$\left. + \binom{n}{3}\Delta^{m-n-3}\psi(x) + \ldots + \Delta^m\psi(x)\right\}.$$

Још можемо овде додати и то, да ако је:

$$u = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

да је дата

$$\Delta u = \frac{\psi(x)\,\Delta\varphi(x) - \varphi(x)\,\Delta\psi(x)}{\psi(x)\left\{\psi(x) + \Delta\psi(x)\right\}}$$

Интегровање функција.

160. У неколико последњих №-а ми смо показали, како се налазе узастопне разлике задате функције. Сад прелазимо на обрнути посао, при коме се тражи непозната функција, кад нам је позната ма која разлика њена: прва, друга и т. д. m-на.

Ако је функција $f(x)$ m-на разлика непознате функције, онда се ова зове m-ни интеграл функције $f(x)$ и означава се са $\Sigma^m f(x)$.

Ако је сад $\varphi(x)$ m-ни интеграл функције $f(x)$, дакле она функција, којој је $f(x)$ m-на разлика, онда је:

1.) $$\Sigma^m f(x) = \Sigma^m \left\{\Delta^m \varphi(x)\right\} = \varphi(x)$$

и обратно:

2.) $$\Delta^m \varphi(x) = \Delta^m \left\{\Sigma^m f(x)\right\} = f(x)$$

Отуда видимо, да се радње символима;

$$\Sigma^m \quad \text{и} \quad \Delta^m$$

означене и једна за другом извршене узајамно паралишу.

Пошто је m-ној разлици функције $\varphi(x)$ $(m-1)$-ва разлика те функције први интеграл, $(m-2)$-га разлика те функције други интеграл, $(m-3)$-ћа разлика исте функције трећи интеграл и т. д., то онда вреде ове једначине:

3.) $$\begin{cases} \Sigma \left\{\Delta^m \varphi(x)\right\} = \Delta^{m-1} \varphi(x) \\ \Sigma^2 \left\{\Delta^m \varphi(x)\right\} = \Delta^{m-2} \varphi(x) \\ \Sigma^3 \left\{\Delta^m \varphi(x)\right\} = \Delta^{m-3} \varphi(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Sigma^k \left\{\Delta^m \varphi(x)\right\} = \Delta^{m-k} \varphi(x) \end{cases}$$

За $k = m$ следује из ове последње једначине:

$$\Sigma^m \left\{\Delta^m \varphi(x)\right\} = \varphi(x) = \Delta^0 \varphi(x)$$

што је по себи јасно.

Ако у последњој једначини под 3) ставимо:

$$k = m + 1, \ m + 2, \ . \ . \ . \ (m+k)$$

добићемо:

$$\Sigma^{m+1} \left\{\Delta^m \varphi(x)\right\} = \Sigma \ \varphi(x) = \Delta^{-1} \varphi(x),$$

$$\Sigma^{m+2} \left\{\Delta^m \varphi(x)\right\} = \Sigma^2 \varphi(x) = \Delta^{-2} \varphi(x),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\Sigma^{m+k} \left\{\Delta^m \varphi(x)\right\} = \Sigma^k \varphi(x) = \Delta^{-k} \varphi(x).$$

Одавде видимо, да символи Σ^m и $\triangle^{-m}$ показују исту радњу. Одавде опет следује, да се из израза за $\triangle^m\varphi(x)$ добија израз за $\Sigma^m\varphi(x)$, кад у првом изразу сменимо свуда m са $-m$.

На тај лак начин добијамо н. пр. из обрасца 5) у № 107 овај:

$$\Sigma^m f(x) = f(x - m\triangle x) + \binom{m}{1} f\left\{x - (m+1)\triangle x\right\}$$

$$+ \binom{m+1}{2} f\left\{x - (m+2)\triangle x\right\}$$

$$+ \binom{m+2}{3} f\left\{x - (m+3)\triangle x\right\}$$

$$+ \binom{m+3}{4} f\left\{x - (m+4)\triangle x\right\} + \dots\dots$$

$$\Sigma^m \left\{\varphi(x).\ \psi(x)\right\}$$

$$= \varphi(x)\ \Sigma^m\psi(x) - m\triangle\varphi(x)\left\{\Sigma^{m+1}\psi(x) + \Sigma^m\psi(x)\right\}$$

$$+ \binom{m+1}{2}\triangle^2\varphi(x)\left\{\Sigma^{m+2}\psi(x) + 2\Sigma^{m+1}\psi(x) + \Sigma^m\psi(x)\right\}$$

$$- \binom{m+2}{3}\triangle^3\varphi(x)\left\{\Sigma^{m+3}\psi(x) + 3\Sigma^{m+2}\psi(x)\right.$$

$$\left. + 3\Sigma^{m+1}\psi(x) + \Sigma^m\psi(x)\right\}$$

$$+ \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

161. Интегровати дату функцију значи тражити јој интеграл, т. ј. ону функцију, из које је она постала диференцовањем. Но треба приметити, да је истина увек могуће наћи датој функцији ма коју разлику њену, али није и обрнуто увек могуће наћи датој функцији њен интеграл у облику израза са коначним бројем чланова.

Пре свега ми ћемо приметити, да је интеграл збира више функција једнак збиру интеграла ових последњих.

Тако је н. пр.

$$\Sigma(ax^m + bx^n + cx + d) = \Sigma ax^m + \Sigma bx^n + \Sigma cx + \Sigma d$$

Такође је лако увидети и то, да се стални чинилац увек може бацити пред знак Σ, да је дакле:

$$\Sigma Af(x) = A.\Sigma f(x),$$

који је образац непосредна последица овог:

$$\triangle Af(x) = A\triangle f(x)$$

Из овога, што до сада рекосмо, следује, да се интегровање сваке целе и рационалне функције x-а своди у последњој линији на интегровање количине x^m, где је m цео и положан број. И за то ће нам бити сад прва брига, да тој количини тражимо интеграл.

Из треће једначине у почетку № 158 добијамо за $a = 1$:

$$\triangle(x^m) = mx^{m-1}\triangle x + \binom{m}{2} x^{m-2}\overline{\triangle x}^2$$

$$+ \binom{m}{3} x^{m-3}\overline{\triangle x}^3 + \ . \ . \ . \ . \ .$$

Кад интегрујемо лево и десно добићемо:

$$x^m = m\Delta x\,\Sigma x^{m-1} + \binom{m}{2}\overline{\Delta x}^2\,\Sigma x^{m-2}$$
$$+\binom{m}{3}\overline{\Delta x}^3\,\Sigma x^{m-3} + \dots\dots$$

Кад у овој једначини сменимо m са $(m+1)$, па је за тим решимо односно Σx^m, добићемо:

$$1.)\quad \Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \left\{\frac{1}{2}\,m\Delta x\,\Sigma x^{m-1}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\binom{m}{2}\overline{\Delta x}^2\,\Sigma x^{m-2} + \dots + \frac{1}{m+1}\,\overline{\Delta x}^m\,\Sigma x^0\right\}$$

Овај образац своди интегровање количине x^m на интегровање количина x^{m-1}, x^{m-2} и т. д. Кад у њој ставимо редом $m = 0, 1, 2, 3, 4,$ и т. д. и у сваком добивеном изразу заменимо оне, које смо нашли пре њега, добићемо:

$$\Sigma\, 1 = \frac{x}{\Delta x},$$

$$\Sigma x = \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\Delta x} - \frac{1}{2}\,x$$

$$\Sigma\, x^2 = \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{\Delta x} - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x\Delta x$$

$$\Sigma\, x^3 = \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{\Delta x} - \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^2\Delta x$$

$$\Sigma\, x^4 = \frac{1}{5}\,\frac{x^5}{\Delta x} - \frac{1}{2}\,x^4 + \frac{1}{3}\,x^3\Delta x - \frac{1}{30}\,x\overline{\Delta x}^3$$

$$\Sigma\, x^5 = \frac{1}{6}\,\frac{x^6}{\Delta x} - \frac{1}{2}\,x^5 + \frac{5}{12}\,x^4\Delta x - \frac{1}{12}\,x^2\overline{\Delta x}^3$$

$$\Sigma\, x^6 = \frac{1}{7}\,\frac{x^7}{\Delta x} - \frac{1}{2}\,x^6 + \frac{1}{2}\,x^5\Delta x - \frac{1}{6}\,x^3\overline{\Delta x}^3 + \frac{1}{42}\,x\overline{\Delta x}^5$$

и т. д.

Тако сад можемо помоћу ових образаца наћи интеграл н. пр. ове функције:

$$(2x+a)\,\Delta x + \overline{\Delta x}^2$$

$$\Sigma\,(2x\Delta x + a\Delta x + \overline{\Delta x}^2) = \Sigma\, 2x\Delta x + \Sigma\, a\Delta x + \Sigma\overline{\Delta x}^2.$$

Али је услед образаца 2):

$$\Sigma\, 2x\Delta x = 2\Delta x\,\Sigma\, x = 2\Delta x\left\{\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\Delta x} - \frac{x}{2}\right\} = x^2 - x\Delta x$$

$$\Sigma\, a\Delta x \;= a\Delta x\,\Sigma\, 1 = a\Delta x\,\frac{x}{\Delta x} = ax$$

$$\Sigma\,\overline{\Delta x}^2 \;= \overline{\Delta x}^2\,\Sigma\, 1 = \overline{\Delta x}^2\,\frac{x}{\Delta x} = x\Delta x$$

Дакле је:

$$\Sigma\,(2x\Delta x + a\Delta x + \overline{\Delta x}^2) = x^2 + ax.$$

Како при диференцовању функција њини стални чланови отпадају, то онда одатле следује, да при сваком поједином интегровању ваља ради веће општности додати нађеном резултату једну сталну количину, која остаје неодређена све дотле, докле се из природе самога задатка не сазна права вредност њена. Те сталне количине обично се означавају са C.

162. Образац 1) предње №-е јесте повратног облика, јер помоћу њега сазнајемо интеграл од x^m, тек пошто смо већ нашли интеграле количина x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3} и т. д. Треба дакле да нађемо и независни образац за Σx^m, помоћу којега бисмо такав интеграл у свакој особеној прилици могли непосредно изнаћи.

Један само поглед на обрасце 2) у предњој №-и даје нам права, да смемо написати:

$$1.)\qquad \Sigma x^m = ax^{m+1} + bx^m + cx^{m-1} + dx^{m-2} + \ldots$$

јер су сви поменути обрасци очевидно тога облика.

Кад у овој једначини узмемо разлике лево и десно добићемо:

$$x^m = a(m+1)\,\Delta x . x^m + a\binom{m+1}{2}\overline{\Delta x}^2\, x^{m-1}$$

$$+ a\binom{m+1}{3}\overline{\Delta x}^3\, x^{m-2} + \text{ и т. д.}$$

$$+ b\binom{m}{1}\Delta x . x^{m-1} + b\binom{m}{2}\overline{\Delta x}^2\, x^{m-2} + \text{ и т. д.}$$

$$+ c\binom{m-1}{1}\Delta x . x^{m-2} + \text{ и т. д.}$$

$$+ \text{ и т. д.}$$

Одавде добијамо даље:

$$0 = \left\{a(m+1)\Delta x - 1\right\} x^m + \left\{a\binom{m+1}{2}\overline{\Delta x}^2 + bm\Delta x\right\} x^{m-1}$$

$$+ \left\{a\binom{m+1}{3}\overline{\Delta x}^3 + b\binom{m}{2}\overline{\Delta x}^2 + c(m-1)\Delta x\right\} x^{m-2}$$

$$+ \left\{a\binom{m+1}{4}\overline{\Delta x}^4 + b\binom{m}{3}\overline{\Delta x}^3 + c\binom{m-1}{2}\overline{\Delta x}^2\right.$$

$$\left. + d(m-2)\Delta x\right\} x^{m-3}$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Пошто, на основу теореме о неодређеним сачиниоцима, ова једначина може само тако вредити, ако су сачиниоци узастопних степена од x сваки за се $= 0$, то онда добијамо следећи низ једначина, из којих можемо поступно израчунати сачиниоце: a, b, c . . . једначине 1).

$$a = \frac{1}{(m+1)\Delta x}$$

$$b = -\frac{1}{2}\,a(m+1)\,\Delta x = -\frac{1}{2}$$

$$c = -\frac{1}{6}\,a(m+1)\,m\overline{\Delta x}^2 - \frac{1}{2}\,bm\Delta x$$

$$d = -\frac{1}{24}\,a(m+1)\,m(m-1)\,\overline{\Delta x}^3 - \frac{1}{6}\,bm(m-1)\,\Delta x^2$$

$$-\frac{1}{2}\,c(m-1)\,\Delta x$$

и т. д.

Ако 12 првих сачинилаца израчунамо и нађене вредности заменимо у једначину 1), добићемо:

$$2.)\quad \Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{1}{2}x^m + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\binom{m}{1}x^{m-1}\Delta x$$

$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{4}\binom{m}{3}x^{m-3}\Delta x^3 + \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{6}\binom{m}{5}x^{m-5}\overline{\Delta x}^5$$

$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{8}\binom{m}{7}x^{m-7}\overline{\Delta x}^7 + \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{10}\binom{m}{9}x^{m-9}\overline{\Delta x}^9$$

$$-\frac{691}{2730}\cdot\frac{1}{12}\binom{m}{11}x^{m-11}\overline{\Delta x}^{11} + \dots$$

У сачиниоцима овог обрасца јављају се као што видимо Bernouilli-јеви бројеви: B_1, B_3, B_5 и т. д. на које смо наишли у № 103 алгебарске анализе, где смо у истим показали и начин, како се они израчунавају. Правилност, која се у обрасцу 2) јасно огледа, пашће још боље у очи, ако у том обрасцу поменуте Bernouilli-јеве бројеве означимо са B_1, B_3, B_5 .... Тада тај образац изгледа овако:

$$2'.)\quad \Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}B_1\binom{m}{1}x^{m-1}\Delta x$$

$$-\frac{1}{4}B_3\binom{m}{3}x^{m-3}\overline{\Delta x}^3 + \frac{1}{6}B_5\binom{m}{5}x^{m-5}\overline{\Delta x}^5$$

$$-\frac{1}{8}B_7\binom{m}{7}x^{m-7}\overline{\Delta x}^7 + \frac{1}{10}B_9\binom{m}{9}x^{m-9}\overline{\Delta x}^9$$

$$-\frac{1}{12}B_{11}\binom{m}{11}x^{m-11}\overline{\Delta x}^{11} + \dots$$

163. Обрасце за интеграле факторијела, разломака са факторијелним имениоцима, изложилачних и тригонометријских функција добијамо лако из образаца за разлике таквих функција.

1°. У № 158 под 2°, ми смо нашли да је:

$$1.)\quad \Delta[x, \Delta x]^m = m\Delta x\,[x+\Delta x, \Delta x]^{m-1}$$

Интегровањем обеју страна добијамо:

$$[x, \Delta x]^m = m\Delta x\,\Sigma[x+\Delta x, \Delta x]^{m-1}$$

а одавде:

$$\Sigma\,[x+\Delta x, \Delta x]^{m-1} = \frac{[x, \Delta x]^m}{m\Delta x},$$

или кад сменимо m са $m+1$, а x са $x-\Delta x$:

$$2.)\quad \Sigma[x, \Delta x]^m = \frac{[x-\Delta x, \Delta x]^{m+1}}{(m+1)\,\Delta x}$$

Но ми можемо помоћу примедбе, коју смо учинили на крају №-е 160, наћи одмах n-ти интеграл факторијела, па онда из тога интеграла први и ма који доцнији интеграл.

На основу №-е 158, 2° имамо:

$$3.)\quad \Delta^n[x, \Delta x]^m = [m, -1]^n\,[x+n\Delta x, \Delta x]^{m-n}$$

Према поменутој примедби №-е 160 јесте:

$$\Sigma^n[x, \Delta x]^m = [m, -1]^{-n}\,[x-n\Delta x, \Delta x]^{m+n}\,\overline{\Delta x}^{-n}$$

Или пошто овде применимо образац 7) или 8) у № 63 науке о факторијелима (види науку о комбинацијама) н. пр. последњи:

4.) $$\Sigma^n[x, \triangle x]^m = \frac{1}{[m+1, 1]^n \overline{\triangle x}^n}[x - n\triangle x, \triangle x]^{m+n}$$

Одавде за $n = 1$ добијамо горњи образац 2), пошто је $[m+1, 1]^1 = (m+1)$.

2°. У №-и 158 под 3° нашли смо:

$$\triangle\left\{\frac{1}{[x, \triangle x]^m}\right\} = \frac{-m\triangle x}{[x, \triangle x]^{m+1}}$$

Одавде пак, кад интегрујемо лево и десно, добићемо:

$$\frac{1}{[x, \triangle x]^m} = -m\triangle x\, \Sigma \frac{1}{[x, \triangle x]^{m+1}}.$$

Кад у овој једначини сменимо m са $m-1$ и за тим из нове једначине израчунамо интеграл, добићемо:

$$\Sigma \frac{1}{[x, \triangle x]^m} = \frac{-1}{(m-1)\triangle x[x, \triangle x]^{m-1}}$$

У № 158 под 3° нашли смо такође:

$$\triangle^n\left\{\frac{1}{[x, \triangle x]^m}\right\} = (-1)^n \frac{[m, 1]^n \overline{\triangle x}^n}{[x, \triangle x]^{m+n}}$$

Одавде по примедби у № 160:

$$\Sigma^n\left\{\frac{1}{[x, \triangle x]^m}\right\} = (-1)^n \frac{[m, 1]^{-n}}{\overline{\triangle x}^n [x, \triangle x]^{m-n}}$$

или због:

$$[m, 1]^{-n} = \frac{1}{[m-1, -1]^n} = \frac{1}{[m-n, 1]^n}:$$

$$\Sigma^n\left\{\frac{1}{[x, \triangle x]^m}\right\} = \frac{(-1)^n}{[m-1, -1]^n \overline{\triangle x}^n [x, \triangle x]^{m-n}}$$

Одавде за $n = 1$ добијамо горњи образац за први интеграл.

3°. У №-и 158 под 4° нашли смо да је:

$$\triangle a^x = a^x\left\{a^{\Delta x} - 1\right\}$$

Одавде добијамо интегрујући лево и десно и по том делећи са $(a^{\Delta x} - 1)$:

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^{\Delta x} - 1}$$

Исто тако налазимо да је и:

$$\Sigma^m a^x = \frac{a^x}{[a^{\Delta x} - 1]^m}.$$

4°. У № 158 под 6° нашли смо:

$$\triangle \sin x = 2 \sin\frac{\triangle x}{2} \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)$$

Одавде добијамо:

$$\cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) = \frac{\triangle \sin x}{2 \sin\frac{\triangle x}{2}}$$

Интегрујући лево и десно и узимајући на ум да је $2\,sin\frac{\Delta x}{2}$ стална количина, добићемо;

$$\Sigma cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\frac{x}{2\,sin\frac{\Delta x}{2}},$$

или кад сменимо x са $x-\frac{\Delta x}{2}$:

$$\Sigma cos\,x=\frac{sin\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)}{2\,sin\frac{1}{2}\Delta x}$$

Из познате нам разлике количине $cos\,x$ налазимо на исти начин:

$$\Sigma sin\,x=-\frac{cos\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)}{2\,sin\frac{1}{2}\Delta x}$$

Такође са свим лако а на основу познате примедбе у № 160 добијамо из образаца:

$$\Delta^m sin\,x=\left(2\,sin\frac{\Delta x}{2}\right)^m sin\left(x+m\frac{\Delta x+\pi}{2}\right)$$

$$\Delta^m cos\,x=\left(2\,sin\frac{\Delta x}{2}\right)^m cos\left(x+m\frac{\Delta x+\pi}{2}\right)$$

ове обрасце:

$$\Sigma^m sin\,x=\frac{sin\left(x-m\frac{\Delta x+\pi}{2}\right)}{\left(2\,sin\frac{\Delta x}{2}\right)^m}$$

$$\Sigma^m cos=\frac{cos\left(x-m\frac{\Delta x+\pi}{2}\right)}{\left(2\,sin\frac{\Delta x}{2}\right)^m}$$

* Примедба. Ми при интегровању функција у овој №-и нисмо водили рачуна о неодређеним сталним количинама, али у свакој особеној прилици треба то чинити. У осталом није тешко увидети, да се у изразу m-ог интеграла ма какве функције морају налазити m таквих сталних количина, којих се вредности, као што смо то већ једном рекли, дознају из услова самог задатка.

Тражење збирних образаца (сумирање) редовима.

164. Узмимо нека је $f(x)$ дата функција. Тада је:

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$$

дакле:

$$f(x)=\Sigma f(x+\Delta x)-\Sigma f(x)$$

$$f(x+\Delta x)=\Sigma f(x+2\Delta x)-\Sigma f(x+\Delta x)$$

$$f(x+2\Delta x)=\Sigma f(x+3\Delta x)-\Sigma f(x+2\Delta x)$$

. . . .

$$f\{x+(n-1)\Delta x\}=\Sigma f(x+n\Delta x)-\Sigma f\{x+(n-1)\Delta x\}$$

Сабирањем ових једначина добијамо:

1.) $f(x)+f(x+\Delta x)+f(x+2\Delta x)+\ldots+f\{x+(n-1)\Delta x\}$

$$=\Sigma f(x+n\Delta x)-\Sigma f(x)$$

Помоћу овог обрасца у стању смо сумирати редове, којих чланове добијамо замењујући x у задатој функцији са x, $x+\triangle x$, $x+2\triangle x$, . . . $x+(n-1)\triangle x$ и то наравно увек само онда, кад смо помоћу досадањих упустава у стању наћи интеграл функције. *О додавању неодређене сталне количине не може очевидно бити говора, пошто би она при одузимању и онако отпала.*

И сад ћемо ово да применимо на сумирање неколико редова.

1°. Узмимо, да се тражи збир реда:

$$2.)\quad S_n = [x, \triangle x]^m + [x+\triangle x, \triangle x]^m + [x+2\triangle x, \triangle x]^m + \dots$$

$$+ [x+(n-1)\triangle x, \triangle x]^m$$

Овде је дакле:

$$f(x) = [x\ \triangle x]^m, \text{ а } f(x+n\triangle x) = [x+n\triangle x, \triangle x]^m$$

На основу обрасца 9) у №-и 103 јесте:

$$\Sigma\, [x, \triangle x]^m = \frac{[x-\triangle x, \triangle x]^{m+1}}{(m+1)\triangle x}$$

дакле и:

$$\Sigma\, [x+n\triangle x, \triangle x]^m = \frac{[x+(n-1)\triangle x, \triangle x]^{m+1}}{(m+1)\triangle x}$$

Према томе је збир горњега реда 2):

$$2.)\quad S_n = \frac{[x+(n-1)\triangle x, \triangle x]^{m+1} - [x-\triangle x, \triangle x]^{m+1}}{(m+1)\triangle x}$$

за $x=1$ и $\triangle x = 1$ горњи се ред претвара у:

$$[1, 1]^m + [2, 1]^m + [3, 1]^m + \dots + [n, 1]^m =$$

$$1.2.3\dots m + 2.3\dots(m+1) + \dots$$

$$+ n(n+1)\dots(n+m-1)$$

Збир овога реда јесте дакле по обрасцу 3):

$$S_n = \frac{[n, 1]^{m+1} - [0, 1]^{m+1}}{m+1} = \frac{[n, 1]^{m+1}}{m+1}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{m+1}$$

Кад поделимо последњи ред, као и његов нађени збир, са његовим првим чланом $1.2.3.\dots m$, онда добијамо нов ред:

$$4.)\quad 1 + \frac{m+1}{1} + \frac{(m+1)(m+2)}{1.\ 2} + \dots$$

$$+ \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{1.\ 2.\ \dots\ m}$$

$$= 1 + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \binom{m+3}{3} + \dots + \binom{m+n-1}{m}$$

и његов збирни образац:

$$5.)\quad S_n = \frac{n(n+1)\dots(n+m)}{1.\ 2.\ 3.\dots(m+1)} = \binom{m+n}{m+1}$$

Из општег реда 4) постају редови фигурних бројева за $m = 1, 2, 3, 4, \dots$, а збирни обрасци тих редова добијају се помоћу истих замена из обрасца 5). Тако н. пр.

за $m = 3$ добијамо фигурни ред: $1 + 4 + 10 + \ldots + \binom{n+2}{3}$, чији је збирни образац:

$$S_n = \binom{n+3}{4} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}$$

3°. Узмимо, да се тражи збир реда:

$$S_n = \frac{1}{[x, \triangle x]^m} + \frac{1}{[x+\triangle x, \triangle x]^m} + \frac{1}{[x+2\triangle x, \triangle x]^m} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{[x+(n-1)\triangle x, \triangle x]^m}$$

На основу № 136, 2° имамо:

$$\Sigma \frac{1}{[x, \triangle x]^m} = \frac{-1}{(m-1)\triangle x[x, \triangle x]^{m-1}}$$

дакле и

$$\Sigma \frac{1}{[x+n\triangle x, \triangle x]^m} = \frac{-1}{(m-1)\triangle x[x+n\triangle x, \triangle x]^{m-1}}$$

Према томе је дакле сада:

$$S_n = \frac{-1}{(m-1)\triangle x[x+n\triangle x, \triangle x]^{m-1}} - \frac{-1}{(m-1)\triangle x[x, \triangle x]^{m-1}}$$

Одавде за н. пр. $x = 1$ и $\triangle x = 1$ налазимо:

$$\frac{1}{[1, 1]^m} + \frac{1}{[2, 1]^m} + \frac{1}{[3, 1]^m} + \ldots + \frac{1}{[n, 1]^m} =$$

$$= \frac{-1}{(m-1)[n+1, 1]^{m-1}} + \ldots + \frac{-1}{(m-1)[1, 1]^{m-1}}$$

Или ако факторијеле заменимо вредностима:

6.) $$\frac{1}{1.2.3 \ldots m} + \frac{1}{2.3.4 \ldots (m+1)} + \frac{1}{3.4.5. \ldots (m+2)} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n(n+1) \ldots (n+m-1)}$$

$$= \frac{-1}{(m-1)(n+1)(n+2) \ldots (n+m-1)}$$

$$- \frac{-1}{(m-1)\,1.\,2.\,3 \ldots (m-1)}$$

Ако узмемо $n = \infty$, онда овај ред постаје безконачан и његов је збир:

$$S = \frac{1}{(m-1)(m-1)!}$$

За различне целе и положне вредности m-а добићемо одавде различне особене редове и њихове збирове. Тако н. пр. за $m = 2$ јесте:

$$\frac{1}{1.\,2} + \frac{1}{2.\,3} + \frac{1}{3.\,4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{(n+1)} + 1 = \frac{n}{n+1}$$

Одавде за $n = \infty$:

$$\frac{1}{1.\,2} + \frac{1}{2.\,3} + \frac{1}{3.\,4} + \ldots = 1$$

Исто је тако за $m = 3$:

$$\frac{1}{1.\,2.\,3} + \frac{1}{2.\,3.\,4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

а одавде опет за $n = \infty$:

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots = \frac{1}{4} \text{ и т. д.}$$

Кад једначину 6) поделимо са првим чланом на њеној левој страни, добићемо образац, помоћу којег се налазе збирови редова, којима су бројиоци јединице, а фигурни бројеви имениоци. Тај је образац дакле:

$$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{\binom{m+2}{2}} + \ldots + \frac{1}{\binom{n+m-1}{m}}$$

$$= \frac{m}{m-1}\left\{1 - \frac{1}{\binom{n+m-1}{m-1}}\right\}.$$

Из њега добијамо дакле за $m = 2, 3, 4 \ldots$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} = 2\left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{\binom{n+2}{3}} = \frac{3}{2}\left\{1 - \frac{1}{\binom{n+2}{2}}\right\}$$

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{\binom{n+3}{4}} = \frac{4}{3}\left\{1 - \frac{1}{\binom{n+3}{3}}\right\}$$

и т. д.

Кад у овим обрасцима узмемо $n = \infty$, онда се редови претварају у бесконачне и њихови су збирови редом:

$$\frac{m}{m-1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \text{и т. д.}$$

165. У овој №-и тражићемо збирне обрасце за још један низ редова.

На основу обрасца 1) у № 164 јесте:

$$1^\circ.\ S_n = x + (x+\triangle x) + (x+2\triangle x) + \ldots + \{x+(n-1)\triangle x\}$$

$$= \Sigma(x+n\triangle x) - \Sigma(x),$$

дакле услед образаца 2) у № 161:

$$S_n = \frac{(x+n\triangle x)^2}{2\triangle x} - \frac{1}{2}(x+n\triangle x) - \frac{x^2}{2\triangle x} + \frac{1}{2}x.$$

$$2^\circ.\ S_n = x^2 + (x+\triangle x)^2 + (x+2\triangle x)^2 + \ldots + \{x+(n-1)\triangle x\}^2$$

$$= \Sigma(x+n\triangle x)^2 - \Sigma x^2,$$

дакле услед образаца 2) у № 161:

$$S_n = \frac{(x+n\triangle x)^3}{3\triangle x} - \frac{1}{2}(x+n\triangle x)^2 + \frac{1}{6}(x+n\triangle x)\triangle x$$

$$- \frac{x^3}{3\triangle x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x\triangle x.$$

$$3^\circ.\ S_n = x^3 + (x+\triangle x)^3 + (x+2\triangle x)^3 + \ldots + \{x+(n-1)\triangle x\}^3$$

$$= \Sigma(x+n\triangle x)^3 - \Sigma x^3$$

дакле услед образаца 2) у № 161:

$$S_n = \frac{(x+n\triangle x)^4}{4\triangle x} - \frac{1}{2}(x+n\triangle x)^3 + \frac{1}{4}(x+n\triangle x)^2\triangle x$$

$$-\frac{x^4}{4\triangle x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2\triangle x$$

и т. д. и т. д.

Кад у обрасцима 1°, 2°, 3° и т. д. ставимо $x = 1$ и $\triangle x = 1$, добијамо обирне збрасце за редове, који постају из првих, других итд. степена природних бројева: 1, 2, 3, 4, итд. Исто тако за $x = 1$ а $\triangle x = 2$ добијамо збирне обрасце редовима, којима су чланови први, други, трећи и т. д. степени бројева 1, 3, 5, 7 и т. д. и т. д.

4°. На основу обрасца 1) у № 161 јесте:

$$S_n = \sin x + \sin(x+\triangle x) + \ldots + \sin\{x+(n-1)\triangle x\}$$

$$= \Sigma(x+n\triangle x) - \Sigma \sin x$$

Дакле услед обрасца под 4° у № 163:

1.) $\sin x + \sin(x+\triangle x) + \sin(x+2\triangle x) + \ldots$

$$+ \sin\{x+(n-1)\triangle x\}$$

$$= \frac{-\cos\left\{x+\left(n-\frac{1}{2}\right)\triangle x\right\} + \cos\left(x-\frac{1}{2}\triangle x\right)}{2\sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

$$= \frac{\sin\left\{x+\frac{1}{2}(n-1)\triangle x)\right\}\sin\frac{1}{2}n\triangle x}{\sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

На сличан начин добијамо:

2.) $\cos x + \cos(x+\triangle x) + \cos(x+2\triangle x) + \ldots$

$$+\cos\left\{x+(n-1)\triangle x\right\}$$

$$= \frac{\cos\left\{x+\frac{1}{2}(n-1)\triangle x\right\}\sin\frac{1}{2}n\triangle x}{\sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

Обрасци 1) и 2) истоветни су са обрасцима 24) и 25) у № 41 тригонометрије и 8) и 9) у № 127 алгеб. анализе.

Из образаца 1) и 2) можемо добити неколико интересних нових образаца. Тако, ако је m цео и положан број, добијамо из 1) за:

$$x = \frac{\pi}{2m},\ \triangle x = \frac{\pi}{m},\ n = m$$

$$\sin\frac{\pi}{2m} + \sin\frac{3\pi}{2m} + \ldots + \sin\frac{(2m-1)\pi}{2m} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2m}}$$

Исто тако за $x = \frac{1}{2}\triangle x = \frac{\pi}{2m+1},\ n = m$:

$$\sin\frac{\pi}{2m+1} + \sin\frac{3\pi}{2m+1} + \ldots$$

$$+\sin\frac{(2m-1)\pi}{2m+1} = \frac{\sin^2\frac{m\pi}{2m+1}}{\sin\frac{\pi}{2m+1}}$$

Даље за $x = \triangle x = \frac{1}{2}\pi,\ n = m-1$

$$\sin\frac{\pi}{m} + \sin\frac{2\pi}{m} + \ldots + \sin\frac{(m-1)\pi}{m} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2m}$$

И најзад за $x = \frac{2\pi}{2m+1} = \triangle x,\ n = m$

$$\sin\frac{2\pi}{2m+1} + \sin\frac{4\pi}{2m+1} + \ldots + \sin\frac{2m\pi}{2m+1} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4m+2}$$

На сличан начин добијамо из обрасца 2):

$$\cos\frac{\pi}{2m} + \cos\frac{3\pi}{2m} + \ldots + \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m} = 0,$$

$$\cos\frac{\pi}{2m+1} + \cos\frac{3\pi}{2m+1} + \ldots + \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m+1} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{m} + \cos\frac{2\pi}{m} + \ldots + \cos\frac{(m-1)\pi}{m} = 0,$$

$$\cos\frac{2\pi}{2m+1} + \cos\frac{4\pi}{2m+1} + \ldots + \cos\frac{2m\pi}{2m+1} = -\frac{1}{2}.$$

5°. Да бисмо нашли збир реда:

$$x^k a^x + (x+\triangle x)^k a^{x+\Delta x} + \ldots \{x+(n-1)\triangle x\}^k a^{x+(n-1)\Delta x}$$

треба нам само наћи

$$\Sigma x^k a^x \text{ и } \Sigma(x+n\triangle x)^k a^{x+n\Delta x}$$

Но пошто је:

$$\triangle x^k a^x = (x+\triangle x)^k a^{x+\Delta x} - x^k a^x$$

$$= (a^{\Delta x}-1)\, x^k a^x + \binom{k}{1}\triangle x a^{\Delta x} x^{k-1} a^x$$

$$+ \binom{k}{2}\overline{\triangle x}^2 a^{\Delta x} x^{k-2} a^x + \binom{k}{3}\overline{\triangle x}^3 a^{\Delta x} x^{k-3} a^x + \ldots.$$

то онда одатле добијамо лако:

$$\Sigma x^k a^x = \frac{x^k a^x}{a^{\Delta x}-1} - \frac{a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}-1}\left\{\binom{k}{1}\triangle x\,\Sigma x^{k-1}a^x + \right.$$

$$\left. + \binom{k}{2}\overline{\triangle x}^2\,\Sigma x^{k-2}a^x + \binom{k}{3}\overline{\triangle x}^3\,\Sigma x^{k-3}a^x + \ldots\right\}$$

Овај образац своди тражење количине $\Sigma x^k a^x$ на тражење количине $\Sigma x^{k-1}a^x$, образац за ову на тражење количине $\Sigma x^{k-2}a^x$ итд. тако, да најзад изналажај количине $\Sigma x^k a^x$ зависи једино од Σa^x. Кад је количина $\Sigma x^k a^x$ израчуната, онда је лако наћи и количину: $\Sigma(x+n\triangle x)^k a^{x+n\Delta x}$ и тада разлика тих двеју количина даје збир горњега реда.

166. Кад нам је већ познат збир горњег реда:

$$1.)\quad f(x) + f(x+\triangle x) + f(x+2\triangle x) + \ldots$$
$$+ f\{x+(n-1)\triangle x\}$$

онда је лако наћи и збир реда:

$$2.)\quad f(x) - f(x+\triangle x) + f(x+2\triangle x) - \ldots + f\{x+2(n-1)\triangle x\}$$

Пошто је збир реда 1) извесна функција од x, $\triangle x$ и n, то можемо ставити:

$$3.)\quad F(x, n, \triangle x) = f(x) + f(x+\triangle x) + \dots$$

$$+ f\{x + (n-1)\triangle x\}$$

Одавде кад сменимо $\triangle x$ са $2\triangle x$, добијамо:

$$4.)\quad F(x, n, 2\triangle x) = f(x) + f(x+2\triangle x) + \dots$$

$$+ f\{x + 2(n-1)\triangle x\}$$

Кад пак ред 1) продужимо до $(2n-1)$-ог члана, добићемо:

$$5.)\quad F(x, 2n-1, \triangle x) = f(x) + f(x+\triangle x) + \dots$$

$$+ f\{x + 2(n-1)\triangle x\}$$

Кад од двогубог реда 4) одузмемо ред 5), добићемо:

$$2F(x, n, 2\triangle x) - F(x, 2n-1, \triangle x) =$$

$$f(x) - f(x+\triangle x) + f(x+2\triangle x) - f(x+3\triangle x) + \dots$$

$$- f\left\{ x + (2n-3)\triangle x \right\} + f\left\{ x + (2n-2)\triangle x \right\}.$$

Тако је н. пр.:

$$\sin x - \sin(x+\triangle x) + \sin(x+2\triangle x) - \dots$$

$$+ \sin\{x + 2(n-1)\triangle x\}$$

$$= 2\,\frac{\sin\{x + (n-1)\triangle x\}\sin n\triangle x}{\sin\triangle x}$$

$$- \frac{\sin\left\{x + (n-1)\triangle x\right\}\sin\frac{1}{2}(2n-1)\triangle x}{\sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

$$= \frac{\sin\left\{x + (n-1)\triangle x\right\}\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\triangle x}{\sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

Исто је тако:

$$\cos x - \cos(x+\triangle x) + \cos(x+2\triangle x) - \dots$$

$$+ \cos\{x + 2(n-1)\triangle x\}$$

$$= 2\,\frac{\cos\{x + (n-1)\triangle x\}\sin n\triangle x}{\sin\triangle x}$$

$$- \frac{\cos\left\{x + (n-1)\triangle x\right\}\sin\frac{1}{2}(2n-1)\triangle x}{\sin\frac{1}{2}\triangle x}$$

$$= \frac{\cos\left\{x + (n-1)\triangle x\right\}\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\triangle x}{\cos\frac{1}{2}\triangle x}$$

167. Узмимо, да је:

$$S_x = \varphi(x)$$

функција x-а, у којој је исказан закон, како збир x првих чланова реда:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4 \ . \ . \ . \ a_{x-1}, \quad a_x, \ . \ . \ .$$

зависи од броја x сабраних чланова. Тада је:

$$\varphi(x) - \varphi(x-1) = a_x$$

Али је $\varphi(x) - \varphi(x-1)$ разлика функције $\varphi(x-1)$ која одговара разлици $= 1$ промењљиве x. Дакле је:

$$\Delta\varphi(x-1) = a_x$$

Одавде, кад интегрујемо лево и десно, добијамо:

$$\varphi(x-1) = \Sigma a_x + C$$

Кад ово заменимо у једначину 1) добијамо даље:

$$\varphi(x) = \Sigma a_x + a_x + C$$

или другаче:

2.) $$S_x = \Sigma a_x + a_x + C$$

Дакле: *збирни образац каквог реда добићемо, кад интегралу његовог општег члана додамо сам тај општи члан.*

Што се тиче сталне количине C, њу ћемо у свакој прилици моћи лако наћи, ако само узмемо на ум, да за $x = 0$, 1, 2, 3 и т. д. S_x мора бити редом $=$ нули,

првом члану реда, збиру од прва два, збиру од прва три члана реда и т. д.

Узмимо сад неколико примера за ово:

1°. Тражи се збирни образац реда:

$$a + a^2 + a^3 + a^4 + \ . \ . \ .$$

Општи — x-ти — члан овог реда јесте a^x. Дакле је:

$$S_x = \Sigma a^x + a^x + C$$

Но како је (№ 163, 3°):

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^{\Delta x} - 1} = \frac{a^x}{a-1},$$

јер је сада $\Delta x = 1$, то је даље:

$$S_x = \frac{a^x}{a-1} + a^x + C,$$

где још остаје, да се израчуна C. Пошто за $x = 0$ и $S_x = 0$ бити мора, то имамо:

$$0 = \frac{1}{a-1} + 1 + C$$

одакле се C добија. Ми налазимо:

$$C = -\frac{a}{a-1}$$

Дакле је најзад:

$$S_x = \frac{a^x}{a-1} + a^x - \frac{a}{a-1}$$

или краће:

$$S_x = \frac{a(a^x - 1)}{a - 1}$$

а то је још из алгебре познати нам образац за збир дате постепености.

2°. Тражимо збирни образац реда, коме је општи или x-ти члан:

$$3.) \quad \frac{[x, \triangle x]^m}{m!} = \frac{x(x+\triangle x)(x+2\triangle x)\ldots\{x+(m-1)\triangle x\}}{1.\ \ 2.\ \ 3\ \ .\ \ .\ \ .\ \ m.}$$

По обрасцу 2) у овој №-и имамо:

$$S_x = \Sigma \left\{ \frac{[x, \triangle x]^m}{m!} \right\} + \frac{[x, \triangle x]^m}{m!} + C$$

или:

$$S_x = \frac{1}{m!} \Sigma [x, \triangle x]^m + \frac{[x, \triangle x]^m}{m!} + C$$

Али је на основу №-е 164, 1°:

$$\Sigma [x, \triangle x]^m = \frac{[x - \triangle x, \triangle x]^{m+1}}{(m+1) \triangle x};$$

и према томе је сад:

$$S_x = \frac{[x - \triangle x, \triangle x]^{m+1}}{(m+1)\, m!\, \triangle x} + \frac{[x, \triangle x]^m}{m!} + C$$

или пошто је (наука о комбинацијама, факторијели):

$$[x - \triangle x, \triangle x]^{m+1} = [x - \triangle x]\,[x, \triangle x]^m$$

то онда, кад ово заменимо у последњу једначину и за тим прва два члана десно доведемо на истог имениоца:

$$S_x = \frac{(x - \triangle x)[x, \triangle x]^m + (m+1)\triangle x\,[x, \triangle x]^m}{(m+1)\, m!\, \triangle x} + C$$

Одавде, пошто је:

$$(x - \triangle x)[x, \triangle x]^m + (m+1)\triangle x\,[x, \triangle x]^m =$$

$$[x, \triangle x]^m \{x - \triangle x + (m+1)\triangle x\} =$$

$$[x, \triangle x]^m [x + m\triangle x] = [x, \triangle x]^{m+1},$$

добијамо даље:

$$S_x = \frac{[x, \triangle x]^{m+2}}{(m+1)!\, \triangle x} + C$$

Пошто је за $x = 0$ и $S_x = 0$, то онда из ове једначине следује, да је и $C = 0$. Дакле је најзад:

$$4.) \quad S_x = \frac{[x, \triangle x]^{m+1}}{(m+1)!\, \triangle x} = \frac{x(x+\triangle x)(x+2\triangle x)\ldots(x+m\triangle x)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (m+1)\triangle x}$$

И ово је збирни образац реда, коме је x-ти члан горњи израз 3).

Помоћу обрасца 4) можемо добити збирне обрасце за небројено много редова. Ако у истом обрасцу ставимо $\triangle x = 1$, и у ново добивеном обрасцу:

$$S_x = \frac{[x, 1]^{m+1}}{(m+1)!}$$

ставимо редом $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$ добићемо збирне обрасце фигурних бројева:

$$\text{За } m = 1,\ S_x = \frac{x(x+1)}{1.\ 2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + x$$

$$\text{„}\ m = 2,\ S_x = \frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3} = 1 + 3 + 6 + \ldots$$

$$+ \frac{x(x+1)}{1.\ 2}$$

и т. д.

3°. Узмимо, да се тражи збирни образац реда, коме је x-ти члан:

5.) $$\frac{1}{[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m}$$

По обрасцу 2) ове №-е имамо:

$$S_x = \Sigma \left\{ \frac{1}{[a + (x-1)\triangle x, \triangle x)^m} \right\}$$

$$+ \frac{1}{[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m} + C$$

Али је (№ 163, 2°)

$$\Sigma \left\{ \frac{1}{[x, \triangle x]^m} \right\} = \frac{-1}{(m-1)\triangle x\,[x, \triangle x]^{m-1}}$$

Дакле, кад овде сменимо:

$$x \text{ са } \{a + (x-1)\triangle x\}:$$

$$\Sigma \left\{ \frac{1}{[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m} \right\}$$

$$= \frac{-1}{(m-1)\triangle x\,[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^{m-1}}$$

Кад ово заменимо у горњем изразу за S_x добићемо:

$$S_x = \frac{1}{[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m}$$

$$- \frac{1}{(m-1)\triangle x\,[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^{m-1}} + C$$

Овај образац, кад помножимо бројиоца и имениоца другога разломка десно са:

$$a + (x-1)\triangle x + (m-1)\triangle x = a + (m+x-2)\triangle x$$

претвара се у:

$$S_x = \frac{1}{[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m} -$$

$$\frac{a + (m+x-2)\triangle x}{(m-1)\triangle x\,[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m} + C,$$

или кад први разломак десно помножимо у бројиоцу и имениоцу са $(m-1)\triangle x$, па за тим оба прва разломка саберемо:

$$S_x = \frac{(m-1)\triangle x - \{a + (m+x-2)\triangle x\}}{(m-1)\triangle x\,[a + (x-1)\triangle x, \triangle x]^m} + C$$

или:

$$S_x = -\frac{a+(x-1)\triangle x}{(m-1)\triangle x\,[a+(x-1)\triangle x, \triangle x]^m} + C$$

Али како је (види науку о факторијелима):

$$[a+(x-1)\triangle x, \triangle x]^m = \left\{a+(x-1)\triangle x\right\}[a+x\triangle x, \triangle x]^{m-1}$$

то је онда даље:

$$S_x = -\frac{1}{(m-1)\triangle x\,[a+x\triangle x, \triangle x]^{m-1}} = C$$

Пошто за $x=0$, и S_x мора бити $=0$, то је онда:

$$0 = -\frac{1}{(m-1)\triangle x\,[a, \triangle x]^{m-1}} + C$$

Ако вредност за C, коју нам даје ова једначина, заменимо у последњој једначини за S_x, добићемо најзад:

$$S_x = \frac{1}{(m-1)\triangle x\,[a, \triangle x]^{m-1}}$$

$$-\frac{1}{(m-1)\triangle x\,[a+x\triangle x, \triangle x]^{m-1}}$$

или још краће:

6.) $$S_x = \frac{1}{(m-1)\triangle x}\left\{\frac{1}{[a, \triangle x]^{m-1}} - \frac{1}{[a+x\triangle x, \triangle x]^{m-1}}\right\}$$

И сад смо помоћу нађеног обрасца опет у стању наћи збирне редове безбројно многим редовима. Тако су н. пр. за $a=1$, $\triangle x = 2$, $m=2$:

$$\frac{1}{(2x-1)(2x+1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{1+2x}$$

општи члан и збирни образац реда:

$$\frac{1}{1.\,3}+\frac{1}{3.\,5}+\frac{1}{5.\,7}+\frac{1}{7.\,9}+\dots$$

Исто тако за $a=1$, $\triangle x=3$ и $m=3$:

$$\frac{1}{[3x-2, 3]^3} = \frac{1}{(3x-2)(3x+1)(3x+4)}$$

и

$$\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{[1.\,3]^2} - \frac{1}{[1+3x, 3]^2}\right\} = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+3x)(4+3x)}\right\}$$

јесу општи члан и збирни образац реда:

$$\frac{1}{1.\,4.\,7}+\frac{1}{4.\,7.\,10}+\frac{1}{7.\,10.\,13}+\frac{1}{10.\,13.\,16}+\dots$$

и т. д. Ако узмемо, да се ред, чији је општи члан под 5), пружа у бесконачност, онда је збир тога реда:

$$S = \frac{1}{(m-1)\triangle x\,[a, \triangle x]^{m-1}}$$

Тако н. пр. у последња два особена случаја збирови редова продужених у бесконачност јесу: $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{24}$.

4°. Нека још читалац пронађе сам збирни образац реду, коме је општи члан:

$$\frac{m!}{[x, \triangle x]^m} = \frac{1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ m}{x(x+\triangle x)(x+2\triangle x)\ldots\{x+(m-1)\triangle x\}}$$

168. У овој №-и још ћемо да покажемо један начин, како се долази до образаца за број комбинација друге, треће и т. д. класе:

1°. Узмимо најпре случај комбинација без понављања.

Ако означимо са $f(n)$ број комбинација друге класе, из n основака, онда је $f(n+1)$ број комбинација друге класе из $(n+1)$ основака. Пошто се сад комбинације друге класе из $(n+1)$ основака добијају (№ 17 наука о комбинацијама), кад се ка комбинацијама друге класе начињеним из n првих основака додаду још све оне комбинације исте класе, које постају, кад се последњи $(n+1)$-ви основак веже са сваким од n осталих основака, то је:

$$f(n+1) = f(n) + n$$

Одатле следује:

$$f(n+1) - f(n) = n \quad \text{или} \quad \triangle f(n) = n$$

Одавде, кад интегрујемо, узимајући при том на ум, да је $\triangle n = 1$, добијамо:

$$f(n) = \Sigma(n) = \frac{n(n-1)}{1.\ 2} + C$$

Но пошто за $n = 0$ мора и $f(n) = 0$ бити, то је онда и $C = 0$, дакле је најзад:

$$\overset{2}{C}_n = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}.$$

Ако сад означимо са $f(n)$ број комбинација треће класе из n основака, онда је $f(n+1)$ број комбинација исте класе из $(n+1)$ основака. Али је овај последњи број једнак броју $f(n)$ комбинација треће класе, начињених из n првих основака, више броју свију оних комбинација исте класе, које постају, кад се последњи $(n+1)$-ви основак веже са сваком комбинацијом друге класе, начињеном из n првих основака. Дакле је:

$$f(n+1) = f(n) + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$$

Одатле следује:

$$f(n+1) - f(n) = \binom{n}{2} \quad \text{или} \quad \triangle f(n) = \binom{n}{2}$$

Одавде опет интегровањем добијамо:

$$f(n) = \Sigma\binom{n}{2} = \frac{1}{2}\Sigma n^2 - \frac{1}{2}\Sigma n + C$$

или:

$$f(n) = \frac{1}{2}\left\{\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right\} + C$$

Пошто је $f(n) = 0$ за $n = 0$, то онда мора бити и $C = 0$. Дакле је, кад сведемо:

$$\overset{3}{C}_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

На сличан начин могли бисмо наћи да је:

$$\overset{4}{C}_n = \binom{n}{4},\quad \overset{5}{C}_n = \binom{n}{5},\quad \overset{6}{C}_n = \binom{n}{6} \text{ и т. д.}$$

Путем више индукције доказује се, као и у науци о комбинацијама, да је у опште;

$$\overset{r}{C}_n = \binom{n}{r}$$

2°. Узмимо сад случај комбинација са понављањем. Ако означимо са $f(n)$ број комбинација друге класе из n основака, онда је $f(n+1)$ број комбинација исте класе из $(n+1)$ основака. Овај последњи број једнак је броју комбинација друге класе из n првих основака, више броју комбинација исте класе, које постају, кад се последњи $(n+1)$-ви основак веже са свакимм од $(n+1)$ основака — дакле и са самим собом —.

Према томе је:

$$f(n+1) = f(n) + (n+1)$$

Одатле следује:

$$f(n+1) - f(n) = (n+1)$$

или:

$$\Delta f(n) = (n+1)$$

или пошто интегрујемо:

$$f(n) = \Sigma n + \Sigma 1$$

или даље (№ 161, 2):

$$f(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + n + C = \frac{n(n+1)}{1.\ 2} + C$$

Пошто је за $n = 0$ и $f(n) = 0$, то је онда и $C = 0$ и тако је сад;

$$\overset{2}{C'_n} = \frac{n(n+1)}{1.\ 2}.$$

Означимо сад са $f(n)$ број комбинација треће класе из n основака, дакле са $f(n+1)$ број комбинација исте класе из $(n+1)$ основака. Овај последњи број једнак је броју $f(n)$ комбинација треће класе из првих n основака више броју комбинација, које постају, кад се последњи $(n+1)$-ви основак веже са сваком комбинацијом друге класе начињеном из $(n+1)$ основака. Дакле је:

$$f(n+1) = f(n) + \frac{(n+1)(n+2)}{1\ .\ 2}$$

Одавде следује:

$$\Delta f(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{1\ .\ 2}$$

или:

$$f(n) = \frac{1}{2}\left\{\Sigma n^2 + 3\Sigma n + 2\Sigma 1\right\} + C$$

или (№ 161, 2):

$$f(n) = \frac{1}{2}\left\{\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right\} + 3\left\{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right\} + 2n + C$$

И одавде, кад узмемо на ум, да за $n = 0$ мора бити $f(n) = 0$ па дакле и $C = 0$, добијамо после лаког свођаја:

$$\overset{3}{C}{}'_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

На сличан начин можемо наћи, да је:

$$\overset{4}{C}{}'_n = \binom{n+3}{4}, \quad \overset{5}{C}_n = \binom{n+4}{5} \text{ и т. д.}$$

Путем више индукције доказује се после, да је у опште:

$$\overset{r}{C}{}'_n = \binom{n+r-1}{r}$$

ДОДАТАК.

Gräffe-ова метода решавања бројних једначина.

169. У овом додатку показаћемо укратко још једну методу решавања бројних једначина, која се по њеном проналазачу зове Gräffe-ова метода.

Основна мисао те методе састоји се у изналажењу нове једначине, чији су корени извесни степени корена задате једначине и ти су степени толико високи, да мањи корени нове једначине наспрам већих корена њених ишчезавају.

Ако је на пример:

$$1) \quad x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$$

задата једначина и њени су корени:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \; \ldots \; \alpha_m,$$

то се из ње може извести нова једначина:

$$2.) \quad y^m + b_1 y^{m-1} + b_2 y^{m-2} + \ldots + b_m = 0,$$

чији су корени на пр. k-ти степени корена задате једначине, дакле:

$$\alpha_1^k, \quad \alpha_2^k, \quad \alpha_3^k \; \ldots \; \alpha_m^k.$$

Зарад тога треба само у задатој једначини 1) ставити:

$$x^k = y \quad \text{или} \quad x = \sqrt[k]{y}.$$

Претпоставимо да су корени задате једначине сви стварни и међу собом различни, тако да је негледајући на знак:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_m.$$

На основу образаца 2) у № 6 јесте:

$$b_1 = -(\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_m^k),$$

одакле:

$$-\frac{b_1}{\alpha_1^k} = 1 + \frac{\alpha_2^k + \alpha_3^k + \ldots + \alpha_m^k}{\alpha_1^k}.$$

Пошто је услед претпоставке α_1 бројно највећи корен задате једначине, то можемо k узети тако велико, да је разломак десно од знака једнакости у последњој једначини мањи од колико му драго малог броја. И тада ћемо врло приближно имати:

$$-\frac{b_1}{\alpha_1^k} = 1 \quad \text{или} \quad b_1 = -\alpha_1^k$$

Даље је на основу истих образаца 2) у № 6:

$$b_2 = \alpha_1^k \alpha_2^k + \alpha_1^k \alpha_3^k + \ldots + \alpha_{m-1}^k \alpha_m^k$$

или:

$$\frac{b_2}{\alpha_1^k \alpha_2^k} = 1 + \frac{\alpha_1^k \alpha_3^k + \alpha_1^k \alpha_4^k + \ldots + \alpha_{m-1}^k \alpha_m^k}{\alpha_1^k \alpha_2^k}$$

За врло велико k разломак десно од знака једнакости биће врло мали број, и ми ћемо добити тим тачније, што год је k веће:

$$\frac{b_2}{\alpha_1^k \alpha_2^k} = 1 \quad \text{или} \quad b_2 = \alpha_1^k \alpha_2^k$$

Сличним умовањем наћићемо даље редом:

$$b_3 = -\alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k,$$

$$b_4 = +\alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k \alpha_4^k$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{m-1} = (-1)^{m-1} \alpha_1^k \alpha_2^k \ldots \alpha_{m-1}^k$$

$$b_m = (-1)^m \alpha_1^k \alpha_2^k \ldots \alpha_m^k$$

Према томе може се, кад је k врло велико, једначина:

$$3.) \quad y^m - \alpha_1^k y^{m-1} + \alpha_1^k \alpha_2^k y^{m-2} - \alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k y^{m-3} + \ldots + (-1)^m \alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k \ldots \alpha_m^k = 0$$

узети приближно тачно као заменик једначине 2).

Дакле кад је k врло велико, онда ће се 2-ги, 3-ћи, 4-ти и т. д. сачинилац једначине 2), чији су корени k-ти степени корена задате једначине, врло мало разликовати од α_1^k, $\alpha_1^k \alpha_2^k$, $\alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k$ и т. д. Одатле следује, да ће сачиниоци једначине, чији су корени квадрати корена једначине 2) или што је све једно $2k$-ти степени корена задате једначине, бити врло наблизу квадрати одговарајућих сачинилаца у једначини 2), И обратно кад видимо, да су сачиниоци једначине, чији су корени $2k$-ти степени корена задате једначине скоро квадрати одговарајућих сачинилаца у једначини 2), онда одатле можемо с правом закључити, да ће се узастопни сачиниоци једначине 2) врло мало разликовати од α_1^k, $\alpha_1^k\alpha_2^k$, $\alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k$, и т. д. Ово нека читалац добро утуби због онога, што ће доцније доћи.

Сад нам ваља показати простији начин, како се поступно добијају једначине, чији су корени све виши и виши степени корена задате једначине. Зарад тога најбоље је поступно квадрирати корене задате једначине, а тим хоћемо да кажемо то, да треба најпре извести из дане једначине другу једначину, чији су корени квадрати корена задате једначине, из те друге једначине трећу једначину, чији су корени квадрати корена друге, дакле четврти степени корена прве т. ј. задате једначине и т. д.

Кад у задатој једначини 1) ставимо $x = \sqrt{y}$ наћићемо као једначину, чији су корени квадрати корена једначине 1), и то кад је m парно:

$$y^{\frac{m}{2}} + a_2 y^{\frac{m-2}{2}} + \dots + a_{m-2}y + a_m =$$

$$-\left(a_1 y^{\frac{m-2}{2}} + a_3 y^{\frac{m-4}{2}} + \dots + a_{m-1}\right)\sqrt{y}.$$

а кад је m непарно:

$$\left(y^{\frac{m-1}{2}} + a_2 y^{\frac{m-3}{2}} + \dots + a_{m-1}\right)\sqrt{y} =$$

$$-\left(a_1 y^{\frac{m-1}{2}} + a_3 y^{\frac{m-3}{2}} + \dots + a_m\right).$$

Из сваке од ових двеју једначина добијамо, кад квадрирамо и уредимо:

$$4.)\ \left\{ \begin{array}{l} y^m + \left.\begin{matrix}2a_2\\ -a_1^2\end{matrix}\right\} y^{m-1} + \left.\begin{matrix}2a_4\\-2a_1a_3\\+a_2^2\end{matrix}\right\} y^{m-2} + \left.\begin{matrix}2a_6\\-2a_1a_5\\+2a_2a_4\\-a_3^2\end{matrix}\right| y^{m-3} + \dots \\[2ex] \left.\begin{matrix}+2a_{2r}\\-2a_1a_{2r-1}\\ \dots\dots\dots,\\ (-1)^{r-1}\,2a_{r-1}a_{r+1}\\ (-1)^r a_r^2\end{matrix}\right| y^{m-r} + \dots + \left.\begin{matrix}2a_{m-4}a_m\\-2a_{m-3}a_{m-1}\\+a_{m-2}^2\end{matrix}\right\}(-1)^m y^2 + \\[2ex] \qquad \left.\begin{matrix}+2a_{m-2}a_m\\-a_{m-1}^2\end{matrix}\right\}(-1)^m y + (-1)^m a_m^2 = 0\end{array}\right.$$

И ово је општи образац, помоћу којега се у особеним случајевима добија једначина, чији су корени квадрати корена дате једначине. Из општег т. ј. $(r+1)$-ог члана обрасца 4) добијају се редом сви његови чланови стављајући

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ m,$$

при чему треба сматрати сваког чиниоца, да је једнак нули, ако му је казаљка већа од m или мања од нуле, а да је једнак јединици, ако му је казаљка једнака нули.

За $m = 3, 4, 5, 6$, и т. д. једначина 4) претвара се редом у:

$$y^3 + \left.\begin{matrix}2a_2\\ -a_1^2\end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix}-2a_1a_3\\ +a_2^2\end{matrix}\right\} y - a_3^2 = 0,$$

$$y^4 + \left.\begin{matrix}2a_2\\ -a_1^2\end{matrix}\right\} y^3 + \left.\begin{matrix}2a_4\\ -2a_1a_3\\ +a_2^2\end{matrix}\right\} y^2 + \left.\begin{matrix}2a_2a_4\\ -a_3^2\end{matrix}\right\} y + a_4^2 = 0,$$

$$5.)\quad y^5 + \left.\begin{matrix}2a_2\\ -a_1^2\end{matrix}\right\} y^4 + \left.\begin{matrix}2a_4\\ -2a_1a_3\\ +a_2^2\end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix}-2a_1a_5\\ +2a_2a_4\\ -a_3^2\end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix}-2a_3a_5\\ +a_4^2\end{matrix}\right\} y - a_5^2 = 0,$$

$$y^6 + \left.\begin{matrix}2a_2\\ -a_1^2\end{matrix}\right\} y^5 + \left.\begin{matrix}2a_4\\ -2a_1a_3\\ +a_2^2\end{matrix}\right\} y^4 + \left.\begin{matrix}2a_6\\ -2a_1a_5\\ +2a_2a_4\\ -a_3^2\end{matrix}\right| y^3 + \left.\begin{matrix}2a_2a_6\\ -2a_3a_5\\ +a_4^2\end{matrix}\right\} y^2 +$$

$$+ \left.\begin{matrix}2a_4a_6\\ -a_5^2\end{matrix}\right\} y + a_6^2 = 0$$

и т. д.

Ово су обрасци, помоћу којих се у особеним случајевима добијају једначине, чији су корени квадрати корена задате једначине, кад је ова 3-ег, 4-ог, 5-ог, 6-ог, и т. д. степена.

Пример. Да се реши једначина:

$$x^4 - 13x^3 + 37x^2 - 3x - 54 = 0,$$

чији су сви корени стварни.

Помоћу друге једначине под 5) добићемо једначине, којих су корени редом други, четврти, осми, 16-ти, 32-ги, 64-ти и т. д. степени корена задате једначине. Те једначине, у којима почев од друге место њиних сачинилаца стоје логаритми истих сачинилаца, јесу ове:

$$y^4 - 95y^3 + 1183y^2 - 4005y + 2916 = 0,$$

$$y^4 - 3{\cdot}8234090y^3 + 5{\cdot}8091360y^2 - 6{\cdot}9609827y + 6{\cdot}9295750 = 0,$$

$$y^4 - 7{\cdot}6340089y^3 + 11{\cdot}4675744y^2 - 13{\cdot}8609092y + 13{\cdot}8591500 = 0$$

$$6.)\quad y^4 - 15{\cdot}2678808y^3 + 22{\cdot}9024266y^2 - 27{\cdot}7183079y + 27{\cdot}7183000 = 0,$$

$$y^4 - 30{\cdot}5357616y^3 + 45{\cdot}8035325y^2 - 55{\cdot}4365994y + 55{\cdot}4366000 = 0,$$

$$y^4 - 61{\cdot}0715232y^3 + 91{\cdot}6070650y^2 - 110{\cdot}8731988y + 110{\cdot}8732000 = 0$$

и т. д.

Као што се види, већ од једначине, чији су корени 32-ги степени корена задате једначине, сачиниоци расту по квадрату, јер почев од те једначине логаритми сачинилаца сваке доцније једначине јесу двапут већи од логаритама сачинилаца у предњој једначини. Узимајући дакле на ум оно, што је горе одмах за обрасцем 5) говорено, имамо не водећи рачуна о знаку:

$$log\, \alpha_1^k = log\, \alpha_1^{32} = 30{\cdot}5357616$$

или

$$log\, \alpha_1 = 0{\cdot}9542425 = log\, 9.$$

Даље је:

$$log\, \alpha_1^{32}\alpha_2^{32} = 32 \left\{ log\, \alpha_1 + log\, \alpha_2 \right\} = 45{\cdot}8035325,$$

одакле:

$$log\, \alpha_2 = 0{\cdot}4771213 = log\, 3$$

Исто је тако:

$$log\, \alpha_1^{32}\alpha_2^{32}\alpha_3^{32} = 32 \left\{ log\, \alpha_1 + log\, \alpha_2 + log\, \alpha_3 \right\}$$

$$= 55{\cdot}4365994,$$

одакле:

$$log\, \alpha_3 = 0{\cdot}3010300 = log\, 2,$$

и на послетку

$$log\, \alpha_1^{32}\alpha_2^{32}\alpha_3^{32}\alpha_4^{32} = 32 \left\{ log\, \alpha_1 + log\, \alpha_2 + log\, \alpha_3 + log\, \alpha_4 \right\}$$

$$= 55{\cdot}4366000,$$

одакле:

$$log\, \alpha_4 = 0 = log\, 1.$$

Бројне вредности корена задате једначине јесу дакле:

$$\alpha_1 = 9,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 2,\ \alpha_4 = 1,$$

и сад још остаје да се види, који знак коме корену припада.

На основу №-е 16 један је само корен одречан а остала су три положни. Пошто сад збир свију корена мора бити $= 13$ (№ 6), то онда мора -1 бити одречан корен а 2, 3 и 9 морају бити положни корени.

Исто би се тако лако могли наћи корени једначине, кад би они били ирационални. Израчунавање сачинилаца помоћу образаца 5) и 7-месних логаритамских таблица даје повода погрешки, која се осећа на последњем а по каткад и на претпоследњем месту. Али кад смо на овај начин израчунали приближну вредност једног корена, онда из ње а помоћу познатих метода можемо наћи још приближније вредности његове.

170. Претпоставимо сада, да су без обзира на знак α_1 и α_2 два стварна и једнака или два спрегнута уображена корена једначине:

$$1.)\qquad x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0.$$

Имајући на уму обрасце 2) у № 6 можемо написати:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2) - \overset{1}{C}(\alpha_3\, \alpha_4 \ldots \alpha_m),$$

$$a_2 = \alpha_1\, \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\, \overset{1}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m) + \overset{2}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m),$$

$$a_3 = -\alpha_1\, \alpha_2\, \overset{1}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m) - (\alpha_1 + \alpha_2)\, \overset{2}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m)$$
$$- \overset{3}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m),$$

$$a_4 = \alpha_1\, \alpha_2\, \overset{2}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m) + (\alpha_1 + \alpha_2)\, \overset{3}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m)$$
$$+ \overset{4}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m),$$

. . . .

$$a_r = (-1)^r \left\{ \alpha_1\, \alpha_2\, \overset{r-2}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m) + (\alpha_1 + \alpha_2)\, \overset{r-1}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m) \right.$$
$$\left. + \overset{r}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m) \right\}.$$

У овим обрасцима значи израз

$$\overset{h}{C}(\alpha_3 \ldots \alpha_m)$$

збир комбинација h-ог реда начињених из корена α_3, α_4, . . . α_m.

Ако је

$$2.) \qquad y^m + b_1 y^{m-1} + b_2 y^{m-2} + \ldots + b_m = 0$$

једначина, чији су корени h-ти степени корена једначине 1), онда у горњим изразима за a_1, a_2, a_3, . . . a_r треба само корене α_1, α_2, α_3, . . . α_m заменити њиховим k-тим степенима, па ћемо имати аналогне изразе за сачиниоце b једначине 2).

Претпоставимо сада, да су α_1 и α_2 два бројно највећа стварна корена једначине 1), или ако би они били спрегнути уображени корени н. пр. $\alpha_1 = p + qi$ и $\alpha_2 = p - qi$, да је онда њин производ $p^2 + q^2$ или што је све једно рећи да је квадрат њиховог модула већи од производа ма која два остала стварна корена. Доцније ћемо моћи узети, да се поменута два корена налазе, што се тиче њихове величине, ма где међу осталим коренима.

Умујући онако као и при извођењу обрасца 3) у №-и 169 и ослањајући се при том на мало час поменуте изразе за поједине сачиниоце b у једначини 2) наћи ћемо, да за врло велико k једначина:

$$3.) \qquad y^m - (\alpha_1^k + \alpha_2^k)\, y^{m-1} + \alpha_1^k \alpha_2^k\, y^{m-2} -$$

$$- \alpha_1^k \alpha_2^k \overset{1}{C}(\alpha_3^k \ldots \alpha_m^k)\, y^{m-3} + \alpha_1^k \alpha_2^k \overset{2}{C}(\alpha_3^k \ldots \alpha_m^k)\, y^{m-4} -$$

$$\ldots + (-1)^r \alpha_1^k \alpha_2^k \overset{2}{C}(\alpha_3^k \ldots \alpha_m^k)\, y^{m-r} + \ldots$$

може приближно тачно заменити једначину 2), чији су корени k-ти степени корена једначине 1).

Ако претпоставимо $k = 2^n$ а то је допуштено, онда једначина 2) добија се из једначине 1) најлакше поступним квадрирањем корена ове последње.

Ако су α_1 и α_2 стварни и *бројно* једнаки корени, онда је други сачинилац у једначини 3) $= - 2\alpha_1^k$. Дакле, почев од једне довољно велике вредности броја $k = 2^n$ или што је све једно броја n па на даље, половина другог сачиниоца расти по квадрату, док међу тим цео трећи сачинилац $\alpha_1^k \alpha_2^k = \alpha_1^{2k}$ расти по квадрату. Али ако други сачинилац не расти ни по квадрату ни на мало час поменути начин, онда корени α_1 и α_2 не могу бити стварни већ уображени. Тада је дакле:

$$4.) \quad \begin{cases} \alpha_1^k + \alpha_2^k = \varrho^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) + \varrho^k (\cos k\varphi - i \sin k\varphi) \\ \qquad\qquad = 2\varrho^k \cos k\varphi \\ \alpha_1^k \alpha_2^k = \varrho^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)\, \varrho^k (\cos k\varphi - i \sin k\varphi) = \varrho^{2k} \end{cases}$$

Помоћу ових образаца израчунава се модуо уображених корена као и они сами. Пошто су они израчунати, онда ће се лако и трећи корен α_3 моћи израчунати из трећег сачиниоца:

$$- \alpha_1^k \alpha_2^k \overset{1}{C}(\alpha_3^k \ldots \alpha_m^k),$$

ако је само тај корен стваран и бројно већи од свију доцнијих корена α_4, α_5, . . . α_m. Јер се тада за довољно велико k тај трећи сачинилац своди на

$$- \alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k.$$

Ако ли би α_3 и α_4 били уображени или стварни али бројно једнаки корени, онда би се они израчунавали онако, како су се у тим случајевима израчунавали корени α_1 и α_2. Продужавајући овако и даље моћи ћемо наћи све стварне корене као и модуле уображених корена, после чега ће се као што ћемо мало после видети, лако моћи наћи и потпуни корени.

Пример. Да се реши једначина:

$$x^4 - 17x^3 + 94x^2 - 178x + 100 = 0$$

Помоћу друге једначине под 5) у № 169 добијамо низ једначина, који иде и у којима су почев од друге сачиниоци заступљени својим логаритмима:

$$y^4 - 101y^3 + 2984y^2 - 12884y + 10000 = 0$$

$$y^4 - 3{\cdot}6266483y^3 + 6{\cdot}8008330y^2 - 8{\cdot}0266046y + 8 = 0$$

$$y^4 - 6{\cdot}7722152y^3 + 13{\cdot}5917753y^2 - 16{\cdot}0007190y + 16 = 0$$

$$y^4 + 13{\cdot}6344622y^3 + 27{\cdot}1835167y^2 - 32{\cdot}0000003y + 32 = 0$$

$$y^4 + 27{\cdot}0770963y^3 + 54{\cdot}3670334y^2 - 64{\cdot}0000000y + 64 = 0$$

Почев одавде осим првог сачиниоца, који је свој знак променио и који се не мења — бројно — по каквом закону, који би лако у очи пао, сви остали сачиниоци расту по квадрату. Та околност за нас је миг, да су прва два корена уображени а остала два стварни.

Узимајући на ум образац 3) као и други образац под 4) у овој №-и налазимо:

$$log(\alpha_1 \alpha_2) = log(\rho^2) =$$

$$= \frac{54{\cdot}3670334}{32} = 1{\cdot}6989699 = log\, 50.$$

Пошто је даље:

$$log(\alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k) = log(\rho^{2k}\alpha_3^k) = 32\, log(\rho^2) + 32\, log\, \alpha_3 = 64$$

то је онда:

$$log\, \alpha_3 = \frac{64 - 54{\cdot}3670334}{32} = 0{\cdot}301030 = log\, 2,$$

На сличан начин налазимо:

$$log\, \alpha_4 = \frac{64 - 64}{32} = 0 = log\, 1.$$

Путем просте замене у задатој једначини уверавамо се, да је $\alpha_4 = +1$. Пошто је задата једначина парнога степена и последњи јој је члан положан, то онда мора $\alpha_3 = +2$ бити.

Уображени корени α_1 и α_2 могу се овде лако наћи. Пошто је збир свију корена једнак другом сачиниоцу задате једначине узетом са противним знаком, дакле једнак броју 17 и пошто је $\alpha_3 + \alpha_4 = +3$, то је онда:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\rho\, cos\, \varphi = 17 - 3 = 14.$$

Одатле сљедује:

$$\rho cos\, \varphi = 7,\ \ \rho sin\, \varphi = \sqrt{\rho^2(1 - cos^2\varphi)} = \sqrt{50 - 49} = \pm 1.$$

Према томе је дакле најзад:

$$\alpha_1 = 7 + \sqrt{-1} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = 7 - \sqrt{-1}.$$

171. Кад су два највиша корена спрегнути уображени бројеви или су пак стварни али *бројно* једнаки, онда као што видесмо, израчунавање свију корена не иде тешко. Али кад се таква два корена јављају тек после h-ог стварног корена тако, да пред њима има h стварних корена, од којих је сваки већи но ма који од поменута два корена, или, ако су ови уображени, већи од њиховог модула, онда се h поменутих стварних корена израчунавају сасвим онако, како је казато у № 169.

И доиста једначина, која за довољно велико $k = 2^n$ може заменити једначину, чији су корени k-ти степени корена задате једначине, изгледа сада овако:

$$y^m - \alpha_1^k y^{m-1} + \alpha_1^k \alpha_2^k y^{m-2} - \ldots + (-1)^h \alpha_1^k \ldots \alpha_h^k y^{m-k}$$

$$1.) \quad + (-1)^{h+1} \alpha_1^k \ldots \alpha_h^k (\alpha_{h+1}^k + \alpha_{h+2}^k) y^{m-h-1}$$

$$+ (-1)^{h+2} \alpha_1^k \ldots \alpha_h^k \alpha_{h+1}^k \alpha_{h+2}^k y^{m-h-2} + \ldots .$$

као што се види сви чланови, који су пред чланом

$$2.) \quad (-1)^{h+1} \alpha_1^k \ldots \alpha_h^k (\alpha_{h+1}^k + \alpha_{h+2}^k) y^{m-h-1}$$

расту по квадрату. Што се тиче овог последњег члана, ако су α_{h+1} и α_{h+2} стварни и без обзира на знак једнаки бројеви, онда је ограђени чинилац у истом члану $= 2\alpha_{h+1}^k$ и он — чинилац — дакле тада расти само својом половином по квадрату. Узимајући ово на ум моћићемо α_{h+1} у таквом случају лако израчунати.

Ако се поменути члан под 2) немења ни по квадрату ни на мало час поменути начин, онда одатле закључујемо, да су α_{h+1} и α_{h+2} уображени корени. Њихов производ

$$\alpha_{h+1} \alpha_{h+2}$$

добија се на већ познати начин из следећег сачиниоца, који по квадрату расти т. ј. из

$$(-1)^{h+2} \alpha_1^k \ldots \alpha_h^k \alpha_{h+1}^k \alpha_{h+2}^k = (-1)^{h+2} \alpha_1^k \ldots \alpha_h^k \varrho^{2k}$$

Пошто смо ϱ^2 помоћу овог обрасца израчунали, онда све доцније стварне корене налазимо онако као у № 169. А затим се спрегнути уображени корени:

$$\alpha_{h+1} = \varrho (\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad \alpha_{h+2} = \varrho (\cos\varphi - i \sin\varphi)$$

израчунавају помоћу познатог обрасца:

$$3.) \qquad 2\varrho \cos\varphi + s = - a_1,$$

где први члан лево значи збир двају уображених корена, други члан збир стварних корена а a_1 другог сачиниоца задате једначине. Пошто смо све стварне корене израчунали, онда помоћу обрасца 3) налазимо $\varrho \cos\varphi$ и затим:

$$\varrho \sin\varphi = \sqrt{\varrho^2 - \varrho^2 \cos^2\varphi},$$

а то су састојци уображених корена.

Ако се међу коренима задате једначине осим α_{h+1} и α_{h+2} налазе друга два бројно једнака или два спрегнута уображена корена, онда се они израчунавају онако као α_{h+1} и α_{h+2}.

172. Сад прелазимо на случај, кад су три корена α_1, α_2, α_3 стварни и бројно једнаки, или кад су α_1 и α_2 уображени корени и њихов је производ

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).\ \varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \varrho^2$$

једнак квадрату трећег стварног корена α_3. Претпостављајући опет да су α_1, α_2, α_3 три највиша корена задате једначине m-ог степена, добићемо умовањем сличним ономе у №-и 170 и пошто корене задате једначине n-пута узастопце будемо квадрирали:

$$1.)\ y^m - (\alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k)\,y^{m-1} + (\alpha_1^k\alpha_2^k + \alpha_1^k\alpha_3^k + \alpha_2^k\alpha_3^k)\,y^{m-2}$$

$$-\alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k\,y^{m-3} + \alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k\overset{1}{C}(\alpha_4^k\ldots\alpha_m^k)\,y^{m-4} - \ldots$$

$$+(-1)^m\alpha_1^k\alpha_2^k\alpha_3^k\overset{m-3}{C}(\alpha_4^k\ldots\alpha_m^k) = 0$$

као једначину, која за довољно велико $k = 2^n$ може заменити једначину, чији су корени k-ти степени корена задате једначине.

Ако су α_1, α_2, α_3 стварни и бројно једнаки, онда се други, трећи и четврти сачинилац једначине 1) претварају у:

$$-3\alpha_1^k,\quad 3\alpha_1^{2k},\ -\alpha_1^{3k}.$$

Али ако та три сачиниоца не расту ни по овом закону нити по онима, који су у №-ма 169 и 170 поменути, онда у таквом случају закључујемо, да су два корена уображени а трећи да је стваран. Тада α_1^{3k} даје стварни корен α_1 и квадрат модула $\varrho^2 = \alpha_1^2$ двају уображених корена, док међу тим, кад су сва три корена стварни, α_1 даје бројну вредност једног од њих. Ако све оно, што смо горе о коренима α_1, α_2, α_3 претпоставили, стоји, само не то да су они три највиша корена, онда проматрања истоветна са онима у № 171 (обр. 1) наступају тек код три доцнија сачиниоца.

Ако су 4 највиша корена α_1, α_2, α_3, α_4 стварни и без обзира на знак једнаки, онда на сличан начин као горе дознајемо, да се други, трећи, четврти и пети сачинилац јављају у облику:

$$-4\alpha_1^k,\ 6\alpha_1^{2k},\ -4\alpha_1^{3k},\ \alpha_1^{4k}.$$

Али ако поменути сачиниоци не расту ни по овом ни по једном од пређе наведених закона, онда су или два и два од поменута четири корена спрегнути уображени бројеви, или је пак то случај само са два корена а остала су два стварни и бројно једнаки. Ако исти корени нису највиши, онда истоветна проматрања настају тек код 4 доцнија сачиниоца. Као што смо проматрали случајеве са два, три и четири бројно једнака корена, могли бисмо на исти начин проматрати случајеве са пет, шест и т. д. r једнаких корена. Како се пак, пошто су једном израчунати стварни корени и модули уображених корена, израчунавају сабирци ових последњих, видећемо доцније:

Пример. Да се реши једначина:

$$x^7 - 3x^6 - x^5 + 13x^4 - 34x^3 + 52x^2 - 56x + 28 = 0.$$

Из обрасца 4) у № 169 добијамо за $m = 7$:

$$
y^7 \left.\begin{matrix} +\,2a_2 \\ -\,a_1^2 \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} y^6 \left.\begin{matrix} +\,2a_4 \\ -\,2a_1a_3 \\ +\,a_2^2 \\ \\ \end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix} +\,2a_6 \\ -\,2a_1a_5 \\ +\,2a_2a_4 \\ -\,a_3^2 \end{matrix}\right| y^4 \left.\begin{matrix} -\,2a_1a_7 \\ +\,2a_2a_6 \\ -\,2a_3a_5 \\ +\,a_4^2 \end{matrix}\right| y^3 +
$$

$$
\left.\begin{matrix} -\,2a_3a_7 \\ +\,2a_4a_6 \\ -\,a_5^2 \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} -\,2a_5a_7 \\ +\,a_6^2 \\ \\ \end{matrix}\right\} y - a_7^2 = 0.
$$

Одавде добијамо једначине, којих су корени редом 2-ги, 4-ти, 8-ми, 16-ти, 32-ги и т. д. степени корена задате једначине и то наравно приближно тачно. Те једначине, код којих смо у сачиниоцима задржали само пет највиших места, јесу редом:

$$y^7 - 11y^6 + 11y^5 + 99y^4 + 84y^3 + 376y^2 + 224y - 784 = 0,$$

$$y^7 - 99y^6 - 2467y^5 + 767y^4 - 79712y^3 + 51488y^2 + 63874_1 y - 61466_1 = 0,$$

$$y^7 - 4867y^6 + 60785_2 y^5 - 38241_4 y^4 + 93098_5 y^3 - 10370_7 y^2 + 47255_7 y - 37781_7 = 0,$$

$$y^7 - 11531_3 y^6 + 33227_9 y^5 - 34068_{12} y^4 + 13175_{15} y^3 - 21317_{17} y^2 + 14494_{19} y - 14273_{19} = 0,$$

$$y^7 - 66502_9 y^6 + 11033_{23} y^5 - 28516_{28} y^4 + 38359_{33} y^3 - 58324_{37} y^2 + 20400_{42} y - 20374_{42} = 0.$$

Доње казаљке поред сачинилаца показују, колико је целих места занемарено.

Одавде па на даље расти други сачинилац својом половином, а трећи у пет задржаних места тачно по квадрату, и с тога су два највиша корена стварни и бројно једнаки. Почев од сљедеће једначине, чији су корени 64-ти степени корена задате једначине, расти седми сачинилац такође по квадрату и он је у тој једначини 41614_{88}. Три сачиниоца који су пред њим т. ј. шести, пети и четврти не расту ни даље по квадрату, одакле закључујемо на два спрега уображених корена. Модули та два спрега морају бити једнаки, јер кад би степени истих били неједнаки, онда би пети сачинилац морао расти такође по квадрату, и из истог би се сачиниоца модуо првог спрега уображених корена могао наћи. Најзад последњи корен мора бити стваран.

И сад прилазимо израчунавању двају највиших стварних корена, модула уображених као и последњег стварног корена.

Други сачинилац своди се за $k = 32$ на $2\alpha_1^k$ а трећи на α_1^{2k} и за то је:

$$\log 2\alpha_1^{32} = \log 66502_9 = 13{\cdot}82283,$$

одакле:

$$\log \alpha_1 = \frac{13{\cdot}82283 - 0{\cdot}30103}{32} = 0{\cdot}42255;$$

исто је тако:

$$\log \alpha_1^{2k} = \log \alpha_1^{64} = \log 11033_{23}$$

дакле:

$$\log \alpha_1 = \frac{27{\cdot}0427}{64} = 0{\cdot}42254.$$

Ако су ϱ_1 и ϱ_2 модули двају уображених корена, онда се седми сачинилац, који по квадрату расти, своди на $(\alpha_1^2\varrho_1^2\varrho_2^2)^k$. И пошто је $\varrho_1^2 = \varrho_2^2 = \varrho^2$, то је онда:

$$log\,(\alpha_1^2\varrho^4)^{64} = log\,41614_{88} = 92{\cdot}61924$$

одакле:

$$log\,(\varrho^2) = \frac{92{\cdot}61924 - 54{\cdot}08724}{128} = 0{\cdot}30103.$$

По овоме је приближно тачно $\varrho = \sqrt{2}$. Простом заменом двеју граница броја $\sqrt{2}$ у задату једначину уверићемо се, да једначина не може имати два стварна корена једнака броју $\sqrt{2}$. По томе је наше горње тврђење, да једначина има два спрега уображених корена с једнаким модулима, истинито.

Тражимо сад последњи стварни корен. Пошто је последњи члан без обзира на знак једнак производу свију корена, то је:

$$\alpha_1^2\,\varrho^4\,\alpha_7 = 28$$

или:

$$log\,\alpha_7 = log\,28 - 2\,(log\,\alpha_1 + log\,\varrho^2)$$

$$= 1{\cdot}44716 - 2 \times 0{\cdot}72358 = 0.$$

Дакле је $\alpha_7 = \pm 1$. Простом заменом дознајемо, да је $\alpha_7 = +1$ корен једначине. Пошто је једначина потпуна и има само једну сљед, то она може имати највише један одречан корен, и тај она мора имати, јер је она непарнога степена а последњи јој је члан положан (№ 13, 1° и № 16, 4°). Дакле један од прва два стварна корена мора бити положан а други одречан. Пошто је $log\,\alpha_1 = 0{\cdot}42255$, то је:

$$\alpha_1 = 2{\cdot}6457 \text{ а } \alpha_2 = -2{\cdot}6457.$$

Да бисмо још нашли уображене корене из њихових модула ϱ_1 и ϱ_2 и нађених стварних корена, узећемо једначине:

$$2.)\quad \begin{aligned} &2(\varrho_1\cos\varphi_1 + \varrho_2\cos\varphi_2) + s = -a_1,\\ &2\left\{\frac{\cos\varphi_1}{\varrho_1} + \frac{\cos\varphi_2}{\varrho_2}\right\} + s_1 = -\frac{a_{m-1}}{a_m},\end{aligned}$$

где је s збир стварних корена а s_1 збир њихових реципрочних вредности. Прва је једначина с обзиром на обрасце 2) у № 6 по себи јасна, ако се још узме на ум то, да је $2\varrho_1\cos\varphi_1$ збир прва два а $\varrho_2\cos\varphi_2$ збир друга два спрегнута уображена корена. Друга једначина биће нам такође јасна, ако узмемо на ум, да је без обзира на знак:

$$\frac{a_{m-1}}{a_m} = \frac{\overset{m-1}{C}(\alpha_1,\ \alpha_2\ .\ .\ .\ \alpha_m)}{\overset{m}{C}(\alpha_1,\ \alpha_2\ .\ .\ .\ \alpha_m)},$$

где бројилац десно значи збир комбинација — без понављања — $(m-1)$-ве класе начињених из корена α_1, α_2, . . . α_m, а именилац збир комбинација m-не класе начињених из истих корена. Али обе те јадначине, пошто је сада $\varrho = \sqrt{2}$, своди се на једну и исту једначину:

$$3.)\qquad \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Пошто нам дакле једначине 2) овде не помажу, то нам се ваља помоћи на други начин и то овако. Трећи сачинилац задате једначине јесте:

$$a_2 = -1 = \overset{2}{C}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ .\ .\ .\ \alpha_7).$$

он је то јест једнак збиру комбинација друге класе — без понављања — а начињених из седам корена задате једначине. Пошто начинимо све те комбинације и одмах изоставимо све оне, које се узајамно потиру, онда после лаког свођаја оставших комбинација добијамо:

$$\varrho \cos \varphi_1 + \varrho \cos \varphi_2 + 2\varrho^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = 1$$

или због $\varrho = \sqrt{2}$:

$$\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2\sqrt{2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Одавде с обзиром на горњу једначину 3) добијамо:

$$2\sqrt{2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = 0.$$

Дакле једна од количина $\cos \varphi_1$ и $\cos \varphi_2$ мора бити једнака нули, али не и обадве, пошто четири уображена корена нису — без обзира на знак — једнаки. Ако узмемо да је $\cos \varphi_1 = 0$, онда одатле добијамо $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ као најмањи лук, и по томе је $\sin \varphi_1 = 1$. Из горње једначине 3) сљедује сада:

$$\cos \varphi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ дакле } \sin \varphi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Према томе тражена два спрега уображених корена јесу:

$$\sqrt{2}(0 \pm \sqrt{-1}) = 0 \pm \sqrt{-2},$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm i\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 \pm \sqrt{-1}$$

173. У овој №-и остаје нам још да покажемо, како се у случају, кад једначина има више спрегова уображених корена, израчунавају уображени корени, пошто су њихови модули као и стварни корени већ израчунати.

Узмимо да задата једначина има н. пр. q спрегова уображених корена и да су њихови модули почев од највећег па редом до најмањег:

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots\ \varrho_q.$$

Из задате једначине изведимо нову једначину, чији су корени за јединицу већи. Ако сад поступним квадрирањем корена нове једначине израчунамо модуле њених уображених корена, и ти су модули:

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ r_q,$$

онда уображене корене нове једначине можемо наћи на начин, који иде. Нека је

$$\varrho_p (\cos \varphi_p + i \sin \varphi_p)$$

уображени корен задате једначине, који одговара модулу ϱ_p. Уображени корен нове једначине, који поменутом корену задате једначине одговара, јесте за јединицу већи Дакле је квадрат модула r_p тог уображеног корена:

$$r_p^2 = (\varrho_p \cos \varphi_p + 1)^2 + \varrho_p^2 \sin^2 \varphi_p,$$

одакле сљедује:

$$1.) \qquad \varrho_p \cos \varphi_p = \frac{r_p^2 - \varrho_p^2 - 1}{2}.$$

Одавде се може израчунати $\varrho_p \sin \varphi_p$ па дакле и цео уображени корен. Али зарад тога треба после горе поменутих рачуна најпре сазнати, које вредности модула ϱ и r иду заједно. Ево како се то може дознати. Узмимо н. пр. да су два највиша корена уображени. Тада после n узастопних квадрирања корена задате једначине, дакле у једначини, чији су корени k-ти степени ($k=2^n$) корена задате једначине, своди се трећи сачинилац на ϱ_1^{2k}, а други сачинилац на $2\varrho_1^k \cos k\varphi_1$, јер се уображени сабирци двају уображених корена узајамно потиру. Тада се дакле може лако израчунати $\cos k\varphi_1$. Сад кад у једначини 1) заменимо ϱ_1 и r_1 њиховим вредностима, видећемо да ли се отуда нађена вредност за $\cos k\varphi_1$, слаже са већ израчунатом вредношћу његовом или не. У првом случају модули ϱ_1 и r_1 иду заједно а у другом не. У овом другом случају испитаћемо на исти начин, да ли модуо ϱ_1 иде са модулом r_2 заједно и т. д.

Онако исто како се налази $\cos k\varphi_1$, могу се наћи и $\cos k\varphi_2, \; . \; . \; . \; \cos k\varphi_q$. Они се добијају увек из сачинилаца, који стоје на парним местима. Тако на пример ако су у задатој једначини шест највиших корена уображени, онда се после n извршених квадрирања корена задате једначине, своде поједини сачиниоци и то

1-ви на $2\varrho_1^k \cos k\varphi_1$, 2-ги на ϱ_1^{2k}

3-ћи на $\varrho_1^{2k}\, 2\varrho_2^k \cos k\varphi_2$, 4-ти на $\varrho_1^{2k}\, \varrho_2^{2k}$

5-ти на $\varrho_1^{2k}\, \varrho_2^{2k}\, 2\varrho_3^k \cos k\varphi_3$, 6-ти на $\varrho_1^{2k}\, \varrho_2^{2k}\, \varrho_3^{2k}$ и т. д.

Слично томе бива, кад су спрегови уображених корена стварним коренима растављени. Израчунавање аргумената φ из сачинилаца, који стоје на парним местима, може још послужити и као контрола рада.

Примедба. Gräffe-ова метода, коју у кратким потезима изложисмо, проматрана са теоријског гледишта не може се казати, да није елегантна, али проматрана са

практичног гледишта она се мора одбацити, јер је доста заметна. То је случај особито онда, кад се највећи корен од непосредно мањег разликује за врло мало. Ево шта сам писац на страни 31 свога списа: Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen о томе вели: „Кад се два стварна корена разликују једно од друго тако мало, да они и после n-ог квадрирања, пошто су већ сви остали корени раздвојени и израчунати, остају још нераздвојени, то тада лако можемо пасти на погрешну мисао, да имамо посла са два уображена корена, којима је модуо производ тих двају стварних корена. Ми ћемо тада израчунати $\varrho \cos \varphi$ и наћи ћемо за φ немогућу вредност а затим ћемо израчунати $\varrho \sin \varphi \sqrt{-1} = \sqrt{\varrho^2 - \varrho^2 \cos^2 \varphi}\sqrt{-1}$, које ће бити стварна количина. Тада дакле није нужно ићи са квадрирањем тако далеко, док се оба стварна корена не раздвоје, него само дотле, докле њихов производ није нађен. Даље се ради онако као и при израчунавању уображених корена пошто се стварним коренима може такође дати облик $\varrho(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$, само што овде $\varrho\, i \sin \varphi$ има стварну вредност, Пошто ϱ^2 може бити и одречно, то у сумњивим случајевима треба узети у помоћ количину $\cos(2^n\varphi)$. Кад се најзад деси, да су два уображена корена услед квадрирања постали стварни бројеви, то онда може изгледати, као да једначина има два стварна и бројно једнака корена. Али заменом најближих граница тих корена у намери, да бисмо сазнали њихов знак, увериђемо се о противноме, и тада се уображени корени израчунавају из њихових модула онако као и горе.“

ПОГРЕШКЕ.

СТРАНА	ВРСТА			МЕСТО
25	3	озго:	$M,$	M_1
28	1	»	тежи	аежи
33	10	»	$f'(x)$	$f(x)$
34	3	»	пошто је	остаје
34	7	оздо:	пред	при
38	4	озго:	вредност a	вредноста
40	7	»	вред-	на вред-
40	3	оздо:	онда	овда
41	2	»	сачиниоцима	чиниоцима
43	11	»	више	виш
53	7	»	$f^{IV}(x = 1$	$f^{IV}(x)$
60	7	»	y свуда	x
62	8	озго:	$(x-a_1)^n$	$(x-a_1)$
69	2	»	реч „стави“ с места где је, треба да дође пред знак =	
69	6	оздо:	треба заграда $\}$ на крају	
75	8	озго:	Q_2	Q
76	11	оздо:	b^2-4ac	$b^2\ \ 4ac$
85	2	»	ξ_1^{a-b-2}	ξ_1^{a-b-3}
87	12	»	$(g-h)$	$(g-p)$
93	5	»	једноимених	једноименованих
96	10	»	поступно	потпуно
103	12	»	$-a_2$	$-a_1$
103	10	»	$-b_1$	$-b$
103	4	»	a свуда	a

112 У детерминанти прва и друга врста чине прву врсту детерминанте Исто тако и 3-ћа и 4-а, 5-а и 6-а, 7-а и 8-а и т. д. m-а и $(m+1)$-а врста чине увек по једну врсту детерминанте.

117	9	оздо:	Δ_m	Δ
126	11	озго:	$Z_{k,k}x^k$	$Z_{k,k}x$
128	1	»	заграда $\}$ пред изложиоцем 2	
132	4	»	Z_r	z_r
139	9	»	треба заграда $\{$ иза a^2 и заграда $\}$ на крају 10-те врсте	

СТРАНА	ВРСТА			МЕСТО
144	5	озго:	P^1	P_1
147	врсте 10, 11 и 12 оздо		последњи чланови десно треба да су ограђени ( )	
148	5	оздо:	$f(x)+\lambda\varphi(x)=0$	$f(x)+\lambda\varphi(x)$
151	12	»	b_1x^{m-2}	b_1x^{m-1}
154	3	озго:	b_n	a_n
156	6	»	први члан бројиоца десно од знака = треба да је: cx^2	
165	4	»	$\frac{m(m-1)}{1.\ 2}$	$\frac{m(m-2)}{1.\ 2}$
177	2 и 3	»	први корени знак треба да има над собом изложиоца 3	
186	7	»	треба да стоји: ако још узмемо на ум	
192	6	»	треба да отпадне знак =	
206	2	оздо:	у обрасцу за x_3 треба да стоји $+\sqrt{z_3}$ место $-\sqrt{z_3}$	
222	9	»	$+a^m$	$-a^m$
222	10	»	a^m	a_m
227	1	»	$(m-1)2\pi$	$(m-1)\pi$
264	5 и 7	»	1)	2)
267	3	озго:	њеним	њиним
268	4	оздо:	иза $+1$ треба реч: мали	
274	9	озго:	десно од знака = последњи члан треба да је a_{m-1}	
274	13	»	a_{m-1}	a_{m-2}
275	2	»	a_{m-1}	a_{m-2}
275	10	оздо:	$\frac{b_{m-2}+a_2}{a}$	$b_{m-2}+a_2$
283	15	»	рационалним	стварним
285	8	озго:	q^2	9^2
497	6	оздо:	$\binom{m}{r}$	$\left(\begin{matrix}m\\r\end{matrix}\right.$
532	7	»	нових	његових.
663	9	озго:	$2\rho_2 cos\,\varphi_2$	$\rho_1 cos\,\varphi_2$

колико свега корена $F(x)$ има у унутрашњости криве линије.

Узмимо сада једну разломљену функцију, којој је бројилац:

$$6.)\quad f(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)(x-\xi_3)\ldots(x-\xi_n),$$

а именилац сам производ $F(x)$, дакле:

$$7.)\quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(x-\xi_1)(x-\xi_2)(x-\xi_3)\ldots(x-\xi_n)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_m)}.$$

Ми ћемо претпоставити, да су корени функције $f(x)$ различни од корена $F(x)$, дакле да бројилац и именилац немају заједничких чинилаца. Јасно је, да разломак 7) може бити раван нули само за једну од оних n вредности x-а, које поништавају бројиоца а $=\infty$ само за једну од оних m вредности x-а, које поништавају имениоца. Очевидно је:

$$8.)\quad \frac{1}{2\pi i}\, l\,\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{2\pi i}\, l\,f(x) - \frac{1}{2\pi i}\, l\,F(x).$$

Повуцимо у коначној даљини од почетка једноставну затворену криву линију ABO, на којој не лежи ни једна корена тачка функција $f(x)$ и $F(x)$. Ако пустимо, да промењива x описује, у положном смислу и од почетка па до краја ту криву линију, онда на десну страну једначине 8) можемо применити теорему 2) и тако ћемо наћи:

3°. *Разлика вредности, које функција* $\frac{1}{2\pi i}\, l\,\frac{f(x)}{F(x)}$ *добија на крају и у почетку пута, равна је разлици између броја свију корена — једнаких и неједнаких —*

функције $f(x)$ *и броја свију корена* $F(x)$ *у унутрашњости линије* ABO, или другаче: *она је равна разлици између броја, који показује, колико пута разломак* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *постаје раван нули у унутрашњости криве линије и броја, који показује, колико пута тај разломак постаје* ∞ *на истом простору.*

Логаритам алгебарске рационалне функције.

165. Нека су $F(x)$ и $f(x)$ две алгебарске целе рационалне функције x-а обе m-ог степена:

$$1.)\quad F(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots a_{m-1}x + a_m$$

$$2.)\quad f(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots b_{m-1}x + b_m$$

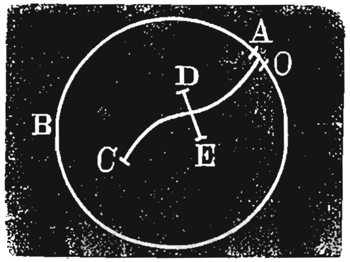
Ми претпостављамо, да су сачиниоци тих двеју функција коначни бројеви. У разломљеној функцији:

$$3.)\qquad w = \frac{f(x)}{F(x)},$$

са којом ћемо се сада бавити, ми ћемо претпоставити, да бројилац и именилац немају никакве заједничке мере, која би била функција x-а. За $x = \infty$ вредност разломљене функције јесте од нуле различна и $= b_0 : a_0$. Нули равна може бити вредност те функције само онда, кад је бројилац $= 0$, а бесконачно велика само онда, кад је именилац $= 0$. Из онога, што је у № 94 казано, сљедује, да једна цела и рационална функција x-а m-ог степена не може бити $= 0$ за више од m вредности x-а. Одатле сљедује, да ће у бројној равни морати бити коначних

ограничених простора, који су такви, да за вредности x-а, које одговарају тачкама у унутрашњости као и на границама тога простора, функција w није ни ∞ нити пак равна нули.

Нека је (сл. 4) такав један комад бројне равни ограничен једноставном затвореном кривом линијом ABO. Како функција w није ни ∞ велика ни равна нули у унутрашњости те линије, то је онда функција lw на целом том ограниченом простору непрекидна и коначна. Из једне тачке C у унутрашњости линије ABO повуцимо једну линију ка тачки A граничне линије ABO тако, да се те две линије секу у тачци A под правим углом. Лево и десно од линије CA узмимо две тачке D и E тако, да права DE сече линију CA под правим углом. Ако вредност функције lw у тачци D означимо са $(lw)_1$ а у тачци E са $(lw)_2$, онда зато, што је функција lw непрекидна, јесте:



Сл. 4.

$$4.)\qquad lim\left\{(lw)_1 - (lw)_2\right\} = 0$$

за $lim\ DE = 0$. И то стоји, па секла нормала DE линију CA ма у којој тачци њеној, па дакле и онда, кад је D у A а E у O. И тако смо сада добили теорему:

1°. *Кад* $F(x)$ *и* $f(x)$ *немају корених тачака у унутрашњости криве линије* ABO *као ни на њој самој, дакле кад функција* w *није ни* ∞ *велика ни равна нули на том простору, онда* lw *има на крају* O *линије* ABO *исту вредност као и у почетку* A.

Одатле можемо већ закључити, да на простору, који је ограничен линијом ABO, мора $F(x)$ или $f(x)$ или обе имати корених тачака, кад функција lw на крају O линије ABO добија вредност, која се за $\pm 2\pi i$ разликује од вредности, коју је она имала у почетку A.

Али неби било истина, кад би се из тога, што lw има на крају и у почетку линије ABO исту вредност, закључило, да функција w није ни бесконачно велика ни равна нули у унутрашњости те линије. Него ослањајући се на оно, што је речено у пређашњој №-и, можемо горњу теорему овако обрнути:

2°. *Кад x описује једну једноставну затворену криву линију ABO, и кад је притом функција lw вазда непрекидна и на крају O има исту вредност као и у почетку A, онда функција w или никако није равна нули ни бесконачно велика у унутрашњости линије ABO, или она постаје онолико исто пута равна нули, колико пута она постаје бесконачно велика.*

Гаусова основна теорема алгебре.

166. Пре свега напоменућемо познату истину, да је модуо збира уображених сабирака мањи од збира модула тих сабирака.

У функцији $f(x)$ пређашње №-е нека је $mod\, x = r$ а $mod\, b_k = B_k$. Тада је:

$$1.)\quad B_1 r^{m-1} + B_2 r^{m-2} + \ldots + B_m = mod\,[b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m],$$

и

$$2.)\quad B_0 r^m + B_1 r^{m-1} + \ldots + B_m > mod\, f(x).$$

Још ћемо приметити, да је модуо збира двају сабирака већи од апсолутне разлике модула истих сабирака. По томе је:

$$3.)\quad mod\, f(x) > B_0 r^m - mod\,[b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m]$$

претпостављајући да је вредност десне разлике у 3) положна. Но то ће бити зацело, ако вреди неједначина:

$$4.)\quad B_0 r^m > B_1 r^{m-1} + B_2 r^{m-2} + \ldots + B_m$$

и тада је тим пре:

$$5.)\quad mod\, f(x) > B_0 r^m - (B_1 r^{m-1} + \ldots + B_m)$$

Да се за r могу увек наћи вредности, које задовољавају неједначину 4), доказаћемо овако. Узмимо један коначни положни број R, који је такав, да је:

$$6.)\quad R > 1$$

и

$$7.)\quad B_0 R > B_1 + B_2 + \ldots + B_m.$$

Ако сад узмемо:

$$8.)\quad r \geqq R,$$

онда вреди неједначина:

$$B_0 r^m > (B_1 + B_2 + \ldots + B_m)\, r^{m-1}$$

и зато је сада:

$$9.)\quad B_0 r^m - (B_1 r^{m-1} + B_2 r^{m-2} + \ldots + B_m)$$
$$> B_2 (r^{m-1} - r^{m-2}) + B_3 (r^{m-1} - r^{m-3}) + \ldots + B_m (r^{m-1} + 1).$$

Десна је страна ове неједначине > 0. Кад r расти, растиће и вредност десне стране и може при том постати ма колико велика. То исто вреди дакле и о левој страни. Из неједначине 5), која сада вреди, види се, да за $r > R$ $f(x)$ не може постати равна нули.

Као функцију $F(x)$ у прећашњој №-и узећемо сада:

$$10.) \qquad F(x) = x^m$$

Та функција има m корена једнаких нули. За сваку другу вредност x-а она је различна од нуле, дакле свакојако за $r > R$. И тако сад имамо теорему:

1°. *На периферији једног круга, који је из почетка као средишта и са полупречником R описан, као и на простору, који је изван тога круга т. ј. споља, не може функција:*

$$11.) \quad w = \frac{f(x)}{F(x)} = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}$$

бити ни равна нули ни бесконачно велика. Полупречник R подвргнут је условима под 6) и 7).

Ставимо сад $x = \dfrac{1}{z}$ или што је свеједно:

$$12.) \qquad x = re^{\varphi i}, \quad z = \frac{1}{r}\, e^{-\varphi i}.$$

Тада свакој вредности x-а одговара јединцата вредност z-а и обратно. Из почетка x-ове бројне равни опишимо круг са полупречником r. Кад x прелази периферију тога круга непрекидно и у положном смислу, онда z описује непрекидно и у одречном смислу периферију једног круга, који је из почетка z-ове бројне равни као средишта а са полупречником $\dfrac{1}{r}$ описан. Кад је $r = R$ онда је $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{R}$, а кад је $r > R$, онда је $\dfrac{1}{r} < \dfrac{1}{R}$. Дакле пољу x-ових вредности, за које је $r \geqq R$ одговара у z-овој бројној равни површина ограничена кружном линијом, којој је средиште у тачци $z = 0$ а полупречник $\dfrac{1}{R}$.

Ми можемо представити w и као функцију z-а:

$$13.) \qquad w = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m.$$

У унутрашњости као и на периферији мало час поменутог круга, коме је $\dfrac{1}{R}$ полупречник, функција w није нигде на основу теореме 1°) равна нули нити ∞ велика. Дакле се може став 1) прећашње №-е овде применити. Кад променљива z прелази периферију круга у положном — или и у одречном смислу —, онда lw добија на крају пута исту вредност, коју је у почетку имао.

Али кад променљива z прелази у z-овој бројној равни периферију круга, коме је $\dfrac{1}{R}$ полупречник, у одречном смислу, онда x прелази у положном смислу и у x-овој бројној равни периферију одговарајућег круга, коме је R полупречник. И пошто на крају и у почетку пута функција lw добија исту вредност, то онда на основу теореме 2°) у прећашњој № и добијамо:

2°. *У унутрашњости круга описаног у x-овој бројној равни из почетка као средишта а са полупречником R функција*

$$w = \frac{f(x)}{F(x)} = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}$$

постаје онолико исто пута равна нули, колико пута она постаје бесконачно велика.

Но ми знамо, где функција w постаје ∞ велика. То је случај само кад тачке $z = 0$, и ту функција постаје ∞ велика m-ог степена или другаче: она постаје бесконачно велика m-пута. Према томе сад се зна и колико пута функција w постаје равна нули т. ј.:

3°. *Једначином* 11) *дефинисана функција w постаје равна нули за свега m коначних вредности x-а; тачке у x-овој бројној равни, које одговарају тим вредностима x-а, леже у коначној даљини од почетка.*

Ово је Гаусова основна теорема алгебре.

Означимо вредности x-а, које поништавају функцију w или за које је $w = 0$, са $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$. Те су вредности наравно још непознате, али да оне доиста постоје, доказано је теоремом 3). За те је вредности $f(x)$ такође равна нули, и зато се она по № 94 може представити као производ:

$$14.) \qquad f(x) = b_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)$$

Методе помоћу којих се налазе вредности $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$, за које је $f(x) = 0$, излажу се у теорији једначина. Овде је доста што је доказано то, да кад је $f(x)$ алгебарска цела и рационална функција x-а m-ог степена, да онда мора имати m вредности за x ни више ни мање, за које је $f(x) = 0$.

СЕДМИ ДЕО.

ОСНОВИ ТЕОРИЈЕ ДЕТЕРМИНАНАТА.

167. Узмимо нека нам је дат један низ основака:

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots a_n.$$

Ако ове основке поређамо узастопце ма како, онда тако добивена гомила зове се *слог.*

Ако сад у таквом једном слогу упоредимо свака два и два основка, онда се каже, да таква два основка чине једну *инверзију*, кад је казаљка оног основка, који је у слогу на ранијем месту, већа од казаљке основка, који је на доцнијем месту.

Тако на пример у слогу:

$$a_5 \, a_1 \, a_4 \, a_3 \, a_6 \, a_2$$

има осам инверзија

$$a_5 a_1, \ a_5 a_4, \ a_5 a_3, \ a_5 a_2, \ a_4 a_3, \ a_4 \, {}_2, \ a_3 a_2, \ a_6 a_2.$$

На основу обрасца, помоћу којег се налази број пермутација, које се могу начинити из n основака, број свију могућих слогова, који се могу добити из n основака ређајући их једно за другим на све могуће начине, јесте:

$$n! = 1. \, 2. \, 3. \, (n-1). \, n.$$

Ми ћемо те слогове поделити на две групе: *прву*, у којој су слогови са парним бројем инверзија и *другу*, у којој су слогови са непарним бројем инверзија. Ми ћемо прву класу звати *парном* или *положном* а другу *непарном* или *одречном*.

168. Сад нам пре свега треба доказати ову важну теорему:

Кад се два ма која основка у једном слогу смене (пермутују), онда се мења класа слога. Или другаче: *два слога, који један из другог постају узајамном сменом двају основака, припадају различним класама.*

Први доказ. Нека су a_α и a_β основци једног слога, који се имају међу собом сменити. Ми тај слог можемо представити овако:

$$A\, a_\alpha\, B\, a_\beta\, C,$$

где A значи скуп основака, који су пред a_α, B скуп основака, који су између a_α и a_β а C скуп основака, који долазе после a_β. Узајамном сменом основака a_α и a_β добија се слог:

$$A\, a_\beta\, B\, a_\alpha\, C.$$

Пре свега узмимо на ум, да кад у оба слога упоредимо основке, који су у A, и међу собом и са свима доцнијим, да велим добијамо у оба маха исти број инверзија. То је исто случај, кад основке, који су у C, упоредимо међу собом и са свима онима, који су лево од њих. Према томе ми можемо просто испустити из вида основке, који су у A и C и ограничити се на слогове:

$$a_\alpha\, B\, a_\beta \quad \text{и} \quad a_\beta\, B\, a_\alpha.$$

Пошто је број инверзија, које добијамо упоређујући међу собом основке, који су у B, у оба ова слога исти, то онда можемо и тај број инверзија из вида испустити.

Претпоставимо сада, да је казаљка α мања од казаљке β и да је m број основака, који су у B. Међу тима основцима нека има p основака, којих су казаљке мање од α а q основака, којих су казаљке веће од β.

Посматрајмо сада први слог. Кад упоредимо основке, који су у B, са основком a_α, добићемо p инверзија, а кад их упоредимо са основком a_β, добићемо q инверзија. Пошто међутим a_α и a_β недају никакве инверзије, то је број инверзија у првом слогу $= p+q$, нерачунајући у то и број инверзија, које дају основци, што су у B.

Посматрајмо сада други слог. Пошто у B има $m-q$ основака, којих су казаљке мање од β, а $m-p$ основака, којих су казаљке веће од α, то онда кад основке, што су у B, сравнимо са a_β, добијамо $m-q$ инверзија, а кад их сравнимо са a_α, добијамо $m-p$ инверзија. Пошто у осталом a_β и a_α дају такође једну инверзију, то онда други слог има свега $2m-p-q+1$ инверзија нерачунајући у то инверзије, које дају основци, што су у B. Разлика бројева инверзија, које дају оба слога, јесте $\pm(2m-2p-2q+1)$, дакле непаран број. Одатле следује, да поменута два слога припадају различним класама.

Други доказ. Нека су $a, b, c, d, \ldots\ldots$ казаљке једног извесног слога написане оним редом, како основци тога слога један за другим теку, и нека је:

$$P = (b-a)\,(c-a)\ldots.(c-b)\ldots.$$

производ разлика, које се добијају, кад се свака казаљка одузме од свију оних, које за њом у слогу долазе. Свакој инверзији одговараће очевидно одречна разлика и према томе биће P положно или одречно, како кад слог буде био парне или непарне класе.

Узмимо сад, нека су g и h казаљке двају основака, који се имају сменити. Производ P, који одговара првашњем слогу, моћиће се написати овако:

$$P = \varepsilon \underbrace{(b-a)(c-a)}_{1)} .. \underbrace{(g-a)(g-b)}_{2)} ... \underbrace{(h-a)(h-b)}_{3)} .. \underbrace{(h-g)}_{4)}$$

где је $\varepsilon = \pm 1$. Ако сменимо основке g и h једно другим, онда производ чинилаца 1) неће се променити; производи 2) и 3) претвориће се један у други а само ће чинилац 4) променити свој знак. Дакле ће и производ P променити свој знак а услед тога промениће се и класа слога.

Знак производа P, који одређује парност или непарност класе каквога слога, зове се знак тога слога. То је узрок, зашто се парна класа зове положном а непарна одречном.

169. Узмимо сада, да је дато n^2 количина или основака, поређаних у n врста свака са n основака, дакле поређаних у облику квадрата овако:

$$1.)\qquad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Доња казаљка сваког основка показује врсту а горња казаљка показује стуб којима припада основак. Помножимо сад оне основке, који су на дијагонали квадрата, која иде озго и с лева на десно, па ћемо добити производ:

$$2.)\qquad a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \dots a_n^n.$$

Ако сад у овом производу пермутујемо на све могуће начине доње казаљке остављајући горње казаљке на миру и ако сваки од тако добивених производа узмемо са знаком $+$ или са знаком $-$, како је кад слог састављен из доњих казаљака *прве* или *друге* класе, онда алгебарски збир свију тих производа зове се *детерминанта* n^2 датих количина и означава се онако, као што је показано под 1).

Кад детерминанта има n врста и n стубова, она се зове детерминанта n-га реда и производ 2) зове се њен *први* или *главни* члан.

Увиђавно је, да број чланова детерминанте мора бити једнак броју пермутација доњих казаљака, дакле једнак:

$$n! = 1.\,2.\,3.\;.\;.\;.\;n.$$

На пример:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3 + + a_2^1 a_3^2 a_1^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - a_3^1 a_2^2 a_1^3$$

Сви чланови детерминанте могу се очевидно добити и пермутовањем горњих казаљака, ако се притом оставе на миру доње казаљке и притом добивени производи узму са знаком $+$ или $-$, како је кад слог састављен из горњих казаљака *прве* или *друге* класе.

Из самог начина, како постаје детерминанта, сљедује, да у сваком члану детерминанте мора бити по један и то само један члан из сваке врсте и сваког стуба. Према томе чланови детерминанте јесу производи, који се добијају, кад се докле је то могуће буде узимао као чинилац по један основак из сваке врсте и сваког стуба тако, да у једном и истом производу два ма која чиниоца неприпадају никад истој врсти или истом стубу.

Зарад одредбе знакова појединим члановима детерминанте ми смо у сваком члану њеном претпоставили горње казаљке написане у природном реду тако, да је слог састављен из горњих казаљака у сваком члану детерминанте слог *прве* класе. Но међутим није тешко увидети, да кад се у ма ком члану детерминанте чиниоци другаче распореде, да ће велим тај члан морати имати знак $+$ или $-$, како су кад слогови састављени из горњих и доњих казаљака исте или различне класе. Јер пошто се узајамном сменом двају чинилаца мења класа како слога доњих тако и класа горњих казаљака, то онда оба та слога остају и после смене исте или различне класе, како су кад они пре те смене били исте или различне класе.

Сад је лако увидети истинитост ових двеју теорема:

1°. *Детерминанта се не мења, кад се врсте претворе у стубове а ови у врсте.*

Јер пошто при том основци дијагонале остају исти, то и први члан детерминанте остаје исти па дакле остају исти и сви остали чланови њени.

2°. *Кад се у једној детерминанти узајамно смене две врсте или два стуба, детерминанта мења само свој знак.*

Јер узмимо да смо н. пр. сменили α-ти и β-ти стуб један другим. Члановима првобитне детерминанте

$$\pm A\, a_p^\alpha\, B\, a_q^\beta C \quad \text{и} \quad \mp A\, a_p^\beta\, B\, a_q^\alpha\, C$$

одговарају у новој детерминанти чланови:

$$\pm A\, a_p^\beta\, B\, a_q^\alpha\, C \quad \text{и} \quad \mp A\, a_p^\alpha\, B\, a_q^\beta\, C.$$

Проста последица ове теореме јесте ова теорема:

3°. *Кад се један стуб или врста помери паралелно себи и дође на друго које место, док међу тим остали стубови или врсте остају на својим местима, онда детерминанта мења или не свој знак, како је кад број прескочених стубова или врста паран или не.* Или краће: *Ако је број прескочених стубова или врста* $= r$, *онда је детерминанта помножена са* $(-1)^r$.

Лако је доказати и ову теорему:

4°. *Кад су две врсте или два стуба у једној детерминанти једнаки, онда је вредност детерминанте равна нули.*

Јер узмимо да су н. пр. α-ти и β-ти стуб једнаки. Онда сваком члану $\pm A\, a_p^\alpha\, B\, a_q^\beta\, C$ детерминанте одговара други члан исте детерминанте: $\mp A\, a_p^\beta\, B\, a_q^\alpha\, C$. Пошто су таква два члана детерминанте једнаки а противно означени, то је детерминанта $= 0$.

17. Ми смо видели, да се у сваком члану детерминанте налази по један и то само један основак из сваке врсте и из сваког стуба. Према томе детерминанта је линеарна хомогена функција основака једне и исте врсте или једног и истог стуба. Ако сад из свију чланова детерминанте, у којима се налази основак a_1^1, извучемо исти

основак као заједничког чиниоца; ако тако исто извучемо основак a_1^2 као заједничког чиниоца из свију оних чланова детерминанте, у којима се он налази као основак и т. д., онда ће се детерминанта, коју означавамо са $\triangle$, јавити у облику:

$$\triangle \quad A_1^1 a_1^1 + A_1^2 a_1^2 + \ldots + A_1^n a_1^n,$$

где су $A_1^1, A_1^2, A_1^3, \ldots A_1^n$ количине, у којима нема ни једног основка прве врсте. Те количине, које се зову *субдетерминанте* основака прве врсте $a_1^1, a_1^2, \ldots a_1^n$, лако је наћи. Означимо уопште са $\triangle_\alpha^\beta$ детерминанту, која се добија, кад се у даној детерминанти просто изоставе α-та врста и β-ти стуб. Лако је сад увидети, да је субдетерминанта A_1^1 равна детерминанти:

$$\triangle_1^1 = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & \ldots & a_2^n \\ a_3^2 & a_3^3 & \ldots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Јер да бисмо добили скуп слогова дане детерминанте $\triangle$, у којима се налази основак a_1^1, треба само узети први члан $a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n$ детерминанте, па изузев први основак a_1^1 пермутовати у оставшем слогу $a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n$ доње казаљке на све могуће начине и узети сваки добивени слог са одговарајућим знаком. Резултат је очевидно $A_1^1 = \triangle_1^1$

Сменимо сада први стуб другим и обратно, како би основак a_1^2 дошао на оно место, где је у даној детерминати стајао основак a_1^1. Алгебарски збир чланова у новој детерминанти, у којима се налази основак a_1^2, биће $\triangle_1^2 a_1^2$.

Но пошто је детерминанта због узајамне смене првог и другог стуба променила знак, то је субдетерминанта $A_1^2 = - \triangle_1^2$

Исто тако ако преместимо трећи стуб дане детерминанте на прво место, детерминанта биће помножена (№ 169 теорема 3°) са $(-1)^2$, дакле неће променити свој знак и зато је субдетерминанта $A_1^3 = \triangle_1^3$, и т. д.

На тај начин радећи добијамо:

$$\triangle = \triangle_1^1 a_1^1 - \triangle_1^2 a_1^2 + \triangle_1^3 a_1^3 - \ldots + (-1)^{n-1} \triangle_1^n a_1^n.$$

Ако хоћемо да уредимо детерминанту по члановима н. пр. α-те врсте, то посматрајмо члан a_α^β те врсте. Ако α-ту врсту доведемо на прво место идући одозго на доле, а затим β-ти стуб на прво место идући с лева на десно, онда ће основака a_α^β доћи на чело детерминанте т. ј. тамо, где је у даној детерминанти стајало a_1^1. Као резултат имамо дану детерминанту помножену са $(-1)^{\alpha+\beta-2}$, одакле закључујемо, да је скуп чланова дане детерминанте, у којима се налази основак a_α^β, раван:

$$(-1)^{\alpha+\beta} \triangle_\alpha^\beta a_\alpha^\beta.$$

Према томе дана детерминанта уређена по основцима α-те врсте изгледаће:

$$\triangle = (-1)^{\alpha-1} \left\{ \triangle_\alpha^1 a_\alpha^1 - \triangle_\alpha^2 a_\alpha^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \triangle_\alpha^n a_\alpha^n \right\}$$

Ако ли је пак уредимо по основцима β-ог стуба, наћићемо:

$$\Delta = (-1)^{\beta-1}\left\{\Delta_1^\beta a_1^\beta - \Delta_2^\beta a_2^\beta + \ldots + (-1)^{n-1}\Delta_n^\beta a_n^\beta\right\}$$

Као што се из горњега види, субдетерминанта A_α^β, која одговара основку a_α^β, добија се кад се помножи са $(-1)^{\alpha+\beta}$ детерминанта, која остаје, кад се у даној детерминанти Δ изоставе α-та врста и β-ти стуб.

171. Помоћу образаца у пређашњој нумери лако је доказати, *да кад се сваки основак једне врсте или једног стуба помножи са ма каквим бројем, да је онда то толико, колико да је дана детерминанта помножена истим бројем.*

Исто тако није сада тешко доказати и ову теорему: *Кад су одговарајући основци двеју врста или двају стубова сразмерни, онда је вредност детерминанте* $= 0$.

Такође је лако доказати и то, *да кад су у једној врсти или у једном стубу сви основци осим једног равни нули, да је онда детерминанта равна производу из тога основка и субдетерминанте, која одговара томе основку.*

Јер ако су на пример сви основци β-ог стуба равни нули осим основка a_α^β, онда из последње једначине у № 170 сљедује:

$$\Delta = (-1)^{\alpha+\beta-2}\Delta_\alpha^\beta a_\alpha^\beta = A_\alpha^\beta a_\alpha^\beta$$

или:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots\ldots & a_1^{\beta-1} & 0 & a_1^{\beta+1} \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots\ldots & a_2^{\beta-1} & 0 & a_2^{\beta+1} \ldots\ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\alpha^1 & a_\alpha^2 \ldots\ldots & a_\alpha^{\beta-1} & a_\alpha^\beta & a_\alpha^{\beta+1} \ldots\ldots & a_\alpha^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots & a_n^{\beta-1} & 0 & a_n^{\beta+1} \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$= a_\alpha^\beta \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots\ldots & a_1^{\beta-1} & a_1^{\beta+1} \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots\ldots & a_2^{\beta-1} & a_2^{\beta+1} \ldots\ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\alpha^1 & a_\alpha^2 \ldots\ldots & a_\alpha^{\beta-1} & a_\alpha^{\beta+1} \ldots\ldots & a_\alpha^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots\ldots & a_n^{\beta-1} & a_n^{\beta+1} \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Нека је сад дата детерминанта:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 + b_1, & a_1^2 & a_1^3 \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1 + b_2, & a_2^2 & a_2^3 \ldots\ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 + b_n, & a_n^2 & a_n^3 \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

у којој се сваки основак првог стуба састоји из два сабирка. Кад ту детерминанту уредимо по основцима првога стуба, добићемо:

$$\Delta = A_1^1(a_1^1 + b_1) + A_2^1(a_2^1 + b_2) + \ldots + A_n^1(a_n^1 + b_n)$$

или:

$$\Delta = A_1^1 a_1^1 + A_2^1 a_2^1 + \ldots + A_n^1 a_n^1$$

$$+ A_1^1 b_1 + A_2^1 b_2 + \ldots + A_3^1 b_n$$

Дакле је, као што се види, дана детерминанта равна збиру двеју детерминаната то јест:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ & & \ldots & \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ b_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & & & \\ b_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Одавде сљедује, *да кад у једној детерминанти основцима једне врсте или једног стуба додамо одговарајуће основке друге ма које врсте или стуба, да се велим онда детерминанта не мења.* Тако н. пр ако основцима првог стуба додамо одговарајуће основке другог стуба, имаћемо:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 + a_1^2, & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 + a_2^2, & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & & \ldots & \\ a_n^1 + a_n^2, & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & & & \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & & & \\ a_n^2 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Пошто је вредност друге детерминанте на десној страни равна нули, јер су у њој први и други стуб једнаки, то су остале две детерминанте међу собом једнаке. Али пре него што смо додали основке другога стуба основцима првога, ми смо могли све основке другог стуба помножити са једним и истим у осталом ма каквим бројем. Јер тада би само друга детерминанта на десној страни последње једначине добила тај исти број као сачиниоца; но како је та детерминанта равна нули па дакле и производ њен са ма каквим бројем, то су и у том случају остале две детерминанте једнаке.

172. Да бисмо дану детерминанту развили т. ј. да бисмо нашли чланове полинома, који јој одговара, можемо сада место по методи № 169 и овако радити:

Уредимо детерминанту по основцима једне н. пр. прве врсте — стуба —. Сачиниоци тих основака јесу такође детерминанте, које можемо уредити по основцима њине прве врсте — стуба —. Продужавајући тако и даље наићићемо на сачиниоце, који су детерминанте другог реда то јест у којима има само две врсте и два стуба, дакле у којима има по четири основка и које је дакле лако развити.

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$$

Дакле чланови детерминанте другог реда добијају се, кад се основци дијагонално помноже и производ основака, који су у дијагонали, што иде одозго и с лева на десно узме са знаком $+$ а производ основака дијагонале, која иде одозго с десна на лево узме са знаком $-$.

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_1^3 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1^1 (a_2^2 a_3^3 - a_3^2 a_2^3) - a_1^2 (a_2^1 a_3^3 - a_3^1 a_2^3) +$$

$$+ a_1^3 (a_2^1 a_3^2 - a_3^1 a_2^2)$$

$$= a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 + a_1^2 a_3^1 a_2^3$$

$$+ a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^3 a_3^1 a_2^2.$$

Овде је место да напоменем једно практично правило, помоћу којег се увек лако може развити детерминанта трећег реда.

Узмимо да се има развити детерминанта:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Ако испод треће врсте напишемо још једном најпре прву а затим другу врсту, добићемо:

$$\begin{array}{ccccc} a_1^1 & & a_1^2 & & a_1^3 \\ & \diagdown & & \diagup & \\ a_2^1 & & a_2^2 & & a_2^3 \\ & \times & & \times & \\ a_3^1 & & a_3^2 & & a_3^3 \\ & \times & & \times & \\ a_1^1 & & a_1^2 & & a_1^3 \\ & \diagup & & \diagdown & \\ a_2^1 & & a_2^2 & & a_2^3 \end{array}$$

Положне чланове детерминанте добијамо множећи основке на трима дијагоналама, које су нагнуте овако $\diagdown$, а одречне чланове детерминанте добијамо множећи основке на трима дијагоналама, које су нагнуте овако $\diagup$.

Радећи по овом упуству добијамо:

$$\triangle = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 +$$

$$a_3^1 a_1^2 a_3^3 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_2^3 a_3^2 a_1^1 - a_3^3 a_1^2 a_2^1.$$

На основу онога, што смо доказали на извесном месту у № 171, лако је увидети, да је:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

па били основци $a_2^1,\ a_3^1 \dots a_n^1$ ма какви. Исто је тако:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 \begin{vmatrix} a_3^3 & a_3^4 & \dots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^3 & a_n^4 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

па били основци: $a_2^1,\ a_3^1 \dots a_n^1$ и $a_3^2,\ a_4^2 \dots a_n^2$ ма какви. Ако овако наставимо и даље, наћићемо, да кад су сви основци детерминанте, који се налазе на једној и истој страни дијагонале, равни нули, да велим онда детерминанта мора бити равна производу основака дијагонале, да је дакле:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n.$$

Лако је после овога увидети, како се свака детерминанта може претворити у једну детерминанту вишег реда. Тако на пример:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ x_2 & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ x_3 & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & x_1 & y_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & x_2 & y_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & x_3 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

где основци $x_1,\ x_2,\ x_3$; $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$, који се у задатој детерминанти не налазе, могу бити ма какви.

Разрешавање линеарних једначина са више непознатих.

173. Пре свега напоменућемо једну из ниже алгебре познату истину. Ако је дато n једначина:

1.) $$X_1 = 0,\ X_2 = 0 \ \dots\dots\ X_n = 0$$

са n непознатих, онда једначина:

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_n X_n = 0,$$

где су сачиниоци A стални бројеви, може заменити ма коју од даних једначина, то јест систем једначина састављен из последње једначине и $(n-1)$ осталих јесте равновредан систему n даних једначина, а тим хоћемо да кажемо, да оба система имају иста разрешења.

И доиста сваки спрег вредности за непознате, које задовољавају једначине 1), поништавају количине

$$X_1, X_2, X_3 \ldots . X_n$$

дакле задовољавају једначине:

$$2.)\quad X_2 = 0,\ X_3 = 0 \ldots X_n = 0,\ A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_n X_n = 0$$

И обратно сваки спрег вредности за непознате, које задовољавају једначине 2), поништавају X_2 $X_3, \ldots X_n$ као и збир

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_n X_n$$

и по томе поништавају и X_1, јер ми претпостављамо, да је стални сачинилац A_1 различан од нуле. Дакле поменуте вредности задовољавају и једначине 1).

Претпоставимо сад, нека је дато n једначина са n непознатих $x_1, x_2 \ldots, x_n$, дакле:

$$3.)\quad \begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = u_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_n + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n = u_n \end{cases}$$

Означимо са $\triangle$ детерминанту n^2 сачинилаца непознатих, дакле ставимо:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Ако претпоставимо, да је ова детерминанта различна од нуле, то онда, пошто је она линеарна хомогена функција основака једне врсте или једног стуба, мора бар једна од одговарајућих субдетерминаната бити различна од нуле. Иста детерминанта уређена по основцима првог стуба изгледа овако:

$$\triangle = A_1^1 a_1^1 + A_2^1 a_2^1 + \ldots + A_n^1 a_n^1.$$

Саберимо једначине 3) члан по члан, пошто смо их пре тога помножили редом са $A_1^1, A_2^1, \ldots A_n^1$. У новој једначини сачинилац од x_1 биће раван детерминанти $\triangle$; сачинилац од x_2 биће:

$$A_1^1 a_1^2 + A_2^1 a_2^2 + \ldots + A_n^1 a_n^2,$$

а то је детерминанта, у којој је први стуб једнак другом; дакле је тај сачинилац раван нули. На сличан начин доказује се, да су сачиниоци и осталих непознатих у новој једачини равни нули. Дакле се према томе нова једначина своди на:

$$4.)\quad \triangle x_1 = A_1^1 u_1 + A_2^1 u_2 + \ldots + A_n^1 u_n.$$

Ако је детерминанта $\triangle$ различна од нуле, онда је:

$$5.)\qquad x_1 = \frac{A_1^1 u_1 + A_2^1 u_2 + \ldots + A_n^1 u_n}{\triangle}$$

На сличан начин налазимо:

$$6.)\qquad x_2 = \frac{A_1^2 u_1 + A_2^2 u_2 + \ldots + A_n^2 u_n}{\triangle}$$

и т. д. Као што се види, заједнички именилац у вредностима непознатих јесте детерминанта $\triangle$, која постаје из n^2 сачинилаца непознатих у даним једначинама. Бројилац у вредности сваке непознате јесте, као што се види, детерминанта, која се добија, кад се у детерминанти $\triangle$ замене сачиниоци те непознате са члановима, који су десно од знака равности.

Врло је лако доказати, да вредности нађене за непознате $x_1, x_2, \ldots x_n$ задовољавају једначине 3). Јер ако тим вредностима заменимо непознате у једначинама 3), лева страна прве једначине претвориће се у:

$$\frac{1}{\triangle}\left|\begin{array}{l} (A_1^1 a_1^1 + A_1^2 a_1^2 + \ldots + A_1^n a_1^n)\, u_1 \\ + (A_2^1 a_1^1 + A_2^2 a_1^2 + \ldots + A_2^n a_1^n)\, u_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ + (A_n^1 a_1^n + A_n^2 a_1^2 + \ldots + A_n^n a_1^n)\, u_n \end{array}\right|$$

У изразу под великим заградама сачинилац од u_1 јесте детерминанта $\triangle$ уређена по основцима прве врсте. Сачинилац од u_2 јесте детерминанта уређена по основцима друге врсте али у којој су основци друге врсте замењени одговарајућим основцима прве врсте. Сачинилац

од u_2 према томе јесте једнак нули. Исто су тако равни нули и сви доцнији сачиниоци, одакле следује, да се по замени непознатих њиним горњим вредностима лева страна прве једначине своди на u_1; дакле је прва једначина задовољена. Пошто се на сличан начин доказује лако, да су задовољене и све остале једначине, то онда закључимо, да кад је детерминанта сачинилаца непознатих у даним једначинама различна од нуле, исте једначине имају једно и то само једно разрешење.

Претпоставимо сада, да је детерминанта $\triangle$ равна нули, а да је бар једна од n^2 субдетерминаната различна од нуле. Ако је н. пр. субдетерминанта A_1^1 различна од нуле, онда ћемо добити један систем од n једначина равновредан систему задатих једначина, ако прву једначину под 3) заменимо једначином 4). Ако је сад десна страна једначине 4) различна од нуле, онда пошто та једначина не може имати разрешења, други систем једначина па дакле и први не може имати такође никаквог разрешења. Али ако је десна страна једначине 4) равна нули, дакле ако је иста једначина идентична, онда n даних једначина своде се на $(n-1)$ различних једначина са n непознатих. Тада x_1 може имати сваку могућу вредност, и пошто је детерминанта A_1^1 различна од нуле, то онда из једначина под 3) следује, да свакој произвољној вредности за x_1 одговара један одређени систем вредности за $x_2, x_3 \ldots x_n$.

174. Ако су сад у једначинама 3) №-е 173 све количина u осим u_n равне нули, онда из једначине:

$$x_\beta = \frac{A_1^\beta u_1 + A_2^\beta u_2 + \ldots + A_n^\beta u_n}{\triangle}$$

која даје вредност непознату x_β, следује:

$$x_\beta = \frac{A_n^\beta u_n}{\triangle} \quad \text{или} \quad \frac{x_\beta}{A_n^\beta} = \frac{u_n}{\triangle},$$

одакле се види, да су у том случају вредности непознатих $x_1, x_2 \ldots x_n$ сразмерне субдетерминантама:

$$A_n^1, A_n^2, \ldots A_n^n.$$

Тада су разрешења даних једначина дата једначинама:

$$\frac{x_1}{A_n^1} = \frac{x_2}{A_n^2} = \ldots = \frac{x_n}{A_n^n} = \frac{u_n}{\triangle}$$

Али ако је и $u_n = 0$, онда једначина, која даје вредност за непознату x_β, јесте:

$$\triangle x_\beta = 0 \quad \text{или} \quad x_\beta = \frac{0}{\triangle},$$

и ако је детерминанта $\triangle$ различна од нуле, онда су вредности непознатих $x_1, x_2 \ldots x_n$ равне нули.

Претпоставимо опет, да су у једначинама 3) № 173 сва u равна нули, да је дакле дат систем n линеарних хомогених једначина:

$$1.) \begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = 0 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n = 0 \end{cases}$$

Да би сад ове једначине могле вредити за вредности непознатих различне од нуле, треба као што се види из обрасца:

$$\triangle x_\beta = 0,$$

где β значи један ма који од бројева 1, 2, 3, ... n, да је детерминанта $\triangle = 0$, јер иначе једначине 1) неби могле заједно опстати осим за вредности непознатих равне нули. Ако је сад услов $\triangle = 0$ испуњен, онда су једначинама 1) одређене не саме вредности непознатих, него само количници — размере — истих. Јер ако су исте једначине задовољене вредностима непознатих: $x', x'' \ldots x^{(n)}$ оне ће очевидно бити задовољене и вредностима: $lx', lx'', \ldots lx^{(n)}$, па имало у осталом l ма какву вредност. Вредности тих количника — размера — у опште су одређене; јер ако узмемо од n датих једначина $(n-1)$ ма којих, онда се из истих дају израчунати $(n-1)$ непознатих количника:

$$\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

Пошто је детерминанта $\triangle = 0$, то је:

$$a_1^1 A_\alpha^1 + a_1^2 A_\alpha^2 + \ldots + a_1^n A_\alpha^n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_\alpha^1 A_\alpha^1 + a_\alpha^2 A_\alpha^2 + \ldots + a_\alpha^n A_\alpha^n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n^1 A_\alpha^1 + a^2 A_\alpha^2 + \ldots + a_n^n A_\alpha^n = 0$$

Из ових једначина добијамо за количнике:

$$\frac{A_\alpha^1}{A_\alpha^n}, \frac{A_\alpha^2}{A_\alpha^n}, \ldots \frac{A_\alpha^{n-1}}{A_\alpha^n}$$

исте вредности, које добијамо из једначина 1) за количнике:

$$\frac{x_1}{x_n}, \ \frac{x_2}{x_n}, \ \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

Одатле сљедује, да су количине:

$$A_a^1, \ A_a^2, \ldots A_a^n$$

сразмерне вредностима непознатих $x_1, x_2, \ldots x_n$ које задовољавају једначине 1), па имало α ма коју од вредности 1, 2, 3, ... n. И тако вреде ове сразмере:

$$2.) \qquad x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_1^1 : A_1^2 : \ldots : A_1^n$$

$$= A_2^1 : A_2^2 : \ldots : A_2^n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$= A_n^1 : A_n^2 : \ldots : A_n^n.$$

Одавде видимо, да кад је детерминанта $\triangle$ равна нули, да су онда субдетерминанте, које одговарају основцима двеју паралелних врста или двају паралелних стубова, сразмерне

Ако претпоставимо $x_n = 1$, онда се једначине 1) претварају у n једначина са $(n-1)$ непознатих. Дакле *услов, да n једначина са $(n-1)$ непознатих могу заједно опстати,* т. ј. *да може бити вредности за $(n-1)$ непознатих, које их задовољавају, јесте: детерминанта свију сачинилаца рачунајући у исте и чланове, који од непознатих независе, мора бити равна нули.*

Услов $\triangle = 0$, који треба да је испуњен, па да n једначина са $(n-1)$ непознатих могу заједно опстати,

није ништа друго до резултат избацаја $(n-1)$ непознатих из n даних једначина. Према томе:

Да би из n линеарних једначина са $(n-1)$ непознатих избацили све те непознате, треба само ставити равну нули детерминанту n-ог реда, која постаје из n^2 сачинилаца тих једначина урачунавајући у исте и чланове, који од непознатих независе.

Из једначина 2) сљедује:

$$3.) \qquad x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_n^1 : A_n^2 : \ldots : A_n^n.$$

Пошто се у субдетерминантама $A_n^1, A_n^2 \ldots A_n^n$ не налази ниједан од сачинилаца последње једначине под 1):

$$a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n = 0$$

то онда одатле сљедује, да сразмере под 3) дају вредности за количнике непознатих $x_1, x_2, \ldots . x_n$, које задовољавају једначине:

$$a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{n-1}^1 x_1 + a_{n-1}^2 x_2 + \ldots + a_{n-1}^n x_n = 0,$$

и то дају вредности исказане субдетерминантама, које постају из $n(n-1)$ сачинилаца ових једначина, кад се у њима изостави најпре само први стуб, затим само други стуб и т. д.

Према томе, ако је дато n хомогених линеарних једначина са $(n+1)$ непознатих:

$$a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^{n+1} x_{n+1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^{n+1} x_{n+1} = 0$$

разрешења тих једначина добијају се помоћу сразмера:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1} = A_{n+1}^1 : A_{n+1}^2 : \ldots : A_{n+1}^{n+1} .$$

где је у опште:

$$A_{n+1}^{\beta} = (-1)^{\beta-1} \begin{vmatrix} a_1^1 \ldots & a_1^{\beta-1} & a_1^{\beta+1} & \ldots a_1^{n+1} \\ a_2^1 \ldots & a_2^{\beta-1} & a_2^{\beta+1} & \ldots a_2^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 \ldots & a_n^{\beta-1} & a_n^{\beta+1} & \ldots a_n^{n+1} \end{vmatrix}$$

Избацај једне непознате из двеју једначина са две непознате.

175. Узмимо нека су дате две једначине са две непознате x и y, које су једна m-ог а друга n-ог степена, и из којих има да се избаци x.

Кад се дане једначине уреде по падајућим степенима непознате x, добићемо:

$$1.)\ \begin{cases} a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0 \\ b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n = 0 \end{cases}$$

Кад у овим једначинама сменимо x са $\dfrac{x}{z}$, где је z сасвим произвољно, добићемо:

$$2.)\ \begin{cases} a_0 x^m + a_1 x^{m-1} z + a_2 x^{m-2} z^2 + \ldots + a_m z^m = 0 \\ b_0 x^n + b_1 x^{n-1} z + b_2 x^{n-2} z^2 + \ldots + b_n z^n = 0 \end{cases}$$

Ако сад прву од ових једначина помножимо редом са:

$$x^{n-1},\ x^{n-2} z,\ x^{n-3} z^2,\ \ldots\ z^{n-1}$$

а другу са:

$$x^{m-1},\ x^{m-2} z,\ x^{m-3} z^2,\ \ldots\ z^{m-1},$$

добићемо $(n+m)$ нових једначина:

$$3.)\ \left|\begin{array}{r} a_0 x^{m+n-1} + a_1 x^{m+n-2} z + a_2 x^{m+n-3} z^2 + \ldots = 0 \\ a_0 x^{m+n-2} z + a_1 x^{m+n-3} z^2 + \ldots = 0 \\ a_0 x^{m+n-3} z^2 + \ldots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \ldots + a_m z^{m+n-1} = 0 \\ b_0 x^{m+n-1} + b_1 x^{m+n-2} z + b_2 x^{m+n-3} z^2 + \ldots = 0 \\ b_0 x^{m+n-2} z + b_1 x^{m+n-3} z^2 + \ldots = 0 \\ b_0 x^{m+n-3} z^2 + \ldots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \ldots + b_n z^{m+n-1} = 0 \end{array}\right.$$

Ако сад један извесан спрег вредности за x и y задовољавају једначине 1), онда вредност y-а, која припада томе спрегу у свези са ма каквим вредностима xa-и z-а морају задовољити једначине 2), пошто је z са свим произвољно. Одатле следује, да једначине 3), које можемо сматрати као један систем од $(m+n)$ једначина са $(m+n)$ непознатих:

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2}z,\ x^{m+n-3}z^2,\ \ldots\ z^{m+n-1}$$

морају имати бесконачно много разрешења. Према томе, мора за горепоменуту вредност y-а детерминанта једначина 3) бити равна нули, дакле:

$$4.)\quad Y = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_n \end{vmatrix} = 0$$

И ово је последак елиминације x-а из двеју даних једначина или тако звана решавајућа једначина. Та једначина даје вредности за непознату y, које припадају разрешењима једначина 1).

176. Лако је дознати степен решавајуће једначине. Зарад тога претпоставимо најпре, да су једначине 1) потпуне. Степени количина $a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_m,\ b_0,\ b_1,\ \ldots\ b_n$,

које су целе и рационалне функције y-а, истоветни су са казаљкама тих количина. Систем једначина под 3) састоји се из једне групе од n једначина, које постају из прве задате једначине, и друге групе од m једначина, које постају из друге задате једначине под 1).

Један произвољни члан детерминанте под 4) јесте облика:

$$\pm\ a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_n} b_{\beta_1} b_{\beta_2} \ldots b_{\beta_m}.$$

Овде је a_{α_1} један од сачинилаца прве, a_{α_2} један од сачинилаца друге ..., a_{α_n} један од сачинилаца последње једначине у првој групи једначина под 3). Исто је тако b_{β_1} један од сачинилаца прве, b_{β_2} један од сачинилаца друге, ... b_{β_m} један од сачинилаца последње једначине у другој групи једначина 3). Казаљке $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n,\ \beta_1\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_m$ означавају у исти мах и стубове, у којима стоје поједини основци горњег члана детерминанте Одатле следује, да је основак a_{α_1} односно y степена (α_1-1), основак a_{α_2} степена (α_2-2) .., основак a_{α_n} степена (α_n-n). Исто тако увиђавно је, да је b_{β_1} односно y степена (β_1-1), основак b_{β_2} степена (β_2-2) . ., основак b_{β_m} степена (β_m-m). Степен производа свију тих основака јесте:

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m)-$$
$$-(1+2+\ldots+n)-(1+2+\ldots+m).$$

Али како се у сваком члану детерминанте налази по један и то само један основак из свакога стуба, то онда збир

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\beta_1+\beta_2+\ldots$$

није ништа друго до збир првих $(m+n)$ целих бројева. Према томе степен детерминанте 4) или степен решавајуће једначине јесте:

$$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} = mn.$$

Дакле имамо теорему:

Степен решавајуће једначине једнак је производу степена задатих — потпуних — једначина.

Узмимо сада нека су дате две непотпуне једначине са две непознате x и y; прва нека је степена $(m+p)$ а друга степена $(n+q)$. Даље прва једначина нека је односно x m-ог а друга n-ог степена. Ако обе једначине уредимо по падајућим степенима x-а, онда ће оне имати облик једначина под 1), и сачиниоци прве једначине a_0, a_1, ... a_m биће степена p, $(p+1)$, ... $(p+m)$, а сачиниоци b_0, b_1, ... b_n друге једначине под 1) биће степена q, $(q+1)$, . , $(q+n)$. Да бисмо дакле у овом случају дознали степен једног произвољног члана:

$$\pm\, a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_n} b_{\beta_1} b_{\beta_2} \ldots b_{\beta m}$$

детерминанте 4) па дакле и степен решавајуће једначине, треба изложиоцу сваког од n чинилаца a у томе члану додати број p, а изложиоцу сваког од m чинилаца b додати број q. Према томе је дакле сада степен тога члана па дакле и детерминанте 4):

$$mn + np + mq \text{ или } (m+p)(n+q) - pq.$$

Дакле смо добили теорему:

Степен решавајуће једначине јесте раван производу степена задатих једначина мање производ степена оних сачинилаца, који стоје уз највише степене x-а у задатим једначинама.

Сад нам још остаје, да нађемо што простију једначину са непознатима x и y, помоћу које бисмо могли наћи вредности x-а које одговарају вредностима y-а нађеним помоћу једначине 4.) Ми ћемо претпоставити, да свакој вредности y-а одговара само једна вредност x-а, одакле следује, да ће тражена једначина бити првог степена односно x. Ако у једначинама 3) ставимо $z=1$, то онда пошто је детерминанта у 4) равна нули, једна од једначина 3) мора бити последица осталих. Ако дакле једну од тих једначина напустимо, н. пр. последњу и ако чланове последњег стуба бацимо десно, имаћемо $(m+n-1)$ једначина првог степена са $(m+n-1)$ непознатих:

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2},\ \ldots,\ x,$$

из којих можемо израчунати вредност непознате x.

Вредност x-а јавиће се као количник двеју целих и рационалних функција y-а: Z и N. Именилац N тога разломка јесте очевидно субдетерминанта, која одговара последњем основку b_n последње врсте у детерминанти 4). Бројилац Z тога разломка добија се, кад се у имениоцу N основци претпоследњег стуба замене основцима последњег стуба али узетим са противним знаком.

Једначина $x = \dfrac{Z}{N}$ у свези са једначином под 4) даје сва разрешења задатих једначина.

Множење детерминаната.

177. Да бисмо нашли производ двеју детерминаната и то на најлакши начин, ми ћемо претпоставити, да нам је дат следећи систем од n једначина са n непознатих: x_1, x_2, . . . x_n

$$
1.)\quad \begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = y_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n = y_n, \end{cases}
$$

где су поједина y количине, које задовољавају следећих n једначина:

$$
2.)\quad \begin{cases} b_1^1 y_1 + b_2^1 y_2 + \ldots + b_n^1 y_n = \alpha_1 \\ b_1^2 y_1 + b_2^2 y_2 + \ldots + b_n^2 y_n = \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1^n y_1 + b_2^n y_2 + \ldots + b_n^n y_n = \alpha_n. \end{cases}
$$

Разрешењем једначина 1) добијамо за непознату x_h:

$$
3.)\quad x_h = \frac{y_1 A_1^h + y_2 A_2^h + \ldots + y_n A_n^h}{D}
$$

где је именилац D детерминанта сачинилаца на левој страни једначина 1) а бројилац детерминанта, која постаје, кад се у детерминанти D, уређеној по основцима $a_1^h, a_2^h, \ldots a_n^h$, исти сачиниоци замене редом количинама $y_1, y_2, \ldots y_n$. Количине $A_1^h, A_2^h, \ldots A_n^h$ јесу субдетерминанте, које одговарају поједином основцима $a_1^h, a_2^h, \ldots \ldots a_n^h$ у h-ом ступу детерминанте D

Разрешењем једначина под 2) добијамо:

$$
4.)\quad y_1 = \frac{X_1}{D^1},\ y_2 = \frac{X_2}{D^1},\ \ldots\ y_n = \frac{X_n}{D^1}.
$$

где је D^1 детерминанта, која постаје из сачинилаца на левој страни једначина 2), а X_m детерминанта, која се добија, кад се у детерминанти D^1 основци m-ог ступа $b_m^1, b_m^2, \ldots b_m^n$ замене количинама $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

Ако сад у једначини 3) заменимо поједина y њиним вредностима под 4), наћићемо:

$$
5.)\quad x_h = \frac{X_1 A_1^h + X_2 A_2^h + \ldots + X_n A_n^h}{DD^1}
$$

Али ако у једначинама 2) заменимо поједина y њиним вредностима из једначина 1), добићемо:

$$
6.)\quad \begin{cases} c_1^1 x_1 + c_2^1 x_2 + \ldots + c_n^1 x_n = \alpha_1 \\ c_1^2 x_1 + c_2^2 x_2 + \ldots + c_n^2 x_n = \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1^n x_1 + c_2^n x_2 + \ldots + c_n^n x_n = \alpha_n \end{cases}
$$

где је у опште:

$$
7.)\quad \begin{cases} c_k^1 = a_1^k b_1^1 + a_2^k b_2^1 + \ldots + a_n^k b_n^1 \\ c_k^2 = a_1^k b_1^2 + a_2^k b_2^2 + \ldots + a_n^k b_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_k^n = a_1^k b_1^n + a_2^k b_2^n + \ldots + a_n^k b_n^n \end{cases}
$$

Из ових образаца види се, како се лако добијају основци детерминанте, која постаје из сачинилаца на левој страни једначина 6). Да бисмо добили c_k^r, то јест k-ти члан у r-ој врсти поменуте детерминанте, треба нам само помножити члан по члан k ти стуб детерминанте сачинилаца на левој страни једначина 1) са r-ом врстом детерминанте сачинилаца на левој страни једначина 2) и добивене производе сабрати.

Разрешењем једначина 6) добијамо:

$$8.)\qquad x_h = \frac{\alpha_1 C_h^1 + \alpha_2 C_h^2 + \ldots + \alpha_n C_h^n}{\triangle}$$

Овде је именилац $\triangle$ детерминанта сачинилаца на левој страни једначина 6), а бројилац је детерминанта, која постаје, кад се у детерминанти $\triangle$, уређеној по основцима њеног h-ог стуба: c_h^1, c_h^2 . . . c_h^n, исти основци замене количинама α_1, α_2, . . α_n, који су на десној страни једначина 6.) Количине C_h^1, $C_h^2 \ldots C_h^n$ јесу субдетерминанте, које одговарају основцима h-ог стуба c_h^1, $c_h^2, \ldots . c_h^n$. Из једначина 5) и 8) сљедује:

$$\frac{X_1 A_1^h + X_2 A_2^h + \ldots + X_n A_n^h}{DD'} = \frac{\alpha_1 C_h^1 + \alpha_2 C_h^2 + \ldots + \alpha_n C_h^n}{\triangle}$$

одакле закључујемо да је:

$$\triangle = \lambda . DD^1,$$

где је λ један сталан број. Но пошто је:

$$a_1^1 b_1^1 a_2^2 b_2^2 a_3^3 b_3^3 \ldots a_n^n b_n^n$$

један члан како детерминанте $\triangle$, тако и производа DD^1, то мора бити $\lambda = 1$, и зато је:

$$\triangle = DD^1.$$

Дакле имамо теорему:

Производ двеју детерминаната D и D^1 јесте опет једна детерминанта истог реда и њени основци добијају се из основака умножених детерминаната помоћу образаца 7.)

Из образаца 7) види се, да први, други, ... n-ти основак у r-ној врсти детерминанте $\triangle$ добијамо, кад помножимо редом и члан по члан први, други, . . . n-ти стуб детерминанте D са r ом врстом детерминанте D^1 и при сваком од тих n множења добивене производе саберемо. Но како у свакој од двеју детерминаната D и D^1 можемо претворити врсте у стубове и обратно, то онда одатле сљедује, да има четири различна начина, помоћу којих се могу добити основци детерминанте $\triangle$:

Први други, ... n-ти основак у r-ној врсти детерминанте $\triangle$ добијају се:

1°. Кад се са r-ом врстом детерминанте D^1 помноже редом и члан по члан први други, ... n-ти стуб детерминанте D и при сваком од тих n множења добивени производи саберу.

2°. Кад се са r-ом врстом детерминанте D^1 помноже редом и члан по члан прва, друга, . . n-та врста детерминанте D и при сваком од тих n множења добивени производи саберу.

3°. Кад се са r-им стубом детерминанте D^1 помноже редом и члан по члан први, други . . . n-ти стуб детерминанте D и при сваком од тих n множења добивени производи саберу.

4°. Кад се са r-им стубом детерминанте D^1 помноже редом и члан по члан прва, друга, . . . n-та врста детерминанте D и при сваком од тих n множења добивени производи саберу.

Тако је на пример :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_1^2, & a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_1^2 \\ a_1^1 b_2^1 + a_2^1 b_2^2, & a_1^2 b_2^1 + a_2^2 b_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_1^2 b_1^2, & a_2^1 b_1^1 + a_2^2 b_1^2 \\ a_1^1 b_2^1 + a_1^2 b_2^2, & a_2^1 b_2^1 + a_2^2 b_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_2^1, & a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 \\ a_1^1 b_1^2 + a_2^1 b_2^2, & a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_1^2 b_2^1, & a_2^1 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 \\ a_1^1 b_1^2 + a_1^2 b_2^2, & a_2^1 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \end{vmatrix}$$

Ако претпоставимо, да су детерминанте D и D^1 једнаке, онда добијамо квадрат детерминанте D у облику детерминанте.

Тако је на пример :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2, & aa_1 + bb_1 \\ aa_1 + bb_1, & a_1^2 + b_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 + ba_1, & ab + bb_1 \\ aa_1 + ab_1, & ba_1 + b_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2 + a_1^2, & ab + a_1 b_1 \\ ab + a_1 b_1, & b^2 + b_1^2 \end{vmatrix},$$

У овим једначинама горње казаљке значе изложиоце.

Ако детерминанте, које се имају помножити, нису истог реда, онда треба најпре (№ 172) претворити детерминанту нижег реда у детерминанту истога реда са другом, па онда радити по горњем правилу. Тако је на пример:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta, & a_1\alpha + b_1\beta, & a_2\alpha + b_2\beta \\ a\alpha_1 + b\beta_1, & a_1\alpha_1 + b_1\beta_1, & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 \\ a\alpha_2 + b\beta_2, & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_2, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2 \end{vmatrix}$$

где су α_2 и β_2 сасвим произвољне количине.

178 Нека је дата детерминанта :

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

састављена из нулних, првих, других, ... $(n-1)$-вих степена количина :

$$a_1, \; a_2, \; a_3 \; . \; . \; . \; . \; a_n,$$

којих је n на броју. Сравнимо детерминанту $\triangle$, у којој су горње казаљке сада изложиоци, са производом:

$$P = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)\ldots(a_n - a_1)$$
$$\times (a_3 - a_2)(a_4 - a_2)\ldots(a_n - a_2)$$
$$\times (a_4 - a_3)\ \ldots(a_n - a_3)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\times (a_n - a_{n-1}),$$

где су поједини чиниоци разлике, које постају, кад се свака од n количина $a_1, a_2 \ldots a_n$ одузме од свију доцнијих. Детерминанта $\triangle$ постаје равна нули, кад две ма које од n количина н. пр. a_h и a_k постану једнаке, јер тада њена два стуба постају јелнаки. Одатле се види, да детерминанта мора бити дељива са разликом између двеју ма којих од n количина $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, па дакле и са производом P свију тих разлика.

Даље детерминанта $\triangle$ и производ P јесу истог степена:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$$

односно свију количина $a_1\ a_2, \ldots a_n$. Према томе количник количина $\triangle$ и P неможе зависити од количина $a_1, a_2, \ldots a_n$. Да бисмо нашли тај количник, треба нам само упоредити члан детерминанте $\triangle$ са чланом производа P, у коме се налазе исти степени количина $a_1, a_2, \ldots a_n$. Таква два члана јесу први члан детерминанте $\triangle$:

$$a_2\, a_3^2\, a_4^3 \ldots a_n^{n-1}$$

и после члан производа P, који се добија множењем првих чланова у појединим биномним чиниоцима тога производа. Пошто је сад тај први члан производа једнак првом члану детерминанте и истог знака с њиме, то одатле закључујемо, да је:

$$\triangle = P.$$

Број чланова детерминанте јесте:

$$n! = 1\ 2.\ 3\ \ldots n,$$

а број чланова производа P пре свођаја јесте:

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Одатле следује, да се детерминанта $\triangle$ јавља у много простијем облику него производ P. Тако за $n = 5$ детерминанта имаће 120 а производ 1024 чланова.

Из досадањега закључујемо, да је резултат елиминације непознатих $x_1, x_2, \ldots x_n$ из једначина:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0$$
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = 0$$
$$a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + a_3^2 x_3 + \ldots + a_n^2 x_n = 0$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$a_1^{n-1} x_1 + a_2^{n-1} x_2 + a_3^{n-1} x_3 + \ldots + a_n^{n-1} x_n$$

где горње казаљке сачинилаца значе изложиоце, раван производу разлика, које постају, кад се свака од количина $a_1, a_2, \dots a_n$ одузме од свију доцнијих. Ако су дакле све ове количине међу собом различне, детерминанта сачинилаца биће различна од нуле и једначине неће бити у опреци, оне ће то јест имати разрешења.

Више субдетерминанте.

179. Детерминанту:

$$1.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdot & a_n^n \end{vmatrix}$$

означавају Cauchy и Jacobi краће овако:

$$2.)\qquad \Delta = \Sigma \pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n,$$

то јест пред првим или главним чланом детерминанте они стављају знак $\pm$ а пред свим слово Σ. Знак Σ захтева, да се чланови детерминанте, који се добијају из главнога члана пермутовањем доњих — или горњих — казаљака, и који су чланови, као што већ знамо, пола положни а пола одречни, имају сабрати.

Ми ћемо се од сада служити и овим начином означавања детерминаната, а по каткад, кад буде потребно, означаваћемо детерминанте још и краће ограђујући само главни члан детерминанте, дакле овако:

$$3.)\qquad (a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n)$$

Кад дану детерминанту уредимо по основцима на пример првог стуба, добијамо:

$$\Delta = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + \dots + a_n^1 A_n^1,$$

где су:

$$A_1^1,\ A_2^1, \dots A_n^1$$

субдетерминанте, које одговарају основцима првог стуба. Те субдетерминанте зову се *прве* субдетерминанте или субдетерминанте *првог реда*. Но свака од тих субдетерминаната јесте детерминанта $(n-1)$-ог реда, узета са знаком $+$ или $-$, и према томе може се и она уредити по основцима буди којег стуба на пример првог. И кад се то учини, добија се:

$$A_1^1 = a_2^2(a_3^3 a_4^4 \dots) - a_3^2(a_2^3 a_4^4 \dots) + a_4^2(a_2^3 a_3^4 \dots) - \dots$$

$$A_2^1 = - a_1^2(a_3^3 a_4^4 \dots) + a_3^2(a_1^3 a_4^4 \dots) - a_4^2(a_1^3 a_3^4 \dots) + \dots$$

$$A_3^1 = a_1^2(a_2^3 a_4^4 \dots) - a_2^2(a_1^3 a_4^4 \dots) + a_4^2(a_1^3 a_2^4 \dots) - \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_n^1 = \pm a_1^2(a_2^3 a_3^4 \dots) \mp a_2^2(a_1^3 a_3^4 \dots) \pm a_3^2(a_1^3 a_2^4 \dots) - \dots$$

Кад ове једначине помножимо са

$$a_1^1,\ a_2^1,\ a_3^1, \dots a_n^1$$

и затим саберемо, добићемо на левој страни нове једначине детерминанту Δ, а на десној, кад два и два члана са једнаким сачиниоцима сведемо, и детерминанте, које се притом јаве, представимо у облику под 3), добићемо:

$$(a_1^1\, a_2^2)\,(a_3^3\, a_4^4\ldots) - (a_1^1\, a_3^2)\,(a_2^3\, a_4^4\ldots) + \ldots \pm (a_1^1\, a_n^2)\,(a_2^3\, a_3^4\ldots)$$

$$+ (a_2^1\, a_3^2)\,(a_1^3\, a_4^4\ldots) - (a_2^1\, a_4^2)\,(a_1^3\, a_3^4\ldots) + \ldots \mp (a_2^1\, a_n^2)\,(a_1^3\, a_3^4\ldots)$$

$$+ (a_3^1\, a_4^2)\,(a_1^3\, a_2^4\ldots) - (a_3^1\, a_5^2)\,(a_1^3\, a_2^4\ldots) + \ldots \pm (a_3^1\, a_n^2)\,(a_1^3\, a_2^4\ldots)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (a_{n-1}^1\, a_n^2)\,(a_1^3\, a_2^4\ldots).$$

Сад кад детерминанте, које се јављају као други чиниоци у појединим члановима, узете заједно са знаком, који је напред, означимо краткоће ради са:

$$A_{12},\ A_{13} \ldots A_{1n},\ A_{23},\ A_{24},\quad A_{2n}, \ldots A_{n-1,n}$$

добићемо:

$$4.)\ \triangle = (a_1^1\, a_2^2)\, A_{12} + (a_1^1\, a_3^2)\, A_{13} + (a_1^1\, a_4^2)\, A_{14} + \ldots + (a_1^1\, a_n^2)\, A_{1n}$$

$$+ (a_2^1\, a_3^2)\, A_{23} + (a_2^1\, a_4^2)\, A_{24} + \ldots + (a_2^1\, a_n^2)\, A_{2n}$$

$$+ (a_3^1\, a_4^2)\, A_{34} + \ldots + (a_3^1\, a_n^2)\, A_{3n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (a_{n-1}^1\, a_n^2)\, A_{n-1,n}.$$

Као што се види, дана детерминанта сада је представљена као збир производа, у којима је вазда први чинилац детерминанта другог а други чинилац са знаком $+$ или $-$ узета детерминанта $(n-2)$-ог реда. Основци сваке детерминанте другог реда узети су, као што се види, из прва два стуба, а основци одговарајуће детерминанте $(n-2)$-ог реда из осталих $(n-2)$ стубова. Детерминанте $(n-2)$-ог реда,

које се јављају са знаком $+$ или $-$ у поменутим производима као други чиниоци, зову се — узете са својим знаком — *друге* субдетерминанте или субдетерминанте *другог реда*. Те субдетерминанте нису ништа друго но са одговарајућим знаком узете детерминанте, које остају, кад се у датој детерминанти изоставе прва два стуба и оне две врсте, у којима се налазе 4 основка детерминанте, која се јавља као први чинилац. Тако на пример A_{12} јесте са знаком $+$ узета детерминанта, која остаје, кад се у задатој детерминанти изоставе прве две врсте и прва два стуба. A_{ik} где је $i < k$, јесте са одговарајућим знаком узета детерминанта, која остаје кад се у задатој детерминанти изоставе прва два стуба и i-та и k-та врста. Но питање је, са каквим знаком треба узети ту детерминанту $(n-2)$-ог реда, те да се добије A_{ik}. Зарад тога начинимо i-ту врсту првом а k-ту другом. Нова детерминанта биће, као што је познато, једнака задатој, али помноженој са

$$(-1)^{i-1+k-2} = (-1)^{i+k-3}.$$

Кад се у новој детерминанти изоставе прве две врсте и прва два стуба, остаје иста детерминанта $(n-2)$-ог реда, која се добија, кад се у задатој детерминанти изоставе прва два стуба и i-та и k-та врста. Дакле је субдетерминанта A_{ik} једнака, са

$$(-1)^{i+k-3}$$

помноженој, детерминанти $(n-2)$-ог реда, која остаје, пошто се у задатој детерминанти изоставе први и други стуб и i-та и k-та врста.

Да би смо нашли поједине производе десно од знака равности у једначини 4), треба с обзиром на оно, што смо већ казали, умети само наћи прве чиниоце тих производа. Ти чиниоци, који су детерминанте другог реда, добијају се, као што се види из једначине 4), кад се само начине све комбинације друге класе а без понављања из основака:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots n$$

и кад се први основак сваке такве комбинације узме као доња казаљка првог а други основак као доња казаљка другог чиниоца у изразу

$$(a^1\ a^2)$$

Број чланова на десној страни једначине 4) једнак је броју комбинација друге класе а без понављања, које се могу начинити из n основака:

$$1,\ 2,\ 3 \ldots n$$

дакле једнак броју:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}$$

180. Кад би се у једначини 4) други чиниоци, који су субдетерминанте другог реда, уредили по основцима њиховог првог стуба и тако добивени изрази заменили у једначину 4), дана детерминанта јавила би се као збир производа, у којима би вазда први чинилац био детерминанта трећег реда а други чинилац са знаком $+$ или $-$ узета детерминанта $(n-3)$-га реда. Основци сваке детерминанте трећег реда узети су из прва три стуба, а основци одговарајуће детерминанте $(n-3)$-га реда из осталих $(n-3)$ стубова. Детерминанте $(n-3)$-га реда, које се у

поменутим производима јављају са знаком $+$ или $-$ као други чиниоци, зову се — узете са својим знаком — *треће* субдетерминанте или субдетерминанте *трећег реда*. Оне постају, кад се у даној детерминанти изоставе прва три стуба и оне три врсте, у којима се налазе 6 основака детерминанте, која се јавља као први чинилац. Знак $+$ или $-$, са којим треба узети сваку поменуту детерминанту $(n-3)$-га реда, одређује се на начин горе (№ 179) показани. Ако је н. пр детерминанта трећег реда

$$\left(a_i^1\ a_k^2\ a_l^3\right)$$

први чинилац у једном од производа, на које је разложена дата детерминанта, онда да бисмо одредили знак субдетерминанте, која одговара овој детерминанти трећег реда, учинимо да i-та врста постане првом, k-та другом, а l-та трећом идући одозго на доле. Нова детерминанта једнака је задатој али помноженој са

$$(-1)^{i-1+k-2+l-3} = (-1)^{i+k+l-6}$$

Кад у новој детерминанти изоставимо прва три стуба и прве три врсте, остаје детерминанта $(n-3)$-га реда истоветна са оном, која се добија из задате детерминанте, кад се у овој изоставе прва три стуба и i-та, k-та и l-та врста. Дакле субдетерминанта трећег реда, која је помножена са детерминантом

$$\left(a_i^1\ a_k^2\ a_l^3\right)$$

постаје, кад се у задатој детерминанти изоставе прва три стуба и i-та, k-та и l-та врста и кад се оставша детерминанта $(n-3)$-га реда помножи са

$$(-1)^{i+k+l-6}$$

Да бисмо и у овом случају нашли поједине производе, на које је дана детерминанта разложена, треба начинити најпре све комбинације треће класе а без понављања из основака

$$1, 2, 3, \ldots n$$

Затим треба први основак сваке такве комбинације узети као доњу казаљку првог, други основак као доњу казаљку другог а трећи основак као доњу казаљку трећег чиниоца у изразу

$$(a^1 a^2 a^3).$$

Тако добивени изрази, који представљају детерминанте трећег реда, јесу први чиниоци производа, на које је дана детерминанта разложена, а како се добијају други чиниоци сваког таквог производа, већ смо показали. Број чланова, из којих се у овом случају задата детерминанта састоји, једнак је броју комбинација треће класе а без понављања, које се могу начинити из n основака:

$$1, 2, 3, \ldots n,$$

дакле је једнак броју: $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Ако продужимо овако и даље, најзад ћемо видети, да се задата детерминанта може представити као збир производа, у којима је вазда први чинилац детерминанта k-ог, а други чинилац са знаком $+$ или $-$ узета детерминанта $(n-k)$-ог реда. Основци детерминанте k-ог реда узети су вазда из k првих стубова, а основци одговарајуће детерминанте $(n-k)$-ог реда узети су из осталих $(n-k)$ стубова. Таква једна детерминанта $(n-k)$-ог реда постаје, кад се у даној детерминанти изоставе оне врсте и стубови, у којима се налазе основци детерминанте k-ог реда, која је с њоме помножена. И кад се таква једна детерминанта $(n-k)$-ог реда узме са знаком, који јој припада, онда се она зове субдетерминанта k-ог реда. Знак, са којим треба узети једну детерминанту $(n-k)$-ог реда, одређује се, кад се она помножи са степеном од -1, коме је изложилац разлика између збира казаљака оних врста дате детерминанте, које су изостављене, мање збир чланова реда: $1, 2, 3, \ldots k$.

Да бисмо добили поједине производе, којих је збир једнак датој детерминанти, треба најпре начинити све комбинације k-те класе из основака:

$$1, 2, 3, \ldots n.$$

За тим треба узастопне основке сваке такве комбинације узети као доње казаљке узастопних чинилаца у изразу:

$$(a^1 a^2 a^3 \ldots a^k)$$

Тако добивени изрази, који представљају детерминанте k-ог реда, биће први чиниоци поменутих производа. А како се добијају други чиниоци, који су субдетерминанте k-ог реда, већ је казато.

Број чланова или производа, из којих се сада детерминанта састоји, јесте:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots k}.$$

Помоћу онога што смо прешли у овој №-и и № 179, лако је увидети, да кад су основци, који стоје у k првих стубова и у исти мах у $(n-k)$ последњих врста, једнаки нули, да велим онда дана детерминанта јесте равна производу двеју детерминаната k-ог и $(n-k)$-ог реда. Прва од тих детерминаната састављена је из k^2 основака, који стоје у првих k стубова и првих k врста, а друга из основака, који стоје у $(n-k)$ последњих стубова и $(n-k)$ последњих врста.

Јер ако дану детерминанту представимо као збир производа из детерминаната k-ог и $(n-k)$-ог реда тако, да су основци детерминаната k-ог реда узети из првих k стубова, а основци детерминаната $(n-k)$-ог реда из осталих $(n-k)$ стубова, то је онда од свију детерминаната k-ог реда само једна од нуле различна и то она, чији основци стоје у k првих врста и k првих стубова дате детерминанте. Дакле је доиста

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & \cdots & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_k^1 & \cdots & a_k^k & a_k^{k+1} & \cdots & a_k^n \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1}^{k+1} & \cdots & a_{k+1}^n \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^k \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_k^1 & \cdots & a_k^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1}^{k+1} & \cdots & a_{k+1}^n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Ако ли су равни нули основци, који стоје у k првих стубова и у исти мах у више од $(n-k)$ врста, онда је детерминанта очевидно равна нули.

Примедба. Детерминанте k-ог и $(n-k)$-ог реда зову се *комплементне*.

Детерминанте са празном дијагоналом.

181. Кад у детерминанти:

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

претпоставимо, да су сви основци дијагонале равни нули, добијамо детерминанту са празном дијагоналом

$$\Delta_0^{(n)} = \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & 0 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

У овој детерминанти нема сад свију оних чланова детерминанте $\Delta^{(n)}$, у којима се налази бар један основак њене дијагонале.

Ми ћемо те чланове замислити подељене у групе са

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n$$

основака дијагонале. Да бисмо сад детерминанту $\Delta_0^{(n)}$ допунили, те да изађе детерминанта $\Delta^{(n)}$, треба чланове детерминанте $\Delta^{(n)}$, који се у детерминанти $\Delta_0^{(n)}$ не налазе, овој последњој додати. Ако означимо са $\overset{m}{C}_n$ једну комбинацију m-не класе начињену из n основака дијагонало а са $\Delta_0^{(n-m)}$ одговарајућу детерминанту $(n-m)$-ог реда, или што је свеједно рећи субдетерминанту m-ог реда, са празном дијагоналом, то је онда :

$$1.)\quad \Delta^{(n)} = \Delta_0^{(n)} + \Sigma \overset{1}{C}_n \Delta_0^{(n-1)} + \Sigma \overset{2}{C}_n \Delta_0^{(n-2)} + \ldots$$

$$+ \Sigma \overset{m}{C}_n \Delta_0^{(n-m)} + \ldots + \Sigma \overset{n-2}{C}_n \Delta_0^{(2)} + \overset{n}{C}_n,$$

пошто је $\Delta_0^{(1)} = 0$.

Помоћу овог обрасца добијамо :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & 0 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ a_1^1 \begin{vmatrix} 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^2 & 0 & a_3^4 \\ a_4^2 & a_4^3 & 0 \end{vmatrix} + a_2^2 \begin{vmatrix} 0 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_3^1 & 0 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & 0 \end{vmatrix} + a_3^3 \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^4 \\ a_2^1 & 0 & a_2^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$a_4^4 \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & 0 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & 0 \end{vmatrix} + a_1^1 a_2^2 \begin{vmatrix} 0 & a_3^4 \\ a_4^3 & a \end{vmatrix} + a_1^1 a_3^3 \begin{vmatrix} 0 & a_2^4 \\ a_4^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ a_1^1 a_4^4 \begin{vmatrix} 0 & a_2^3 \\ a_3^2 & 0 \end{vmatrix} + a_2^2 a_3^3 \begin{vmatrix} 0 & a_1^4 \\ a_4^1 & 0 \end{vmatrix} + a_2^2 a_4^4 \begin{vmatrix} 0 & a_1^3 \\ a_3^1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ a_3^3 a_4^4 \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 \\ a_2^1 & 0 \end{vmatrix} + a_1^1 a_2^2 a_3^3 a_4^4.$$

Ако у детерминанти $\Delta^{(n)}$ узмемо, да је :

$$a_1^1 = a_2^2 = \ldots . = a_n^n = x$$

онда се комбинације C претварају у степене x-а и тада је:

$$\overset{m}{C}_n = x^m,$$

дакле се онда образац 5) претвара у :

$$2.)\quad \Delta^{(n)} = x^n + x^{n-2}\, \Sigma \Delta_0^{(2)} + x^{n-3}\, \Sigma \Delta_0^{(3)} + \ldots$$

$$+ x\, \Sigma \Delta_0^{(n-1)} + \Delta_0^{(n)}.$$

Помоћу обрасца 2) налазимо :

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ c & x & d \\ e & f & x \end{vmatrix} = x^3 - x\,(ac + be + df) + ade + bcf.$$

Спрегнуте детерминанте.

182. Кад сменимо сваки основак задате детерминанте са субдетерминантом, која му одговара, онда нова детерминанта, која на тај начин постаје, зове се спрегнута детерминанта (reciproque, adjungirt).

Кад задату детерминанту

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

помножимо са спрегнутом:

$$\triangle' = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^n \end{vmatrix}$$

добијамо:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{vmatrix}$$

где је:

$$c_1^1 = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + \dots + a_n^1 A_n^1$$

$$c_1^2 = a_1^2 A_1^1 + a_2^2 A_2^1 + \dots + a_n^2 A_n^1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_1^n = a_1^n A_1^1 + a_2^n A_2^1 + \dots + a_n^n A_n^1$$

$$c_2^1 = a_1^1 A_1^2 + a_2^1 A_2^2 + \dots + a_n^1 A_n^2$$

$$c_2^2 = a_1^2 A_1^2 + a_2^2 A_2^2 + \dots + a_n^2 A_n^2$$

и т. д.

Из овога увиђамо, да сва c, у којих су горња и доња казаљка различне, морају бити једнака нули, јер се та c добијају, кад се основци једног стуба детерминанте $\triangle$ помноже са субдетерминантама, које одговарају основцима другог једног стуба. Међутим сва она c, у којима су горња и доња казаљка једнаке, једнака су детерминанти $\triangle$, јер она постају, кад се основци једног стуба детерминанте $\triangle$ помноже са својим субдетерминантама.

На тај начин добијамо једначину:

$$\triangle \cdot \triangle' = \begin{vmatrix} \triangle & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \triangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \triangle & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \triangle \end{vmatrix}$$

или:

$$\triangle \cdot \triangle' = \triangle^n$$

или најзад:

$$1)\qquad \triangle' = \triangle^{n-1}$$

Дакле имамо теорему:

Спрегнута детерминанта n-ог реда једнака је (n—1)-ом степену задате детерминанте.

183. Да би смо нашли везу субдетерминаната спрегнуте детерминанте са првобитном детерминантом и њеним субдетерминантама, радићемо као што иде.

Решимо следећих n једначина:

$$1.)\quad \begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n &= y_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n &= y_2 \\ a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + \ldots + a_3^n x_n &= y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n &= y_n, \end{aligned}$$

па ћемо добити, означавајући са $\triangle$ детерминанту сачинилаца на левој страни,

$$2.)\quad \begin{aligned} \triangle x_1 &= y_1 A_1^1 + y_2 A_2^1 + y_3 A_3^1 + \ldots + y_n A_n^1 \\ \triangle x_2 &= y_1 A_1^2 + y_2 A_2^2 + y_3 A_3^2 + \ldots + y_n A_n^2 \\ \triangle x_3 &= y_1 A_1^3 + y_2 A_2^3 + y_3 A_3^3 + \ldots + y_n A_n^3 \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \triangle x_n &= y_1 A_1^n + y_2 A_2^n + y_3 A_3^n + \ldots + y_n A_n^n \end{aligned}$$

Ако означимо детерминанту сачинилаца појединих y-а у овим једначинама са $\triangle'$ и употребимо слово B за означавање субдетерминаната, које одговарају појединим основцима те детерминанте, тако да је:

$$\triangle' = A_k^1 B_k^1 + A_k^2 B_k^2 + \ldots + A_k^n B_k^n$$

онда разрешењем једначина 2) добијамо:

$$3.)\quad \begin{aligned} \triangle' y_1 &= \triangle \left\{x_1 B_1^1 + x_2 B_1^2 + x_3 B_1^3 + \ldots + x_n B_1^n\right\} \\ \triangle' y_2 &= \triangle \left\{x_1 B_2^1 + x_2 B_2^2 + x_3 B_2^3 + \ldots + x_n B_2^n\right\} \\ \triangle' y_3 &= \triangle \left\{x_1 B_3^1 + x_2 B_3^2 + x_3 B_3^3 + \ldots + x_n B_3^n\right\} \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \triangle' y_n &= \triangle \left\{x_1 B_n^1 + x_2 B_n^2 + x_3 B_n^3 + \ldots + x_n B_n^n\right\} \end{aligned}$$

Ако поједина y у овим једначинама заменимо њиним вредностима из једначина 1) и затим одговарајуће сачиниоце лево и десно од знака једнакости ставимо једне другима једнаке, добићемо из прве једначине:

$$4)\quad \begin{aligned} a_1^1 \triangle^{n-2} &= B_1^1 = (A_2^2 A_3^3 \ldots A_n^n) \\ a_1^2 \triangle^{n-2} &= B_1^2 = (A_2^1 A_3^3 \ldots A_n^n) \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots \\ a_1^n \triangle^{n-2} &= B_1^n = (A_2^1 A_3^2 \ldots A_n^{n-1}) \end{aligned}$$

и уопште из k-те једначине:

$$2)\quad \begin{aligned} a_k^1 \triangle^{n-2} &= B_k^1 = (A_{k+1}^2 A_{k+2}^3 \ldots A_{k-1}^n) \\ a_k^2 \triangle^{n-2} &= B_k^2 = (A_{k+1}^1 A_{k+2}^3 \ldots A_{k-1}^n) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_k^n \triangle^{n-2} &= B_k^n = (A_{k+1}^1 A_{k+2}^2 \ldots A_{k-1}^{n-1}) \end{aligned}$$

Дакле *је субдетерминанта првог реда спрегнуте детерминанте једнака $(n-2)$-ом степену задате детерминанте, помноженом са комплементном детерминантом исте задате детерминанте.* Овде се та комплементна детерминанта јавља као основак, пошто је она првог реда.

Да бисмо тако исто нашли, како стоји са субдетерминантом другог реда спрегнуте детерминанте, ми ћемо помножити прву једначину под 3) са B_2^2 а другу са B_1^2, и затим одузети.

Тако ћемо добити:

$$\triangle' (y_1 B_2^2 - y_2 B_1^2) = \triangle \; x_1 (B_1^1 B_2^2) + x_3 (B_1^3 B_2^2) + \ldots \Big\}$$

Ако сад даље из једначине 2), напуштајући другу једначину, избацимо количине

$$y_3, \; y_4, \; \ldots \; y_n$$

и узмемо на ум значење количина: B_1^2 и B_2^2, добићемо:

$$y_1 B_2^2 - y_2 B_1^2 = \triangle \Big\{ x_1 (A_3^3 A_4^4 \ldots A_n^n) + \ldots \Big\}$$

Ако ово заменимо у једначину одмах више ове, добићемо стављајући сачиниоце од x_1 један другом равне:

$$(B_1^1 B_2^2) = \triangle' (A_3^3 A_4^4 \ldots A_n^n)$$

Али помоћу образаца 4) добијамо такође

$$(B_1^1 B_2^2) = (a_1^1 a_2^2) \triangle^{2n-4}$$

А из ове једначине узимајући у обзир једначину 1) у № 182 добијамо:

$$(a_1^1 a_2^2) \triangle^{n-3} = (A_3^3 A_4^4 \ldots A_n^n).$$

На сличан начин радећи нашли бисмо:

$$6.)\quad \begin{aligned} (a_1^1 a_3^2) \triangle^{n-3} &= (A_3^2 A_4^4 \ldots A_n^n) \\ (a_1^1 a_4^2) \triangle^{n-3} &= (A_3^2 A_4^3 \ldots A_n^n) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (a_1^{n-1} a_2^n) \triangle^{n-3} &= (A_3^1 A_4^2 \ldots A_n^{n-2}) \end{aligned}$$

Овде је:

$$(A_3^3 A_4^4 \ldots A_n^n)$$

субдетерминанта другог реда спрегнуте детерминанте а $(a_1^1 a_2^2)$ јесте субдетерминанта другог реда првобитне детерминанте $\triangle$, то јест $(a_1^1 a_2^2)$ јесте комплементна детерминанта детерминанти:

$$(a_3^2 a_4^4 \ldots a_n^n).$$

Дакле је субдетерминанта другог реда спрегнуте детерминанте $\triangle'$ једнака (n—3)-ем степену првобитне детерминанте $\triangle$ помноженом са одговарајућом комплементном детерминантом исте детерминанте $\triangle$

Исто тако нашли бисмо ослањајући се на обрасце 1) у № 182 и 3), 4), 5) и 6) у овој №-и:

$$(a_1^1 a_2^2 a_3^3)\triangle^{n-4} = (A_4^4 A_5^5 \ldots A_n^n).$$

Ако све добивене резултате скупимо, имаћемо овај низ образаца:

$$\triangle' = \triangle^{n-1} = (A_1^1 A_2^2 A_3^3 \ldots A_{n-1}^{n-1} A_n^n)$$

$$\triangle^{n-2} a_1^1 = (A_2^2 A_3^3 \ldots A_{n-1}^{n-1} A_n^n)$$

$$\triangle^{n-3}(a_1^1 a_2^2) = (A_3^3 A_4^4 \ldots A_{n-1}^{n-1} A_n^n)$$

7.) $$\triangle^{n-4}(a_1^1 a_2^2 a_3^3) = (A_4^4 \ldots A_{n-1}^{n-1} A_n^n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\triangle(a_1^1 a_2^2 \ldots a_{n-2}^{n-2}) = (A_{n-1}^{n-1} A_n^n)$$

$$\triangle^0(a_1^1 a_2^2 \ldots a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1}) = A_n^n$$

$$(a_1^1 a_2^2 \ldots a_{n-1}^{n-1} a_n^n) = \triangle$$

Закључимо дакле из овога, *да субдетерминанта k-ог реда спрегнуте детерминанте јесте једнака (n—k—1)-ом степену првобитне детерминанте $\triangle$ помноженом са комплементном детерминантом исте детерминанте $\triangle$.* Та комплементна детерминанта јесте k-ог реда.

184. Ако је $\triangle=1$, онда из обрасца 1) у № 182 следује, да је и $\triangle'=1$. Но из образаца 7) у № 183 видимо, да су тада субдетерминанте спрегнуте детерминанте $\triangle'$ једнаке са комплементним детерминантама првобитне детерминанте $\triangle$.

Ако је $\triangle=0$, онда из истог обрасца 1) у № 182 следује, да је и $\triangle'=0$. Тада из једначине, која је под 7) трећа одоздо, следује:

$$(A_{n-1}^{n-1} A_n^n) = A_{n-1}^{n-1} A_n^n - A_n^{n-1} A_{n-1}^n = 0$$

или:

$$A_{n-1}^{n-1} : A_{n-1}^n = A_n^{n-1} : A_n^n$$

Из ове једначине видимо, да је у овом случају размера одговарајућих основака у двема врстама т. ј. основака, који стоје у тим врстама на истим местима, стална. И обратно ако се ово последње претпостави, лако је доказати, да детерминанта $\triangle$ мора бити једнака нули.

Ако су

$$\triangle_1,\ \triangle_2,\ \triangle_3,\ \ldots\ \triangle_n$$

задате детерминанте, а

$$\triangle_1',\ \triangle_2',\ \triangle_3',\ \ldots\ \triangle_n'$$

њима одговарајуће спрегнуте детерминанте, онда је на основу обрасца 1) у № 182:

$$\triangle_1' = \triangle_1^{n-1}$$

$$\triangle_2' = \triangle_2^{n-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\triangle_n' = \triangle_n^{n-1}$$

Одавде налазимо множењем:

$$\triangle_1' \triangle_2' \triangle_3' \dots \triangle_n' = (\triangle_1 \triangle_2 \triangle_3 \dots \triangle_n)^{n-1}$$

Но како је производ детерминаната опет детерминанта и $(n-1)$-ви степен једне детерминанте њена спрегнута детерминанта, то из последње једначине добијамо:

$$8.) \quad \triangle_1' \triangle_2' \dots \triangle_n' = (\triangle_1 \triangle_2 \triangle_3 \dots \triangle_n)'.$$

Производ спрегнутих детерминаната јесте дакле спрегнута детерминанта производа.

Ако је:

$$\triangle_1 = \triangle_2 = \dots = \triangle_n = \triangle$$

онда из обрасца 8) следује:

$$9.) \qquad (\triangle')^n = (\triangle^n)'.$$

Дакле је n-ти степен спрегнуте детерминанте једнак спрегнутој детерминанти n-ог степена првобитне детерминанте $\triangle$.

Симетричне и симетралне детерминанте.

185. Свака два и два основка детерминанте:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

који су такви, да је казаљка врсте једног једнака казаљки стуба другог основка и обратно, зваћемо *реципрочним.* Тако су основци a_1^2 и a_2^1, a_2^3 и a_3^2 и уопште a_p^q и a_q^p реципрочни основци.

Узмимо сада, да су у задатој детерминанти два и два реципрочна основка једнаки, да је дакле уопште:

$$a_p^q = a_q^p.$$

Тада се детерминанта зове *симетрична,* и то са *празном дијагоналом,* кад је уопште

$$a_p^p = 0,$$

а са *пуном дијагоналом,* кад је уопште:

$$a_p^p = c,$$

где је c или стално или зависно од p.

Тако је:

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & c \\ b & c & x \end{vmatrix} = x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\,x + 2\,abc$$

симетрична детерминанта трећег реда са пуном дијагоналом. Међу тим је:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2\,abc$$

симетрична детерминанта трећег реда са празном дијагоналом.

Кад симетричну детерминанту $\triangle$ уредимо најпре по основцима k-те врсте, а затим по основцима k-ог стуба, добићемо у једном и у другом од та два случаја:

$$\triangle = a_k^1 A_k^1 + a_k^2 A_k^2 + \ldots + a_k^n A_k^n$$

$$\triangle = a_1^k A_1^k + a_2^k A_2^k + \ldots + a_n^k A_n^k.$$

одакле с погледом на то, да су два и два у овим једначинама налазећа се реципрочна основка једнаки, следује:

$$A_p^q = A_q^p.$$

Дакле је спрегнута детерминанта једне симетричне детерминанте такође спрегнута.

186. Ако су у задатој детерминанти два и два реципрочна основка једнаки али противно означени, дакле ако је уопште:

$$a_p^q = -a_q^p,$$

онда се детерминанта зове *симетрална*. Ако је уопште:

$$a_p^p = 0$$

детерминанта се зове симетрална са *празном дијагоналом*, а ако је:

$$a_p^p = c,$$

где је c или стално или зависно од p, детерминанта се зове симетрална са *пуном дијагоналом*. Тако је:

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ -a & x & c \\ -b & -c & x \end{vmatrix} = x^3 + (a^2 + b^2 + c^2)\,x$$

симетрална детерминанта трећег реда са пуном дијагоналом. Међу тим

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2$$

јесте симетрална детерминанта четвртог реда са празном дијагоналом

Кад код симетралних детерминаната помножимо поједине врсте — или стубове — са -1, врсте ће се претворити у стубове и обратно, и тада ће детерминанта парнога реда добити знак $+$ а детерминанта непарнога реда знак $-$. Али како се детерминанта не мења, кад се врсте претворе у стубове и обратно, то детерминанта мора бити једнака нули у другом случају. Дакле:

Симетрална детерминанта са празном дијагоналом вазда је једнака нули.

Но пошто је она једнака нули, то је онда на основу №-е 184:

$$A_p^p : A_p^q = A_q^p : A_q^q$$

или пошто су сад спрегнуте детерминанте такође симетричне, дакле због тога:

$$A_p^q = A_q^p$$

то је онда :

$$1.) \qquad A_p^q = \sqrt{A_p^p \, A_q^q}.$$

Према томе стоји теорема :

Сваки основак детерминанте, која је спрегнута једној симетралној детерминанти непарнога реда а са празном дијагоналом јесте геометријска средина двама основцима, који стоје у дијагонали тамо, где се ова сукобљава са врстом и стубом основка.

Узмимо на пример да је дата детерминанта :

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 \\ -a_1^2 & 0 & a_2^3 \\ -a_1^3 & -a_2^3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Њена спрегнута детерминанта јесте :

$$\triangle' = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}$$

Усљед доказане теореме јесте :

$$A_2^3 = \sqrt{A_2^2 \, A_3^3}.$$

или кад заменимо вредности :

$$a_1^2 \, a_1^3 = \sqrt{(a_1^2)^2 \, (a_1^3)^2}$$

На основу обрасца 10) имамо :

$$(A_p^1)^2 = A_1^1 \, A_p^p$$

$$(A_p^2)^2 = A_2^2 \, A_p^p$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$(A_p^n)^2 = A_n^n \, A_p^p.$$

Одавде добијамо :

$$\frac{(A_p^1)^2}{A_1^1} = \frac{(A_p^2)^2}{A_2^2} = \ldots . = \frac{(A_p^n)^2}{A_n^n} = A_p^p$$

или :

$$2.) \quad (A_p^1)^2 : (A_p^2)^2 : \ldots : (A_p^n)^2 = A_1^1 : A_2^2 : \ldots : A_n^n.$$

187. Уредимо детерминанту :

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots a_2^n \\ . \quad . & . \quad . \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots a_n^n \end{vmatrix}$$

по основцима првог стуба, па ћемо добити :

$$\triangle = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + \ldots + a_n^1 A_n^1.$$

Кад тако исто уредимо поједине субдетерминанте :

$$A_2^1, \ A_3^1, \ldots A_n^1,$$

по основцима њихових првих врста, добићемо :

3.) $$\Delta = a_1^1 A_1^1 - \Sigma a_p^1 a_1^q \alpha_p^q$$

где знак Σ захтева, да се у изразу под њим има ставити редом, $p = 2, 3, \ldots n$ и при свакој од тих замена $q = 2, 3, \ldots n$ и да се тако добивени производи имају најзад сабрати. Поједине количине α, које се тада јављају, означавају извесне субдетерминанте другог реда.

Ако је Δ симетрална детерминанта парног реда а са празном дијагоналом, онда је A_1^1 таква иста детерминанта али непарног реда, дакле је онда због тога $A_1^1 = 0$ и на основу обрасца 1) у № 186:

$$\alpha_p^q = \sqrt{\alpha_p^p \alpha_q^q}.$$

Усљед тога и због $\alpha_p^q = -\alpha_q^p$ претвара се образац 3) у:

4) $$\Delta = \Sigma a_1^p \sqrt{\alpha_p^p}\, a_1^q \sqrt{\alpha_q^q},$$

где опет знак Σ захтева, да се у изразу под њим има ставити редом $p = 2, 3, \ldots n$ и при свакој од тих замена $q = 2, 3, \ldots n$ и да се најзад тако добивени резултати имају сабрати. Али се, као што се даје лако увидети, последња једначина може сад и овако написати:

5.) $$\Delta = \left\{\Sigma a_1^p \sqrt{\alpha_p^p}\right\}^2$$

где знак Σ захтева, да се у изразу под њим има ставити редом:

$$p = 2, 3, \ldots n$$

и да се тако добивени производи имају сабрати. Дакле смо нашли теорему:

Симетралне детерминанте непарнога реда а са празном дијагоналом јесу потпуни квадрати.

Тако је на пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ -a_1^2 & 0 & a_2^3 & a_2^4 \\ -a_1^3 & -a_2^3 & 0 & a_3^4 \\ -a_1^4 & -a_2^4 & a_3^4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ a_1^2 \begin{vmatrix} 0 & a_3^4 \\ a_3^4 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} - a_1^3 \begin{vmatrix} 0 & a_2^4 \\ a_2^4 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + a_1^4 \begin{vmatrix} 0 & a_2^3 \\ -a_2^3 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \right\}^2$$

$$= (a_1^2 a_3^4 - a_1^3 a_2^4 + a_1^4 a_2^3)^2.$$

Ако је дијагонала симетралне детерминанте пуна и ако је:

$$a_p^p = x$$

то је онда по обрасцу 2) у № 181

$$\Delta = x^n + x^{n-2}\, \Sigma \Delta_0^{(2)} + x^{n-4}\, \Sigma \Delta_0^{(4)} + \ldots.$$

јер је сада (№ 186):

$$\Delta_0^{(3)} = \Delta_0^{(5)} = \ldots = \Delta_0^{(2k+1)} = 0$$

Дакле:

Симетрална детерминанта са пуном дијагоналом јесте цела и рационална функција основка x, који је у *дијагонали; и у њој — функцији — налазе се само парни или само непарни степени x-а. Поједини сачиниоци јесу на основу обрасца 5) збирови потпуних квадрата.*

Примери:

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ -a & x & c \\ -b & -c & x \end{vmatrix} = x^3 + x(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ -a & x & d & e \\ -b & -d & x & f \\ -c & -e & -f & x \end{vmatrix} = x^4 + x^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) + (af - be + cd)^2.$$

Непотпуне детерминанте.

188. Кад у једној детерминанти n-ог реда изоставимо последњу врсту, онда остаје један симбол, који по себи нема никаква значења и који се зове *непотпуна* детерминанта n-ог реда. Основцима изостављене врсте одговарају у непотпуној детерминанти одређене субдетерминанте.

Тако су на пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

две непотпуне детерминанте трећег реда. Основцима изостављених трећих врста одговарају субдетерминанте другог реда:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \; - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}; \; - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Израз:

$$P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

који за сада нема још никаква значења, значиће од сада збир производа, који се добијају, кад се одговарајуће субдетерминанте тих двеју непотпуних детерминаната међу собом помноже. Дакле је;

$$1.) \quad P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 b_2)(\alpha_1 \beta_2) + (a_1 c_2)(\alpha_1 \gamma_2) + (b_1 c_2)(\beta_1 \gamma_2).$$

За P можемо наћи још један израз, који је од овога по облику различан. Зарад тога проматрајмо детерминанту:

$$2.)\quad \Delta = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & -1 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Кад ову детерминанту по методама изложеним у №-ма 179 и 180 представимо као збир производа из детерминаната другог и трећег реда, добићемо:

$$\Delta = -\left\{ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right\}$$

или после врло простог свођаја:

$$3)\quad \Delta = (a_1\, b_2)\,(\alpha_1\, \beta_2) + (a_1\, c_2)\,(\alpha_1\, \gamma_2) + (b_1\, c_2)\,(\beta_1\, \gamma_2),$$

Из упоређаја образаца 1) и 3) сљедује:

$$P = \Delta$$

За P може се најзад добити израз у још једном облику. Зарад тога помножимо у детерминанти 2) основке трећег, четвртог и петог стуба редом са a_1, b_1, и c_1 и

додајмо добивене производе одговарајућим основцима првог стуба. Затим помножимо исто тако основке трећег, четвртог и петог стуба са a_2, b_2, и c_2 и додајмо добивене производе одговарајућим основцима другог стуба. Тако ћемо добити:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1), & (a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1), & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2), & (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2), & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Одавде добијамо на основу онога, што смо доказали на крају №-е 180.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1), & (a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1) \\ (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2), & (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2) \end{vmatrix}$$

Одавде узимајући на ум, да је прва детерминанта десно од знака једнакости $= -1$, добијамо:

$$\Delta = P = \begin{vmatrix} (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1), & (a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1) \\ (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2), & (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2) \end{vmatrix}$$

Као што се види, вредност за P добија се из задатих непотпуних детерминаната исто онако како се добија производ двеју потпуних детерминаната.

Овај исти начин рада даје се употребити и код непотпуних детерминаната виших редова.

Заједнички корени виших једначина. Резултанте.

189. Пређе смо нашли, да услов који треба да је испуњен, па да $(n+1)$ једначина са n непознатих могу заједно опстати, јесте тај, да детерминанта свију сачинилаца у једначинама, урачунавајући ту и чланове од непознатих независне, мора бити једнака нули. Питање је сад, да ли се и код једначина виших степена са више непознатих могу наћи слични услови. Ми ћемо овде прећи само случај двеју виших једначина са једном непознатом.

Нека су на пример задате једначине:

$$1.)\quad a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m = 0,$$

$$2.)\quad b_0x^n + b_0x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_n = 0,$$

од којих је прва m-ог а друга n-ог степена. Пошто x у обема једначинама представља њин заједнички корен, то онда једнаки степени x-а у задатим и из њих изведеним једначинама морају се сматрати као једнаки бројеви. Сад кад помножимо прву једначину са:

$$x^{n-1},\ x^{n-2},\ \ldots\ x^2,\ x,\ 1$$

а другу са:

$$x^{m-1},\ x^{m-2},\ \ldots\ x^2,\ x,\ 1$$

добићемо ових $(m+n)$ једначина:

$$\begin{aligned}
a_0x^{m+n-1} + a_1x^{m+n-2} + a_2x^{m+n-3} + \ldots\ldots &= 0\\
a_0x^{m+n-2} + a_1x^{m+n-3} + \ldots\ldots &= 0\\
a_0x^{m+n-3} + \ldots\ldots &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
\ldots + a_m &= 0\\
b_0x^{m+n-1} + b_1x^{m+n-2} + b_2x^{m+n-3} + \ldots\ldots &= 0\\
b_0x^{m+n-2} + b_1x^{m+n-3} + \ldots\ldots &= 0\\
b_0x^{m+n-3} + \ldots\ldots &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
\ldots + b_n &= 0
\end{aligned}$$

Степене од x у овим једначинама и којих је степена на броју $m+n-1$ смемо очевидно сматрати сваки као једну непознату. И пошто је $m+n$ једначина а само $m+n-1$ непознатих, то онда мора бити једнака нули детерминанта сачинилаца у тим једначинама. Дакле.

$$3.)\quad \triangle = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\
0 & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\
0 & 0 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & \cdot & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_m\\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\
0 & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & \cdot & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_n
\end{vmatrix} = 0$$

У овој једначини исказан је услов, који треба да је испуњен, те да једначине 1) и 2) могу заједно опстати, то ће рећи да могу имати заједничка корена. Једначина 3) зове се и *резултанта* даних једначина.

Узмимо као први пример ове две једначине:

4.) $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

5.) $$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

Кад помножимо прву једначину са x и 1 а другу са x^2, x и 1, добијамо ових пет једначина:

6.) $$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \; . \; . &= 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\ \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 \; . \; . \; . \; . \; . &= 0 \\ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x \; . \; . &= 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Резултанта једначина 4) и 5) јесте:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Да бисмо нашли и сам заједнички корен једначина 4) и 5), написаћемо другу, четврту и пету једначину под 6) овако:

$$\begin{aligned} (ax + b)\, x^2 + cx + d &= 0 \\ (\alpha x + \beta)\, x^2 + \gamma x \; . \; . &= 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Ове три једначине са две непознате x^2 и x могу заједно опстати само тако, ако је:

$$\begin{vmatrix} (ax + b) & c & d \\ (\alpha x + \beta) & \gamma & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Ако ову детерминанту разложимо на два сабирка, добићемо:

$$\begin{vmatrix} a & c & d \\ \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c & d \\ \beta & \gamma & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

одакле се вредност непознате x лако налази.

Узмимо као други пример ове две једначине, обе истог степена:

7.) $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

8.) $$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

Одавде добијамо на горепоменути начин овај низ једначина:

$$
\begin{aligned}
ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 \; . \; . \; . \; . \; . &= 0\\
ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \; . \quad &= 0\\
ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0
\end{aligned}
$$

9.)

$$
\begin{aligned}
\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 \; . \; . \; . \quad . &= 0\\
\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x \; . \; . &= 0\\
\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta &= 0
\end{aligned}
$$

Дакле је резултанта даних једначина:

$$
10.) \qquad \triangle = \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0\\ 0 & a & b & c & d & 0\\ 0 & 0 & a & b & c & d\\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 & 0\\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0\\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0
$$

Овој детерминанти можемо дати простији облик радећи на начин, који долази.

Узмимо детерминанту:

$$
11.) \qquad \triangle_1 = \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \delta & 0 & 0 & 0\\ \gamma & \delta & 0 & 0 & 0 & 0\\ \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -b & -c & -d & 0 & 0 & -1\\ -c & -d & 0 & 0 & -1 & 0\\ -d & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

Ова детерминанта на основу № 180 може се написати и овако:

$$
\triangle_1 = \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \delta\\ \gamma & \delta & 0\\ \delta & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

Пошто је прва детерминанта десно $= -\delta^3$ а друга једнака $+1$, то је:

$$
\triangle_1 = -\delta^3.
$$

Ако сад узимајући овај образац на ум помножимо једначине 10) и 11), добићемо:

$$
-\delta^3 \triangle = \begin{vmatrix} (a\beta - \alpha b) & (a\gamma - \alpha c) & (a\delta - \alpha d), & 0 & 0 & -\alpha\\ (a\gamma - \alpha c), & (a\delta - \alpha d) + (b\gamma - \beta c), & (b\delta - \beta d), & 0 & -\alpha & -\beta\\ (a\delta - \alpha d) & (b\delta - \beta d) & (cd - \gamma d), & 0 & -\beta & -\gamma\\ 0 & 0 & 0 & -\beta & -\gamma & -\delta\\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & -\delta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

На основу № 180 добијамо одавде:

$$-\delta^3\Delta = \begin{vmatrix} (a\beta) & (a\gamma) & (a\delta) \\ (a\gamma), & (a\delta)+(b\gamma), & (b\delta) \\ (a\delta) & (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\beta & -\gamma & -\delta \\ -\gamma & -\delta & 0 \\ -\delta & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

где смо детерминанте другог реда, које се јављају као чланови у детерминанти десно од знака једнакости, означили на познати краћи начин Пошто је сад у последњој једначини друга детерминанта десно од знака једнакости $=\delta^3$, то је онда:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} (a\beta) & (a\gamma) & (a\delta) \\ (a\gamma), & (a\delta)+(b\gamma), & (b\delta) \\ (a\delta) & (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix}$$

Ако је дакле ова детерминанта једнака нули, онда ће једначине 7) и 8) имати заједничка корена. Претпостављајући сад да то стоји, наћићемо вредност за x из једначина 10) овако:

$$\begin{aligned} (ax+b)\,x^3 + cx^2 + dx \ldots . &= 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\ (\alpha x+\beta)\,x^3 + \gamma x^2 + \delta x \ldots . &= 0 \\ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta &= 0 \end{aligned}$$

Ове четири једначине са три непознате x^3, x^2 и x могу заједно опстати само тако, ако је:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (ax+b) & c & d & 0 \\ a & b & c & d \\ (\alpha x+\beta) & \gamma & \delta & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$$

Разлажући десну детерминанту на два сабирка, налазимо:

$$\begin{vmatrix} a & c & d & 0 \\ 0 & b & c & d \\ \alpha & \gamma & \delta & 0 \\ 0 & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c & d & 0 \\ a & b & c & d \\ \beta & \gamma & \delta & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$$

Одакле се x даје лако израчунати. Но ова једначина може се још знатно упростити на овај начин.

Означимо прву и другу детерминанту у овој једначини са $\triangle_3$ и $\triangle_4$ и помножимо их са детерминантом:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} \gamma & \delta & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \\ -c & -d & 0 & -1 \\ -d & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \delta^2$$

па ћемо добити прво:

$$\triangle_3 \triangle_5 = \begin{vmatrix} (a\gamma - \alpha c) & (a\delta - \alpha d) & 0 & -\alpha \\ (b\delta - \beta d) & (c\delta \quad \gamma d) & -\beta & -\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & -\delta \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \end{vmatrix}$$

и друго:

$$\triangle_4 \triangle_5 \begin{vmatrix} (a\delta - \alpha d) + (b\gamma - \beta c), & (b\delta - \beta d), & -\alpha & -\beta \\ (b\delta - \beta d) & (c\delta - \gamma d) & -\beta & -\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & -\delta \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \end{vmatrix}.$$

Из ових двеју једначина добијамо на основу № 180:

$$\triangle_3 \triangle_5 = \begin{vmatrix} (a\gamma) & (a\delta) \\ (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -\gamma & -\delta \\ -\delta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\triangle_4 \triangle_5 = \begin{vmatrix} (a\delta) + (b\gamma), & (b\delta) \\ (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \gamma & -\delta \\ -\delta & 0 \end{vmatrix}$$

Пошто је у обема овим једначинама друга детерминанта десно од знака једнакости $= -\delta^2$ а $\triangle_5 = \delta^2$, то је онда:

$$\triangle_3 = - \begin{vmatrix} (a\gamma) & (a\delta) \\ (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix}$$

$$\triangle_4 = \begin{vmatrix} (a\delta) + (b\gamma) & (b\delta) \\ (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix}$$

Ако најзад помножимо $\triangle_2$ и $\triangle_5$ и сведемо, наћићемо најзад:

$$\begin{vmatrix} (a\gamma).x + (a\delta) + (b\gamma), & (a\delta).\,x + (b\delta) \\ (b\delta) & (c\delta) \end{vmatrix} = 0$$

одакле се x може такође врло лако наћи.

ДОДАТАК.

Неколико речи о изводима бесконачних редова.

190. Ако је $f(x)$ буди каква функција x-а и ако ми пустимо, да x прирасте за δ, онда разлика

$$f(x + \delta) - f(x)$$

представља прираштај функције т. ј. оно, за колико се вредност функције $f(x)$ променила, кад је x прирасло за δ. Прираштај x-а може бити положан или одречан а тако исто и прираштај функције $f(x)$.

Израз:

$$lim \left\{ \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} \right\} \quad \text{за } \delta = 0.$$

то ће рећи граница, којој при бесконачном умаљавању од δ тежи количник између прираштаја функције $f(x)$ и прираштаја δ променљиве x, зове се *први извод* функције $f(x)$, и означава се, пошто је он у опште опет извесна функција x-а, са $f'(x)$.

Ако је $f(z)$ функција уображене променљиве

$$z = re^{\theta i},$$

онда израз:

$$lim \left\{ \frac{f(z + \varepsilon . e^{\varphi i}) - f(z)}{\varepsilon . e^{\varphi i}} \right\} \quad \text{за } \varepsilon = 0$$

где ε значи бесконачно мали прираштај z-ог модула узет у произвољном правцу φ, зове се *први извод* функције $f(z)$. У инфинитезималном рачуну доказује се, да је тај први извод независан од ε и φ. И пошто је он уопште функција z-а, то се он означава са $f'(z)$.

Примери

1°. Ако је $f(x) = x^m$, онда је

$$f'(x) = lim \left\{ \frac{(x+\delta)^m - x^m}{\delta} \right\} = x^{m-1}\, lim \left\{ \frac{\left(1 + \frac{\delta}{x}\right)^m - 1}{\frac{\delta}{x}} \right\}$$

Или пошто је по обрасцу 11) у № 26:

$$lim \left\{ \frac{\left(1 + \frac{\delta}{x}\right)^m - 1}{\frac{\delta}{x}} \right\} = m,$$

то је најзад:

$$f'(x) = mx^{m-1}$$

2°. Ако је $f(x) = (1+x)^m$, онда на сличан начин налазимо, да је:

$$f'(x) = m\,(1+x)^{m-1}.$$

3°. Ако је $f(x) = sin\, mx$, онда је:

$$f'(x) = lim \left\{ \frac{sin\, m\,(x+\delta) - sin\, mx}{\delta} \right\}$$

$$= lim \left\{ \frac{2\, cos\, m\left(x + \frac{1}{2}\,\delta\right) sin\, \frac{1}{2}\, m\delta}{\delta} \right\}$$

$$= m\; lim \left\{ cos\, m\left(x + \frac{1}{2}\,\delta\right) . \frac{sin\, \frac{1}{2}\, m\delta}{\frac{1}{2}\, m\delta} \right\}$$

или најзад:

$$f'(x) = m\, cos\, mx.$$

За $f(x) = sin\, x$ јесте $f'(x) = cos\, x$.

4°. Ако је $f(x) = cos\, mx$, онда на сличан начин као мало час налазимо да је:

$$f'(x) = -\, m\, sin\, mx.$$

За $f(x) = cos\, x$ јесте $f'(x) = -\, sin\, x$.

5°. Ако је $f(x) = a^x$, онда је:

$$f'(x) = lim \left\{ \frac{a^{x+\delta} - a^x}{\delta} \right\} = a^x\, lim \left\{ \frac{a^\delta - 1}{\delta} \right\}$$

Но како је по обрасцу 9) у № 26

$$\lim \left\{\frac{a^{\delta}-1}{\delta}\right\} = la$$

то је најзад:

$$f'(x) = a^x\, la.$$

За $f(x) = e^x$ јесте $f'(x) = e^x$.

6°. Ако је $f(x) = \log x$ онда је:

$$f'(x) = \lim \left\{\frac{\log(x+\delta) - \log x}{\delta}\right\}$$

$$= \lim \frac{\log\left(1+\frac{\delta}{x}\right)}{\delta} = \frac{1}{x} \lim \frac{\log\left(1+\frac{\delta}{x}\right)}{\frac{\delta}{x}}$$

Али је

$$\lim \frac{\log\left(1+\frac{\delta}{x}\right)}{\frac{\delta}{x}} = \log e$$

Дакле је напослетку:

$$f'(x) = \frac{\log e}{x}$$

или ако је a основа логаритамске системе:

$$f'(x) = \frac{1}{x\, la}.$$

За $f(x) = lx$ јесте $f'(x) = \frac{1}{x}$.

НАУКА

О

КОМБИНАЦИЈАМА

НАПИСАО

Димитрије Нешић

ПРОФЕСОР ВЕЛИКЕ ШКОЛЕ

БЕОГРАД

КРАЉЕВСКО-СРПСКА ДРЖАВНА ШТАМПАРИЈА

1883