ВИДОЈЕ Ж. ВЕСЕЛИНОВИЋ
в. д. шефа дирекције Д. х. банке
хонор. наставник Економско-комерцијалне
високе школе

ПОЛИТИЧКА РАЧУНИЦА

I КЊИГА

ФИНАНСИЈСКА РАЧУНИЦА

БЕОГРАД, 1940

Од истог писца:

Распоред ануитета дугорочних хипотекарних зајмова.
Потсетник из Политичке рачунице.

У припреми:

Трговачка рачуница.
Банкарска рачуница.

С. Сретеновић—В. Веселиновић:

Осигурања на живот са основима комбинаторике и рачуна вероватноће.

ШТАМПАРИЈА „ГЛОБУС"
БЕОГРАД, КОСМАЈСКА 28

Садржај

Улог промењив

Рачун ренте

Рента стална

Рента промењива

II ДЕО

Амортизација зајмова са декурзивним рачунањем интереса

Зајмови подељени на обвезнице

Све обавезнице имају исту номиналу

Зајам је подељен на више група обавезница

Амортизација зајмова са промењивом интересном стопом

III ДЕО

Антиципативно рачунање интереса

Рачун улога

Рачун ренте

Амортизација зајмова

IV ДЕО

Курс зајма. Ефективна стопа зајма. Паритет курсева. Избор повољније понуде за зајам. Конверзија дуга.

V ДЕО

Лутријски зајмови

Таблице

Предговор

Ова књига намењена је, с једне стране, слушаоцима Економско-комерцијалне високе школе, а с друге стране, и свим оним лицима која желе да се упознају са решавањем проблема финансијске рачунице. Према томе она ће добро доћи не само слушаоцима напред поменуте школе него и свим овим лицима која раде у привредним предузећима и Министарствима, као и ученицима трговачких академија.

При изради трудио сам се не само да обухватим све најглавније проблеме него да их и изложим на један начин сваком приступачан. Због тога овом књигом моћи ће да се лако послуже и она лица која желе да сама науче проблеме изложене у њој. Код израде бројних примера служио сам се таблицама S. Spitzer-a, јер приложене таблице нисам био још завршио. Услед тога у неким примерима употребљене су интересне стопе којих нема у приложеним таблицама. Показаним методама и помоћу приложених таблица доћи ће се до истих резултата.

Најзад дужан сам да овим изразим захвалност сарадницима при изради треће таблице и коректури ове књиге.

Сваку умесну примедбу примам са захвалношћу и имаћу је у виду при евентуалном другом издању.

Књизи сам додао и таблице од којих су првих шест мој самосталан рад. При изради ових таблица служио сам се машинама за рачунање и то: за другу таблицу машином Мерцедес-Еуклид, а за пету и шесту машином Madas. Седму таблицу узео сам од S. Spitzer-a. Осму и девету таблицу узео сам из књиге Сретеновић-Веселиновић. — Осигурања на живот са основима комбинаторике и рачуна вероватноће. Десету, једанесту и дванесту од E. Czuber-a, а тринесту и четрнесту од Dr. F. Boehm-a.

При изради књиге служио сам се следећом литературом:

Prof. Aug. Schlimbach — Politische Arithmetik.
Heinrich Murai — Zinseszimsen — Eilage — Renten.
Simon Spitzer — Zinses-Zinsen — und Renten — Rechnung.
Fédor Thoman — Théorie des interêts composés et des annuités.
Бранислав Б. Тодоровић — Политичка рачуница.
E. Czuber — Wahrscheinlichkeitsrechnung.

C. L. Landré — Lebensversicherung.
Prof. Dr. F. Boehm — Versicherungsmathematik.
K. Herald — Finanz Mathematik.
Holzinger — Lehrbuch der Politischen Arithmetik.
H. Laurent — Théorie des opérations financières.
F. Vintéjoux — Nouvelles tables d'intérêts composés et d'annuités.
Marcel Chollet — Remboursement des emprunts a long terme.
H. Galbrun — La comptabilité des emprunts a long terme.

Београд, Децембра 1939 год.

Писац

Увод

Политичка рачуница је једна од многобројних грана Примењене математике. Она се бави решавањем задатака када се примењује интерес на интерес или рачун вероватноће са интересом на интерес, а у извесним случајевима само рачун вероватноће. Према томе Политичка рачуница дели се на три дела: Финансијску рачуницу, која решава задатке у којима се примењује интерес на интерес без рачуна вероватноће; Рачун вероватноће, који решава проблеме без примене интереса на интерес; и Осигурање, које проучава све оне задатке где се примењује рачун вероватноће са рачунањем интереса на интерес.

Предмет ове књиге су проблеми у којима се примењује рачунање интереса на интерес. Проблеми у којима се у рачун узимају рачун вероватноће или и рачун вероватноће и интерес на интерес биће предмет следећих књига.

Да би се задатци из Политичке рачунице правилно решавали треба увек имати на уму следеће: Разноимени бројеви не могу се ни сабирати ни одузимати. Ово ће рећи да се две суме које имају различите рокове не могу сабирати нити одузимати. Али пошто има и таквих количина које се могу довести на исто име, ово се правило има кориговати утолико што ће му се додати: док се не доведу на исто име. Према томе ако у задатцима имамо суме са различитим валутама ми их не можемо сабирати нити одузимати све дотле док их не сведемо на исту валуту. Тако нпр. ако се сума K_1 има платити данас а сума K_2 после 3 месеца, онда сума, која се има примити данас, није $K_1 + K_2$, већ једна сума мања за интерес на K_2 за 3 месеца; дакле:

$$K_1 + \left(K_2 - \frac{K_2 p \cdot 3}{1200}\right),$$

где p означава годишњу интересну стопу. Према томе суми K_2 са роком 3 месеца одговора сума $K_2 - \frac{K_2 p \cdot 3}{1200}$ са роком данас. На тај начин ми смо суму K_1 и K_2 свели на исто име, јер смо обавезу 3 месеца од данас изразили у обавези данас.

Исто тако обавезу K_1 данас могли смо изразити у обавези 3 месеца. То бисмо постигли ако на K_1 додамо интерес за 3 месеца; дакле:

$$K_1 + \frac{K_1 p \cdot 3}{1200}$$

Према томе укупне обавезе после 3 месеца биле би

$$\left(K_1 + \frac{K_1 p \cdot 3}{1200}\right) + K_2$$

Међутим ако би ове обавезе изражавали у обавезама 1 месец имали би:

$$\left(K_1 + \frac{K_1 p}{1200}\right) + \left(K_2 - \frac{K_2 p \cdot 2}{1200}\right)$$

Дакле првој смо додали интерес за месец дана, а од друге одузели интерес за 2 месеца. На тај смо начин обавезу K_1 претворили од имена данас у име 1 месец, а обавезу K_2 од имена 3 месеца у име 1 месец; дакле свели обе обавезе на исти рок, па их можемо сабирати, а по потреби и одузимати.

Када сада знамо да се поједине суме своде на каснији или ранији рок додавањем или одузимањем интереса и да се сведене на исти рок могу сабирати и одузимати потребно је да знамо још и то да је основно правило Политичке рачунице тзв. правило једнакости уплата и исплата сведених на исти рок. Ово се правило зове још и *принцип еквиваленције*. Тако нпр. ако се неко обавезао да у току n година крајем године плаћа по a дин. са интересом $p^0/_0$ онда би, на основу предњег принципа, сума, коју је примио годину дана пре него што треба да плати прву суму од a дин., морала бити једнака збиру свих ових сума које има да плати, али сведених на дан када је примио K дин. Ако су те суме $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ морало би бити:

$$K = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

где су износи $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ сваки појединачно мањи од a, па према томе и њихов збир од n a. Разлике: $a - a_1$, $a - a_2$, $a - a_3, \ldots, a - a_n$ претстављају интерес на интерес које поверилац добија на уложених a_1 дин. за годину дана, a_2 дин. за 2 године, a_3 дин. за 3 године итд. a_n дин. за n година.

Одмах да напоменем да се свођење не мора вршити на најранији нити на најкаснији рок већ се то може вршити и на неки рок између ова два, па чак и на неки рок који је ранији од најранијег у задатку, а исто тако и на неки рок који је каснији и од најкаснијег у задатку. Није препоручљиво да се врши свођење ни на ранији од најранијег ни на каснији од најкаснијег, већ на онај датум у коме се налази непозната или ако се непозната понавља више пута на један период пре оног о коме се непозната први пут појављује.

Код рачунања интереса за један период капиталисања треба имати на уму следеће:

1) Ако се интерес рачуна декурзивно, а позната је сума без интереса онда се на ту суму рачуна интерес рачуном од сто, јер ова сума претставља чист капитал. Напротив ако је позната сума заједно са интересом онда се интерес израчунава интересним рачуном на сто, јер сума заједно са интересом претставља увећани капитал. Према томе ако је нека сума K дата под интерес на интерес са $p^0/_0$ год. декурзивно, па се тражи на коју је суму ова сума порасла за годину дана при годишњем капиталисању, треба на ову суму наћи интерес за годину дана интересним рачуном од сто и тако нађени интерес сабрати; дакле после годину дана до дана када је сума K дин. уложена улагач ће имати:

$$K + \frac{Kp}{100} = K_1$$

Ако се зна да улагач после годину дана од дана улога са $p^0/_0$ годишње при годишњем капиталисању има заједно са интересом K_1 дин. онда да би нашли колико је уложио треба на ових K_1 дин. наћи интерес интересним рачуном на сто, па тако нађени интерес одузети; дакле:

$$K_1 - \frac{K_1 p}{100 + p}$$

Према томе ако се зна капитал без интереса а жели се знати капитал са интересом за један период треба на капитал без интереса наћи интерес рачуном од сто за један период и тај интерес сабрати. Напротив ако је познат капитал са интересом за један период, онда да би се нашао капитал без интереса треба на познати капитал са интересом наћи интерес интересним рачуном на сто и овако нађени интерес одузети од капитала увећаног са интересом.

2) Ако се интерес рачуна антиципативно, а позната је почетна вредност капитала (капитал умањен за интерес) онда се интерес за један период рачуна интересним рачуном у сто, јер је почетни капитал умањени капитал. Напротив ако је познат капитал заједно са интересом онда се интерес за једну годину рачуна интересним рачуном од сто, јер је капитал са интересом чист капитал.

Према томе ако је неко дао под интерес K дин. са $\pi^0/_0$ годишње антиципативно при годишњем капиталисању онда ће он на крају прве године имати:

$$K + \frac{K\pi}{100 - \pi} = K_1$$

Међутим ако знамо да неки улагач после годину дана при годишњем капиталисању са $\pi^0/_0$ годишње антиципативно има

K_1 дин., па се питамо колико је уложио годину дана раније, ту суму добићемо када на K_1 израчунамо интерес интересним рачуном од сто и тако нађени интерес одузмемо; дакле:

$$K_1 - \frac{K_1 \pi}{100}$$

Према томе ако се при антиципативном рачунању интереса зна капитал без интереса, а жели се знати капитал са интересом за један период треба на капитал без интереса интересним рачуном у сто наћи интерес и тај интерес сабрати са почетним капиталом (капиталом без интереса). Ако је познат капитал заједно са интересом за један период па се жели наћи капитал без интереса треба на капитал са интересом израчунати интерес интересним рачуном од сто и тако нађени интерес одузети.

Све што је овде речено за интерес једног периода важи и за интерес ако је време мање од периода капиталисања.

Из предњих излагања изводи се и следећи закључак: Антиципативна интересна стопа је умањени капитал, а декурзивна стопа увећани капитал. Према томе ако се жели антиципативна стопа претворити у декурзивну треба на њу за један период (ако је стопа годишња за годину, полугодишња за полугодину итд.) наћи интерес интересним рачуном у сто и тај интерес сабрати са антиципативном стопом.

Нађена вредност биће еквивалентна декурзивна стопа p, антиципативној стопи π. Место да се рачуна интерес може се одмах наћи капитал — овде декурзивна стопа — из једначине:

$$p = \frac{100\,\pi}{100 - \pi}$$

При претварању декурзивне интересне стопе у антиципативну треба на декурзивну интересну стопу наћи интерес за један период интересним рачуном на сто и тако израчунати интерес одузети од декурзивне интересне стопе. Еквивалентна антиципативна стопа π декурзивној стопи p добија се директно из једначине:

$$\pi = \frac{100\,p}{100 + p}$$

Напред изложени принципи су основи целе Политичке рачунице и о њима се при раду мора водити рачуна, јер ће се, у противном, добити погрешни резултати.

I ДЕО

Општи појмови

Чл. 1 Обичан или прост интерес. Када неки капитал од K дин. (франака, марака,...., кгр., метара итд.) носи годишње p% на име интереса, а тај се интерес на крају године не додаје капиталу да се у идућој години рачуна и на њега интерес, већ се увек интерес рачуна на K дин., па ма колико година новац био под интересом, онда је то обичан или прост интерес. Под овим условима на крају прве године имаће се уложених K дин и интерес за годину дана на тих K дин. Исто тако на крају друге, треће,...., n-те године имаће се уложених K дин. и интерес на ту суму за 2, 3,...., n година.

Ако је K_1 сума на коју порасту K дин. за годину дана, а K_2 за две, K_3 за три,...., K_n за n година, онда ће њихове вредности бити:

на крају 1 године $K_1 = K + \frac{Kp}{100} = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)$,

„ „ 2 „ $K_2 = K + \frac{Kp}{100} \cdot 2 = K\left(1 + \frac{p}{100} \cdot 2\right)$,

„ „ 3 „ $K_3 = K + \frac{Kp}{100} \cdot 3 = K\left(1 + \frac{p}{100} \cdot 3\right)$,

. . . .

„ „ n-те „ $K_n = K + \frac{Kp}{100} \cdot n = K\left(1 + \frac{p}{100} \cdot n\right)$

Једначина

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\,n\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

даје суму на коју K дин. порасту са обичним интересом за 0, 1, 2. 3, 4,......, n година, кад се у њој стави n = 0, 1, 2, 3, 4,....

Из једначине (1) излази да ће се буди који капитал:

удвојити кад је $\frac{p}{100}\,n = 1$ тј. $n = \frac{100}{p}$, утростручити $\quad$ кад је $\frac{p}{100}n = 2 \quad$ тј. $n = \frac{200}{p}$,

. . . .

у r-стручити $\quad$ „ „ $\frac{p}{100}n = r - 1 \quad$ „ $n = \frac{(r-1)\,100}{p}$

Чл. 2 Графичко претстављање обичног интереса и суме на коју порасту К дин. при рачунању обичног интереса. Ако се у једначини (1) стави $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ добија се низ бројева:

$$K_0 = K$$

$$K_1 = K + \frac{Kp}{100}$$

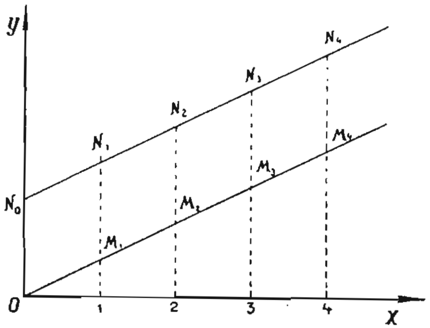
$$K_2 = K + \frac{Kp}{100} \cdot 2$$

$$K_3 = K + \frac{Kp}{100} \cdot 3$$

. . . .

које међу собом чине растући аритметички ред чији је први члан К а диференција годишњи интерес $\frac{Kp}{100}$.

Кад се на апсцисну осу преноси време 0, 1, 2, 3,.... а на ординатну одговарајућа вредност на коју К дин. порасту са интересом, односно колико донесе интереса, онда се као графички преставник добију две праве линије. Права, која апсцисну осовину сече на одстојању К од координатног почетка, је сте графички преставник на коју суму порасте К дин. са обичним интересом; а права, која пролази кроз координатни почетак, преставник је обичног интереса (в. сл. 1).



Сл. 1

Ординате $0\,N_0$, $1\,N_1$, $2\,N_2$, $3\,N_3, \ldots$. престављају на коју суму порасту К дин. са обичним интересом за 0, 1, 2, 3,.... година, а ординате $1\,M_1$, $2\,M_2$, $3\,M_3, \ldots$. колико донесу интереса К дин. за 1, 2, 3,.... године.

Чл. 3 Интересни рачун од сто, на сто и у сто. Кад је познат капитал К, интересна годишња стопа $p\%$ и време за које се интерес рачуна онда се интерес израчунава из пропорције:

$$K : i = 100 : pt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

дакле $\quad i = \frac{Kpt}{100}$

Из ове пропорције могу се рачунати и остале количине. Потребно је да од четри количине: К, i, p и t буду три познате па да се четврта израчуна.

Али ако није познат капитал К, већ његова увећана вредност са интересом i, онда ће се i рачунати из пропорције:

$$(K + i) : i = (100 + pt) : pt, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

а капитал К из пропорције:

$$K : (K + i) = 100 : (100 + pt). \quad \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

Исто тако, ако је познат капитал умањен са интересом i, онда ће се интерес i рачунати из пропорције:

$$(K - i) : i = (100 - pt) : pt, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

а капитал К из пропорције:

$$K : (K - i) = 100 : (100 - pt) \quad \ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

Ове пропорције важе у случају када је време дато у годинама. Ако је време дато у месецима треба место 100 ставити 1200, а кад је време у данима онда место 100 ставити 36000, када се година рачуна у 360 дана, а 36500 када се година рачуна у 365 дана.

Напомена. — Пропорције (II) — (V) изведене су из пропорције (I) по правилу: Збир или разлика чланова леве размере има се према збиру или разлици чланова десне размере као што се има први члан леве (спољашњи) према првом десне (унутрашњем) или други члан леве (унутрашњи) према другом члану (спољашњем) десне размере.

Чл. 4 Интерес на интерес или сложен интерес. Када се капиталу на крају једног временског периода (године, полугодине, четворомесечја, тромесечја,....) додаје интерес, па у идућем периоду рачуна интерес и на тај интерес, онда то није обичан интерес већ интерес на интерес или сложен интерес.

Чл. 5 Декурзивно и антиципативно рачунање интереса. *Декурзивно* плаћање интереса јесте кад се интерес плаћа уназад за протекли период, а *антиципативно* када се интерес плаћа унапред за један период времена.

Дакле, ако се неко задужи К дин. са $p\%$ годишње при декурзивном плаћању интереса, па тај дуг враћа цео после годину дана, имаће да врати примљених К дин. и интерес за протеклу годину на тих К дин. тј. $K + \frac{Kp}{100}$ дин., док је на дан задужења примио К дин. У случају антиципативног задуживања дужник неће примити К дин. већ $K - \frac{Kp}{100}$, али ће после годину дана вратити К дин.

Декурзивно рачунање интереса на интерес

Чл. 6 Израчунавање капитала увећаног са интересом на интерес кад се зна капитал без интереса на интерес. Капитал од К дин. дат је под интерес на интерес са p% годишње при декурзивном рачунању интереса, а годишњем капитализању. На коју ће суму порасти са интересом на итерес за n година?

Ако се вредност, на коју порасте овај капитал од К дин., на крају прве године обележи са K_1, на крају друге године са K_2, на крају треће године са $K_3, \ldots$, на крају n-те године са K_n, онда ће бити:

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= K + \frac{Kp}{100} = K\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K v & (^1)\\
K_2 &= K_1 + \frac{K_1 p}{100} = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_1 v & (^2)\\
K_3 &= K_2 + \frac{K_2 p}{100} = K_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_2 v & (^3)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
K_{n-1} &= K_{n-2} + \frac{K_{n-2} p}{100} = K_{n-2}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_{n-2} v & (_{n-1})\\
K_n &= K_{n-1} + \frac{K_{n-1} p}{100} = K_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_{n-1} v & (_n)
\end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

где је

$$v = 1 + \frac{p}{100} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Једначина $(2,_2)$ због једначине $(2,_1)$ постоје:

$$K_2 = K v v = K v^2.$$

Једначина $(2,_3)$ због једначина $(2,_1 - 2,_2)$ постоје:

$$K_3 = K v^2 v = K v^3.$$

На исти начин једначина $(2,_n)$ због једначина $(2,_1 - 2,_{n-1})$ постаје:

$$K_n = K v^{n-1} v = K v^n, \text{ тј.}$$

$$K_n = K v^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Једначина (4) даје увећану вредност са интересом на интерес почетног капитала К на крају n-те године при годишњем капитализању. Потребно је наћи једначину, која ће дати увећану вредност за n година када се капитализање врши *m* пута годишње.

У том случају капитализање се врши не крајем сваке године већ крајем сваке $\frac{1}{m}$ *) година. Зато ће К дин. на крају $\frac{1}{m}$ година порасти на:

$$K_{\frac{1}{m}} = K + \frac{K \cdot p \cdot \frac{1}{m}}{100} = K\left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right) \ldots\ldots (5)$$

Пошто се за годину дана врши капитализање m пута, то ће на крају прве године бити тражени капитал на основу једначине (4) изражен једначином:

$$K_1 = K\left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right)^m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Како у току n година има *mn* капитализања то ће крајња вредност на крају n-те године бити изражена на основу једначина (4) и (6) једначином:

$$K_n = K v_1^{mn} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

где је

$$v_1 = 1 + \frac{\frac{p}{m}}{100} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Стави ли се у једначини (7) $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$ добија се на коју ће суму порасти почетни капитал К на крају n-те године при годишњем, полугодишњем, четворомесечном, тромесечном итд. капиталасању.

Израз

$$v_1 = 1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}$$

зове се декурзивни чинитељ и показује на коју је суму порастао један динар на крају $\frac{1}{m}$ године тј. на дан првог капитализања, а израз

$$v_1^{mn} = \left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right)^{mn}$$

на крају n-те године тј. на дан mn-тог капитализања.

Из једначине (7) излази да је вредност капитала на дан mn-тог капитализања једнака производу тог капитала и суме

*) Број m може бити и мањи од јединице, што значи да је капитализање ређе од године. Када је m = 0 капитализања нема уопште, па о интересу неможе бити речи, већ о позајмици без интереса.

на коју је порастао 1 дин. Према томе проблем се своди на израчунавање израза

$$v_1^{mn} = \left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right)^{mn}$$

Вредност овог израза израчуната је и сложена у овде приложеној I таблици.

Према томе једначина (7) може се писати у облику

$$K_n = K\, I_{\frac{p}{m}}^{mn} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

Примедба. Ако се у једначини (9), односно једначини (7), стави $m = \frac{1}{2}$ добиће се мањи број од онога који казује за колико се година врши капиталисање; овде од броја n. Исто тако ако се стави $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ и уопште неки прави разломак. Питање је како ћемо израчунати који је то временски период за који се врши капиталисање. Тај број добићемо ако именилац поделимо бројиоцем. Тако ако је $m = \frac{2}{3}$ добија се $3 : 2 = 1{,}5$. Ово значи да се капиталисање врши после сваке $1^1/_2$ године. Када је $m = \frac{4}{5}$ период капиталисања је $5 : 4 = 1\frac{1}{4}$ године.

Да би ово било јасније показаћемо на једном примеру. Ако је $m = \frac{2}{3}$, а $n = 12$ тада је број капиталисања

$$m \cdot n = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$$

Пошто $\frac{2}{3}$ означава да се капиталисање врши после сваке 1,5 године, то излази да у 12 година има 8 пута по $1^1/_2$ година.

Ова вредност може се израчунати и помоћу логаритамских таблица. Треба једначину (7) логаритмовати па извући нумерус; дакле

$$K_n = N\left[\log K + mn \log\left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right)\right]$$

Пример 1. — На коју ће суму порасти 1.000.— дин. за 12 година са 12% годишње декурзивно при капиталисању а) годишњем, b) полугодишњем, c) тромесечном?

а) $K_{12} = 1.000\, I_{12}^{12} = 1.000.\ 3{,}89597599 = 3.895{,}98$ дин.

Или логаритмовањем

$K_{12} = N\overline{\ }(\log 1.000 + 12 \log 1{,}12) = N\overline{\ }(3 + 12 . 0{,}049218) = N\overline{\ }3{,}590616 = 3895{,}98$ дин.

b) $K_{12} = 1000\, I_6^{24} = 1000 . 4{,}04983464 = 4048{,}93$ дин.

Или логаритмовањем

$K_{12} = N\overline{\ }(\log 1000 + 24 \log 1{,}06) = N\overline{\ }(3 + 24 . 0{,}025306) = N\overline{\ }3{,}607344 = 4048{,}96$ дин.

c) $K_{12} = 1000\, I_3^{48} = 1000 . 4{,}13225188 = 4132{,}25$ дин.

Или логаритмовањем

$K_{12} = N\overline{\ }(\log 1000 + 48 \log 1{,}03) = N\overline{\ }(3 + 48 . 0{,}012837) = N\overline{\ }3{,}616176 = 4132{,}15$ дин.

Напомена. — Мала отступања настају услед неједнакости броја децимала код таблица, али разлика је незнатна. У току даљег излагања употребљаваћу логаритамске таблице само да покажем како се и помоћу њих може израчунати, али ћу у главном радити са готовим вредностима за 1 дин. израчунатим и сложеним у таблицама овде приложеним.

Пример 2. — Дин. 5.000.— уложено је у штедионицу 25 марта 1920 године. Наћи стање овог улога на дан 15 фебруара 1929 године, кад се интерес рачуна 8% годишње декурзивно, месец рачуна по 30 дана, а капиталисање врши 30 јуна и 31 децембра сваке године.

На дан 25 марта 1920 године улагач има 5.000.— дин. Од 25 марта до 30 јуна 1920 године треба рачунати обичан интерес и додати га капиталу. Под претпоставком да је 26 март радни дан интерес се има рачунати за 95 дана, дакле

$$i = \frac{5.000 \cdot 98 \cdot 8}{36.000} = 105{,}56 \text{ дин.}$$

Према томе улагач ће на дан првог редовног капиталисања — 30 јуна 1920 год. — имати у штедионици:

Уложених	дин.	5.000.—
више интерес за 95 дана 8%	„	105.56
Свега	дин.	5.105.56

Последње редовно капиталисање јесте 31 децембра 1928 године. Пошто од 30 јуна 1920 год. до 31 децембра 1928 год. има $8^1/_2$*) год. то, да би се знало колико ће улагач имати на дан 31 децембра 1928 год., треба 5 105.56 дин. помножити са вредношћу прве таблице, која се налази у ступцу 4% а у 17 врсти, јер за $8^1/_2$ година врши се капиталисање 17 пута. Дакле

$$K_{8^1/_2} = 5.105{,}56\, I_4^{17} = 9.945{,}10 \text{ дин.}$$

Интерес на ову суму од 31 децембра 1928 г. до 15 фебруара 1929 г., дакле за 45 дана, износи:

$$i = \frac{9.945.10 \cdot 45 \cdot 8}{36.000} = 99{,}45 \text{ дин.}$$

*) 1928 год. 12 месеци 30 дана (дан последњег редовног капиталисања)
мање 1920 год. 6 месеци 30 дана (дан првог редовног капиталисања)
8 год. 6 месеци — дана

Према томе улагач ће имати на дан 15 фебруара 1929 год.:

вредност улога на дан 31 децем. 1928 г. дин.	9.945,10
више интерес на ову суму за 45 дана са 8% „	99,45
Свега дин. 10.044.55 V= 16/2 1929	

Чл. 7 Израчунавање интереса на интерес. Интерес на интерес добија се кад се од суме увећане са интересом на интерес одузме почетни капитал (капитал без интереса). Дакле, ако се са I_n обележи интерес на интерес, који донесе почетни капитал *K* за n година са p% годишње, онда је:

$$I_n = K_n - K \quad \dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

Према томе у примеру 1 чл. 6 интерес на интерес биће:

a) $I_{12} = 1.000\, I_{12}^{12} - 1.000 = 1.000\,(I_{12}^{12} - 1) = 2.895{,}98$ дин.,

b) $I_{12} = 1.000\, I_{6}^{24} - 1.000 = 1.000\,(I_{6}^{24} - 1) = 3.048{,}96$ „

c) $I_{12} = 1.000\, I_{3}^{48} - 1.000 = 1.000\,(I_{3}^{48} - 1) = 3.132{,}15$ „

А у примеру 2 чл. 6

$$J_n = 10.044{,}55 - 5.000 = 5.044{,}55 \text{ дин.}$$

Чл. 8 Поступак када је број периода капиталисања већи од оног који се налази у таблици. Када је број периода већи од оног броја који се налази у таблици, онда се тај број разложи на два или више сабирака, па се тако нађене табличне вредности међу собом помноже. Тако, нпр. ако у таблици има највише 50 врста а потребно је да се израчуна за 80 капиталисања, онда овај број треба раставити на $50 + 30$ па тако нађене вредности у врсти 50 и врсти 30 помножити. Када би се тражило за 140 капиталисања овај би се број раставио на $50 + 50 + 40$, па би се нађене вредности помножиле.

Дакле

$$I_p^{80} = I_p^{50} \cdot I_p^{30} \qquad \text{или} \quad I_p^{80} = I_p^{40} \cdot I_p^{40}$$

$$I_p^{140} = I_p^{50}\, I_p^{50} \cdot I_p^{40} \qquad „ \quad I_p^{140} = I_p^{50} \cdot I_p^{45} \cdot I_p^{45}.$$

Чл. 9 Графичко претстављање увећаног капитала и интереса на интерес. Кад се на апсцисној оси преносе капиталисања а на ординатној одговарајућа вредност на коју је дотле порастао капитал K или колико је дотле донео интереса на интерес, онда се добијају две криве линије, чије се ординате разликују увек за један исти број K, дакле за уложени капитал. Линија, која пролази кроз координатни почетак претставник је интереса на интерес, а она што сече ординатну осу на растојању K од координатног почетка претставник је увећаног капитала.

Оне се конструишу стављајући у једначини:

$$I_n = K\,(v^{mn} - 1),$$

односно

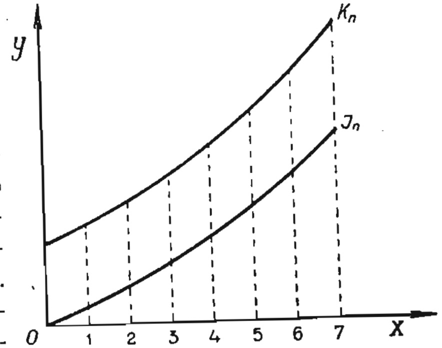
$$K_n = K\, v^{mn}$$

$mn = 0, 1, 2, 3, \dots$

и преносећи тако добивене вредности на ординатну осу.

Тако се добија:

$I_0 = 0$	$K_0 = K v^0 = K$
$I_1 = K\,(v - 1)$	$K_1 = K v$
$I_2 = K\,(v^2 - 1)$	$K_2 = K v^2$
$I_3 = K\,(v^3 - 1)$	$K_3 = K v^3$
. . . .	. . . .



Сл. 2

Крива K_n графички је претставник увећаног капитала, а крива J_n интереса на интерес на почетни капитал K. Ово су две параболе n-тог степена чије се ординате разликују за број K.

Чл. 10 Израчунавање времена. Из једначине (7) логаритмовањем добија се:

$$\log K_n = \log K + m\,n \log\left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right)$$

А одавде

$$m\,n = (\log K_n - \log K) : \log\left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right) \quad \dots\dots \quad (11)$$

Употребом I таблице добија се из једначине (9):

$$I_{\frac{p}{m}}^{mn} = \frac{K_n}{K} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

Пример 1. — За које ће време 1000.— дин. при полугодишњем капиталисању са 6% годишњим декурзивним интересом на интерес порасти на 1806,11 дин?

Из једначине (11) следује:

$mn = 2n = (\log 1806{,}11 - \log 1000) : \log 1{,}03 = 0{,}25675 : 0{,}01284 = 20$ полугодина. Дакле, $n = 10$ година.

Из једначине (12) добија се:

$$I_{\frac{p}{m}}^{mn} = I_3^{2n} = 1806{,}11 : 1000 = 1{,}80611$$

Број 1,80611 показује на коју суму порасте један динар за непознати број полгођа 2n са полугодишњом интересном стопом 3%. Да се тај број нађе треба у ступцу 3% I таблице тражити број 1,80611 па ако се нађе тачно број онда врста у којој лежи јесте број полугођа. Овде је тај број у врсти 20, што значи да је:

$$2\,n = 20 \text{ полугођа}$$

тј.

$$n = 10 \text{ година}$$

Пример 2. — За које ће време 2000.— дин. при тромесечном капиталисању порасти са интересом на интерес 7% годишње декурзивно на 4000.— дин. тј. удвостручити се?

Из једначине (11) добија се:

$m\,n = 4\,n = (\log 4.000 - \log 2.000) : \log 1{,}0175 = \log 2 : \log 1{,}0175 = 0{,}301030 : 0{,}007534 = 39{,}96$ тромесечја. Одавде је $n = 9{,}99$ год.

Или

$$n = 9 \text{ год. } 11 \text{ месеци и } 26 \text{ дана.}$$

Из једначине (12) следује:

$$I^{4n}_{1^3/_4} = 4000 : 2000 = 2.$$

У I таблици а у стубцу $1^3/_4$% не налази се број 2, већ се налазе њему блиска два броја: 1,96717184 у врсти 39 и 2,00159734 у врсти 40. Ово значи да 1 дин. за 39 тромесечја неће порасти на 2 дин., али за 40 порашће на суму већу од 2 дин. Према томе тражено време налази се између 39 и 40 тромесечја. Његова приближна вредност налази се линеарном интерполацијом. Она се оснива на следећем правилу: Ако су интересне стопе исте а време различито, онда се диференције табличних вредности имају међу собом као разлике њима одговарајућих времена. Када је једнако време а различите интересне стопе онда се диференције табличних вредности имају међу собом као разлике њима одговарајућих стопа.

У овом случају је:

$I^{39}_{1^3/_4} = 1{,}96717184$	39	$I^{39}_{1^3/_4} = 1{,}96717184$	39
$I^{40}_{1^1/_4} = 2{,}00159734$	40	$I^{4n}_{1^3/_4} = 2{,}00000000$	4n
$I^{40}_{1^3/_4} - I^{39}_{1^3/_4} = 0{,}03442550$	1	$I^{4n}_{1^3/_4} - I^{39}_{1^3/_4} = 0{,}03282816$	4n—39

Одавде следује пропорција:

$$(I^{40}_{1^3/_4} - I^{39}_{1^3/_4}) : (I^{4n}_{1^3/_4} - I^{39}_{1^3/_4}) = 1 : (4n - 39)$$

тј.

$$0{,}03442550 : 0{,}03282816 = 1 : (4n - 39)$$

Одавде је:

$4n = 39{,}96$ тромесечја — као и помоћу логаритама.

Чл. 11 Израчунавање интересне стопе. Извлачењем $m\,n$-тог корена из десне и леве стране једначине (7) добија се:

$$\left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right) \sqrt[mn]{K} = \sqrt[mn]{K_n}$$

Одавде је:
$$p = (S - 1)\,100\,m, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

где је

$$S = \sqrt[mn]{\frac{K_n}{K}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Вредност за S израчунава се логаритмовањем једначине (14), па затим извлачењем нумеруса, дакле:

$$S = N\overline{\tfrac{1}{mn}\,(\log K_n - \log K)} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Ако се употребљава I таблица онда и овде важи једначина (12), само је сада познат број капиталисања тј. врста у којој треба да се налази вредност $\frac{K_n}{K}$ а непознат је стубац.

Пример 1. — Са којом ће годишњом интересном стопом 1.000.— дин. за 10 година, при тромесечном капиталисању, са декурзивним интересом на интерес порасти на дин. 3.262,04?

Из једначине (15) следује:

$$S = N\left\{\tfrac{1}{40}(\log 3.262{,}04 - \log 1.000)\right\} = N\,\overline{0{,}01284} = 1{,}03,$$

па зато из једначине (13) следује:

$$p = (1{,}03 - 1)\ 100 \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12\% \text{ годишње.}$$

Помоћу I таблице из једначине (12) добија се:

$$I^{40}_{\frac{p}{4}} = 3.262{,}04 : 1.000 = 3{,}26204$$

У врсти 40 а у стубцу 3% налази се број 3,26203779, што редуцирано на 5 децимала даје вредност 3,26204, па је зато

$$\frac{p}{4} = 3\% \text{ тромесечно,}$$

а одавде
$$p = 12\% \text{ годишње.}$$

Пример 2. — Са којом ће годишњом декурзивном интересном стопом 2000.— дин. за 8 година, при четворомесечном капиталисању донети интереса на интерес 2000.— дин.?

Једначина (15) даје:

$$S = N\left\{\frac{1}{24}(\log 4000 - \log 2000)\right\} = 1{,}0293\ldots,$$

па је из једначине (13):

$$p = (1{,}0293 - 1)\,100 \cdot 3 = 8{,}79\% \text{ годишње.}$$

Помоћу I таблице добија се:

$$I^{24}_{\frac{p}{3}} = 4000 : 2000 = 2.—$$

У врсти 24 а у стубцу $2^7/_8\%$*) мања вредност 1,97440552 а у истој врсти у стубцу 3% већа 2,03279411. Тражена четворомесечна интересна стопа већа је од $2^7/_8\%$ а мања од 3%. Приближно тачна стопа налази се линеарном интерполацијом.

$I^{24}_{2^7/_8} = 1{,}97440552$ $I^{24}_{3} = 2{,}03279411$	$2^7/_8\%$ 3%	$I^{24}_{2^7/_8} = 1{,}97440552$ $I^{24}_{\frac{p}{3}} = 2{,}00000000$	$2^7/_8\%$ $\frac{p}{3}\%$
$I^{24}_{3} - I^{24}_{2^7/_8} = 0{,}05838859$	$^1/_8\%$	$I^{24}_{\frac{p}{3}} - I^{24}_{2^7/_8} = 0{,}02559448$	$\frac{p}{3} - 2^7/_8\%$

На основу изложеног у чл. 10 следује пропорција:

$$0{,}05838859 : 0{,}02559448 = \frac{1}{8} : \left(\frac{p}{3} - 2^7/_8\right)$$

А одавде $\qquad \frac{p}{3} = 2{,}93\%$ четворомесечно

или $\qquad p = 8{,}79\%$ годишње.

Чл. 12 Израчунавање почетног капитала. Кад се једначина

$$K_n = K\, v^{mn}$$

реши по K добија се почетни капитал; дакле:

$$K = K_n \cdot \frac{1}{v^{mn}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Разломак $\frac{1}{v_1^{mn}}$ израчунат је за $mn = 1, 2, 3, \ldots$ а за $\frac{p}{m}$ и сложен у II таблици. Према томе једначина (16) може се писати и у облику:

$$K = K_n\, II^{mn}_{\frac{p}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Из једначина (16) и (17) види се да се почетни капитал добија дељењем увећаног капитала K_n са интересним чинитељем или што је исто множењем са II таблицом. — Стубац $\frac{p}{m}\%$ а врста mn.

Примедба. — Производ I и II таблице даје 1, што значи да су те две таблице реципрочне једна другој тј.

$$I^{mn}_{\frac{p}{m}} = \frac{1}{II^{mn}_{\frac{p}{m}}} \text{ и } II^{mn}_{\frac{p}{m}} = \frac{1}{I^{mn}_{\frac{p}{m}}}$$

*) Шпицерове таблице.

Пример 1. — Колико данас треба уложити у штедионицу, која плаћа 7% годишње а врши капиталисање годишње, да се после 8 година прими 2.000— дин., под условом да се цео интерес додаје капиталу?

$$K = 2000\, II^{8}_{7} = 1164{,}02 \text{ дин.}$$

Пример 2. — За једну кућу даје: А 101.000.— дин. да плати после 3 године и 2 месеца, В 110.000.— дин., да плати после $3^1/_2$ године и С 100.000.— дин., али да плати 50.000.— дин. одмах а 5.000.— дин. после 4 године. Која је понуда најповољнија кад се интерес рачуна 6% годишње декурзивно, а капиталисање врши полугодишње?

Да се нађе садашња вредност понуде А треба прво на 101.000.— наћи интерес за 2 месеца интересним рачуном на сто па тај интерес одузети од 101.000.—. Тако добивена вредност биће сума коју понуђач А нуди да плати после 3 године, а потом множењем са II таблицом — шеста врста а стубац 3% — добија се сума, коју понуђач даје, ако плаћа одмах тј. добија се дисконтована сума потраживања коме је рок после 3 године и 2 месеца.

На исти начин поступиће се и код понуда В и С. Најповољнија је понуда, која има највећу дисконтовану вредност.

Ако се дисконтоване вредности обележе са K_a понуде А, са K_b понуде В и са K_c понуде С, онда ће, на основу напред изложеног, бити:

$$K_a = \left(101000 - \frac{101000 \cdot 60 \cdot 6}{36000 + 60 \cdot 6}\right) II^{6}_{3} = (101000 - 1000)\, II^{6}_{3} = 83748{,}43 \text{ д.,}$$

$$K_b = 110000\; II^{7}_{3} = 89440{,}07 \text{ дин.,}$$
$$K_c = 50000 + 50000\, II^{8}_{3} = 50000 + 39470{,}46 = 89470{,}46 \text{ дин.}$$

Понуда K_c најповољнија је, јер је K_c веће и од K_a и од K_b.

Чл. 13 Израчунавање времена и интересне стопе помоћу друге таблице. Из једначине

$$K = K_n\; II^{mn}_{\frac{p}{m}}$$

добија се:

$$II^{mn}_{\frac{p}{m}} = \frac{K}{K_n}$$

Ова једначина даје n када су познати m, K, K_n и p, а p, када су познати m, n, K и K_n.

Пример 1. — Са којом ће интересном стопом дин. 6755.64 за 10 година, при годишњем капиталисању, порасти на 10.000.— динара?

Овде је $m = 1$, па зато

$$II^{10}_{p} = 6755{,}64 : 10000 = 0{,}675564$$

У десетој врсти а у стубцу 4% налази се број 0,67556417, што редуцирано на 6 децимала даје број 0,675564, па је зато тражена стопа 4% годишње.

Пример 2. — Са којом ће интересном стопом дин. 3.000.— за 20 год., при годишњем капитализању, порасти на 10.000. дин.?

У овом примеру је $m = 1$; зато

$$II_{p}^{20} = 3.000 : 10.000 = 0{,}3$$

У 20 врсти не налази се број 0,3 већ њему два блиска броја 0,31180473 и 0,29745497. Првом одговара стопа 6% а другом $6\frac{1}{4}$%*) Тражена интересна стопа већа је од 6%, а мања од $6\frac{1}{4}$%. Линеарном интерполацијом добиће се приближно тачна вредност.

$II_{6}^{20} = 0{,}3118$ $II_{6^1/_4}^{20} = 0{,}2975$	6% $6^1/_4$%	$II_{6}^{20} = 0{,}3118$ $II_{p}^{20} = 0{,}3000$	6% p%
$II_{6}^{20} - II_{6^1/_4}^{20} = 0{,}0143$	$^1/_4$%	$II_{6}^{20} - II_{p}^{20} = 0{,}0118$	(p–6)%

Одавде следује пропорција:

$$0{,}0143 : 0{,}0118 = \tfrac{1}{4} : (p - 6)$$

Па је

$$p = 6 + \frac{118 \cdot \frac{1}{4}}{143} = 6 + 0{,}21 = 6{,}21\% \text{ годишње.}$$

Пример 3. — За које ће време дин. 2.082.89 са 8% годишње декурзивно, при полугодишњем капитализању порасти на дин. 10.000.—?

Овде је $m = 2$, па је

$$II_{4}^{2n} = 2082{,}89 : 10.000 = 0{,}208289$$

У стубцу 4% а у 40 врсти налази се број 0,20828904. Овај број редуциран на 6 децимала јесте тражени број, па је тражено време

$$2n = 40 \text{ полугођа,}$$

тј.

$$n = 20 \text{ година.}$$

Пример 4. — За које ће време дин. 2.000.— са интересом на интерес 6% годишње декурзивно, при полугодишњем капитализању, порасти на дин. 8.000.—?

Овде је $m = 2$, па је

$$II_{3}^{2n} = 2000 : 8000 = 0{,}25$$

У стубцу 3% а у врсти 46 налази се број 0,25673653 а у врсти 47 број 0,24925876. Пошто је први број већи а други

*) Шпицерове таблице

мањи од 0,25, то је број 46 мањи а 47 већи од траженог броја полугођа (2n), дакле

$$46 < 2n < 47.$$

Приближно тачно време наћи ће се линеарном интерполацијом:

$II_{3}^{46} = 0{,}2567$ $II_{3}^{47} = 0{,}2493$	46 47	$II_{3}^{46} = 0{,}2567$ $II_{3}^{2n} = 0{,}2500$	46 2n
$II_{3}^{47} - II_{3}^{46} = 0{,}0074$	1	$II_{3}^{2n} - II_{3}^{46} = 0{,}0067$	2n—46

Одавде следује пропорција:

$$0{,}0074 : 0{,}0067 = 1 : (2n - 46)$$

А одавде је:

$$2n = 46 + \frac{67}{74} = 46{,}9054 \text{ полугодина}$$

а

$$n = 23{,}4527 \text{ година,}$$

или

$$n = 23 \text{ године, 5 месеци и 13 дана.}$$

Чл. 14 Израчунавање времена кад се $\frac{K_n}{K}$, односно $\frac{K}{K_n}$, не налази у границама двеју табличних вредности. Када је непознато време, онда се може десити да је вредност $\frac{K_n}{K}$ већа од оне вредности која се налази последња у стубцу одговарајуће интересне стопе. У том случају треба једначину поделити са вредношћу, која се налази у последњој врсти, па тако добивену вредност тражити у таблици. Ако је и та вредност већа дељење треба поновити и то вршити све дотле док се нађе број који се или налази у таблици тачно или се налази у границама два броја. Тражени број биће: нађени број више онолико пута број који се налази последњи у таблици колико је пута вршено делење, односно којим је бројем степенована вредност последња у таблици.

Нека је последњи број у таблици a, последња врста 50 тражена вредност

$$I_{\frac{p}{m}}^{mn} = b$$

а $mn = 50r + q$, где је q мање од 50, онда је

$$I_{\frac{p}{m}}^{mn} = \left(I_{\frac{p}{m}}^{50}\right)^r \cdot I_{\frac{p}{m}}^{q} = b,$$

Тада је:

$$I_{\frac{p}{m}}^{q} = b\left(II_{\frac{p}{m}}^{50}\right)^r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Интересну стопу на овај начин немогуће је израчунати, већ се мора употребити логаритмовање.

Врши ли се израчунавање помоћу II таблице онда је вредност $\frac{K}{K_n}$ мања од оне која се налази у последњој врсти, односно стубцу. Поступак је исти као и код I таблице. У овом случају место једначине (18) важи једначина:

$$II^{q}_{\frac{p}{m}} = b\left(I^{50}_{\frac{p}{m}}\right)^{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Пример — За које ће време дин. 10.000.— са 8% годишње декурзивно, при полугодишњем капиталисању, порасти на дин. 239717,91?

Овде је $m = 2$, па је

$$I^{2n}_{4} = 239717{,}91 : 10000 = 23{,}971791$$

У стубцу 4% а у 50 врсти налази се број 7,10668335. Тражено време веће је од 50 полугодина. Зато је:

$$I^{2n-50}_{4} = 23{,}971791 \quad II^{50}_{4} = 3{,}373133$$

Овај број налази се у 31 врсти, дакле

$$2n - 50 = 31$$

А одавде $\quad n = 40\frac{1}{2}$ година.

Чл. 15 Релативна и конформна интересна стопа.

Када је капиталисање *m* пута годишње онда се одговарајућа, до сада употребљавана, интересна стопа $\frac{p}{m}$ зове *релативна*.

Јасно је да ће због чешћег капиталисања при капиталисању m пута годишње са релативном интересном стопом капитал порасти на већу суму него при годишњем.

Стопа са којом капитал при капиталисању m пута годишње порасте на исту суму као и при годишњем зове се *конформна*.

Обележи ли се конформна интересна стопа са C_m одговарајућа годишњој p онда се, на основу предње дефиниције, има једначина:

$$K\left(1 + \frac{C_m}{100}\right)^{mn} = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n}$$

После деобе са K и извлачења n-тог корена следује једначина:

$$\left(1 + \frac{C_m}{100}\right)^{m} = 1 + \frac{p}{100} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Ова једначина може се преставити помоћу I таблице у облику

$$I^{m}_{C_m} = I^{1}_{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Помоћу једне од ове две једначине израчунава се одговарајућа конформна интересна стопа кад је позната годишња и обратно годишња кад је позната конформна.

Из приложене шеме види се колике су конформне интересне стопе, одговарајуће годишњим стопама од 12%—9%, као и то да су релативне стопе веће од конформних.

Годишња	Полугодишња		Четворомесечна		Тромесечна	
	Релативна	Конформна	Релативна	Конформна	Релативна	Конформна
12	6	5,8292	4	3,85	3	2,8721
11	$5\frac{1}{2}$	5,3561	$3\frac{2}{3}$	3,5405	$2\frac{3}{4}$	2,6428
10	5	4,8809	$3\frac{1}{3}$	3,2286	$2\frac{1}{2}$	2,4118
9	$4\frac{1}{2}$	4,4024	3	2,9143	$2\frac{1}{3}$	2,1786

Чл. 16 Израчунавање средњег рока плаћања.

— Неко има да плати, рачунајући од данас, после m_1 година K_1 дин., после m_2 година K_2 дин., после m_3 година K_3 дин., ..., после m_n година K_n дин. После колико година може платити свих n сума одједном кад се интерес на интерес рачуна p% годишње декурзивно, а капиталисање врши годишње?

Ако са x обележимо број година после кога броја година, рачунајући од данас, има да се плати свих n сума онда ће се на основу принципа еквиваленције добити једначина:

$$(K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_n)\, II^{x}_{p} = K_1 II^{m_1}_{p} + K_2 II^{m_2}_{p} + K_3 II^{m_3}_{p} + \ldots + K_n II^{m_n}_{p}$$

А одавде:

$$II^{x}_{p} = (K_1 II^{m_1}_{p} + K_2 II^{m_2}_{p} + K_3 II^{m_3}_{p} + \ldots + K_n II^{m_n}_{p}) : (K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_n) \quad (22)$$

Пример. — Неко се обавезао да у размаку од годину дана 15 пута плати по 1.000.— дин., али да прву суму положи после 10 година. После колико година може положити 15.000.— динара одједном ако се интерес на интерес рачуна са интересном годишњом декурзивном стопом 6%, а капиталисање врши годишње?

Овде је: $m_1 = 10$, $m_2 = 11$, $m_3 = 12, \ldots,$ $m_n = 24$, $K_1 = K_2 = K_3 = \ldots = K_n = 1000$, а $p = 6\%$. Зато је:

$$II^{x}_{6} = 1000\,(II^{10}_{6} + II^{11}_{6} + II^{12}_{6} + \ldots + II^{24}_{6}) : 15000 =$$
$$= 1000\,(IV^{24}_{6} - IV^{9}_{6}) : 15000 = (IV^{24}_{6} - IV^{9}_{6}) : 15 = 0{,}3832443$$

Ова таблична вредност налази се у границама вредности 16 и 17 врсте стубца 6%, што значи да је тражено време веће од 16 а мање од 17 година, рачунајући од данас. Приближно тачно време налази се линеарном интерполацијом.

Примедбе: 1) Када суме нису једнаке онда се свака од тих сума дисконтује посебно множењем са другом таблицом и тако добивене дисконтоване суме саберу:

2) Једначина (22) важи и у случају ако се интерес рачуна антиципативно, али тада у једначини (22) треба антиципативну стопу п заменити са еквивалентном декурзивном стопом или употребити другу таблицу са антиципативном стопом.

Рачун улога

Чл. 17 Општи појмови. До сада смо посматрали случајеве где је улог учињен једном за свагда, али има случајева, где се улог више пута понавља у једном сталном интервалу времена. Ови улози некад су стални, а некад променљиви. Ако је улог променљив онда он може: расти или опадати по аритметичкој или геометријској прогресији, по неком другом закону, час расти час опадати без икаквог унапред утврђеног закона, као нпр. код улога на штедњу. У погледу капиталисања улагање може бити исто као и капиталисање, али може бити и чешће или ређе од капиталисања. Антиципативно улагање је кад се улаже почетком периода улагања, а декурзивно крајем.

Улог сталан

Чл. 18 Улагање се поклапа са капиталисањем. Улаже се, почев од данас, n година по *u* дин. годишње у штедионицу, која плаћа p% годишње, а врши капиталисање годишње. На коју ће суму порасти ови улози са интересом на интерес: a) на дан n-тог улога, b) годину дана после n-тог улога?

a) Стање улога на дан улагања n-тог улога.

Први улог биће укапиталисан n-1 пут, други n-2, трећи n-3 итд., (n—1)-ви један пут, а n-ти ће бити уложен на сами дан када се тражи стање. Према томе на дан улагања n-тог улога биће:

1 улог	uv^{n-1}
2 „	uv^{n-2}
3 „	uv^{n-3}
. . . .	. . . .
(n - 1)-ви „	uv
n-ти „	u

Обележи ли се са S_n' сума свих овако укапиталисаних улога онда је:

$$S_n' = u + uv + \ldots + uv^{n-3} + uv^{n-2} + uv^{n-1}$$

тј.

$$S_n' = u\,(1 + v + \ldots\ldots + v^{n-3} + v^{n-2} + v^{n-1})$$

Заграда десне стране ове једначине јесте збир улога од једног динара са интересом на интерес. Она је геометријска прогресија са првим чланом 1, количником v и бројем чланова n. Зато на основу збирног обрасца за геометријску прогресију добија се, место ове једначине, једначина:

$$S_n' = u\,\frac{v^n - 1}{v - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Множењем са v добија се:

$$S_n' v = u\,\frac{v(v^n - 1)}{v - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Израз

$$\frac{v(v^n - 1)}{v - 1} = \frac{100 + p}{p}(v^n - 1)$$

израчунат је и сложен је у III таблици. Зато се једначина (24) може писати:

$$S_n' v = u\,\mathrm{III}_p^n$$

тј.

$$S_n' = u\,\mathrm{III}_p^n\,\mathrm{II}_p^1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Када је улагање и капиталисање m пута годишње онда у једначинама треба ставити одговарајући интересни чинитељ $v_1 = 1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}$, а на место n ставити mn и место стопе p узети стопу $\frac{p}{m}$.

b) Стање улога годину дана после n-тог улога.

У овом случају први улог биће укапиталисан n, други n — 1, трећи n — 2, итд., (n — 1)-ви 2 пута а n-ти један пут. Зато ће годину дана после улагања n-тог улога бити:

1 улог	uv^n
2 „	uv^{n-1}
3 „	uv^{n-2}
. . . .	. . . .
(n—1)-ви „	uv^2
n-ти „	uv

Ако се са S_n обележи сума свих овако укапиталисаних улога онда је:

$$S_n = uv + uv^2 + \ldots + uv^{n-2} + uv^{n-1} + uv^n$$

тј.

$$S_n = u(v + v^2 + \ldots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n)$$

Заграда је збир улога од једног динара са интересом на интерес. Она је и збир I таблице од 1 до n. А пошто је геометријска прогресија са првим чланом v, количником v и бројеви чланова n, то на основу збирног обрасца геометријске прогресије ова једначина добија облик:

$$S_n = u\,\frac{v(v^n - 1)}{v - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Пошто је: $$\frac{v(v^n-1)}{v-1}=III_p^n$$

то једначина (26) има облик:

$$S_n = u\,III_p^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Кад је улагање m пута годишње, а капиталисање такође m пута годишње онда у једначини треба ставити одговарајући интересни чинитељ $v_1 = 1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}$, а место n ставити m n и место стопе p одговарајућу стопу $\frac{p}{m}$.

Примедба. — Једначини (25) може се дати и овај облик:

$$S_n' = u\left(1 + III_p^{n-1}\right) \ldots\ldots\ldots (25^*)$$

јер је

$$III_p^n \cdot II_p^1 = (v + v^2 + \ldots + v^{n-1})\frac{1}{v} = 1 + v + \ldots + v^{n-2} + v^{n-1} =$$
$$= 1 + III_p^{n-1}.$$

Чл. 19 Упоређење једначина (25) и (27). Када се улог у једначини (25) обележи са u' за разлику од улога у једначини (27) онда те једначине имају облик:

$$S_n' = u'\,III_p^n\,II_p^1$$
$$S_n = u\,III_p^n.$$

Под претпоставком да је интересна стопа у обе једначине иста могу бити ови случајеви:

1) u' = u, па зато:
$$S_n'\,I_p^1 = S_n$$
2) $S_n' = S_n$, зато је:
$$u'\,II_p^1 = u$$

Ове две једначине дају: 1) суму улога за један период касније и 2) улог који даје исту суму улога један период касније као и онај један период раније, и обратно.

Пример 1. — На коју ће суму порасти годишњи улог од дин. 1000.— када се улагање врши 10 година са интересом 6% годишње декурзивно, а капиталише годишње: a) на дан 10-тог улога, b) годину дана после уложеног десетог улога?

a) $S_n' = u\left(1 + III_p^{n-1}\right) = 1000 \cdot \left(1 + III_6^9\right) = 13180{,}79$ дин.

b) $S_n = u\,III_p^n = 1000\,III_6^{10} = 13971{,}64$ дин.

Овде је u' = u, па зато мора бити:

$$S_n = 13180{,}79 \cdot 1{,}06 = 13971{,}64 \text{ дин.}$$

Ово је доказ да су вредности под a) и b) добро израчунате.

Пример 2. — На коју ће суму порасти полугодишњи улог од 200.— дин. за 10 година, при полугодишњем капиталисању, са интересом 8% годишње декурзивно: a) на дан 20-тог улога, b) пола године после 20-тог улога?

a) $S_n' = 200\left(1 + III_4^{19}\right) = 200 \cdot 29{,}77807858 = 5955{,}615716 =$ $= 5955{,}62$ дин.;

b) $S_n = 200 \cdot III_4^{20} = 200 \cdot 30{,}96920172 = 6193{,}84$ дин.

У овом случају је u' = u, па зато мора бити:

$$S_n = 5955{,}62 \cdot 1{,}04 = 6193{,}84 \text{ дин.}$$

што је доказ да су вредности под a) и b) добро израчунате.

Чл. 20 Практично упутство за израчунавање суме улога S_n и S_n'. При израчунавању суме улога важно је да се одреди да ли ће се применити једначина

$$S_n' = u\left(1 + III_p^{n-1}\right)$$

или једначина $$S_n = u\,III_p^n.$$

Да не би било пометње треба имати на уму ово правило: *Ако од дана првог улога до дана када се тражи стање улога има n—1 период онда се примењује једначина*

$$S_n' = u\left(1 + III_p^{n-1}\right),$$

а ако има n периода онда једначина

$$S_n = u\,III_p^n.$$

Да се одреди колико има периода препоручљиво је да се на бројној линији пренесе онолико подеока колико се пута врши улагање. Затим да се јаче истакне дан првог улога и дан када се тражи стање. А потом да се број, који показује када је уложен први улог, одузме од броја који показује када се тражи стање улога.

Када се овако поступа, а има се на уму предње правило, неће се никад доћи у забуну због улагања крајем и улагања почетком периода.

Пример. — Неко улаже a) почетком, b) крајем сваке године у штедионицу која плаћа 8% годишње декурзивно, а врши капиталисање годишње по дин. 1000.—; на коју ће суму порасти ови улози на крају 10-те године?

a) Први улог биће уплаћен одмах, па је на бројној линији обележен са нула, други са 1, трећи са 2 итд, десети са 9. Стање се тражи после 10 година. Од првог улога до дана када се тражи стање протекло је: 10 — 0 = 10 година. Тачно онолико колико се пута улаже. Зато се стање улога рачуна из једначине:

улог	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
година	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$$S_n = u\,III_p^n = 1000\,III_8^{10} = 15645{,}49 \text{ дин.}$$

b) Први улог биће уплаћен после годину дана. На бројној линији обележен је са 1, други је после две године и обележен је са 2, итд., десети је после 10 година и обележен је са 10 а учињен је на сами дан када се тражи стање. Од првог улога до дана када се тражи стање протекло је $10-1=9$ година. Дакле једна година мање од броја колико се пута врши улагање. Зато се стање улога рачуна из једначине:

$$S_n' = u\left(1 + III_p^{n-1}\right) = 1000\left(1 + III_8^9\right) = 14486{,}56 \text{ дин.}$$

улог		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
година	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Чл. 21 Израчунавање улога, броја улгања и интересне стопе. Из једначине:

$$S_n = u\,III_{\frac{p}{m}}^{mn},$$

односно:

$$S_n' = u\,III_{\frac{p}{m}}^{mn} \cdot II_{\frac{p}{m}}^{1} = u\left(1 + III_{\frac{p}{m}}^{m\,n-1}\right),$$

може се израчунати једна од 5 количина, када су 4 познате. У прошлим члановима били су познати: u, m, n и p па је тражено S_n, односно S_n'. Сада ћемо претпоставити да је једна од ове четири количине непозната. Треба једначину решити по тој непознатој.

Пример 1. — По колико треба улагати: a) почетком, b) крајем полугодине при полугодишњем капиталисању са 6% годишње декурзивно, да се на крају 20-те године, рачунајући од данас, има 10.000.— дин.?

a) $10000 = u\,III_3^{40}$; $u = 10000 : III_3^{40} = 10000 : 77{,}66329753 =$ $= 128{,}76$ дин.;

b) $10000 = u'(III_3^{39} + 1)$; $u' = 10000 : (III_3^{39} + 1) =$ $= 10000 : 75{,}40125973 = 132{,}62$ дин.

Пошто је $S_n = S_n' = 10000.—$ мора бити:

$u' = u\,I_3^1 = 128{,}76 \cdot 1{,}03 = 132{,}62$ дин.; као што је и нађено.

Пример 2. — Са којом интересном стопом треба улагати годишње по дин. 200.—, да се после 20 година има, при годишњем капиталисању, дин. 6.000.— када је улагање: a) почетком, b) крајем године?

a) $6000 = 200\,III_p^{20}$; $III_p^{20} = 6000 : 200 = 30.$

Број 30 казује да ће улог од једног динара са непознатом стопом за 20 година порасти на дин. 30. Да би се нашла интересна стопи треба у III таблици, а у врсти 20-тој тражити 30.—, а ако се тај број не нађе онда њему два блиска броја — један мањи, а један већи. Тражена стопа биће већа од оне у чијем је стубцу мањи број, а мања од оне у чијем се стубцу налази већи број. Ако се тражени број нађе онда је стопа она у чијем се стубцу налази тај број. У стубцу $3^1/_2\%$ налази се број 29,26947068 — мањи, а у стубцу $3^3/_4\%$ број 30,10553856 — већи број. Тражена стопа већа је од $3^1/_2\%$ а мања од $3^3/_4\%$.*) Приближно тачна стопа налази се линеарном интерполацијом:

$III_{3^1/_2}^{20} = 29{,}2695$	$3^1/_2\%$	$III_{3^1/_2}^{20} = 29{,}2695$	$3^1/_2\%$
$III_{3^3/_4}^{20} = 30{,}1055$	$3^3/_4\%$	$III_p^{20} = 30.—$	$p\%$
$III_{3^3/_4}^{20} - III_{3^1/_2}^{20} = 0{,}8360$	$^1/_4\%$	$III_p^{20} - III_{3^1/_2}^{20} = 0{,}7305$	$(p-3^1/_2)\%$

Одавде следује пропорција:

$$0{,}8360 : 0{,}7305 = \tfrac{1}{4} : (p - 3^1/_2)$$

Одавде је тражена стопа:

$$p = 3^1/_2 + \frac{7305 \cdot \frac{1}{4}}{8360} = 3{,}5 + 0{,}218 = 3{,}718\% \text{ годишње.}$$

b) $6000 = 200\,(1 + III_p^{19})$; $III_p^{19} = 6000 : 200 - 1 = 30 - 1 = 29.$

Истим поступком, као под a) налази се у стубцу 4% мањи број 28,77807858, а у стубцу $4^1/_4\%$ већи број 29,56250149. Тражена стопа већа је од 4%, а мања од $4^1/_4\%$. Приближно тачна стопа наћи ће се линеарном интерполацијом:

$III_4^{19} = 28{,}7781$	4%	$III_4^{19} = 28{,}7781$	4%
$III_{4^1/_4}^{19} = 29{,}5625$	$4^1/_4\%$	$III_p^{19} = 29{,}0000$	$p\%$
$III_{4^1/_4}^{19} - III_4^{19} = 0{,}7844$	$^1/_4\%$	$III_p^{19} - III_4^{19} = 0{,}2219$	$(p-4)\%$

Одавде следује пропорција:

$$0{,}7844 : 0{,}2219 = \tfrac{1}{4} : (p-4)$$

Па је тражена стопа:

$$p = 4 + \frac{2219 \cdot \frac{1}{4}}{7844} = 4{,}07\% \text{ годишње.}$$

Пример 3. — Колико пута треба улагати по 1000 дин. у штедионицу, која плаћа 5% годишње, а врши капиталисање

*) Шпицерове таблице

годишње, да овај улог порасте на 13300.— дин., a) годину дана после последњег улога, b) на дан последњег улога? Колики је последњи улог?

a) $13300 = 1000\,\mathrm{III}_5^n$; $\mathrm{III}_5^n = 13300 : 1000 = 13{,}3$.

У стубцу 5% налази се у 10-тој врсти мањи број 13,2067 8716, а у врсти 11-тој већи број 14,9171 2652, што значи да ће улагач 10 пута уложити по 1000.— дин., а 11 пут мање од 1000.— дин.

Ако се последњи — 11-ти — улог обележи са u_1 онда се он добија из једначине:

$$13300 = (1000\,\mathrm{III}_5^{10} + u_1)\,\mathrm{I}_5^1$$

Решена по u_1 ова једначина даје:

$$u_1 = 13300\,\mathrm{II}_5^1 - 1000\,\mathrm{III}_5^{10} = 12666{,}97 - 13206{,}79 = -540{,}12 \text{ дин.}$$

Знак минус каже да улагач 11-ти пут неће уложити, већ ће њему штедионица исплатити 540,12 дин, да би на крају 11 године имао 13300.— дин. Да је знак плус онда би улагач морао уложити ту суму.

b) $13300 = 1000(1 + \mathrm{III}_5^{n-1})$; $\mathrm{III}_5^{n-1} = 13{,}30 - 1 = 12{,}3$

У стубцу 5% а у врсти 9-тој налази се мањи број 11,57799254 а у врсти 10-тој већи 13,20678716. Зато је;

$$9 < n - 1 < 10$$

тј.

$$10 < n < 11$$

Ово значи да ће 10 пута бити уложено по 1000.— дин., а 11-ти пут нека мања сума. Та сума налази се из следеће једначине:

$$13300 = 1000\,\mathrm{III}_5^{10} + u_1',$$

где u_1' означава 11-ти улог.

Из ове једначине добија се:

$$u_1' = 13300 - 1000\,\mathrm{III}_5^{10} = 13300 - 13206{,}70 = 93.21 \text{ дин.}$$

У овом случају на дан последњег — 11-ог — улога улагач ће имати мање 93,21 дин., па ће ту суму морати уложити.

Чл. 22 Улагање чешће од капиталисања. Овде ћу третирати случај када је улог константан а врши се у једном сталном размаку времена, али тако да један улог пада на дан капиталисања.

Пример — Улаже се сваког месеца по u дин. у штедионицу која плаћа p% годишње декурзивно, а врши капиталисање полугодишње. На коју ће суму порасти ови улози на крају n-те године од данас кад је први улог уложен: a) данас, b) после месец дана?

Овај задатак може се решити на два начина:

Први начин:

Треба на уложене суме рачунати од њиховог улога до првог капиталисања обичан интерес па тај интерес додати суми улога. На тај начин имаће се сума на дан првог капиталисања. Пошто и у следећим полгођима врши се улагање на исти начин то је овако добивена сума улог који се врши крајем сваке полугодине у току n година.

Према томе биће на дан првог капиталисања:

$$1 \text{ улог} \ldots\ldots\ldots u + \frac{u \cdot 6 \cdot p}{1200}$$

$$2 \text{ „} \ldots\ldots\ldots u + \frac{u \cdot 5 \cdot p}{1200}$$

$$3 \text{ „} \ldots\ldots\ldots u + \frac{u \cdot 4 \cdot p}{1200}$$

$$4 \text{ „} \ldots\ldots\ldots u + \frac{u \cdot 3 \cdot p}{1200}$$

$$5 \text{ „} \ldots\ldots\ldots u + \frac{u \cdot 2 \cdot p}{1200}$$

$$6 \text{ „} \ldots\ldots\ldots u + \frac{u \cdot 1 \cdot p}{1200}$$

Па ће свих шест улога са њиховим интересима бити:

$$\Sigma u = 6u + \frac{u\,p}{1200}(6+5+4+3+2+1) = 6\,u + \frac{u\,p}{1200}\cdot 21 = u\left(6 + \frac{21\,p}{1200}\right)$$

тј.

$$\Sigma u = u\left(6 + \frac{21 \cdot p}{1200}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Зато ће на крају n-те године у штедионици бити:

$$S_n' = \Sigma u\left(1 + \mathrm{III}_{\frac{p}{2}}^{2n-1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

За $u = 1000.$—, $p = 6\%$, $n = 4$ биће:

$$\Sigma u = 1000\left(6 + \frac{21 \cdot 6}{1200}\right) = 1000 \cdot 6{,}105 = 6105.\text{— дин.,}$$

а

$$S_n' = 6105\,(1 + \mathrm{III}_3^7) = 6105 \cdot 8{,}89233605 = 54287{,}71 \text{ дин.}$$

b) У овом случају биће на дан првог капиталисања:

$$1 \text{ улог} \ldots\ldots\ldots u + \frac{u \cdot 5 \cdot p}{1200}$$

$$2 \text{ „} \ldots\ldots\ldots u + \frac{u \cdot 4 \cdot p}{1200}$$

$$3 \text{ улог} \ldots\ldots\ldots \; u + \frac{u \cdot 3 \cdot p}{1200}$$

$$4 \;\;\text{„}\;\; \ldots\ldots\ldots \; u + \frac{u \cdot 2 \cdot p}{1200}$$

$$5 \;\;\text{„}\;\; \ldots\ldots\ldots \; u + \frac{u \cdot 1 \cdot p}{1200}$$

$$6 \;\;\text{„}\;\; \ldots\ldots\ldots \; u$$

А свих шест улога биће:

$$\Sigma u' = 6u + \frac{u\,p}{1200}(5+4+3+2+1) = 6u + \frac{5}{2} \cdot \frac{u\,p}{1200} \cdot 6 = 6u +$$
$$+ \frac{30\,u\,p}{2400} = u\left(6 + \frac{30\,p}{2400}\right)$$

тј.

$$\Sigma u' = u\left(6 + \frac{30\,p}{2400}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Па ће на крају n-те године бити:

$$S_n' = \Sigma u' \left(1 + III^{2n-1}_{\frac{p}{2}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

За $u = 1000.—$, $p = 6\%$, $n = 4$ биће:

$$\Sigma u' = 1000\left(6 + \frac{30 \cdot 6}{2400}\right) = 1000.\ 6{,}075 = 6075 \text{ — дин.},$$

а

$$S_n' = 6075\,(1 + III^7_3) = 6075 \cdot 8{,}89233605 = 54020{,}24 \text{ дин.}$$

Други начин:

Треба наћи полугодишњој релативној стопи $\frac{p}{2}$ одговарајућу месечну конформну стопу c_m и са њом рачунати као да је и улагање и капиталисање месечно.

За $p = 6\%$ из једначине:

$$I^6_{c_m} = I^1_3 = 1{,}03$$

добија се линеарном интерполацијом приближно тачна вредност за c_m.

$I^6_{1/4} = 1{,}01509406$	$1/4\%$	$I^6_{1/4} = 1{,}01509406$	$1/4\%$
$I^6_{1/2} = 1{,}03037751$	$1/2\%$	$I^6_{c_m} = 1{,}03000000$	$c_m\%$
$I^6_{1/2} - I^6_{1/4} = 0{,}01528345$	$1/4\%$	$I^6_{c_m} - I^6_{1/4} = 0{,}01490594$	$(c_m - 1/4)\%$

Одавде следује пропорција:

$$0{,}01528345 : 0{,}01490594 = \tfrac{1}{4} : \left(c_m - \tfrac{1}{4}\right)$$

А из ње тражена стопа:

$$c_m = \frac{1}{4} + \frac{1490594 \cdot \frac{1}{4}}{1528345} = 0{,}25 + 0{,}2438 = 0{,}4938\%.$$

Тражена сума улога биће:

$$\text{a)}\; S_n = u\,III^{12n}_{c_m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

$$\text{b)}\; S_n' = u\left(1 + III^{12n-1}_{c_m}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

За $u = 1000$, $p = 6\%$, $n = 4$ биће:

a) $S_n = 1000\ III^{48}_{0{,}4938} = 1000 \cdot 54{,}28623868 = 54286{,}24$ дин.

Вредност $III^{48}_{0{,}4938}$ израчуната је помоћу линеарне интерполације:

$III^{48}_{1/4} = 51{,}05853644$	$1/4\%$	$III^{48}_{1/4} = 51{,}05853644$	$1/4\%$
$III^{48}_{1/2} = 54{,}36832138$	$1/2\%$	$III^{48}_{0{,}4938} = x$	$0{,}4938\%$
$III^{48}_{1/2} - III^{48}_{1/4} = 3{,}30978494$	$1/4\%$	$III^{43}_{0{,}4938} - III^{48}_{1/4} = x - 51{,}05853644$	$0{,}2438\%$

Одавде следује пропорција:

$$3{,}30978494 : (x - 51{,}05853644) = \tfrac{1}{4} : 0{,}2438,$$

а из ње:

$$x = 51{,}05853644 + \frac{3{,}30978494 \cdot 0{,}2438}{1/4} = 54{,}28623868$$

Разлика у резултату незнатна је, а настала је услед тога што конформна стопа није тачно израчуната, већ само приближно.

b) $S_n' = 1000\,(1 + III^{47}_{0{,}4938}) = 1000 \cdot 54{,}01929954 = 54019{,}30$ дин.

Вредност $III^{47}_{0{,}4938}$ израчуната је на исти начин као и вредност $III^{48}_{0{,}4938}$.

И овде се резултат разликује од резултата по првом начину. То је из истих узрока из којих се разликује и пример под а).

Напомена. — Из изведених једначина може се израчунати: време, стопа, улог и број годишњих улагања кад су познате остале количине.

Чл. 23 Улагање ређе од капиталисања. Ради лакшег разумевања узимам као пример да је улагање годишње, а капиталисање тромесечно. Улог u константан а интересна стопа $p\%$ годишње декурзивно. Време улагања n година.

Овај задатак може се решити на три начина:

Први начин:

a) Стање улога тражи се годину дана после n-тог (последњег) улога.

Улог се укамати за једну годину, па се тако добивена сума сматра као сума улога са интересом на интерес при тромесечном улагању са релативном одговарајућом тромесечном интересном стопом. Затим се израчуна који тромесечни улог порасте на $u\,I^4_{\frac{p}{4}}$. То се добија из једначине:

$$u\,I^4_{\frac{p}{4}} = u_1\,III^4_{\frac{p}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (34)$$

где u означава годишњи а u_1 тромесечни улог.

Према томе тражена сума улога после n година добиће се из једначине:

$$S_n = u_1\,III^{4n}_{\frac{p}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (35)$$

b) Стање улога тражи се на дан n-тог (последњег) улога. Решење могуће на два начина. Први начин као и под a), само што место једначине (35) добија се једначина:

$$S_n' = u_1\,III^{4(n-1)}_{\frac{p}{4}} + u \quad \ldots\ldots\ldots\ (36)$$

На други начин решава се овако: Израчуна се колики треба да буде тромесечни антиципативни улог u_1 да би он при тромесечном капиталисању са одговарајућом релативном тромесечном стопом $\frac{p}{4}$ порастао на u, а затим се сума улога добија из једначине:

$$S_n = u_1\,III^{4n}_{\frac{p}{4}}$$

Пример 1. — На коју ће суму порасти годишњи улог од 2000.— дин. за 10 год. са интересом 8% год. при тромесечном капиталисању, кад се први улог улаже a) данас, b) после годину дана?

a) Овде је:

$$2000\,I^4_2 = u_1\,III^4_2,$$

па је

$$u_1 = 2000\,I^4_2 : III^4_2 = 2164,86 : 4,20404016 = 514,95 \text{ дин.}$$

Место годишњег улога од 2000.— дин. може се улагати тромесечно по 514,95 дин. при тромесечном капиталисању, па да се у оба случаја има иста сума. Зато је:

$$S_n = u_1\,III^{40}_2 = 514,95 \cdot 61,61002284 = 31726,08 \text{ дин.}$$

b) У овом случају по првом начину добија се:

$$S_n' = u_1\,III^{36}_2 + u = 514,95 \cdot 53,03425453 + 2000 = 29309,99 \text{ дин.}$$

На други начин добија се

$$u_1\,III^4_2 = u$$

тј.

$$u_1 = 2000 : III^4_2 = 2000 : 4,20404016 = 475,73 \text{ дин.}$$

Зато је тражена сума улога:

$$S_n' = u_1\,III^{4n}_{\frac{p}{4}} = 475,73\,III^{40}_2 = 475,73 \cdot 61,61002284 = 29309,74 \text{ дин.}$$

Пример 2. — На коју ће суму порасти улог од 1000.— дин., који ће се улагати сваке две године, почев од данас, када је капиталисање полугодишње, време улагања 10 година, а интересна стопа 6% годишње декурзивно?

Овде је:

$$u_1 = 1000\,I^4_3 : III^4_3 = 1125,50881 : 4,30913581 = 261,19 \text{ дин.}$$

Место сваке две године по 1000.— дин. може се улагати полугодишње по 261,19 дин.

Зато је сума тражених улога:

$$S_n = u_1\,III^{2n}_{\frac{p}{2}} = 261,19 \cdot III^{20}_3 = 261,19 \cdot 27,67648572 = 7228,81 \text{ дин.}$$

Други начин:

Нађе се релативна стопа капиталисања, па се онда тражи њој одговарајућа конформна стопа улагања. Пошто је годишња стопа p%, то је релативна тромесечна $\frac{p}{4}$%, па ће се добити годишња њој одговарајућа конформна стопа из једначине:

$$I^1_{c_p} = I^4_{\frac{p}{4}}$$

где је c_p конформна интересна стопа улагања.

Пошто се нађе конформна стопа, онда се сума улога добија из једначине:

$$S_n = u\,III^n_{c_p}.$$

Пример. — Исти као пример 1 у чл. 23.

Овде је

$$I^1_{c_p} = I^4_2 = 1,08243216,$$

што значи да је тражена стопа

$$c_p = 8,243216\% \text{ годишње.}$$

Зато је:

a) $S_n = 2000\,III^{10}_{8,243216} = 31729{,}30$ дин.,

b) $S_n' = 2000\,(1 + III^{9}_{8,243216}) = 29312.-$ дин.

Трећи начин:

Ако се n година улаже а капиталисање врши m пута годишње онда ће на крају n-те године — годину дана после последњег улога — бити:

1-ви	улог	$u v^{mn}$
2-ги	„	$u v^{m(n-1)}$
3-ћи	„	$u v^{m(n-2)}$
. . . .	. . . .	. . . .
(n—1)-ви	„	$u v^{2m}$
n-ти	„	$u v^{m}$

Сабирањем и извлачењем заједничког чинитеља $u v^m$ добија се једначина:

$$S_n = u v^m [1 + v^m + v^{2m} + \dots + v^{m(n-1)}]$$

Средња заграда јесте збир геометријске прогресије чији је први члан 1, количник v^m, број чланова n, а $v = 1 + \frac{p}{100m}$, па је зато:

$$S_n = u v^m \frac{v^{mn} - 1}{v^m - 1} \quad \dots\dots\dots\dots (37)$$

Ако се тражи стање улога на дан последњег улога онда место једначине (37) важи једначина:

$$S_n' = u \frac{v^{mn} - 1}{v^m - 1} \quad \dots\dots\dots\dots (38)$$

Пример. — Исти као пример 1 у чл. 23
Из једначине (37) добија се:

$$S_n = 2000\, I_2^4 \cdot \frac{I_2^{40} - 1}{I_2^4 - 1} = 31726{,}04 \text{ дин.}$$

А из једначине (38):

$$S_n' = 2000 \cdot \frac{I_2^{40} - 1}{I_2^4 - 1} = 29309{,}97 \text{ дин.}$$

Примедба 1. — Сватри начина не дају апсолутно тачне резултате, али то долази отуда што су сви бројеви, које узимамо из таблица или израчунавамо, ирационални, па услед тога и заокругљивања настају ове разлике.

Примедба 2. — Када је позната сума улога онда се може израчунати једна од осталих количина.

Улог промењив

Чл. 24 Општи појмови. Дешава се често у проблемима да улог расте или опада по аритметичкој или геометријској прогресији. И овде могу бити сватри случаја: улагање као и капиталисање, чешће од капиталисања и ређе од капиталисања. Овде ћу узети само случај где је улагање као и капиталисање.

Чл. 25. Улог расте или опада по аритметичкој прогресији. Нека се први пут уложи *u* дин., а сваки даљи улог повећава или смањује за *d* дин. Тада ће по истеку једног периода времена после последњег улога бити:

1-ви	улог	$u v^n = u v^n$
2-ги	„	$(u \pm d)\, v^{n-1} = u v^{n-1} \pm d\, v^{n-1}$
3-ћи	„	$(u \pm 2d)\, v^{n-2} = u v^{n-2} \pm 2d\, v^{n-2}$
. . . .	. . . .	. . . .
n-ти	„	$[u \pm (n-1)\, d]\, v = u v \pm (n-1)\, d \cdot v$

После сабирања добија се:

$$S_n = u(v + v^2 + \dots + v^n) \pm d[(n-1)v + (n-2)v^2 + \dots + 2v^{n-2} + v^{n-1}]$$

или

$$S_n = u\, III_p^n \pm d\, R \quad \dots\dots\dots\dots (39)$$

где је:

$$R = (n-1)v + (n-2)v^2 + \dots + 2v^{n-2} + v^{n-1} \dots (40)$$

Да се израчуна вредност за R треба једначину (40) помножити са v па од тако добивене једначине одузети једначину (40) Тако се добива:

$$R v - R = v^n + v^{n-1} + \dots v^2 + v - n v = III_p^n - n v$$

А одавде

$$R = \frac{100}{p}(III_p^n - n v)$$

Па је зато:

$$S_n = u\, III_p^n \pm \frac{100\, d}{p}(III_p^n - n v) \quad \dots\dots\dots\dots (41)$$

Ако се тражи стање на дан последњег улога онда се добија место једначине (41) једначина:

$$S_n' = u\,(1 + III_p^{n-1}) \pm \frac{100\, d}{p}[III_p^{n-1} - (n-1)] \quad . (42)$$

Пример. — Неко уложи данас 1000.— дин. и хоће да сваке следеће године улаже по 100.— дин. више. Са којом ће сумом располагати на крају четврте године, када је интерес 5% годишње а капиталисање годишње? Са којом ће сумом располагати на дан четвртог улога?

Овде је $u = 1000$.—, $n = 4$, $p = 5\%$, $d = +100$, па је вредност улога на крају четврте године тј. годину дана после последњег улога:

$$S_n = 1000\, III_5^4 + \frac{100 \cdot 100}{5}(III_5^4 - 4 \cdot 1{,}05) = 4525{,}63 + 2000 \cdot 03256 =$$
$$= 5176{,}83 \text{ дин.}$$

А на дан четвртог улога:

$$S_n' = 1000\,(1 + III_5^3) + \frac{100 \cdot 100}{5}\,(III_5^3 - 3) = 4310{,}12 +$$
$$+ 2000 \cdot 0{,}310125 = 4930{,}37 \text{ дин.}$$

Примедба. — Да је улог опадајући онда би место знака + требало ставити знак —.

Чл. 26 Улог расте или опада по геометријској прогресији. Неко уложи први пут u дин., а сваки следећи пут по q пута толико колико је уложио предходни пут, дакле:

први	пут	u	дин.
други	„	uq	„
трећи	„	uq^2	„
четврти	„	uq^3	„
. . . . . .	. . . .	. . . . .	. . .
n-ти	„	uq^{n-1}	„

Ако се тражи стање улога један период после n-тог улога, онда је сума улога:

$$S_n = u(q^{n-1}v + q^{n-2}v^2 + \ldots + q^3 v^{n-3} + q^2 v^{n-2} + q\,v^{n-1} + v^n)$$

Када се ова једначина помножи са $\frac{v}{q}$ добија се:

$$S_n \cdot \frac{v}{q} = u\left(q^{n-2}v^2 + q^{n-3}v^3 + \ldots + q^2 v^{n-2} + qv^{n-1} + v^n + \frac{v^{n+1}}{q}\right)$$

Одузимањем прве једначине од друге добија се:

$$S_n\left(\frac{v}{q} - 1\right) = u\left(\frac{v^{n+1}}{q} - q^{n-1}v\right)$$

тј.

$$S_n \frac{v-q}{q} = u\,\frac{v(v^n - q^n)}{q}$$

А одавде

$$S_n = uv\,\frac{v^n - q^n}{v - q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Ако се тражи стање улога на дан последњег улога онда место једначине (43) важи једначина:

$$S_n' = u\,\frac{v^n - q^n}{v - q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Пример. — Неко уложи данас 1000.— дин. Колико ће имати у штедионици на крају четврте године ако следећих година улаже по два пута толико колико претходне године? Интерес 5% годишње. Капиталисање годишње.

Овде је $u = 1000.—$, $q = 2$, $v = 1{,}05$, $n = 4$, па је:

$$S_n = 1000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{2^4 - 1.05^4}{2 - 1{,}05} = 16340{,}73 \text{ дин.}$$

Степен 2^4 овде је израчунат обичним множењем, али када је експонент велики број онда се степен q^n израчунава помоћу логаритама. Стави се

$$x = q^n$$

па логаритмује; дакле

$$\log x = n \log q,$$

а потом извуче нумерус:

$$x = N\overline{n \log q}$$

Степен v^n израчунава се или помоћу прве таблице или помоћу логаритама. И степен q^n може се израчунати помоћу прве таблице када је он интересни чинитељ стопе која се налази у таблици или неке стопе, која се налази у границама двеју стопа постојећих у таблици. У овом примеру то није могуће, јер је 2 интересни чинитељ стопе 100%, а она не постоји у таблици.

Када би се тражило стање на дан четвртог улога онда би било:

$$S_n' = \frac{S_4}{1{,}05} = 16340{,}75 : 1{,}05 = 15562{,}62 \text{ дин.}$$

Рачун ренте

Чл. 27 Општи појмови. Ако се нека сума прима више пута у једном сталном размаку времена, онда се таква сума зове *рента*. Рента може бити: темпорерна, вечита и доживотна; прва се плаћа извесан број година, друга вечито, што ће рећи њено плаћање никад не престаје, а трећа док је у животу извесно лице или лица назначена за кориснике. Прве две су предмет ове књиге, а трећа осигурања на живот, јер код ње игра улогу и вероватноћа живота и смрти лица, које ренту прима. Ако се рента прима почетком периода онда је та рента *антиципативна*, а кад је примање крајем онда *декурзивна*. Рента може бити стална или променљива. Стална је ако за све време примања остаје иста сума, а променљива ако се увећава или умањује по аритметичкој или геометријској прогресији или неком другом закону, као и кад расте или опада или час расте час опада без икаквог реда. Примање ренте може бити какво је и капиталисање, чешће или ређе од капиталисања.

Рента стална

Чл. 28 Рента се прима на дан капиталисања. Колико треба уложити данас да се следећих n година прима годишња a) декурзивна, b) антиципативна рента од r дин., када је капиталисање годишње а интерес $p\%$ годишње декурзивно?

а) Рента декурзивна.

Сума коју треба уложити данас да се прима n година рента од r дин. зове се *миза*, а једнака је суми дисконтованих вредности ренти на дан уплате мизе. У овом примеру дисконтоване вредности ренте на дан уплате мизе јесу:

1 ренте	$\frac{r}{v}$	дин.
2 „	$\frac{r}{v^2}$	„
3 „	$\frac{r}{v^3}$	„
. . . .	. . .	. . .
n-те „	$\frac{r}{v^n}$	„

Зато је:

$$M_n = r\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{v^3}+\ldots+\frac{1}{v^n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

где M_n означава мизу декурзивне ренте од r дин.

Заграда је збир друге таблице од врсте 1 до врсте n одговарајуће интересне стопе. Место да се сабира друга таблица израчуната је четврта, па се ова вредност налази у њој а у врсти n-тој. Зато је:

$$M_n = r\,IV_p^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

Исто тако заграда је и геометријска прогресија чији је први члан $\frac{1}{v}$, количник $\frac{1}{v}$, а број чланова n, па се, на основу збирног обрасца за геометријску прогресију, може писати:

$$M_n = r\frac{1}{v}\cdot\frac{\left(\frac{1}{v}\right)^n-1}{\frac{1}{v}-1} = r\frac{v^n-1}{v^n(v-1)} = r\frac{100}{p}\left(1-\frac{1}{v^n}\right) \ . \ (47)$$

Када се бројитељ и именитељ десне стране једначине (47), подели са v^n добија се

$$M_n = r\cdot\frac{1-\frac{1}{v^n}}{v-1}\,.$$

А одавде, када се стави $n=\infty$, где ∞ означава бескрајно велики број, што ће рећи да је рента вечита, добија се:

$$M_\infty = \frac{r}{v-1} = \frac{100r}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

Из једначине (48) излази да је миза за вечиту ренту једнака капиталу, који за један период времена носи интерес у износу ренте.

Када се рента прима m пута годишње а капиталише такође m пута, онда треба ставити mn на месту n и $\frac{p}{m}$ на место p.

Примери: 1) Колико треба уложити данас у штедионицу, која плаћа 6% годишње а капиталише годишње, да се 15 година прима годишња декурзивна рента од 4000.— дин.?

$$M_n = r\,IV_p^n = 4000\,IV_6^{15} = 4\cdot 9712{,}24899 = 38849.\text{— дин.}$$

2) Колико треба уплатити за ренту из примера 1) када је та рента вечита?

$$M_\infty = \frac{100\cdot 4000}{6} = 66666{,}67 \text{ дин.}$$

b) Рента антиципативна

У овом случају прва рента прима се одмах а n-та у почетку n-те године тј. на крају (n-1)-ве године. Према томе дисконтоване вредности ренте на дан уплате мизе јесу:

1 ренте	r	дин.
2 „	$\frac{r}{v}$	„
3 „	$\frac{r}{v^2}$	„
. . . .	. . .	. . .
n-те „	$\frac{r}{v^{n-1}}$	„

Зато је:

$$M_n' = r\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\ldots+\frac{1}{v^{n-1}}\right) \ldots\ldots (49)$$

где M_n' означава мизу за антиципативну ренту од r дин.

Заграда је:

$$1+IV_p^{n-1},$$

па је зато

$$M_n' = r\left(1+IV_p^{n-1}\right) = IV_p^n\cdot I_p^1 \quad \ldots\ldots\ldots (50)$$

Али пошто је заграда и геометријска прогресија чији је први члан 1, количник $\frac{1}{v}$, а број чланова n, то на основу збирног обрасца добија се:

$$M_n' = r \frac{v^n - 1}{v^{n-1}(v-1)} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (51)$$

Множењем и дељењем десне стране са v^n добија се:

$$M_n' = r \frac{\left(1 - \frac{1}{v^n}\right) v}{v - 1}$$

Стављањем $n = \infty$ добија се миза за вечиту ренту:

$$M'_\infty = \frac{100\,r}{p} \cdot v = \frac{100\,r}{p} + r \quad \dots\dots\dots \quad (52)$$

Примери: 1) Место полугодишње антиципативне ренте од 5000.— дин. која би се примала 20 година колико се може примити на дан пријема прве ренте, кад је интерес 6% годишње декурзивно, а капиталисање полугодишње?

$$M_n' = 5000\,(1 + IV_3^{39}) = 5 \cdot 23808{,}21513 = 119041{,}08 \text{ дин.}$$

2) Колико треба уплатити за ренту из примера 1) када је та рента вечита?

$$M'_\infty = \frac{100 \cdot 5000}{3} + 5000 = 171666{,}67 \text{ дин.}$$

Чл. 29 Упоређење једначина (46) и (50). Ако се рента у једначини (46) обележи са r а у једначини (50) са r' онда те једначине имају облик:

$$M_n = r\,IV_p^n$$
$$M_n' = r'IV_p^n I_p^1$$

Под претпоставком да је интересна стопа у обе једначине иста могу бити ови случајеви:

1) $r = r'$, па зато:

$$M_n = M_n'\,II_p^1$$

2) $M_n = M_n'$, па је зато:

$$r = r'\,J_p^1$$

Ове једначине дају: 1) мизу за декурзивну ренту кад је позната миза за исту антиципативну ренту, и 2) декурзивну, кад је позната антиципативна рента, и обратно.

Примери: 1) Из неке суме ужива се годишња антиципативна рента од 1000.— дин. Колика се годишња декурзивна рента може примати из те исте суме кад је интерес 5% годишње декурзивно а капиталисање годишње?

$$r = 1000\,I_5^1 = 1050.\text{— дин.}$$

2) Миза за једну антиципативну полугодишњу ренту износи 10.000.— дин. Колика је миза за исту толику декурзивну ренту кад је интерес 8% годишње декурзивно, а капиталисање полугодишње?

$$M_n = 10000\,II_4^1 = 9615{,}38 \text{ дин.}$$

Чл. 30. Практично упуство за израчунавање мизе M_n и M_n'. При израчунавању мизе код ренте важно је да се зна да ли ће се применити једначина

$$M_n = r\,IV_p^n$$

или једначина

$$M_n' = r\,(1 + IV_p^{n-1})$$

За то нам служи ово правило: *Ако од дана улога мизе до дана пријема последње ренте има n периода онда се примењује једначина*

$$M_n = r\,IV_p^n,$$

а ако има n-1 период онда једначина

$$M_n' = r\,(1 + IV_p^{n-1}).$$

Да би се одредило колико има периода препоручљиво је да се на бројној линији пренесе онолико периода колико се пута прима рента. Затим да се јаче истакне дан улога мизе и дан пријема последње ренте. А после тога да се број који показује када је уложена миза одузме од броја који показује када се прима последња рента.

Пример. — Колико треба уложити данас да се 6 година прима годишња a) декурзивна, b) антиципативна рента од 3000.— дин. када се интерес рачуна 4% годишње декурзивно, а капиталисање врши годишње?

a) Дан уплате мизе обележен је са 0. Прва рента исплаћује се после годину дана па ће бити обележена са 1, друга после 2 године зато са 3, итд., 6-та са 6. Овде је $6 - 0 = 6$, па се миза рачуна из једначине:

рента	0	1	2	3	4	5	6
година	0	1	2	3	4	5	6

$$M^n = r\,IV_p^n = 3000\,IV_4^6 = 3 \cdot 5242{,}13686 = 15726{,}41 \text{ дин.}$$

b) Дан уплате мизе обележен је са 0. Прва рента исплаћује се одмах, друга после годину дана, ..., 6-та после 5 година, па су, према томе, обележене: прва са 0, друга са 1, ..., 6-та са 5. Зато је $5 - 0 = 5$. Дакле миза се рачуна из једначине:

рента	1	2	3	4	5	
година	0	1	2	3	4	5

$$M_n' = r\,(1 + IV_p^{n-1}) = 3000\,(1 + IV_4^5) = 3 \cdot 5451{,}82233 = 16355{,}47 \text{ дин.}$$

Чл. 31 Израчунавање ренте, броја примања ренте и интересне стопе. Из једначине:

$$M_n = r\, IV^{nm}_{\frac{p}{m}}$$

односно

$$M_n' = r\left(1 + IV^{nm-1}_{\frac{p}{m}}\right) = r\, IV^{mn}_{\frac{p}{m}}\, I^{1}_{\frac{p}{m}}$$

може се израчунати једна од 5 количина када су остале четири познате. У досадашњим примерима били су познати: r, p, m и n, па је израчунавато M_n, односно M_n'. У следећим примерима узећемо као непознату једну од ове четири количине. Да би непознату израчунали решићемо једначину по њој.

Пример 1. — Данас је уложено 10.000.— дин. у штедионицу, која плаћа 6% годишње а врши капиталисање полугодишње. Колика се полугодишња рента може примати следећих 20 год. кад је примање ренте a) антиципативно, b) декурзивно?

a) Овде је $M_n' = 10000.—$, $n = 20$, $m = 2$, $p = 6$, па је зато:

$$r = 10000 : (1 + IV^{39}_{3}) = 420{,}02 \text{ дин.}$$

Или

$$r = 10000 \cdot V^{40}_{3} \,.\, II^{1}_{3} = 420{,}02 \text{ дин.,}$$

где V означава пету таблицу, која је реципрочна вредност четврте; дакле

$$V^{mn}_{\frac{p}{m}} = \frac{1}{IV^{mn}_{\frac{p}{m}}}$$

b) Овде је $M_n = 10000.—$, $n = 20$, $m = 2$, $p = 6$, па је зато:

$$r = 10000 : IV^{40}_{3} = 432{,}62 \text{ дин.}$$

Или

$$r = 10000\, V^{40}_{3} = 432{,}62 \text{ дин.}$$

Пример 2. — Са којом интересном стопом треба уложити дин. 6000.— да се 25 година, при годишњем капиталисању, прима годишња a) антиципативна, b) декурзивна рента од 500.— дин?

a) Овде је $M_n' = 6000.—$, $n = 25$, $m = 1$, $r = 400.—$ па је:

$$1 + IV^{24}_{p} = 6000 : 500 = 12.—; \text{ тј. } IV^{24}_{p} = 11.—$$

Да се нађе непозната стопа треба у хоризонталној врсти 24 таблице IV тражити број 11, који казује колико треба уложити да се 24 године прима годишња декурзивна рента од један динар са непознатом стопом. Овај број не налази се у таблици, већ њему два блиска: 11,4693 3401, коме одговара стопа 7% и 10,9829 6680, коме одговара стопа $7^1/_2$%. Према томе непозната стопа већа је од 7%, а мања од $7^1/_2$% годишње. Приближно тачна вредност наћиће се линеарном интерполацијом.

$IV^{24}_{7} =$	11,4693	7	$IV^{24}_{7} =$	11,4693	7
$IV^{24}_{7^1/_2} =$	10,9830	$7^1/_2$	$IV^{24}_{p} =$	11,0000	p
$IV^{24}_{7^1/_2} - IV^{24}_{7} = —$	0,4863	$^1/_2$	$IV^{24}_{p} - IV^{24}_{7} = —$	0,4693	p—7

Одавде следује пропорција:

$$0{,}4863 : 0{,}4693 = \tfrac{1}{2} : (p - 7)$$

А одавде тражена стопа:

$$p = 7 + \frac{4693 \cdot \frac{1}{2}}{4863} = 7{,}482\% \text{ годишње.}$$

b) Овде је $M_n' = 6000.—$, $n = 25$, $m = 1$, $r = 500$, па је:

$$IV^{25}_{p} = 6000 : 500 = 12.—$$

У 25 хоризонталној врсти не налази се број 12 већ њему два блиска броја: 12,19787672, коме одговара стопа $6^1/_2$%, и 11,65358319, коме одговара стопа 7%. Тражена стопа, према томе, већа је од $6^1/_2$% а мања од 7% годишње. Приближно тачна вредност добиће се линеарном интерполацијом:

$IV^{25}_{6^1/_2} =$	12,1979	$6^1/_2$	$IV^{25}_{6^1/_2} =$	12,1979	$6^1/_2$
$IV^{25}_{7} =$	11,6536	7	$IV^{25}_{p} =$	12,0000	p
$IV^{25}_{7} - IV^{25}_{6^1/_2} = —$	0,5443	$^1/_2$	$IV^{25}_{p} - IV^{25}_{6^1/_2} = —$	0,1979	p—$6^1/_2$

Одавде следује пропорција:

$$0{,}5443 : 0{,}1979 = \tfrac{1}{2} : (p - 6^1/_2)$$

А одавде:

$$p = 6^1/_2 + \frac{1979 \cdot \frac{1}{2}}{5443} = 6{,}5 + 0{,}182 = 6{,}682\% \text{ годишње.}$$

Пример 3. — Данас је уложено 14000.— дин. у штедионицу, која плаћа 5% годишње а врши капиталисање годишње. Колико се пута може примити годишња a) антиципативна, b) декурзивна рента од 1000.—дин? Да ли је последња рента 1000, а, ако није, колика је?

a) Овде је $M_n' = 14000.—$, $p = 5\%$, $r = 1000.—$, $m = 1$, па је:

$$IV^{x-1}_{5} = \frac{14000}{1000} - 1 = 13.—$$

Број 13 налази се у ступцу 5% између бројева: 12,82115271, коме одговара врста 21, и 13,16300258, коме одговара врста 22. Према томе број x — 1 већи је од 21 а мањи од 22, што значи да ће се 22 пута примити рента од 1000.— дин., а 23 пут рента мања од 1000.— дин.

Изналажење времена интерполацијом у овом примеру има само теоријског значаја, али практичног нема. Ренте се примају у једном столном размаку времена, у овом примеру од године дана, па тај размак мора бити и између последње и претпоследње ренте. Зато се овде мора тражити последња рента, а не интерполирати време.

Да би смо нашли последњу ренту обележићемо је са r_1, за разлику од осталих, које су међу собом једнаке и обележене са r. Дисконтовањем свих ренти добија се миза. Према томе је:

$$M_n' = r + \frac{r}{v} + \frac{r}{v^2} + \ldots + \frac{r}{v^{n-1}} + \frac{r_1}{v^{n-1}} =$$

$$= r\,(1 + IV_p^{n-2}) + r_1\, II_p^{n-1}$$

Одавде добија се:

$$r_1 = [M_n' - r\,(1 + IV_p^{n-2})]\, I_p^{n-1} \quad \ldots\ldots (52)$$

У овом примеру биће:

$$r_1 = [14000 - 1000\,(1 + IV_5^{21})]\, I_5^{22} = 178{,}85 \cdot 2{,}92526072 = 523{,}18 \text{ дин.}$$

Дакле последња тј. 23 рента јесте 523,18 дин.

b) Овде је $M_n = 14000.$—, $r = 1000.$—, $p = 5\%$, $m = 1$ па зато:

$$IV_5^x = 14000 : 1000 = 14.$$

У стубцу 5%, а у врсти 34 налази се мањи број 13,79864179, а у истом стубцу у врсти 25 већи број 14,09394457. Према томе рента од 1000.— дин. примиће се 24 пута, а 25-ти пут једна мања рента.

Та рента налази се из једначине:

$$M_n = r\, IV_p^{n-1} + r_1\, II_p^n$$

Дакле

$$r_1 = [M_n - r\, IV_p^{n-1}]\, I_p^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

У овом примеру је

$$r_1 = [14000 - 1000\, IV_5^{24}]\, I_5^{25} = 201{,}36 \cdot 3{,}38635494 = 681{,}87 \text{ дин.}$$

Према томе 25-та рента износи 681,87 а не 1000.— дин.

Чл. 32 Примања ренте чешће од капиталисања. Када се за време једног капиталисања прими рента више пута, а не само једанпут, онда напред изведене једначине не могу се применити. Овде ћу посматрати случај где примање једне од ренти пада на дан капиталисања, а остале се примају у једном сталном размаку времена.

Пример 1. — Рента од r дин. прима се сваког месеца n година а капитализање врши полугодишње. Колико се мора уплатити на име мизе када се прва рента прима: а) на дан уплате мизе, b) месец дана после уплате мизе? Интерес p% годишње декурзивно.

Решење је могуће на два начина:

Први начин:

а) Решење се добија када се у излагањима чл. (22) пример 1. првог начина под а) стави $u = r$, $\Sigma u = \Sigma r$, и $S_n' = M_n\, v^{2n} = M_n\, I_{\frac{p}{2}}^{2n}$, дакле

$$M_n\, I_{\frac{p}{2}}^{2n} = \Sigma r \left(1 + III_{\frac{p}{2}}^{2n-1}\right),$$

где је:

$$\Sigma r = r\left(6 + \frac{21p}{1200}\right)$$

Па је тражена миза:

$$M_n = \Sigma r\, IV_{\frac{p}{2}}^{2n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

За $r = 1000$, $p = 6\%$, $n = 4$ биће:

$$\Sigma r = 1000\left(6 + \frac{21 \cdot 6}{1200}\right) = 1000 \cdot 6{,}105 = 6105.\text{— дин.,}$$

а

$$M_n = 6105 \cdot IV_3^8 = 6105 \cdot 7{,}01969219 = 42855{,}22 \text{ дин.}$$

b) И у овом случају треба ставити $r' = u'$, $\Sigma u' = \Sigma r' = r'\left(6 + \frac{30p}{2400}\right)$ и $S_n' = M_n\, I_{\frac{p}{2}}^{2n}$. Тако се добија

$$M_n\, I_{\frac{p}{2}}^{2n} = \Sigma r' \left(1 + III_{\frac{p}{2}}^{2n-1}\right)$$

А одавде

$$M_n = \Sigma r'\, IV_{\frac{p}{2}}^{2n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

За $r = 1000.$—, $p = 6\%$, $n = 4$ биће:

$$\Sigma r' = 1000\left(6 + \frac{30 \cdot 6}{2400}\right) = 1000 \cdot 6{,}075 = 6075.\text{— дин.,}$$

а

$$M_n = 6075 \cdot IV_3^8 = 6075 \cdot 7{,}01969219 = 42644{,}62 \text{ дин.}$$

Други начин:

Релативној стопи капиталисања нађе се одговарајућа конформна интересна стопа примања ренте, па се онда ради као да је капиталисање као што је и примање ренте. Према томе биће:

a) $M_n' = r\,(1 + IV_{Cm}^{12n-1})$ . . . . (56)

b) $M_n = r\, IV_{Cm}^{12n}$ . . . . (57)

За $r = 1000.$—, $p = 6\%$, $n = 4$ биће:

a) $M'_n = 1000\,(1 + IV^{47}_{0,4938}) = 1000 \cdot 42,85518021 = 42855,18$ дин.

Вредност $IV^{47}_{0,4938}$ израчуната је помоћу линеарне интерполације:

$IV^{47}_{1/4} = 44,29164137$ $IV^{47}_{1/2} = 41,79321937$	$\frac{1}{4}\%$ $1/2\%$	$IV^{47}_{1/2} = 44,29164137$ $IV^{47}_{0,4938} = x$	$\frac{1}{4}\%$ $0,4938\%$
$IV^{47}_{1/2} - IV^{47}_{1/4} = 2,49842200$	$1/4\%$	$IV^{47}_{0,4938} - IV^{47}_{1/4} = (44,29164137 - x)$	$0,2438\%$

Одавде се добија пропорција:

$$2,498422 : (44,29164137 - x) = \tfrac{1}{4} : 0,2438,$$

а из ње:

$$x = 44.29164137 - 2,498422 \cdot 0,2438 \cdot 4 = 41,85518021$$

b) $M_n = 1000\, IV^{48}_{0,4938} = 42644,60$ дин.

Вредност $IV^{48}_{0,4938}$ израчуната је на исти начин као и $IV^{47}_{0,4938}$.

Напомена. — Из изведених једначина могу се израчунати: време, стопа, рента и број годишњих примања ренте кад су познате остале количине.

Чл. 33. Примање ренте ређе од капиталисања. Нека је, ради лакшег разумевања, рента годишња а капиталисање тромесечно. Интересна стопа $p\%$ годишње, а време примања ренте n година.

Овај задатак може се решити на три начина:

Први начин:

a) Прва рента прима се на дан улагања мизе.

Ако је годишња рента r, а њој одговарајућа тромесечна декурзивна рента r_1, онда мора постојати једначина:

$$r = r_1\, IV^{4}_{\frac{p}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (58)$$

тј.

$$r_1 = r\, V^{4}_{\frac{p}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (59)$$

Када се годишња рента претвори у ренту капиталисања онда се миза израчунава из познате једначине.

$$M_n = r_1\, IV^{4n}_{\frac{p}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (60)$$

Ако је капиталисање m пута годишње онда место једначине (59) важи једначина:

$$r_1 = r\, V^{m}_{\frac{p}{m}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (61)$$

а место једначине (60) једначина:

$$M_n = r_1\, IV^{mn}_{\frac{p}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (62)$$

За $r = 1000.$—, $n = 10.$—, $p = 8\%$, $m = 4$ биће:

$$r_1 = 1000\, V^{4}_{2} = 262,62 \text{ дин.},$$

а

$$M_n = r_1\, IV^{40}_{2} = 262,62 \cdot 27,35547924 = 7184,08 \text{ дин.}$$

b) Прва рента прима се годину дана после улога мизе.

Ако је годишња рента r, а њој одговарајућа тромесечна рента, која би се примила први пут на дан првог капиталисања, r_1 · тада мора постојати једначина:

$$r = r_1 \cdot \left(1 + III^{3}_{\frac{p}{4}}\right)$$

тј.

$$r_1 = r : \left(1 + III^{3}_{\frac{p}{4}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ (63)$$

На тај начин годишња декурзивна рента претворена је у тромесечну декурзивну, па ће тражена миза бити:

$$M_n = r_1\, IV^{4n}_{\frac{p}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (64)$$

Када је капиталисање m пута годишње онда место 4 треба ставити m.

За $r = 1000.$—, $n = 10.$—, $p = 8\%$, $m = 4$ биће:

$$r_1 = 1000 : (1 + III^{3}_{2}) = 1000 : 4,121608 = 242,63 \text{ дин.}$$

Па зато

$$M_n = 242,63 \cdot IV^{40}_{2} = 242,63 \cdot 27,35547924 = 6637,25$$

Примедба. — Једначине и под a) и под b) изведене су под претпоставком да се рента прима једанпут годишње, а капиталисање врши m пута годишње. Али ако се рента прима сваких s година, онда се у току тог периода времена капиталисање врши ms пута. Зато у изведеним једначинама треба ставити: ms на место m, а $\frac{n}{s}$ на место n. Ако је примање ренте α пута годишње, онда треба ставити $n\alpha$ место n, а $\frac{m}{\alpha}$ место m, где је $\frac{m}{\alpha}$ цео број.

Други начин:

Релативна стопа $\frac{p}{m}$ капиталисања сматра се као конформна па се нађе њој одговарајућа релативна стопа за интервал времена примања ренте. С тако добивеном стопом рачуна се као да је капиталисање исто као и примање ренте.

За $r = 1000.—$, $n = 10$, $p = 8\%$, $m = 4$ при годишњем примању ренте биће релативна стопа 2% за тромесечје. Та се стопа сматра као конформна и тражи јој се одговарајућа годишња стопа из једначине:

$$I_2^4 = I_{cp}^1.$$

Та је стопа:

$$c_p = 8{,}243216\% \text{ годишње (види чл. 23)}$$

a) Рента антиципативна.

$$M'_n = 1000\,(1 + IV^{9}_{8,243216}) = 7184{,}70 \text{ дин.}$$

b) Рента декурзивна.

$$M_n = 1000\, IV^{10}_{8,243216} = 6637{,}73 \text{ дин.}$$

Трећи начин:

Рента се прима n пута а капиталисање врши m пута у једном интервалу примања ренте.

a) Рента антиципативна.

Дисконтоване вредности ренте биће:

$$\begin{array}{lcc}
1 \text{ ренте} & r & \text{дин.} \\
2 \quad " & \frac{r}{v^m} & " \\
3 \quad " & \frac{r}{v^{2m}} & " \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots \\
(n-1)\text{-ве} \quad " & \frac{r}{v^{m(n-2)}} & " \\
n\text{-те} \quad " & \frac{r}{v^{m(n-1)}} & "
\end{array}$$

Па је тражена миза:

$$M'_n = r\left[1 + \frac{1}{v^m} + \frac{1}{v^{2m}} + \dots + \frac{1}{v^{m(n-2)}} + \frac{1}{v^{m(n-1)}}\right]$$

тј.

$$M'_n = r\,\frac{v^{mn} - 1}{v^{m(n-1)}\,(v^m - 1)} \quad \dots\dots\dots (65)$$

где је:

$$v = 1 + \frac{p}{100\,m}$$

b) Рента декурзивна.

Дисконтоване вредности ренте јесу:

$$\begin{array}{lcc}
1 \text{ ренте} & \frac{r}{v^m} & \text{дин.} \\
2 \quad " & \frac{r}{v^{2m}} & " \\
3 \quad " & \frac{r}{v^{3m}} & " \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots \\
(n-1)\text{-ве} \quad " & \frac{r}{v^{m(n-1)}} & " \\
n\text{-те} \quad " & \frac{r}{v^{mn}} & "
\end{array}$$

Зато је тражена миза:

$$M_n = r\left(\frac{1}{v^m} + \frac{1}{v^{2m}} + \frac{1}{v^{3m}} + \dots + \frac{1}{v^{m(n-1)}} + \frac{1}{v^{mn}}\right)$$

тј.

$$M_n = r\,\frac{v^{mn} - 1}{v^{mn}\,(v^m - 1)} \quad \dots\dots\dots (66)$$

За $r = 1000$, $n = 10$, $m = 4$, $p = 8$ биће:

$$M'_n = 1000 \cdot \frac{I_2^{40} - 1}{I_2^{36}\,(I_2^4 - 1)} = 1000 \cdot 7{,}18421 = 7184{,}21 \text{ дин.}$$

миза за антиципативну ренту, а

$$M_n = 1000\,\frac{I_2^{40} - 1}{I_2^{40}\,(I_2^4 - 1)} = 1000 \cdot 6{,}63711 = 6637{,}11 \text{ дин.}$$

миза за декурзивну ренту.

Примедба 1. — Сва три начина дају исти резултат. Разлика је само у парама, али то долази отуда што се ради са ирационалним бројевима.

Примедба 2. — Када је позната миза онда се из изведених једначина може израчунати једна од осталих количина.

Рента промењива

Чл. 34 Општи појмови. Има проблема где рента расте или опада по аритметичкој или геометријској прогресији. И овде могу бити ова три случаја: примање ренте као и капиталисање, примање ренте чешће од капиталисања и примање ренте ређе од капиталисања. Изнећу само први случај — примање ренте се поклапа са капиталисањем.

Чл. 35 Рента расте или опада по аритметичкој пропорцији. Ако је прва рента r а следећа већа или мања од претходне за d, онда ће на дан уплате мизе бити дисконтоване вредности декурзивне ренте:

1 ренте	$\frac{r}{v}$
2 „	$\frac{r \pm d}{v^2}$
3 „	$\frac{r \pm 2d}{v^3}$
. . . .	. . . .
n-те „	$\frac{r \pm (n-1)d}{v^n}$

Одавде, после сабирања, добија се:

$$M_n = r\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{v^3}+\ldots+\frac{1}{v^n}\right) \pm d\left(\frac{1}{v^2}+\frac{2}{v^3}+\ldots+\frac{n-1}{v^n}\right)$$

или

$$M_n = r \cdot IV_p^n \pm d\,R \;\ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

где је:

$$R = \frac{1}{v^2}+\frac{2}{v^3}+\frac{3}{v^4}+\ldots+\frac{n-2}{v^{n-1}}-\frac{n-1}{v^n}$$

Када се ова једначина помножи за v па од тако добивене вредности одузме првобитна једначина добија се:

$$R\,v - R = \frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{v^3}+\ldots+\frac{1}{v^n}-\frac{n}{v^n}$$

Одавде је:

$$R = \frac{100}{p}\left(IV_p^n - n\,II_p^n\right)$$

Зато је:

$$M_n = r\,IV_p^n \pm d \cdot \frac{100}{p}\left(IV_p^n - n\,II_p^n\right) \ldots\ldots (67^*)$$

Када се у овој једначини стави $d = 0$ добија се

$$M_n = r\,IV_p^n$$

тј. једначина када је рента константна.

Једначина (67) може се извести из једначине:

$$S_n' = u\left(1 + III_p^{n-1}\right) \pm d \cdot \frac{100}{p}\left[III_p^{n-1} - (n-1)\right]$$

стављајући:

$$u = r \text{ и } S_n' = M_n v^n$$

Ако је рента антиципативна онда су дисконтоване вредности ренте на дан уплате мизе:

1 ренте	r
2 „	$\frac{r \pm d}{v}$
3 „	$\frac{r \pm 2d}{v^2}$
. . . .	. . . .
n-те „	$\frac{r \pm (n-1)d}{v^{n-1}}$

Сабирањем добија се тражена миза:

$$M_n' = r\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\ldots+\frac{1}{v^{n-1}}\right) \pm d\left(\frac{1}{v}+\frac{2}{v^2}+\ldots+\frac{n-1}{v^{n-1}}\right)$$

или

$$M_n' = r\left(1 + IV_p^{n-1}\right) \pm d\,R \;\ldots\ldots\ldots (68)$$

где је:

$$R = \frac{1}{v}+\frac{2}{v^2}+\frac{3}{v^3}+\ldots+\frac{n-2}{v^{n-2}}+\frac{n-1}{v^{n-1}}$$

Множењем ове једначине са v и одузимањем првобитне добија се

$$R\,v - R = 1+\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\ldots+\frac{1}{v^{n-2}}+\frac{1}{v^{n-1}}-\frac{n}{v^{n-1}}$$

Одавде, после деобе са v, добија се:

$$R = \frac{100+p}{p}\left(IV_p^n - n\,II_p^n\right)$$

Па је зато тражена миза:

$$M_n' = r\left(1 + IV_p^{n-1}\right) \pm d\,\frac{100+p}{p}\left(IV_p^n - n\,II_p^n\right) \;. (69)$$

За $d = 0$ добија се једначина:

$$M_n' = r\left(1 + IV_p^{n-1}\right)$$

а то је једначина када је рента константна.

Једначина (69) може се извести из једначине

$$S_n = u\,III_p^n \pm d \cdot \frac{100}{p}\left(III_p^n - n\,v\right)$$

стављајући:

$$u = r \text{ и } S_n = M_n' v^n$$

Пример. — Колико треба уложити данас у штедионицу, која плаћа 4% годишње, а врши капиталисање годишње, да се четири године прима рента и то први пут 1000.— дин, а сваки следећи пут мање 100.— дин.

а) Рента декурзивна.

$$M_n = 1000\,\mathrm{IV}_4^4 - 100 \cdot \frac{100}{4}\left(\mathrm{IV}_4^4 - 4\,\mathrm{II}_4^4\right) =$$
$$= 3629{,}90 - 2500\ (3\,62989524 - 4 \cdot 0.85480419) =$$
$$= 3629{,}90 - 2500 \cdot 0{,}21067848 = 3629{,}90 - 526{,}70 =$$
$$= 3103{,}20 \text{ дин.}$$

Да се провери тачност треба овој суми додати интерес за годину дана па од тако добивене вредности одузети прву ренту од 1000.— дин., на тај остатак додати интерес и од тога одузети другу ренту од 900.— дин. итд, кад се у последњој години дода интерес, онда мора бити последња рента; дакле:

M_n =	3103,20	дин.
+4% интер. =	124,13	„
	3227,33	дин.
$-r$ =	1000.—	„
	2227,33	дин.
+4% интер. =	89,09	„
	2316,42	дин.
$-(r-d)$	900.—	„
	1416,42	дин.
+4% интер. =	56.66	„
	1473,08	дин.
$-(r-2d)$ =	800.—	„
	673,08	дин.
+4% интер. =	26 92	„
$r-3d$ =	700.—	дин.

Пошто је четврта рента 700 а фонд образован од мизе показује стање 700.— дин. на дан пријема четврте ренте, то значи да је 3101.20 дин. довољно да се 4 пута прими рента која опада за 100.— дин. а прва износи 1000.— дин.

Да ова рента расте за 100.— дин. онда би се место знака минус ставио плус. Тада би миза била:

$$M_n = 3629{,}90 + 526{,}70 = 4156{,}60 \text{ дин.}$$

а) Рента антиципативна.

$$M_n' = 1000\,(1 + \mathrm{IV}_4^3) - 100 \cdot \frac{104}{4}\left(\mathrm{IV}_4^4 - 4 \cdot \mathrm{II}_4^4\right) =$$
$$= 3775{,}09 - 100 \cdot 26 \cdot 0\,21067848 = 3775{,}09 - 2600 \cdot 0{,}21067848 =$$
$$= 3775{,}09 - 547\,76 = 3227{,}33 \text{ дин.}$$

Ради проверавања тачности треба поступити као и под а) само с том разликом што се прва рента мора одмах исплатити. Дакле

M_n' =	3277,33	дин.
— r =	1000 —	„
	2227.33	дин.
+4% интер. =	89 09	„
	2316.42	дин.
$-(r-d)$ =	900 —	„
	1416 42	дин.
−4% интер. =	56 66	„
	1473,08	дин.
$-(r-2d)$ =	800 —	„
	673 08	дин.
+4% интер. =	26.92	„
$r-3d$ =	700,—	дин.

Пошто је стање фонда на дан исплате четврте ренте 700 а четврта рента 700 то је сума од 3277.33 дин. довољна за опадајућу антиципативну ренту од 1000.— са опадањем од 100 дин.

Када би рента била растућа за 100.— онда би миза била:

$$M_n' = 3775{,}09 + 547{,}76 = 4322{,}85 \text{ дин.}$$

Чл. 36 Рента сукцесивно расте или опада по геометријској прогресији. Нека је прва рента r а свака следећа q пута претходна. Према томе је:

1-ва	рента	r
2-га	„	rq
3-ћа	„	rq^2
. . . .	. . . .	. . . .
n-та	„	$r \cdot q^{n-1}$

Миза за декурзивну ренту биће:

$$M_n = r\left(\frac{1}{v} + \frac{q}{v^2} + \frac{q^2}{v^3} + \ldots + \frac{q^{n-1}}{v^n}\right)$$

тј.

$$M = r \cdot \frac{\left(\frac{q}{v}\right)^n - 1}{\frac{q}{v} - 1} = r\,\frac{q^n - v^n}{v^n\,(q - v)}$$

Дакле:

$$M_n = r\,\frac{q^n - v^n}{v^n\,(q - v)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

За антиципативну ренту биће:

$$M_n' = r\,\frac{q^n - v^n}{v^{n-1}\,(q - v)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

Колико треба уложити да се четири године прима a) декурзивна b) антиципативна рента, када се интерес рачуна 5% годишње а капиталисање врши годишње. Прва рента је 1000.— дин., а свака следећа двострука претходна.

a) Рента декурзивна.

$$M_n = 1000 \cdot \frac{2^4 - 1{,}05^4}{1{,}05^4\,(2 - 1{,}05)} = 12803{,}41 \text{ дин.}$$

b) Рента антиципативна.

$$M_n' = 1000 \cdot \frac{2^4 - 1{,}05^4}{1{,}05^3\,(2 - 1{,}05)} = 13443{,}58 \text{ дин.}$$

Како се израчунава q^n показано је у чл. 26.

Чл. 37. Рента периодично расте или опада по геометријској прогресији. Нека се првих k година прима рента од r дин., а у току других k година рента од rq дин., у току трећих k година рента од rq^2 дин. итд. Треба у овом случају наћи колико се мора уложити: a) годину дана пре пријема прве ренте и b) на дан пријема прве ренте.

a) Годину дана пре пријема прве ренте — рента декурзивна. Овде је:

1-ва	рента	r	дин.	. . . .			
2-га	„	r	„	2k-та	рента	rq	дин.
3-ћа	„	r	„	(2k+1)-ва	„	rq^2	„
. . . .				. . . .			
k-та	„	r	„	(n-k)-та	„	$r \cdot q^{\frac{n}{k}-2}$	„
. . . .				(n-k+1)-ва	„	$r \cdot q^{\frac{n}{k}-1}$	„
(k+1)-ва	„	rq	„	. . . .			
(k+2)-га	„	rq	„	n-та	„	$r\,q^{\frac{n}{k}-1}$	„
. . . .				. . . .			

Дисконтовањем ових ренти на моменат годину дана пре пријема прве ренте добија се:

$$M_n = r\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\ldots+\frac{1}{v^k}\right)+\frac{rq}{v^k}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\ldots+\frac{1}{v^k}\right)+\frac{rq^2}{v^{2k}}\left(\frac{1}{v}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{v^2}+\ldots+\frac{1}{v^k}\right)+\ldots.+\frac{rq^{\frac{n}{k}-2}}{v^{n-2k}}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\ldots+\frac{1}{v^k}\right)+$$

$$+\frac{rq^{\frac{n}{k}-1}}{v^{n-k}}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\ldots+\frac{1}{v^k}\right)$$

Или:

$$M_n = r\,IV_p^k\left(1+\frac{q}{v^k}+\frac{q^2}{v^{2k}}+\ldots+\frac{q^{\frac{n}{k}-2}}{v^{n-2k}}+\frac{q^{\frac{n}{k}-1}}{v^{n-k}}\right)$$

Пошто је заграда геометријски ред од $\frac{n}{k}$ чланова а са првим чланом 1 и количином $\frac{q}{v^k}$ то је на основу познатог збирног обрасца геометријског реда:

$$M_n = r\,IV_p^k \cdot \frac{q^{\frac{n}{k}} - v^n}{v^{n-k}\,(q-v^k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71^*)$$

b) На дан пријема прве ренте — рента антиципативна.

Познато нам је да се антиципативна рента плаћа годину дана (један период) раније него декурзивна. Услед тога миза за антиципативну ренту исте величине као када је декурзивна а која се прима исти број пута и са истом интересном стопом мора бити већа од мизе за декурзивну ренту за интерес за оно време које чини размак примања ренте. Према томе биће:

$$M_n' = M_n : v = r\,(1+IV_p^{k-1})\,\frac{q^{\frac{n}{k}} - v^n}{v^{n-k}\,(q-v^k)} \quad \ldots \quad (72)$$

II ДЕО

Амортизација зајмова са декурзивним рачунањем интереса

Чл. 38 Општи појмови. Да ли је корисно или не задуживање није циљ ове књиге. Она има за задатак да проучава рачунску страну администрације већ закључених зајмова или да са рачунске стране даје свој суд о већ закљученим зајмовима. Њој није циљ да проучава економске феномене, како оне који су довели до закључења зајма, тако и оне који утичу на његово искоришћавање и амортизацију, већ да проучи рачунску страну администрације зајмова.

По трајању амортизације зајмови се деле на: краткорочне и дугорочне. С обзиром на начин исплате зајмови су или амортизациони или рентни. Код нас су уобичајени само амортизациони зајмови. Они могу бити двојаки: или се о једном одређеном року амортизују на тај начин што се поред интереса за протекло време плаћа и један део дуга тако да се за једно унапред одређено време дуг постепено исплати, или се о одређеном року плаћа само интерес, а по истеку целог рока амортизације плати и цео зајам одједном. С обзиром на дужника зајмови су: појединачни и комунални (општински, срески, окружни, обласни, бановински, државни). С обзиром на гаранције зајмови су: лични и реални. Реални су ако дужник да као гаранцију неку своју покретну или непокретну ствар. Ако је залога непокретна ствар онда се такви зајмови зову хипотекарни. С обзиром на територију где се зајмови закључују зајмови су: унутрашњи или спољни. С обзиром на начин како су зајмови закључени зајмови су: добровољни и принудни. Спољни зајмови су добровољни, сем у случају када је једна територија насилно окупирана и од грађана изнуђен зајам. Унутрашњи зајмови су или добровољни или принудни. С обзиром на документ о задужењу зајмови су двојаки: или се на цео зајам издаје једна обавезница или се зајам дели на више већих или мањих обавезница. Да ли ће се приступити првом или другом начину зависи од величине зајма и тржишта на коме се зајам уписује. Други начин је чешћи код комуналних зајмова, док је први начин чешћи код појединачних.

Чл. 39 Амортизација зајма. Амортизовати зајам значи постепено га отплатити по једном унапред утврђеном плану. Отплаћивање се врши плаћањем једне сталне или промењиве суме о унапред утврђеним роковима. Ти су рокови обично у размаку од године или пола године.

Сума, која се плаћа о утврђеним роковима, зове се ануитет и састоји се из интереса на дуг за минули период и отплате дуга, ако је плаћање интереса декурзивно, или из отплате и интереса на остатак дуга за следећи период, ако је плаћање интереса атиципативно.

Ануитет може бити сталан или промењив. Када је ануитет промењив, може расти или опадати по аритметичкој или геометријској прогресији, или неком другом математичком закону или расти или опадати без икакве унапред утврђене правилности.

Плаћање интереса може бити исто као и плаћање ануитета, али може бити и чешће, односно ређе.

Да би се видело какав однос мора постојати између ануитета, интересне стопе зајма, времена амортизације, ануитета и капитала, претпостављамо да је:

1) зајам K дин;
2) време амортизације n година;
3) интересна стопа $p\%$ годишње декурзивно;
4) да се ануитет плаћа 1-пут годишње;
5) да су ануитети, a_1 прве, a_2 друге,...., a_n n-те године;
6) да се интерес плаћа годишње уназад; и
7) да је дужник од примљене суме образовао фонд са интересном стопом зајма.

Из тих претпоставки излази да ће дужник на дан реализовања закљученог зајма унети у фонд K дин., а на крају прве године имати поред тих K дин., још и $\frac{Kp}{100}$ дин. интереса за протеклу годину. А то значи да ће у фонду на крају прве године, после исплате a_1 дин. на име првог ануитета, остати још:

$$Kv - a_1 \text{ дин.}$$

На крају друге године ова ће сума порасти на:

$$(Kv - a_1)\,v = Kv^2 - a_1 v,$$

па ће стање фонда, после исплате a_2 дин., на име другог ануитета, бити:

$$Kv^2 - (a_1 v + a_2) \text{ дин.}$$

На исти начин добија се да је:

$$Kv^3 - (a_1 v^2 + a_2 v + a_3) \text{ дин.}$$

стање фонда после исплате трећег ануитета (a_3).

Па ће, према томе, стање фонда после исплаћеног n-тог ануитета бити:

$$Kv^n - (a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} + a_3 v^{n-3} + \ldots + a_n).$$

Исплатом n-ног (a_n) ануитета исцрпљен је цео фонд, па зато мора бити:

$$Kv^n - (a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} + a_3 v^{n-3} + \ldots + a_n) = 0$$

тј.

$$Kv^n = a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} + a_3 v^{n-3} + \ldots + a_n \ldots (73)$$

Из ове једначине види се да зајам дат под интерес порасте за n година (за време амортизације) на исту суму на коју и ануитети.

Деобом ове једначине за v^n добија се:

$$K = \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{v^3} + \ldots + \frac{a_n}{v^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

А одавде се види да зајам није ништа друго него сума дисконтованих вредности ануитета на почетак трајања амортизације.

Једначина (73), односно (74), је општа једначина и из ње се израчунава један од елемената зајма када су остали познати.

Чл. 40 Ануитети једнаки. Када су ануитети једнаки онда се у једначини (74) стави:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = a$$

па се добија:

$$K = a\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^3} + \ldots + \frac{1}{v^n}\right)$$

тј.

$$K = a\,IV_p^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (75)$$

Ако је познат зајам па се тражи ануитет, онда је:

$$a = \frac{K}{IV_p^n}$$

А пошто је:

$$\frac{1}{IV_p^n} = V_p^n$$

то је:

$$a = K\,V_p^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (76)$$

Из једначине (75) види се да се зајам добија множењем ануитета за IV таблицом, а из једначине (76) да се ануитет добија множењем зајма за V таблицом.

Из тих једначина види се још и то да зајам није ништа друго него миза за декурзивну ренту од a дин., а ануитет та рента. Према томе обрасци изведени за ренту важе и овде само треба заменити r са a, a M_n са K.

Када је плаћање ануитета m пута годишње онда место n треба ставити m n, a $\frac{p}{m}$ место p.

Примери: 1) Који се зајам може отплатити за 10 година полугодишњим ануитетом од 1000.— дин. са интересом 6% годишње декурзивно?

Овде је $a = 1000.—$, $m = 2$, $n = 10$, $p = 6\%$, па је:

$$K = 1000\,IV_3^{20} = 14877{,}47 \text{ дин.}$$

2) Колики је полугодишњи ануитет за зајам од 20000.— дин., који се амортизује за 15 година са 8% годишње декурзивно?

Овде је $K = 20000.—$, $m = 2$, $n = 15$, $p = 8\%$, па је:

$$a = 20000\,V_4^{30} = 1156{,}60 \text{ дин.}$$

3) За које ће се време амортизовати зајам од 14877,47 дин. са годишњим ануитетом 1000 дин., а са интересом 3% годишње декурзивно?

Овде је $a = 1000.—$, $K = 14877{,}47$, $p = 3\%$, $m = 1$, па је:

$$V_3^n = \frac{1000}{14877{,}47}$$

или

$$IV_3^n = \frac{14877{,}47}{1000} = 14{,}87747.$$

У стубцу 3% а у врсти 20 налази се број 14,87747486 што значи да се редукцијом последње три цифре добија број, 14,87747. А то ће рећи да је време амортизације 20 година.

4) Са којом ће годишњом декурзивном интересном стопом зајам од 100000.— дин. бити отплаћен за 15 година са полугодишњим ануитетом од 5783,01 дин?

Овде је $K = 100000 =$, $a = 5783{,}01$, $n = 15$, $m = 2$, па је:

$$V_{\frac{p}{2}}^{30} = \frac{5783{,}01}{100000} = 0{,}0578301$$

Број 0,0578301 налази се у 30-тој врсти у стубцу 4%. Зато је тражена стопа:

$\frac{p}{2} = 4\%$ полугодишње,

а $p = 8\%$ годишње.

5) Са којом ће годишњом декурзивном стопом, при полугодишњем плаћању ануитета, зајам од 10000.— дин. бити отплаћен годишњим ануитетом од 2000.— дин. за 7 година?

Овде је $K = 10000.—$, $n = 7$, $m = 2$, $a = 1000.—$ па је:

$$V_{\frac{p}{2}}^{14} = \frac{1000}{10000} = 0{,}10$$

Број 0,10 не налази се у 14 врсти V таблице, али се налазе друга два, од којих је мањи 0,09782038 у стубцу 4½%, а већи 0,10102397 у стубцу 5%. Према томе релативна полугодишња стопа налази се у границама $4^1/_2\%$ и 5%. Приближно тачна вредност налази се помоћу линеарне интерполације:

$V^{14}_{4^1/_2} = 0{,}09782038$ $V^{14}_{5} = 0{,}10102397$	$4^1/_2\%$ 5%	$V^{14}_{4^1/_2} = 0{,}09782038$ $V^{14}_{\frac{p}{2}} = 0{,}10000000$	$4^1/_2\%$ $\frac{p}{2}\%$
$V^{14}_{5} - V^{14}_{4^1/_2} = 0{,}00320359$	$^1/_2\%$	$= 0{,}00217962$	$(\frac{p}{2} - 4^1/_2)$

Одавде следује пропорција:

$$0{,}00320359 : 0{,}00217962 = \tfrac{1}{2} : (\tfrac{p}{2} - 4\tfrac{1}{2})$$

А из ње:

$$\tfrac{p}{2} = 4{,}5 + 0{,}34 = 4{,}84\% \text{ полугодишње.}$$

Што значи да је годишња стопа

$$p = 9{,}68\%$$

Чл. 41 Израда амортизационог плана када су ануитети једнаки. Ако је зајам K дин., а има се амортизовати са n једнаких ануитета од a дин., плаћајући $p\%$ интерес за минули период, онда се ануитети имају трошити овако:

Из првог ануитета има се платити интерес на цео дуг за минули период и прва отплата; дакле мора бити:

$$a = \frac{K \cdot p}{100} + b_1,$$

где b_1 означава прву отплату.

Из другог ануитета интерес на остатак дуга после плаћеног првог ануитета и друга отплата; дакле:

$$a = \frac{(K - b_1)\,p}{100} + b_2,$$

где $K - b_1$ означава остатак дуга после плаћеног првог ануитета, а b_2 другу отплату.

Из трећег ануитета интерес на остатак дуга после плаћеног другог ануитета и трећа отплата; дакле:

$$a = \frac{[K - (b_1 + b_2)]\,p}{100} + b_3, \text{ итд.}$$

А то значи да се n-ти ануитет има употребити на исплату интереса на остатак дуга после плаћеног (n—1)-вог ануитета и n-ту отплату; дакле:

$$a = \frac{[K - (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots. + b_{n-1})]\,p}{100} + b_n,$$

где је: $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots. + b_r + \ldots. + b_n = K$

Из ових излагања излази да је n-та отплата једнака разлици ануитета и интереса на остатак дуга после плаћеног (n—1)-вог ануитета, а n-ти интерес разлици између ануитета и n-те отплате.

Цео амортизациони план израђује се овако: У колони за период стави се 1, у колони за зајам (дуг) K, у колони за интерес $\frac{Kp}{100}$, а у колони за отплату $b_1 = a - \frac{Kp}{100}$. Затим се у колони за период стави 2, у колони за зајам (дуг) $K - b_1$, у колони за интерес $\frac{(K - b_1)\,p}{100}$, а у колони за атплату $b_2 = a - \frac{(K - b_1)\,p}{100}$, итд. све док се не дође до n-тог плаћања ануитета. Тада се стави у колони за период n, у колони за зајам (дуг) $K - (b_1 + b_2 + .. + b_{n-1})$, у колони за интерес $\frac{[K - (b_1 + b_2 + .. + b_{n-1})]p}{100}$, а у колони за отплату $b_n = K - (b_1 + b_2 + \ldots. + b_{n-1})$.

Из овог се види да је остатак зајма (дуга) на дан плаћања n-тог ануитета једнак последњој отплати, и да је остатак дуга после n плаћених ануитета једнак нули.

Према томе општи облик амортизационог плана био би:

Период	Зајам (дуг)	p% интерес	Отплата
1	2	3	4
1	$K = R_n$	$\frac{Kp}{100} = \frac{R_n \cdot p}{100} = i_1$	$a - i_1 = b_1$
2	$K - b_1 = R_{n-1}$	$\frac{R_{n-1} \cdot p}{100} = i_2$	$a - i_2 = b_2$
3	$K - (b_1 + b_2) = R_{n-2}$	$\frac{R_{n-2} \cdot p}{100} = i_3$	$a - i_3 = b_8$
⋮	⋮	⋮	⋮
r	$K - (b_1 + .. + b_{r-1}) = R_{n-r+1}$	$\frac{R_{n-r+1} \cdot p}{100} = i_r$	$a - i_r = b_r$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$K - (b_1 + \ldots + b_{n-1}) = R_1$	$\frac{R_1 \cdot p}{100}\, i_n$	$a - i_n = b_n$

Да видимо на једном бројном примеру како се израђује план отплаћивања.

Зајам од 10000.— дин. треба да се амортизује за 5 година годишњим једнаким ануитетима са интересом 4% годишње декурзивно. Наћи ануитет и израдити амортизациони план кад се и интерес плаћа годишње.

$$a = K\, V_p^n = 10000\, V_4^5 = 2246{,}27 \text{ дин.}$$

План ће бити: $a = 2246{,}27$

Година	Дуг (зајам)		4% интерес		Отплата	
1	10.000	—	400	—	1.846	27
2	8.153	73	326	15	1.920	12
3	6.233	61	249	34	1.996	93
4	4.236	68	169	47	2.076	30
5	2.159	88	86	39	2.159	88
	30.783	90	1.231	35	10.000	—

Контрола плана: 1) Треба да је остатак дуга после плаћеног претпоследњег ануитета — у овом случају четвртог — једнак последњој отплати — у овом случају 5-тој:, 2) збир отплата треба да је једнак дугу (зајму); 3) збир збирова интереса и отплата треба да је једнак производу из броја плаћања ануитета и ануитета, дакле: $i_1 + i_2 + .. + i_n + b_1 + b_2 + .. + b_n = n \cdot a$ — у овом примеру $1231{,}35 + 10000 = 5 \cdot 2246{,}27$, и 4) интерес за један период — у овом случају годину — на збир колоне за дуг (зајам) треба да је једнак збиру интереса — у овом примеру

$$\frac{30783{,}90 \cdot 4}{100} = 1231{,}35.$$

Када су сви ови услови испуњени, онда је план добро израђен.

До сада отплате су израчунавате одузимањем интереса од ануитета. Може се десити да знамо неку од отплата или да је можемо израчунати, а да незнамо ануитет. Како се у том случају могу израчунати остале отплате?

Из предњих излагања следује следећи низ једначина:

$$a = \frac{K \cdot p}{100} + b_1$$

$$a = \frac{(K - b_1)\, p}{100} + b_2$$

$$a = \frac{[K - (b_1 + b_2)]\, p}{100} + b_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a = \frac{[K - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{r-1})] \cdot p}{100} + b_r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a = \frac{[K - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1})]\, p}{100} + b_n$$

Узастопним одузимањем сваке од ових једначина од претходне једначине тј. друге од прве, треће од друге, четврте од треће,...., n-те од (n—1)-ве добија се следећи низ једначина:

$$b_2 = b_1 v$$

$$b_3 = b_2 v = b_1 v^2$$

$$b_4 = b_3 v = b_1 v^3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$b_r = b_{r-1} v = b_1 v^{r-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$b_n = b_{n-1} v = b_1 v^{n-1}$$

Из овог низа једначина види се: Да се друга отплата добија кад се прва помножи интересним чинитељем v, односно кад се на њу дода интерес, трећа кад се друга помножи са v, односно дода интерес, итд., кад се на (n—1)-ву дода интерес добија се n-та. Из њих се даље види и то да отплате 1, 2, 3,...., r, ... n, чине међу собом један геометријски ред чији је количник v, као и то да су оне ординате једне параболе n-тог степена за апсцису 0, 1, 2,...., n. Зато се и каже да су отплате везане међу собом параболичним законом.

Из изведеног низа једначина види се како се израчунавају отплате једна из друге и како се израчунавају помоћу прве. Но потребно је знати како се израчунава n-та помоћу r-те и обратно. Пошто је:

$$b_n = b_1 v^{n-1} \quad \text{и}$$

$$b_r = b_1 v^{r-1}$$

то се деобом прве са другом добија:

$$\frac{b_n}{b_r} = v^{n-r}$$

А одавде

$$b_n = b_r v^{n-r} = b_r I_p^{n-r}$$

и

$$b_r = b_n \cdot \frac{1}{v^{n-r}} = b_n II_p^{n-r}$$

под претпоставком да је n веће од r.

Докле из једначине:

$$b_n = b_r v^{n-r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

добија се n-та кад је позната r-та отплата и обратно.

Настаје питање каква веза постоји између ануитета и макоје отплате.

Пошто је

$$a = \frac{[K - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1})]\, p}{100} + b_n,$$

а $$b_n = K - (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}),$$

то је:

$$a = \frac{b_n \cdot p}{100} + b_n = b_n v$$

Зато је:

$$a = b_r v^{n-r+1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (78)$$

једначина из које се добија ануитет кад је позната макоја отплата. У овој једначини n означава број свих ануитета зајма, а r индекс познате отплате. Индекс r може добити све целе вредности од 0 до n.

Имајући у виду једначину $b_n = b_{n-1} v = b_1 v^{n-1}$ долазимо до још једног начина израде амортизационог плане, али помоћу израчунавања отплата. Израчунавају се све отплате и на последњу дода интерес. Ако је резултат рада ануитет зајма онда су отплате добро израчунате, па се могу унети у план отплаћивања.

Израчунавање отплата у прошлом примеру било би:

$$\begin{array}{rrl}
 & a & = 2246{,}27 \\
- & \frac{K\,p}{100} & = 400.- \\
\hline
 & b_1 & = 1846{,}27 \\
+ & \frac{b_1 p}{100} & = 73{,}85 \\
\hline
 & b_2 & = 1920{,}12 \\
+ & \frac{b_2 p}{100} & = 76{,}80 \\
\hline
 & b_3 & = 1996{,}92 \\
+ & \frac{b_3 p}{100} & = 79{,}88 \\
\hline
 & b_4 & = 2076{,}80 \\
+ & \frac{b_4 p}{100} & = 83{,}07 \\
\hline
 & b_5 & = 2159{,}87 \\
+ & \frac{b_5 p}{100} & = 86{,}40 \\
\hline
 & a & = 2246{,}27
\end{array}$$

Нађене отплате унесу се у план и одузму од ануитета. На тај се начин добије интерес. Исто тако отплате се постепено одузимају од дуга те се добије остатак дуга после плаћеног 1, 2, 3,...., n-тог ануитета.

Чл. 42 Изналажење отплаћеног дуга и остатка дуга кад су ануитети једнаки. Отплаћени дуг са првих r плаћених ануитета није ништа друго него збир r првих отплата. Ако са O_r обележимо отплаћени дуг тада је:

$$\begin{aligned} O_r &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_r \\ &= b_1 + b_1 v + b_1 v^2 + \dots + b_1 v^{r-1} \\ &= b_1 (1 + v + v^2 + \dots + v^{r-1}) \end{aligned}$$

Или

$$O_r = b_1 (1 + III_p^{r-1}) \dots\dots\dots (79)$$

где p означава релативну стопу периода плаћања ануитета. (Ако се ануитет плаћа годишње — годишњу, полугодишње — полугодишњу итд.).

Ако се са R_{n-r} обележи остатак дуга за још неплаћених n—r ануитета, онда је

$$R_{n-r} = K - O_r \dots\dots\dots\dots\dots (80)$$

Ово је општа једначина. У случају једнаких (или како се то често каже константних) ануитета може јој се дати и овај облик:

$$R_{n-r} = a\, IV_p^{n-r} \dots\dots\dots\dots (81)$$

Не треба изгубити из вида да једначина (81) важи само у случају кад су сви ануитети једнаки, а једначина (80) у сваком случају.

Ако се тражи отплаћени дуг са s плаћених ануитета, али, који су после r првих ануитета, онда се то добија из једначине:

$$\begin{aligned} O_s = O_{r+s} - O_r &= b_1 (1 + III_p^{r+s-1}) - b_1 (1 + III_p^{r-1}) = \\ &= b_1 (III_p^{r+s-1} - III_p^{r-1}) \dots\dots\dots (82) \end{aligned}$$

Или из једначине:

$$O_s = b_{r+1} + b_{r+2} + \dots + b_{r+s} = b_{r+1} (1 + III_p^{s-1}), \quad (82a)$$

где је: $$b_1 = a - \frac{K\,p}{100}$$

а $$b_{r+1} = a - \frac{R_{n-2} \cdot p}{100}$$

и где O_s означава отплаћени дуг са s ануитета, који следују после r првих ануитета.

Примери: 1) Зајам од 100.000.— дин. треба амортизовати за 25 година полугодишњим једнаким ануитетима са 8% годишње декурзивно. Наћи остатак дуга после 20 плаћених ануитета.

Овде је $K = 100000.-$, $n = 25$. $m = 2$, $r = 20$, $p = 8\%$ годишње, а 4% полугодишње. Зато је:

$$a = 100000\, V_4^{50} = 4655{,}02$$
$$b_1 = 4655{,}02 - 4000 = 655{,}02$$

А отплаћени дуг:

$$O_r = O_{20} = 655{,}02\,(1 + III_4^{19}) = 19505{,}22 \text{ дин.}$$

Према томе остатак дуга је:

$$R_{n-r} = R_{30} = 100.000 - 19505{,}22 = 80.494{,}78 \text{ дин.}$$

Остатак дуга могли смо добити и из једначине:

$$R_{n-r} = R_{30} = a \cdot IV_4^{30} = 4655{,}02 \cdot 17{,}2920333 = 80494{,}75 \text{ дин.}$$

Разлика је само 3 паре. То долази од ирационалности бројева са којима се ради.

2) Наћи отплаћени дуг у примеру 1) са 21-вим до 30-тог ануитета.

Овде је $s = 10, r = 20, n = 25, m = 2$, па се из једначине (82) добија:

$$O_s = O_{10} = b_1\,(III_4^{29} - III_4^{19}) = 655{,}02 \cdot 26{,}30685917 = 17231{,}51 \text{ дин.}$$

А из једначине (82а) следује:

$$O_{10} = b_{21}\,(1 + III_4^{9}) = \left(4655{,}02 - \frac{80494\,78 \cdot 4}{100}\right)(1 + III_4^{9}) = 17231{,}52 \text{ д.}$$

Дакле резултат је исти. (Разлика само 1 пара).

Чл. 43 Заокругљени ануитети. У досадашњим примерима претпостављено је да се ануитет за дуг од једног динара узима онај из таблице. Овај ануитет је теоријски. У пракси се, најчешће тај ануитет заокругљује да се добије округла цифра, али тако да се број ануитета не смањи, и тако заокругљен изражава у процентима дуга. То заокругљивање врши се на следећи начин:

Нађе се V_p^n и V_p^{n-1}. Тако добивени бројеви помноже се са 100 и узме онај број, који се налази између та два броја. При узимању броја тежи се да се узме цео број, а ако то није могуће, онда број са децималима, али највише са два децимала. Услед овог повећања $n-1$ ануитет биће једнаки, а n-ти нешто мањи. Зато се тај n-ти ануитет зове ануитетни остатак.

Нпр. Зајам од 10.000.— дин. треба амортизовати за 50 година са 6% годишње декурзивно. Ануитети годишњи. Наћи ануитет у процентима и заокруглити га.

Овде је
$$V_6^{50} = 0{,}06344429$$
$$V_6^{49} = 0{,}06366356$$

Па је:
$$100\ V_6^{50} = 6{,}344429$$
$$100\ V_6^{49} = 6{,}366356$$

Ануитет у процентима са 2 децимала може бити или 6,35%, или 6,36%. У оба случаја време амортизације остаје 50 година, али у првом случају за 100 дин. дуга плаћа се 0,01 дин. мање 49 пута него у другом случају. Зато се педесети пут плати више него у другом случају.

Да проверимо да ли је процентат добро нађен треба наћи ануитет за дуг од 1 дин. и гледати да се тако добивена вредност налази између бројева, који се налазе у врсти 50 (n) и 49 (n−1).

Чл. 44. Израда амортизационог плана код константних заокругљених ануитета. Израда амортизационог плана је иста као и када су константни ануитети узети по таблици. Разлика је само у томе што за n-ту отплату не важи параболични закон, а за првих n-1 важи. Према томе n-1-ва отплата добија се из једначине

$$b_r = b_{r-1}\,v$$

или

$$b_r = a - \frac{(K - O_{r-1})p}{100},$$

а n-та из једначине:

$$b_n = K - O_{n-1}.$$

Узмимо за пример зајам од 10000.— дин., који се амортизује са годишњим ануитетом 25% и интересом 5% годишње декурзивно.

Овде је:

$$a = \frac{10000 \cdot 25}{100} = 2500.\text{— дин.,}$$

а

$$V_5^n = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

У стубцу 5% V таблице а у врсти 4 налази се број 0.28201183 а у 5 врсти број 0 23097480. Према томе време амортизације је 5 година, али се 4 године плаћа ануитет 25%, односно 2500.—, а у петој години, један ануитет мањи.

План би изгледао овако:

$$a = 2500.\text{—}$$

Година	Дуг (зајам)		5% интерес		отплата	
1	10.000	—	500	—	2.000	—
2	8.000	—	400	—	2.100	—
3	5.900	—	295	—	2.205	—
4	3.695	—	184	75	2.315	25
5	1.379	75	68	99	1.379	75
	28.974	75	1.448	74	10 000	—

Контрола плана врши се овако: 1) Саберу се отплате, па ако је тај збир једнак дугу онда план може бити добар али не мора; 2) Нађе се отплаћени дуг за n—1 годину и то одузме од целог дуга. Ако је тај остатак једнак последњој отплати, онда је план добро израђен. У овом примеру

$$O_4 = 2000\,(1 + III_5^3) = 8620{,}25$$

Ако са R_1 обележимо последњу отплату она је

$$R_1 = K - O_4 = 10000 - 8620{,}25 = 1379{,}75;$$

дакле, као и у плану.

Остале контроле нису поуздане, као и она под 1).

Чл. 45 Изналажење ануитетног остатка. Ануитетни остатак (a_1) једнак је збиру последње отплате и последњег интереса. Пошто је последња отплата R_1, а последњи интерес $\frac{R_1\,p}{100}$, то је ануитетни остатак:

$$a_1 = R_1 + \frac{R_1\,p}{100} = R_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = R_1\,v \quad . \; . \; (83)$$

У примеру члана 44 добија се:

$$a_1 = 1379{,}75 \cdot 1{,}05 = 1448{,}74 \text{ дин.}$$

Чл. 46 Изналажење дуга. Када су познати ануитет и ануитетни остатак онда се дуг добија из једначине (74) стављајући:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = a \text{ и}$$
$$a_n = a_1$$

Дакле

$$K = a\,IV_p^{n-1} + a_1\,II_p^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (84)$$

Примедба. — Ова једначина не даје само дуг K него и остале елементе, кад су остала четири позната.

Пример. — Који је то зајам за који се 4 године плаћа на име годишњег ануитета дин. 2.500.—, а пете године на име последње отплате 1.379,75 дин., кад је интерес 5% годишње, при годишњем плаћању ануитета и интереса?

Овде је $a = 2500.—$, $n = 5$, $n - 1 = 4$, $p = 5\%$, $R_1 = 1379{,}75$, па је зато:

$$a_1 = 1379{,}75 \cdot 1{,}05 = 1448{,}74 \text{ дин., а}$$

$$K = 2500\,IV_5^4 + 1448{,}74\,II_5^5 = 2500 \cdot 3{,}54595050 + 1448{,}74 \cdot 0{,}78352617 =$$
$$= 8864{,}876 + 1135{,}124 = 10000.\text{— дин.}$$

Чл. 47 Ануитет расте или опада сукцесивно по аритметичкој прогресији.

1) Израчунавање ануитета и израда плана отплаћивања.

Пошто је ануитет исто што и декурзивна рента, а зајам што и миза за декурзивну ренту, то у овом случају важи једначина:

$$K = a\,IV_p^n \pm \frac{100\,d}{p}\left(IV_p^n - n\,II_p^n\right) \ldots\ldots \; (85)$$

која се добија из једначине (66) заменом r са a, а M_n са K. Одавде се добија ануитет, кад су познати остали елементи.

Знак плус (+) употребљава се кад ануитет расте, а знак минус (—) кад ануитет опада.

Пример. — Зајам од 100.000.— дин. треба амортизовати за 5 година са 4% годишње декурзивно, годишњим ануитетом, али да ануитет из године у годину а) расте, b) опада за 10% ануитета, који се плаћа прве године. Израдити план отплаћивања.

а) ануитет расте за 10%.

Овде је $K = 100000.—$, $n = 5$, $p = 4\%$, $d = \frac{a_1\,10}{100}$.

Зато је

$$100000 = a_1\,IV_4^5 + \frac{100}{4} \cdot \frac{a_1\,10}{100}\left(IV_4^5 - 5\,II_4^5\right)$$

А одавде биће:

$$a_1 = 100000 : \left[IV_4^5 + \frac{10}{4}\left(IV_4^5 - 5\,II_4^5\right)\right] = 18842{,}01 \text{ дин.}$$

Пошто је:

$$d = \frac{10\,a_1}{100} = 1884{,}20 \text{ дин.,}$$

то ће следећи ануитет бити:

$$a_2 = a_1 + d = 20726.21 \text{ дин.,}$$
$$a_3 = a_2 + d = 22610.41 \quad „$$
$$a_4 = a_3 + d = 24491{,}61 \quad „$$
$$a_5 = a_4 + d = 26378{,}81 \quad „$$

Амортизациони план биће:

Година	Зајам		4% интерес		Отплата		Ануитет	
1	100.000	—	4.000	—	14.842	01	18.742	01
2	85.157	99	3.406	32	17 319	89	20.726	21
3	67.838	10	2.713	52	19.896	89	22.610	41
4	47.941	21	1.917	65	22.576	96	24.494	61
5	25.364	25	1.014	57	25 364	24	26 378	81
	326.301	55	13.052	06	99.999	99	113 052	05

Контроле су следеће: 1) Остатак дуга после претпоследњег плаћеног ануитета и последња отплата треба да су једнаки — у овом примеру отплата је мања за 0,01 дин. У пракси би се ставила у овом случају отплата за 0,01 већа него што рачун показује; 2) Интерес на збир остатака дуга за један период треба да је једнак суми интереса; 3) Сума интереса и отплата треба да буде једнака суми ануитета.

b) Ануитет опада за 10%.

Овде је $K = 100000.—, n = 5, p = 4\%, d = -\frac{10 a_1}{100}$.

Зато је:

$$100000 = a_1 \, IV_4^5 - \frac{100}{4} \cdot \frac{10 a_1}{100} \left(IV_4^5 - 5 \, II_4^5 \right)$$

А одавде следује:

$$a_1 = 100000 : \left[IV_4^5 - \frac{10}{4} \left(IV_4^5 - 5 \, II_4^5 \right) \right] = 27805{,}93 \text{ дин.}$$

Пошто је:

$$d = -2780{,}59 \text{ дин.,}$$

то су следећи ануитети:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - d = 25025{,}34 \text{ дин.,} \\ a_3 &= a_2 - d = 22244{,}75 \quad " \\ a_4 &= a_3 - d = 19464{,}16 \quad " \\ a_5 &= a_4 - d = 16683{,}57 \quad " \end{aligned}$$

Амортизациони план биће:

Година	Зајам		4% интерес		Отплата		Ануитет	
1	100.000	—	4.000	—	23.805	93	27.805	93
2	76.194	07	3.047	76	21.977	58	25.025	34
3	54 216	49	2 168	66	20.076	09	22.244	75
4	34.140	40	1.365	62	18.098	54	19.464	16
5	16 041	86	641	68	16.041	89	16.683	57
	280.592	82	11.223	72	100.000	03	111.223	75

Контроле су исте као и у примеру под а). Овде је последња отплата већа за 0,03 дин. Остале контроле показују да је рад добар. Ова разлика, као и она у примеру под а) настаје услед ирационалности бројева са којим се план ради.

2) Изналажење отплата.

Када су ануитети константни, отплате једна из друге изводе се из једначине:

$$b_n = b_{n-1} v = b_r v^{n-r}$$

Настаје питање какав однос постоји међу отплатама кад ануитети сукцесивно расту или опадају по аритметичкој прогресији. Да би смо на то питање одговорили напишимо следећи низ једначина:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{K \cdot p}{100} + b_1 \\ a_2 &= \frac{(K - b_1) p}{100} + b_2 \\ a_3 &= \frac{(K - b_1 - b_2) p}{100} + b_3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n &= \frac{(K - b_1 - b_2 - \dots - b_{n-1}) p}{100} + b_n, \end{aligned} \right\} \quad .. (86)$$

где су $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ануитети, који се плаћају прве друге, треће, ..., n-те године, односно полугодине, односно тромесечја, а $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ суме, које се троше на смањење дуга из 1, 2, 3, ..., n-тог ануитета, дакле 1, 2, 3, ..., n-та отплата, K зајам а p интересна стопа за период времена у ком се плаћа ануитет (за годину — ако је плаћање ануитета годишње, за полугодину — полугодишње итд.).

Имајући у виду да је:

$$a_2 = a_1 \pm d, \; a_3 = a_2 \pm d, \; \dots, \; a_n = a_{n-1} \pm d$$

поступним одузимањем једначина (86) једне од друге добија се следећи низ једначина:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= b_1 \\ b_2 &= b_1 v \pm d \\ b_3 &= b_2 v \pm d \\ b_4 &= b_3 v \pm d \\ &\dots\dots\dots \\ b_n &= b_{n-1} v \pm d \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (87)$$

А одавде добија се:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= b_1 \\ b_2 &= b_1 v \pm d \\ b_3 &= b_1 v^2 \pm d \left(1 + III_p^1\right) \\ b_4 &= b_1 v^3 \pm d \left(1 + III_p^2\right) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n &= b_1 v^{n-1} \pm d \left(1 + III_p^{n-2}\right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (88)$$

Из једначина (87) добија се отплата помоћу претходне и диференције ануитета, а из једначина (88) помоћу прве и диференције ануитета. За изналажење прве отплате употребљава се једначина:

$$b_1 = a_1 - \frac{Kp}{100}$$

где је a_1 први ануитет.

Да проверимо тачност ових једначина израчунаћемо отплате у примеру под а) и под b) овог члана.

а) ануитети расту за 10% тј. $d = \frac{a_1}{10}$.

Овде је $a_1 = 18842,01$ дин., а

$$b_1 = 18842,01 - \frac{100000 \cdot 4}{100} = 14842,01 \text{ дин.}$$

$$\begin{array}{rrl}
+\dfrac{b_1 p}{100} = & 593,68 & \text{„} \\ \hline
b_1 v = & 15435.69 & \text{дин.} \\
+ \quad d = & 1884.20 & \text{„} \\ \hline
b_2 = & 17319,89 & \text{дин.} \\
+\dfrac{b_2 p}{100} = & 692.80 & \text{„} \\ \hline
b_2 v = & 18012,69 & \text{дин.} \\
+ \quad d = & 1884.20 & \text{„} \\ \hline
b_3 = & 19896,89 & \text{дин.} \\
+\dfrac{b_3 p}{100} = & 795,88 & \text{„} \\ \hline
b_3 v = & 20692\ 77 & \text{дин.} \\
+ \quad d = & 1884\ 20 & \text{„} \\ \hline
b_4 = & 22576,97 & \text{дин.} \\
+\dfrac{b_4 p}{100} = & 903,08 & \text{„} \\ \hline
b_4 v = & 23480,05 & \text{дин.} \\
+ \quad d = & 1884.20 & \text{„} \\ \hline
b_5 = & 25364,25 & \text{дин.} \\
+\dfrac{b_5 p}{100} = & 1014.57 & \text{„} \\ \hline
a_5 = & 26378,82 & \text{дин.}
\end{array}$$

b) Ануитет опада за 10% тј. $d = -\frac{a_1}{10}$

Овде је:

$$\begin{array}{rrl}
a_1 = & 27805,93 & \text{дин.} \\
-\dfrac{Kp}{100} = & 4000.— & \text{„} \\ \hline
b_1 = & 23805,93 & \text{дин.} \\
+\dfrac{b_1 p}{100} = & 952,24 & \text{„} \\ \hline
b_1 v = & 24758,17 & \text{дин.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrl}
b_1 v = & 24758.17 & \text{дин.} \\
- \quad d = & 2780.59 & \text{„} \\ \hline
b_2 = & 21977,58 & \text{дин.} \\
+\dfrac{b_2 p}{100} = & 879,10 & \text{„} \\ \hline
b_2 v = & 22856\ 68 & \text{дин.} \\
- \quad d = & 2780.59 & \text{„} \\ \hline
b_3 = & 20076,09 & \text{дин.} \\
+\dfrac{b_3 p}{100} = & 803,04 & \text{„} \\ \hline
b_3 v = & 20879,13 & \text{дин.} \\
- \quad d = & 2780\ 59 & \text{„} \\ \hline
b_4 = & 18098,54 & \text{дин.} \\
+\dfrac{b_4 p}{100} = & 723,94 & \text{„} \\ \hline
b_4 v = & 18822\ 48 & \text{дин.} \\
- \quad d = & 2780\ 59 & \text{„} \\ \hline
b_5 = & 16041,89 & \text{дин.} \\
+\dfrac{b_5 p}{100} = & 641,68 & \text{„} \\ \hline
a_5 = & 16683,57 & \text{дин.}
\end{array}$$

У оба случаја израчунате отплате слажу се с отплатама у плану, а на последњу отплату додат интерес даје последњи ануитет, што потврђује тачност једначине:

$$b_n = b_{n-1} v \pm d.$$

3) Изналажење отплаћеног дуга са r првих ануитета и остатка дуга са n—r наредних ануитета.

Отплаћени дуг O_r са r првих ануитета добићемо кад саберемо r првих отплата; дакле:

$$O_r = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_r$$

Пошто се 2, 3,...., r-та отплата замене њиховим вредностима добивеним из једначине:

$$b_n = b_1 v^{n-1} \pm d \left(1 + III_p^{n-2}\right),$$

замењујући n са 2, 3,...., r, добија се једначина:

$$O_r = b_1 \left(1 + III_p^{r-1}\right) \pm d \left[(r-1) + \sum_{n=1}^{n=r-2} III_p^n\right]$$

А одавде, пошто је:

$$\sum_{n=1}^{n=r-2} III_p^n = \frac{100}{p} \left[III_p^{r-1} - (r-1)\, v\right],$$

добија се коначна једначина:

$$O_r = b_1(1 + III_p^{r-1}) \pm \frac{100\,d}{p}\left[III_p^{r-1} - (r-1)\right] \quad . \; (89)$$

Ако са R_{n-r} обележимо остатак дуга онда је:

$$R_{n-r} = K - O_r$$

Пример. — Нека се у примеру под a) и под b) тражи отплаћени дуг и остатак дуга после 4 ануитета.

Овде је у случају под a):

$$O_4 = b_1(1 + III_4^3) + \frac{100\,d}{4}(III_4^3 - 3) = 63026{,}06 + 11609{,}69 =$$
$$= 74635{,}75 \text{ дин};$$

a

$$R_1 = 100000 - 74635{,}75 = 25364{,}25 \text{ дин.}$$

Нађене вредности слажу се са оним у плану.

А у случају под b):

$$O_4 = b_1(1 + III_4^3) - \frac{100\,d}{4}(III_4^3 - 3) = 101091{,}02 - 17132{,}87 =$$
$$= 83958{,}15 \text{ дин.},$$

a

$$R_1 = 100000 - 83958{,}15 = 16041{,}85$$

Нађене вредности разликују се за 0,04 дин. То настаје услед ирационалности бројева. И у плану збир отплата је већи од дуга за 0,03 дин.

Чл. 48 Ануитет расте или опада периодично по аритметичкој прогресији.

1) Израчунавање ануитета и израда плана отплаћивања.

У овом случају третираћемо проблем где су првих r ануитета међу собом једнаки а сваких следећих r за d већи или мањи од оних испред њих. Ако се у току амортизације имају платити n ануитета, онда је време амортизације подељено на $\frac{n}{r}$ периода. Ако је a ануитет, који се плаћа у току првог периода, онда се следећи ануитети добијају из једначине:

$$a_s = a + (s-1)\,d$$

стављајући у њој $s = 1, 2, 3, \ldots, \frac{n}{r} - 1, \frac{n}{r}$.

Када се у једначини:

$$K = \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{v^3} + \ldots + \frac{a_n}{v^n}$$

стави:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_r = a_1$$
$$a_{r+1} = a_{r+2} = a_{r+3} = \ldots = a_{2r} = a_2 = a_1 \pm d$$
$$a_{2r+1} = a_{2r+2} = a_{2r+3} = \ldots = a_{3r} = a_3 = a_1 \pm 2\,d$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-2r+1} = a_{n-2r+2} = a_{n-2r+3} = \ldots = a_{n-r} = a_{\frac{n}{r}-1} = a_1 \pm \left(\tfrac{n}{r} - 2\right) d$$
$$a_{n-r+1} = a_{n-r+2} = a_{n-r+3} = \ldots = a_n = a_{\frac{n}{r}} = a_1 \pm \left(\tfrac{n}{r} - 1\right) d$$

добија се једначина:

$$K = a_1\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v^3} + \ldots + \frac{1}{v^r}\right) + \frac{a_2}{v^r}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \ldots + \frac{1}{v^r}\right) +$$
$$+ \frac{a_3}{v^{2r}}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \ldots + \frac{1}{v^2}\right) + \frac{a_{\frac{n}{r}-1}}{v^{n-2r}}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \ldots + \frac{1}{v^r}\right) +$$
$$+ \frac{a_{\frac{n}{r}}}{v^{n-r}}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \ldots + \frac{1}{v^r}\right)$$

А одавде:

$$K = IV_p^r\left(a_1 + a_2\,II_p^r + a_3\,II_p^{2r} + \ldots + a_{\frac{n}{r}-1}\,II_p^{n-2r} + a_{\frac{n}{r}}\,II_p^{n-r}\right)$$

Или:

$$K = IV_p^r\left[a_1(1 + II_p^r + II_p^{2r} + \ldots + II_p^{n-2r} + II_p^{n-r}) \pm d\,(II_p^r + 2\,II_p^{2r} + \right.$$
$$\left. + 3\,II_p^{3r} + \ldots + (\tfrac{n}{r} - 2)\,II_p^{n-2r} + (\tfrac{n}{r} - 1)\,II_p^{n-r})\right]$$

Одавде се добија:

$$K = IV_p^r\left[a_1\,R \pm d\,Q\right], \; \ldots\ldots\ldots \; (90)$$

где су:

$$R = 1 + II_p^r + II_p^{2r} + \ldots + II_p^{n-2r} + II_p^{n-r} \quad \text{и}$$
$$Q = II_p^r + 2\,II_p^{2r} + 3\,II_p^{3r} + \ldots + (\tfrac{n}{r} - 2)\,II_p^{n-2r} + (\tfrac{n}{r} - 1)\,II_p^{n-r}$$

Да се израчуна вредност за R треба R помножи са II_p^r. па тако добивену вредност одузети од првобитне. На тај начин имамо:

$$R = 1 + II_p^r + II_p^{2r} + \ldots + II_p^{n-2r} + II_p^{n-r}$$
$$R\,II_p^r = II_p^r + II_p^{2r} + II_p^{3r} + \ldots + II_p^{n-r} + II_p^r$$

што после одузимања даје:

$$R\,(1 - II_p^r) = 1 - II_p^n$$

Деобом ове једначине са v—1 добија се:

$$R\,\frac{1 - II_p^r}{v-1} = \frac{1 - II_p^n}{v-1}$$

Одакле је: $$R = \mathrm{IV}_p^n \mathrm{V}_p^r \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (91)$$

На исти начин добија се:

$$Q = \mathrm{II}_p^r + 2\mathrm{II}_p^{2r} + 3\mathrm{II}_p^{3r} + \dots + \left(\tfrac{n}{r}-2\right)\mathrm{II}_p^{n-2r} + \left(\tfrac{n}{r}-1\right)\mathrm{II}_p^{n-r}$$

$$Q\,\mathrm{II}_p^r = \mathrm{II}_p^{2r} + 2\mathrm{II}_p^{3r} + 3\mathrm{II}_p^{4r} + \dots + \left(\tfrac{n}{r}-2\right)\mathrm{II}_p^{n-r} + \left(\tfrac{n}{r}-1\right)\mathrm{II}_p^{n}$$

А одавде:

$$Q(1-\mathrm{II}_p^r) = \mathrm{II}_p^r + \mathrm{II}_p^{2r} + \mathrm{II}_p^{3r} + \dots + \mathrm{II}_p^{n-r} + \mathrm{II}_p^n - \tfrac{n}{r}\mathrm{II}_p^n$$

тј. $$Q(1-\mathrm{II}_p^r) = \mathrm{II}_p^r(1 + \mathrm{II}_p^r + \mathrm{II}_p^{2r} + \dots + \mathrm{II}_p^{n-2r} + \mathrm{II}_p^{n-r}) - \tfrac{n}{r}\mathrm{II}_p^n$$

Пошто заграда на десној страни није ништа друго него R то ће, кад се за R замени вредност из једначине (91), ова једначина имати облик:

$$Q(1-\mathrm{II}_p^r) = \mathrm{II}_p^r\,\mathrm{IV}_p^n \mathrm{V}_p^r - \tfrac{n}{r}\mathrm{II}_p^n$$

А одавде, после деобе са v—1 и са IV_p^r, добија се:

$$Q = \frac{100}{p}\left[\mathrm{II}_p^r \mathrm{IV}_p^n \mathrm{V}_p^r - \tfrac{n}{r}\mathrm{II}_p^n\right] \cdot \mathrm{V}_p^r$$

Заменом нађених вредности за R и Q у једначини (90) добија се:

$$K = \mathrm{IV}_p^r \left\{ a_1 \mathrm{IV}_p^n \mathrm{V}_p^r \pm \frac{100\,d}{p}\left[\mathrm{II}_p^r \mathrm{IV}_p^n \mathrm{V}_p^r - \tfrac{n}{r}\mathrm{II}_p^n\right] \mathrm{V}_p^r \right\}$$

А одавде:

$$K = a_1 \mathrm{IV}_p^n \pm \frac{100\,d}{p}\left[\mathrm{II}_p^r \mathrm{IV}_p^n \mathrm{V}_p^r - \tfrac{n}{r}\mathrm{II}_p^n\right] \quad \dots\dots\dots\dots \quad (92)$$

Када су анунтети константни онда је $d = 0$ а $r = n$ па једначина (92) постаје:

$$K = a_1 \mathrm{IV}_p^n$$

Ако анунтети расту сукцесивно онда је $r = 1$, па једначина (92) у том случају постаје:

$$K = a_1 \mathrm{IV}_p^n \pm \frac{100\,d}{p}(\mathrm{IV}_p^n - n\,\mathrm{II}_p^n)$$

Из овог се види да је једначина (92) општа а једначине (75) и (85) њени специјални случајеви.

Пример. — Зајам од 1,000.000.— дин. треба да се амортизује за 9 година годишњим ануитетом, али да се после сваке 3 године ануитет повећава за $\frac{1}{5}$ ануитета, који се плаћа у току прве 3 године. Интерес 5% годишње. Израдити план отплаћивања.

Овде је $K = 1{,}000.000.$—, $n = 9$, $r = 3$, $p = 5\%$, $d = \frac{a_1}{5}$ па се из једначине (92), пошто се стави $d = \frac{a_1}{5}$, добија:

$$a_1 = K : \left[\mathrm{IV}_p^n + \frac{100}{5p}\left(\mathrm{II}_p^r \mathrm{IV}_p^n \mathrm{V}_p^r - \tfrac{n}{r}\mathrm{II}_p^n\right)\right]$$

тј.

$$a_1 = 1000000 : [\mathrm{IV}_5^9 + 4(\mathrm{II}_5^3 \mathrm{IV}_5^9 \mathrm{V}_5^3 - 3\,\mathrm{II}_5^9)] = 119173{,}01 \text{ дин.}$$

Према томе прве три године плаћаће се на име годишњег ануитета 119173,01 дин., а сваке следеће три године повећаваће се овај ануитет за 23834,60 дин., што значи да ће се друге три године плаћати:

$$a_2 = 119173{,}01 + 23834{,}60 = 143007{,}61 \text{ дин.}$$

а треће три:

$$a_3 = 143007{,}61 + 23834{,}60 = 166842{,}21 \text{ дин.}$$

Амортизациони план изгледа:

Година	Дуг		5% интерес		Отплата		Ануитет	
1	1,000.000	—	50.000	—	69.173	01	119.173	01
2	930.826	99	46 541	35	72.631	66	119.173	01
3	858.195	33	42.909	77	76.263	24	119.173	01
4	781.932	09	39.096	60	103.911	01	143.007	61
5	678.021	08	33.901	05	109.106	56	143.007	61
6	568.914	52	28.445	73	114.561	88	143 007	61
7	454.352	64	22.717	63	144.124	58	166.842	21
8	310.228	06	15.511	40	151.330	81	166 842	21
9	158 897	25	7 914	86	158 897	35	166 842	21
	5,741.367	96	287.068	39	1,000.000	10	1,287.068	49

Последња отплата већа је за 0,10 дин., то долази услед ирационалности бројева. Остале контроле су као и код ранијих планова.

Да у овом примеру ануитети опадају за $\frac{1}{5}$ првобитног ануитета, онда би се у једначини (92) ставило испред d знак минус (—), па би после извршене смене $d = \frac{a_1}{5}$ добили:

$$a_1 = 1000000 : [\mathrm{IV}_5^9 - 4(\mathrm{II}_5^3 \mathrm{IV}_5^9 \mathrm{V}_5^3 - 3\mathrm{II}_5^9)] = 171689{,}12 \text{ дин.}$$

Прве три године плаћаће се на име годишњег ануитета дин. 171689,12, друге три године:

$$a_2 = 171689{,}12 - 34337{,}82 = 137351{,}30 \text{ дин.,}$$

а треће три:

$$a_8 = 137351{,}30 - 34337{,}82 = 103013{,}48 \text{ дин.}$$

Према томе план отплаћивања биће:

Го-дина	Дуг		5% интерес		Отплата		Ануитет	
1	1,000.000	—	50.000	—	121.689	12	171.689	12
2	878.310	88	43.915	54	127.773	58	171.689	12
3	750.537	30	37.526	87	134.162	25	171.689	12
4	616.375	05	30.818	75	106.532	55	137.351	30
5	509.842	50	25.492	13	111.859	17	137.351	30
6	397.983	33	19.899	17	117.452	13	137.351	30
7	280.531	20	14.026	56	88.986	92	103.013	48
8	191.544	28	9.577	21	93.436	27	103.013	48
9	98.108	01	4.905	40	98.108	08	103.013	48
	4,723.232	55	236.161	63	1,000.000	07	1,236.161	70

Последња отплата већа је за 0,07 дин. У пракси би се то изравнало, али ја то овде, као ни раније што нисам, не чиним. Ова разлика настаје услед ирационалности бројева помоћу којих је израчунат ануитет, а и услед заокругљивања код израчунавања интереса.

2) Изналажење отплата.

Ако се са $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ обележе отплате дуга са 1, 2, 3,...., n-тим ануитетом, онда се добија следећи низ једначина:

1-ви ануитет $\quad a_1 = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)\frac{p}{100} + b_1$

2-ги „ $\quad a_1 = (b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n)\frac{p}{100} + b_2$

. . . .

r-ти ануитет $\quad a_1 = (b_r + b_{r+1} + b_{r+2} + \ldots + b_n)\frac{p}{100} + b_r$

(r + 1)-ви „ $\quad a_2 = (b_{r+1} + b_{r+2} + b_{r+3} + \ldots + b_n)\frac{p}{100} + b_{r+1}$

(r + 2)-ги „ $\quad a_2 = (b_{r+2} + b_{r+3} + b_{r+4} + \ldots + b_n)\frac{p}{100} + b_{r+2}$

. . . .

2r-ти ануитет $\quad a_2 = (b_{2r} + b_{2r+1} + b_{2r+2} + \ldots + b_n)\frac{p}{100} + b_{2r}$

. . . .

(n — r)-ти ануитет $\quad a_{\frac{n}{r}-1} = (b_{n-r} + b_{n-r+1} + \ldots + b_n)\frac{p}{100} + b_{n-r}$

(n — r + 1)-ви „ $\quad a_{\frac{n}{r}} = b_{n-r+1} + b_{n-r+2} + b_{n-r+3} + \ldots b_n)\frac{p}{100} + b_{n-r+1}$

. . . .

n-ти ануитет $\quad a_{\frac{n}{r}} = b_n \frac{p}{100} + b_n = b_n v$

Имајући у виду да је: $a_2 = a_1 \pm d$, $a_3 = a_2 \pm d, \ldots, a_n = a_{n-1} \pm d$, одузимањем по две узастопне једначине добија се следећи низ једначина:

$$b_2 = b_1 v$$
$$b_3 = b_2 v = b_1 v^2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$b_r = b_{r-1} v = b_1 v^{r-1}$$
$$b_{r+1} = b_r v \pm d$$
$$b_{r+2} = b_{r+1} v$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$b_{2r} = b_{2r-1} v = b_{r+1} v^{r-1}$$
$$b_{2r+1} = b_{2r} v \pm d$$
$$b_{2r+2} = b_{2r+1} v$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$b_{n-r} = b_{n-r-1} v = b_{n-r+1} v^{r-1}$$
$$b_{n-r+1} = b_{n-r} v \pm d$$
$$b_{n-r+2} = b_{n-r+1} v$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$b_n = b_{n-1} v = b_{n-r+1} v^{r-1}$$

Из овог низа једначина види се да се отплате добијају из претходне једначине ако се претходна помножи са v тј. из једначине:

$$b_{kr} = b_{kr-1} v = b_{(k-1)r} v^{r-1},$$

ако обе припадају истој периоди k, а из једначине:

$$b_{kr+1} = b_{kr} v \pm d,$$

ако једна припада периоди k а друга периоди k + 1, где k може бити: 1, 2, 3....., $\frac{n}{r}$, ако са n обележимо број свих ануитета, а са r број, који казује после колико ануитета повећава се или смањује ануитет за *d* јединица зајма.

3) Изналажење отплаћеног дуга за m првих ануитета и остатка дуга после тих m ануитета.

Ако са O_m обележимо отплаћени дуг, а са R_{n-m} остатак дуга, онда је:

$$O_m = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_m, \text{ а}$$
$$R_{n-m} = K - O_m$$

Пошто се r пута плаћа исти ануитет, а потом повећава или умањује за d јединица за следећих r пута то могу бити следећи случајеви:

a) $m \leqq r$

$$O_m = b_1 (1 + III_p^{m-1});\ \ R_{n-m} = K - O_m{}^{*)}$$

b) $r < m < 2r$

$$O_m = b_1 (1 + III_p^{r-1}) + b_{r+1} (1 + III_p^{m-r-1})$$

c) $m = 2r$

$$O_m = (1 + III_p^{r-1})\,(b_1 + b_{r+1})$$

d) $2r < m < 3r$

$$O_m = (1 + III_p^{r-1})\,(b_1 + b_{r+1}) + b_{2r+1}\,(1 + III_p^{m-2r-1})$$

e) $m = 3r$

$$O_m = (1 + III_p^{r-1})\,(b_1 + b_{r+1} + b_{2r+1})$$

. . . .

f) $(n - r) < m < n$

$$O_m = (1 + III_p^{r-1})\,(b_1 + b_{r+1} + b_{2r+1} + \ldots + b_{n-2r+1}) + \\ + b_{n-r+1} (1 + III_p^{m-n+r-1})$$

g) $m = n$

$$O_m = O_n = K = (1 + III_p^{r-1})\,(b_1 + b_{r+1} + b_{2r+1} + \ldots + b_{n-r+1})$$

Чл. 49 Ануитети сукцесивно расту или опадају по геометријској прогресији. Зајам од K дин. треба амортизовати за n година са p% годишње декурзивно, али да сваки следећи ануитет буде производ из претходног и броја q.

Изналажење ануитета и израда плана отплаћивања.

Пошто ануитет није ништа друго него декурзивна рента а зајам миза за ту ренту, то овде важи једначина:

$$K = a \frac{q^n - v^n}{v^n (q - v)},$$

која је добијена из једначине (69) заменом *r* са *a* и M_n са K. Одавде се добија ануитет кад су познати остали елементи.

Ануитети ће расти ако је q веће од 1, а опадати кад је q мање од 1.

Пример. — Зајам од 12.803,41 дин. треба отплатити за 4 године са 5% годишње, али да сваки следећи ануитет буде два пута толики колики је претходни. Наћи ануитет и израдити план.

---

*) Пошто ова једначина има стално исти облик, то је даље нећу понављати.

Овде је $K = 12803{,}41$, $n = 4$, $q = 2$, $p = 5\%$, па је

$$a = K \cdot \frac{v^n (q - v)}{q^n - v^n} = 12803{,}41\ \frac{1{,}05^4\,(2 - 1{,}05)}{2^4 - 1{,}05^4} = 1000.—$$

Амортизациони план биће:

Година	Дуг		5% интерес		Отплата		Ануитет	
1	18.203	41	640	17	359	83	1.000	—
2	14.243	58	622	18	1.377	82	2.000	—
3	10.165	76	553	29	3.446	71	4.000	—
4	6.719	05	380	95	7.619	05	8.000	—
	43.931	80	2.196	59	12.803	41	15.000	—

Чл. 50 Ануитети периодично расту или опадају по геометријској прогресији. Зајам треба амортизовати за n година али тако да се после сваких k година ануитет добија кад се ануитет из претходних k година помножи са q. Интерес p% годишње декурзивно.

Изналажење ануитета и израда плана отплаћивања.

Имајући на уму да је ануитет декурзивна рента, а миза зајам тог ануитета, добићемо из једначине (71*), стављајући $r = a$ и $M_n = K$ тражену једначину:

$$K = a\, IV_p^k \cdot \frac{q^{\frac{n}{k}} - v^n}{v^{n-k} (q - v^n)}$$

Одавде решењем по a добија се:

$$a = K\, V_p^k \cdot \frac{v^{n-k} (q - v^k)}{q^{\frac{n}{k}} - v^n}$$

Када се нађе ануитет прве периоде онда се за следеће добија множењем са q.

Примедба. — Јасно је да се из ове једначине може израчунати и једна од осталих количина.

Пример. — Зајам од 10.000.— дин. треба амортизовати за 8 година годишњим ануитетом са интересом 5% годишње декурзивно, али да прве 4 године ануитет буде исти а друге 4 године да буде за $\frac{1}{10}$ мањи од ануитета у прве 4 године. Треба наћи ануитет и израдити план отплаћивања.

Овде је: $K = 10000$, $n = 8$, $k = 4$, $p = 5\%$, $q = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$, па је:

$$a = 10000\, V_5^4 \cdot \frac{1{,}05^4\left(\frac{9}{10} - 1{,}05^4\right)}{\left(\frac{9}{10}\right)^2 - 1{,}05^8} = 10000\, V_5^4 \cdot \frac{1{,}05^4\,(1{,}05^4 - 0{,}9)}{1{,}05^8 - 0{,}9^2} =$$

$$= 2820{,}1183 \cdot \frac{0.38349981}{0{,}66745544} = 2820{,}1183 \cdot 0{,}5745698 = 1620{,}35 \text{ дин.}$$

Према томе прве четири године плаћаће се ануитет од 1620,35 дин., а друге четири године ануитет од1620,35 — 162,04 = = 1458,31 дин.

Амортизациони план биће:

Година	Дуг		5% интерес		Отплата		Ануитет	
1	10.000	—	500	—	1.120	35	1.620	35
2	8.879	65	443	98	1.176	37	1.620	35
3	7.703	28	385	16	1.235	19	1.620	35
4	6.468	09	323	40	1.296	95	1.620	35
5	5.171	14	258	56	1.199	75	1.458	31
6	3.971	39	198	57	1.259	74	1.458	31
7	2.711	65	135	58	1.322	73	1.458	31
8	1.388	92	69	45	1.388	86	1.458	31
	46.294	12	2.314	70	9.999	94	12.314	64

Чл. 51 Једнаке отплате.

1) Изналажење отплате, ануитета и израда амортизационог плана.

У случају амортизације зајма једнаким отплатама, отплата се добија из једначине:

$$b = \frac{K}{n} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (93)$$

где K означава зајам, n број ануитета, а b отплату.

Настаје питање какви су ануитети кад су отплате једнаке! Познато је да мора бити:

$$a_1 = n\,b \cdot \frac{p}{100} + b = b\left(n\frac{p}{100} + 1\right)$$

$$a_2 = (n-1)\,b\frac{p}{100} + b = b\left(n\frac{p}{100} + 1 - \frac{p}{100}\right)$$

$$a_3 = (n-2)\,b\frac{p}{100} + b = b\left(n\frac{p}{100} + 1 - 2\frac{p}{100}\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n = b\frac{p}{100} + b = b\left(\frac{p}{100} + 1\right) = b\left[n\frac{p}{100} + 1 - (n-1)\frac{p}{100}\right]$$

Одавде следује:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b\left(1 + n\frac{p}{100}\right) \\ a_2 &= a_1 - \frac{bp}{100} \\ a_3 &= a_1 - 2\frac{bp}{100} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_n &= a_1 - (n-1)\frac{bp}{100} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (94)$$

Из једначина (94) види се да ануитет и међу собом граде опадајућу аритметичку прогресију са диференцијом $-\frac{bp}{100}$, што ће рећи ануитети опадају за годишњи интерес на отплату.

Пример. — Зајам од 20.000.— дин. отплатити за $2^1/_2$ године полугодишњим једнаким отплатама са интересом 10% годишње декурзивно. Израдити план отплаћивања.

Овде је: $K = 20000.—$, $n = 5$, $p = 10\%$, а $\frac{p}{2} = 5\%$, па је:

$$b = \frac{20000}{5} = 4000.—,$$

а

$$a_1 = 4000\left(1 + 5 \cdot \frac{5}{100}\right) = 4000 \cdot 1{,}25 = 5000.—$$

$$a_2 = 5000 - \frac{4000 \cdot 5}{100} = 4800.—$$

$$a_3 = 5000 - 2 \cdot 200 = 4600.—$$

$$a_4 = 5000 - 3 \cdot 200 = 4400.—$$

$$a_5 = 5000 - 4 \cdot 200 = 4200.—$$

План ће бити:

Година	Дуг		5% интерес		Отплата		Ануитет	
1	20.000	—	1.000	—	4.000	—	5.000	—
2	16.000	—	800	—	4.000	—	4.800	—
3	12.000	—	600	—	4.000	—	4.600	—
4	8.000	—	400	—	4.000	—	4.400	—
5	4.000	—	200	—	4.000	—	4.200	—
	60.000	—	3.000	—	20.000	—	23.000	—

2) Изналажење ошплаћеног дуга и осшашка дуга.

Ако се тражи отплаћени дуг са m првих ануитета, онда треба сабрати m отплата, а пошто су отплате једнаке то је:

$$O_m = m\,b$$

На исти начин добија се за остатак дуга после m плаћених ануитета једначина:

$$R_{n-m} = (n - m)\,b \quad \dots\dots\dots\dots (95)$$

Чл. 52 Отплате опадају или расту по аритметичкој прогресији.

1) Израчунавање ошплаша и израда аморшизационог йлана.

Ако је диференција d онда се отплате добијају из једначине:

$$b_m = b_1 + (m - 1)\,d,$$

где m може бити: 1, 2,...., n.

Пошто зајам има n отплата то ће на основу збирног обрасца аритметичке прогресије бити:

$$K = \frac{n}{2}(b_1 + b_n)$$

А одавде

$$b_1 = \frac{K}{n} - \frac{n-1}{2}\,d$$

Примедба. — Ако отплате расту онда је d позитивно, а ако опадају онда негативно.

Пример. — Зајам од 40.000.— дин. треба отплатити за 4 године са интересом 3% годишње декурзивно, али тако да отплате расту за 1000 дин. Израдити план отплаћивања.

Овде је: $K = 40000.—$, $n = 4$, $p = 3\%$, $d = 1000.—$, па је:

$$b_1 = \frac{40000}{4} - \frac{3}{2}\cdot 1000 = 10000 - 1500 = 8500.—$$

Према томе је:

$$b_1 = 8500.—$$
$$b_2 = 9500.—$$
$$b_3 = 10500.—$$
$$b_4 = 11500.—$$

Амортизациони план биће:

Година	Дуг	3% интерес	Отплата	Ануитет
1	40.000 —	1.200 —	8.500 —	9.700 —
2	31.500 —	945 —	9 500 —	10.445 —
3	22.000 —	660 —	10.500 —	11.160 —
4	11.500 —	345 —	11.500 —	11.845 —
	105.000 —	3.150 —	40.000 —	43.150 —

2) Изналажење ошплаћеног дуга и осшашка дуга.

Да се нађе отплаћени дуг са m првих ануитета треба сабрати m првих отплата. Пошто отплате чине аритметичку прогресију то отплаћени дуг није ништа друго него збир аритметичке прогресије, код које је први члан b_1, диференција d, а број чланова m. Зато је:

$$O_m = \frac{m}{2}(b_1 + b_m)$$

Или, пошто се стави:

$$b_m = b_1 + (m - 1)\,d,$$

$$O_m = \frac{m}{2}[2b_1 + (m - 1)\,d] \quad \dots\dots\dots\dots (96)$$

Остатак дуга биће:

$$R_{n-m} = K - O_m \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (97)$$

С друге стране остатак дуга није ништа друго него збир аритметичке прогресије чији је први члан b_{m+1}, диференција d, а број чланова $n - m$. Зато мора бити:

$$R_{n-m} = \frac{n-m}{2}(b_{m+1} + b_n)$$

Или, пошто се стави:

$$b_{m+1} = b_1 + m\,d$$
$$b_n = b_1 + (n - 1)\,d,$$

$$R_{n-m} = \frac{n-m}{2}[2b_1 + (n + m - 1)\,d] \quad . . (98)$$

У израђеном примеру биће:

$$O_3=\frac{3}{2}(2b_1+2d)=\frac{3}{2}(2\cdot 8500+2\cdot 1000)=3(8500+1000)=$$

$$=3\cdot 9500=28500.—$$

А

$$R_1=40000-O_3=40000-28500=11500.—$$

Или

$$R_1=\frac{4-3}{2}[2b_1+6d]=\frac{1}{2}(2b_1+6d)=b_1+3d=8500+$$

$$+3000=11500.—$$

Чл. 53. Отплате расту или опадају по геометријској прогресији. Када је количник q, којим треба множити отплату да се добије следећа, онда се отплате добијају из једначине:

$$b_m=b_{m-1}\,q=b_1\,q^{m-1},$$

где m може бити: 1, 2, 3,...., n.

На основу збирног обрасца за геометријску прогресију добија се:

$$K=\frac{b_1\,(q^n-1)}{q-1}$$

Када је

$$q=1+\frac{p_1}{100},\ \text{биће:}$$

$$K=b_1\,(1+III_{p_1}^{n-1})$$

Пример. — Зајам од 10.000.— дин., треба амортизовати за 6 година са 4% годишње декурзивно, али да отплате a) расту. b) опадају за 3%. Израдити план отплаћивања.

a) Отплате расту за 3%.

Овде је $K=10000.—$, $n=6$, $p=4\%$, $p_1=3\%$, $q=1{,}03$ па је:

$$b_1=K:(1+III_3^5)=10000:6{,}46840988=1545{,}98$$

$$\begin{array}{rl}
+\quad 46{,}38 & 3\%\ \text{на}\ b_1\\
b_2=1592{,}36 & \\
+\quad 47{,}77 & 3\%\ \text{„}\ b_2\\
b_3=1640{,}13 & \\
+\quad 49{,}20 & 3\%\ \text{„}\ b_3\\
b_4=1689{,}33 & \\
+\quad 50{,}68 & 3\%\ \text{„}\ b_4\\
b_5=1740{,}01 & \\
+\quad 52{,}20 & 3\%\ \text{„}\ b_5\\
b_6=1792{,}21 &
\end{array}$$

Амортизациони план биће:

Година	Дуг		4% интерес		Отплата		Ануитет	
1	10.000	—	400	—	1.545	98	1.945	98
2	8.454	02	338	16	1.592	36	1.930	52
3	6 861	66	274	47	1.640	13	1.914	60
4	5.221	53	208	86	1.689	33	1.898	19
5	3.532	20	141	29	1.740	01	1.881	30
6	1.792	19	71	69	1.792	21	1.863	90
	35.861	60	1.434	47	10.000	02	11.434	49

b) Отплате опадају за 3%.

Овде је $K=10000.—$, $n=6$, $p=4\%$, $p_1=3\%$, $q=1-\frac{3}{100}=$ $=0{,}97$, па је:

$$b_1=K\,(1-q):(1-q^n)=10000\cdot 0{,}03:(1-0{,}97^6)=$$

$$=300:0{,}167028=1796{,}11$$

$$\begin{array}{rl}
b_1=1796{,}11 & \\
-\quad 53{,}88 & 3\%\ \text{на}\ b_1\\
b_2=1742{,}23 & \\
-\quad 52{,}27 & 3\%\ \text{„}\ b_2\\
b_3=1689{,}96 & \\
-\quad 50{,}70 & 3\%\ \text{„}\ b_3\\
b_4=1639{,}26 & \\
-\quad 49{,}18 & 3\%\ \text{„}\ b_4\\
b_5=1590{,}08 & \\
-\quad 47{,}70 & 3\%\ \text{„}\ b_5\\
b_6=1542{,}38 &
\end{array}$$

Амортизациони план биће:

Година	Дуг		4% интерес		Отплата		Ануитет	
1	10.000	—	400	—	1.796	11	2.196	11
2	8.203	89	328	15	1.742	23	2.070	38
3	6.461	66	258	47	1.689	96	1.948	43
4	4.771	70	190	87	1.639	26	1.830	13
5	3.132	44	125	30	1.560	08	1.715	38
6	1.542	36	51	69	1.542	38	1.604	07
	34.112	05	1.364	48	10.000	02	11.364	50

Примедба. — Израз $0{,}97^6$ налази се у II таблици у ступцу $3^9/_{97}\%$ а у шестој врсти. Стопа $3^9/_{97}$ добија се кад се 3 помножи са 100 и тај производ подели са 100—3. То није ништа друго него претварање антиципативне стопе 3% у одговарајућу декурзивну стопу $3\,{}^{9}/_{97}$%.

Чл. 54 Рок плаћања интереса не поклапа се са роком плаћања отплате.

1) Израчунавање ануитета и израда плана отплаћивања.

Размаци плаћања интереса и плаћања отплата нису увек исти. Чести су случајеви где се интерес плаћа полугодишње а отплата годишње. Има и таквих случајева где се отплате плаћају више пута годишње, а интерес само једанпут. Ово је чест случај код лутријских зајмова.

Овде ћу посматрати случај када се интерес плаћа полугодишње, а отплата годишње. Ово плаћање полугодишњег интереса треба свести на годишње помоћу интереса за међувреме од плаћања првог до плаћања другог интереса (интеркаларни интерес).

Задатак се може решити на два начина:

Први начин:

Треба наћи полугодишњи ануитет са полугодишњом релативном интересном стопом. Такав ануитет плаћао би се два пута годишње: први у половини године а други на крају године. Да се добије ануитет, који ће се плаћати крајем године дода се једном ануитету интерес за једну полугодину са годишњом интересном стопом и тако добивеној вредности дода још један полугодишњи ануитет. Ако је годишња интересна стопа p, а полугодишњи ануитет a, онда је годишњи ануитет:

$$a+\frac{a\cdot p}{200}+a=2a+\frac{a\,p}{300}=a\left(2+\frac{p}{200}\right)$$

Пример. — Нека је узет зајам од 1000.— дин. са 4% годишње декурзивно, а са полугодишњим декурзивним плаћањем интереса. Наћи ануитет, који се мора плаћати на крају сваке године, ако је време амортизације 5 година.

Овде је полугодишњи ануитет a, па је:

$$
\begin{aligned}
a &= 1000\,V_2^{10} = 111{,}33 \text{ дин.}\\
+\frac{a\cdot p}{200} &= \quad 2{,}23 \text{ „}\\
+a &= 111{,}33 \text{ „}\\
\hline
a\left(2+\frac{p}{200}\right) &= 224{,}89 \text{ дин.,}
\end{aligned}
$$

тражени годишњи ануитет.

Други начин:

Треба полугодишњој релативној стопи $\frac{p}{2}$ наћи одговарајућу годишњу конформну стопу, и са тако добивеном стопом тражити годишњи ануитет. Према томе у предњем примеру биће:

$$I_2^2 = 1{,}0404,$$

што значи да је годишња конформна стопа 4,04%. Зато је:

$$a = 1000\,V_{4,04}^5 = 1000\cdot 0{,}22488 = 224{,}88 \text{ дин.}$$

Вредност $V_{4,04}^5$ израчуната је следећом линеарном интерполацијом:

$V_4^5 = 0{,}22462711$	4	$V_4^5 = 0{,}22462711$	4.—
$V_{4^1/_2}^5 = 0{,}22779164$	$4^1/_2$	$V_{4,04}^5 =$ x	4,04
$V_{4^1/_2}^5 - V_4^5 = 0{,}00316453$	$\frac{1}{2}$	$V_{4,04}^5 - V_4^5 = x - 0{,}22462711$	0,04

Одавде следује

$$x = 0{,}22462711 + 0{,}00316453\cdot 2\cdot 0{,}04 = 0{,}22488027$$

На први начин израчунат ануитет већи је за 0.01 дин., али то долази отуда што полугодишњи ануитет није 111,33, већ 111,3265. Зато је годишњи ануитет:

$$a\left(2+\frac{4}{200}\right) = 111{,}3265\cdot 2{,}02 = 224{,}87953 \text{ дин.}$$

тј. редуциран на два децимала даје као и други начин 224,88 дин.

Да је нађени ануитет довољан за амортизацију предњег дуга види се из следећег извођења:

Дуг на почетку 1 године	дин.	1.000.—
+ 4,04% интерес за 1 годину	„	40.40
Дуг на крају 1 године	дин.	1.040.40
— ануитет на крају 1 године	„	224.88
Дуг на почетку 2 године	дин.	815,52
+ 4,04% интерес за 2 годину	„	32.95
Дуг на крају 2 године	дин.	848.47
— ануитет за 2 годину	„	224 88
Дуг на почетку 3 године	дин.	623 59
+ 4,04% интерес за 3 годину	„	25 19
Дуг на крају 3 године	дин.	648.78
— ануитет за 3 годину	„	224.88
Дуг на почетку 4 године	дин.	423 90
+ 4.04% интерес за 4 годину	„	17.13
Дуг на крају 4 године	дин.	441,03

Дуг на крају 4 године	дин.	441,03
— ануитет за 4 годину	„	224,88
Дуг на почетку 5 године	дин.	216,15
+ 4,04% интерес за 5 годину	„	8,73
Дуг на крају 5 године	дин.	224,88
— ануитет за 5 годину	„	224,88
		— 0 —

Дуг на крају 5 године је ануитет, што значи да је ануитет од 224,88 дин. довољан да се дуг од 1.000 дин. амортизује за 5 година са интересом 4% годишње при полугодишњем плаћању интереса, а годишњем отплаћивању дуга.

Ово се може проверити и на овај начин:

Дуг на почетку 1 године	дин.	1.000.—
+ 4% интерес за I семестар 1 године	„	20.—
Дуг на крају I семестра	дин.	1.020.—
+ 4% интерес за II семестар 1 године	„	20.40
Дуг на крају 1 године	дин.	1.040,40
— ануитет за 1 годину	„	224.88
Дуг на почетку 2 године	дин.	815,52
+ 4% интерес за I семестар 2 године	„	16,31
итд.	дин.	831,83

Амортизациони план биће:

$$a = 224{,}88$$

Година	Дуг на крају године	4% интерес	1% интеркаларни интерес	Укупан интерес	Отплата
1	1.000 —	40 —	— 40	40 40	184 48
2	815 52	32 62	— 33	32 95	191 93
3	623 59	24 94	— 25	25 19	199 69
4	423 90	16 96	— 17	17 13	207 75
5	216 15	8 64	— 09	8 73	216 15
	3.079 16	123 16	1 24	124 40	1.000 —

2. *Изналажење отплата.*

Први ануитет се троши на годишњи интерес $\frac{K\,p}{100}$ на цео дуг K, интеркаларни интерес на полугодишњи интерес $\frac{K\,p}{200}\cdot\frac{p}{200}$ и отплату b_1; други на годишњи интерес на остатак дуга $(K-b_1)$, интеркаларни интерес и другу отплату; итд. Према томе важиће следећи низ једначина:

$$1 \text{ ануитет} \quad a = \frac{K\,p}{100} + \frac{K\,p}{200}\,\frac{p}{200} + b_1$$

$$2 \text{ ануитет} \quad a = \frac{(K-b_1)\,p}{100} + \frac{(K-b_1)\,p}{200}\cdot\frac{p}{200} + b_2$$

$$3 \quad „ \quad a = \frac{(K-b_1-b_2)\,p}{100} + \frac{(K-b_1-b_2)\,p}{200}\cdot\frac{p}{200} + b_3$$

. . . .

$$\text{n-ти ануитет} \quad a = \frac{[K-(b_1+b_2+\ldots+b_{n-1})]\,p}{100} + $$

$$+ \frac{[K-(b_1+b_2+\ldots+b_{n-1})]\,p}{200}\cdot\frac{p}{200} + b_n$$

Одузимајући по две узастопне једначине добија се:

$$b_2 = b_1\left[1+\frac{p}{100}+\left(\frac{p}{200}\right)^2\right] = b_1\left(1+\frac{p}{200}\right)^2 = b_1 I^2_{\frac{p}{2}}$$

$$b_3 = b_2\left[1+\frac{p}{100}+\left(\frac{p}{200}\right)^2\right] = b_2\left(1+\frac{p}{200}\right)^2 = b_1\left(1+\frac{p}{200}\right)^4 = b_1 I^4_{\frac{p}{2}}$$

. . . .

$$b_n = b_{n-1}\left[1+\frac{p}{100}+\left(\frac{p}{200}\right)^2\right] = b_{n-1}\left(1+\frac{p}{200}\right)^2 =$$

$$= b_1\left(1+\frac{p}{200}\right)^{2(n-1)} = b_1 I^{2(n-1)}_{\frac{p}{2}}$$

Зајмови подељени на обавезнице

Чл. 55 Општи појмови. У досадашњим примерима претпостављено је да се на цео зајам издаје једна обавеза дужника у виду облигације. Али ако при закључењу зајма није могуће наћи финансијера, који би из својих средстава могао дати цео износ зајма, онда се зајам дели на више делова и на те делове издају обавезнице повериоцима зајма. Све обавезнице могу имати исту номиналну вредност — што је у пракси најчешћи случај — а могу бити подељене у више група, тако да свака група обавезница има другу номиналну вредност једне обавезнице. Обавезнице се међу собом разликују по серијама и бројевима, а ако има више група још и по групама. Свака серија има исти број нумера. Зајам се амортизује извлачењем појединих обавезница или целих серија. Амортизоване обавезнице амортизују се: по номинали, изнад номинала — са ажијом, и испод номинале — са дисажијом. Интерес се исплаћује доносиоцу купона. На купонима је означена: серија, број, група (ако је има), сума у монети на коју гласи обавезница и рок плаћања купона. Купони су уз обавезницу, али могу бити и на засебном табаку. Код неких зајмова издаје се онолики број купона, колико ће се пута плаћати интерес, а код неких само за неколико првих година, а по истеку тог рока доносиоцу талона издаје се за остатак или један део остатка времена амортизације нов купонски табак. Ако је нови купонски табак издат за један део остатка времена амортизације, онда и он мора имати талон, како би на основу њега ималац обавезнице могао добити купонски табак за остатак времена или за наредни период.

Има зајмова код којих се цео интерес не исплаћује у виду купона већ се извесан део интереса додаје једном делу амортизованих обавезница, а има и таквих код којих се интерес не исплаћује никако у виду купона, већ се додаје или свим или само једном делу амортизованих обавезница. Први се зову лутријски зајмови са интересом, а други лутријски зајмови без интереса, док се они, код којих се цео интерес исплаћује у виду купона зову обични зајмови подељени на обавезнице.

Док се обични зајмови подељени на обавезнице амортизују или откупом на берзи или извлачењем, или и једним и другим — према томе како је уговором о зајму предвиђено, дотле се лутријски зајмови амортизују скоро увек само извлачењем. Има изузетака у новије време где се и код њих амортизација врши делимично на други начин. Нпр. $2^1/_2\%$ обавезнице ренте за ратну штету.

Код лутријских зајмова постоје два извлачења: извлачење за амортизацију и извлачење за згодитке. Извучене обавезнице за амортизацију могу играти и даље на згодитке, али не више за амортизацију и обратно у случају извлачења згодитка. У том случају свака обавезница мора имати купон за згодитке. У случају извлачења за амортизацију сопственик отсече купон за згодитке и задржи а обавезницу преда, за наплату, у обрнутом случају обавезницу задржи а купон за згодитке преда.

Ако обавезница извучена за амортизацију не игра даље за згодитке онда она нема купон за згодитке. Њеном амортизацијом сопственик губи право игре на згодитке.

Уговором или законом о зајму, како код обичних тако и код лутријских, предвиђа се у току ког времена морају се поднети за исплату доспели купони, амортизоване обавезнице и оне на које су пали згодитци. Ако имаоци обавезница у одређеном року не поднесу за наплату купоне, амортизоване обавезнице као и обавезнице на које су пали згодитци губе право на исплату, а ненаплаћене суме имају се употребити онако како је уговором, односно законом, предвиђено. Рокови застарелости нису исти код свих зајмова. У овом делу видећемо како се амортизују обични зајмови, а у једном посебном одељку како се врши амортизација лутријских зајмова.

С обзиром на то да све обавезнице могу имати исту номиналу, а да исту тако могу бити неколико група са различитом номиналом проучићемо оба случаја.

Пошто се амортизоване обавезнице могу исплаћивати по номинали, изнад номинале и испод номинале проучићемо сва три случаја.

Све обавезнице имају исту номиналу

Чл. 56 Амортизоване обавезнице исплаћују се по номинали.

а) Теоријски ануитет рачуна се по таблици.

Задатак. — Зајам од 1,000.000.— дин., подељен на 1000 обавезница по 100 дин., треба да се амортизује за 10 година годишњим једнаким ануитетима и годишњим интересом 6% декурзивно. Цео интерес исплаћује се у виду купона, а амортизоване обавезнице исплаћују се по номинали. Израдити план отплаћивања.

1) Израда плана отплаћивања.

План се може израдити на два начина: Поступним изналажењем из године у годину годишње амортизованих обавезница и унашањем у план, или да се прво пронађе колико се обавезница исплаћује у свим годинама амортизације, па тек онда приступи изради амортизационог плана.

План ћу израдити прво на први, па онда на други начин.

Нека је теоријски годишњи ануитет a у динарима. Тада је теоријски ануитет:

$$a = K\, V_p^n = 1000000\, V_6^{10} = 135867{,}96 \text{ дин.}$$

Из ове суме на крају прве године мора се прво исплатити интерес од 60.000.— дин. за протеклу годину на 10.000 обавезница по 6.— дин., а остатак од 75 867,96 дин. на смањење дуга. Да се нађе колико се обавезница може исплатити са овом сумом треба је поделити са номиналом једне обавезнице — у овом случају са 100. Изврши ли се дељење добија се број 758,6796, што значи да се може амортизовати 758,6796 обавезница.

Пошто је обавезница недељива, а не може се издати сума већа од нађеног теоријског ануитета то ће се на крају прве године исплатити 758 обавезница. Због тога цео ануитет неће бити употребљен већ свега 135.800.— дин. Преостатак од 67.96 дин. укаматиће се за годину дана и на крају друге године додати теоријском ануитету. Тако ће дужник на крају друге године имати:

	$a_1 =$	135.867,96 дин.
+ остатак прошлог ануитета	$=$	67,96 „
+ 6% интерес на остатак прошлог ануитета	$=$	4.08 „
	$a_2 =$	135.940.— дин.

Из ових 135.940.— дин. мора се прво исплатити 55452.— дин. на име интереса на 9.242 обавезнице у течају, а остатак од 80.488.— дин. употребљава се на смањење дуга. Деобом ове суме са 100 добија се 804.88, што значи да се у другој години амортизују 804 обавезнице, и да преостају 88 дин.

Са овим остатком треба поступити као и са остатком у првој години.

Идући тако из године у годину биће израђен цео план. Последње године неће преостати ништа, што је доказ да је план добро израђен.

Ако се са $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ обележи број теоријски, а са $x_1', x_2', x_3', \ldots, x_{10}'$ број стварно амортизованих обавезница у 1, 2, 3, ..., 10 години, са $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{10}$ интерес, који се плаћа у виду купона на обавезнице у течају у 1, 2, 3, ..., 10 години, са α номинала једне обавезнице и са $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ ануитет са којим дужник располаже на крају 1, 2, 3, ..., 10 године, онда ће цео поступак изгледати овако:

1 година: $a_1 = a = 135867{,}96$ дин.

$-\,i_1 = 60000.—$ „

$a_1 - i_1 = 75867{,}96$ дин.

$x_1 = (a_1 - i_1) : \alpha = 75867{,}96 : 100 = 758{,}6786; \qquad x_1' = 758.—$

2 година: $a = 135867{,}96$ дин.

$+$ остатак дин. 67.96
$+$ 6% интерес „ 4.08

72.04 „

$a_2 = 135940.—$ дин.

$-\,i_2 = 55452.—$ „

$a_2 - i_2 = 80488.—$ дин.

$x_2 = (a_2 - i_2) : \alpha = 80488 : 100 = 804{,}88; \qquad x_2' = 804.—$

3 година: $a = 135867{,}96$ дин.

$+$ остатак дин. 88.—
$+$ 6% интерес „ 5.28

93.28 „

$a_3 = 135961{,}24$ дин.

$-\,i_3 = 50628.—$ „

$a_3 - i_3 = 85333{,}24$ дин.

$x_3 = (a_3 - i_3) : \alpha = 85333{,}24 : 100 = 853{,}3324; \qquad x_3' = 853.—$

4 година: $a = 135867{,}96$ дин.

$+$ остатак дин. 33,24
$+$ 6% интерес „ 1,99

35,23 „

$a_4 = 135903{,}19$ дин.

$-\,i_4 = 45510.—$ „

$a_4 - i_4 = 90393{,}19$ дин.

$x_4 = (a_4 - i_4) : \alpha = 90393{,}19 : 100 = 903{,}9319; \qquad x_4' = 903.—$

5 година: $a = 135867{,}96$ дин.

$+$ остатак дин. 93,19
$+$ 6% интерес „ 5,59

98.78 „

$a_5 = 135966{,}74$ дин.

$-\,i_5 = 40092.—$ „

$a_5 - i_5 = 95874{,}74$ дин.

$x_5 = (a_5 - i_5) : \alpha = 95874{,}74 : 100 = 958{,}7474; \qquad x_5' = 958.—$

6 година: $a = 135867{,}96$ дин.

$+$ остатак дин. 74,74
$+$ 6% интерес „ 4,48

79.22 „

$a_6 = 135947{,}18$ дин.

$-\,i_6 = 34344.—$ „

$a_6 - i_6 = 101603{,}18$ дин.

$x_6 = (a_6 - i_6) : \alpha = 101603{,}18 : 100 = 1016{,}0318; \qquad x_6' = 1016.—$

7 година: $a = 135867{,}96$ дин.

$+$ остатак дин. 3,18
$+$ 6% интерес „ 0.19

3,37 „

$a_7 = 135871{,}34$ дин.

$-\,i_7 = 28248.—$ „

$a_7 - i_7 = 107623{,}33$ дин.

$x_7 = (a_7 - i_7) : \alpha = 107623{,}33 : 100 = 1076{,}2333; \qquad x_7' = 1076.—$

8 година: $a = 135867{,}96$ дин.

$+$ остатак дин. 23,23
$+$ 6% интерес „ 1,40

24,73 „

$a_8 = 135892{,}69$ дин.

$-\,i_8 = 21792.—$ „

$a_8 - i_8 = 114100{,}69$ дин.

$x_8 = (a_8 - i_8) : \alpha = 114100{,}69 : 100 = 1141{,}0069; \qquad x_8' = 1141.—$

9 година: $a = 135867{,}96$ дин.

$+$ остатак дин. 0,69
$+$ 6% интерес „ 0,04

0.73 „

$a_9 = 135868{,}69$ дин.

$-\,i_9 = 14946.—$ „

$a_9 - i_9 = 120922{,}69$ дин.

$x_9 = (a_9 - i_9) : \alpha = 120922{,}69 : 100 = 1209{,}2269; \qquad x_9' = 1209.—$

10 година: $a = 135367{,}96$ дин.

$+$ остатак дин. 22,69
$+ 6\%$ интерес „ 1,35 — 24.04 „

$a_{10} = 135892.—$ дин.
$- i_{10} = 7692.—$ „

$a_{10} - i_{10} = 128200.—$ дин.

$x_{10} = (a_{10} - i_{10}) : \alpha = 128200 : 100 = 1282.-$; $x'_{10} = 1282.—$

Амортизацони план биће:

Година	Обвезнице у течају	Обвезнице амортизоване	6% интерес	Отплата	Стварни ануитет	Остатак ануитета I	6% интерес на остатак ануитета II	I+II III
1	10.000	758	60.000 —	75.800 —	135 800 —	67 96	4 08	72 04
2	9.242	804	55.452 —	80.400 —	135.852 —	88 —	5 28	93 28
3	8.438	853	50.628 —	85.300 —	135.928 —	33 24	1 99	35 23
4	7.585	903	45.510 —	90 300 —	135.810 —	93 19	5 59	98 78
5	6 682	958	40.092 —	95 800	135.892 —	74 74	4 48	79 22
6	5.724	1.016	34.344 —	101.600 —	135.944 —	3 18	0 19	3 37
7	4.708	1.076	28.248 —	107 600 —	135.848 —	23 33	1 40	24 73
8	3.632	1.141	21.792 —	114.100 —	135 892 —	0 69	0 0	0 73
9	2.491	1.209	14 946 —	120.900 —	135 846 —	22 69	1 35	24 04
10	1.282	1.282	7.692 —	128.200	135.892 —	— —	— —	— —
	59.784	10 000	358.704 —	1,000.000 —	1 358.704 —	407 —	24 40	431 42

План је добро израђен кад су испуњени следећи услови:

1) Број обавезница у течају и број исплаћених обавезница у последњој години морају бити исти — у течају 1282, а исплаћено 1282;

2) Интерес за годину дана на збир обавезница у течају мора бити једнак збиру интереса — $59784 \cdot 6 = 358704.—$, јер једна обавезница носи годишње 6 дин., интереса;

3) Збир интереса и отплата мора бити једнак збиру стварних ануитета — $358704 + 1000000 = 1358704.—$;

4) Збир стварних ануитета једнак је збиру интереса на остатак ануитета и десетоструког (n-струког) теоријског ануитета — $1358704 = 24{,}40 + 10 \cdot 135867{,}96$; и

5) Збир остатка ануитета и интереса на остатак ануитета мора бити једнак збиру колоне $\mathrm{I} + \mathrm{II}$ — $407{,}02 + 24{,}40 = 431{,}42$.

Да бих задатак решио на други начин претпостављам опет да су са $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ обележени бројеви рачунски, а са $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n$ бројеви стварно амортизованих обавезница у 1, 2, 3, ..., n години, са *a* ануитет у динарима, са *n* број ануитета (у овом примеру и број година амортизације), са α номинала једне обавезнице, са *p* годишња номинална интересна стопа зајма и са *m* број обавезница зајма.

Под тим претпоставкама добија се следећи низ једначина:

$$1 \text{ ануитет } a = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)\frac{\alpha p}{100} + \alpha x_1$$

$$2 \quad „ \quad a = (x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n)\frac{\alpha p}{100} + \alpha x_2$$

$$3 \quad „ \quad a = (x_3 + x_4 + x_5 + \ldots + x_n)\frac{\alpha p}{100} + \alpha x_3$$

. . . .

$$(n-1)\text{-ви ануитет } a = (x_{n-1} + x_n)\frac{\alpha p}{100} + \alpha x_{n-1}$$

$$n\text{-ти} \quad „ \quad a = x_n \frac{\alpha p}{100} + \alpha x_n$$

Одузимањем по две узастопне једначине добија се следећи низ једначина:

$$x_2 = x_1 + \frac{x_1 p}{100} = x_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$x_3 = x_2 + \frac{x_2 p}{100} = x_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = x_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$x_4 = x_3 + \frac{x_3 p}{100} = x_3\left(1 + \frac{p}{100}\right) = x_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

. . . .

$$x_{n-1} = x_{n-2} + \frac{x_{n-2} p}{100} = x_{n-2}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = x_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2}$$

$$x_n = x_{n-1} + \frac{x_{n-1} p}{100} = x_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = x_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}$$

Ако се у овим једначинама стави $v = 1 + \frac{p}{100}$, па вредности за $x_2, x_3, \ldots, x_n$ уврсте у једначину:

$$m = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

добиће се једначина:

$$m = x_1 + x_1 v + x_1 v^2 + \ldots + x_1 v^{n-1} = x_1 (1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1})$$

тј.

$$m = x_1 \frac{v^n - 1}{v - 1} = x_1 (1 + \mathrm{III}_p^{n-1})$$

Из ове једначине следује:

$$x_1 = m \frac{v - 1}{v^n - 1} = \frac{m}{1 + \mathrm{III}^{n-1}} \; \ldots\ldots \quad (99)$$

Ова једначина даје број амортизованих обавезница у првој години амортизације, али се тај број може лакше израчунати из једначине:

$$a = \alpha\, x_1 + m \frac{\alpha\, p}{100}$$

Деобом ове једначине са номиналом једне обавезнице — у овом случају α — добија се:

$$\frac{a}{\alpha} = x_1 + \frac{m\, p}{100}$$

Одавде је:

$$x_1 = \frac{a}{\alpha} - \frac{m\, p}{100} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (100)$$

Из ове једначине излази да је број рачунски амортизованих обавезница у првој години амортизације једнак разлици ануитета и интереса у обавезницама. Према томе број теоријски амортизованих обавезница у појединим годинама практично се израчунава овако:

Нађе се број обавезница зајма деобом зајма са номиналом једне обавезнице, па тај број помножи са петом таблицом, на тај начин добија се ануитет у обавезницама. Затим се број обавезница зајма помножи интересном стопом и подели са 100, па та два броја одузму. Резултат одузимања јесте број теоријски амортизованих обавезница са првим ануитетом. Затим се на овај број израчуна интерес и дода том броју. Резултат је број теоријски амортизованих обавезница са другим ануитетом. На исти начин излази се број теоријски амортизованих обавезница са трећим четвртим итд. ануитетом. Када се на број теоријски амортизованих обавезница са последњим ануитетом дода интерес добија се ануитет. Разумљиво је да рад није добар ако резултат не буде ануитет.

Досадашња излагања учињена су под претпоставком да су ануитети годишњи. Али ако се ануитет плаћа s пута годишње, онда ће ануитети бити $s \cdot n$, а одговарајућа релативна стопа биће $\frac{p}{s}$.

Према томе предњи пример изгледао би овако:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\alpha} = \frac{a}{100} &= 10000\, V_6^{10} = 1358{,}6896 \quad \text{обавезница} \\
-\frac{m p}{100} &= \frac{10000 \cdot 6}{100} = 600.\text{—} \quad „ \\
x_1 &= 758{,}6796 \quad „ \\
+\frac{x_1\, p}{100} &= 45{,}5208 \quad „ \\
x_2 &= 804{,}2004 \quad „
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= 804{,}2004 \quad \text{обавезница} \\
+\frac{x_2\, p}{100} &= 48{,}2520 \quad „ \\
x_3 &= 852{,}4524 \quad „ \\
+\frac{x_3\, p}{100} &= 51{,}1471 \quad „ \\
x_4 &= 903{,}5995 \quad „ \\
+\frac{x_4\, p}{100} &= 54{,}2160 \quad „ \\
x_5 &= 957{,}8155 \quad „ \\
+\frac{x_5\, p}{100} &= 57{,}4689 \quad „ \\
x_6 &= 1015{,}2844 \quad „ \\
+\frac{x_6\, p}{100} &= 60{,}9171 \quad „ \\
x_7 &= 1076{,}2015 \quad „ \\
+\frac{x_7\, p}{100} &= 64{,}5721 \quad „ \\
x_8 &= 1140{,}7736 \quad „ \\
+\frac{x_8\, p}{100} &= 68{,}4464 \quad „ \\
x_9 &= 1209{,}2200 \quad „ \\
+\frac{x_9\, p}{100} &= 72{,}5532 \quad „ \\
x_{10} &= 1281{,}7732 \quad „ \\
+\frac{x_{10}\, p}{100} &= 76{,}9064 \quad „ \\
a &= 1358{,}6796 \quad „
\end{aligned}$$

Број стварно исплаћених обавезница јесте:

$x_1 = 758{,}6796$;	$x_1' = 758.$—	остаје	0,6796	
$x_2 = 804{,}2004$;	$x_2' = 804.$—	+	0,2004	0.8800
		остаје	0,8800	
$x_3 = 952{,}4524$;	$x_3' = 853.$— (+1)	+	0,4524	1,3324
		остаје	0,3324	
$x_4 = 903{,}5995$;	$x_4' = 903.$—	+	0,5995	0,9319
		остаје	0,9319	
$x_5 = 957{,}8155$;	$x_5' = 958.$— (+1)	+	0,8155	1,7474
		остаје	0,7474	
$x_6 = 1015{,}2844$;	$x_6' = 1016.$— (+1)	+	0.2844	1.0318
		остаје	0,0318	

			остаје	0,0318	
$x_7 = 1076{,}2015$;	$x_7' = 1076.—$		+	0,2015	0,2333
			остаје	0,2333	
$x_8 = 1140{,}7726$;	$x_8' = 1141.—$	(+1)	+	0,7736	1,0069
			остаје	1,0069	
$x_9 = 1209{,}2200$;	$x_9' = 1209.—$		+	0,2200	0,2269
			остаје	0,2269	
$x_{10} = 1281{,}7732$;	$x_{10}' = 1282.—$	(+1)	+	0,7732	1,0001
$m = 10000{,}0001$;	$m = 10000.—$		остаје	0,0001	

Делови обавезнице додају се деловима обавезница из следеће године, па кад тај збир да једно цело онда се у тој години дода теоријски израчунатом броју целих обавезница још један, а кад нема једно цело онда се узима број целих теоријски израчунатих у тој години. У загради +1 значи да је те године додана броју целих теоријски израчунатих још једна обавезница.

Број стварно амортизованих обавезница у појединим годинама амортизације потпуно је исти, а то мора и бити, јер би у противном један начин био погрешан. Према томе план ће бити исти само без последње три колоне — I, II и I+II.

2) Изналажење отплаћеног дуга.

Да се нађе отплаћени дуг са r првих плаћених ануитета треба сабрати број теоријски амортизованих обавезница од x_1 до x_r; дакле, ако са O_r обележимо број теоријски амортизованих обавезница биће:

$$O_r = x_1 + x_2 + \ldots + x_r = x_1\left(1 + III_p^{r-1}\right)$$

Када број O_r није цео број већ мешовит број онда је са r плаћених ануитета амортизовано онолико обавезница колико број O_r има целих. Нека је тај број O_r'. Тада је отплаћени дуг:

$$O_r' \alpha = K_r$$

Ако је у овом примеру $r = 6$, онда је:

$$O_6 = 758{,}6796\left(1 + III_6^5\right) = 5292{,}0317$$

А $$O_6' = 5292.—$$

Зато је отплаћени дуг:

$$K_6 = O_6' \cdot \alpha = 5292 \cdot 100 = 529200.—$$

3) Изналажење остатка дуга.

Остатак дуга може се наћи на два начина: први је да се од целог броја обавезница одузме број исплаћених обавезница па то помножи номиналом, а други да се саберу дисконтовани будући (неплаћени) ануитети, али да се дисконтовање изврши на дан плаћања последњег плаћеног ануитета. Док су код отплаћеног дуга децимали занемаривани дотле они овде дају једно цело више.

Ако се са R_{n-r} обележи број теоријски неисплаћених, а за R_{n-r}' стварно неисплаћених обвезница, онда је:

$$R_{n-r} = m - O_r = m - x_1\left(1 + III_p^{r-1}\right); \quad R_{n-r}' = m - O_r'$$

Или сабирањем дисконтованих ануитета:

$$R_{n-r} = a\, IV_p^{n-r}$$

Ако је у нашем примеру $r = 6$ онда је:

$$R_4 = 10000 - 758{,}6796\left(1 + III_6^5\right) = 10000 - 5292{,}0317 = 4707{,}9683$$

А $$R_4' = 10000 - 5292 - 4708.— \text{ обавезница}$$

Помножи ли се овај број са номиналом добија се остатак у динарима; дакле:

$$R_4' \alpha = 4708 \cdot 100 = 470\,800.— \text{ дин.}$$

Сабирањем дисконтованих ануитета добија се:

$$R_4 = 1358{,}6796\, IV_6^4 = 4707{,}9683$$

тј. као и на први начин:

$$R_4' = 4708.— \text{ обвезница.}$$

б) Теоријски ануитет је заокругљен.

Задатак. — Зајам од 1000000.— дин., подељен на 10000 обавезница по 100.— дин., треба да се амортизује годишњим ануитетом од 25%, са интересом 6% годишње декурзивно, цео интерес исплаћује се по номинали. Израдити план отплаћивања.

Овде је: $$a = \frac{1000000 \cdot 25}{100} = 250000.— \text{ дин.}$$

Време амортизације добија се из једначине:

$$V_6^x = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

У четвртој врсти, а у ступцу 6% налази се број 0,28859149 а у петој 0,23739640, што значи да је време амортизације 5 година, али да се четири пута плаћа ануитет 25% од дуга, а пети пут мање од 25%.

Последњи ануитет израчунава се из једначина:

$$R = K - O_4$$
$$a' = R v,$$

где је R последња отплата, K зајам, O_4 отплаћени зајам са прва четири анyитета, v интересни чинитељ са интересном стопом зајма, а а' последњи анyитет.

У овом примеру је:

$$O_4 = b_1 (1 + III_6^3) = 190000 \cdot 4\,374616 = 831177{,}04 \text{ дин.},$$
$$R = 1000000 - 831177{,}04 = 168822{,}96 \text{ дин.},$$
$$a' = 168822{,}96 \cdot 1{,}06 = 178952{,}34 \text{ дин.}$$

Амортизациони план ради са као и у случају под а). Усвојимо ли исту нотацију као под а) биће:

1 година:

$$\begin{array}{rl} a = a_1 = & 250000.\text{—} \text{ дин.} \\ - \quad i_1 = & 60000.\text{—} \quad „ \\ \hline a_1 - i_1 = & 190000.\text{—} \text{ дин.} \end{array}$$

$x_1 = (a_1 - i_1) : \alpha = 190000 : 100 = 1900.\text{—};$ $\quad x_1' = 1900.\text{—}$

2 година:

$$\begin{array}{rl} a = a_2 = & 250000.\text{—} \text{ дин.} \\ - \quad i_2 = & 48600.\text{—} \quad „ \\ \hline a_2 - i_2 = & 201400.\text{—} \text{ дин.} \end{array}$$

$x_2 = (a_2 - i_2) : \alpha = 201400 : 100 = 2014.\text{—};$ $\quad x_2' = 2014.\text{—}$

3 година:

$$\begin{array}{rl} a = a_3 = & 250000.\text{—} \text{ дин.} \\ - \quad i_3 = & 36516.\text{—} \quad „ \\ \hline a_3 - i_3 = & 213484.\text{—} \text{ дин.} \end{array}$$

$x_3 = (a_3 - i_3) : \alpha = 213484 : 100 = 2134{,}84;$ $\quad x_3' = 2134.\text{—}$

4 година:

$$\begin{array}{lrr} & a = & 250000.\text{—} \text{ дин.} \\ + \text{ остатак} & \text{дин. } 84.\text{—} & \\ + 6\% \text{ интерес} & „ \quad 5.04 & 89{,}04 \quad „ \\ \hline & a_4 = & 250089{,}04 \text{ дин.} \\ & - i_4 = & 23712.\text{—} \quad „ \\ \hline & a_4 - i_4 = & 226377{,}04 \text{ дин.} \end{array}$$

$x_4 = (a_4 - i_4) : \alpha = 226377{,}04 : 100 = 2263{,}7704;$ $\quad x_4' = 2263.\text{—}$

5 година:

$$\begin{array}{lrr} & a' = & 178952{,}34 \text{ дин.} \\ + \text{ остатак} & \text{дин. } 77{,}04 & \\ + 6\% \text{ интерес} & „ \quad 4{,}62 & 81.66 \quad „ \\ \hline & a_5 = & 179034.\text{—} \text{ дин.} \\ & - i_5 = & 10134.\text{—} \quad „ \\ \hline & a_5 - i_5 = & 168900.\text{—} \text{ дин.} \end{array}$$

$x_5 = (a_5 - i_5) : \alpha = 168900 : 100 = 1689.\text{—}$ $\quad x_5' = 1689.\text{—}$

Сам план изгледа: $a = 250000.\text{—}$

Година	Обавезнице у течају	Обавезнице амортизоване	6% интерес		Отплата		Стварни анyитет		Остатак анyитета I		6% интерес на остатак анyитета II		I+II III	
1	10.000	1.900	60.000	—	190.000	—	250.000	—	—	—	—	—	—	-
2	8.100	2.014	48.600	—	201.400	—	250 000	—	—	-	—	-	—	-
3	6.086	2.134	36.516	—	213.400	—	249.916	-	84	—	5	04	89	04
4	3.952	2.263	23.712	—	226 300	—	250.012	—	77	04	4	62	81	66
5	1.689	1.689	10.134	—	168.900	—	179.034	-	—	-	—	-	—	--
	29 827	10 000	178.962	—	1,000.000	—	1,178.962	—	161	04	9	66	170	70

Контроле су исте као и у примеру под а).

Ако се израчунава прво број амортизованих обавезница у појединим годинама, онда се до последње године поступа, као и у примеру под а). Дакле: ако је а анyитет у обавезницама биће:

$$\begin{array}{rrl} a = \dfrac{1000000 \cdot 25}{100 \cdot 100} = & 2500.\text{—} & \text{обавезница} \\ - \dfrac{m\,p}{100} = & 600.\text{—} & „ \\ \hline x_1 = & 1900.\text{—} & „ \\ + \dfrac{x_1 p}{100} = & 114.\text{—} & „ \\ \hline x_2 = & 2014.\text{—} & „ \\ + \dfrac{x_2 p}{100} = & 120.84 & „ \\ \hline x_3 = & 2134.84 & „ \\ + \dfrac{x_3 p}{100} = & 128.09 & „ \\ \hline x_4 = & 2262.93 & „ \end{array}$$

Пошто пети анyитет није 2500.— то се број амортизованих обавезница налази из једначине:

$$x_5 = m - x_1 (1 + III_6^3) = 10000 - 1900 (1 + III_6^3) =$$
$$= 10000 - 8311{,}77 = 1688{,}23$$

Број стварно исплаћених обавезница јесте:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1900.\text{—}; & x_1' = 1900.\text{—} & \\ x_2 = 2014.\text{—}; & x_2' = 2014.\text{—} & \\ x_3 = 2134{,}84; & x_3' = 2134.\text{—} & \text{остаје } 0{,}84 \\ x_4 = 2262{,}93; & x_4' = 2263.\text{—} \ (1+) & \underline{+ \quad 0.93} \quad 1{,}77 \\ & & \text{остаје } 0{,}77 \end{array}$$

		остаје 0.77	
$x_5 = 1688.23$; $x'_5 = 1689.-$	$(+1)$	$+$ 0,23	1.—
$m = 10000.-$; $m = 10000.-$		остаје —	

Овако израчунати бројеви стварно амортизованих обавезница потпуно се слажу са бројевима израчунатим на први начин. Зато је план исти, само без последње три колоне.

c) Теоријски ануитет сукцесивно расте или опада по аритметичкој прогресији.

Задатак. — Зајам од 2000000.— дин., подељен на 2000 обавезница по 1000.— дин., треба да се амортизује за 5 година годишњим ануитетом, који из године у годину расте за $\frac{1}{10}$ ануитета плаћеног у првој години. Интерес 5% годишње плаћа се у виду купона за протеклу годину. Амортизоване обавезнице исплаћују се по номинали. Израдити план отплаћивања. И овај задатак може се решити на два начина.

Ануитет се налази из једначине:

$$K = a\, IV_p^n + \frac{100\, d}{p}\left(IV_p^n - n\, II_p^n\right) \text{ (види чл. 47, једначина 85)}$$

Пошто је

$$d = \frac{a}{10}$$

то је

$$K = a\, IV_p^n +^{*)} \frac{10\, a}{p}\left(IV_p^n - n\, II_p^n\right)$$

А одавде

$$a = K : \left[IV_p^n + \frac{10}{p}\left(IV_p^n - n\, II_p^n\right)\right] = 2000000 : \left[IV_6^5 + \frac{10}{6}\left(IV_6^5 - 5\, II_6^5\right)\right] =$$

$$= 2000000 : 5{,}00581869 = 399535{,}05 \text{ дин.}$$

Ово је ануитет, који се плаћа први пут. Сваки следећи ануитет већи је од претходног за 39953.50 дин.

Ако се усвоји иста нотација као у предњим задацима биће:

1 година:

$a = a_1 = 399535{,}05$ дин.
$-\ i_1 = 120000-$ „
$a_1 - i_1 = 279535{,}05$ дин.

$x_1 = (a_1 - i_1) : \alpha = 279535{,}05 : 1000 = 279{,}53505$; $x'_1 = 279.-$

*) Да ануитет опада за d онда би се место знака + ставио знак —.

2 година:

$a = 399535{,}05$ дин.

+*)	d дин.	39853.50	
+ остатак	„	535,04	
+ 6% интерес	„	31,10	40519.65 „

$a_2 = 440054{,}70$ дин.
$-\ i_2 = 103260.-$ „
$a_2 - i_2 = 336794{,}70$ дин.

$x_2 = (a_2 - i_2) : \alpha = 336794{,}70 : 1000 = 336{,}79470$; $x'_2 = 336.-$

3 година:

$a = 399535{,}05$ дин.

+	2 d дин.	79907.—	
+ остатак	„	794,70	
+ 6% интерес	„	47,68	80749,38 „

$a_3 = 480284{,}43$ дин.
$-\ i_3 = 83100.-$ „
$a_3 - i_3 = 397184{,}43$ дин.

$x_3 = (a_3 - i_3) : \alpha = 397184{,}43 : 1000 = 397{,}18443$; $x'_3 = 397.-$

4 година:

$a = 399535{,}05$ дин.

+	3 d дин.	119860 52	
+ остатак	„	184 43	
+ 6% интерес	„	11.07	120056.02 „

$a_4 = 519591{,}07$ дин.
$-\ i_4 = 59280-$ „
$a_4 - i_4 = 460311{,}07$ дин.

$x_4 = (a_4 - i_4) : \alpha = 460311{,}07 : 1000 = 460{,}31107$; $x'_4 = 460.-$

5 година:

$a = 399535{,}05$ дин.

+	4 d дин.	159814.02	
+ остатак	„	311.07	
+ 6% интерес	„	18.66	160143.75 „

$a_5 = 559678{,}80$ дин.
$-\ i_4 = 31680.-$ „
$a_5 - i_5 = 527998{,}80$ дин.

$x_5 = (a_5 - i_5) : \alpha = 527998{,}80 : 1000 = 527{,}9988$; $x'_5 = 527.-$

*) Да ануитет опада за d онда би се место знака + ставио знак —.

Сам план изгледа:

$$a = 399535{,}05\,; \quad d = 39953\,505$$

Година	Обавезнице у течају	Обавезнице амортизоване	6% интерес		Отплата		Стварни ануитет		Остатак ануитета I		6% интерес на остатак ануитета II		I+II III	
1	2 000	279	120.000	—	279.000	—	399.000	—	535	05	31	10	566	15
2	1.721	336	103.260	—	336.000	—	439 260	—	794	70	47	68	842	38
3	1.385	397	83 100	—	397.000	—	480.100	—	184	43	11	07	195	50
4	988	460	59.280	—	460.000	—	519.280	—	311	07	18	66	329	73
5	528	528	31.680	—	528.000	—	559.680	—	—	—	—	—	—	—
	6.622	2 000	397 320	—	2,000.000	—	2,397.320	—	1.825	25	108	51	1.933	76

Контроле су исте као и у прошлим примерима.

Да се израчуна број амортизованих обавезница у поједеиним годинама треба анутет поделити са номиналом једне обавезнице. На тај начин добија се анутет у обавезницама. Даљи поступак је као и у примеру под а). Дакле

$$a_1 = \frac{a}{\alpha} = 399{,}53505 \text{ обавезница}$$

$$\begin{array}{rrl}
- \dfrac{mp}{100} & = 120.— & " \\
\hline
x_1 & = 279{,}53505 & " \\
+ \dfrac{x_1 p}{100} & = 16{,}77210 & " \\
+ \; d & = 39{,}95350 & " \\
\hline
x_2 & = 336{,}26065 & " \\
+ \dfrac{x_2 p}{100} & = 20{,}17564 & " \\
+ \; d & = 39{,}95350 & " \\
\hline
x_3 & = 396{,}38979 & " \\
+ \dfrac{x_3 p}{100} & = 23{,}78339 & " \\
+ \; d & = 39{,}95350 & " \\
\hline
x_4 & = 460{,}12668 & " \\
+ \dfrac{x_4 p}{100} & = 27{,}60760 & " \\
+ \; d & = 39{,}95350 & " \\
\hline
x_5 & = 527{,}68778 & " \\
+ \dfrac{x_5 p}{100} & = 31{,}66127 & " \\
\hline
a_5 & = 559{,}34905 & "
\end{array}$$

Да се провери тачност израчунатих бројева треба на број теоријски амортизованих обавезница додати интерес, па ако је тако добивена сума последњи ануитет онда су бројеви добро израчунати. У овом примеру је:

$$a_5 = a_1 + 4\,d = 399{,}53505 + 4 \cdot 39{,}95350 =$$
$$= 399{,}53505 + 159{,}81400 = 559{,}34905$$

Према томе нађени бројеви су добри.
Број стварно исплаћених обавезница биће:

$$\begin{array}{lll}
x_1 = 279{,}53505; \; x_1' = \; 279.— & \text{остаје} \; 0\,53505 & \\
x_2 = 336{,}26065; \; x_2' = \; 336.— & \quad + \quad 0{,}26065 & 0.79570 \\
\hline
 & \text{остаје} \; 0{,}79570 & \\
x_3 = 396{,}38979; \; x_3' = \; 397.— \; (+1) & \quad + \quad 0.38979 & 1.18549 \\
\hline
 & \text{остаје} \; 0{,}18549 & \\
x_4 = 460{,}12668; \; x_4' = \; 460.— & \quad + \quad 0.12668 & 0.31217 \\
\hline
x_5 = 527{,}68778; \; x_5' = \; 528.— \; (+1) & \quad + \quad 0\,68778 & 0.99995 \\
m = 1999{,}99995; \; m = 2000.— & &
\end{array}$$

Бројеви стварно исплаћених обавезница у појединим годинама потпуно се слажу са бројевима израчунатим на први начин — а то мора бити, јер у противном рад није добар, па ће и план бити исти само без последње три колоне.

При изналажењу броја амортизованих обавезница са k плаћених ануитета треба сабрати x_1 до x_k.

Пошто је:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1 \\
x_2 &= x_1 v + \beta \\
x_3 &= x_1 v^2 + \beta v + \beta \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_k &= x_1 v^{k-1} + \beta v^{k-2} + \beta^{k-3} + \dots + \beta v + \beta
\end{aligned}$$

где је β диференција ануитета у обавезницама тј.

$$\beta = \frac{d}{\alpha}$$

ако је d диференција ануитета у динарима а α номинала једне обавезнице.

Сабирањем ових једначина добија се:

$$O_k = x_1 (1 + v + v^2 + \dots + v^{k-1}) + \beta\,[v^{k-2} + 2\,v^{k-3} + \dots$$
$$\dots + (k-3)\,v^2 + (k-2)\,v + (k-1)]$$

тј.
$$O_k = x_1 \left(1 + III_p^{k-1}\right) + \frac{100\,\beta}{p}\left[III_p^{k-1} - (k-1)\right]$$

Стављајући $k = 1, 2, 3, \dots, n$ добија се број теоријски исплаћених обавезница. Број стварно исплаћених обавезница биће колико тако нађени број има целих.

d) Теоријски ануитет периодично расте или опада по аритметичкој прогресији.

Задатак. — Зајам од 2000000.— дин., подељен на 2000 обавезница по 1000.— дин., треба да се отплати за 9 година са интересом 5% годишње. Интерес се плаћа у виду купона за протеклу годину. Амортизоване обавезнице исплаћују се по номинали. Ануитет се плаћа годишње и сваке 3 године повећава се за једну петину ануитета, који се плаћа у току прве три године. Израдити план отплаћивања.

Теоријски ануитет, који се плаћа у току прве 3 године, добија се из једначине:

$$K = a_1 IV_p^n + \frac{100\,d}{p}\left[II_p^r IV_p^n V_p^r - \tfrac{n}{r} II_p^n\right] \text{ (види чл. 48, једн. 92)}$$

У овом задатку је:

$$K = 2000000,\ r = 3,\ p = 5,\ n = 9,\ d = a_1 : 5$$

па је

$$a_1 = 2000000 : \{IV_5^9 + 4\,[II_5^3 IV_5^9 V_5^3 - 3\,II_5^9]\} =$$
$$= 2000000 : 8{,}39116212 = 238346{,}01 \text{ дин.}$$

Теоријски ануитет друге 3 године биће:

$$a_2 = a_1 + \frac{a_1}{5} = 238346{,}01 + 47669{,}20 = 286015{,}21 \text{ дин.}$$

А треће 3 године:

$$a_3 = a_2 + \frac{a_1}{5} = 286015{,}21 + 47669{,}20 = 333684{,}41 \text{ дин.}$$

Поступак при изради амортизационог плана исти је као и код претходних примера. Сам план изгледа:

Година	Обавезнице у течају	Обавезнице амортизоване	5% интерес		Отплата		Стварни ануитет		Остатак ануитета I		5% интерес на остатак ануитета II		I+II III	
1	2000	138	100.000	—	138.000	—	238.000	—	346	01	17	30	363	31
2	1862	145	93.100		145.000	—	238.100	—	609	31	30	47	639	79
3	1717	153	85.850	—	153.000	—	238.850	—	135	80	6	79	142	59
4	1564	207	78.200	—	207.000	—	285.200	—	957	80	47	89	1.005	69
5	1357	219	67.850	—	219.000	—	286.850	—	170	96	8	54	179	44
6	1138	229	56.900	—	229.000	—	285.900	—	294	65	14	73	309	38
7	909	288	45.450		288.000		333.450	—	543	79	27	19	570	98
8	621	303	31.050	—	303.000	—	334.050	—	205	39	10	27	215	66
9	318	318	15.900	—	318.000		333.900	—	+0	07	—	—	—	—
	11.486	2.000	574.300	—	2.000.000		2.574.300	—	3.263	73	163	18	3.426	84

Контрола плана је као и у ранијим примерима.

Број амортизованих обавезница израчунава се на други начин као и у претходним примерима. Али у овом случају треба водити рачуна о промени ануитета. Због тога је:

$$x_{kr+s} = x_{kr+s-1}\, v \pm d$$

где k може узети вредности: 0, 1, 2, ..., $\frac{n}{r} - 1$, а s вредности: 1, 2, 3, ..., r, и где је d диференција ануитета после сваких r година. Имајући у виду да је у предњој једначини d различито од нуле само у случају када је $s = 1$, а да је за вредности $s = 2, 3, \ldots, r$, ова диференција нула и да је у овом примеру $r = 3$ биће:

За $k = 0,\ s = 2,\ x_2 = x_1\, v = \left(a_1 - \frac{mp}{100}\right) v = (238{,}346 - 100)\,1{,}05 = 145{,}263$

„ $k = 0,\ s = 3,\ x_3 = x_2\, v = 145{,}263 \cdot 1{,}05 = 152{,}526$

„ $k = 1,\ s = 1,\ x_4 = x_3\, v + d = 152{,}526 \cdot 1{,}05 + 47{,}669 = 207{,}821$

„ $k = 1,\ s = 2,\ x_5 = x_4\, v = 218{,}212$

„ $k = 1,\ s = 3,\ x_6 = x_5\, v = 229{,}123$

„ $k = 2,\ s = 1,\ x_7 = x_6\, v + d = 288{,}258$

„ $k = 2,\ s = 2,\ x_8 = x_7\, v = 302{,}671$

„ $k = 2,\ s = 3,\ x_9 = x_8\, v = 317{,}805$

За заокругливање израчунатих обавезница и за план важи све што је речено у ранијим примерима.

При изналажењу отплаћеног дуга и остатка дуга после m плаћених ануитета могу се појавити и следећи случајеви:

a) $k \leq r$
$$O_k = x_1\,(1 + III_p^{k-1});\quad R_{n-k} = m - O_k\,^{*)}$$

b) $r < k < 2r$
$$O_k = x_1\,(1 + III_p^{r-1}) + x_{r+1}\,(1 + III_p^{k-r-1})$$

c) $k = 2r$
$$O_k = (1 + III_p^{r-1})\,(x_1 + x_{r+1})$$

d) $2r < k < 3r$
$$O_k = (1 + III_p^{r-1})\,(x_1 + x_{r+1}) + x_{2r+1}\,(1 + III_p^{k-2r-1})$$

. . . .

e) $(n - r) < k < n$
$$O_k = (1 + III_p^{r-1})(x_1 + x_{r+1} + x_{2r+1} + \ldots + x_{n-2r+1}) +$$
$$+ x_{n-r+1}\,(1 + III_p^{k-n+r-1})$$

f) $k = n$
$$O_k = O_n = m = (1 + III_p^{r-1})\,(x_1 + x_{r+1} + x_{2r+1} + \ldots + x_{n-r+1})$$

---

*) Ова једначина има исти облик у свим случајевима, па је зато нећу понављати.

У овом примеру је:

$$O_1 = x_1 = 138{,}346;$$
$$O_3 = x_1\left(1 + III_5^2\right) = 436{,}136;$$
$$O_4 = x_1\left(1 + III_5^2\right) + x_4 = 643{,}958;$$
$$O_6 = \left(1 + III_5^2\right)(x_1 + x_4) = 1091.29;$$
$$O_8 = \left(1 + III_5^2\right)(x_1 + x_4) + x_7\left(1 + III_5^1\right) = 1682{,}20;$$
$$O_9 = \left(1 + III_5^2\right)(x_1 + x_4 + x_7) = 2000;$$

$$O'_1 = 138.—;\quad R'_8 = 2000 - 138 = 1862.—$$
$$O'_3 = 436.—;\quad R'_6 = 2000 - 436 = 1564.—$$
$$O'_4 = 643.—;\quad R'_5 = 2000 - 643 = 1357.—$$
$$O'_6 = 1091.—;\quad R'_3 = 2000 - 1091 = 909.—$$
$$O'_8 = 1682.—;\quad R'_1 = 2000 - 1682 = 318.—$$
$$O'_9 = 2000.—;\quad R'_0 = 2000 - 2000 = 0$$

е) Теоријски ануитет расте или опада из године у годину по геометријској прогресији.

Задатак. — Зајам од 1,000.000.— дин., подељен на обавезнице по 500.— дин., треба да се амортизује за 4 године са интересом 5% годишње. Интерес да се плаћа у виду купона за протеклу годину. Ануитет да расте из године у годину за 10% од ануитета из предходне године. Амортизоване обавезнице исплаћују се по номинали. Израдити амортизациони план.

Теоријски ануитет који се плаћа прве године добија се из једначине:

$$a_1 = K\frac{v^n(q - v)}{q^n - v^n}$$

Овде је: $K = 1{,}000.000.—$, $n = 4$, $q = 1{,}10$, $v = 1{,}05$, па је:

$$a_1 = 1000000\,\frac{1{,}05^4\,(1{,}10 - 1.05)}{1{,}10^4 - 1{,}05^4} = 244476{,}43 \text{ дин};$$

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot 1{,}10 = 268924.07 \text{ дин}; \\ a_3 &= a_2 \cdot 1{,}10 = 295816{,}47 \quad " \\ a_4 &= a_3 \cdot 1{,}10 = 325398{,}12 \quad " \end{aligned}$$

Број амортизованих обавезница налази се на следећи начин:

1 година:

$$\begin{aligned} a_1 = a'_1 &= 244476{,}43 \text{ дин.} \\ - i_1 &= 50000{,}— \quad " \\ \hline a'_1 - i_1 &= 194476{,}43 \quad " \end{aligned}$$

$$x_1 = (a'_1 - i_1) : \alpha = 194476{,}43 : 500 = 388{,}95;\qquad x'_1 = 388.—$$

2 година: $\qquad a_2 = 268924{,}07$ дин.

$$\begin{aligned} &+ \text{остатак} \quad \text{дин. } 476.43 \\ &+ 5\%\ \text{интерес} \quad "\ \ 23\,82 \end{aligned} \qquad 500.25 \quad "$$

$$\begin{aligned} a'_2 &= 269424\,32 \text{ дин.} \\ - i_2 &= 40300.— \quad " \\ \hline a'_2 - i_2 &= 229124{,}32 \quad " \end{aligned}$$

$$x_2 = (a'_2 - i_2) : \alpha = 229124{,}32 : 500 = 458{,}25;\qquad x'_2 = 458{,}—$$

3 година: $\qquad a_3 = 295816{,}47$ дин.

$$\begin{aligned} &+ \text{остатак} \quad \text{дин. } 124.32 \\ &+ 5\%\ \text{интерес} \quad "\ \ 6.22 \end{aligned} \qquad 130.54 \quad "$$

$$\begin{aligned} a'_3 &= 295947.01 \text{ дин.} \\ - i_3 &= 28850.— \quad " \\ \hline a'_3 - i_3 &= 267097{,}01 \text{ дин.} \end{aligned}$$

$$x_3 = (a'_3 - i_3) : \alpha = 267097{,}01 : 500 = 534{,}19;\qquad x'_3 = 534.—$$

4 година: $\qquad a_4 = 325398{,}12$ дин.

$$\begin{aligned} &+ \text{остатак} \quad \text{дин. } 95{,}01 \\ &+ 5\%\ \text{интерес} \quad "\ \ 4.75 \end{aligned} \qquad 99.76 \quad "$$

$$\begin{aligned} a'_4 &= 325497{,}88 \text{ дин.} \\ - i_4 &= 15500.— \quad " \\ \hline a'_4 - i_4 &= 309997{,}88 \text{ дин.} \end{aligned}$$

$$x_4 = (a'_4 - i_4) : \alpha = 309997{,}88 : 500 = 619{,}99;\qquad x'_4 = 620.—$$

Амортизациони план биће:

Година	Обавезнице		5% интерес		Отплата		Стварни ануитет		Остатак ануитета		5% интерес на остатак ануитета		I+II	
	у течају	амортизоване							I		II		III	
1	2.000	388	50.000	—	194.000	—	244 000	—	476	43	23	82	500	25
2	1.612	458	40.300	—	229.000	—	269.300	—	124	32	6	22	130	54
3	1.154	534	28.850	—	267.000	—	295.850	—	95	01	4	75	99	76
4	620	620	15 500	—	310.000	—	325 500	—	—	–	—	–	—	
	5.386	2.000	134.650	—	1,000.000	–	1,134 650	–	695	76	34	79	730	55

Контрола плана је иста као и у ранијим примерима.

Примедба. — Када би ануитет опадао онда би q било мање од 1. Рад је исти као и код рашћења ануитета.

f) Теоријски ануитет периодично расте или опада по геометријској прогресији.

Задатак. — Зајам од 20000000.—, подељен на обавезнице по 1000.— дин., треба да се амортизује за 6 година годишњим ануитетом са интересом 4% годишње. Интерес се плаћа у виду купона за протеклу годину. Ануитет сваке 2 године опада за 20% ануитета из предходне 2 године. Израдити план отплаћивања.

Теоријски ануитет, који се плаћа прве две године, добија се из једначине:

$$a_1 = K\, V_p^r \frac{v^{n-r}(v^n - q)}{v^n - q^{\frac{n}{r}}} \quad \text{(види чл. 50)}$$

Овде је: $K = 20000000.—$, $r = 2$, $p = 4$, $n = 6$, $q = \frac{8}{10}$, $v = 1{,}04$, па је:

$$a_1 = 20000000\, V_4^2 \frac{1.04^4\,(1{,}04^2 - \frac{8}{10})}{10{,}4^6 - (\frac{8}{10})^3} = 20000000 \cdot 0{,}23185949 =$$
$$= 4637189{,}80 \text{ дин.}$$

Ануитет, који се плаћа друге две године, јесте:

$$a_2 = a_1 - \frac{a_1\, 20}{100} = 4637189{,}80 - 927437{,}96 = 3709751{,}84 \text{ дин.}$$

А ануитет, који се плаћа треће две године, јесте:

$$a_3 = a_2 - \frac{a_2\, 20}{100} = 3709751{,}84 - 741950{,}37 = 2967801{,}47 \text{ дин.}$$

Број амортизованих обавезница у појединим годинама добија се на познати нам начин. Дакле:

1 година:

$$a_1 = a_1' = 4637189.80 \text{ дин.}$$
$$-\, i_1 = 800000.— \text{ „}$$
$$a_1' - i_1 = 3837189{,}80 \text{ дин.}$$

$$x_1 = (a_1' - i_1) : \alpha = 3837189{,}80 : 1000 = 3837{,}18980; \quad x_1' = 3837.—$$

2 година:

$$a_1 = 4637189{,}80 \text{ дин.}$$
$$+ \text{ остатак дин. } 189{,}80$$
$$+ 4\% \text{ интерес „ } 7.59 \qquad 197.39 \text{ „}$$
$$a_2' = 4637387{,}19 \text{ дин.}$$
$$-\, i_2 = 646520.— \text{ „}$$
$$a_2' - i_2 = 3990867{,}19 \text{ дин.}$$

$$x_2 = (a_2' - i_2) : \alpha = 3990867{,}19 : 1000 = 3990{,}86719; \quad x_2' = 3990.—$$

3 година:

$$a_2 = 3709751{,}84 \text{ дин.}$$
$$+ \text{ остатак дин. } 867.19$$
$$+ 4\% \text{ интерес „ } 34.69 \qquad 901{,}88 \text{ „}$$
$$a_3' = 3710653{,}72 \text{ дин.}$$
$$-\, i_3 = 486920.— \text{ „}$$
$$a_3' - i_3 = 3223733{,}72 \text{ дин.}$$

$$x_3 = (a_3' - i_3) : \alpha = 3223733{,}72 : 1000 = 3223{,}73372; \quad x_3' = 3223.—$$

4 година:

$$a_2 = 3709751{,}84 \text{ дин.}$$
$$+ \text{ остатак дин. } 751.84$$
$$+ 4\% \text{ интерес „ } 30.07 \qquad 781{,}91 \text{ „}$$
$$a_4' = 3710533{,}75 \text{ дин.}$$
$$-\, i_4 = 358000.— \text{ „}$$
$$a_4' - i_4 = 3352533{,}75 \text{ дин.}$$

$$x_4 = (a_4' - i_4) : \alpha = 3352533{,}75 : 1000 = 3352{,}53375; \quad x_4' = 3352.—$$

5 година:

$$a_3 = 2967801{,}47 \text{ дин.}$$
$$+ \text{ остатак дин. } 533{,}75$$
$$+ 4\% \text{ интерес „ } 21.35 \qquad 555.10 \text{ „}$$
$$a_5' = 2968356{,}57 \text{ дин.}$$
$$-\, i_5 = 223920.— \text{ „}$$
$$a_5' - i_5 = 2744436{,}57 \text{ дин.}$$

$$x_5 = (a_5' - i_5) : \alpha = 2744436{,}57 : 1000 = 2744{,}43657; \quad x_5' = 2744.—$$

6 година:

$$a_3 = 2967801{,}47 \text{ дин.}$$
$$+ \text{ остатак дин. } 436{,}57$$
$$+ 4\% \text{ интерес „ } 17{,}46 \qquad 454.03 \text{ „}$$
$$a_6' = 2968255{,}50 \text{ дин.}$$
$$-\, i_6 = 114160.— \text{ „}$$
$$a_6' - i_6 = 2854095{,}50 \text{ дин.}$$

$$x_6 = (a_6' - i_6) : \alpha = 2854095{,}50 : 1000 = 2854{,}0955; \quad x_6' = 2854.—$$

Амортизациони план је:

Година	Обавезнице		4% интерес		Отплата		Стварни ануитет		Остатак ануитета		4% интерес на остатак ануитета		I+II	
	у течају	амортизоване							I		II		III	
1	20.000	3.837	800.000	—	3,837.000	—	4,637.000	—	189	80	7	59	197	39
2	16.163	3.990	646.520	—	3,990.000	—	4,636.520	—	867	19	34	69	901	88
3	12.173	3.223	486.920	—	3,223.000	—	3,709.920	—	751	84	30	07	781	91
4	8.950	3.352	358.000	—	3,352.000		3,710.000	—	533	75	21	35	555	10
5	5.598	2.744	223.920	—	2,744.000	—	2,967.920	—	436	57	17	46	454	03
6	2.854	2.854	114.160	—	2,854.000	—	2,968.160	—	—	—	—	—	—	—
	65.738	20.000	2,629.520	—	20,000.000	—	22,629.420	—	2.779	15	111	16	2.890	31

Чл. 57 Амортизоване обавезнице исплаћују се са ажијом. И овде могу бити сви случајеви из чл. 56, али ћемо узети само случај где се теоријски ануитет рачуна тачно по таблици.

Задатак. — Зајам од 2,000.000.— дин., подељен на обавезнице по 1000.—. дин., треба да се отплати за 4 године годишњим једнаким теоријским ануитетом. Интерес 6% плаћа се за протеклу годину у виду купона. Амортизоване обавезнице исплаћују се са ажијом 200 дин. по комаду. Израдити план отплаћивања.

Ако усвојимо нотацију напред уобичајену додајући томе још и то да је α_1 број по колико се исплаћује једна амортизована обавезница, онда је у општем случају:

$$a = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)\frac{\alpha p}{100} + x_1\alpha_1$$

$$a = (x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n)\frac{\alpha p}{100} + x_2\alpha_1$$

$$a = (x_3 + x_4 + x_5 + \ldots + x_n)\frac{\alpha p}{100} + x_3\alpha_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a = (x_{n-1} + x_n)\frac{\alpha p}{100} + x_{n-1}\alpha_1$$

$$a = x_n\frac{\alpha p}{100} + x_n\alpha_1$$

Одузимањем по две узастопне једначине добија се следећи низ једначина:

$$x_2 = x_1\left(1 + \frac{\alpha p}{100\alpha_1}\right) = x_1 v_1$$

$$x_3 = x_2\left(1 + \frac{\alpha p}{100\alpha_1}\right) = x_2 v_1 = x_1 v_1^2$$

$$x_4 = x_3\left(1 + \frac{\alpha p}{100\alpha_1}\right) = x_3 v_1 = x_1 v_1^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = x_{n-1}\left(1 + \frac{\alpha p}{100\alpha_1}\right) = x_{n-1} v_1 = x_1 v_1^{n-i},$$

где је
$$v_1 = 1 + \frac{п}{100} = 1 + \frac{\alpha p}{100\alpha_1}$$

Из ове једначине излази:

$$п = \frac{\alpha p}{\alpha_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (101)$$

Ова једначина нам каже да могу бити ова три случаја:

1) За $\alpha_1 = \alpha$ биће $п = p$. Амортизоване обавезнице исплаћују се по номинали.

2) За $\alpha_1 > \alpha$ биће $п < p$. Амортизоване обавезнице исплаћују се са ажијом $\alpha_1 - \alpha$.

3) За $\alpha_1 < \alpha$ биће $п > p$. Амортизоване обавезнице исплаћује се са дисажијом $\alpha - \alpha_1$.

До једначине:

$$п = \frac{\alpha p}{\alpha_1}$$

може се доћи и на овај начин: α дин. са интересном стопом p треба да донесу за годину дана исто толико интереса колико и α_1 са интересном стопом $п$; дакле из овог следује једначина:

$$\frac{\alpha p}{100} = \frac{\alpha_1 п}{100}$$

А одавде, после множења са 100 и дељења са α_1, следује:

$$п = \frac{\alpha p}{\alpha_1}$$

Са интересном стопом $п$, а не p, треба рачунати ануитет на $m\alpha_1$ дин.; дакле

$$a = m\,\alpha_1\, V_п^n,$$

од тог ануитета одузети интерес $\frac{m\alpha p}{100}$ и ту разлику поделити са α_1. Резултат дељења биће неки разломак. Број целих у том разломку јесте број стварно амортизованих обавезница са првим плаћеним ануитетом. Децимални делови овог разломка помножени са α_1 дају остатак првог теоријског ануитета. Тај остатак се укамати са $п$ и дода теоријском ануитету. На тај начин добија се теоријска сума која се има употребити за други ануитет. Поступајући даље као и при првом ануитету израдићемо цео план отплаћивања. У овом примеру је:

$$п = \frac{1000 \cdot 6}{1200} = 5\%; \quad a = 2400000\, V_5^4 = 676828{,}39 \text{ дин., па је:}$$

1 година:

$$a = a_1 = 676828{,}39 \text{ дин.}$$
$$-\; i_1 = 120000.— \;\;"$$
$$a_1 - i_1 = 556828{,}39 \text{ дин.}$$

$$x_1 = (a_1 - i_1) : \alpha_1 = 556828{,}39 : 1200 = 464{,}0236; \quad x_1' = 464.—$$

2 година: $a = 676828{,}39$ дин.

+ остатак	дин.	28,39	
+ 5% интерес	„	1.42	29,81 „

$$a_2 = 676858.20 \text{ дин.}$$
$$- i_2 = 92160.— \text{ „}$$
$$a_2 - i_2 = 584698{,}20 \text{ дин.}$$

$$x_2 = (a_2 - i_2) : \alpha_1 = 584698{,}20 : 1200 = 487{,}2485; \quad x_2' = 487.—$$

3 година: $a = 676828{,}39$ дин.

+ остатак	дин.	298.20	
+ 5% интерес	„	14,91	313,11 „

$$a_3 = 677141{,}50 \text{ дин.}$$
$$- i_3 = 62940.— \text{ „}$$
$$a_3 - i_3 = 614201{,}50 \text{ дин.}$$

$$x_3 = (a_3 - i_3) : \alpha_1 = 614201{,}50 : 1200 = 511{,}8346; \quad x_3' = 511.—$$

4 година: $a = 676828{,}39$ дин.

+ остатак	дин.	1001,50	
+ 5% интерес	„	50.08	1051.58 „

$$a_4 = 677879{,}97 \text{ дин.}$$
$$- i_4 = 32280.— \text{ „}$$
$$a_4 - i_4 = 645599{,}97 \text{ дин.}$$

$$x_4 = (a_4 - i_4) : \alpha_1 = 645600^{*)} : 1200 = 538.—; \quad x_4' = 538.—$$

Уношењем ових података у план добија се следећи план:

Година	Обавезнице у течају	Обавезнице амортизоване	6% интерес		Отплата		Ажија		Стварни ануитет		Остатак ануитета I		5% интерес на остатак ануитета II		I+II III	
1	2.000	464	120.000	—	464.000	—	92 800	—	676 800	—	28	39	1	42	29	81
2	1.536	487	92.160	—	489.000	—	97.400	—	676.560	—	298	20	14	91	313	11
3	1.049	511	62.940	—	511.000		102.200	—	676.140	—	1.001	50	50	08	1.051	58
4	538	538	32 280	—	538 000	-	107.600	—	677 880	-	0	03	—		—	
	5.123	2.000	307.380	—	2,000.000	—	400.000	—	2,707.380	—	1.328	09	66	41	1.394	50

Контроле плана су исте са изменом да је збир интереса, отплата и ажије једнак збиру стварних ануитета, јер је у ранијим примерима збир стварних ануитета био једнак збиру интереса и отплата, пошто ажије није ни било.

*) Додано 0,03 колико се показао мањак услед ирационалности бројева.

Број амортизованих обавезница у појединим годинама може се, на основу напред изведених једначина, израчунати и на овај начин:

Пошто је:

$$a = \alpha_1 x_1 + m \frac{\alpha_1 \pi}{100}$$

то се, после деобе са α_1, одавде добија једначина:

$$x_1 = \frac{a}{\alpha_1} - \frac{m \pi}{100},$$

чија десна страна даје нам број рачунски амортизованих обавезница у првој години амортизације.

Пошто је ануитет у динарима

$$a = m \alpha_1 V_\pi^n$$

то је

$$\frac{a}{\alpha_1} = m V_\pi^n$$

ануитет у обавезницама са интересном стопом π.

Када се на овај начин израчуна ануитет, онда се број рачунски амортизованих обавезница израчунава овако:

$$\frac{a}{\alpha_1} = 2000 \, V_5^4 = 564{,}0237 \text{ обавезница}$$
$$- \frac{m\pi}{100} = \frac{2000 \cdot 5}{100} = 100.— \text{ „}$$
$$x_1 = 464{,}0237 \text{ „}$$
$$+ \frac{x_1 \pi}{100} = 23{,}2012 \text{ „}$$
$$x_2 = 487{,}2249 \text{ „}$$
$$+ \frac{x_2 \pi}{100} = 24.3612 \text{ „}$$
$$x_3 = 511{,}5861 \text{ „}$$
$$+ \frac{x_3 \pi}{100} = 25{,}5793 \text{ „}$$
$$x_4 = 537{,}1654 \text{ „}$$
$$+ \frac{x_4 \pi}{100} = 26{,}8583 \text{ „}$$
$$a = 564{,}0237 \text{ „}$$

Број стварно исплаћених обавезница јесте:

$x_1 = 464{,}0236;\ x_1' = 464.—$	остаје	0,0237	
$x_2 = 487{,}2249;\ x_2' = 487.—$	+	0.2249	0,2486
	остаје	0,2486	

	остаје	0,2486
$x_3 = 511{,}5861; \; x'_3 = 511.—$	$+$ 0 5861	0,8347
	остаје	0,8347
$x_4 = 537{,}1654; \; x'_4 = 537.— (+1)$	$+$ 0,1654	1,0001
$m = 2000{,}0001 \quad m = 2000.—$	остаје	0,0001

Број стварно амортизованих обавезница у појединим годинама исти је као и код рачунања на први начин, па ће и амортизациони план бити исти, само без последње три колоне.

Број теоријски исплаћених обавезница израчунава се из једначине:

$$O_r = x_1 \left(1 + III_n^{r-1}\right),$$

где r означава број r првих плаћених ануитета, а O_r број теоријски амортизованих обавезница са r првих плаћених ануитета. Ако је овај број мешовит разломак онда број целих је број стварно исплаћених обавезница.

Број теоријски још неисплаћених обавезница израчунава из једначине:

$$R_{n-r} = m - O_r$$

или из једначине:

$$R_{n-r} = \frac{a}{\alpha_1} IV_n^{n-r} = m\, V_n^n\, IV_n^{n-r}$$

Прва једначина је општа, а друга њен специјалан случај, кад се теоријски ануитет $\frac{a}{\alpha_1}$ рачуна тачно по таблици.

Ако је R_{n-r} мешовит разломак онда је број још неисплаћених обавезница са r плаћених ануитета број целих више један.

Чл. 58 Амортизоване обавезнице исплаћују се са дисажијом.

Задатак. — Нека се амортизоване обавезнице из задатка у чл. 57 исплаћују по 800.— дин. тј. са дисажијом 200 дин. по комаду.

Све изведене једначине у чл. 57 важе и у овом случају. Овде је:

$$n = \frac{\alpha\, p}{\alpha_1} = \frac{1000 \cdot 6}{800} = 7\,{}^1\!/_2\,\%,$$

па је:

$$a = m\,\alpha_1\, V_n^n = 2000 \cdot 800\, V_n^n = 1600000\, V_{7^1/_2}^4 = 477708{,}02 \text{ дин.}$$

Зато је:

1 година:

$$a = a_1 = 477708{,}02 \text{ дин.}$$
$$- i_1 = 120000.— \;\;„$$
$$a_1 - i_1 = 357708{,}02 \text{ дин.}$$

$$x_1 = (a_1 - i_1) : \alpha_1 = 357708{,}02 : 800 = 447{,}1350; \quad x'_1 = 447.—$$

2 година: $a = 477708{,}02$ дин.

$+$ остатак	дин.	108.02	
$+ 7\,{}^1\!/_2\%$ интерес	„	8,10	116,12 „
			$a_2 = 477824{,}14$ дин.
			$- i_2 = 93180.—$ „
			$a_2 - i_2 = 384644{,}14$ дин.

$$x_2 = (a_2 - i_2) : \alpha_1 = 384644{,}14 : 800 = 480{,}8052; \quad x'_2 = 480.—$$

3 година: $a = 477708{,}02$ дин.

$+$ остатак	дин.	644,14	
$+ 7\,{}^1\!/_2\%$ интерес	„	48,41	692,45 „
			$a_3 = 478400{,}47$ дин.
			$- i_3 = 64380.—$ „
			$a_3 - i_3 = 414020{,}47$ дин.

$$x_3 = (a_3 - i_3) : \alpha_1 = 414020{,}47 : 800 = 517{,}5256; \quad x'_3 = 517.—$$

4 година: $a = 477708{,}02$ дин.

$+$ остатак	дин.	420,47	
$+ 7\,{}^1\!/_2\%$ интерес	„	31,54	452,01 „
			$a_4 = 478160{,}03$ дин.
			$- i_4 = 33360.—$ „
			$a_4 - i_4 = 444800{,}03$ дин.

$$x_4 = (a_4 - i_4) : \alpha_1 = (444800{,}03 - 0{,}03) : 800 = 556.—; \quad x'_4 = 556.—$$

Ако се ови податци унесу у план онда план изгледа:

Година	Обавезнице: у течају	Обавезнице: амортизоване	6% интерес		Отплата		Дисажија		Стварни ануитет		Остатак ануитета I		$7\,{}^1\!/_2\%$ интерес на остатак ануитета II		I+II III	
1	2.000	447	120.000	—	447.000	—	89.400	—	477.600	—	108	02	8	10	116	12
2	1.553	480	93.180	—	480.000	—	97.000		477.180	—	644	14	48	31	692	45
3	1.073	517	64.380	—	517.000	—	103.400	—	477.980	—	420	47	31	54	452	01
4	556	556	33.360	—	556.000	—	111.200	—	478.160	—	+0	03 **)	—	—	—	—
	5.182	2.000	310.920	—	2,000.000	—	400.000	—	1,910.920	— *)	1.172	63	87	95	1.260	58

Контрола плана је као и у ранијим примерима.

*) Стварни ануитет добија се кад се интерес и отплата саберу па од тог збира одузме дисажија.

**) 0,03 дин. услед ирационалности бројева претичу.

Број амортизованих обавезница у појединим годинама амортизације може се израчунати и на следећи начин:

$$\frac{a}{\alpha_1} = m\,V_n^n = 2000\,V_{7\,1/2}^4 = 597{,}1350 \text{ обавезница}$$

$$-\ \frac{m\,\text{п}}{100} = \frac{2000 \cdot 7.5}{100} = 150.— \quad „$$

$$x_1 = 447{,}1350 \quad „$$

$$+\ \frac{x_1 \text{п}}{100} = 33{,}5351 \quad „$$

$$x_2 = 480{,}6701 \quad „$$

$$+\ \frac{x_2 \text{п}}{100} = 36{,}0502 \quad „$$

$$x_3 = 516{,}7203 \quad „$$

$$+\ \frac{x_3 \text{п}}{100} = 38{,}7540 \quad „$$

$$x_4 = 555{,}4743 \quad „$$

$$+\ \frac{x_4 \text{п}}{100} = 41{,}6606 \quad „$$

$$a = 497{,}1349 \quad „$$

Број стварно исплаћених обавезница јесте:

$x_1 = 447{,}1350$;	$x_1' = 447.—$		остаје	0,1350	
$x_2 = 480{,}6701$;	$x_2' = 480.—$		+	0.6701	0,8051
			остаје	0,8051	
$x_3 = 516{,}7203$;	$x_3' = 517.—$	(+1)	+	0.7203	1.5254
			остаје	0,5254	
$x_4 = 555{,}4743$;	$x_4' = 556.—$	(+1)	+	0.4743	0.9997
$m = 1999{,}9997$;	$m = 2000.—$		недостаје	0,0003	

И у овом случају број амортизованих обавезница са r првих ануитета добија се из једначине:

$$O_r = x_1\left(1 + III_n^{r-1}\right),$$

а број још неисплаћених из једначине:

$$R_{n-r} = m - O_r$$

или
$$R_{n-r} = \frac{a}{\alpha_1}\,IV_n^{n-r} = m\,V_n^n\,IV_n^{n-r}$$

Зајам је подељен на више група обавезница

Чл. 59 Амортизоване обавезнице исплаћују се по номинали. У погледу ануитета као и броја по колико се исплаћују амортизоване обавезнице овде могу бити сви случајеви из чл. 56, 57 и 58 али ћу узети само случај када је теориски ануитет константан и када се амортизоване обавезнице исплаћују по номинали.

Задатак. — Зајам од 1,500.000.— дин., подељен на 1000 обавезница по 500 дин., 1.500 обавезница по 400 дин., и 2.000 обавезница по 200 дин., треба да се амортизује за 4 године са 5% годишње. Интерес да се плаћа у виду купона за протеклу годину. Амортизација да се врши једанпут годишње. Амортизоване обавезнице да се исплаћују по номинали. Израдити план отплаћивања.

Овде за сваку групу треба наћи по колико се обавезница амортизује у којој години.

1 група:
$$a_1 = m_1 V_p^n = 1000\,V_5^4 = 282{,}0118 \text{ обавезница}$$

$$-\ \frac{m_1\,p}{100} = \frac{1000 \cdot 5}{100} = 50.— \quad „$$

$$x_1 = 232{,}0118 \quad „$$

$$+\ \frac{x_1\,p}{100} = 11{,}6006 \quad „$$

$$x_2 = 243{,}6124 \quad „$$

$$+\ \frac{x_2\,p}{100} = 12{,}1806 \quad „$$

$$x_3 = 255{,}7930 \quad „$$

$$+\ \frac{x_3\,p}{100} = 12{,}7897 \quad „$$

$$x_4 = 268{,}5827 \quad „$$

$$+\ \frac{x_4\,p}{100} = 13{,}4291 \quad „$$

$$a_1 = 282{,}0118 \quad „$$

Ово су бројеви теориски исплаћених обавезница. Стварно биће:

$x_1 = 232{,}0118$;	$x_1' = 232.—$		Остаје	0,0118	
$x_2 = 243{,}6124$;	$x_2' = 243.—$		+	0.6124	0,6242
			Остаје	0,6242	
$x_3 = 255{,}7930$;	$x_3' = 256.—$	(+1)	+	0.7930	1,4172
			Остаје	0,4172	
$x_4 = 268.5827$;	$x_4' = 269.—$	(+1)	+	0 5827	0,9999
$m = 999{,}9999$;	$m = 1000.—$		Недостаје	0,0001	

2 група:
$$a_2 = m_2 V_p^n = 1500\,V_5^4 = 423{,}0177 \text{ обавезница}$$

$$-\ \frac{m_2\,p}{100} = \frac{1500 \cdot 5}{100} = 75.— \quad „$$

$$y_1 = 348{,}0177 \quad „$$

$$\begin{array}{rll}
y_1 & = 348{,}0177 & \text{обавезница} \\
+\dfrac{y_1 p}{100} & = 17{,}4009 & \text{„} \\
\hline
y_2 & = 365{,}4186 & \text{„} \\
+\dfrac{y_2 p}{100} & = 18{,}2709 & \text{„} \\
\hline
y_3 & = 383{,}6895 & \text{„} \\
+\dfrac{y_3 p}{100} & = 19{,}1845 & \text{„} \\
\hline
y_4 & = 402{,}8740 & \text{„} \\
+\dfrac{y_4 p}{100} & = 20{,}1437 & \text{„} \\
\hline
a_2 & = 423{,}0177 & \text{„}
\end{array}$$

Стварно број исплаћених обавезница биће:

$$\begin{array}{lll|lll}
y_1 = 348{,}0177; & y_1' = 348.- & & \text{Остаје} & 0{,}0177 & \\
y_2 = 365{,}4186; & y_2' = 365.- & & + & 0{,}4186 & 0{,}4363 \\
 & & & \text{Остаје} & 0{,}4363 & \\
y_3 = 383{,}6895; & y_3' = 384.- & (+1) & + & 0{,}6895 & 1{,}1258 \\
 & & & \text{Остаје} & 0{,}1258 & \\
y_4 = 402{,}8740; & y_4' = 403.- & (+1) & + & 0{,}8740 & 0{,}9998 \\
\hline
m_2 = 1499{,}9998; & m_2 = 1500.- & & \text{Недостаје} & 0{,}0002 &
\end{array}$$

3 група: $a_3 = m_3 V_p^n = 2000\, V_5^4 = 564{,}0237$ обавезница

$$\begin{array}{rll}
-\dfrac{m_3 p}{100} = \dfrac{2000 \cdot 5}{100} & = 100.- & \text{„} \\
\hline
z_1 & = 464{,}0237 & \text{„} \\
+\dfrac{z_1 p}{100} & = 23{,}2012 & \text{„} \\
\hline
z_2 & = 487{,}2249 & \text{„} \\
+\dfrac{z_2 p}{100} & = 24{,}3612 & \text{„} \\
\hline
z_3 & = 511{,}5861 & \text{„} \\
+\dfrac{z_3 p}{100} & = 25{,}5793 & \text{„} \\
\hline
z_4 & = 537{,}1654 & \text{„} \\
=\dfrac{z_4 p}{100} & = 26{,}8573 & \text{„} \\
\hline
a_3 & = 564{,}0237 & \text{„}
\end{array}$$

Стварно се исплаћује:

$$\begin{array}{lll|lll}
z_1 = 464{,}0237; & z_1' = 464.- & & \text{Остаје} & 0{,}0237 & \\
z_2 = 487{,}2249; & z_2' = 487.- & & + & 0{,}2249 & 0{,}2486 \\
 & & & \text{Остаје} & 0{,}2486 & \\
z_3 = 511{,}5861; & z_3' = 511.- & & + & 0{,}5861 & 0{,}8347 \\
 & & & \text{Остаје} & 0{,}8347 & \\
z_4 = 537{,}1654; & z_4' = 538.- & (+1) & + & 0{,}1654 & 1{,}0001 \\
\hline
m = 2000{,}0001; & m = 2000.- & & \text{Остаје} & 0{,}0001 &
\end{array}$$

Амортизациони план биће:

Година	Дуг		5% интерес		Амортизоване обавезнице по 500	по 400	по 200	Отплата		Стварни ануитет	
1	1,500.000	—	75.000	—	232	348	464	348.000	—	423.000	—
2	1,152.000	—	57.600	—	243	365	487	364.900	—	422.500	—
3	787.100	—	39.355	—	256	384	511	383.800	—	423.155	—
4	403.300	—	20.165	—	269	403	538	403.300	—	423.465	—
	3,842.400	—	192.120	—	1.000	1.500	2.000	1,500.000	—	1,692.120	—

Амортизација зајмова са промењивом интересном стопом

Чл. 60 Ануитети константни. У досадашњим примерима претпостављано је да је интересна стопа једна иста до коначне амортизације зајма. Али интересна стопа може се и мењати. То мењање може бити сукцесивно или периодично; а може се мењати без икакве правилности. Све комбинације са сталном интересном стопом могу се и овде појавити, али ми ћемо узети само случај када су ануитети константни, а стопа се мења периодично.

Задатак. — Зајам од 100.000.— дин. треба амортизовати за 6 година годишњим једнаким ануитетима а са интересом за прве три године 5%, а за друге три године 4% годишње декурзивно. Израдити план отплаћивања.

1) Израда амортизационог плана.

Када је ануитет а, онда се дисконтовањем добија једначина:

$$100000 = a\,(\mathrm{IV}_5^3 + \mathrm{IV}_4^3\,\mathrm{II}_5^3)$$

А одавде:

$$a = 100000 : (IV_5^3 + IV_4^3\, II_5^3) = 19529{,}43 \text{ дин.}$$

Па ће амортизациони план бити:

$$a = 19529\ 43$$

Година	Дуг		Интерес		Отплата	
1	100.000	—	5.000	—	14.529	43
2	85.470	57	4.273	53	15.255	90
3	70.214	67	3.510	73	16.018	70
4	54.195	97	2.167	84	17.361	59
5	36.834	38	1.473	37	18.056	06
6	18.778	32	751	13	18.778	30
	365.483	91	17.176	60	99.999	98

2) Изналажење ошплаша:

Из система једначина:

$$a = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_6)\frac{p_1}{100} + b_1$$

$$a = (b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_6)\frac{p_1}{100} + b_2$$

$$a = (b_3 + b_4 + b_5 + b_6)\frac{p_1}{100} + b_3$$

$$a = (b_4 + b_5 + b_6)\frac{p_2}{100} + b_4$$

$$a = (b_5 + b_6)\frac{p_2}{100} + b_5$$

$$a = b_6\frac{p_2}{100} + b_6$$

одузимајући по две узастопне једначине добија се следећи систем једначина:

$$b_2 = b_1\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) = b_1 v_1$$

$$b_3 = b_2\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) = b_2 v_1 = b_1 v_1^2$$

$$b_4 = b_3\left(1 + \frac{p_2}{100}\right) + R_4 \cdot \frac{p_1 - p_2}{100} = b_3 v_2 + R_4 \cdot \frac{p_1 - p_2}{100}$$

$$b_5 = b_4\left(1 + \frac{p_2}{100}\right) = b_4 v_2$$

$$b_6 = b_5\left(1 + \frac{p_2}{100}\right) = b_5 v_2 = b_4 v_2^2$$

где је p_1 интересна стопа првог периода, p_2 интересна стопа другог периода, v_1 интересни чинитељ првог, v_2 интересни чинитељ другог периода, а R_4 остатак дуга после прва два плаћена ануитета тј. дуг, који се има амортизовати са последња четири ануитета — једним ануитетом прве периоде и три из друге периоде.

У овом примеру је:

$$a = 19529{,}43 \text{ дин.}$$
$$-\frac{Kp_1}{100} = 5000.— \text{ „}$$
$$b_1 = 14529{,}43 \text{ дин.}$$
$$+\frac{Kp_1}{100} = 726{,}47 \text{ „}$$
$$b_2 = 15255{,}60 \text{ дин.}$$
$$+\frac{b_2 p_1}{100} = 762{,}80 \text{ „}$$
$$b_3 = 16018{,}70 \text{ дин.}$$
$$+\frac{b_3 p_2}{100} = 640{,}75 \text{ „}$$
$$+\frac{R_4 p_2}{100} = 702{,}15 \text{ „}$$
$$b_4 = 17361{,}60 \text{ дин.}$$
$$+\frac{b_4 p_2}{100} = 694{,}46 \text{ „}$$
$$b_5 = 18056{,}06 \text{ дин.}$$
$$+\frac{b_5 p_2}{100} = 722{,}24 \text{ „}$$
$$b_6 = 18778{,}30 \text{ дин.}$$
$$+\frac{b_6 p_2}{100} = 751{,}13 \text{ „}$$
$$a = 19529{,}43 \text{ дин.}$$

Чл. 61 У једнаким размацима времена отплаћује се исти део дуга. У случају константних ануитета за r-ти део времена амортизације не отплаћује се r-ти део дуга, већ у почетку амортизације мање, а при крају више. То долази отуда што се у почетку већи део ануитета троши на интерес, а мањи на отплату, док је у последњим годинама обратно. У колико је време амортизације дуже у толико је и ова разлика већа. Ако се жели да се за сваких r година амортизације отплати $\frac{n}{r}$-ти део дуга, онда се за сваки период од r узастопних година мора наћи ануитет.

Задатак. — Зајам од 100.000.— дин., треба амортизовати за 12 година са 4% годишње декурзивно, али да се за сваку четвртину времена отплати и четвртина дуга. Наћи ануитете и израдити план отплаћивања.

Ако се ануитети, који се плаћају сваке три узастопне године, обележе са a_1, a_2, a_3 и a_4, онда ће се из услова задатка имати следеће једначине:

$$K \cdot I_4^3 - a_1 (1 + III_4^2) = \frac{3\,K}{4} \text{ тј. } a_1 = \left(K\,I_4^3 - \frac{3\,K}{4}\right) : (1 + III_4^2) = 12008{,}71$$

$$\frac{3\,K}{4} I_4^3 - a_2 (1 + III_4^2) = \frac{K}{2} \;\;\text{"}\;\; a_2 = \left(\frac{3\,K}{4} I_4^3 - \frac{K}{2}\right) : (1 + III_4^2) = 11008{,}71$$

$$\frac{K}{2} I_4^3 - a_3 (1 + III_4^2) = \frac{K}{4} \;\;\text{"}\;\; a_3 = \left(\frac{K}{2} I_4^3 - \frac{K}{4}\right) : (1 + III_4^2) = 10008{,}71$$

$$\frac{K}{4} I_4^3 - a_4 (1 + III_4^2) = 0 \;\;\text{"}\;\; a_4 = \frac{K}{4} I_4^3 : (1 + III_4^2) \qquad = 9008{,}71$$

где је K зајам — у овом случају 10.000.—.

Из овог се види да ануитет опада за интерес на четвртину дуга. Према томе у овом случају ануитети се практично изналазе овако: Нађе се ануитет на четвртину дуга за четвртину времена (петину дуга за петину времена, r-ти део дуга за r-ти део времена итд.) амортизације. То је ануитет, који се плаћа последње четвртине (петине, r-тог дела) амортизације. Том се ануитету дода интерес на четвртину (петину, r-ти део) дуга. То је ануитет претпоследњег периода. Затим се на овај ануитет дода интерес, као и мало пре итд. На тај начин избећиће се предње комбиноване једначине.

Тако би имали:

$$a_4 = \frac{K}{4} V_4^3 = 25000 \cdot 0{,}36034854 = 9008{,}71$$

$$a_3 = a_4 + \frac{K}{4} \cdot \frac{4}{100} = 9008{,}71 + 1000 = 10008{,}71$$

$$a_2 = a_3 + \frac{K}{4} \cdot \frac{4}{100} = 10008{,}71 + 1000 = 11008{,}71$$

$$a_1 = a_2 + \frac{K}{4} \cdot \frac{4}{100} = 11008{,}71 + 1000 = 12008.71$$

Примедба. — Када је дуг K а за сваких r година отплаћује исти капитал, онда је

$$a_{\frac{n}{r}} = \frac{K}{\frac{n}{r}} V_p^r;\; a_{\frac{n}{r}-1} = a_{\frac{n}{r}} + \frac{K}{\frac{n}{r}} \cdot \frac{p}{100}.$$

Амортизациони план биће:

Година	Дуг		4% интерес		Отплата		Ануитет	
1	100.000	—	4.000	—	8.008	71	12.008	71
2	91.991	29	3.679	65	8.329	06	12.008	71
3	83.662	23	3.346	48	8.662	23	12.008	71
4	75.000	—	3.000	—	8.008	71	11.008	71
5	66.991	29	2.679	65	8.329	06	11.008	71
6	58.662	23	2.346	48	8 662	23	11.008	71
7	50.000	—	2.000	—	8.008	71	10.008	71
8	41.991	29	1.679	65	8.329	06	10.008	71
9	33.662	23	1.346	48	8.662	23	10.008	71
10	25.000	—	1.000	—	8.008	71	9.008	71
11	16.991	29	679	65	8.329	06	9.008	71
12	8.662	23	346	48	8.662	23	9.008	71
	652.614	04	26.104	52	100 000	—	126.104	52

Чл. 62. Ануитет се плаћа антиципативно. Овде могу бити сви случајеви као и кад се ануитет плаћа декурзивно. Али ћемо узети само случај када су ануитети константни.

Када је зајам K, време амортизације n, стопа $p\%$, а ануитет а онда мора бити:

$$K = a + \frac{a}{v} + \frac{a}{v^2} + \frac{a}{v^3} + \ldots + \frac{a}{v^{n-1}}$$

тј.
$$K = a\left(1 + IV_p^{n-1}\right)$$

Пример. — Зајам од 10 000.— дин. амортизује се за 5 година годишњим једнаким ануитетима са интересом 3% годишње декурзивно, али да се ануитет плаћа антиципативно. Наћи ануитет и израдити план отплаћивања.

Овде је: $K = 10000.$—, $n = 5$, $p = 3\%$, $m = 1$

па је:
$$10000 = a\left(1 + IV_3^4\right)$$

А одавде тражени ануитет:

$$a = 10000 : \left(1 + IV_3^4\right) = 2119{,}95 \text{ дин.}$$

Амортизациони план биће: $a = 2119{,}95$.

Година	Дуг		3% интерес		Отплата	
1	10.000	—	—	—	2.119	95
2	7.880	05	236	40	1.883	55
3	5.996	50	179	90	1.940	05
4	4.056	45	121	69	1.998	26
5	2.058	19	61	74	2.058	21
	29.991	19	599	73	10.000	02

III ДЕО

Антиципативно рачунање интереса

Чл. 63. Изналажење крајњег капитала када је познат почетни. Раније смо видели да задужење са $p\%$ антиципативно значи да дужник потписује обавезу на К дин. а прима $K - \frac{K\,p}{100}$ дин. Антиципативну стопу обележићемо са π за разлику од декурзивне p. Из напред изложеног излази да ако се неко задужи K_1 дин. са $\pi\%$ антиципативно да ће одмах примити не K_1 већ $K_1 - \frac{K_1\pi}{100}$ дин., а после годину дана вратиће K_1 дин. Ако се сума коју дужник прима обележи са К онда мора постојати једначина:

$$K_1 - \frac{K_1\pi}{100} = K$$

Из ове једначине добија се:

$$K_1 = K \cdot \frac{1}{1 - \frac{\pi}{100}} = K \cdot \frac{100}{100 - \pi}$$

Ова једначина казује нам да ће дужник примивши К дин. за интересом $\pi\%$ годишње антиципативно имати на крају године да врати примљену суму помножену са $\frac{100}{100 - \pi}$, или да ће улагач који је уложио К дин. са $\pi\%$ годишње антиципативно имати на крају године уложених К дин. помножених са $\frac{100}{100 - \pi}$.

Број $\frac{100}{100 - \pi}$ је један динар заједно са интересом $\pi\%$ за једну годину при антиципативном рачунању. Овај број зове се *антиципативни интересни чинитељ*. Ми ћемо га обалежити са w.

Према томе је:

$$w = \frac{1}{1 - \frac{\pi}{100}} = \frac{100}{100 - \pi}$$

Зато је:

$$K_1 = Kw$$

Ако се K_1 остави и даље под интересом имаће се на крају друге групе:

$$K_2 = K_1\,w = Kw^2$$

На исти начин добија се:

$$K_3 = K_2\,w = Kw^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_n = K_{n-1}\,w = Kw^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (102)$$

Као што се види једначине су исте као и у случају декурзивног рачунања. Сва разлика је у томе што се место декурзивног интересног чинитеља v узима антиципативни интересни чинитељ w. Јасно је да се мора w слагати у засебну таблицу. Та таблица разликује се од I таблице при декурзивном рачунању. Док се она при декурзивном рачунању интереса зове I декурзивна, ова се зове I антиципативна. Према томе једначина (102) може се писати и у облику

$$K_n = K_{n-1}\,I_n^1 = K\,I_n^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (102a)$$

Настаје питање како ћемо наћи вредност за K_n, кад немамо при руци таблице у којима има и I антиципативна таблица, већ има само I декурзивна таблица. Решење је могуће на два начина: Или ће се једначина (102) логаритмовати или ће се помоћу I декурзивне наћи вредност за I антиципативну. Треба $\pi\%$ антиципативно претворити у одговарајућу декурзивну стопу, па са том стопом наћи вредност у I декурзивној таблици.

Да видимо како се врши претварање антиципативне стопе $\pi\%$ у декурзивну стопу $p\%$ и обратно.

Из једначине

$$w = v$$

добија се:

$$\frac{100}{100 - \pi} = \frac{100 + p}{100}$$

А одавде

$$p = \frac{100\,\pi}{100 - \pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (103)$$

Или:

$$\pi = \frac{100\,p}{100 + p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (104)$$

Пример. — Дин. 10000.— дати су под интерес на интерес са 4% годишње антиципативно. На коју ће суму са интересом на интерес порасти овај капитал за 10 година?

Овде је $K = 10000.—$, $n = 10$, $п = 4\%$. Зато је

$$p = \frac{4 \cdot 100}{100 - 4} = \frac{400}{96} = \frac{50}{12} = \frac{25}{6} = 4\tfrac{1}{6}\%.$$

Па је

$$K_n = 10000\, I^{10}_{4^1/_6} = 15041{,}38 \text{ дин.}$$

Једначина (102) изведена је под претпоставком да је годишње капиталисање. И овде, као и код декурзивног рачунања, треба за случај полугодишњег капиталисања годишњу стопу делити са 2 а број година множити са 2, а за случај капиталисања m пута за годину стопу делити са m, а број година множити са m. Према томе општа једначина била би:

$$K_{mn} = K\, I^{mn}_{\frac{п}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

Код израчунавања m, n и п важи све што је речено код декурзивног рачунања.

Једначина (105) важи у случају кад нема разломка периода, а кад има разломка онда се мора применити једначина:

$$K_{mn + \frac{r}{s}} = K\, I^{mn}_{\frac{п}{m}} + \frac{K\, I^{mn}_{\frac{п}{m}} \frac{r}{s}\, п}{100 - \frac{r}{s}\, п} \quad \ldots\ldots \quad (106)$$

Пример. — На коју ће суму са интересом на интерес 4% порасти 10000.— дин. за 10 година и 3 месеца при полугодишњем капиталисању?

Овде је: $m = 2$, $n = 10$, $K = 10000$, $\frac{r}{s} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, $п = 4\%$.

Зато је:

$$\frac{p}{2} = \frac{100\,\frac{п}{2}}{100 - \frac{п}{2}} = \frac{200}{98} = 2\tfrac{2}{49}.$$

А

$$K_{mn} = K\, I^{mn}_{\frac{п}{2}} = 10000\, I^{20}_{2\frac{2}{49}} = 14978{,}85 \text{ дин.}$$

$$+\frac{K\, I^{mn}_{\frac{п}{2}} \cdot \frac{r}{s}\, п}{100 - \frac{r}{s}\, п} = \frac{14978{,}85 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4}{100 - \frac{1}{4} \cdot 4} = 151{,}30 \text{ „}$$

$$K_{mn + \frac{r}{s}} = 15130{,}15 \text{ дин.}$$

Напомена. — Када се на $K_{mn + \frac{r}{s}}$ нађе интерес рачуном од 100 за $\frac{r}{s}$ година са $п\%$, онда тај интерес мора бити једнак интересу, који смо добили рачуном у сто на $K\, I^{mn}_{\frac{п}{m}}$.

Чл. 64 Изналажење капитала без интереса, кад се зна капитал са интересом. Из једначине (105) добија се:

$$K = K_n \cdot \frac{1}{I^{mn}_{\frac{п}{m}}} = K_n \cdot \left(\frac{100 - п}{100}\right)^{mn} = K_n\, II^{mn}_{\frac{п}{m}} \quad . \ (107)$$

Пример 1. — Колико треба уложити данас са 4% годишње антиципативно да се после 10 година при полугодишњем капиталисању прими дин. 14978,85?

Овде је: $K_n = 14978{,}85$, $n = 10$, $m = 2$, $п = 4\%$. Зато је:

$$K = K_n\, II^{mn}_{\frac{п}{2}} = 14978{,}85\, II^{20}_{2\frac{2}{49}} = 14978{,}85 \cdot 0{,}66760797 = 10000$$

Пример 2. — Колико је уложено 15-III-1920 год. у штедионицу, која плаћа 8% годишње антиципативно, а врши капиталиње сваког 30-VI и 31-XII, кад је тај улог исплаћен 15-VII-1930 са дин. 20.000.—?

Прво интересним рачуном од сто треба наћи интерес на 20.000.— дин., за број дана од 30/6-1930 — 14/7-1930, па тај интерес одузети. Дакле:

15/7-1930 год.	дин.	20.000.—
— 8% интерес	„	66.67
30/6-1930 год.	дин.	19.933,33

Да се нађе колики је био овај улог на дан 30/6-1920 год. тј. на дан првог капиталисања, треба ову суму помножити са вредношћу II антиципативне таблице из стубца 4% а врсте 20, или ако не располажемо са II антиципативном онда са II декурзивном стубац $4^1/_6\%$. а врста 20. Тако се добија:

$$K = 19933{,}33\, II^{20}_{4^1/_6} = 8810{,}57 \text{ дин.}$$

вредност на дан 30/6-1920 год.

Да се нађе вредност на дан улога тј. на дан 11/3-1920 треба од 8810,57 наћи интерес интересним рачуном од сто за број дана од 15/3-1920—30/6-1920 тј. за 105 дана са 8%, па тај интерес одузети. Дакле:

30/6-1920 год.	дин.	8.810,57
— 8% интерес	„	205,57
Уложено 15/3-1920 год.	дин.	8.605.—

Према томе тражени улог је дин. 8.605.—

Примедба. — Код изналажења интересне стопе и времена важи све што и код декурзивног рачунања. Зато овде нећу радити ниједан пример.

Рачун улога

Чл. 65 Изналажење суме улога када је улог сталан. Исто као и код декурзивног рачунања важе ове две једначине:

$$\left.\begin{aligned} S_n &= u\,III^{nm}_{\frac{p}{m}} \\ S_n' &= \left(1 + III^{mn-1}_{\frac{p}{m}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

од којих се прва употребљава када од дана првог улога до дана када се тражи стање има mn периода, а друга када има mn—1 период.

Према томе практично упуство из члана 20 важи и овде.

Пример. — Ако се 10 година улаже полугодишње по 1.000.— дин. у штедионицу, која плаћа 6% годишње антиципативно, а врши капиталисање полугодишње, на коју ће суму порасти овај улог заједно са интересом на интерес a) пола године после 20 улога, b) на дан улагања 20-тог улога?

a) $u = 1000$, $p = 6\%$, $n = 10$, $m = 2$, па је:

$S_n = 1000\,III^{20}_{3(a)} = 1000\,III^{20}_{3\frac{9}{97}} = 27964{,}35$ дин.

b) $u = 1000$, $p = 6\%$, $n = 10$, $m = 2$, па је:

$S_n' = 1000\left(1 + III^{19}_{3(a)}\right) = 1000\left(1 + III^{19}_{3\frac{9}{97}}\right) = 27125{,}42$ дин.

Примедба. — Све једначине изведене код декурзивног рачунања важе и овде, само антиципативну стопу треба претворити у одговарајућу декурзивну стопу (Види чл. 63), али где би се при декурзивном рачунању употребио интересни рачун од сто, овде у сто, а где би рачун на сто овде од сто са непретвореном интересном стопом.

Рачун ренте

Чл. 66 Изналажење мизе кад је рента константна. Као и код декурзивног рачунања овде важе ове две једначине:

$$\left.\begin{aligned} M_n &= r\,IV^{mn}_{\frac{p}{m}} \\ M_n' &= r\left(1 + IV^{mn-1}_{\frac{p}{m}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

Прва се употребљава када од дана улога мизе до дана пријема последње ренте има *mn* периода, а друга када има *mn—1* период.

Практично упутство из чл. 30 важи и овде.

Пример. — Колико се мора уложити данас у штедионицу, која плаћа 8% годишње антиципативно, а врши капиталисање полугодишње, да се 20 година прима полугодишња рента од 1.000.— дин., када је та рента a) декурзивна, б) антиципативна?

a) Овде је: $r = 1000.—$, $n = 20$, $m = 2$, $p = 8\%$, па је:

$$M_n = 1000\,IV^{40}_{4\frac{1}{6}} = 19311{,}21 \text{ дин.}$$

b) Овде је: $r = 1000.—$, $n = 20$, $m = 2$, $p = 8\%$, па је:

$$M_n' = 1000\left(1 + IV^{39}_{4\frac{1}{6}}\right) = 20115{,}85 \text{ дин.}$$

Примедба. — Све једначине изведене код декурзивног рачунања важе и овде само антиципативну стопу треба претворити у одговарајућу декурзивну стопу. (Види чл. 63). Рачун од сто замењује се рачуном у сто, а рачун на сто са рачуном од сто са непретвореном интересном стопом.

Амортизација зајмова

Чл. 67 Општа једначина. Када се неко задужи K дин. да их отплати за n година са p% годишње антиципативно, али да прво смањење дуга падне после јединице времена уговорене за плаћање ануитета (обично после пола године, или после годину дана), онда ово лице прима обавезу да за примљених K дин. на име зајма исплати свом повериоцу одмах $\frac{K\,p}{100}$ дин. на име интереса за наредну годину и да после годину дана плати ануитет од a_1 дин., после 2 године ануитет од a_2 дин,...., после n година ануитет од a_n дин. Ако би било уговорено да се ануитети плаћају полугодишње, онда би дужник био обавезан да плати одмах $\frac{K\,p}{200}$ дин. на име интереса за наредну полугодину и на име ануитета $a_1, a_2, a_3, \ldots.\ a_{2n}$ о 1, 2, 3,...., 2 n-том року плаћања ануитета.

На основу принципа еквиваленције збир исплата дисконтованих на дан реализације зајма мора бити једнак зајму. Према томе општа једначина била би:

$$K = \frac{K\,p}{100} + \frac{a_1}{w} + \frac{a_2}{w^2} + \ldots. + \frac{a_n}{w^n} \quad \ldots\ldots \quad (110)$$

Из ове једначине може се израчунати један од елемената зајма када су остали познати. Ова једначина важи како за једнаке тако и за различите ануитете.

Чл. 68 Ануитети једнаки. Ако се у једначини (110) стави: $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots. = a_n = a$ и пребаци $\frac{K\,p}{100}$ на леву страну једначине добија се:

$$K\left(1 - \frac{p}{100}\right) = a\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} + \ldots. + \frac{1}{w^n}\right)$$

А одавде:

$$K = a\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} + \ldots + \frac{1}{w^n}\right) w$$

тј.

$$K = a\,IV_п^n \cdot I_п^1 = a\left(1 + IV_п^{n-1}\right) \quad \ldots\ldots (111)$$

Из једначине (111) добија се:

$$a = K\,V_п^n\,II_п^1 = K\,VI_п^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (112)$$

Пример. — Зајам од 10.000 дин. треба амортизовати за 50 година годишњим једнаким ануитетима са 4% год. антиципативно. Колики је ануитет, кад се први плаћа после годину дана?

Овде је: $K = 10000$, $n = 50$, $m = 1$, $п = 4\%$, па је:

$$a = 10000\,VI_4^{50} = 459{,}71 \text{ дин.}$$

Чл. 69 Израда амортизационог плана кад су ануитети једнаки. На зајам од K дин. мора се одмах платити интерес за следећи период. Према томе први ануитет има се утрошити на прву отплату b_1 и на интерес на остатак дуга тј. на $K - b_1$ дакле:

$$a = b_1 + \frac{(K - b_1)\,п}{100}$$

Исто тако други ануитет на другу отплату b_2 и на интерес на остатак дуга тј. на $K - b_1 - b_2$; дакле:

$$a = b_2 + \frac{[K - (b_1 + b_2)]\,п}{100}$$

Према томе и остали ануитети биће распоређени:

трећи: $$a = b_3 + \frac{[K - (b_1 + b_2 + b_3)]\,п}{100}$$

четврти: $$a = b_4 + \frac{[K - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)]\,п}{100}$$

. . . .

n-ти $$a = b_n + \frac{[K - (b_1 + b_2 + b_3 \ldots + b_n)]\,п}{100} = b_n$$

Одузимањем по две и две узастопне једначине добија се:

$$b_2 = b_1 \frac{100}{100 - п} = b_1 w$$

$$b_3 = b_2 \frac{100}{100 - п} = b_2 w = b_1 w^2$$

. . . .

$$b_n = b_{n-1} \frac{100}{100 - п} = b_{n-1} w = b_1 w^{n-1} = a$$

Општа једначина гласи:

$$b_m = b_r\,w^{m-r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (113)$$

Из ове једначине добија се помоћу r-те отплате 1, 2, ..., r, r + 1, ..., n—2, n—1 и n-та отплата ако се m замени са индексом отплате која се тражи, дакле са 1 ако се тражи прва, са 2 ако се тражи друга итд. са n ако се тражи n-та отплата. При томе треба имати на уму следеће: Ако је m веће од r да је $m - r$ позитивно, па зато $w^{m-r} = I_п^{m-r}$, а ако је $m - r$ негативно тј. r веће од m да је у том случају $w^{m-r} = II_п^{r-m}$.

Једначина (113) употребљава се када се зна r-та отплата где r може имати све вредности од 1 до n. Ако се у овој једначини стави $r = 1$ онда се помоћу прве отплате израчунавају остале отплате зајма. Из ње се може наћи прва отплата када је позната нека каснија отплата. Међутим у пракси је потребно знати израчунати прву отплату без познавања неке касније отплате. То се може добити на следећи начин.

Пошто је:

$$K = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = b_1(1 + w + w^2 + \ldots$$
$$\ldots + w^{n-1}) = b_1\left(1 + III_п^{n-1}\right)$$

то је:

$$b_1 = \frac{K}{1 + III_п^{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (114)$$

где b_1 означава прву отплату, n број свих ануитета, K зајма, а п антиципативну интересну стопу зајма.

Прва отплата може се добити и из једначине:

$$a = b_1 + \frac{K - b_1}{100}\,п$$

Одавде следује:

$$b_1 = \left(a - \frac{K\,п}{100}\right)\frac{100}{100 - п} = \left(a - \frac{K\,п}{100}\right) w \quad \ldots (115)$$

Једначина (115) је општа, па према томе важи не само за ануитете рачунате по таблици, већ и за заокругљене ануитете, док једначина (114) важи само у случају константних ануитета израчунатих из једначине:

$$a = K\,VI_п^n.$$

Амортизациони план израђује се овако: У колони за период стави се 0 (односно црта, јер то преставља почетак прве године амортизације), у колони за сајам (дуг) K, у колони за интерес $\frac{K\,п}{100}$ (јер се интерес плаћа унапред за један период) и у колони за отплату црта (јер се тада дуг не смањује). Затим се у колони за период стави 1, у колони за отплату b_1, у колони за интерес $a - b_1 = \frac{(K - b_1)\,p}{100}$ и у колони за дуг $K - b_1$. Потом у колони за период стави се 2, у колони за отплату b_2, у колони за интерес $a - b_2 = \frac{(K - b_1 - b_2)\,p}{100}$ итд. све до n-тог плаћања ануитета. Тада се у колони за период стави n, у колони за отплату $b_n = a$, а у колонама за интерес и дуг цртице.

Према томе општи облик амортизационог плана изгледа:

Период	Дуг	$p\%$ интерес	Отплата
—	K	$\frac{Kp}{100}$	—
1	$K - b_1$	$a - b_1$	$b_1 = \left(a - \frac{Kp}{100}\right)\frac{100}{100 - p}$
2	$K - (b_1 + b_2)$	$a - b_2$	$b_2 = b_1 \frac{100}{100 - p}$
3	$K - (b_1 + b_2 + b_3)$	$a - b_3$	$b_3 = b_2 \frac{100}{100 - p}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
r	$K - (b_1 + b_2 + \ldots + b_r)$	$a - b_r$	$b_r = b_{r-1} \frac{100}{100 - p}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n - 1	$K - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) = a$	$a - b_{n-1}$	$b_{n-1} = b_{n-2} \frac{100}{100 - p}$
n	—	—	$b_n = a$

Пример. — Зајам од 10.000.— дин. амортизује се за 5 година годишњим једнаким ануитетом са 4% годишње антиципативно. Израдити план отплаћивања.

Овде је: $K = 10000$, $n = 5$, $m = 1$, $p = 4\%$, па је:

$$a = 10000\, VI_4^5 = 2166{,}53 \text{ дин.}$$

Даље је:

$$b_1 = \left(a - \frac{Kp}{100}\right)\frac{100}{100 - p} = (2166{,}53 - 400)\,\frac{100}{96} = 1840{,}1354$$

$$b_2 = b_1 \frac{100}{100 - p} = 184013{,}54 : 96 = 1916{,}8077$$

$$b_3 = b_2 \frac{100}{100 - p} = 191680{,}77 : 96 = 1996{,}6746$$

$$b_4 = b_3 \frac{100}{100 - p} = 199667{,}46 : 96 = 2079{,}8693$$

$$b_5 = b_4 \frac{100}{100 - p} = 207986{,}93 : 96 = 2166{,}53$$

Последња (овде пета) отплата је ануитет. Ово показује да су отплате добро израчунате. Овде сам прво израчунао отплате, али се може радити план не израчунавајући одмах све отплате већ једну поједну.

План би изгледао:

$$a = 2166{,}53$$

Година	Дуг		4% интерес		Отплата	
—	10.000	—	400	—	—	—
1	8.159	87	326	40	1.840	13
2	6.243	07	249	73	1.916	80
3	4.246	40	169	86	1.996	67
4	2.166	53	86	66	2.079	87
5	—	—	—	—	2.166	53
	30.815	87	1.232	65	10.000	—

Контроле плана су: 1) Дуг претпоследње године (овде четврте) једнак ануитету; 2) Интерес за један период на збир колоне за дуг треба да је једнак збиру колоне интереса; 3) Збир колоне за отплату треба да је једнак дугу; 4) Производ из ануитета и броја ануитета увећан са интересом на дуг за један период треба да буде једнак збиру колона за интерес и отплату.

Овај план израђен је израчунавањем отплата, па је интерес на остатак дуга изналажен одузимањем отплате од ануитета. Може се радити и обрнуто. Прво израчунавати интерес па отплату одузимањем интереса од ануитета. Ево како:

Од зајма се одузме ануитет. Тим одузимањем не добија се остатак дуга $K - b_1$ већ тај остатак смањен за интерес на тај остатак; дакле умањен капитал. Зато се интерес изналази рачуном у сто. Ако интересе обележимо са i_0, i_1, i_2, ..., i_{n-1}, i_n биће:

$$i_0 = \frac{Kp}{100}$$

$$i_1 = \frac{(K - a)\,p}{100 - p}; \quad b_1 = a - i_1$$

$$i_2 = \frac{(K - b_1 - a)\,p}{100 - p}; \quad b_2 = a - i_2$$

$$i_3 = \frac{(K - b_1 - b_2 - a)\,п}{100 - п}; \quad b_3 = a - i_3$$

$$i_4 = \frac{(K - b_1 - b_2 - b_3 - a)\,п}{100 - п}; \quad b_4 = a - i_4$$

. . . .

$$i_{n-1} = \frac{[K - (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2}) - a]\,п}{100 - п}; \quad b_{n-1} = a - i_{n-1}$$

$$i_n = \frac{[K - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) - a]\,п}{100 - п} = \frac{(a - a)\,п}{100} = 0; \; b_n = a - i_n = a$$

У овом примеру је:

$$i_0 = \frac{10000 \cdot 4}{100} = 400.—;$$

$$i_1 = (10000 - 2166{,}53)\,\frac{4}{96} = 326{,}40; \quad b_1 = 2166{,}53 - 326{,}40 = 1840{,}13;$$

$$i_2 = (8157{,}87 - 2166{,}53) \cdot \frac{4}{96} = 249{,}73; \; b_2 = 2166{,}53 - 249{,}73 = 1916{,}80;$$

итд.

Чл. 70 Изналажење отплаћеног дуга и остатка дуга кад су анyитети константни. Да се нађе отплаћени дуг са m првих ануитета треба сабрати m првих отплата. Ако обележимо отплаћени дуг са O_m онда је:

$$O_m = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_m$$

Или због једначине (113)

$$O_m = b_1\,(1 + w + w^2 + \ldots + w^{m-1})$$

тј.

$$O_m = b_1\,(1 + III_п^{m-1}) \; \ldots\ldots\ldots \; (116)$$

Када се у једначини (116) стави:

$$b_1 = \left(a - \frac{K\,п}{100}\right)\frac{100}{100 - п} = \left(a - \frac{K\,п}{100}\right) w$$

добија се:

$$O_m = \left(a - \frac{K\,п}{100}\right) III_п^m \; \ldots\ldots\ldots \; (117)$$

Остатак дуга после m плаћених ануитета добија се кад се од дуга одузме отплаћени дуг са m првих ануитета. Ако се тај остатак обележи са R_{n-m} онда је:

$$R_{n-m} = K - O_m \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (118)$$

Ово је општа једначина. Она важи и за случај макаквих ануитета. Али у случају константних ануитета може јој се дати и друга форма.

Пошто R_{n-m} није ништа друго него зајам, који се има амортизовати са $n - m$ ануитета од а дин., то ће, због једначине (111), бити:

$$R_{n-m} = a\,(1 + IV_п^{n-m-1}) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (119)$$

Када се тражи отплаћени дуг са r узастопних ануитета али који су по реду после m првих узастопних ануитета, онда се отплаћени дуг добија из једначине:

$$O_r = O_{m+r} - O_m = \left(a - \frac{K\,п}{100}\right) III_п^{m+r} - \left(a - \frac{K\,п}{100}\right) III_п^m =$$

$$= \left(a - \frac{K\,п}{100}\right)(III_п^{m+r} - III_п^m) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (120)$$

Или из једначине:

$$O_r = b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_{m+r} = b_m\,III_п^r \; \ldots\ldots\ldots \; (121)$$

где је:

$$b_m = a - \frac{R_{n-m}\,п}{100} = \left(a - \frac{K\,п}{100}\right) w^m$$

Примери: 1) Зајам од 100000.— дин. треба амортизовати за 50 година годишњим једнаким ануитетом са 4% годишње антиципативно. Наћи остатак дуга после 30 плаћених ануитета.

Овде је $K = 100000.—$, $n = 50$, $п = 4\%$, $m = 30$, па је ануитет:

$$a = 10000\;VI_4^{50} = 4597{,}10 \text{ дин.}$$

Отплаћени дуг је:

$$O_{30} = (4597{,}10 - 4000)\,III_{4\%}^{30} = 597{,}10 \cdot 60{,}07520759 = 35870{,}90 \text{ дин.}$$

А остатак дуга:

$$R_{20} = 100000.— \; 35870{,}90 = 64129{,}10 \text{ дин.}$$

Из једначине (119) добија се остатак дуга без изналажења отплаћеног дуга; дакле:

$$R_{20} = 4597{,}10\,(1 + IV_{4\%}^{19}) = 4597{,}10 \cdot 13{,}94993915 = 64129{,}10 \text{ дин.}$$

2) Колики ће бити отплаћени дуг са 10 узастопних ануитета после првих 20 узастопних ануитета у примеру 1)?

$$O_{10} = (4597{,}10 - 4000)\,(III_{4\%}^{30} - III_{4\%}^{20}) =$$
$$597{,}10 \cdot 28{,}51443307 = 16995{,}97 \text{ дин.}$$

Чл. 71 Израда амортизационог плана када су заокругљени анyитети. Све што је речено код декурзивног рачунања (види чл. 43) важи и овде с том разликом што овде треба узети VI таблицу место V*).

Поступак при изради плана исти је као и код једнаких ануитета.

Пример. — Зајам од 2.000.— дин. амортизује се годишњим ануитетом од 400.— дин. са 4% годишње антиципативно. Израдити план отплаћивања.

Овде је $K = 2000.—$, $a = 400.—$, $\text{п} = 4\%$, $n = x$, $m = 1$, па је ануитет за један динар дуга:

$$VI_4^n = 400 : 2000 = 0{,}2 \text{ дин.}$$

У стубцу 4% таблице VI а у врсти петој налази се број 0,21665268, а у врсти шестој 0,18412628. Пошто је први број већи а други мањи од 0,2 то значи да се са 5 ануитета од 400.— дин., не амортизује цео дуг, а са 6 амортизује више. Према томе време амортизације је 6 година, али се 5 пута плаћа ануитет од 400.— дин., а шести пут један ануитет мањи од 400.— дин. Тај шести ануитет зове се ануитетни остатак.

Амортизациони план изгледа:

$$a = 400.—$$

Година	Дуг		4% интерес		Отплата	
—	2.000	—	80	—	—	—
1	1.666	67	66	67	333	33
2	1.319	45	52	78	347	22
3	957	76	38	31	361	69
4	581	—	23	24	376	76
5	188	54	7	54	392	46
6	—	—	—	—	188	54
	6.713	42	268	54	2.000	—

Чл. 72 Изналажење ануитетног остатка. Пошто се интерес плаћа унапред то је последња отплата једнака последњем ануитету. Према томе. ако са R_1 обележимо последњу отплату, а са a_1 последњи ануитет, онда је:

$$a_1 = R_1 = K - \left(a - \frac{K\text{п}}{100}\right) III_{\text{п}}^{n-1} \quad \ldots . \; (122)$$

Али последњи ануитет може се добити и из једначине:

$$K = \frac{K\,\text{п}}{100} + \frac{a}{w} + \frac{a}{w^2} + \ldots . + \frac{a}{w^{n-1}} + \frac{a_1}{w^n}$$

*) Детаљније о распореду ануитета видети од писца ове књиге „Распоред ануитета дугорочних хипотекарних зајмова".

Ова једначина може се писати у облику:

$$K = a\left(1 + IV_{\text{п}}^{n-2}\right) + a_1\, II_{\text{п}}^{n-1} \; \ldots\ldots . \; (123)$$

А одавде се добија:

$$a_1 = \left[K - a\left(1 + IV_{\text{п}}^{n-2}\right)\right] I_{\text{п}}^{n-1} \; \ldots\ldots . \; (124)$$

Пример. — Зајам од 2.000.— дин. треба амортизовати годишњим ануитетом од 400.— дин. са интересом 4% годишње антиципативно. Наћи последњи ануитет.

Овде је: $K = 2000.—$, $a = 400.—$, $\text{п} = 4\%$, $m = 1$, $n = 6$, па је:

$$a_1 = 2000 - \left(400 - \frac{2000 \cdot 4}{100}\right) III_{4^1/_6}^5 = 2000 - (400 - 80)\, III_{4^1/_6}^5 =$$

$$= 2000 - 320\, III_{4^1/_6}^5 = 2000 - 1811{,}46 = 188{,}54 \text{ дин.}$$

Или

$$a_1 = \left[2000 - 400\left(1 + IV_{4^1/_6}^4\right)\right] I_{4^1/_6}^5 = (2000 - 1846{,}27)\, I_{4^1/_6}^5 =$$

$$= 153{,}73 \cdot I_{4^1/_6}^5 = 188{,}54 \text{ дин.}$$

Дакле на оба начина добија се исти резултат. Тај се резултат слаже и са последњом отплатом из плана у чл. 71.

Чл. 73 Изналажење зајма. Зајам се добија из једначина (123).

Пример. — Који се зајам може отплатити са интересом 4% годишње антиципативно, кад се 5 година плаћа на име годишњег ануитета 400.— дин., а 6-те године 188,54 дин.

Овде је: $a = 400.—$, $a_1 = 188{,}54$, $n = 6$, $\text{п} = 4\%$ па је:

$$K = 400\left(1 + IV_{4^1/_6}^4\right) + 188{,}54\, II_{4^1/_6}^5 = 1846{,}27 + 153{,}73 = 2000.— \text{ дин.}$$

Чл. 74 Зајмови подељени на обавезнице.

Општи појмови.

Све што је речено за зајмове подељене на обавезнице при декурзивном рачунању интереса важи и овде. Овде ћу израдити план за зајам кад је ануитет израчунат по таблици а амортизоване се обавезнице исплаћују: а) по номинали, b) са ажијом.

Чл. 75 Амортизоване обавезнице исплаћује се по номинали.

Задатак. — Зајам од 1,000.000.— дин., подељен на обавезнице по 100.— дин., амортизује се за 4 године годишњим једнаким ануитетом са интересом 6% годишње антиципативно. Интерес се исплаћује у виду купона. Амортизоване обавезнице исплаћују се по номинали. Израдити план отплаћивања.

Овде је: $K = 1000000.—$, $n = 4$, $п = 6\%$, $\frac{K}{\alpha} = m = 10000.—$, $\alpha = 100$, па је:

$$a = \frac{K}{\alpha} VI_n^n = 10000\, VI_6^4 = 2736{,}5891 \text{ обавезница.}$$

Ако и овде, као и код декурзивног рачунања интереса, обележимо са $x_1, x_2, \ldots, x_n$ број теоријски, а са $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ број стварно амортизованих обавезница са 1, 2, ..., n-тим плаћеним ануитетом, онда је, пошто је ануитет једнак последњој отплати:

$$\begin{array}{rl}
x_4 = a = 2736{,}5891 & \text{обавезница} \\
-\frac{x_4 п}{100} = 164{,}1953 & \text{"} \\
\hline
x_3 = 2572{,}3938 & \text{"} \\
-\frac{x_3 п}{100} = 154{,}3436 & \text{"} \\
\hline
x_2 = 2418{,}0502 & \text{"} \\
-\frac{x_2 п}{100} = 145{,}0830 & \text{"} \\
\hline
x_1 = 2272{,}9672 & \text{"}
\end{array}$$

Стварно амортизоване обавезнице биће:

$$\begin{array}{llllll}
x_1 = 2272{,}9672; & x_1' = 2272.— & & \text{Остаје} & 0{,}9672 & \\
x_2 = 2418{,}0202; & x_2' = 2419.— & (+1) & + & 0{,}0502 & 1{,}0174 \\
\hline
 & & & \text{Остаје} & 0{,}0174 & \\
x_3 = 2572{,}3938; & x_3' = 2572.— & & + & 0{,}3938 & 0{,}4112 \\
\hline
 & & & \text{Остаје} & 0{,}4112 & \\
x_4 = 2736{,}5891; & x_4' = 2737.— & (+1) & + & 0.5891 & 1{,}0003 \\
\hline
m = 10000{,}0003; & m = 10000.— & & \text{Преостаје} & 0{,}0003 &
\end{array}$$

Амортизациони план биће:

Година	Обавезнице у течају	Обавезнице амортизоване	6% интерес		Отплата		Стварни ануитет	
—	10.000	—	60.000	—	—	—	60.000	—
1	7.728	2.272	46.368	—	227.200	—	273.568	—
2	5.309	2.419	31.854	—	241.900	—	273.754	—
3	2.737	2.572	16.422	—	257.200	—	273.622	—
4	—	2.737	—	—	273.700	—	273.700	—
	25.774	10.000	154.644	—	1,000.000	—	1,154.644	—

Чл. 76 Амортизоване обавезнице исплаћују се са ажијом. Овде, као и код декурзивног рачунања интереса, мора се прво наћи нова интересна стопа. Она се добија из истог обрасца, као и код декурзивног рачунања. Само ћемо је сада обележити са $п_1$; дакле:

$$п_1 = \frac{\alpha п}{\alpha_1}$$

Задатак. — Зајам од 1,000.000.— дин. амортизује се за 4 године годишњим једнаким ануитетом са 5% годишње антиципативно. Зајам је подељен на 10.000 обавезница по 100.— дин. Амортизоване обавезнице исплаћују се по 125.— дин. Интерес се исплаћује у виду купона. Израдити план отплаћивања.

Овде је: $K = 1{,}000.000.—$, $n = 4$, $п = 5\%$, $\alpha = 100$, $\alpha_1 = 125.—$ $m = \frac{K}{\alpha} = 10.000.—$, па је:

$$п_1 = \frac{100 \cdot 5}{125} = 4\%$$

Зато је:

$$a = m\, VI_{п_1}^4 = 10.000\, VI_4^4 = 2655{,}1003 \text{ обавезница}$$

Ако се узму иста обележавања као и у чл. 75 добиће се број теоријски амортизованих обавезница:

$$\begin{array}{rl}
x_4 = a = 2655{,}1003 & \text{обавезница} \\
-\frac{x_4 п_1}{100} = 106{,}2040 & \text{"} \\
\hline
x_3 = 2548{,}8963 & \text{"} \\
-\frac{x_3 п_1}{100} = 101{,}9558 & \text{"} \\
\hline
x_2 = 2446{,}9405 & \text{"} \\
-\frac{x_2 п_1}{100} = 97{,}8776 & \text{"} \\
\hline
x_1 = 2349{,}0629 & \text{"}
\end{array}$$

Број стварно амортизованих обавезница биће:

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 = 2349{,}0629; & x_1' = 2349.— & & \text{Остаје} & 0{,}0629 & \\
x_2 = 2446{,}9405; & x_2' = 2447.— & (+1) & + & 0{,}9405 & 1{,}0034 \\
\hline
 & & & \text{Остаје} & 0{,}0034 & \\
x_3 = 2548{,}8963; & x_3' = 2548.— & & + & 0{,}8963 & 0{,}8997 \\
\hline
 & & & \text{Остаје} & 0{,}8997 & \\
x_4 = 2655{,}1003; & x_4' = 2656.— & (+1) & + & 0{,}1003 & 1{,}0000 \\
\hline
m = 10000.— & m = 10000.— & & & — \text{ o } — &
\end{array}$$

Амортизациони план изгледа:

Година	Обавезнице у течају	Обавезнице амортизоване	5% интерес		Отплата		Ажија		Стварни ануитет	
—	10.000	—	50.000	—	—	—	—	—	50.000	—
1	7.651	2.349	38.255	—	234.900	—	58.725	—	331.880	—
2	5.204	2.447	26.020	—	244.700	—	61.175	—	331.895	—
3	2.656	2.548	13.280	—	254.800	—	63.700	—	331.780	—
4	—	2.656	—	—	265.600	—	66.400	—	332.000	—
	25.511	10.000	127.555	—	1,000.000	—	250.000	—	1,377.555	—

IV ДЕО

Курс зајма. Ефективна стопа зајма. Паритет курсева. Избор повољније понуде за зајам. Конверзија дугова

Чл. 77 Курс и ефективна стопа зајма. Код дугорочних зајмова уобичајено је да поверилац не даје дужнику 100 јединица у готову за 100 јединица у обавезници, већ једну суму мању. Број јединица које поверилац даје дужнику у готову за 100 јединица у обавезници зове се курс. Курс може бити емисиони и преузимања. Емисиони је онај по коме се врши продаја публици, а преузимања је онај по коме зајам преузимају посредници да обавезнице распродају публици. Јасно је да курс преузимања мора увек бити мањи од емисионог курса и да је разлика између ова два курса проценат посредничке провизије. Оба курса могу бити, не само мања, него и једнака, па и већа од 100. Према томе курс може бити тројак: испод пари — мањи од 100, ал пари — једнак 100, и изнад пари — већи од 100.

Када је курс мањи од 100, тада дужник прима мањи број јединица него што је издао у обавезницама. Јасно је да је обрнут случај када је курс изнад 100. Према томе ако се обележи: са К номинални капитал, са K_e ефективни капитал, са K_p капитал преузимања важе следеће неједначине:

За емисиони курс мањи од 100: $K_e < K, K_p < K$ и $K_p < K_e$
" " " једнак 100: $K_e = K, K_p < K$ и $K_p < K_e$
" " " већи од 100: $K_e > K, K_p \gtreqless K$ и $K_p < K_e$

За курс преузимања мањи од 100: $K_e < K, K_p < K$ и $K_p < K_e$
" " " једнак 100: $K_e > K, K_p = K$ и $K_p < K_e$
" " " већи од 100: $K_e > K, K_p > K$ и $K_p < K_e$

Ако се емисиони курс обележи са C_e, а преузимања са C_p, онда морају важити следеће једначине:

$$K_e = \frac{K \cdot C_e}{100} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (125)$$

и
$$K_p = \frac{K \cdot C_p}{100} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (126)$$

Две врсте капитала повлаче за собом и две врсте интересне стопе. Она која се налази на обавезници, ако је зајам подељен на обавезнице, или у обавези, ако зајам није подељен на обавезнице, зове се *номинална*, а она са којом се стварно плаћа интерес на ефективно примљени зајам, односно поверилац стварно пласира свој новац, зове се *ефективна*. Аналого курсу и ефективна стопа може бити двојака: ефективна *емисиона* и ефективна *преузимања**).

Поверилац даје зајам дужнику или одједном или у више транша. Теоријски број транша могао би бити једнак броју ануитета, па и већи, али он је у пракси обично мањи од броја ануитета. Рок полагања прве транше може бити један или више периода пре полагања првог ануитета. Исто тако све транше могу бити положене пре почетка плаћања првог ануитета.

Овде ћу прво извести једначину када се зајам реализује једном траншом, а потом са више транша. Разумљиво је да се при тражењу курса зајма мора знати ефективна стопа, а при тражењу ефективне стопе курс зајма.

Када се зајам реализује једном траншом онда ефективни зајам није ништа друго него сума свих издатака, који се морају учинити од стране дужника за рачун амортизације зајма, дисконтованих од дана исплате до дана реализовања.

Пошто је:
$$K_e = \frac{K\,C_e}{100}$$
то је:
$$\frac{K\,C_e}{100} = \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{v^3} + \ldots + \frac{a_n}{v^n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (127)$$

где је K номинални зајам, C_e емисиони курс, a_1, a_2, $a_3, \ldots,$ a_n ануитети, који се плаћају после 1, 2, 3, ..., n периода од дана реализовања зајам и $v = 1 + \frac{e}{100}$, где је e ефективна емисиона стопа зајма.

На исти начин добија се:
$$K_p = \frac{K\,C_p}{100} = a_0 + \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{v^3} + \ldots + \frac{a_n}{v^n} \ . \quad (128)$$

где је K номинални капитал, C_p курс преузимања, a_0, a_1, a_2, $a_3, \ldots,$ a_n ануитети, који се плаћају после 0, 1, 2, 3, ..., n периода од дана реализовања зајма и $v = 1 + \frac{e_p}{100}$, где је e_p ефективна стопа преузимања зајма.

*) Пошто је курс преузимања увек мањи од емисиононог курса то је ефективна стопа преузимања увек већа од ефективне емисионе стопе.

Једначине (127) и (128) важе за макакве ануитете, па, према томе, обухватају све издатке, који се морају учинити за службу зајма.

За случај реализовања зајма у више транша узимам: да транша има r, да се полажу у размаку од једног периода у ком се размаку плаћају и ануитети и да је прва транша m + 1 период пре плаћања првог ануитета.

Обележи ли се са K_1, K_2, $K_3, \ldots,$ K_n номинална вредност зајма 1, 2, 3, ..., r-те транше мора бити:
$$K_1 + K_2 + K_3 + \ldots K_r = K \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (129)$$
где K означава номинални износ зајма.

По принципу једнакости примања и издавања дисконтованих на један исти датум — у овом случају на дан пријема прве транше, добија се:

a) за емисиони курс
$$\frac{C_e}{100}\left(K_1 + \frac{K_2}{v} + \frac{K_3}{v^2} + \ldots + \frac{K_r}{v^{r-1}}\right) = \frac{a_1}{v^{m+1}} + \frac{a_2}{v^{m+2}} + \frac{a_3}{v^{m+3}} + \ldots + \frac{a_n}{v^{m+n}}$$
тј.
$$C_e = \frac{100}{v^m}\left(\frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{v^3} + \ldots + \frac{a_n}{v^n}\right) : \left(K_1 + \frac{K_2}{v} + \frac{K_3}{v^2} + \ldots + \frac{K_r}{v^{r-1}}\right) \ldots \quad (130)$$

b) за курс преузимања
$$\frac{C_p}{100}\left(K_1 + \frac{K_2}{v} + \frac{K_3}{v^2} + \ldots + \frac{K_r}{v^{r-1}}\right) = \frac{a_0}{v^m} + \frac{a_1}{v^{m+1}} + \frac{a_2}{v^{m+2}} + \frac{a_3}{v^{m+3}} + \ldots + \frac{a_n}{v^{m+n}}$$
тј.
$$C_p = \frac{100}{v^m}\left(a_0 + \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{v^3} + \ldots + \frac{a_n}{v^n}\right) : \left(K_1 + \frac{K_2}{v} + \frac{K_3}{v^2} + \ldots + \frac{K_r}{v^{r-1}}\right) \ldots \quad (131)$$

Једначине (130) и (131) опште су. Из њих се добија:

1) За m = o, r > 1 — што значи да се први ануитет плаћа један период после пријема прве транше, а број транша већи од један.
$$C_e = 100\left(\frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{v^3} + \ldots + \frac{a_n}{v^n}\right) : \left(K_1 + \frac{K_2}{v} + \frac{K_3}{v^2} + \ldots + \frac{K_r}{v^{r-1}}\right)$$
$$C_p = 100\left(a_0 + \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{v^3} + \ldots + \frac{a_n}{v^n}\right) : \left(K_1 + \frac{K_2}{v} + \frac{K_3}{v^2} + \ldots + \frac{K_r}{v^{r-1}}\right),$$ и

2) За $m = o$, $r = 1$ — што значи да се први ануитет плаћа један период после пријема прве транше, а број трanша један.

$$C_e = 100\left(\frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{v^3} + \ldots + \frac{a_n}{v^n}\right) : K \ldots\ldots\ldots\ldots (132)$$

$$C_p = 100\left(a_0 + \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \frac{a_3}{a^3} + \ldots + \frac{a_n}{v^n}\right) : K \ldots\ldots\ldots (133)$$

Транше се не морају полагати у размаку једне периоде. Између полагања две узастопне транше може бити и више периода. И у том случају важе једначине (130) и (131). Само тада у њима оне чланове, који одговарају периодама када се транше не полажу, треба изједначити са нулом.

Једначине (130) и 131) дају курс, кад су остали елементи познати, па ће се из њих добити и једна од осталих количина, кад је курс познат. Према томе из њих се рачунају и ефективна емисиона стопа зајма — једначина (130) — и ефективна стопа преузимања зајма — једначина (131), кад су познати курс и остале количине.

Предње једначине изведене су за плаћање интереса декурзивно. Када би се интерес плаћао антиципативно онда би се једначине морале саобразити том услову.

Овде ћу изнети неколико примера како се израчунава курс и ефективна стопа зајма када се интерес и ануитет плаћају декурзивно.

Чл. 78. Курс.

1) Ануитети константни а зајам се реализује једном траншом.

У овом случају треба у једначини (1·27) ставити: $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = a$. На тај начин добија се:

$$C_e = \frac{100\,a}{K}\, IV_e^n = 100\, V_p^n \cdot IV_e^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (134)$$

где је:
$$a = K \cdot V_p^n$$

На исти начин добија се за курс преузимања:

$$C_p = 100\, V_p^n\, IV_{e_p}^n + \frac{100}{K}\left(a_0 + \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \ldots + \frac{a_n}{v^n}\right) \ldots (135)$$

где су $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ издатци преко ануитета, које дужник чини повериоцу, односно посредницима, у виду провизије и осталих уговорних издатака на дан реализовања зајма, и после $1, 2, \ldots, n$ периода од дана реализовања зајма.

Неки од ових чланова могу бити једнаки нули, али $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ могу бити и једнаки међу собом. У том случају једначина (135) добија облик:

$$C_p = 100\, V_p^n\, IV_{e_p}^n + \frac{100\, a_0}{K}\left(1 + IV_{e_p}^n\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (136)$$

где је:
$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n$$

Примери: 1) Зајам од 1,000.000.— дин. амортизује се за 50 година годишњим једнаким ануитетом са интересом 5% годишње декурзивно. Наћи емисиони курс зајма кад је ефективна емисиона стопа зајма 6%.

Овде је: $n = 50$, $p = 5\%$, $e = 6\%$, па је:

$$C_e = 100\, V_5^{50}\, IV_6^{50} = 86{,}33$$

2) У примеру 1) наћи курс преузимања кад је ефективна стопа преузимања $6^1/_2\%$, а дужник даје повериоцу на дан реализовања зајма 2% од номиналног износа дуга.

Овде је: $n = 50$, $p = 5\%$, $e_p = 6^1/_2\%$, $a_0 = \frac{K \cdot 2}{100} = 20000$, $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$, па је:

$$C_p = 100\, V_5^{50} \cdot IV_{6^1/_2}^{50} + \frac{100}{K} \cdot a_0 = 100\, V_5^{50}\, IV_{6^1/_2}^{50} + 2 = 80{,}65 + 2 = 82{,}65$$

3) Наћи курс преузимања у примеру 1) кад ефективна стопа преузимања 6%, а дужник даје повериоцу на дан реализовања зајма 3% од номиналног износа дуга.

Овде је: $n = 50$, $p = 5\%$, $e_p = 6\%$, $a_0 = \frac{K \cdot 3}{100} = 30000$, $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$, па је:

$$C_p = 100\, V_5^{50}\, IV_6^{50} + \frac{100}{K}\, a_0 = 100\; V_5^{50} \cdot IV_6^{50} + 3 = 86{,}33 + 3 = 89{,}33$$

4) Наћи курс преузимања у примеру 1) кад је ефективна стопа преузимања $6^1/_2\%$, а дужник даје повериоцу поред ануитета још и 1% од номиналне суме дуга на дан реализовања зајма и при сваком плаћању ануитета.

Овде је: $n = 50$, $p = 5\%$, $e_p = 6^1/_2\%$, $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1000$, па је:

$$C_p = 100\, V_5^{50}\, IV_{6^1/_2}^{50} + \frac{100\, a_0}{1000000}\left(1 + IV_{6^1/_2}^{50}\right) = 80{,}65 + \left(1 + IV_{6^1/_2}^{50}\right) = 80{,}65 + 15{,}72 = 96{,}37$$

5) Наћи курс преузимања у примеру 1) кад је ефективна стопа преузимања $6^1/_2\%$ а дужник даје повериоцу само ануитет.

Овде је: $n = 50$, $p = 5\%$, $e_p = 6^1/_2\%$, $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, па је;

$$C_p = 100\, V_5^{50}\, IV_{6^1/_2}^{50} = 80{,}65$$

2) Ануитети константни а зајам се реализује у више транша.

У овом случају треба у једначини (130) ставити: $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = a$. На тај начин добија се:

$$C_e = 100\, a\, IV_e^n\, II_e^m : \left(K_1 + \frac{K_2}{v} + \frac{K_3}{v^2} + \ldots + \frac{K_r}{v^{r-1}}\right) \quad \ldots \quad (137)$$

где је: $a = K\, V_p^n$

На исти начин добија се:

$$C_p = \left[a\, IV_{e_p}^n + \left(a_0 + \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \ldots + \frac{a_n}{v^n}\right)\right] 100\, II_{e_p}^n : \left(K_1 + \frac{K_2}{v} + \right.$$
$$\left. + \frac{K_3}{v^2} + \ldots + \frac{K_r}{v^{r-1}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (138)$$

где је: $a = K\, V_p^n$,

а $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ издатци преко ануитета, које дужник чини повериоцу, односно посредницима, после $0, 1, 2, \ldots, n$ периода од дана реализовања зајма.

За случај $a_0 > 0$, а $a_1 = a_2 = \ldots = 0$ једначина (138) постаје:

$$C_p = [a\, IV_{e_p}^n + a_0]\, 100\, II_{e_p}^m : \left(K_1 + \frac{K_2}{v} + \frac{K_3}{v^2} + \ldots + \frac{K_r}{v^{r-1}}\right) \quad . \quad (139)$$

Када је: $a_0 = a_1 = a_3 = \ldots = a_n$ једначина (138) постаје:

$$C_p = [a\, IV_{e_p}^n + a_0 (1 + IV_{e_p}^n)]\, 100\, II_{e_p}^m : \left(K_1 + \frac{K_2}{v} + \frac{K_3}{v^2} + \ldots + \frac{K_r}{v^{r-1}}\right) (140)$$

Примери: 1) Зајам од 1000000.— дин. амортизује се за 50 година годишњим једнаким ануитетом са интересом 5% годишње декурзивно. Наћи емисиони курс зајма кад је ефективна емисиона стопа зајма 6%, а зајам се реализује у 4 једнаке транше и то прва транша одмах, а остале у размаку од годину дана. Први ануитет плаћа се a) 11 година после пријема прве транше, b) годину дана после пријема прве транше.

Овде је:

a) $n = 50$, $p = 5\%$, $e = 6\%$, $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 250000$, $m = 10$, па се из једначине (137) добија:

$$C_e = 100\, a\, IV_6^{50}\, II_6^{10} : K_1 (1 + IV_6^3) = 100\, K\, V_5^{50}\, IV_6^{50}\, II_6^{10} : K_1 (1 + IV_6^3) =$$
$$= 100 \cdot 4 \cdot K_1\, V_5^{50}\, IV_6^{50}\, II_6^{10} : K_1 (1 + IV_6^3) = 400 \cdot V_5^{50}\, IV_6^{50}\, II_6^{10} : (1 + IV_6^3) =$$
$$= 192{,}82 : 3{,}67301195 = 52{,}50$$

b) $n = 50$, $p = 5\%$, $e = 6\%$, $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 250000$, $m = 0$, па се из једначине (137) добија:

$$C_e = 100 \cdot 4\, K_1\, V_5^{50} \cdot IV_6^{50} : K_1 (1 + IV_6^3) = 400\, V_5^{50}\, IV_6^{50} : (1 + IV_6^3) =$$
$$= 345{,}32 : 3{,}67301195 = 94{,}02$$

2) Наћи курс преузимања у примеру 1) кад је ефективна стопа преузимања $6^1/_2\%$, а дужник даје повериоцу на дан пријема прве транше 2% од целокупне суме дуга.

Овде је:

a) $n = 50$, $p = 5\%$, $e_p = 6^1/_2\%$, $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 250000.$—, $m = 10$, $a_0 = 20000$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, па из једначине (138) следује:

$$C_p = [a\, IV_{6^1/_2}^{50} + a_0]\, 100\, II_{6^1/_2}^{10} : K_1 (1 + IV_{6^1/_2}^3) = [1000000\, V_5^{50}\, IV_{6^1/_2}^{50} +$$
$$+ 20000]\, 100\, II_{6^1/_2}^{10} : 250000 (1 + IV_{6^1/_2}^3) = [100\, V_5^{50}\, IV_{6^1/_2}^{50} + 2]\, 100\, II_{6^1/_2}^{10} : 25 (1 +$$
$$+ IV_{6^1/_2}^3) = 82{,}65 \cdot 100\, II_{6^1/_2}^{10} : 25 (1 + IV_{6^1/_2}^3) = 4402{,}97 : 91{,}2119 = 48{,}27$$

b) $n = 50$, $p = 5\%$, $e_p = 6^1/_2\%$, $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 250000$, $m = 0$, $a_0 = 20000$, $a_1 = a_2 = \ldots, = a_n = 0$, па из једначине (139) следује:

$$C_p = [a \cdot IV_{6^1/_2}^{50} + a_0]\, 100 : K_1 (1 + IV_{6^1/_2}^3) =$$
$$[100\, V_5^{50}\, IV_{6^1/_2}^{50} + 2]\, 100 : 25 (1 + IV_{6^1/_2}^3) = 8265 : 91{,}2119 = 90{,}61$$

3) Ануитети заокругљени тј. првих n—1 константни а n-ти мањи, а зајам се реализује једном траншом.

У овом случају треба ставити у једначини (127): $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = a$. На тај начин добија се:

$$C_e = (100\, a\, IV_e^{n-1} + 100\, a_n\, II_e^n) : K = (100\, K\, V_p^n \cdot IV_e^{n-1} +$$
$$+ 100\, a_n\, II_e^n) : K = 100\, V_p^n\, IV_e^{n-1} + \frac{100\, a_n\, II_e^n}{K} \quad \ldots\ldots \quad (141)$$

Ако се ради са номиналним капиталом 100 ($K = 100$), онда једначина (141) добија простији облик:

$$C_e = 100\, V_p^n \cdot IV_e^{n-1} + a_n\, II_e^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (142)$$

где је сада a_n ануитет, који дужник плаћа на крају n-те периоде за дуг од 100 дин. номиналних.

Према томе за курс преузимања, под претпоставком да је $K = 100$, имамо једначину:

$$C_p = 100\, V_p^n \cdot IV_{e_p}^{n-1} + a_n\, II_{e_p}^n + \left(a_0 + \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \ldots + \frac{a_n}{v^n}\right) \quad (143)$$

где су $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ суме, које дужник даје посреднику поред редовног ануитета на име провизије и осталих трошкова после 0, 1, 2,...., n периода од дана реализовања зајма, а $v = 1 + \frac{e_p}{100}$

Ако је: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, а $a_0 > 0$, онда једначина (143) добија облик:

$$C_p = 100\, V_p^n\, IV_{ep}^{n-1} + a_n\, II_{ep}^n + a_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (144)$$

Ако је:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n$$

онда је:

$$C_p = 100\, V_p^n\, IV_{ep}^{n-1} + a_n\, II_{ep}^n + a_0 (1 + IV_{ep}^n) \quad \ldots \quad (145)$$

Примери: 1) Зајам треба да се амортизује годишњим ануитетом 8% а са интересом 4% годишње декурзивно. Наћи емисиони курс зајма кад је ефективна емисиона стопа зајма 5%.

Пре изналажења курса мора се наћи време амортизације. Из једначине:

$$a = K\, V_p^n$$

следује:

$$V_4^n = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

У стубцу 4% V таблице, у врсти 17-тој налази се број 0,082..., а у врсти 18-тој број 0,078..., што значи да је време амортизације 18 година, али да се 17 година плаћа ануитет 8%, а 18-те ануитет мањи од 8%.

Тај ануитет израчунава се из једначине:

$$a_n = R_1 + \frac{R_1\, p}{100}$$

Овде је:

$$R_1 = K - b_1 (1 + III_p^{n-2}) = 100 - 4\,(1 + III_4^{16}) = 100 - 94{,}79 = 5{,}21, \text{ а}$$

$$a_n = 5{,}21 + \frac{5{,}21 \cdot 4}{100} = 5{,}21 + 0{,}21 = 5{,}42$$

Према томе тражени курс биће:

$$C_e = 100\, V_4^{18}\, IV_5^{17} + 5{,}42\, II_5^{18} = 89{,}05 + 2{,}25 = 91{,}30$$

2) Колики је курс преузимања у примеру 1) кад је ефективна стопа преузимања $5^1/_2$% а дужник даје посреднику на име провизије a) на дан реализовања зајма 1,5% од номиналне суме дуга, b) на дан реализовања зајма и при сваком плаћању ануитета 0,5% од номиналне суме зајма.

Овде је:

a) $C_p = 100\, V_4^{18}\, IV_{5^1/_2}^{17} + 5{,}42\, II_{5^1/_2}^{18} + 1{,}50 = 85{,}80 + 2{,}07 + 1{,}50 = 89{,}37$

b) $C_p = 100\, V_4^{18} \cdot IV_{5^1/_2}^{17} + 5{,}42\, II_{5^1/_2}^{18} + 0{,}50\,(1 + IV_{5^1/_2}^{18}) = 87{,}87 + 6{,}37 = 94{,}24.$

Чл. 79 Ефективна стопа зајма. Када је познат курс онда једначина (134) даје емисиону ефективну стопу, а једначина (135) ефективну стопу преузимања. Док израчунавање курса не преставља никакву тешкоћу дотле је израчунавање ефективне стопе, у извесним случајевима, алгебарски немогуће, јер нису познате методе помоћу којих се могу наћи корени ових једначина. Та се незгода избегава применом таблица и израчунавање се врши приближно тачно линеарном интерполацијом. Ова тачност за праксу је довољна. Овде ћу узети случајеве, које сам узео и за изналажење курса.

1) Ануитети константни, а зајам се реализује једном траншом.

Ефективна емисиона стопа зајма добија се из једначине (134), а ефективна стопа преузимања из једначине (135), односно једначине (136).

Примери: 1) Зајам од 1,000.000.—. амортизује се за 50 година годишњим једнаким ануитетом са интересом 5% годишње декурзивно. Наћи ефективну емисиону стопу зајма кад је ефективни емисиони курс 86,33%.

Овде је: $n = 50$, $p = 5\%$, $C_e = 86{,}33$, па је:

$$C_e = 100\, V_p^n\, IV_e^n$$

тј.

$$86{,}33 = 100\, V_5^{50}\, IV_e^{50}.$$

А одавде:

$$IV_e^{50} = \frac{86{,}33}{100} \cdot IV_5^{50} = 15{,}7603$$

У 50-тој врсти IV таблице у стубцу 6% налази се број 15,76186, а у стубцу $6^1/_2$% број 14,72452. Линеарном интерполацијом добија се приближно тачна стопа 6,0007%, што се са довољно тачности може узети као 6%.

2) У примеру 1) наћи ефективну стопу преузимања кад дужник даје повериоцу на дан реализовања зајма 2% од номиналног износа дуга а курс преузимања је 82,65.

Овде је: $n = 50$, $p = 5\%$, $C_p = 82{,}65$, $a_0 = \frac{K \cdot 2}{100} = 20000$, $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = o$, па је:

$$C_p = 100\, V_p^n\, IV_{ep}^n + \frac{100}{K}\, a_0$$

тј.

$$82{,}65 = 100\, V_5^{50}\, IV_{ep}^{50} = \frac{100}{1000000} \cdot 20000$$

А одавде:

$$82{,}65 = 100\, V_5^{50}\, IV_{ep}^{50} + 2$$

Одавде следује:

$$IV_{ep}^{50} = \frac{82{,}65 - 2}{100} \cdot IV_5^{50} = 0{,}8065 \cdot IV_5^{50} = 14{,}7233$$

У 50-тој врсти IV таблице у стубцу $6^1/_2\%$ налази се број 14,7245, а у стубцу 7% број 13,8007. Линеарном интерполацијом добија се стопа 6,5006, што са довољном тачношћу чини да је:

$$e_p = 6^1/_2\%$$

3) Наћи ефективну стопу преузимања у примеру 1) кад је курс преузимања 96,37, а дужник даје повериоцу поред ануитета још и 1% од номиналне суме зајма на дан реализовања зајма и при сваком плаћању ануитета.

Овде је: $n = 50$, $p = 5\%$, $C_p = 96{,}37$, $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 10000$, па је:

$$C_p = 100\, V_p^n IV_{ep}^n + \frac{100\, a_0}{K}(1 + IV_{ep}^n)$$

тј.

$$96{,}37 = 100\, V_5^{50} IV_{ep}^{50} + \frac{100 \cdot 10000}{1000000}(1 + IV_{ep}^{50})$$

А одавде:

$$IV_{ep}^{50} = \frac{96.37 - 1}{100\, V_5^{50} + 1} = 14{,}7229$$

Линеарном интерполацијом добија се:

$$e_p = 6^1/_2\%$$

2) Ануитети константни а зајам се реализује у више транша.

Ефективна емисиона стопа зајма добија се из једначине (137), а ефективна стопа преузимања из једначине (138). односно једначина (139) и (140).

Примери: 1) Зајам од 1,000.000 дин. амортизује се за 50 година годишњим једнаким ануитетом са интересом 5% годишње декурзивно. Наћи ефективну емисиону стопу зајма када је емисиони курс 52,50%, а зајам се реализује у 4 једнаке транше и то: прва транша одмах а остале у размаку од годину дана. Први ануитет плаћа се 11 година после пријема прве транше.

Овде је: $n = 50$, $p = 5\%$, $C_e = 52{,}50$, $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 250000$, $m = 10$, па је:

$$C_e = 100\, a\, IV_e^{50}\, II_e^{10} : K_1 (1 + IV_e^3)$$

тј.

$$52{,}50 = 100\, K\, V_5^{50} \cdot IV_e^{50}\, II_e^{10} : K_1 (1 + IV_e^3)$$

А одавде:

$$52{,}50 = 100 \cdot 1000000\, V_5^{50}\, IV_e^{50}\, II_e^{10} : 250000 (1 + IV_e^3)$$

тј.

$$52{,}50 = 400\, V_5^{50}\, IV_e^{50}\, II_e^{10} : IV_e^4\, I_e^1$$

Одавде је:

$$IV_e^{50} \cdot V_e^4 \cdot II_e^{11} = \frac{52\ 50}{400} \cdot IV_5^{50}$$

Пошто је:

$$IV_e^{50} = \frac{100}{e}(1 - II_e^{50}),$$

а

$$V_e^4 = \frac{e}{100} \cdot \frac{1}{1 - II_e^4},$$

то је:

$$IV_e^{50}\, V_e^4\, II_e^{11} = \frac{1 - II_e^{50}}{1 - II_e^4} \cdot II_e^{11} = \frac{II_e^{11} - II_e^{61}}{1 - II_e^4}$$

Па зато

$$\frac{II_e^{11} - II_e^{61}}{1 - II_e^4} = \frac{52{,}50}{400} IV_5^{50} = 2{,}3961$$

Када се место e стави 6 добија се резултат смене 2,397, што значи да је ефективна емисиона стопа приближно 6% годишње.

2) У примеру 1) наћи ефективну емисиону стопу кад је ефективни курс 94,02, а први ануитет плаћа се годину дана после пријема прве транше зајма.

Овде је: $n = 50$, $p = 5\%$, $C_e = 94{,}02$, $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 250000$, $m = 0$, па је:

$$C_e = 100 \cdot 4 \cdot K_1\, V_5^{50}\, IV_e^{50} : K_1 (1 + IV_e^3) = 400\, V_5^{50} IV_e^{50} : (1 + IV_e^3)$$

тј.

$$94{,}02 = 400\, V_5^{50}\, IV_e^{50} : (1 + IV_e^3) = 400\, V_5^{50} \cdot IV_e^{50} \cdot V_e^4 \cdot II_e^1$$

А одавде следује:

$$IV_e^{50}\, V_e^4\, II_e^1 = \frac{94{,}02}{400} IV_5^{50}$$

Пошто је:

$$IV_e^{50} \cdot V_e^4 \cdot II_e^1 = \frac{1 - II_e^{50}}{1 - II_e^4} II_e^1 = \frac{II_e^1 - II_e^{51}}{1 - II_e^4}$$

то је:

$$\frac{II_e^1 - II_e^{51}}{1 - II_e^4} = \frac{94{,}02}{400} \cdot IV_5^{50} = 4{,}2911$$

Замењујући e са 6% добија се 4,2913, што значи да је ефективна емисиона стопа 6%, јер разлика од 0,0003 не утиче на резултат.

3) Наћи ефективну стопу преузимања у примеру 1) кад је курс преузимања 48,27, а дужник поред плаћања ануитета даје повериоцу на дан пријема прве транше 2% од целокупне суме дуга.

Овде је: $n = 50$, $p = 5\%$, $C_p = 48{,}27$, $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 250000$, $m = 10$, $a_0 = 20000$, $a_1 = a_2 = \ldots. = a_n = 0$, па је:

$$C_p = \left[K\, V_5^{50} \cdot IV_{e_p}^{50} + a_0\right]\, 100\, II_{e_p}^{10} : K_1 \left(1 + IV_{e_p}^{3}\right) = 48{,}27$$

Из ове једначине добија се:

$$\left(400\, V_5^{50}\, IV_{e_p}^{50} + 8\right) II_{e_p}^{11}\, V_{e_p}^{4} = 48{,}27.$$

А одавде добија се тражена стопа када се e_p смени са једном стопом већом од номиналне стопе и та смена врши све дотле док се не нађу две стопе које дају једну већу и једну мању вредност од 48,27.*) Када се нађу такве две стопе онда се врши приближавање стварној стопи на тај начин да се мања стопа повишава а већа смањује. Кад се на тај начин дође до две узастопне стопе постојеће у таблици, онда се изврши линеарна интерполација, која ће дати приближно тачну, али за праксу довољно тачну вредност. Наиђе ли се при том смењивању на стопу која даје број 49,27*) онда је та стопа ефективна стопа преузимања зајма.

Ако се у предњој једначини изврши смена:

$$e_p = 6^1/_2$$

добија се резултат:

$$48{,}27,$$

што значи да је ефективна стопа преузимања $6^1/_2\%$.

4) Наћи ефективну стопу преузимања у примеру 3) када је курс преузимања 90,70, а први ануитет плаћа се годину дана после примљене прве транше.

Овде је: $n = 50$, $p = 5\%$, $C_p = 90{,}70$, $K_1 = K_2 = \ldots. = K_n = 250000$, $m = 0$, $a_0 = 20000$, $a_1 = a_2 = \ldots. = a_n = 0$, па је:

$$\left(400\, V_5^{50} \cdot IV_{e_p}^{50} + 8\right) V_{e_p}^{4}\; II_{e_p}^{1} = 90{,}50$$

Резултат смене $e_p = 6^1/_2$ даје 90,61, а смене $e_p = 6\%$ даје 96,20. Пошто је: $90{,}61 < 90{,}70 < 96{,}20$, то је:

$$6 < e_p < 6^1/_2$$

Приближно тачну стопу даје линеарна интерполација:

96,20 90,61	6 $6^1/_2$	96,20 90,70	6 e_p
— 5,59	$+ ^1/_2$	— 5,50	$+(e_p - 6)$

*) Ово је курс преузимања зајма.

$$5{,}59 : 5{,}50 = \tfrac{1}{2} : (e_p - 6)$$

$$e_p = 6 + \frac{2{,}75}{5{,}59} = 6 + 0{,}491 = 6{,}491\,\%.$$

Чл. 80 Паритет курсева. Видели смо да курс, између осталог, зависи од величине ефективне интересне стопе и обратно. Даље смо видели да његова величина зависи и од времена амортизације, начина плаћања ануитета и величине номиналне стопе зајма. Сама величина зајма не утиче ништа на курс зајма.

У пракси је често потребно променити један од ових елемената па да за дужника буде оптерећење исто. Тако нпр. потребно је променити номиналну интересну стопу, а остале елементе оставити исте. Разумљиво је из напред изложеног да ће се у том случају курс променити. Али да би за дужника било исто оптерећење морају капитал и ануитет остати исти, а то ће рећи да и ефективна стопа мора остати иста. Ако два курса испуњавају овај услов онда се каже да су они у равнотежи или да су паритетни.

Овде ћемо узети само паритете курсева кад је њихово време амортизације исто. Али ћемо исто тако узети само случај једнаких ануитета, јер је то најчешћи случај у пракси.

Нека је државн потребан зајам од E дин. ефективних и хоће да изда обавезнице са номиналном стопом p_1 или p_2. Када обавезнице са p_1 може да пласира са $c\%$ по колико % може пласирати обавезнице p_2 па да у оба случаја прими E дин. ефективних и да у току n периода плаћа крајем сваће периоде у оба случаја по a динара на име ануитета?

Ефективном капиталу E, а курсу C_1 одговара номинални капитал:

$$K_1 = \frac{100\,E}{C_1}.$$

А ефективном капиталу E и курсу C_2 одговара номинални капитал:

$$K_2 = \frac{100\,E}{C_2}.$$

Пошто су у оба случаја ануитети исти то мора бити:

$$a = K_1 V_{p_1}^{n} = K_2 V_{p_2}^{n}$$

тј. после смене вредности K_1 и K_2:

$$\frac{100\,E}{C_1} V_{p_1}^{n} = \frac{100\,E}{C_2} V_{p_2}^{n}$$

Деобом ове једначине са 100 E добија се једначина (пропорција):

$$V_{p_1}^{n} : C_1 = V_{p_2}^{n} : C_2$$

која не зависи од величине зајма.

Одавде излази:

$$C_1 : C_2 = V^n_{p_1} : V^n_{p_2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (146)$$

Из ове пропорције види се да су курсеви управо пропорционални са ануитетима.

Према томе тражени паритетни курс биће:

$$C_2 = C_1\, IV^n_{p_1} V^n_{p_2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (147)$$

Пример. — Држави је потребан зајам од 500 милиона ефективних динара да их амортизује за 25 година полугодишњим једнаким ануитетом са декурзивним рачунањем интереса. Хоће да изда обавезнице 8% или 10%. Једна банкарска група прима обавезнице 8% по курсу 80% а пристаје да прими и обавезнице 10% по паритетном курсу. Колики је паритетни курс?

Овде је: $C_1 = 80$, $p_1 = 4$, $p_2 = 5$, $n = 50$, па из једначине (147) следује:

$$C_2 = 80 \cdot IV^{50}_4\, V^{50}_5 = 94{,}13 \text{ дин.}$$

Према томе и за државу и за банкарску групу свеједно је да ли ће се издавати обавезнице 8% по курсу 80% или обавезнице 10% по курсу 94,13%, јер у оба случаја, за исти ефективни капитал, о истим роковима и исти број пута, полаже се иста сума на име ануитета. Зато су ова два курса паритетна.

Чл. 81 Избор повољније понуде за зајам. Када држава, односно општина, област, предузеће или појединац добије више понуда за зајам онда од тих свих понуда треба, са рачунске стране посматрано, изабрати најповољнију. Тај избор може се извршити на три начина: помоћу паритета курсева, помоћу ануитета и помоћу ефективне интересне стопе. На једном примеру показаћу сва три начина.

Примери: 1) Држави је потребан зајам од 50 милиона дин. и хоће да га отплати за 40 година плаћајући ануитет и интерес годишње у назад. Добила је две понуде: 80% за обавезнице, које носе 5% номиналних и 90% за обавезнице 6% номиналних. Која је понуда повољнија?

а) Помоћу паритета курсева

Ако курс прве понуде обележимо са C_1, њену номиналну стопу са p_1, емисиону ефективну са e_1 и време амортизације са n, а код друге понуде исте те елементе са C_2, p_2, e_2 и n, онда је:

$$C_1 = 80\%,\ p_1 = 5\%,\ e_1 = ?,\ n = 40$$
$$C_2 = 90\%,\ p_2 = 6\%,\ e_2 = ?,\ n = 40$$

Да бисмо знали која је понуда боља за дужника претпоставићемо да је један курс (свеједно је који) познат па тражити њему паритетни. Ако у овом примеру претпоставимо да је

курс прве понуде познат и њему одговарајући паритетни курс обележимо са C_2 (c_1) онда ће бити:

$$C_2(c_1) = C_1\, IV^n_{p_1} \cdot V^n_{p_2} = 80 \cdot IV^{40}_5 \cdot V^{40}_6 = 91{,}22\%$$

Овај нам паритетни курс каже да би обе понуде биле исте када би друга понуда давала 91,22% за обавезнице са 6%. Пошто она даје 90%, дакле мање за 1.22%, то је лошија од прве понуде — 80% за обавезнице са 5%.

Ако сада тражимо паритетни курс курсу друге понуде и тај курс обележимо, аналого предњој нотацији, са C_1 (c_2) биће:

$$C_1(c_2) = C_2\, IV^n_{p_2} \cdot V^n_{p_1} = 90 \cdot IV^{40}_6 \cdot V^{40}_5 = 79{,}012\%$$

Ово значи да би прва понуда требала да даје 79,012% за обавезнице 5%, када друга даје 90% за обавезнице 6%. А она даје 80%; дакле више за 0,998%, па је зато повољнија од друге.

Оба резултата казују да је прва понуда повољнија.

b) Помоћу ануитета.

Треба за исти ефективни капитал наћи одговарајући номинални капитал и израчунати ануитет на тај номинални капитал. Повољнија понуда биће она, која има мањи ануитет, јер дужник у оба случаја прима исти број јединица. Најбоље је радити са ефективним капиталом од 100. Што важи за 100 дин. важиће и за макоји други капитал.

Дакле у овом случају држава за сваких 100 ефективних динара издаје обавезницу:

код прве понуде на $K_1 = 100 \cdot 100 : 80 = 125.$— дин.; а
„ друге „ „ $K_2 = 100 \cdot 100 : 90 = 111{,}11$ дин.

Ако ануитете обележимо са a_1 и a_2 онда ће бити:

$$a_1 = 125\, V^{40}_5 = 7{,}28 \text{ дин., а}$$
$$a_2 = 111{,}11\, V^{40}_6 = 7{,}39 \text{ дин.}$$

Ануитет прве понуде мањи је, па је зато прва понуда повољнија.

c) Помоћу ефективне интересне стопе.

Овај начин је најмање препоручљив, јер захтева да се сврше сва рачунања као и код израчунавања помоћу ануитета, а затим тражи ефективна емисиона стопа зајма за сваку понуду. Повољнија је она понуда, која има мању емисиону ефективну стопу.

Према томе биће:

за прву понуду $V^{40}_{e_1} = \dfrac{7.27}{100} = 0{,}0728$, што даје $e_1 = 6{,}744\%$;

за другу понуду $V^{40}_{e_2} = \dfrac{7{,}39}{100} = 0{,}0739$, што даје $e_2 = 6{,}875\%$.

Прва понуда има мању ефективну емисиону стопу па је повољнија од друге.

2) Једна општина добила је следеће три понуде:

I) $C_1 = 80\%$ са 5% годишње декурзивно за 40 година,
II) $C_2 = 90\%$ „ 6% „ „ „ 40 „
III) $C_3 = 95\%$ „ $6^1/_2\%$ „ „ „ 40 „

Која је понуда најповољнија?

Овај пример, као и пример 1) може се решити на сватри начина. Али ћемо овде решити га помоћу паритета курсева и помоћу ануитета, јер помоћу ефективне интересне стопе није потребно, пошто смо видели у примеру 1) да је то излишан посао после израчунавања ануитета.

a) Помоћу паритета курсева.

Прво се упореде прва и друга понуда и види која је повољнија. Пошто је овде C_2 (c_1) паритетни курс курсу C_1 за обавезнице са $p_2\%$ номиналних, то је:

$$C_2(c_1) = C_1 IV^n_{p_1} \cdot V^n_{p_2} = 80 \cdot IV^{40}_5 \cdot V^{40}_6 = 91{,}22\%$$

Ово нам каже да је прва понуда боља од друге, јер би друга, када тражи обавезнице 6%, морала давати $91{,}22\%$, па да буде једнака са првом понудом, која даје 80% за обавезнице 5%, а она даје само 90%, дакле за $1{,}22\%$ мање.

Пошто је друга лошија од прве понуде то се она даље не узима у обзир, већ се даље упоређује прва са трећом. Ако је паритетни курс за трећу понуду $C_3(c_1)$, онда је:

$$C_3(c_1) = C_1 IV^n_{p_1} V^n_{p_3} = 80 \cdot IV^{40}_5 \cdot V^{40}_{6^1/_2} = 97{,}032\%$$

Да би трећа понуда била једнака са првом треба да даје $97{,}032\%$, а даје 95% — мање за $2{,}032\%$, па је прва понуда повољнија од треће.

Према томе прва понуда је најповољнија.

Примедба. — Када би било више понуда онда би се упоређивале 1 и 2 и лошија избацила. Затим она која је од 1 и 2 боља са 3 и, после избацивања једне од ове две, преостала са 4 итд. док се не упореди са последњом. Резултат упоређења најбоље од n—1 понуде са n-том јесте најповољнија понуда од свих n понуда.

b) Помоћу ануитета.

Ако је ефективни капитал 100 онда је номинални капитал

код прве понуде: $K_1 = 100 \cdot 100 : 80 = 125$.— дин.,
„ друге „ $K_2 = 100 \cdot 100 : 90 = 111{,}11$ „
„ треће „ $K_3 = 100 \cdot 100 : 95 = 105{,}26$ „

А ануитети биће:

код прве понуде: $a_1 = K_1 V^n_{p_1} = 125\, V^{40}_5 = 7{,}28$ дин.,
„ друге „ $a_2 = K_2 V^n_{p_2} = 111{,}11\, V^{40}_6 = 7{,}39$ дин.,
„ треће „ $a_3 = K_3 V^n_{p_3} = 105{,}26\, V^{40}_{6^1/_2} = 7{,}43$ „

Прва понуда има најмањи ануитет, па је, према томе, најповољнија од ове три понуде.

Примедба. — Помоћу ануитета налази се не само најповољнија понуда, него се израчунава и ранг листа понуда. Међутим паритет курсева даје само одговор која је понуда најповољнија, али не и ранг сваке понуде.

Чл. 82 Конверзија дугова. Под конверзијом дуга разуме се промена једног од елемената амортизације дуга: смањење номиналне интересне стопе; повећање или смањење времена амортизације; смањење номиналне интересне стопе а повећање или смање времена амортизације; повећање времена амортизације са истом номиналном интересном стопом; повећање времена амортизације са смањеном интересном стопом. У свим случајевима резултат конверзије је промена ануитета. При конверзији се тежи да се добије олакшање плаћања. Ово олакшање постиже се смањењем ануитета. Смањење ануитета постиже се или смањењем номиналне интересне стопе или пролонгацијом времена амортизације или и смањењем номиналне интересне стопе и пролонгацијом (повећањем) времена амортизације.

Конверзија се може извршити: 1) Пристанком имаоца обавезница да за старе обавезнице прими нове, и 2) Закључењем новог зајма под повољнијим условима него што су услови старог зајма и исплатом остатка дуга старог зајма из срестава новодобивеног зајма.

Други начин омогућује дужнику да терет по старом дугу смањи, али му исто тако даје могућност да суму задужења повећа до висине која би дала стари ануитет па да тај ануитет и пређе. Први начин смањује ануитет а дуг не повећава.

У сваком случају конверзије потребно је знати остатак дуга на дан конверзије. Ту могу настати ови случајеви:

1) Од дана плаћања последњег ануитета до дана конверзије није протекао период времена у ком се размаку плаћа ануитет;

2) Дан конверзије пада на дан плаћања наредног ануитета; и

3) Од дана последњег плаћеног ануитета до дана конверзије протекло је више од једног периода плаћања ануитета.

Према томе остатак дуга, при декурзивном рачунању интереса, биће у сва три случаја једнак остатку дуга на дан последњег плаћеног ануитета увећан са интересом на интерес за време од последњег плаћеног ануитета до дана конверзије.

При антиципативном рачунању интереса остатак дуга на дан конверзије биће:

У случају под 1) остатак дуга на дан последњег плаћања ануитета умањен за интерес од дана конверзије до рока наредног плаћања ануитета. Овај интерес рачуна се од остатка дуга рачуном од сто — по обрасцу $i = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$, а у случају под 2) и 3) остатак дуга на дан последњег плаћања ануитета увећан интересом на интерес за време од дана наредног плаћања ануитета до дана конверзије.

У пракси се доста често јавља случај где дужник на дан конверзије своди дуг на једну одређену суму па за остатак добија повољније услове амортизације.

Исто тако јавља се и случај да дужник путем конверзије спаја више дугова у један. У том случају мора се за сваки дуг посебно наћи износ остатка дуга на дан конверзије и тако нађени остатци сабрати, па за тако нађени збир наћи ануитет са новим елементима амортизације.

Из следећих примера види се како се врши конверзија.

Први пример. — Држава је закључила зајам од 100 милиона динара да га отплати за 25 година са 6% годишње. Интерес као и ануитет да плаћа полугодишње уназад. Дан првог плаћања ануитета јесте 1 април 1900 год., а 15 маја 1910 године извршена је конверзија дуга. Колики ће ануитет држава даље плаћати, ако се интересна стопа смањује на 5%, а време амортизације повећава још за 5 година, остављајући за рокове плаћања ануитета 1 април и 1 октобар?

Овде могу бити три случаја. Први случај да се промена интересне стопе рачуна од 15 маја 1910 год., други од дана првог наредног плаћања ануитета, дакле од 1 октобра 1910 год., а трећи од последњег плаћеног ануитета — 1 априла 1910 год.

У сва три случаја мора се наћи ануитет на остатак дуга на дан 1 априла 1910 године.

Ануитет који је био плаћен 1 априла 1910 године био је:

$$a = 100000000\, V_3^{50} = 3886550.\text{— дин.}$$

Па је остатак дуга на дан 1 априла 1910 године:

$$R_{30} = a\, IV_3^{30} = 3886550 \cdot 19{,}60044135 = 76178095{,}32 \text{ дин.}$$

Према томе ако промена стопе важи од 1 априла 1910 године нови ануитет биће:

$$a_1 = R_{30} \cdot V_{2^1/_2}^{40} = 3034648{,}11 \text{ дин.}$$

Ако промена интересне стопе важи од 15 маја онда ануитет, који се плаћа 1 октобра 1910 год. треба увећати за интерес $^1/_2\%$ полугодишње на R_{30} дин. од 1-IV-1910 до 15-V-1910 год., јер ануитет садржи за то време интерес $2^1/_2\%$ полугодишње, а треба да је 3% полугодишње. Наредни ануитети биће као што је горе израчунато.

Према томе на дан 1-X-1910 има се платити:

$$\begin{array}{rrl} & a_1 = 3034648{,}11 & \text{дин.} \\ +\dfrac{R_{30} \cdot 45^{*)}}{36000} & = \quad 95222{,}62 & „ \\ \hline & \text{Свега } 3129870{,}73 & \text{дин.} \end{array}$$

Када промена интересне стопе важи од 1-X-1910 год. онда се тог дана има платити напред израчунати ануитет a_1 увећан за $^1/_2\%$ полугодишње интереса на остатак дуга на дан 1 априла 1910, дакле

$$\begin{array}{rrl} & a_1 = 3034648{,}11 & \text{дин.} \\ +\dfrac{R_{30} \cdot 180^{**)}}{36000} & = \quad 380890{,}47 & „ \\ \hline & \text{Свега } 3415538{,}58 & \text{дин.} \end{array}$$

Остали ануитет биће 3034648,11 дин.

Други пример. — Зајам је закључен од 100.000 дин. да се амортизује за 50 година са интересом 6% годишње. Интерес и ануитети плаћају се декурзивно (уназад). На дан плаћања 20-тог инуитета дужник своди дуг на 30.000 дин. али под условом да у будуће плаћа половину првобитног ануитета, заокругљеног на следећу стотину а интересна стопа смањи на 4%. Колико свега плаћа на дан конверзије и за које ће време амортизовати остатак дуга?

Ануитет пре конверзије био је:

$$a = 100000\, V_6^{50} = 6344{,}43 \text{ дин.}$$

Половина овог ануитета је 3172,215 дин., па ће дужник у будуће плаћати ануитет 3200.— дин.

Пошто је остатак дуга сведен на 30.000.— дин. то ћемо време плаћања овог ануитета наћи из једначине

$$V_4^n = \frac{3200}{30000} = 0{,}10666\ldots.$$

У стубцу 4% V таблице овај број не налази се, али се налазе бројеви 0,11414904 и 0,10655217. Дакле први већи у врсти 11-тој а други мањи у врсти 12-тој.

Према томе остатак дуга амортизоваће се за 12 година, или 11 пута платиће дужник ануитет 3200 дин., а 12-ти пут ануитет мањи од 3200.— дин.

Да се нађе колико дужник мора положити на дан плаћања 20-тог ануитета треба знати колико је његов дуг тог момента. Од тога дуга одузети 30000 дин., па ће се добити сума коју дужник полаже.

---

*) 45 значи 45 дана од 1-IV—15-V, а пошто је $^1/_2\%$ полугодишње онда треба узети 1% годишње.

**) 180 дана 1-IV—1-X-1910. а пошто је $^1/_2\%$ полугодишње треба узети 1% годишње.

Остатак дуга на дан плаћања 19-тог ануитета увећан са интересом 6% за 1 годину дана претставља суму, коју би дужник морао платити на дан плаћања 20-тог ануитета па да не остане ништа дужан. Дакле та је сума

$$R = [K - b_1 (1 + III_6^{18})] \cdot 1{,}06 = 93674{,}38 \text{ дин.*)}$$

Према томе дужник има да положи:

Дуг на дан плаћања 20-тог ануитета	дин.	93674.38
мање остатак дуга	„	30.000.—
	Свега дин.	63,674,38

Трећи пример. — Нека је у првом примеру зајам од 100.000 — дин., а интерес да се плаћа антиципативно.

И овде, као у првом примеру, могу бити три случаја: промена интересне стопе важи: од 1-IV-1910, од 15-V-1910 и од 1-X-1910 год.

У сва три случаја треба наћи остатак дуга на дан 1-IV-1910 год., па на тај остатак наћи ануитет за остатак времена увећеног за 5 година.

Да бисмо нашли остатак дуга на дан 1-IV-1910 треба знати ануитет који је плаћан до тог дана. Тај ануитет је:

$$a = 100000\, VI_3^{50} = 3836{,}64 \text{ дин.}$$

Остатак дуга је:

$$R_{30} = a\,(1 + IV_{3\,9/97}^{29}) = 3836{,}64 \cdot 19{,}96643105 = 76604.\text{— дин.}$$

Нови ануитет, који ће се први пут платити 1-X-1919, биће:

$$a_1 = R_{30} \cdot VI_{2^1/_2}^{40} = 76604 \cdot 0{,}03926079 = 3007{,}53 \text{ дин.}$$

Ануитетом, који је плаћен 1-IV-1910 измирен је интерес 6% на остатак дуга до 1-X-1910.

Према томе ако промена интересне стопе важи од 1-IV-1910 онда, пошто је сада стопа 5%, треба поверилац да врати дужнику 1% интерес за време од 1-IV—1-X на остатак дуга од 76.604.— дин., дакле:

$$i = \frac{76604 \cdot 180}{36000} = 383{,}02\text{**) дин.}$$

---

*) Ова се сума може добити и из једначине.

$$K \cdot I_6^{20} - a\, III_6^{19} = R$$

и

$$R_{31} \cdot 1{,}06 = a\, IV_6^{31} \cdot 1{,}06 = R$$

Прва од ове две једначине, као и горе употребљена, може се употребити и у случају заокругљених ануитета, а друга само у случају када је ануитет рачунат тачно по таблици.

**) Ова сума положена је 1-IV па ако је поверилац враћа дужнику 1-X морао би му одобрити још и интерес 5%, али се у пракси то не ради.

За ову суму дужник би о првом наредном року умањио ануитет, а осталих рокова полагао би ануитет од 3007,53 дин.

У случају да промена стопе важи од 15-V поверилац би морао вратити 1% интерес за време од 15-V—1-X, дакле:

$$i = \frac{76604 \cdot 135}{36000} = 287{,}26 \text{ дин.}$$

За оволико ће дужник платити мање о првом наредном року, а осталих рокова плаћаће по 3007,53 дин.

Када промена интересне стопе важи од 1-X нема никаквог враћања интереса, јер је до тог рока важила интересна стопа 6%. Према томе дужник ће плаћати почев од 1-X-1910 до исплате дуга, или нове конверзије, по 3007,53 дин.

Из ових примера виде се принципи конверзије дугова, али њима нису ни изблиза испрпљени сви случајеви који се могу појавити при конверзији дугова. Међутим када се ова три примера проуче добро моћи ће се помоћу њих решити и најсложенији случајеви.

V ДЕО

Лутријски зајмови

Чл. 83. Општи појмови. У чл. 55 видели смо шта су лутријски зајмови и у каквим се видовима, с обзиром на интерес, могу јавити. Овде ћемо сада проучити како се прорачунавају поједини елементи лутријског зајма када су неки елементи познати. Одлика лутријских зајмова јесте исплата извесног броја згодитака. Ови згодитци одређују се појединим обвезницама у циркулацији путем извлачења. Згодитци могу бити већи или мањи. У колико су згодитци већи у толико је њихов број мањи, и обратно. Могуће су разне комбинације. Ми ћемо овде проучити најкарактеристичније.

Обавезнице лутријских зајмова обележавају се серијама и бројевима. Серије се обележавају или бројевима (најчешће арапским, али некад и римским) или азбучним редом. Свака серија има исти број обвезница. Овај број може бити 50, 100, 200, 500,..., 1000. Извлачење за амортизацију врши се по серијама или по бројевима, а извлачење за згодитке по бројевима.

Ако је дужнику остављено на вољу да врши амортизацију по избору: амортизацијом или откупом, дужник ће док је год курс испод пари вршити амортизацију откупом, а када курс буде ал пари или изнад пари извлачењем. Када дужник нема права слободног избора већ амортизацију мора вршити само путем извлачења све док је курс испод пари имаоци обвезница у случају амортизације добијаће једну врсту премије. Ова премија је разлика номиналног износа обавезнице и берзанског курса обвезнице на дан извлачења. У случају да је курс изнад пари имаоц би имао губитак који је разлика берзанског курса обвезнице на дан извлачења и номинале обавезнице.

Чл. 84. Лутријски зајмови без интереса. Најтипичније случајеве проучићемо на примерима.

1) Амортизоване обавезнице исплаћују се са укапиталисаним интересом од дана реализовања зајма до дана амортизације.

Задатак. — Зајам од 1,000.000.— дин., подељен у 10.000.— обавезница, треба отплатити за 5 година са 5% интереса, али

да се интерес додаје амортизованим обавезницама. Израдити план отплаћивања.

a) Изналажење ануитета.

$$a = 1000000\, V_5^5 = 230974{,}80 \text{ дин.}$$

b) Изналажење вредности амортизованих обавезница.

Из обрасца:

$$\alpha_n = \alpha_0\, I_p^n \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(148)$$

добијају се за амортизоване обавезнице у појединим годинама амортизације следеће вредности:

Године	прве	$\alpha_1 = x_0\, I_p^1 = 100\, I_5^1 = 105.$—	дин.
„	друге	$\alpha_2 = x_0\, I_p^2 = 100\, I_5^2 = 110{,}25$	„
„	треће	$\alpha_3 = x_0\, I_p^3 = 100\, I_5^3 = 115{,}762$	„
„	четврте	$\alpha_4 = x_0\, I_p^4 = 100\, I_5^4 = 121{,}550$	„
„	пете	$\alpha_5 = x_0\, I_p^5 = 100\, I_5^4 = 127{,}628$	„

c) Изналажење броја обавезница за амортизацију

Да се добије број амортизованих обавезница у појединим годинама амортизације треба ануитет поделити са вредношћу једне обавезнице у моменту амортизације. Тако се добија број амортизованих обавезница:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{у години} & 1 & x_1 = \dfrac{a}{\alpha_1} = \dfrac{a}{\alpha}\, II_p^1 \\[2ex]
\text{„} \quad \text{„} & 2 & x_2 = \dfrac{a}{\alpha_2} = \dfrac{a}{\alpha}\, II_p^2 = x_1\, II_p^1 \\[2ex]
\text{„} \quad \text{„} & 3 & x_3 = \dfrac{a}{\alpha_3} = \dfrac{a}{\alpha}\, II_p^3 = x_1\, II_p^2 \\[2ex]
\text{„} \quad \text{„} & 4 & x_4 = \dfrac{a}{\alpha_4} = \dfrac{a}{\alpha}\, II_p^4 = x_1\, II_p^3 \\[2ex]
\text{„} \quad \text{„} & 5 & x_5 = \dfrac{a}{\alpha_5} = \dfrac{a}{\alpha}\, II_p^5 = x_1\, II_p^4
\end{array}\right\} \;. \;. \;. \;(149)$$

где α означава номиналу једне обавезнице.

Обележи ли се са m број свих обавезница зајма онда мора постојати једначина:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots . x_5 = m \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(150)$$

Заменом вредности једначина (149) у једначини (150) добија се:

$$\frac{a}{\alpha}\left(II_p^1 + II_p^2 + \ldots . + II_p^5\right) = m \;. \;. \;. \;. \;. \;(151)$$

А одавде: $\frac{a}{\alpha} IV_p^5 = m$

Пошто је: $\frac{a}{\alpha} = x_1 \, I_p^1$

то је: $x_1 \, IV_p^5 \cdot I_p^1 = m$

тј. $x_1 = m \cdot I_p^5 \cdot II_p^1$ . . . . (152)

У овом примеру је: $x_1 = 10000 \cdot 0,2309748 \cdot 0,95238095 = 2199,76$ обавезница.

Помоћу броја амортизованих обавезница у првој години налази се број амортизованих обавезница у следећим годинама из једначине:

$$x_n = x_{n-1} \, II_p^1$$

Али број амортизованих обавезница у појединим годинама може се наћи и помоћу броја амортизованих обавезница у последњој години амортизације.

Пошто је

$$x_5 = \frac{a}{\alpha} II_p^5 = 2309,75 \cdot 0,783526 = 1809,748$$

то је:

$$x_4 = x_5 \, I_p^1 = 1809,748 \cdot 1,05 = 1900,2354$$
$$x_3 = x_4 \, I_p^1 = 1900,2354 \cdot 1,05 = 1995,2472$$
$$x_2 = x_3 \, I_p^1 = 1995,2472 \cdot 1,05 = 2095,0096$$
$$x_1 = x_2 \, I_p^1 = 2095,0096 \cdot 1,05 = 2199,7600$$

Број амортизованих обавезница у последњој години амортизације може се израчунати из једначине:

$$x_5 = \left(\left(a - \frac{K \cdot p}{100}\right) : \alpha = (230974,80 - 50000) : 100 = 1809,748$$

Помоћу броја амортизованих обавезница у последњој години могу се бројеви амортизованих обавезница израчунати и на следећи начин:

година 5	1809,7480	обавезница
+ 5% интерес	90,4874	„
година 4	1900.2354	„
+ 5% интерес	95.0118	„
година 3	1995.2472	„
+ 5% интерес	99.7624	„
година 2	2095,0096	„
+ 5% интерес	104.7504	„
година 1	2199,7600	„
+ 5% интерес	109.9880	„
$\frac{a}{\alpha} = m =$	2309,7480	

Ови бројеви нису цели, па би у појединим годинама морали исплатити и децималне делове обавезнице. Нпр. у првој години 2199 целих и 76 стотих делова обавезнице. Али пошто је обавезница недељива то се у појединим годинама не могу исплаћивати делови обавезнице већ само цели. Зато ће се у првој години исплатити 2199 обавезница, а 0,76 пренети за исплату у идућој години. Према томе предњи бројеви су теоријски. Број стварно исплаћених обавезница добија се на следећи начин:

$x_1 = 2199,7600$;	$x_1' = 2199.—$		остаје	0,7600	
$x_2 = 2095,0096$;	$x_2' = 2095.—$		+	0,0096	0.7696
			остаје	0,7696	
$x_3 = 1995,2472$;	$x_3' = 1996.—$	(+1)	+	0.2472	1.0168
			остаје	0,0168	
$x_4 = 1900,2354$;	$x_4' = 1900.—$		+	0.2354	0,2522
			остаје	0,2522	
$x_5 = 1809,7480$;	$x_5' = 1810.—$	(+1)	+	0.7480	1.0002
	$m = 10000.—$		остаје	0,0002	

Број амортизованих обавезница из године у годину опада. То долази због тога што је теоријски ануитет константан а вредност обавезнице увећава се сваке следеће године за интерес на вредност предходне године.

Амортизациони план изгледа:

Година	Амортизоване обавезнице	Исплаћују се по		Отплата	Премија		Стварни ануитет	
1	2.199	105	—	219.900	10.995	—	230.895	—
2	2.095	110	25	209.500	21.473	75	230.973	75
3	1.996	115	76	199.600	31.456	96	231.056	96
4	1.900	121	55	190.000	40.945	—	230.945	—
5	1.810	127	63	181.000	50.010	30	231.010	30
	10.000			1,000.000	154.881	01	1,154.881	01

2) Један део интереса додаје се обавезницама а остатак се исплаћује у виду премија код великих згодитака.

Предњи пример пре би имао карактер штедње куповањем вредећих хартија него лутријског зајма, јер се интерес сваке године капиталише и у моменту амортизације сопственик обавезнице добио би онолико колико и у случају давања новца на штедњу са истом интересном стопом. Код њега нема ништа јаче што би привукло већу пажњу публике. Ако се то жели онда се цео интерес не капиталише већ само један део, а онај остатак исплаћује се у виду једног већег и више мањих згодитака. Колики ће број бити већих згодитака зависи од величине зајма и ефекта који се жели постићи тим згодицима. Разуме се да то зависи и од средине у којој се зајам врши.

Претпоставимо да се у предњем примеру сваке године исплаћује по 20 великих згодитака, а мали да се исплаћују по 102, 105, 108 и 111 дин.

a) Изналажење суме за велике згодитке.

Пошто се у првој години амортизује свега 2199 обавезница, то ће за мале згодитке, по одбитку 20 великих, остати 2179 обавезница. За њихову исплату потребна је сума

$$2179 \cdot 102 = 222258.\text{—}\ \text{дин.}$$

Разлика између ануитета од 230.895.— дин. и ове суме за мале згодитке јесте сума од 8.637.— дин., која се има употребити за 20 великих згодитака. На исти начин налазе се суме за велике згодитке следећих година.

b) Распоред згодитака у првој години.

Згодитке прве године амортизације могли би распоредити овако:

1 згодитак	à 5.000.—	Дин.	5.000.—
1 „	„ 1.000.—	„	1.000.—
1 „	„ 500.—	„	500.—
2 згодитка	„ 200.—	„	400.—
15 згодитака	„ 115.—	„	1.725.—
20 згодитака		Дин.	8.625.—

c) Израда амортизационог плана:

Амортизациони план изгледао би:

Година	Мали згодитци			Велики згодитци		Ануитет	
	Комада	По Динара	Свега Динара	Комада	Динара	Комада	Динара
1	2.179	102	222.258	20	8.625	2.199	230.883
2	2.079	105	217.875	20	13.100	2.095	230.975
3	1.976	108	213.408	20	17.500	1.996	230.908
4	1.880	111	208.680	20	22.200	1.900	230.880
5	1.970	114	204.060	20	26.875	1.810	230.935
	9.990		1,066.281	100	88.300	10.000	1,154.581

Примедба. — Сума за велике згодитке заокругљивана је на више или на ниже како би суме за згодитке биле округле цифре.

d) Распоред сума свих великих згодитака.

Суме за велике згодитке могле би се распоредити овако:

Година 1			Година 2			Година 3			Година 4			Година 5		
Ком.		Динара	Ком.		Динара	Ком.		Динара	Ком.		Динара	Ком.		Динара
1		5.000	1		8.000	1		11.000	1		14.000	1		17.500
1		1.000	1		1.500	1		2.000	1		2.500	1		3.000
1		500	1		750	1		1.000	1		1.250	1		1.500
2	à 200	400	2	à 300	600	2	à 400	800	2	à 500	1.000	2	à 600	1.200
15	à 115	1.725	15	à 150	2.250	15	à 180	2.700	15	à 230	3 450	15	à 245	3.675
20		8.625	20		13.100	20		17.500	20		22.200	20		26.875

3) Интерес се додаје само амортизованим обавезницама.

Задатак. — Зајам од 1,000.000 дин., подељен на 10000 обавезница, треба отплатити за 5 година са 5% годишњег интереса, али да се интерес не исплаћује имаоцима обавезница, већ да се додаје амортизованим обавезницама у облику великих и малих згодитака. Израдити план отплаћивања.

a) Изналажење ануитета у броју обавезница.

Ако је K зајам, α номинала једне обавезнице, a ануитет у обавезницама, a m број свих обавезница зајма, онда је:

$$m = \frac{K}{\alpha} = \frac{1000000}{100} = 10000.\text{—},$$

па зато: $a = 10000\, V_5^5 = 2309{,}748$ обавезница

b) Изналажење броја годишње исплаћених обавезница.

Обележи ли се са x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 број амортизованих обавезница у 1, 2, 3, 4, 5 години, онда је:

$$x_1 = a - \frac{m \cdot p}{100} = 2309{,}748 - 500 = 1809{,}748 \text{ обавезница}$$

$$\begin{array}{lrl}
+\,5\%\ \text{интерес} & 90{,}487 & „ \\
 & x_2 = 1900{,}235 & „ \\
+\,5\%\ \text{интерес} & 95.012 & „ \\
 & x_3 = 1995{,}247 & „ \\
+\,5\%\ \text{интерес} & 99{,}762 & „ \\
 & x_4 = 2095{,}009 & „ \\
+\,5\%\ \text{интерес} & 104{,}750 & „ \\
 & x_5 = 2199.759 & „ \\
+\,5\%\ \text{интерес} & 109.988 & „ \\
 & a = 2309{,}747 & „
\end{array}$$

Према томе биће амортизовано:

1	године	1809	комада		остаје	0,748
					+	0,235
2	„	1900	„		остаје	0,983
					+	0 247
3	„	1996	„	(+1)	остаје	0,230
					+	0,009
4	„	2095	„		остаје	0,239
					+	0.759
5	„	2200	„	(+1)	остаје	—
		m = 10000.—				

c) Израда амортизационог плана.

При изради амортизационог плана мора се водити рачуна о премијама које престављају интерес на још неамортизоване обавезнице.

У првој години број обавезница је 10.000.— од по 100 — дин. Према томе свака обавезница даје 5 дин. годишње на име премије. Зато ће вредност премије бити:

1 године $10000 \cdot 5 = 50000.—$ дин.
2 „ $8191 \cdot 5 = 40955.—$ „
3 „ $6291 \cdot 5 = 31455.—$ „
4 „ $4291 \cdot 5 = 21475.—$ „
5 „ $2200 \cdot 5 = 11000.—$ „

План би изгледао:

Година	Обавезнице у течају	Обавезнице амортизоване	Отплата*)	Премија — интерес	Ануитет
1	10.000	1.809	180.900	50.000	230.900
2	8.191	1.900	190.000	40.955	230.955
3	6.291	1.996	199.600	31.455	231.055
4	4.295	2 095	209.500	21.475	230.975
5	2.200	2.200	220.000	11.000	231.000
		10.000	1,000.000	154.885	1,154.885

d) Подела премија

Премије се не дају свим амортизованим обавезницама већ само једном мањем броју. Да ли ће број ових обавезница којим се додељују премије бити већи или мањи зависи од више

*) Отплата се добија множењем броја амортизованих обавезница са номиналом.

узрока. Али ја се овде нећу упуштати у њихово излагање, јер то није предмет ове књиге, већ ћу изнети технику распореда ових премија на утврђени број амортизованих обавезница.

Нека се у овом случају сваке године исплаћују по 10 згодитака, а остале амортизоване обавезнице по номинали. У том случају згодитци би се могли распоредити овако:

Година 1 Ком.	Година 1 Динара		Година 2 Ком.	Година 2 Динара		Година 3 Ком.	Година 3 Динара		Година 4 Ком.	Година 4 Динара		Година 5 Ком.	Година 5 Динара	
1		30.000	1		20.000	1		20.000	1		10.000	1		5.000
1		10.000	1		10.000	1		5.000	1		5.000	1		3 000
1		5 000	1		6.000	1		3.000	1		3.000	1		2.000
2	à 2.500	5.000	2	à 2.500	5.000	2	à 1.750	3.500	2	à 1.750	3.500	2	à 600	1.200
5	à 200	1.000	5	à 191	955	5	à 191	955	5	à 195	975	5	à 160	800
10		51.000	10		41.955	10		32.455	10		22.475	10		12 000

Примедба. — Сума употребљена за велике згодитке јесте збир интереса дотичне године и номиналне вредности обавезница на које падају згодитци.

e) Израда амортизационог плана према згодитцима

Амортизациони план израђен према згодитцима изгледао би:

Година	Мали згодитци Комада	Мали згодитци По	Мали згодитци Динара	Велики згодитци Комада	Велики згодитци Динара	Ануитет Комада	Ануитет Динара
1	1.799	100	179.900	10	51.000	1.809	230.900
2	1.890	100	189 000	10	41.955	1.900	230.955
3	1.986	100	198.600	10	32.455	1.996	231.055
4	2.085	100	208.500	10	22.475	2.095	230.975
5	2.190	100	219.000	10	12.000	2 200	231.000
	9.950		995.000	50	159.885	10.000	1,154.885

4) Просечна вредност за исплату амортизованих обавезница аритметички расте.

Количник између ануитета у динарима и комадима амортизованих обавезница зове се просечна вредност и износи прве године:

$$230900 : 1809 = 127,63\ldots,$$

а пете године: $231000 : 2200 = 105$

Из овог се види да се у предњем примеру просечна вредност из године у годину смањује. Према томе највећа је у првој а најмања у последњој. Из овог се закључује да се просечна вредност обавезнице, која је количник збира ануитета у динарима и свих обавезница зајма, мора налазити у границама просечне вредности прве и последње године амортизације.

Опадање просечне вредности у претходном примеру долази отуда што се сума за велике згодитке смањује из године у годину. Ако се жели ово поправити треба поставити услов да просечна вредност за амортизацију обавезница расте из године у годину по аритметичкој прогресији, али да годишњи ануитет остане сталан.

Задатак. — Зајам од 1,000.000.— дин., подељен у 10.000 обавезница, треба отплатити за 5 година једнаким ануитетима, али да се интерес исплаћује у виду премија једном делу амортизованих обавезница. Амортизоване обавезнице исплаћују се просечно прве године по 105.— а сваке следеће по 7 дин. више. Израдити план отплаћивања.

a) Изналажење ануитета.

Ако се ануитет обележи са *a* онда се број амортизованих обавезница у појединим годинама налази деобом ануитета са просечном вредношћу једне обавезнице у тој години. Овде је:

$$x_1 = \frac{a}{105},\ x_2 = \frac{a}{112},\ x_3 = \frac{a}{119},\ x_4 = \frac{a}{126},\ x_5 = \frac{a}{133}$$

Сменом ових вредности у једначини:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10000$$

добија се:

$$\frac{a}{7}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}\right) = 10000$$

Заграда се може раставити на две на следећи начин:

$$\frac{a}{7}\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{19}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{14}\right)\right\} = 10000$$

Вредност ових заграда израчуната је и сложена у таблици VII^1_n*). Према томе ова једначина може се писати у облику:

$$\frac{a}{7}\left(VII^1_{19} - VII^1_{14}\right) = 10000$$

*) Код Schlimbach-а X^1_n; код S. Spicer-а у издању 1886 г. на страни 369/70; код Heinrich Mural-а XI^1_n.

Одавде следује

$$a = 70000 : 0{,}29617733 = 236344{,}89 \text{ дин.}$$

b) Изналажење броја годишње амортизованих обавезница

$$x_1 = \frac{a}{105} = 2250{,}90$$

$$x_2 = \frac{a}{112} = 2110{,}22$$

$$x_3 = \frac{a}{119} = 1986{,}09$$

$$x_4 = \frac{a}{126} = 1875{,}75$$

$$x_5 = \frac{a}{133} = 1777{,}04$$

$$m \qquad = 10000.—$$

Према томе биће амортизовано:

1	године	2250	комада		остаје	0,90
2	„	2111	„	(+1)	+	0,22
					остаје	0,12
3	„	1986	„		+	0.09
					остаје	0,21
4	„	1875	„		+	0,75
					остаје	0,96
5	„	1778	„	(+1)	+	0,04
		10000			остаје	—

c) Израда амортизационог плана.

Амортизациони план кад се амортизоване обавезнице исплаћују по просечној вредности изгледао би:

Година	Амортизоване обавезнице	По	Отплата	Премија	Ануитет
1	2.250	105	225.000	11.250	236.250
2	2.111	112	211.100	25.332	236.432
3	1.986	119	198 600	37.734	236.334
4	1.875	126	187.500	48.750	236.250
5	1.778	133	177.800	58.674	236.474
	10.000		1,000.000	181.740	1,181.740

d) Подела премија.

Предњи план израђен је тако да се амортизоване обавезнице исплаћују по њиховој просечној вредности. Међутим у пракси се то скоро никад не дешава. Обично се већи део амортизованих обавезница исплаћује по номинали, а једном мањем делу дели се остатак ануитета у виду великих згодитака. Тако ако би се у овом примеру сваке године исплаћивало 10 великих згодитака, а остале обавезнице по номинали онда би у првој години ануитет био употребљен овако:

2240 обавезница à 100.—		= 224.000.— дин.
10 „	са премијама	= 12.250.— „
	Свега	236.250.— дин.

На исти начин извршио би се распоред и у осталим годинама.

е) Израда амортизационог плана према згодитцима.

Према томе амортизациони план израђен према згодитцима изгледао би:

Година	Мали згодитци			Велики згодитци		Ануитет	
	Комада	По	Динара	Комада	Динара	Комада	Динара
1	2.240	100	224.000	10	12.250	2.250	236.250
2	2.101	100	210.100	10	26.332	2.111	236.432
3	1.976	100	197.600	10	38.734	1.986	236.334
4	1.865	100	186.500	10	49.750	1.875	236.250
5	1.768	100	176.800	10	59.674	1.778	236.474
	9.950		995.000	50	186.740	10.000	1,181.740

f) Изналажење интересне стопе.

Интересна стопа у овом примеру израчунава се из обрасца

$$a = K\,V_p^n,$$

и овде износи $5\,{}^5/_6\,{}^0/_0$.

5) Годишњи издатак за исплату великих и малих згодитака сталан је, а просечна вредност малих згодитака расте из године у годину по аритметичкој прогресији.

Задатак. — Зајам од 1000000.— дин., подељен на обавезнице од 100.— дин., треба да се амортизује за 5 година са годишњим интересом $5\,{}^0/_0$. Ануитет се плаћа годишње и константан је за све време амортизације. Интерес се не исплаћује у виду купона, већ се додаје амортизованим обавезницама у виду великих и малих згодитака. Сваке године исплаћује се 20 великих згодитака, а мали згодитци исплаћује се: прве године по 102 а сваке следеће по 3 дин. више. Сума за велике згодитке као и за мале константна је у свим годинама амортизације.

а) Изналажење ануитета.

$$a = 1000000\,V_5^5 = 230974{,}80 \text{ дин.}$$

b) Изналажење издатка за мале згодитке.

Ако је m број свих обавезница зајма, m_1 број обавезница на које падају мали згодитци, a_1 сума која се годишње употребљава за мале згодитке, тада мора постојати једначина:

$$\frac{a_1}{102} + \frac{a_1}{105} + \frac{a_1}{108} + \frac{a_1}{111} + \frac{a_1}{114} = m_1$$

Из ове једначине следује:

$$\frac{a_1}{3}\left(\frac{1}{34} + \frac{1}{35} + \frac{1}{36} + \frac{1}{37} + \frac{1}{38}\right) = m_1$$

Или

$$\frac{a_1}{3}\left\{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{38}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{33}\right)\right\} = m_1,$$

тј.

$$\frac{a_1}{3}\left(VII_{38}^1 - VII_{33}^1\right) = m_1$$

Из ове једначине, пошто је $m_1 = 9900$, $(10000 - 5 \cdot 20)$, следује:

$$a_1 = \frac{3 \cdot 9900}{0{,}13910378} = 213509{,}66 \text{ дин.}$$

c) Израчунавање броја малих згодитака.

Број малих згодитака биће:

$$x_1 = \frac{a_1}{102} = 2093{,}23$$

$$x_2 = \frac{a_1}{105} = 2033{,}43$$

$$x_3 = \frac{a_1}{108} = 1976{,}94$$

$$x_4 = \frac{a_1}{111} = 1923{,}51$$

$$x_5 = \frac{a_1}{114} = 1872{,}89$$

$$m_1 = 9900.—$$

Према томе биће исплаћено малих згодитака у:

1	години	2093	остаје	0,23
2	„	2033	+	0,43
			остаје	0,66
3	„	1977 (+1)	+	0,94
			остаје	0,60
4	„	1924 (+1)	+	0,51
			остаје	0,11
5	„	1873 (+1)	+	0,89
		$m_1 = 9900$	остаје	—

d) Изналажење суме за исплату великих згодитака.

Разлика између ануитета и суме за исплату малих згодитака јесте сума за исплату великих згодитака. Ако се та сума обележи са a_2, онда је:

$$a_2 = a - a_1 = 17465{,}14 \text{ дин.}$$

e) Распоред великих згодитака.

Велики згодитци могу бити распоређени овако:

1	згодитак		12000.— дин.
1	„		2000.— „
1	„		1000.— „
2	згодитка	à 300	600.— „
15	згодитака	à 124	1860.— „
20	згодитака		17460.— „

Примедба. — Сума од 17465,14 дин. није употребљена цела већ је остало неупотребљено годишње 5,14 дин.

f) Израда амортизационог плана.

Амортизациони план с обзиром на згодитке изгледа:

Година	Мали згодитци			Велики згодитци		Ануитет	
	Комада	По	Динара	Комада	Динара	Комада	Динара
1	2.093	102	213.486	20	17.460	2.113	230.946
2	2.033	105	213.465	20	17.460	2.053	230.925
3	1.977	108	213.516	20	17.460	1.997	230.976
4	1.924	111	213.564	20	17.460	1.994	231.024
5	1.873	114	213.522	20	17.460	1.893	230.982
	9.900		1,067.553	100	87.300	10.000	1,154.853

б) Сума за исплату великих згодитака из године у годину аритметички опада, а сума за исплату малих згодитака аритметички расте. Просечна вредност малих згодитака аритметички расте.

Задатак. Зајам од 1,000.000.— дин., подељен на 10.000 обавезница, треба отплатити за 5 година са интересом 5% годишње, али интерес се не исплаћује у виду купона већ у великим и малим згодитцима. Великих згодитака има годишње 20. Сума за исплату великих згодитака смањује се из године у годину за 1.800.— дин., а сума за исплату малих згодитака повећава се из године у годину за 1.800.— дин. Мали згодитци исплаћују се прве године по 102.— дин., а сваке следеће године за 3.— дин. више. Израдити план отплаћивања.

a) Изналажење ануитета.

$$a = 1000000\, V_5^5 = 230974{,}80 \text{ дин.}$$

b) Изналажење суме за мале згодитке у првој години.

Ако се обележи са $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_5$ сума која се употребљава за исплату малих згодитака у 1, 2, 3, .., 5-тој години, амортизације, онда из једначине:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d$$

заменом $n = 1, 2, 3, 4, 5$ и $d = 1800$ добија се:

$$a_1 = a_1,\; a_2 = a_1 + 1800,\; a_3 = a_1 + 3600,\; a_4 = a_1 + 5400,\; a_5 = a_1 + 7200$$

Пошто је:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 9900,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_5$ означава број малих згодитака амортизованих у $1, 2, \ldots, 5$-тој години, мора бити:

$$\frac{a_1}{102} + \frac{a_1 + 1800}{105} + \frac{a_1 + 3600}{108} + \frac{a_1 + 5400}{111} + \frac{a_1 + 7200}{114} = 9900$$

Из ове једначине следује:

$$\frac{a_1}{3}\left(\frac{1}{34} + \frac{1}{35} + \frac{1}{36} + \frac{1}{37} + \frac{1}{38}\right) + 600\left(\frac{1}{35} + \frac{2}{36} + \frac{3}{37} + \frac{4}{38}\right) = 9900$$

Пошто је:

$$\frac{1}{35} = 1 - \frac{34}{35};\quad \frac{2}{36} = 1 - \frac{34}{36};\quad \frac{3}{37} = 1 - \frac{34}{37};\quad \frac{4}{38} = 1 - \frac{34}{38}$$

то се ова једначина може писати у облику:

$$\frac{a_1}{3}\left(VII_{38}^1 - VII_{33}^1\right) + 600\left\{4 - 34\left(\frac{1}{35} + \frac{1}{36} + \frac{1}{37} + \frac{1}{38}\right)\right\} = 9900$$

или $\frac{a_1}{3}(VII^1_{38} - VII^1_{33}) + 600\{4 - 34\,(VII^1_{38} - VII^1_{34})\} = 9900$

Из ове једначине добија се:

$$a_1 = 210009{,}76 \text{ дин.}$$

c) Изналажење броја исплаћених малих згодитака у појединим годинама амортизације.

$$x_1 = \frac{a_1}{102} = 210009{,}76 : 102 = 2058{,}92$$

$$x_2 = \frac{a_2}{105} = 211809{,}76 : 105 = 2017{,}23$$

$$x_3 = \frac{a_3}{108} = 213609{,}76 : 108 = 1977{,}87$$

$$x_4 = \frac{a_4}{111} = 215409{,}76 : 111 = 1940{,}63$$

$$x_5 = \frac{a_5}{114} = 217209{,}76 : 114 = 1905{,}35$$

$$m_1 = 9900.—$$

Према томе број малих згодитака биће:

у 1 години	2058	остаје	0,92
„ 2 „	2018 (+1)	+	0,23
		остаје	0,15
„ 3 „	1978 (+1)	+	0,87
		остаје	0,02
„ 4 „	1940	+	0,63
		остаје	0,65
„ 5 „	1906 (+1)	+	0,35
	$m_1 = 9900$	остаје	—

d) Изналажење потребне суме за велике згодитке.

Потребна сума за исплату великих згодитака јесте разлика између ануитета и суме за исплату малих згодитака. Пошто сума за велике згодитке из године у годину опада за 1800.— дин. то се сума за исплату у другој години добија кад се од суме из прве године одузме 1800.— дин., а сума у трећој кад се од суме у другој одузме 1800.— дин. итд.

Према томе сума за исплату великих згодитака биће:

у 1 години	230974,80 —	210009,76 =	20965,04	дин.
„ 2 „	20965,04 —	1800.— =	19165,04	„
„ 3 „	19165,04 —	1800.— =	17365,04	„
„ 4 „	17365,04 —	1800.— =	15565,04	„
„ 5 „	15565,04 —	1800.— =	13765,04	„

e) Израда амортизационог плана.

Амортизациони план изгледа:

Година	Мали згодитци			Велики згодитци		Ануитет	
	Комада	По	Динара	Комада	Динара	Комада	Динара
1	2.058	102	209.916	20	20.965	2.078	230.881
2	2.018	105	211.890	20	19.165	2.038	231.055
3	1.978	108	213.624	20	17.365	1.998	230.989
4	1.940	111	215.340	20	15.565	1.960	230.905
5	1.906	114	217.284	20	13.765	1.926	231.049
	9.900		1,068.054	100	86.825	10.000	1,154.879

Примедба. — Распоред суме за велике згодитке врши се слично ранијим принципима.

7) Сума за исплату великих згодитака аритметички расте а за исплату малих згодитака аритметички опада из године у годину. Просечна вредност малих згодитака аритметички расте из године у годину.

Задатак. — Зајам од 1,000.000.— дин., подељен на обавезнице по 100.— дин., треба отплатити за 5 година са годишњим интересом 5%, али да се интерес исплаћује у виду премија. Сума за 20 великих згодитака годишње расте из године у годину за 1800.— дин., а за мале згодитке за толико опада. Мали згодитци исплаћују се прве године по 102.— дин., а сваке следеће за 3.— дин. више. Израдити амортизациони план.

a) Изналажење ануитета.

$$a = 1000000\, V^5_5 = 230974{,}80 \text{ дин.}$$

b) Изналажење суме за мале згодитке у првој години амортизације.

Аналого излагању у тачци 6 овог члана добија се једначина:

$$\frac{a_1}{102} + \frac{a_1}{105} + \frac{a_1}{108} + \frac{a_1}{111} + \frac{a_1}{114} - \left(\frac{1800}{105} + \frac{3600}{108} + \frac{5400}{111} + \frac{7200}{114}\right) = 9900$$

Одавде, после свршених рачунских радњи као и у тачци 6 овог члана, добија се:

$$a_1 = 217009{,}547 \text{ дин.}$$

c) Изналажење броја малих згодитака у појединим годинама амортизације.

Овде је: $x_1 = \frac{a_1}{102} = 217009{,}55 : 102 = 2127{,}54$

$$x_2 = \frac{a_2}{105} = 215209{,}55 : 105 = 2049{,}61$$

$$x_3 = \frac{a_3}{108} = 213409{,}55 : 108 = 1976{,}01$$

$$x_4 = \frac{a_4}{111} = 211609{,}55 : 111 = 1906{,}39$$

$$x_5 = \frac{a_5}{114} = 209809{,}55 : 114 = 1840{,}45$$

$$m_1 = 9900.—$$

Према томе биће исплаћено:

у 1 години	2127.—	обавезница		остаје 0,54
„ 2 „	2050.—	„	(+1)	+ 0,61
				остаје 0,15
„ 3 „	1976.—	„		+ 0,01
				остаје 0,16
„ 4 „	1906.—	„		+ 0,39
				остаје 0,55
„ 5 „	1841.—	„	(+1)	+ 0,45
$m_1 = 9900.—$				остаје —

d) Изналажење суме за исплату великих згодитака.

Аналого предњем задатку суме за исплату великих згодитака биће:

у 1 години 230974,80 — 217009,55 = 13965,25 дин.,
„ 2 „ 13965,25 + 1800.— = 15765,25 „
„ 3 „ 15765,25 + 1800.— = 17565,25 „
„ 4 „ 17565,25 + 1800.— = 19365,25 „
„ 5 „ 19365,25 + 1800.— = 21165,25 „

e) Израда амортизационог плана

Амортизациони план изгледа:

Година	Мали згодитци			Велики згодитци		Ануитет	
	Комада	По	Динара	Комада	Динара	Комада	Динара
1	2.127	102	216.954	20	13.965	2.147	230.919
2	2.050	105	215.250	20	15.765	2.070	231.015
3	1.976	108	213.408	20	17.565	1.996	230.973
4	1.906	111	211.566	20	19.365	1.926	230.931
5	1.841	114	209.874	20	21.165	1.861	231.039
	9.900		1,067.052	100	87.825	10.000	1,154.877

Чл. 85. Лутријски зајмови са интересом.

1) Сума за исплату премија из године у годину расте.

Задатак. — Зајам од 1,000.000.— дин., подељен на обавезнице по 100.— дин., треба отплатити за 5 година са годишњим интересом 5%, али тако да се сваке године исплаћује интерес 3%, а 2% да се употребљава на премије амортизованих обавезница. Премија се има поделити сваке године на 20 обавезница. Израдити амортизациони план.

a) Изналажење ануитета.

$$a = 1000000\, V_5^5 = 230974{,}80 \text{ дин.}$$

b) Изналажење премијске суме и вредности за исплату обавезница.

Прорачун	Премија	По колико се исплаћује обавезница
Премија у 1 години: неисплаћен интерес	2,000	102,000
+ 5% интерес на 2.— дин.	0,100	
+ у 2 години неисплаћен интерес	2,000	
Премија у 2 години	4,100	104,100
+ 5% интерес на 4,10 дин.	0,205	
+ у 3 години неисплаћен интерес	2,000	
Премија у 3 години	6,305	106,305
+ 5% интерес на 6,305	0,315	
+ у 4 години неисплаћен интерес	2,000	
Премија у 4 години	8,620	108,620
+ 5% интерес на 8,620 дин.	0,431	
+ у 5 години неисплаћен интерес	2,000	
Премија у 5 години	11,051	111,051

Напомена. — Годишњи остатак по једној обавезници износи 2.— дин. Ова сума у првој години амортизације представља суму за премије по једној обавезници у оптицају. У доцнијим годинама ова се премија повећава за интерес на овај остатак из ранијих година и за остатак из дотичне године. Према томе општа једначина за рачунање премије у макојој години амортизације биће:

$$x_n = 2\left(1 + III_p^{n-1}\right)$$

где n означава један макоји позитиван цео број већи од јединице, а p интересну стопу зајма.

Стављајући у овој једначини n = 2, 3 .... добићемо премију једне обвезнице у 2, 3, ... години амортизације.

c) Изналажење броја исплаћених обавезница у појединим годинама амортизације.

Година 1.

Ануитет	Дин. 230.974,80
мање интерес 3% на 1,000.000.— дин.	„ 30.000.—
Отплата и премија	Дин. 200.974,80
$x_1 = 200974{,}80 : 102 = 1970{,}3$ комада	
у 1 години исплаћује се 1970 обавезница à 102.—	„ 200.940.—
Остатак у 1 години	Дин. 34,80

Година 2.

Ануитет	Дин. 230.974,80
+ остатак из прошле године	„ 34,80
+ 5% интерес на остатак	„ 1,74
	Дин. 231.011,34
— интерес 3% на остатак дуга 803.000.— дин.	„ 24.090.—
$x_2 = 206921{,}34 : 104{,}10 = 1987{,}7$ комада	Дин. 206.921,34
у овој години исплаћује се 1987 обавезн. à 104,10	„ 206.846,70
Остатак у 2 години	Дин. 74,64

итд.

d) Израда амортизационог плана

Амортизациони план изгледа:

Година	Исплаћене обавезнице	По дин.		Отплата	Премија		Зајам	3% интерес	Ануитет	
1	1.970	102	—	197.000	3.940	—	1,000.000	30.000	230.940	—
2	1.987	104	10	198.700	8.146	70	803.000	24.090	230.936	70
3	2.003	106	30	200.300	12.618	90	604.300	18.129	231.047	90
4	2.014	108	62	201.400	17.360	68	404.000	12.120	230.880	68
5	2.026	111	05	202.600	22.387	30	202.600	6.078	231.065	30
	10.000			1,000.000	64.453	58	3,013.900	90.417	1,154.870	58

e) Израчунавање суме за премије и распоред премија

Премија у једној години добија се кад се број амортизованих обавезница помножи разликом суме по колико се исплаћује једна обавезница и номиналне вредности. Тако нпр. у првој години кад се 1970 помножи са 102 — 100, у другој кад се 1987 помножи са 104,10 — 100 итд.

У овом примеру суму за премије у свакој години треба поделити на 20 обавезница. У предњем плану рачунате су суме за премије тачно, али у пракси се ове суме заокругљују на целе округле бројеве.

Подела премија у 1 години могла би се извршити овако:

1	премија	од	2900.— дин.	тј.	1	лоз		од 3000.— дин.
1	„	„	500.— „	„	1	„		„ 600.— „
1	„	„	200.— „	„	1	„		„ 300.— „
2	премије	à 95.—	190.— „	„	2	лоза	à 195.—	390.— „
15	премија	à 10.—	150.— „	„	15	лозова	à 110.—	1650.— „
20	премија		3940.— дин.		20	лозова		5940.— „

Осим тога у првој години исплаћује се још 1950 лозова по 100.— дин., а то укупно чини 200.940.— дин.

На исти начин може се извршити деоба премија осталих година.

2) Сума за премије стална.

Задатак. — Зајам од 1,000.000.— дин., подељен на обавезнице по 100.— дин., треба да се отплати за 5 година са интересом 5% годишње, али тако да се годишње исплаћује 3% интерес, а ресто од 2% да се употреби на 20 згодитака, али да сума за исплату згодитака буде иста за време амортизације.

a) Изналажење ануитета са 5% интереса.

$$a = 1000000\, V_5^5 = 230974{,}80 \text{ дин.}$$

b) Изналажење ануитета са 3% интереса.

Ако се ануитет са 3% обележи са a_1 онда је:

$$a_1 = 1000000\, V_3^5 = 218354{,}57 \text{ дин.}$$

c) Изналажење годишњег издатка за премије.

Сума за исплату премија није ништа друго него разлика ануитета са 5% и 3%. Пошто су ови ануитети стални то је и ова сума стална за све време амортизације зајма.

Ако се годишња сума за премије обележи са P онда је:

$$P = a - a_1 = 230974{,}80 - 218354{,}57 = 12620{,}23 \text{ дин.}$$

d) Изналажење броја исплаћених обавезница.

У овом задатку ануитет са 3% интереса рачунат у обавезницама био би 2183,55 комада. Ако се од овог ануитета одузме 3% интерес на 10.000 обавезница — рачунат у обавезницама а не у динарима — добиће се број исплаћених обавезница у првој години амортизације. Додавањем 3% интереса на број амортизованих обавезница у 2 години, итд.

Цео прорачун изгледа:

Ануитет са 3% интереса	$= 2183{,}55$
— 3% интерес од 10.000	$= 300.—$
	$x_1 = 1883{,}55$
+ 3% интерес	$= 56{,}51$
	$x_2 = 1940{,}05$

	$x_2 = 1940{,}05$
$+3\%$ интерес	$= \quad 58{,}20$
	$x_3 = 1998{,}25$
$+3\%$ интерес	$= \quad 59{,}95$
	$x_4 = 2058{,}20$
$+3\%$ интерес	$= \quad 61{,}75$
	$x_5 = 2119{,}95$
$+3\%$ интерес	$= \quad 63{,}60$
ануитет	$= 2183{,}55$

Према томе биће исплаћено:

у 1 години	1883.—	обавезнице		остаје 0,55
„ 2 „	1940.—	„		+ 0,05
				остаје 0,60
„ 3 „	1998.—	„		+ 0,25
				остаје 0,85
„ 4 „	2059.—	„	(+1)	+ 0,20
				остаје 0,05
„ 5 „	2120.—	„	(+1)	+ 0,95
	m = 10000.—			остаје —

Примедба. — Број исплаћених обавезница може се добити из следеће једначине:

$$x_n = \left(a_1 - \frac{K\,p_1}{100}\right) v_1^{\,n-1} : \alpha$$

где a_1 означава ануитет са стопом p_1 којом се годишње стварно плаћа интерес у виду купона — овде 3%, v_1 интересни чинитељ са интересном стопом p_1, а α номиналну вредност обавезнице.

Замењујући у овој једначини n са 1, 2, 3, 4,.... добићемо број амортизованих обавезница у 1, 2, 3, 4,... години амортизације.

е) Израда амортизационог плана

Амортизациони план биће:

Година	Амортизоване обавезнице	Отплата	Премија		Дуг	3% интерес	Ануитет
			Укупно	По обавезници			
1	1.883	188.300	12.620	6,70	1,000.000	30.000	230.920
2	1.940	194.000	12.620	6,50	811.700	24.351	230.971
3	1.998	199.800	12.620	6,31	617.700	18.531	230.951
4	2.059	205.900	12.620	6,13	417.900	12.537	231.057
5	2.120	212.000	12.620	5,95	212.000	6.360	230.980
	10.000	1,000.000	63.100		3,059.300	91.779	1,154.879

Примедба. — Премија по комаду рачуната је на све обавезнице, које се у дотичној години исплаћују, деобом премијске суме са бројем обавезница. Пошто број амортизованих обавезница из године у годину расте а сума за исплату великих згодитака је стална то премија по једној обавезници из године у годину опада.

f) Распоред премија.

Сума за исплату премија може се овако распоредити:

1 премија	од	7900.—	дин. тј.	1 лоз	од	8000.—	дин.
1 „	„	1900.—	„ „	1 „	„	2000.—	„
1 „	„	700.—	„ „	1 „	„	800.—	„
2 премије à 310	„	620.—	„ „	2 лоза	„	820.—	„
15 премија à 100	„	1500.—	„ „	15 лозова	„	3000.—	„
20 премија		12620.—	дин.	20 лозова		14620.—	дин.

3) Амортизоване обавезнице исплаћују се просечном вредношћу.

Задатак. — Зајам од 1,000.000.— дин., подељен на 10.000 обавезница по 100.— дин., треба отплатити за 5 година са интересом 5% годишње, али да се исплаћује на име интереса само 3%, а 2% да се употреби на премије, али да се ове премије деле просечно на све обавезнице за све време амортизације, и да сума са којом се исплаћује једна обавезница буде за све време амортизације иста.

а) Изналажење ануитета са 5%.

$$a = 1000000\, V_5^5 = 230974{,}80 \text{ дин.}$$

b) Изналажење износа за премију и отплату у првој години.

Разлика ануитета са 5% и интереса 3% на цео дуг јесте сума за премију и отплату у првој години. Ако је сума за премију и отплату у првој години P_1 онда мора бити:

$$P_1 = a - \frac{K p_1}{100} = 230974{,}80 - 30000 = 200974{,}80 \text{ дин.}$$

c) Изналажење интересне стопе.

У овом примеру ануитет је рачунат са 5%, а ануитет за амортизацију дуга рачуна се за 3%. Ако је ануитет са 5% обележен са а онда мора постојати следећа неједначина:

$$a \neq P_1\, I_{p_1}^{n},$$

где је $p_1 = 3\%$.

Пошто су у овој неједначини а, P_1 и n утврђене количине, то да би ова неједначина постала једначина мора интересна стопа бити различита од интересне стопе са којом се плаћа интерес на зајам. Ако је та стопа x онда мора бити:

$$a = P_1 I_x^n$$

Из ове једначине следује:

$$I_x^5 = \frac{a}{P_1} = \frac{230974{,}80}{200974{,}80} = 1{,}14927245$$

Линеарном интерполацијом добија се приближно тачна вредност

$$x = 2{,}82158\,\%$$

d) Изналажење премије за једну обавезницу.

Година 1

Ануитет је:	230.974,80 дин.
— 3% интерес на 1,000.000.— дин.	30.000.— „
Сума за отплату и премију	200.974,80 дин.
Свака обавезница исплаћује се по 106,32 дин. Број обавезница добија се деобом 200974,80 са 106,32. На тај начин добија се 1890,20 комада. Исплаћује се 1890 комада по 106,32	200.944,80 „
Остаје неутрошено	30.— дин.

Година 2

Ануитет је:	230.974 80 дин.
+ остатак из прошле године	30,— „
+ 5% интерес на остатак	1,50 „
	231.006,30 дин.
— 3% интерес на 811.000.— дин.	24.330.— „
Сума за отплату и премију	206.676,30 дин.
Деобом ове суме са 106,32 добија се 1943,908 комада. Исплаћује се 1943 комада à 106,32	206.579,76 „
Остаје неутрошено	96.54 дин.

итд.

e) Израда амортизационог плана

Амортизациони план биће:

Година	Амортизоване обавезнице	Обавезнице се исплаћују		Отплата	Премија		Зајам	3% интерес	Ануитет	
1	1.890	106	32	189.000	11.944	80	1,000.000	30.000	230.944	80
2	1.943	106	32	194.300	12.279	76	811.000	24.330	230.909	76
3	1.999	106	32	199.900	12.633	68	616.700	18.501	231.034	68
4	2.055	106	32	205.500	12.987	60	416.800	12.504	230.991	60
5	2.113	106	32	211.300	13.354	16	211.300	6.339	230.993	16
	10.000			1,000.000	63.200	—	3,055 800	91.674	1,154.874	—

Примедба. — У пракси се обично одступа од овог услова да се све амортизоване обавезнице исплаћују са просечном вредношћу од 106,32 дин. и сума за премије додељује се у виду премија једном мањем броју амортизованих обавезница. Остале обавезнице исплаћују се по номинали.

4) Број великих згодитака као и сума за исплату великих и малих згодитака стални су.

Задатак. — Зајам од 1,000.000.— дин., подељен на 10.000 обавезница, амортизује се за 5 година са интересом 5% годишње, али да се интерес исплаћује у виду купона само 3%, а 2% да се употребљава сваке године на 10 великих згодитака и на мале згодитке. Израдити амортизациони план.

a) Изналажење ануитета.

$$a = 1000000\, V_5^5 = 230974{,}80 \text{ дин.}$$

b) Изналажење ануитета када би се зајам повећан са 2% отплаћивао са 3%.

Зајам од 1,000.000.— дин. повећан са 2% износи 1,020.000.— дин. Сваких 100.— дин. номиналних зајма носи годишње 3.— дин. интереса. Пошто и обавезница од 102.— дин. даје годишње 3.— дин. интереса то излази да је на обавезницу од 102.— дин. интерес рачуна са неком стопом која ће бити мања од 3%. Ако ту непознату стопу обележимо са x онда мора постојати следећа пропорција:

$$102 : 100 = 3 : x$$

Из ове пропорције следује:

$$x = 2\,{}^{16}/_{17}\,\% = 2{,}941176\ldots\ \%$$

Са овом интересном стопом треба наћи ануитет на 1,020.000.— дин. Ако се тај ануитет обележи са a_1 онда мора бити:

$$a_1 = 1020000\, V^5_{2^{16}/_{17}} = 222347{,}87.$$

Примедба. — Пошто у таблици V нема стопе $2^{16}/_{17}$ то је таблична вредност 0,21798811 израчуната линеарном интерполацијом.

c) Изналажење броја годишње амортизованих обавезница.

Деобом ануитета a_1 са 102 добија се ануитет у обавезницама. Тај ануитет могао би се добити множењем броја свих обавезница зајма са $V^5_{2^{16}/_{17}}$ и износи 2179,88 обавезница.

Према томе кад се од ануитета у обавезницама одузме интерес $2^{16}/_{17}\%$ на све обавезнице добија се број исплаћених обавезница у првој години амортизације. Додавањем интереса на број амортизованих обавезница у првој години добија се број амортизованих обавезница у другој години, итд.

Цео рачун изгледао би:

Ануитет		$= 2179{,}88$	обавезница
$- 2^{16}/_{17}\%$ интерес на 10000 обавеница		$= 294{,}12$	„
		$x_1 = 1885{,}76$	„
	$+ 2^{16}/_{17}\%$ интерес	$= 55{,}46$	„
		$x_2 = 1941{,}22$	„
	$+ 2^{16}/_{17}\%$ „	$= 57{,}10$	„
		$x_3 = 1998{,}32$	„
	$+ 2^{16}/_{17}\%$ „	$= 58{,}78$	„
		$x_4 = 2057{,}10$	„
	$+ 2^{16}/_{17}\%$ „	$= 60{,}50$	„
		$x_5 = 2117{,}60$	„
	$+ 2^{16}/_{17}\%$ „	$= 62{,}28$	„
		$a = 2179{,}88$	„

Биће исплаћено:

у 1	години	1885	обавеница		остаје 0,76
„ 2	„	1941	„		+ 0,22
					остаје 0,98
„ 3	„	1999	„	(+1)	+ 0,32
					остаје 0,30
„ 4	„	2057	„		+ 0,10
					остаје 0,40
„ 5	„	2118	„	(+1)	+ 0,60
	$m =$	10000			остаје —

d) Изналажење годишње суме за велике згодитке.

Ануитет са 5%	230974,80 дин.
— ануитет за 3% на увећани зајам са 2%	222347,87 „
Годишња сума за 10 великих згодитака	8626,93 дин.

e) Подела премија.

Поделу премија треба извршити тако да се сваки згодитак са 102.— дин. исплаћује заокругљеном сумом. Овде би се подела могла извршити овако:

1 прем. од		4898.— дин. тј.	1 лоз	од		5000.— дин.
1 „ „		1898.— „ „	1 „	„		2000.— „
1 „ „		898.— „ „	1 „	„		1000.— „
2 прем. по	158 дин.	316.— „ „	2 лоза	по	260 дин.	520.— „
5 прем. „	123 „	615.— „ „	5 лозова	„	225 „	1125.— „
10 прем.		8625.— дин.	10 лозова			9645.— дин.

f) Израда амортизационог плана.

Амортизациони план биће:

Година	Исплаћено обавезница	Отплата	Премија 2%	Сума за велике згодитке	Укупан издатак	Дуг	3% интерес	Ануитет
1	1.885	188.500	3.770	8.625	200.895	1,000.000	30.000	230.895
2	1.941	194.100	3.882	8.625	206.607	811.500	24.345	230.952
3	1.999	199.900	3.998	8.625	212.523	617.400	18.522	231 045
4	2.057	205.700	4.114	8.625	218.439	417.500	12.525	230.964
5	2.118	211.800	4.236	8.625	224.661	211.800	6.354	231.015
	10.000	1,000.000	20.000	43.125	1,063.125	3,058.200	91.746	1,154.871

5) Сума за премије аритметички опада, а сума за амортизацију и интерес аритметички расте.

Задатак. — Зајам од 1,000.000.— дин., подељен на 10.000 обвезница по 100 дин., отплаћује се за 5 година са интересом 5%, али да се исплаћује интерес 3%, а остатак од 2% да се употреби на 10 великих згодитака, а да ти згодитци опадају из године у годину за 1.800.— дин. Израдити план отплаћивања.

a) Изналажење ануитета

$$a = 1000000\ V_5^5 = 230974{,}80 \text{ дин.}$$

b) Изналажење годишњег издатка за амортизацију и 3% интерес.

Збир сума за премију, амортизацију и интерес чини ануитет са 5%; у овом примеру 230.974,89 дин. Пошто сума за премију опада из године у годину за 1800.— дин. то сума за амортизацију и 3% интерес мора из године у годину расти за 1800.— дин. Према томе, ако се издатак за амортизацију и 3% интерес у првој години обележи за a_1, а у следећим са $a_2, a_3 \ldots$, и са d повећање тј. диференција аритметичког реда, онда мора постојати следећи низ једначина:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_1 + 2d \\ a_4 &= a_1 + 3d \\ a_5 &= a_1 + 4d \end{aligned}$$

Збир дисконтованих вредности ових издатака на почетак амортизације са интересном стопом 3% даје зајам. Према томе ако се зајам обележи са K а интересни чинитељ са v добија се следећа једначина:

$$K = a_1\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^3} + \frac{1}{v^4} + \frac{1}{v^5}\right) + d\left(\frac{1}{v^2} + \frac{2}{v^3} + \frac{3}{v^4} + \frac{4}{v^5}\right)$$

А одавде:

$$K = a_1 IV_5^3 + d\left(\frac{1}{v^2}+\frac{2}{v^3}+\frac{3}{v^4}+\frac{4}{v^5}\right)$$

Ако заграду помножимо са $v-1$, па јој додамо и одузмемо $\frac{5}{v^5}$ добићемо следећу једначину:

$$K = a_1 IV_3^5 + \frac{100\,d}{3}\left(IV_3^5 - 5\,II_3^5\right) \;{}^{*)}$$

Заменом познатих количина добија се:

$$a_1 = 214860{,}94 \text{ дин.}$$

Додајући по 1800.— дин. добићемо суме у другој, трећој итд. години.

c) Изналажење суме за премије.

Ануитет са 5%		230974,80 дин.
— издатак за амортизацију и 3% интерес		214860,94 „
	$P_1 =$	16113,86 дин.
	$- d =$	1800.— „
итд.	$P_2 =$	14313,86 дин.

d) Изналажење броја у свакој години исплаћених обавезница.

Сума за амортизацију и 3% интерес износи 214860,94 дин. Ова сума у обавезницама износи 2148,61 Број исплаћених обавезница у свакој години добија се на следећи начин:

Сума за амортизацију и 3% интерес	2148,61	обавезница
— 3% интерес на 10000 обавезница	300.—	„
	$x_1 =$ 1848,61	„
+ 3% интерес	= 55,46	„
$+ d = \frac{1800}{100}$	= 18.—	„
	$x_2 =$ 1922,07	„
+ 3% интерес	= 57,66	„
+ d	= 18.—	„
	$x_3 =$ 1997,73	„
+ 3% интерес	= 59,93	„
+ d	= 18.—	„
	$x_4 =$ 2075,66	„
+ 3% интерес	= 62,27	„
+ d	= 18.—	„
	$x_5 =$ 2155,93	„

*) Општа једначина била би: $K = a_1 IV_{p_1}^n + \frac{100\,d}{p_1}\left(IV_{p_1}^n - n\,II_{p_1}^n\right)$

Према томе биће исплаћено:

у 1	години	1848	обавезница
„ 2	„	1922	„
„ 3	„	1998	„
„ 4	„	2076	„
„ 5	„	2156	„
		m = 10000	обавезница

Примедба. — Број исплаћених обавезница у првој години може се добити из следеће једначине:

$$m = x_1\left(1 + III_{p_1}^{n-1}\right) + \frac{100\,d}{p_1}\left[III_{p_1}^{n-1} - (n-1)\right],$$

где је m број свих обавезница зајма, n време амортизације зајма, x_1 број амортизованих обавезница у првој години амортизације, p_1 стопа са којом се исплаћује интерес у виду купона, а d диференција у обавезницама са којом расте сума за амортизацију и за интерес p_1%.

Број амортизованих обавезница у 2, 3,.... години може се добити из једначине:

$$x_n = x_1 v^{n-1} + d\left(1 + III_{p_1}^{n-2}\right) = x_1 I_{p_1}^{n-1} + d\left(1 + III_{p_1}^{n-2}\right)$$

За $n = 1$ треба десна страна ове једначине да постане x_1. Да би то било треба да буде:

$$d\left(1 + III_{p_1}^{-1}\right) = 0$$

Пошто $d \neq 0$ нити у овом случају може бити, јер би у том случају имали премије, као и суме за амортизацију и интерес са p_1%, константне, то остаје да је:

$$1 + III_{p_1}^{-1} = 0$$

Да би то доказали ставимо у једначини:

$$III_{p_1}^{n} = \frac{v(v^n - 1)}{v-1}$$

$n = -1$, па ћемо добити:

$$III_{p_1}^{-1} = \frac{v(v^{-1}-1)}{v-1} = \frac{1-v}{v-1} = -1$$

Пошто је $III_{p_1}^{-1} = -1$ то је јасно да мора бити $1 + III_{p_1}^{-1} = 0$.

e) Израда амортизационог плана.

Амортизациони план биће:

Година	Исплаћене обавезнице	Отплата	Премија Укупно Дин.	Премија По ком Дин.		Дуг	3% интерес	Ануитет
1	1.848	184.800	16.113	8	72	1,000 000	30 000	230.913
2	1.922	192.200	14.313	7	45	815 200	24.456	230.969
3	1.998	199 800	12 513	6	26	623.000	18.690	231.003
4	2.076	207.600	10.713	5	16	423.200	12.696	231.009
5	2.156	215.600	8.917	4	14	215.600	6.468	230.985
	10.000	1,000.000	62.569			3,077.000	92.310	1,154.879

f) Подела премија.

Подела премија врши се слично као у задатку претходне тачке овог члана. Овде се због смањивања суме за премију мора сваке године смањивати и величина згодитака.

6) Сума за премије аритметички расте, а сума за амортизацију и интерес аритметички опада.

Задатак. — Задатак из тачке 5 овог члана мења се у толико што ће сума за премије из године у годину расти за 1.800.— дин., а сума за амортизацију и 3% интерес за толико опадати.

a) Изналажење ануитета.

$$a = 1000000\, V_5^5 = 230974{,}80 \text{ дин.}$$

b) Изналажење суме за амортизацију и 3% интерес.

Из једначине:

$$K = a_1\, IV_{p_1}^5 - \frac{100\, d}{p_1}\left(IV_{p_1}^5 - 5\, II_{p_1}^5\right)$$

добија се:

$$a_1 = 221848{,}20 \text{ дин.}$$

Издатке за амортизацију и 3% интерес у следећим годинама добијамо из једначине:

$$a_n = a_1 - (n-1)\, d$$

стављајући у њој $n = 2, 3, \ldots.$, или одузимањем 1800.— дин. од издатака у првој, другој,.... години.

c) Израчунавање суме за премију.

Ануитет		230974,80 дин.
— сума за амортизацију и 3% интерес		221848,20 „
	$P_1 =$	9126.60 „
+	$d =$	1800.— „
	$P_2 =$	10926,60 дин.

итд.

d) Изналажење броја у свакој години исплаћених обавезница.

Број амортизованих обавезница у првој години амортизације добија се из једначине:

$$m = x_1\left(1 + III_{p_1}^{n-1}\right) - \frac{100\, d}{p_1}\left[III_{p_1}^{n-1} - (n-1)\right]$$

где m означава број свих обавезница зајма, n број година амортизације, d диференцију реда у обавезницама, p_1 интересну стопу са којом се исплаћује интерес у виду купона, а x_1 број амортизованих обавезница у првој години.

Број амортизованих обавезница у 2, 3, 4,.... години амортизације добија се из једначине:

$$x_n = x_1\, I_{p_1}^{n-1} - d\left(1 + III_{p_1}^{n-2}\right)$$

стављајући $n = 2, 3, 4, \ldots.$

Али број амортизованих обавезница у појединим годинама може се израчунати и на следећи начин:

Суме за амортизацију и 3% интерес	2218.48	обавезница
— 3% интерес на 10.000 обавезница	300.—	„
	$x_1 =$ 1918,48	„
+ 3% интерес	= 57.56	„
	1976,04	„
— d	= 18.—	„
	$x_2 =$ 1958 04	„
+ 3% интерес	= 58.74	„
	2016,78	„
— d	= 18. –	„
	$x_3 =$ 1998,78	„
+ 3% интерес	= 59.96	„
	2058,74	„
— d	= 18.—	„
	$x_4 =$ 2040,74	„
+ 3% интерес	= 61,22	„
	2101,96	„
— d	= 18.—	„
	$x_5 =$ 2083,96	„

Према томе биће исплаћено:

у 1 години		1918	обавезница
„ 2	„	1958	„
„ 3	„	1999	„
„ 4	„	2041	„
„ 5	„	2084	„
		$m = 10000$	обавезница

е) Израда амортизационог плана.

Амортизациони план изгледа:

Година	Амортизоване обавезнице	Отплата	Премија			Дуг	3% интерес	Ануитет
			Укупно дин.	По ком. дин.				
1	1.918	191.800	9.126	4	76	1,000.000	30.000	230.926
2	1.958	195.800	10.926	5	58	808 200	24.246	230.972
3	1.999	199.900	12.726	6	37	612.400	18.372	230.998
4	2.041	204.100	14.526	7	12	412.500	12.375	231.001
5	2.084	208.400	16.326	7	84	208.400	6.252	230.981
	10.000	1,000.000	63.630			3,041.500	91.245	1,154.878

7) Сума за исплату великих згодитака периодично опада. Годишње се обавља само једно вучење. Број великих згодитака исти је за све време амортизације.

Задатак. — Зајам од K дин., подељен на m обавезница по α дин., амортизује се за n година са $p\%$ интереса, али да се у виду купона плаћа интерес $p_1\%$, а остатак од $(p - p_1)\%$ да се употребљава на амортизацију и премије. Премијска сума сваких k година опада за d дин. Број великих згодитака увек исти, а мали се згодитци исплаћују по α_1 дин. $(\alpha_1 > \alpha)$.

а) Изналажење ануитета.

$$a = K\, V_p^n$$

b) Изналажење броја малих згодитака у свакој години амортизације:

Ако обележимо: са m број свих обавезница, са i интерес који се плаћа годишње по једној обавезници, са r број великих згодитака, са $x_1, x_2 \ldots, x_n$ број малих згодитака, који се исплаћују у 1, 2,..., n-тој години амортизације, са C суму, која се употребљава првих k година за исплату великих згодитака, и са n број периода, онда ћемо из услова да се ануитет сваке

године употребљава на исплату интереса, великих и малих згодитака, имати следећи низ једначина:

1 год. $\quad a = m i + C + x_1 \alpha_1$

2 „ $\quad a = [m - (x_1 + r)]\, i + C + x_2 \alpha_1$

3 „ $\quad a = [m - (x_1 + x_2 + 2r)]\, i + C + x_3 \alpha_1$

. . . .

k-те год. $\quad a = \{m - [x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + (k-1)\, r]\}\, i + C + x_k \alpha_1$

(k + 1)-ве „ $\quad a = \{m - [x_1 + x_2 + \ldots + x_k + k \cdot r]\}\, i + C - d + x_{k+1} \alpha_1$

(k + 2)-ге „ $\quad a = \{m - [x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} + (k+1)\, r]\}\, i + C - d + x_{k+2} \alpha_1$

. . . .

2 k-те год. $\quad a = \{m - [x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k-1} + (2k-1)\, r]\}\, i + C - d + x_{2k} \alpha_1$

(2 k + 1)-ве „ $\quad a = \{m - [x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k} + 2\, k\, r]\}\, i + C - 2d + x_{2k+1} \alpha_1$

(2k + 2)-ге „ $\quad a = \{m - [x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k+1} + (2k+1)\, r]\}\, i + C - 2d + x_{2k+2} \alpha_1$

. . . .

(n − k)-те год. $\quad a = \{m - [x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-k-1} + (n-k-1)\, r]\}\, i + C - \left(\frac{n}{k} - 2\right) d + x_{n-k} \alpha_1$

(n − k + 1)-ве „ $\quad a = \{m - [x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-k} + (n-k)\, r]\}\, i + C - \left(\frac{n}{k} - 1\right) d + x_{n-k+1} \alpha_1$

(n − k + 2)-ге „ $\quad a = \{m - [x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-k+1} + (n-k+1)\, r]\}\, i + C - \left(\frac{n}{k} - 1\right) d + x_{n-k+1} \alpha_1$

. . . .

n-те год. $\quad a = \{m - [x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + (n-1)\, r]\}\, i + C - \left(\frac{n}{k} - 1\right) d + x_n \alpha_1$

Одузимањем по две узастопне једначине добија се, пошто се стави:

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + i}{\alpha_1},\ \beta = \frac{r i}{\alpha_1} \text{ и } \gamma = \frac{d}{\alpha_1},$$

следећи низ једначина:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1\,\alpha + \beta \\
x_3 &= x_1\,\alpha^2 + \alpha\,\beta + \beta \\
x_4 &= x_1\,\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\,\beta + \beta \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_k &= x_1\,\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \alpha^{k-3}\beta + \ldots + \alpha\beta + \beta \\
x_{k+1} &= x_1\,\alpha^{k} + \alpha^{k-1}\beta + \alpha^{k-2}\beta + \ldots + \alpha\,\beta + \beta + \gamma \\
x_{k+2} &= x_1\,\alpha^{k+1} + \alpha^{k}\beta + \alpha^{k-1}\beta + \ldots + \alpha\,\beta + \beta + \alpha\,\gamma \\
x_{k+3} &= x_1\,\alpha^{k+2} + \alpha^{k+1}\beta + \alpha^{k}\beta + \ldots + \alpha\,\beta + \beta + \alpha^2\gamma \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{2k} &= x_1\,\alpha^{2k-1} + \alpha^{2k-2}\beta + \alpha^{2k-3}\beta + \ldots + \alpha\,\beta + \beta + \alpha^{k-1}\gamma \\
x_{2k+1} &= x_1\,\alpha^{2k} + \alpha^{2k-1}\beta + \alpha^{2k-2}\beta + \ldots + \alpha\,\beta + \beta + \alpha^{k}\gamma + \gamma \\
x_{2k+2} &= x_1\,\alpha^{2k+1} + \alpha^{2k}\beta + \alpha^{2k-1}\beta + \ldots + \alpha\,\beta + \beta + \alpha^{k+1}\gamma + \alpha\,\gamma \\
x_{2k+3} &= x_1\,\alpha^{2k+2} + \alpha^{2k+1}\beta + \alpha^{2k}\beta + \ldots + \alpha\,\beta + \beta + \alpha^{k+2}\gamma + \alpha^2\gamma \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-k} &= x_1\,\alpha^{n-k-1} + \alpha^{n-k-2}\beta + \alpha^{n-k-3}\beta + \ldots + \alpha\,\beta + \beta + \alpha^{n-2k-1}\gamma + \\
&\quad + \alpha^{n-3k-1}\gamma + \ldots + \alpha^{k-1}\gamma \\
x_{n-k+1} &= x_1\,\alpha^{n-k} + \alpha^{n-k-1}\beta + \alpha^{n-k-2}\beta + \ldots + \alpha\,\beta + \beta + \alpha^{n-2k}\gamma + \\
&\quad + \alpha^{n-3k}\gamma + \ldots + \alpha^{k}\gamma + \gamma \\
x_{n-k+2} &= x_1\,\alpha^{n-k+1} + \alpha^{n-k}\beta + \alpha^{n-k-1}\beta + \ldots + \alpha\,\beta + \beta + \alpha^{n-2k+1}\gamma + \\
&\quad + \alpha^{n-3k+1}\gamma + \ldots + \alpha^{k+1}\gamma + \alpha\,\gamma \\
x_{n-k+3} &= x_1\,\alpha^{n-k+2} + \alpha^{n-k+1}\beta + \alpha^{n-k}\beta + \ldots + \alpha\,\beta + \beta + \alpha^{n-2k+2}\gamma + \\
&\quad + \alpha^{n-3k+2}\gamma + \ldots + \alpha^{k+2}\gamma + \alpha^2\gamma \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= x_1\,\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta + \ldots + \alpha\,\beta + \beta + \alpha^{n-k+1}\gamma + \\
&\quad \alpha^{n-2k-1}\gamma + \ldots + \alpha^{2k-1}\gamma + \alpha^{k-1}\gamma
\end{aligned}
$$

Пошто је:

$$m - n\,r = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

то ћемо заменом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ њиховим вредностима из предњих једначина добити следећу једначину:

$$
\begin{aligned}
m - n\,r = x_1\,\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} + \alpha\left[\frac{\alpha^{n-1}-1}{\alpha-1} + \frac{\alpha^{n-2}-1}{\alpha-1} + \frac{\alpha^{n-3}-1}{\alpha-1} + \ldots\right. \\
\left.\ldots + \frac{\alpha-1}{\alpha-1}\right] + \gamma\left[\frac{\alpha^{n-k}-1}{\alpha-1} + \frac{\alpha^{n-2k}-1}{\alpha-1} + \ldots + \frac{\alpha^{2k}-1}{\alpha-1} + \frac{\alpha^{k}-1}{\alpha-1}\right]
\end{aligned}
$$

Одавде следује:

$$
\begin{aligned}
m - n\,r = x_1\,\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} + \frac{\beta}{\alpha-1}\left[\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} - n\right] + \frac{\gamma}{\alpha-1}\left[\alpha^{n-k} + \right. \\
\left. + \alpha^{n-2k} + \ldots + \alpha^{2k} + \alpha^{k} + 1 - \frac{n}{k}\right]
\end{aligned}
$$

Или:

$$m - n\,r = x_1\,\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} + \frac{\beta}{\alpha-1}\left[\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} - n\right] + \frac{\gamma}{\alpha-1}\left[\frac{\alpha^n-1}{\alpha^k-1} - \frac{n}{k}\right] \quad (153)$$

Ова једначина даје непознату x_1 пошто су све остале количине познате.

Замењујући x_1 у напред изведеним једначинама добићемо $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

c) Изналажење премијске суме.

Суму за исплату великих згодитака у првом периоду израчунаћемо из једначине:

$$a = m\,i + C + x_1\,\alpha_1$$

дакле

$$C = a - m\,i - x_1\,\alpha_1$$

Премијску суму добићемо кад од суме за исплату великих згодитака одузмемо номиналну вредност великих згодитака. Ако премијску суму обележимо са P_1 онда ће бити:

$$P_1 = C - r\,\alpha = a - [m\,i + x_1\,\alpha_1 + r\,\alpha]$$

У другом периоду времена од k година премијска сума биће:

$$P_2 = P_1 - d$$

итд.

Примедба. — Кад би премијска сума периодично расла за d дин. онда би једначина (b) имала следећи облик:

$$m - n\,r = x_1\,\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} + \frac{\beta}{\alpha-1}\left[\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} - n\right] - \frac{\gamma}{\alpha-1}\left[\frac{\alpha^n-1}{\alpha^k-1} - \frac{n}{k}\right] \quad (154)$$

ЗАДАТЦИ

1) Који ће капитал за 5 година порасти са 12% интереса на интерес a) при годишњем капиталисању на дин. 3524,68, b) при полугодишњем капиталисању на дин. 8954,24, c) при тромесечном капиталисању на дин. 18061,11,11?

Р. a) $K = 2000.$—, b) $K = 5000.$—, c) $K = 10000.$—

2) На коју ће суму порасти дин. 25000.— са 8% интереса на интерес за 12 година при капиталисању: a) годишњем, b) полугодишњем, c) тромесечном?

Р. a) $K_n = 62954{,}25$, b) $K_n = 64082{,}60$, c) $K_n = 64676{,}76$

3) Са којом годишњом интересном стопом дин. 2000.— за 5 год. при годишњем капиталисању порасту на дин. 3524,68?

Р. $p = 12\%$

4) За које ће време дин. 5000.— при тромесечном капиталисању са интересом 12% годишње порасти на дин. 9030,55?

Р. $n = 5$ година.

5) На коју ће суму порасти дин. 20000.— при тромесечном капиталисању за 5 година и 2 месеца са интересом 12% год.?

Р. $K_n = 36844{,}66$

6) Са којом ће се интересном стопом удвостручити новац уложен под интерес на интерес за 14 година при годишњем капиталисању?

Р. $p = 5{,}074\%$

7) За које ће време дин. 12000.— са интересом 6% год. при полугодишњем капиталисању донети интереса на интерес дин. 3000.—

Р. $n = 7{,}57$ полугодина $= 3{,}785$ год. $= 3$ год. 9 месеци и 13 дана

8) На коју ће суму заједно са 8% годишњим интересом на интерес порасти дин. 10000.— за 5 год. и 15 дана при годишњем капиталисању?

Р. $K_n = 14742{,}26$

9) Који ће капитал за 8 год. и 2 месеца са интересом на интерес 4% годишње при полугодишњем капиталисању порасти на дин. 27638,75?

Р. $K = 20000.—$

10) На коју ће суму порасти улог од 2000.— дин. за 10 година са 6% годишње а) на дан последњег (10-тог) улога, b) годину дана после последњег (10-тог) улога, ако је капиталисање у оба случаја α) годишње, β) полугодишње? Улагање се поклапа са капиталисањем.

Р. a) α) $S_n' = 26361{,}59$
β) $S_n' = 53523{,}18$

b) α) $S_n = 27943{,}28$
β) $S_n = 55352{,}97$

11) По колико треба уплаћивати 15 год. са 5% годишње при годишњем капиталисању да се годину дана после последњег улога има заједно са интересом на интерес дин. 40000?

Р. $u = 1765{,}43$

12) Колико пута треба уложити по 2000.— дин. са 8% год. при годишњем капиталисању да се годину дана после последњег улога има 16000.— дин.? Улагање се врши сваке године.

Р. $6 < n < 7$ тј. $n = 7$ (6 пута по 2000.— а седми пут мање).

13) Неко је уложио дин. 40.000.— са 5% годишње при годишњем капиталисању. Колику ће годишњу ренту моћи примати 15 година када се прва рента прима: а) одмах, b) после годину дана, c) после 10 година?

Р. a) $r = 3670{,}18$, b) $r = 3853{,}69$, c) $r = 5978{,}34$.

14) Почевши после годину дана од данас у току 20 година могла би се примати годишња рента од 5000.— дин. Интерес 4% годишње при годишњем капиталисању. Израчунати коју би суму могао улагач примити годину дана по пријему осме ренте.

Р. $R = 48802{,}38$

15) Израчунати у задатку 14) колика би се рента могла примати 25 год. место 20 година и колико би се могло примити на дан пријема 15-те ренте.

Р. $r = 4349{,}72$; $R = 39629{,}85$

16) Ако се уложи 20000.— дин. у штедионицу, која плаћа 8% (pa) а капиталисање врши полугодишње, колико се пута може примити полугодишња рента од 1500.— дин. и колика је последња рента када се прва рента прима: a) пола године после улога, b) на дан улога?

Р. a) $n = 20$, $r_1 = 655{,}34$; b) $n = 19$, $r_1 = 509{,}49$

17) Зајам од 100000.— дин. амортизује се за 5 година са 6% годишње декурзивно ануитетима a) годишњим, b) полугодишњим. Наћи ануитете и израдити план отплаћивања.

Р. a) $a = 23739{,}64$, b) $a = 11723{,}05$

18) У задатку 17) наћи четврту отплату и остатак дуга после 3 године амортизације.

Р. a) $b_4 = 21128{,}20$, $R_3 = 43524{,}08$; b) $b_4 = 9531{,}91$, $R_4 = 63506{,}01$

19) Један зајам отплаћен је годишњим ануитетом од динара 4000.—. Наћи који је то зајам када је време амортизације 50 година, а интерес $5^1/_2\%$ годишње декурзивно.

Р. $K = 67726{,}07$

20) Наћи колики је полугодишњи ануитет за зајам из задатка 19) када је време амортизације 40 година а интересна стопа $4^1/_2\%$ годишње.

Р. $a = 1832{,}92$

21) Двадесет пета отплата једног зајма износи 1200.— дин. Наћи a) колики је зајам, b) колики је остатак дуга после 20 плаћених ануитета, c) колико је отплаћен дуг са 25 ануитета, када је време амортизације 30 година са 6% годишње, а ануитети се плаћају годишње.

Р. a) $K = 23430,47$; b) $R_{10} = 12528,22$; c) $O_{25} = 16260,20$

22) Један зајам амортизује се полугодишњим ануитетом 6% (год. 12%) са интересом 8% годишње. Наћи који је то зајам ако је за 4 године амортизације смањен за дин. 10000.—

Р. $K = 117745.-$

23) У задатку 22) наћи последњи ануитет.

Р. $a_1 = 79,40$

24) Полугодишњи ануитет 7% износи дин. 14000.— Зајам се амортизује полугодишњим ануитетом са интересом 9% годишње декурзивно. Наћи колики је последњи ануитет.

Р. $a_1 = 5554,01$

25) Зајам 40000.— амортизује се полугодишњим ануитетом од 2000.— дин. са ануитетом 4% годишње антиципативно. Наћи: a) последњи ануитет, b) отплаћени дуг са 5 првих ануитета, c) девету отплату.

Р. a) $a_1 = 574,14$, b) $0_5 = 6377,50$, c) $b_9 = 1439,28$

26) Колико је уложено пре 20 година када се почев од данас може примати годишња рента од 5000.— дин. у току 10 година, а затим следећих 8 година годишња рента од 4000.— дин. Интерес 6% год. декурзивно капиталисање годишње.

Р. $K = 16474,26$

27) Пре 18 година уложено је 5000.— дин., а затим све до данас сваке године улагано је по 1000.— дин. више него у претходној години. Израчунати колика се рента може примити после годину дана да би се следећих 10 година примала годишња рента за 500.— дин. мања од ренте у претходној години. Интерес 5% годишње. Капиталисање годишње.

Р. $r = 45654.42$

28) Колика ће бити рента у задатку 27) када се у току следећих 10 година рента повећава за 500.— дин.?

Р. $r = 41139,98$

29) Данас је уложено 250.000.— дин. са $4^1/_2$% год. при годишњем капиталисању. После 10 година ова стопа смањиће се на 4% год. Израчунати колика се годишња рента може примати 20 година почевши годину дана од данас да после примљене 20-те ренте a) не остане ништа у штедионици, b) да остане 100.000.— дин.

Р. a) $r = 19032,32$; b) $r = 15720,59$

30) Пре 30 година уложено је 400 000.— дин., па је затим сваке године, почевши годину дана после улога, примана рента. Ова рента сваких 10 година обећавана је за 10% од ренте у претходних 10 година. Израчунати колика је рента примана првих 10 година ако после пријема 30-те ренте a) није остало ништа b) остало 200.000.— дин. Интерес 5% год. декурзивно. Капиталисање годишње.

Р. a) $r = 24304.81$; b) $r = 21493,02$

31) Наћи ренту у задатку 30) када рента сваких 10 година опада за 10% од ренте у првих 10 година.

Р. a) $r = 27883,39$; b) $r = 24657,60$

32) Зајам од 100 милиона амортизује се за 25 год. полугодишњим ануитетом са интересом 6% год. декурзивно. Наћи који је емисиони курс, а који курс преузимања, када је ефективна стопа $6^1/_2$%, а стопа преузимања $6^3/_4$%.

Р. $C_e = 95,42165$, $C_p = 93,25352$

33) У задатку 32) емисиони је курс 91,1614, а курс преузимања 83.4916. Наћи ефективну интересну стопу и стопу преузимања када су остали елементи као и у задатку 32).

Р. $e = 7\%$, $e_p = 8\%$

34) За један зајам једна финансијска група нуди 90% за обавезнице које носе 6% годишње, а пристаје да прими и обавезнице које носе 5% по паритетном курсу. Наћи паритетни курс када се ануитет плаћа годишње, а време амортизације 25 година при годишњем плаћању ануитета.

Р. $C_{(90)} = 81,63$

35) Наћи паритетни курс за обавезнице $6^1/_2$% у задатку 34) када се ануитет плаћа полугодишње.

Р. $C_{(90)} = 94,318$

36) Зајам од 50000000.— амортизује се за 15 година са 5% годишње декурзвно. Зајам је подељен на обавезнице по 100.— дин. Наћи број амортизованих обавезница у току првих 7 година када се ануитет плаћа годишње, а амортизоване обавезнице исплаћују се a) по номинали, b) по 125 дин.

Р. a) $O_7 = 18865$ обавезница; b) $O_7 = 19722$ обавезнице.

37) Наћи колико је неисплаћених обавезница у задатку 36) после 10 година амортизације и израдити план за остатак времена.

Р. а) $R_5 = 20856$ обавезница; b) $R_5 = 20021$ обавезница

38) За један зајам, који треба да се амортизује за 40 година годишњим ануитетима, примљене су следеће понуде:

a) 90% за обавезнице 6%
b) 85% „ „ 5%
c) 95% „ „ 6½%

Израчунати: 1) која је понуда најповољнија, 2) израдити ранг понуде.

Р. 1) најповољнија је понуда под b); 2) Ранг: I под b)
II „ a)
III „ c)

39) Неко дугује 200000.— дин. са роком 18/5-1939 године. Интерес 4% годишње декурзивно. Плаћање ануитета полугодишње. Ануитет полугодишње је 6000.— дин. Дужник је 18/5 1939 год. платио ануитет. Наћи време амортизације остатка дуга ако је ануитет смањен на 5000.— дин.

Р. $n = 80$ $(79 < n < 80)$

40) Један зајам закључен је 1/5-1930 год. и по њему плаћан полугодишњи ануитет од 100000.— дин. све до 1/5-1939 године. Интерес по овом зајму је 6% годишње декурзивно. Полугодишњи ануитет је 5% од зајма. Поверилац је пристао да дужник 1/5-1939 год. плати само интерес и да дуг амортизује за 20 година рачунајући од 1/5-1939 са интересом 5% антиципативно. Нови ануитет плаћа се полугодишње. Израчунати а) колико дужник плаћа 1/5-1939 год., b) колики ће полугодишњи ануитет плаћати следећих 20 година.

Р. а) $U_1 + U_2 = 62124{,}49$; b) $a_1 = 44346{,}49$

41) Зајам од 220000.— дин. амортизује се за 20 година отплатама које сваких 5 година расту за ¼ отплате у првих 5 година. Интерес 7% год. декурзивно. Плаћање ануитета годишње. Наћи отплату у првих 5 година и израдити план отплаћивања.

Р. $b = 8000.—$

42) У задатку 41) ануитети расту сваких 5 година за ¼ ануитета у првих 5 година. Наћи ануитет у првих 5 година, израдити план отплаћивања и наћи 6-ту, 11-ту и 16-ту отплату. Нађени ануитет заокруглити на следећу стотину на више.

Р. $a = 16400.—$; $b_6 = 5502{,}55$; $b_{11} = 11817{,}61$; $b_{16} = 20946{,}21$

43) Зајам од 100000.— дин. амортизује се за 50 година годишњим ануитетима са интересом 4% годишње декурзивно, али се у току сваких 10 година амортизује иста сума дуга тј. 20000.— дин. Израчунати колики је ануитет у сваком периоду

Р. $a_1 = 5665{,}82$, $a_2 = 4865{,}82$, $a_3 = 4065{,}82$, $a_4 = 3265{,}82$, $a_5 = 2465{,}82$.

44) Отплате код једног зајма рату са 2%. Интерес по овом зајму је 5% годишње декурзивно. Наћи који је зајам када је 25-та отплата 4000.— дин. и када је први ануитет 7486,88 дин.

Р. $K = 100000.—$

45) Наћи са којом стопом расту отплате једног зајма када је 10-та отплата дин. 1343,92 и 20-та 1806,11.

Р. $p = 3\%$.

46) Наћи који је ануитет зајма у задатку 45) када је време амортизације 40 година, а ануитет се плаћа годишње, и када је интересна стопа а) 3%, b) 2%, c) 4%. Интерес се плаћа декурзивно ($K = 77663{,}29$).

Р. а) $a = 3359{,}90$; b) $a = 2839{,}04$; c) $a = 3923{,}82$.

47) Један зајам амортизује се 40 година годишњим једнаким ануитетима са 4% годишње а) декурзивно b) антиципативно. После 25 плаћених ануитета остатак дуга је дин. 100000.—. Наћи: 1) колики је зајам и 2) колики је остатак дуга после 35 плаћених ануитета.

Р. а) 1) $K = 178018{,}39$ b) 1) $K = 175717{,}36$
2) $R_5 = 40040{,}18$ 2) $R_5 = 40319{,}23$

48) Зајам се амортизује полугодишњим ануитетом 5% (год. 10%) са интересом 6% год. а) декурзивно, b) антиципативно. После 7 плаћених ануитета остатак дуга је 50000.— дин. Израчунати колики је последњи ануитет.

Р. а) $a_1 = 2949{,}06$, b) $a_1 = 248{,}68$

49) Неко је улагао 16 година и то прве 4 год. по дин. 2000.— годишње а затим сваке следеће 4 године по дин. 500.— годишње више него у претходне 4 године. Израчунати колику годишњу ренту може примати 15 година ако се прва рента прима а) годину дана после последњег улога, b) 10 година после последњег улога. Интерес 4% годишње декурзивно. Капиталисање годишње.

Р. а) $r = 5246{,}20$, b) $r = 7466{,}98$

50) Израчунати колика ће бити рента из задатка 49) у току првих 5 година ако се рента сваких 5 година смањује за 20% од ренте у току првих 5 година.

Р. а) $r = 6303{,}89$, b) $r = 8972{,}40$

*

У следећим задатцима проверити нађене резултате претпостављањем да је један од познатих елемената непознат, а да је нађени елеменат познат.

51) По колико треба улагати почетком године 10 година са 6% год. декурзивно да се 15 година прима рента од 20000.— дин., ако се прва рента прима a) годину дана после 10-тог улога, b) 6 година после 10-тог улога. Капиталисање годишње.

52) Задатак 51) решити када је капиталисање полугодишње, улагање и примање ренте годишње.

53) Задатак 51) решити тако да после пријема 15-те ренте остане у штедионици 100000.— дин. a) када је улагање и примање ренте годишње а капиталисање годишње, b) када је улагање и примање ренте полугодишње а капиталисање годишње, c) када је улагање и примање ренте годишње а капиталисање полугодишње.

54) Један зајам отплаћује се за 20 год. полугодишњим ануитетима са 5% годишње антиципативно. Двадесет четврта отплата је 1000.— дин. Наћи колики је ануитет два пута толиког зајма заокругљеног на следећих 10000.— када је време амортизације 30 година са 7% годишње декурзивно и плаћањем ануитета a) годишње, b) полугодишње.

55) Један зајам амортизује се полугодишњим ануитетом са 4% год. антиципативно. Годишњи ануитет је 11%. Наћи који је то зајам када му је збир треће, четврте и пете отплате дин. 4200.—.

56) За један зајам чији је рок амортизације 45 година а ануитети се плаћају годишње примљене су три понуде

a) 90% за обвезнице 5%
b) 80% „ „ 4%
c) 75% „ „ $3\frac{1}{2}$%

израчунати која је понуда најповољнија.

57) Наћи у задатку 56) колики је остатак дуга за сваку од понуда после 14 година амортизације ако је код сваке од понуда добивено на име зајма ефективних дин. 100000.—.

58) Општина је од три финансијера добила на зајам по 1000000.— дин. ефективних. Сваки од ових зајмова амортизује се за 20 година полугодишњим ануитетом. Први финансијер дао је зајам са 6% по курсу 90%, други са 5% по курсу 80% и трећи са 4% по курсу 70%. Наћи: a) колики је остатак дуга после 10 година амортизације; b) колико стварно плаћа на име интереса по сватри зајма; c) који би се зајам могао амортизовати са ануитетом сватри зајма за 40 година при годишњем капиталисању, а са интересном стопом 5%.

59) За градњу једне пруге утрошено је 1/5-1924 г. дин. 1000000.—, 18/7-1924 г. дин. 5000000.— 2/4-1925 год. дин. 4000000.— и 28/7-1925 дин. 20000000.— Пруга је пуштена у саобраћај 1/7-1926 год. На новац уложен у ову пругу плаћа се интерес 6%. Наћи колики треба да буде полугодишњи бруто приход да би се ова пруга амортизовала за 25 година, када се на име режије и одржавање рачуна годишње 2% на вредност пруге. Капиталисање сваког 30/6 и 31/12.

60) Колико треба уложити данас да се после 5 година прими 20000.— дин., а после 10 година (од данас) два пута толика сума колико се данас уложи, кад је капиталисање полугодишње а интерес 6% (pa)?

61) Пре 8 година уложена је извесна сума новаца са 4% годишње, а 4 године касније три пута толика сума са 5% годишње. Данас је примљено 100000.— дин. а остала је сума довољна да се са $4\frac{1}{2}$% годишње 15 година прима декурзивна рента од 2000.— дин. и да после пријема 15-те ренте остане у штедионици пет пута толика сума колико је уложено пре 8 година. Која је сума уложена пре 8, а која пре 4 године?

62) Пре 20 година уложено је 200000.— дин. са 5% годишње. После 10 година интерес је смањен на 4%. Данас је изузето 50000.— дин. Колика се рента може примати почев после 5 година од данас следећих 20 година са $4\frac{1}{2}$% годишње да у штедионици на дан пријема 20-те ренте a) не остане ништа, b) да остане 40000 дин?

63) За које ће време улог од 300.— дин. са 5% годишње при годишњем улагању и годишњем капиталисању порасти на 1800.— дин., и колики је последњи улог?

64) Са којом ће стопом полугодишњи улог од 400.— дин. за 10 год. при полугодишњем капиталисању порасти на динара 10000.—?

65) Ако се данас уложи 50000.— дин. са 8% годишње при тромесечном капиталисању колика ће се тромесечна рента моћи примати почевши 4 године од данас следећих 5 година, да на дан пријема последње ренте остане у штедионици 10000.— дин?

66) За зајам од 200000.— дин. који се амортизује за 28 година полугодишњим ануитетом са 6% годишње декурзивно израдити план отплаћивања за a) године 24—28, b) године 16—20.

67) Израдити план у задатку 66) када је интерес 4% годишње антиципативно.

68) Неко дугује 200000.— дин. и треба да их отплати годишњим ануитетом 10000.— дин. са интересом 4% годишње декурзивно. Наћи колики је првобитни зајам када је он већ отплаћиван 10 година са истом интересном стопом и ануитетом.

69) Ако је двадесет седма отплата једног зајма 2000.— дин., а интерес 7% годишње a) декурзивно, b) антиципативно, плаћање ануитета годишње и време амортизације 40 година, колики је остатак дуга после 25 плаћених ануитета?

70) Зајам од 5000000.— дин. подељен је на обвезнице по 100.— дин. Амортизује се за 5 година са интересом 5% годишње декурзивно. 3% интерес исплаћује се у виду купона, а 2% дели се сваке године на 10 великих згодитака који чине међу собом опадајући аритметички ред са диференцијом 1000. Сума за велике згодитке стална је. Израдити план отплаћивања.