UNIVERZITET U BEOGRADU
Matematički fakultet
Grupa za matematiku

Branko J. Malešević

O TRANSCENDENTALNIM RAŠIRENJIMA DIFERENCIJALNIH POLJA

– Doktorska disertacija –

BEOGRAD, 2007.

PREDGOVOR

Predmet ove doktorske disertacije jesu diferencijalna polja. Posebno se razmatraju transcendentalna raširenja diferencijalnih polja, tj. raširenja diferencijalnih polja sa diferencijalno-transcendentnim elementima. Dobijeni rezultati su iz teorije diferencijalnih polja i na osnovu dobijenih rezultata posebno za diferencijalno polje meromorfnih funkcija, formiran je jedan metod za dokazivanje diferencijalne-transcendentnost nekih meromorfnih funkcija koje ispunjavaju neku diferencno-diferencijalnu jednačinu. Tim metodom dobijeni su dokazi diferencijalne transcendentnosti nekih meromorfnih funkcija, koje se javljaju pre svega u analitičkoj teoriji brojeva.

Ovaj rad se sastoji od tri glave. U prvoj glavi rada, koja je uvodnog karaktera, razmatra se algebarska teorija polja i zasnivanje transcendentnih raširenja algebarskih polja. U prvih šest sekcija prve glave izložen je pregled dela teorije algebarskih polja (koji je neophodan za zasnivanje teorije diferencijalnih polja). Dalje, u sedmoj sekciji dokazana su osnovna tvrđenja za pojmove transcendentne baze i stepena transcendentnosti raširenja, koji se efektivno koriste u dokazivanju novih tvrđenja vezanih za raširenja diferencijalnih polja. U osmoj sekciji dat je jedan algoritamski dokaz eliminacije kvantora za teoriju algebarskih polja date karakteristike 0 ili p. Noviji rezultati iz teorije diferencijalnih polja pokazuju da se analogni rezultat može dati i za teoriju diferencijalnih polja. Na kraju, u devetoj sekciji data su neka poboljšanja u dokazu LÜROTHove teoreme, u odnosu na postojeće dokaze, kojom su određena prosta transcendentna raširenja algebarskih polja.

U drugoj glavi rada razmatra se teorija diferencijalnih polja. U prve tri sekcije izložen je pregled teorije modela koji je neophodan za zasnivanje teorije diferencijalnih polja. U naredne tri sekcije izlažu se osnovni pojmovi teorije diferencijalnih polja, uključujući diferencijalne redukcije i teoriju diferencijalno zatvorenih polja. U sedmoj sekciji prikazan je jedan noviji algoritamski dokaz eliminacije kvantora za teoriju diferencijalnih polja karakteristike 0. Takođe, dat je model-teoretski dokaz navedene činjenice. U osmoj sekciji date su osobine diferencijalnih ideala vezane za diferencijalni rang prostog diferencijalnog ideala. Na osnovu tih rezultata, u devetoj sekciji dati su novi rezultati prema radovima [**126**] i [**127**]. Preciznije, na osnovu rezultata prve glave, vezanih za stepen transcendentnosti raširenja, sa Lemama 2.9.1., 2.9.2., 2.9.3. i 2.9.4. data je karakterizacija diferencijalno-algebarskih elemenata i diferencijalno-algebarskih raširenja nekog polja. Korišćenjem pojma podmodelske kompletnosti dokazana je Teorema 2.9.5., gde je data diferencijalna karakterizacija raširenja nekog diferencijalnog polja koje se sastoji samo od diferencijalno-algebarskih elemenata. Na kraju devete sekcije navode se dva proširenja LÜROTHove teoreme u teoriji diferencijalnih polja.

U trećoj glavi rada razmatra se jedan metod dokazivanja diferencijalne transcendentnosti. U prvoj sekciji prikazane su neke metode dokazivanja diferencijalnetranscendentnosti. Dalje, u drugoj sekciji dat je kompletan dokaz HÖLDERove teoreme da gama funkcija jeste diferencijalno transcendentna koristeći dokaze OSTROWSKOG. U trećoj sekciji razmatrane su analitičke osobine gama funkcije i srodnih funkcija koje su vezane za pojam glavne vrednosti u tački. Pored toga, navedene su neke nove reprezentacije KUREPINE funkcije $K(z)$ i alternirajuće KUREPINE funkcije $A(z)$ prema radovima [**99**] i [**107**], koje su s jedne strane vezane za pojam glavne vrednosti u tački, a s druge strane nam omogućavaju izdvajanje nekih novih primera diferencijalno-transcendentnih funkcija. U četvrtoj sekciji dat je, prema radovima [**126**] i [**127**], jedan metod dokazivanja diferencijalne transcendentnosti na osnovu Teorema 3.4.3. i 3.4.6. Na kraju, u završnoj petoj sekciji, primenom prethodnog metoda dati su neki primeri diferencijalno-transcendentnih funkcija izdvojeni u jedanaest podsekcija. Između ostalog, dati su dokazi diferencijalne transcendentnosti HADAMARDove, BARNESove faktorijalne funkcije, RAMANUJAN-DIRICHLETovog L reda, svih DIRICHLETovih L redova (time i RIEMANNove zeta funkcije), kao i raznih specijalnih funkcija definisanih odgovarajućim integralima.

Zahvaljujem se profesoru dr Žarku Mijajloviću na upućivanju u problematiku diferencijalne transcendentnosti, kao i na svesrdnoj pomoći oko izrade ovog doktorata. Takođe, želim da mu se zahvalim i na savetima i diskusiji pri proučavanju raznih oblasti matematike. Zahvaljujem se profesorima akademiku dr Aleksandru Iviću, dr Miodragu Mateljeviću i dr Slobodanu Simiću na stručnim savetima i korisnim sugestijama pri izradi ovog rada. Na kraju, želim da se zahvalim svojoj porodici na razumevanju i bezrezervnoj podršci.

SADRŽAJ

1. ALGEBARSKA TEORIJA POLJA

1.1. Teorija polja 1

1.2. Prsten polinoma 3

1.3. Raširenja polja 9

1.4. Korenska raširenja polja 12

1.5. Polje algebarskih brojeva 14

1.6. Algebarsko zatvorenje polja 15

1.7. Transcendentna raširenja polja 19

1.8. Eliminacija kvantora u algebarski zatvorenim poljima 24

1.9. Lürothova teorema 29

2. TEORIJA DIFERENCIJALNIH POLJA

2.1. Modeli, elementarna ekvivalencija modela 34

2.2. Metod novih konstanti, dijagrami modela 36

2.3. Razni tipovi kompletnosti teorija 37

2.4. Diferencijalni prsten i diferencijalno polje 42

2.5. Diferencijalne redukcije u prstenu diferencijalnih polinoma 47

2.6. Diferencijalno zatvorena polja 53

2.7. Eliminacija kvantora u teoriji diferencijalno zatvorenih polja 56

2.8. Diferencijalni ideali 60

2.9. Diferencijalno algebarska raširenja 64

3. JEDAN METOD DOKAZIVANJA DIFERENCIJALNE TRANSCENDENTNOSTI

3.1. Metode dokazivanja diferencijalne transcendentnosti 68

3.2. Diferencijalna transcendentnost gama funkcije 69

3.3. Analitičke osobine gama funkcije 77

3.4. Jedan metod dokazivanja diferencijalne transcendentnosti 85

3.5. Neki primeri diferencijalno transcendentnih funkcija 89

LITERATURA 99

INDEKS 109

1 ALGEBARSKA TEORIJA POLJA

1.1 Teorija polja

Uređeno polje je svaka struktura $\mathbb{F} = (F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$, gde je $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ polje i $(F, \leq)$ linearno uređenje saglasno sa operacijama $+$ i $\cdot$. Na osnovu prethodne definicije, uređeno polje određeno je spiskom aksioma:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$
2. $x + 0 = x$, $0 + x = x$
3. $\exists y\,(x + y = 0 \wedge y + x = 0)$
4. $x + y = y + x$
5. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
6. $1 \cdot x = x$, $x \cdot 1 = x$
7. $x \cdot y = y \cdot x$
8. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
9. $x \neq 0 \Longrightarrow \exists y\,(x \cdot y = 1)$
10. $0 \neq 1$
11. $x \leq x$
12. $(x \leq y \wedge y \leq x) \Longrightarrow x = y$
13. $(x \leq y \wedge y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$
14. $x \leq y \vee y \leq x$
15. $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$
16. $(x \leq y \wedge 0 \leq z) \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

Teorija linearno uređenih polja FO sadrži neke bitne podteorije. Na primer, formulama **1−3.** date su aksiome *teorije grupa*, dok su sa formulama **1−4.** date aksiome *Abelovih* (*komutativnih*) *grupa*. Formulama **1−5.**, **8.** date su aksiome *teorije prstena*. Dalje, formulama **1−8.** date su aksiome *teorije komutativnih prstena sa jedinicom* i konačno, formulama **1−10.** date su aksiome *teorije polja* F. Napomenimo da je unarni operacijski znak $-$ moguće uvesti u teoriji polja zamenom aksiome **3.** novom aksiomom **3.**$'$ $x + y = 0 \Longleftrightarrow y = -x$. Takođe, unarni operacijski znak $^{-1}$ moguće je uvesti u teoriji polja zamenom aksiome **9.** novom aksiomom **9.**$'$ $x \neq 0 \Longrightarrow (xy = 1 \Longleftrightarrow y = x^{-1})$. U tom slučaju, formule $x + (-x) = 0$ i $x \neq 0 \Longrightarrow xx^{-1} = 1$ jesu teorema u teoriji F. U vezi sa prethodno rečenim, možemo smatrati da je teorija polja nad jezikom $L = \{+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\}$ određena samo univerzalnim aksiomama (takvim da se u prefiksu svake aksiome nalaze samo univerzalni kvantori). Dalje, u ovom radu teoriju polja F označavaćemo i sa AF. Za teoriju AF koristićemo ekvivalentan naziv *teorija algebarskih polja* u cilju razlikovanja od *teorije diferencijalnih polja* DF, koja će se razmatrati u drugoj glavi ovog rada.

Aksiomama **11**$-$**13.** određena je *teorija parcijalnog uređenja*, dok je formulama **11**$-$**14.** određena *teorija linearnog uređenja*. Neka je $\mathbb{F} = (F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$. Posmatrajmo prirodan broj $n \in N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ i element $x \in F$. Tada definišimo $n \cdot x = x + \ldots + x$ (n-puta) i uvedimo $\underline{n} = n \cdot 1$. Za ceo broj $n \in Z$ i $n < 0$ uzećemo $\underline{n} = -\underline{m}$, za $m = -n \in N$. Umesto $n \cdot x$ pisaćemo i nx. Na osnovu distributivnosti važi $\underline{n} \cdot x = n \cdot x$. U daljem tekstu pretpostavljamo poznatim osnovna tvrđenja elementarne teorije uređenih polja. Navedimo dva osnovna tvrđenja.

Teorema 1.1.1. *Svako uređeno polje je karakteristike* 0*, tj. u* $\mathbb{F} = (F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ *važi ako* $x \in F \backslash \{0\}$ *i* $n \in N$ *tada* $n \cdot x \neq 0$.

Posledica 1.1.2. *Za svako uređeno polje* $\mathbb{F} = (F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ *skup nosač* F *sadrži kopiju prirodnih brojeva* $\{\underline{n} \,|\, n \in N\}$ *i kopiju celih brojeva* $\{\underline{m} \,|\, m \in Z\}$.

Teorema 1.1.3. *Za svako uređeno polje* $\mathbb{F} = (F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ *sledeće preslikavanje* $f : Q \longrightarrow F$ *definisano sa* $f(m/n) = \underline{m} \cdot \underline{n}^{-1}$ $(m \in Z,\, n \in N)$ *predstavlja jedino utapanje uređenog polja racionalnih brojeva* $\mathbb{Q}$ *u* $\mathbb{F}$.

Posledica 1.1.4. *Za svako uređeno polje* $\mathbb{F} = (F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ *skup nosač* F *sadrži kopiju racionalnih brojeva* $\{\underline{m} \cdot \underline{n}^{-1} \,|\, m \in Z,\, n \in N\}$.

Na kraju ove sekcije izložićemo osnovne činjenice o idealima prstena. Naime, neka je $\mathbf{P} = (P, +, \cdot)$ prsten, tada podskup $I \subseteq P$ određuje *ideal prstena* ukoliko je ispunjeno:

1. $(\forall x \in I)(\forall y \in I)\; x - y \in I$,

2. $(\forall x \in I)(\forall r \in P)\; r \cdot x,\; x \cdot r \in I$.

Navedimo neka osnovna tvrđenja za ideale prstena [**78**]:

Teorema 1.1.5. *Neka je* $\mathbf{P} = (P, +, \cdot)$ *prsten i neka su* $I, J \subseteq P$ *ideali prstena* $\mathbf{P}$. *Tada sledeći skupovi:*

1. $I + J = \{r \,|\, r = x + y \wedge x \in I \wedge y \in J\}$,

2. $I \cdot J = \{r \,|\, (\exists n \in N)\; r = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \wedge (x_i)_{i=1}^{n} \subseteq I, (y_i)_{i=1}^{n} \subseteq J\}$,

3. $I \cap J = \{r \,|\, r \in I \wedge r \in J\}$,

4. $I : J = \{r \,|\, (\forall y \in J)\; r \cdot y,\; y \cdot r \in I\}$,

predstavljaju ideale u prstenu $\mathbf{P}$.

Napomena 1.1.6. *Neka je* a *element prstena* $\mathbf{P}$ *i* $I \subset P$ *ideal tog prstena. Tada skup* $I : a = \{r \,|\, r\cdot a, a\cdot r \in I\} \subseteq P$ *određuje jedan ideal prstena* $\mathbf{P}$. *Tako određen ideal označavamo sa* $I : a$ *i nazivamo* količničkim idealom od I po elementu a. *Posebno je od interesa*[1] *skup* $\bigcup_{k\in N} I : a^k \subseteq P$ *koji određuje jedan ideal prstena* $\mathbf{P}$. *Tako određen ideal označavamo sa* $I : a^\infty$ *i nazivamo* zasićenje ideala I po elementu a.

Teorema 1.1.7. *Neka su u prstenu* $\mathbf{P} = (P, +, \cdot)$ *dati ideali* I *i* J *generisani podskupovima* $A \subseteq P$ *i* $B \subseteq P$ *respektivno. Tada važi:*

$$I + J = \langle A \cup B\rangle \qquad i \qquad I \cdot J = \langle\{a \cdot b \,|\, a\in A \wedge b\in B\}\rangle.$$

Napomena 1.1.8. *Ideal* $I \cap J$ *je najveći ideal sadržan u idealima* I *i* J. *Unija dva ideala* $I \cup J$ *ne mora biti ideal; međutim, ideal* $I + J$ *jeste najmanji ideal koji sadrži ideale* I *i* J.

U vezi sa prethodnom napomenom, može se pokazati da za ma koji *rastući lanac ideala* $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ unija

$$J = \bigcup_{k\in N} I_k$$

određuje jedan ideal. Dalje, važi tvrđenje:

Teorema 1.1.9. *Neka je* $\mathbf{P} = (P, +, \cdot)$ *prsten, tada su sledeći iskazi međusobno ekvivalentni:*

1. *Svaki ideal* I *prstena* $\mathbf{P}$ *je generisan konačnim skupom.*

2. *Svaki striktno rastući lanac ideala* $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ *prstena* $\mathbf{P}$ *je konačan.*

3. *Svaki rastući lanac ideala* $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ *prstena* $\mathbf{P}$ *postaje stacionaran, tj. važi* $I_m = I_{m+1} = \ldots$ *počev od nekog* m.

Prsten $\mathbf{P} = (P, +, \cdot)$ koji ispunjava bilo koji uslov prethodne teoreme naziva se NOETHER*in prsten.*

1.2 Prsten polinoma

Neka je dato polje $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$, formirajmo jezik nad kojim definišemo polinome $L_F = \{+, \cdot, ^{-1}, 0, 1\} \cup \{\underline{a} \,|\, a\in F\}$. *Polinom* $\mathfrak{p}(x)$ *sa promenljivom* x *nad poljem* $\mathbf{F}$ je svaki term $\underline{a}_0 + \underline{a}_1 x + \ldots + \underline{a}_n x^n$ za neko $n \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Prirodan broj $n\in N_0$ označavamo sa $\deg \mathfrak{p}(x)$ i nazivamo *stepen polinoma.* U zapisu polinoma je uobičajeno da se umesto *koeficijenta* određenog sa oznakom elementa $\underline{a}_i$ koristi sam element a_i iz datog polja $\mathbf{F}$. Polinom $\mathfrak{p}(x)$ je $0-$*polinom* ukoliko su svi njegovi koeficijenti jednaki 0. Dalje, preslikavanje $y = \mathfrak{p}(x) : F \longrightarrow F$ nazivamo *polinomskom funkcijom.* Za nenulti polinom $\mathfrak{p}(x)$ element $\alpha \in F$ naziva se *koren* (*nula*) *polinoma* $\mathfrak{p}(x)$ ako je $\mathfrak{p}(\alpha) = 0$.

[1] za diferencijalnu algebru

Neka je dato polje $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ i promenljiva x. Formirajmo skup $F[x]$ svih polinoma sa koeficijentima iz datog polja $\mathbf{F}$. Ako su $+$ i $\cdot$ uobičajene operacije sabiranja i množenja polinoma, tada algebarsku strukturu $\mathbf{F}[x] = (F[x], +, \cdot)$ nazivamo *prsten polinoma jedne promenljive nad poljem.* Tako određena algebarska struktura jeste komutativan prsten sa jedinicom bez delitelja nule; pri tom, skup inverzibilnih elemenata je dat skupom $F\backslash\{0\}$. Sasvim slično prethodnom može se definisati $\mathbf{P}[x]$ *prsten polinoma jedne promenljive nad prstenom* ukoliko koeficijenti i promenljiva uzimaju vrednosti iz nekog prstena $\mathbf{P}$. Odatle se može induktivno uvesti i *prsten polinoma više promenljivih nad prstenom odnosno poljem.* Ako su $x_1, \ldots, x_n$ promenljive, tada je $\mathbf{P}[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \big(\mathbf{P}[x_1, \ldots, x_{n-1}]\big)[x_n]$. Prethodno određena algebarska struktura $\mathbf{P}[x_1, \ldots, x_n]$, sa skupom nosačem $P[x_1, \ldots, x_n]$, u odnosu na $+$ i $\cdot$ uobičajene operacije sabiranja i množenja polinoma više promenljivih takođe jeste prsten ako je $\mathbf{P}$ prsten; odnosno jeste komutativan prsten sa jedinicom bez delitelja nule ako je $\mathbf{P}$ polje. Svaki element $\mathtt{p}(x_1, \ldots, x_n) \in P[x_1, \ldots, x_n]$ može se predstaviti u obliku sume:

$$\mathtt{p}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in A_0} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

gde je $A_0 \subset N_0^n$ konačan skup n-torki $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ prirodnih brojeva i $c_\alpha \in P\backslash\{0\}$. Izrazi $M_\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ u prethodnoj sumi nazivaju se *monomima.* Samim tim, polinom $\mathtt{p}(x_1, \ldots, x_n)$ predstavlja linearnu kombinaciju monoma nad $\mathbf{P}$. Pojedinačne sabirke $c_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, za $\alpha \in A_0$, koji učestvuju u polinomu $\mathtt{p}(x_1, \ldots, x_n)$ nazivamo još i *termima polinoma.* Dalje, n-torku $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ nazivamo *multistepen monoma*, a suma eksponenata $\sum_{k=1}^n \alpha_k$ određuje *stepen monoma*, koji označavamo $\deg M_\alpha$. Primetimo da se jedinica polja $1 \in K$ može predstaviti na jedinstven način kao monom $1 = x_1^0 \ldots x_n^0$ (dakle, kao monom nultog multistepena $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$).

Za polje $\mathbf{F}$, *dva polinoma* $\mathtt{p}(x), \mathtt{q}(x) \in F[x]$ *su jednaka* akko su istog stepena i imaju jednake odgovarajuće koeficijente. Neka je $\mathbf{F} = \mathbf{GF}(p^k)$ konačno polje GALOISa sa $k = p^n$ elemenata gde je p-prost broj i $n \in N$ [**93**]. Neka su $\mathtt{p}(x), \mathtt{q}(x) \in F[x]$ polinomi redom stepena $r = \deg \mathtt{p}(x)$ i $s = \deg \mathtt{q}(x)$. Ukoliko važi $k > \max\{r, s\}$, tada su polinom $\mathtt{p}(x)$ i $\mathtt{q}(x)$ jednaki akko su im jednake odgovarajuće polinomske funkcije $\mathtt{p}, \mathtt{q} : F \longrightarrow F$ [**58**, str. 248]. Istaknimo da su za beskonačno polje $\mathbf{F}$ dva polinoma jednaka akko su im jednake polinomske funkcije. U daljem razmatranju nas će zanimati samo (sintaksna) jednakost polinoma, a ne i jednakost polinomskih funkcija. Iz navedenog razloga, dalje razmatranje će se odnositi na proizvoljna polja. Za polinome važi sledeća Teorema o ostatku:

Teorema 1.2.1. *Neka su $\mathtt{p}(x), \mathtt{q}(x)$ polinomi iz $F[x]$ takvi da je $\mathtt{q}(x)$ nenula polinom. Tada postoje jedinstveno određeni polinomi $\mathtt{s}(x), \mathtt{r}(x)$ iz $F[x]$ takvi da je:*

$$\mathtt{p}(x) = \mathtt{s}(x)\mathtt{q}(x) + \mathtt{r}(x)$$

i pri tom $\mathtt{r}(x) = 0$ ili $0 \leq \deg \mathtt{r}(x) < \deg \mathtt{q}(x)$.

Napomenimo da na osnovu Teoreme o ostatku važi da polinom $\mathtt{p}(x)$ $n-$tog stepena ima najviše n različitih korena u $\mathbf{F}$. Takođe, kao posledica Teoreme o ostatku važi naredno tvrđenje.

Teorema 1.2.2. *Neka je I ideal u prstenu polinoma $\mathbf{F}[x]$, tada je ideal I generisan jednim elementom, tj. postoji polinom $g \in F[x]$ takav da važi $I = \langle g \rangle$.*

Posledica 1.2.3. *Za proizvoljno polje $\mathbf{F}$ prsten polinoma $\mathbf{F}[x]$ jeste* NOETHER*in.*

Za dato polje $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ polinom $\mathtt{p} \in F[x]$ nenultog stepena n kažemo da je *nesvodljiv* (*ireducibilan*) *polinom nad poljem*, ako se $\mathtt{p}(x)$ ne može napisati u obliku proizvoda dva polinoma čiji su stepeni pozitivni i manji od n. Napomenimo da za polinome drugog i trećeg stepena nad poljem $\mathbf{F}$ važi tvrđenje da su nesvodljivi akko nemaju korene u tom polju [**58**, str. 249]. Navedeno ne važi za polinome stepena $n \geq 4$. Navodimo jedan dovoljan uslov za nesvodljivost polinoma, koji je dat sledećim EISENSTEINovim kriterijumom [**54**, str. 365].

Teorema 1.2.4. *Neka je $\mathtt{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in Z[x]$ moničan polinom sa celobrojnim koeficijentima, takav da za neki prost broj p važi:*

$$p^2 \nmid a_0 \quad \wedge \quad p \mid a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \quad \wedge \quad p \nmid a_n.$$

Tada je $\mathtt{p}(x)$ nesvodljiv nad poljem racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$.

Napomena 1.2.5. *Neka je $\mathtt{p}(x)$ polinom sa celobrojnim koeficijentima. Tada, važi* GAUSS*ova lema: polinom $\mathtt{p}(x)$ je nesvodljiv nad prstenom celih brojeva $\mathbf{Z}$ akko je nesvodljiv nad poljem racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$.*

Napomena 1.2.6. *Za svaki prirodan broj $n \in N$ postoji polinom sa celobrojnim koeficijentima $\mathtt{p}(x)$ stepena $n = \deg \mathtt{p}(x)$, takav da je nesvodljiv nad poljem racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$. Takvi su, na primer, polinomi $\mathtt{p}(x) = x^n - 2$ $\big($za $n \in N\big)$. Nesvodljivi polinomi nad poljem realnih brojeva $\mathbf{R}$ jesu polinomi najviše drugog stepena. Nesvodljivi polinomi nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ jesu polinomi prvog stepena.*

Neka je $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ polje, tada nad istim jezikom nad kojim su definisani polinomi definišemo i racionalne izraze. Naime, *racionalni izraz sa promenljivom x nad poljem* $\mathbf{F}$ je svaki term $\mathtt{p}(x)/\mathtt{q}(x)$, gde su $\mathtt{p}(x), \mathtt{q}(x) \in F[x]$ i $\mathtt{q}(x)$ nije nula polinom. Dalje, neka je za dato polje $\mathbf{F}$ i promenljivu x formiran skup $\mathcal{F}_x$ svih racionalnih izraza sa koeficijentima iz polja $\mathbf{F}$. Ako su $+$ i $\cdot$ uobičajene operacije sabiranja i množenja racionalnih izraza, tada algebarska struktura $\mathbf{F}(x) = (\mathcal{F}_x, +, \cdot, \mathtt{0}, \mathtt{1})$ određuje *polje racionalnih izraza jedne promenljive* ($\mathtt{0}(x) = 0,\ \mathtt{1}(x) = 1$).

Pseudodeljivost. Neka je **K** polje; tada, u prstenu $K[x_1, \ldots, x_n]$, razmotrićemo algoritam pseudodeljenja dva polinoma više promenljivih. Na početku ove sekcije, algoritam pseudodeljenja dva polinoma ilustrovaćemo sledeći primerom [**85**, str. 8]:

Primer 1.2.7. *Razmotrimo polinome* $\mathfrak{p}(y) = 2y^3 - y^2 + x^2y$ *i* $\mathfrak{g}(y) = xy^2 + 1$ *kao polinome po promenljivoj* y*. Tada je* $m = \deg_y(\mathfrak{p}) = 3$ *i* $n = \deg_y(\mathfrak{g}) = 2$*. Izdvojimo vodeće koeficijente* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(x) = x$ *i* $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(x) = 2$ *polinoma* $\mathfrak{g}(y)$ *i* $\mathfrak{p}(y)$:

$$\mathfrak{g}(y) = \underbrace{(x)}_{\mathfrak{a}}\, y^2 + \underbrace{1}_{\overline{\mathfrak{g}}(y)} \tag{1}$$

i

$$\mathfrak{p}(y) = \underbrace{(2)}_{\mathfrak{b}}\, y^3 + \underbrace{(-y^2 + xy^2)}_{\overline{\mathfrak{p}}(y)}, \tag{2}$$

za polinome $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{g}}(y) = 1$ *i* $\overline{\mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{p}}(y) = -y^2 + xy$ *takve da je* $\deg_y(\overline{\mathfrak{g}}) < \deg_y(\mathfrak{g})$ *i* $\deg_y(\overline{\mathfrak{p}}) < \deg_y(\mathfrak{p})$*. Iz jednakosti*:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p}(y) = \mathfrak{b}y^{m-n}\mathfrak{g}(y) + \mathfrak{p}_1(y) = (2y)(\underbrace{xy^2 + 1}_{\mathfrak{g}(y)}) + (\underbrace{-xy^2 + x^3y - 2y}_{\mathfrak{p}_1(y)}), \tag{3}$$

određujemo polinom $\mathfrak{p}_1(y) = -xy^2 + x^3y - 2y$ *redukovanog stepena* $m_1 = \deg_y(\mathfrak{p}_1) = 2 < 3 = \deg_y(\mathfrak{p}) = m$*. Izdvojimo vodeći koeficijent* $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_1(x) = -x$ *polinoma* $\mathfrak{p}_1(y)$:

$$\mathfrak{p}_1(y) = \underbrace{(-x)}_{\mathfrak{b}_1}\, y^2 + \underbrace{(-2y + x^3)}_{\overline{\mathfrak{p}}_1(y)} \tag{4}$$

za polinom $\overline{\mathfrak{p}}_1 = \overline{\mathfrak{p}}_1(y) = -2y + x^3$ *takav da je* $\deg_y(\overline{\mathfrak{p}}_1) < \deg_y(\mathfrak{p}_1)$*. Iz jednakosti*:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1(y) = \mathfrak{b}_1 y^{m_1-n}\mathfrak{g}(y) + \mathfrak{r}(y) = (-x)(\underbrace{xy^2 + 1}_{\mathfrak{g}(y)}) + (\underbrace{-2xy + x^4 + x}_{\mathfrak{r}(y)}), \tag{5}$$

određujemo polinom $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(y) = -2xy + x^4 + x$*, redukovanog stepena* $m_2 = \deg_y(\mathfrak{r}) = 1 < 2 = \deg_y(\mathfrak{p}_1) = m_1$*. Konačno iz* (3) *i* (5) *dobijamo jednakost*:

$$\begin{gathered} \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{p}(y) = \mathfrak{a}^2 \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{q}(y) \cdot \mathfrak{g}(y) + \mathfrak{r}(y) \quad \Longleftrightarrow \\ (\underbrace{x^2}_{\mathfrak{c}}) \cdot (\underbrace{2xy^3 - xy^2 + x^2y^2}_{\mathfrak{p}(y)}) = (\underbrace{2xy - x}_{\mathfrak{q}(y)}) \cdot (\underbrace{xy^2 + 1}_{\mathfrak{g}(y)}) + (\underbrace{(x^4 - 2x)y + x}_{\mathfrak{r}(y)}), \end{gathered} \tag{6}$$

gde je $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(x) = \mathfrak{a}(x)^2 = x^2$ *term koji ne sadrži* y *i gde je* $\mathfrak{r}(y) = (x^4 - 2x)y + x$ *polinom čiji je stepen po* y *strogo manji od stepena polinoma* $\mathfrak{g}(y) = xy^2 + 1$*.*

Za razliku od prethodnog rešenja datog na osnovu [**85**], *napomenimo da se algoritam pseudodeljenja polinoma može shvatiti kao modifikacija klasičnog polinomijalnog deljenja, kao što se vidi iz sledećeg postupka*:

$$
\begin{array}{l}
\big(2y^3 - y^2 + x^2y\big) : \big(xy^2+1\big) = 2\frac{1}{x}y - \frac{1}{x} \\
\mp 2y^3 \pm \frac{2}{x}y \\
\hline
\qquad -y^2 + \big(x^2 - \frac{2}{x}\big)y \\
\qquad \pm y^2 \mp \frac{1}{x} \\
\hline
\qquad\qquad \frac{x^3-2}{x}y + \frac{1}{x},
\end{array}
\tag{7}
$$

za $x \neq 0$. *Odatle dobijamo rezultat*:

$$
\underbrace{2y^3 - y^2 + xy^2}_{\mathfrak{p}(y)} = \Big(2\frac{1}{x}y - \frac{1}{x}\Big) \cdot \Big(\underbrace{xy^2+1}_{\mathfrak{g}(y)}\Big) + \Big(\frac{x^3-2}{x}y + \frac{1}{x}\Big),
\tag{8}
$$

koji možemo zapisati u prstenu polinoma na sledeći način:

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{c}' \cdot \mathfrak{p}(y) = \mathfrak{q}'(y) \cdot \mathfrak{g}(y) + \mathfrak{r}(y) \quad \Longleftrightarrow \\
\big(\underbrace{x}_{\mathfrak{c}'}\big) \cdot \big(\underbrace{2y^3 - y^2 + xy^2}_{\mathfrak{p}(y)}\big) = \big(\underbrace{2y-1}_{\mathfrak{q}'(y)}\big) \cdot \big(\underbrace{xy^2+1}_{\mathfrak{g}(y)}\big) + \big(\underbrace{(x^3-2)y+1}_{\mathfrak{r}(y)}\big),
\end{gathered}
\tag{9}
$$

gde je $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}'(x) = x$ *nižeg stepena od* $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(x) = x^2$.

Izložimo postupak pseudodeljenja u opštem slučaju prema [**109**, str. 399]. Naime, neka je dat polinom $\mathfrak{p} \in C[x_1, \dots, x_n]$ stepena m_k po k-toj promenljivoj i polinom $\mathfrak{g} \in C[x_1, \dots, x_n]$ stepena n_k, isto po k-toj promenljivoj. U razmatranju koje sleduje pokazujemo da postoji polinom $\mathfrak{c} \in C[x_1, \dots, x_n]$, koji ne sadrži k-tu promenljivu i polinom $\mathfrak{r} \in C[x_1, \dots, x_n]$ stepena $l_k < n_k$ po k-toj promenljivoj, tako da važi:

$$
\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{g} + \mathfrak{r},
\tag{10}
$$

za neki polinom $\mathfrak{q} \in C[x_1, \dots, x_n]$. Polinom $\mathfrak{r}$ nazivamo *pseudo-ostatkom*, a polinom $\mathfrak{q}$ nazivamo *pseudokoličnikom* pri *pseudodeljenju* polinoma $\mathfrak{p}$ sa polinomom $\mathfrak{g}$.

Odredimo oblik polinoma $\mathfrak{c}$. Neumanjujući opštost razmatranje koje sleduje, odnosiće se na prvu promenljivu $x = x_1$. U tom smislu (10) zapisujemo po promenljivoj x:

$$
\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{p}(x) = \mathfrak{q}(x) \cdot \mathfrak{g}(x) + \mathfrak{r}(x),
\tag{11}
$$

gde je $\deg_x(\mathfrak{r}) < \deg_x(\mathfrak{g})$. Ako posmatramo polinome po jednoj promenljivoj, tada je $\mathfrak{c} = 1$ konstanta, inače je $\mathfrak{c}$ polinom po ostalim promenljivima. Dalje, pretpostavimo da su za polinome $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{p}$ izdvojeni redom vodeći koeficijenti $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ sa:

$$\mathfrak{g}(x) = \mathfrak{a}\, x^n + \overline{\mathfrak{g}}(x) \quad \text{i} \quad \mathfrak{p}(x) = \mathfrak{b}\, x^m + \overline{\mathfrak{p}}(x), \tag{12}$$

za neke polinome $\overline{\mathfrak{g}}$ i $\overline{\mathfrak{p}}$, takve da je $\deg_x(\overline{\mathfrak{g}}) < \deg_x(\mathfrak{g})$ i $\deg_x(\overline{\mathfrak{p}}) < \deg_x(\mathfrak{p})$. Tada, ako je $m < n$ uzimamo $\mathfrak{q}(x) = 0$, $\mathfrak{r}(x) = \mathfrak{p}(x)$ i $\mathfrak{c} = 1$ $\big($pri tom je ispunjeno $\deg_x(\mathfrak{r}) = \deg_x(\mathfrak{p}) = m < n = \deg_x(\mathfrak{g})\big)$. Nadalje, razmatramo netrivijalan slučaj $m \geq n$. Iz jednakosti:

$$\mathfrak{a}\, \mathfrak{p}(x) = \big(\underbrace{\mathfrak{b}\, x^{m-n}}_{\mathfrak{q}_1(x)}\big)\, \mathfrak{g}(x) + \mathfrak{p}_1(x), \tag{13}$$

određujemo polinom $\mathfrak{p}_1(x) = \mathfrak{a}\, \mathfrak{p}(x) - \mathfrak{b}\, x^{m-n} \mathfrak{g}(x)$ redukovanog stepena $m_1 = \deg_x(\mathfrak{p}_1) < \deg_x(\mathfrak{p}) = m$. Zatim, pretpostavimo da je za polinom $\mathfrak{p}_1$ izdvojen vodeći koeficijent $\mathfrak{b}_1$:

$$\mathfrak{p}_1(x) = \mathfrak{b}_1\, x^{m_1} + \overline{\mathfrak{p}}_1(x), \tag{14}$$

za neki polinom $\overline{\mathfrak{p}}_1$, takav da je $\deg_x(\overline{\mathfrak{p}}_1) < \deg_x(\mathfrak{p}_1)$. Razmotrimo samo netrivijalan slučaj $m_1 \geq n$. Iz jednakosti:

$$\mathfrak{a}\, \mathfrak{p}_1(x) = \mathfrak{b}_1\, x^{m_1-n} \mathfrak{g}(x) + \mathfrak{p}_2(x), \tag{15}$$

određujemo polinom $\mathfrak{p}_2(x) = \mathfrak{a}\, \mathfrak{p}_1(x) - \mathfrak{b}_1\, x^{m_1-n} \mathfrak{g}(x)$ redukovanog stepena $m_2 = \deg_x(\mathfrak{p}_2) < \deg_x(\mathfrak{p}_1) = m_1$. Sad iz (13) i (15) proizilazi:

$$\mathfrak{a}^2\, \mathfrak{p}(x) = \big(\underbrace{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\, x^{m-n} + \mathfrak{b}_1 x^{m_1-n}}_{\mathfrak{q}_2(x)}\big)\, \mathfrak{g}(x) + \mathfrak{p}_2(x). \tag{16}$$

Nastavljajući prethodni postupak zaključujemo da postoji prirodan broj k takav da važi:

$$\underbrace{\mathfrak{a}^k}_{\mathfrak{c}}\, \mathfrak{p}(x) = \mathfrak{q}_k(x)\, \mathfrak{g}(x) + \underbrace{\mathfrak{p}_k(x)}_{\mathfrak{r}(x)}, \tag{17}$$

tako da pseudo-ostatak $\mathfrak{r}(x) = \mathfrak{p}_k(x)$ jeste manjeg stepena od polinoma $\mathfrak{g}(x)$. Pri tom, pseudokoličnik $\mathfrak{q}(x) = \mathfrak{q}_k(x)$ se može eksplicitno zapisati u obliku:

$$\mathfrak{q}(x) = \mathfrak{a}^{k-1}\mathfrak{b}_1 x^{m_1-n} + \ldots + \mathfrak{a} b_{k-1} x^{m_{k-1}-n} + b_k x^{m_k-n}, \tag{18}$$

za opadajući niz prirodnih brojeve $m_1 > m_2 > \ldots > m_k \geq n$ $(k \geq 1)$. Konačan zaključak jeste da je polinom $\mathfrak{c}$ oblika:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^k. \tag{19}$$

Navodimo dve bitne napomene vezane za pseudodeljivost. Prva napomena se odnosi na jedinstvenost pseudokoličnika i pseudo-ostatka [**49**]. Naime, ako za polinome $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{g}$ i prirodan broj k važe polinomske jednakosti:

$$\mathfrak{a}^k\mathfrak{p}(x) = \mathfrak{q}(x)\mathfrak{g}(x) + \mathfrak{r}(x) \quad \text{i} \quad \mathfrak{a}^k\mathfrak{p}(x) = \hat{\mathfrak{q}}(x)\mathfrak{g}(x) + \hat{\mathfrak{r}}(x) \tag{20}$$

tada važi:

$$\hat{\mathfrak{q}}(x) = \mathfrak{q}(x) \quad \text{i} \quad \hat{\mathfrak{r}}(x) = \mathfrak{r}(x), \tag{21}$$

Istaknimo da se prirodan broj k, iz prethodnog razmatranja, može eksplicitno odrediti sa:

$$k = \max\{m - n + 1, 0\}, \tag{22}$$

u zavisnosti od stepena $m = \deg_x(\mathfrak{p})$ i $n = \deg_x(\mathfrak{g})$. Druga napomena se odnosi upravo na prirodan broj k. Iz Primera 1.2.7. se vidi da je moguće vrednost prirodnog broja k odrediti i sa manjim vrednostima od onih koje su date sa (22). Neki autori, kao što je navedeno u [**85**], određuju upravo k kao najmanji prirodan broj, takav da za $c = a^k$ jednakost (11) nije data nad nepolinomskim racionalnim funkcijama. Drugim rečima, u tom slučaju se k određuje kao najmanji prirodan broj gde jednakost (11) jeste polinomskog tipa. Istaknimo da sva razmatranja u vezi sa prethodnom modifikacijom pseudodeljenja važe uz odgovarajuće izmene.

1.3 Raširenja polja

Neka je $\mathbf{F}$ potpolje polja $\mathbf{K}$, tada polje $\mathbf{K}$ takođe nazivamo *raširenjem* (*ekstenzijom*) *polja* $\mathbf{F}$. Činjenicu da je $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$ označavamo $\mathbf{K}/\mathbf{F}$ i tada $\mathbf{K}$ možemo da razmatramo kao jedan F-vektorski prostor. Dimenziju prethodnog vektorskog prostora označavamo $|\mathbf{K} : \mathbf{F}|$. Ako je $|\mathbf{K} : \mathbf{F}| < \infty$ tada je $\mathbf{K}$ *konačno raširenje polja* $\mathbf{F}$; u suprotnom, radi se o *beskonačnom raširenju polja* $\mathbf{F}$. Ako je $\mathbf{L}$ raširenje polja $\mathbf{K}$ i $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$, tada važi:

$$|\mathbf{L} : \mathbf{F}| = |\mathbf{L} : \mathbf{K}| \cdot |\mathbf{K} : \mathbf{F}|.$$

Odatle, kao neposredna posledica, proizilazi naredno tvrđenje [**91**]:

Teorema 1.3.1. *Konačno raširenje konačnog raširenja je konačno raširenje.*

Neka je $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$. Element $a \in K$ naziva se *algebarski element nad poljem* $\mathbf{F}$ ako je $\mathfrak{p}(a) = 0$, za neki nenula polinom $\mathfrak{p} \in F[x]$. U suprotnom, element $a \in K$ se naziva *transcendentni element nad poljem* $\mathbf{F}$. Raširenje $\mathbf{K}$ je *algebarsko raširenje* polja $\mathbf{F}$ akko je svaki element $a \in K$ algebarski element nad $\mathbf{F}$; u suprotnom, raširenje se naziva *transcendentno raširenje* polja $\mathbf{F}$.

Primer 1.3.2. *Polje kompleksnih brojeva* $\mathbf{C}$ *je algebarsko raširenje polja realnih brojeva* $\mathbf{R}$*, jer svaki kompleksni broj* $z = a + b\,i$ $(a, b \in R)$ *ispunjava polinom drugog stepena* $p(z) = z^2 - 2az + a^2 + b^2$ *iz* $\mathbf{R}[z]$*. Odatle je* $\mathbf{C}$ *dvodimenzionalni* R*-vektorski prostor, tj.* $|\mathbf{C} : \mathbf{R}| = 2$*. Polje realnih brojeva* $\mathbf{R}$ *je transcendentno raširenje polja racionalnih brojeva* $\mathbf{Q}$ *jer, na primer, realan broj* π *nije algebarski broj i time skup* $\{\pi^k \,|\, k \in N_0\}$ *nije linearno zavisan nad poljem* $\mathbf{Q}$*. Odatle je* $\mathbf{R}$ *beskonačnodimenzionalni* Q*-vektorski prostor, tj.* $|\mathbf{R} : \mathbf{Q}| = \infty$*.*

Dalje, važi tvrđenje [**91**]:

Teorema 1.3.3. *Algebarsko raširenje algebarskog raširenja je algebarsko raširenje.*

Napomena 1.3.4. *Neka je* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i* $\mathbf{M}$ *raširenje polja* $\mathbf{K}$*. Ako je* $\alpha \in M$ *algebarski element nad* $\mathbf{K}$ *i ako je* $\mathbf{K}$ *algebarsko proširenje polja* $\mathbf{F}$*, tada je element* $\alpha \in M$ *algebarski nad* $\mathbf{F}$ [**48**, *str.* 59].

Primer 1.3.5. *Polje algebarskih brojeva* $\mathbf{A}$*, razmatrano u Teoremi* 1.5.5.*, jeste algebarsko raširenje polja* $\mathbf{Q}$ *koje nije i konačno raširenje polja* $\mathbf{Q}$*.*

Neka je $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$ i $\alpha \in K$. Preslikavanje $k : \mathbf{F}[x] \longrightarrow \mathbf{K}$, definisano sa $k(p(x)) = p(\alpha)$ jeste jedan homomorfizam prstena $\mathbf{F}[x]$ u polje $\mathbf{F}$. Slika homomorfizma k je skup $F[\alpha] = \{p(\alpha) \,|\, p \in F[x]\}$ koji određuje potprsten polja $\mathbf{K}$. Jezgro homomorfizma k je skup $I_\alpha = \{p(x) \,|\, p(\alpha) = 0\}$ koji predstavlja ideal prstena $\mathbf{F}[x]$. Budući da je $\mathbf{F}[\alpha]$ potprsten polja $\mathbf{K}$ bez delitelja nule, tada je I_α prost ideal. Pri tom važi:

$$\mathbf{F}[\alpha] \cong \mathbf{F}[x]/I_\alpha.$$

Prsten $\mathbf{F}[\alpha]$ je najmanji potprsten polja $\mathbf{K}$, koji sadrži skup $F \cup \{\alpha\}$.

Neka je $\mathbf{F}$ potpolje polja $\mathbf{K}$ i neka je $\alpha \in K$ algebarski element nad poljem $\mathbf{F}$. Tada postoji polinom $p \in F[x]$, tako da je $p(\alpha) = 0$. Prema principu najmanjeg elementa, postoji moničan polinom $m(x) \in F[x]$ najmanjeg stepena takav da je $m(\alpha) = 0$. Tako određen polinom nazivamo *minimalan polinom.* Ako je $\alpha \in F$, tada je $m(x) = x - \alpha$ minimalan polinom prvog stepena. Ako je $\alpha \in K \backslash F$, tada je $m(x)$ minimalan polinom stepena $\deg m(x) \geq 2$. Osnovne osobine minimalnog polinoma date su sledećim tvrđenjem [**91**, str. 22]:

Teorema 1.3.6. *Neka je* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i neka je* $\alpha \in K$ *algebarski element nad poljem* $\mathbf{F}$ *i neka je* $m(x)$ *minimalan polinom za* α*. Tada važi:*

1. *Polinom* $m(x)$ *je nesvodljiv polinom nad* $\mathbf{F}$*.*
2. *Ako je* $p \in F[x]$ *i* $p(\alpha) = 0$*, onda* $m(x) \,|\, p(x)$*.*
3. *Skup* $F[\alpha] = \{a_0 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \,|\, a_0, \ldots, a_{n-1} \in F\}$*, za* $n = \deg m(x)$*, određuje polje* $\mathbf{F}[\alpha]$ *koje je potpolje polja* $\mathbf{K}$*.*
4. *Važi* $|\mathbf{F}[\alpha] : \mathbf{F}| = \deg m(x)$*.*

Napomena 1.3.7. *Neka je* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$. *Za element* $\alpha\in K$ *skup*

$$F(\alpha)=\Big\{\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}\;\Big|\;p,q\in F[x]\,\wedge\,q(\alpha)\neq 0\Big\}$$

određuje polje $\mathbf{F}(\alpha)$ *koje je potpolje polja* $\mathbf{K}$. *Polje* $\mathbf{F}(\alpha)$ *je najmanje potpolje polja* $\mathbf{K}$ *koje sadrži skup* $F\cup\{\alpha\}$.

Neka je $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$ i neka je $\alpha\in K$ algebarski element nad $\mathbf{F}$. Veza između polja $\mathbf{F}[\alpha]$ koje je razmatrano u prethodnoj teoremi i polja $\mathbf{F}(\alpha)$ koje je razmatrano u prethodnoj napomeni data je sledećim tvrđenjem [**91**, str. 23]:

Teorema 1.3.8. *Neka je* $\mathbf{F}$ *potpolje polja* $\mathbf{K}$ *i neka je* $\alpha\in K$ *algebarski element nad poljem* $\mathbf{F}$. *Tada važi:*

$$\mathbf{F}[\alpha]=\mathbf{F}(\alpha).$$

Polje $\mathbf{E}=\mathbf{F}(\alpha)$ nazivamo *prostim raširenjem polja*, a sam elemenat $\alpha\in E$ nazivamo *primitivnim elementom raširenja* $\mathbf{E}$. Ako je element $\alpha\in K$ algebarski nad poljem $\mathbf{F}$, tada se prethodno raširenje naziva *prosto algebarsko raširenje polja*; u suprotnom, naziva se *prosto transcendentno raširenje polja*.

Primer 1.3.9. *Za polje racionalnih brojeva* $\mathbf{Q}$, *raširenje* $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ *je prosto algebarsko raširenje. Raširenje* $\mathbf{Q}(\pi)$ *je prosto transcendentno raširenje (i time nije algebarsko). Napomenimo da je polje kompleksnih brojeva* $\mathbf{C}$ *prosto algebarsko raširenje polja realnih brojeva* $\mathbf{R}$, *dobijeno adjunkcijom imaginarne jedinice* i, *tj. važi* $\mathbf{C}=\mathbf{R}(i)$. *Odatle sleduje* $|\mathbf{C}:\mathbf{R}|=2$. *Primetimo, s druge strane, da je polje kompleksnih brojeva* $\mathbf{C}$ *transcendentno raširenje polja racionalnih brojeva* $\mathbf{Q}$, *jer je potpolje* $\mathbf{R}$ *polja* $\mathbf{C}$ *transcendentno raširenje polja racionalnih brojeva* $\mathbf{Q}$. *Pri tom važi* $|\mathbf{C}:\mathbf{Q}|=|\mathbf{C}:\mathbf{R}|\cdot|\mathbf{R}:\mathbf{Q}|=\infty$.

U vezi sa jedinstvenošću prostih algebarskih raširenja važi tvrđenje [**91**, str. 27]:

Teorema 1.3.10. *Neka je* $\mathbf{F}$ *polje i neka je* $p\in F[x]$ *nesvodljiv polinom stepena* $n=\deg p(x)$. *Dalje, neka su* $\mathbf{K}'=\mathbf{F}(\alpha)$ *i* $\mathbf{K}''=\mathbf{F}(\beta)$ *prosta raširenja polja* $\mathbf{F}$ *za neke elemente* $\alpha\in K'$ *i* $\beta\in K''$ *takve da* $p(\alpha)=0$ *(u polju* $\mathbf{K}'$*) i* $p(\beta)=0$ *(u polju* $\mathbf{K}''$*). Tada postoji izomorfizam* $\sigma:\mathbf{K}'\cong\mathbf{K}''$ *tako da je* $\sigma\big|_F=i_F$.

Napomena 1.3.11. *Istaknimo da je dokaz prethodnog tvrđenja, koji je dat u* [**91**], *baziran na postojanju* KRONECKER*ovog polja (videti sekciju* **1.4.***).*

Neka je $\mathbf{F}$ potpolje polja $\mathbf{K}$. Razmotrimo raširenja polja $\mathbf{F}$, koja su nastala dodavanjem (adjunkcijom) elemenata polja $\mathbf{K}$. U najopštijem slučaju, razmotrimo raširenja nastala dodavanjem podskupa $S\subseteq K$. Označimo sa $\mathbf{F}[S]$ najmanji potprsten polja $\mathbf{K}$ koji sadrži $F\cup S$. Takav prsten postoji i on je jednak preseku svih prstena polja $\mathbf{K}$ koji sadrže F i S (jedan od ovih prstena je samo polje $\mathbf{K}$). Prsten $\mathbf{F}[S]$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbf{F}$ i generisan je svim proizvodima od konačno mnogo elemenata iz S. Prsten $\mathbf{F}[S]$ naziva se *prsten polinoma nad skupom* S. Sa druge strane, označimo sa $\mathbf{F}(S)$ najmanje potpolje polja $\mathbf{K}$ koje sadrži $F \cup S$. Takvo polje postoji i ono je jednako preseku svih potpolja polja $\mathbf{K}$ koja sadrže F i S (jedno od ovih polja je samo polje $\mathbf{K}$). Polje $\mathbf{F}(S)$ predstavlja najmanje potpolje polja $\mathbf{K}$ koje sadrži prsten $\mathbf{F}[S]$. Na osnovu prethodnog, polje $\mathbf{F}(S)$ se naziva *polje razlomaka nad skupom* S. Ukoliko je S konačan skup nad kojim je uveden redosled elemenata $a_1, \ldots, a_n$, tada umesto $\mathbf{F}[S]$, odnosno $\mathbf{F}(S)$, možemo razmatrati i raširenje $\mathbf{F}[a_1, \ldots, a_n]$, odnosno raširenje $\mathbf{F}(a_1, \ldots, a_n)$ koja definišemo rekurzivno: $\mathbf{F}[a_1, \ldots, a_i] = \big(\mathbf{F}[a_1, \ldots, a_{i-1}]\big)[a_i]$ i $\mathbf{F}(a_1, \ldots, a_i) = \big(\mathbf{F}(a_1, \ldots, a_{i-1})\big)(a_i)$, za vrednosti $1 < i \leq n$. Napomenimo da krajnje strukture prstena $\mathbf{F}[a_1, \ldots, a_n]$ i polja $\mathbf{F}(a_1, \ldots, a_n)$ ne zavise od redosleda dodavanja elemenata $a_1, \ldots, a_n$. Važi sledeće opšte tvrđenje ([**48**, str. 59]):

Teorema 1.3.12. *Neka je* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i* $S \subseteq K$. *Ukoliko se* S *sastoji samo od algebarskih elemenata nad* F, *tada je*:

$$\mathbf{F}[S] = \mathbf{F}(S)$$

i to je jedno algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}$.

1.4 Korenska raširenja polja

U konstrukciji raširenja polja, osnovno tvrđenje je KRONECKERova Teorema [**91**, str. 20, 24] koju navodimo:

Teorema 1.4.1. *Neka je* $\mathbf{F}$ *polje i* $\mathfrak{p} \in F[x]$ *nesvodljiv polinom. Tada postoji raširenje* $\mathbf{K}$ *polja* $\mathbf{F}$, *u kome polinom* $\mathfrak{p}(x)$ *ima bar jedan koren.*

Izvorni KRONECKERov dokaz se bazira na konkretnoj konstrukciji traženog raširenja $\mathbf{K}$ polja $\mathbf{F}$, u kome nesvodljiv polinom $\mathfrak{p}(x)$ ima bar jedan koren. Naime, ako je $\deg \mathfrak{p}(x) = 1$, tada je $\mathfrak{p}(x) = x - \alpha$ za neko $\alpha \in F$ i tada je $\mathbf{K} = \mathbf{F}$. Ako je $k = \deg \mathfrak{p}(x) \geq 2$, KRONECKER uvodi novi simbol konstante ξ. Zatim se formira skup formalnih polinoma:

$$K[\xi] = \{a_0 + a_1\xi + \ldots + a_{k-1}\xi^{k-1} \,|\, a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in F\}$$

nad novim simbolom konstante ξ. Potom se u skupu $K[\xi]$ formiraju operacija sabiranja sabiranja $+_{\mathfrak{p}}$ koja odgovara operaciji sabiranja polinoma i operacija množenja $\cdot_{\mathfrak{p}}$ koja odgovara operaciji množenja polinoma po modulu nesvodljivog polinoma $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(x)$. Tada se može dokazati da je $\mathbf{K} = (K[\xi], +_{\mathfrak{p}}, \cdot_{\mathfrak{p}}, 0, 1)$ polje koje predstavlja jedno raširenje polja $\mathbf{F}$ u kome polazni polinom $\mathfrak{p}(x)$ ima ξ za koren. Tako konstruisano polje nazivamo KRONECKER*ovim poljem*.

Napomena 1.4.2. *Za konačno polje* $\mathbf{F} = \mathbf{Z}_p$ *(p-prost broj) i prirodan broj* $k \geq 2$ *postoji nesvodljiv polinom* $\mathfrak{p}(x)$ *stepena* $k = \deg \mathfrak{p}(x) \geq 2$.

Primer 1.4.3. *Za nesvodljiv polinom* $\mathfrak{p}(x) = x^2 + x + 1$ *nad* $\mathbf{F} = \mathbf{Z}_2$ KRONECKER-*ovo polje je* $\mathbf{K} = \mathbf{GF}(2^2)$. *Domen polja* $\mathbf{K}$ *je skup* $K = \{0, 1, \alpha, \beta\}$, *gde je* α *koren polinoma* $\mathfrak{p}(x)$ *i* $\beta = \alpha + 1$ *(drugi koren posmatranog polinoma). Tada u polju* $\mathbf{K}$ *važi faktorizacija* $\mathfrak{p}(x) = x^2 + x + 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$. *Primetimo da je skup* K *raširen korenima polinoma* $\mathfrak{p}(x)$ [**91**, str. 26].

Za polje $\mathbf{F}$ i polinom $\mathfrak{p} \in F[x]$, $\deg \mathfrak{p}(x) \geq 1$, polje $\mathbf{E}$, koje je raširenje polja $\mathbf{F}$, naziva se *korensko polje* akko:

1. Polinom $\mathfrak{p}(x)$ ima faktorizaciju na linearne faktore, tj. za neke $a_1, \ldots, a_n \in E$ i neko $c \in F$ važi: $\mathfrak{p}(x) = c(x - a_1) \ldots (x - a_n)$.
2. Ni u jednom međupolju za polja $\mathbf{F}$ i $\mathbf{E}$, polinom $\mathfrak{p}(x)$ se ne može rastaviti na linearne faktore.

Primer 1.4.4. *Za polje realnih brojeva* $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ *i nesvodljiv polinom* $\mathfrak{p}(x) = x^2 + 1$, KRONECKER*ovo polje* $\mathbf{K}$ *predstavlja polje kompleksnih brojeva* $\mathbf{C}$.

Na osnovu KRONECKERove teoreme, dokazuje se da važi tvrđenje [**91**, str. 28]:

Teorema 1.4.5. *Za polje* $\mathbf{F}$ *i svaki polinom* $\mathfrak{p} \in F[x]$, $\deg \mathfrak{p}(x) \geq 1$ *postoji korensko polje* $\mathbf{E}$.

Ako je $\mathbf{E}$ korensko polje polinoma $\mathfrak{p}(x)$ nad poljem $\mathbf{F}$, tada je $\mathbf{E} = \mathbf{F}(a_1, \ldots, a_n)$ i svaki a_{i+1} je algebarski nad poljem $\mathbf{F}(a_1, \ldots, a_i)$ za $0 \leq i < n$. Samim tim, iz

$$|\mathbf{E} : \mathbf{F}| = |\mathbf{F}(a_1, \ldots, a_n) : \mathbf{F}(a_1, \ldots, a_{n-1})| \cdot \ldots \cdot |\mathbf{F}(a_1) : \mathbf{F}| < \infty$$

i Teoreme 1.3.1. sleduje sledeće osnovno tvrđenje:

Teorema 1.4.6. *Ako je* $\mathbf{E}$ *korensko polje polinoma* $\mathfrak{p}(x)$ *nad poljem* $\mathbf{F}$, *tada je* $\mathbf{E}$ *algebarsko raširenje polja* $\mathbf{F}$.

Primer 1.4.7. *U sekciji* **1.5.** *razmatrano je polje algebarskih brojeva* $\mathbf{A}$, *što predstavlja jedan primer algebarskog raširenja polja racionalnih brojeva* $\mathbf{Q}$, *koje nije i korensko raširenje.*

Na kraju ove sekcije napomenimo da, na osnovu Teoreme 1.3.10., proizilazi sledeće tvrđenje [**91**, str. 30]:

Teorema 1.4.8. *Neka je dato polje* $\mathbf{F}$ *i polinom* $\mathfrak{p} \in F[x]$. *Ako su* $\mathbf{K}'$ *i* $\mathbf{K}''$ *dva korenska polja polinoma* $\mathfrak{p}(x)$, *tada postoji izomorfizam* $\sigma : \mathbf{K}' \cong \mathbf{K}''$, *tako da je* $\sigma\big|_F = i_F$.

1.5 Polje algebarskih brojeva

Svako potpolje polja kompleksnih brojeva **C** naziva se *brojevnim poljem.* U vezi sa prostim algebarskim raširenjima brojevnih polja važi sledeće tvrđenje [**36**, str. 67]:

Teorema 1.5.1. *Svako konačno višestruko algebarsko raširenje* **E** *brojevnog polja* **F** *ekvivalentno je jednostrukom algebarskom raširenju.*

Primer 1.5.2. *Važi* $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Dalje razmatramo neka tvrđenja za brojevna polja. Važe tvrđenja [**104**, str. 225]:

Teorema 1.5.3. *Neka je* **F** *brojevno polje koje je raširenje polja racionalnih brojeva* **Q**. *Ako je* **K** *raširenje polja* **F** *drugog stepena* $|\mathbf{K} : \mathbf{F}| = 2$, *tada je* $\mathbf{K} = \mathbf{F}(\sqrt{\gamma})$, *za neki element* $\gamma \in F$.

Teorema 1.5.4. *Neka je polje* **F** *konačno raširenje polja realnih brojeva* **R**; *tada je* **F** *izomorfno ili polju realnih brojeva* **R** *ili polju kompleksnih brojeva* **C**.

Dalje, u vezi sa brojevnim poljima posebno izdvajamo polje algebarskih brojeva. Broj a iz **C** je *algebarski broj* ako je koren nekog nenula polinoma $p \in Q[x]$. Važi tvrđenje [**91**, str. 32]:

Teorema 1.5.5. *Skup* $A = \{a \in C \,|\, a \text{ je algebarski element nad } \mathbf{Q}\}$ *određuje polje* $\mathbf{A} = (A, +, \cdot, 0, 1)$ *koje je jedno potpolje polja kompleksnih brojeva* **C**.

Dokaz. Neka $a, b \in A$. Tada su $a \in C$ i $b \in C$ algebarski elementi nad **Q**. Primetimo da je $\mathbf{Q}(a, b)$ raširenje polja **Q** i **C** raširenje polja $\mathbf{Q}(a, b)$. Kako su $a + b$, $a \cdot b \in C$ i $a^{-1} \in C$ $(a \neq 0)$ algebarski elementi nad $\mathbf{Q}(a, b)$ i kako je $\mathbf{Q}(a, b)$ algebarsko raširenje polja **Q**, tada prema Napomeni 1.3.4. $\big(\mathbf{M} = \mathbf{C}$, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(a, b)$ i $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\big)$ elementi $a + b$, $a \cdot b$ i a^{-1} $(a \neq 0)$ jesu algebarski nad poljem **Q**. Prema tome, dokazano je $a + b$, $a \cdot b \in A$ i $a^{-1} \in A$ $(a \neq 0)$. ■

Napomena 1.5.6. *Koristeći se monomijalnim idealima moguće je direktno dokazati da je zbir dva algebarska broja algebarski broj, proizvod dva algebarska broja algebarski broj i inverz nenula algebarskog broja algebarski broj* [**115**].

Polje **A** nazivamo *poljem algebarskih brojeva.* U daljem razmatranju koristićemo očiglednu činjenicu da je broj algebarski akko ispunjava neku polinomsku jednačinu sa celobrojnim koeficijentima. Važi sledeće tvrđenje [**117**]:

Teorema 1.5.7. *Polje algebarskih brojeva* $\mathbf{A} = (A, +, \cdot, 0, 1)$ *je prebrojivo algebarsko raširenje polja racionalnih brojeva* **Q**.

Dokaz. Po prethodnoj teoremi, polje algebarskih brojeva **A** je algebarsko raširenje polja racionalnih brojeva **Q**. Svakom polinomu:

$$(\mathfrak{p}) \qquad \mathfrak{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

sa celobrojnim koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in Z$, pridružimo prirodan broj koji nazivamo *visina polinoma*:

$$\mathrm{h}(\mathfrak{p}) = n - 1 + |a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|.$$

Za svaki prirodan broj $m \in N$ formirajmo skup T_m svih korena $x_i \in C$ onih polinoma $\mathfrak{p}(x)$ za koje je $\mathrm{h}(\mathfrak{p}) \leq m$. Primetimo da je stepen tih polinoma najviše m; samim tim, svaki odgovarajući polinom $\mathfrak{p}(x)$ ima najviše m korena. Dalje, zbog celobrojnosti koeficijenata, odgovarajućih polinoma $\mathfrak{p}(x)$ sa korenima u skupu T_m ima konačno mnogo. Sveukupno, za svako $m \in N$ skup T_m je konačan. Na osnovu jednakosti:

$$A = \bigcup_{m \in N} T_m$$

i činjenice da je prebrojiva unija konačnih skupova prebrojiv skup sleduje tvrđenje. ■

Za polje algebarskih brojeva **A**, skup $A_R = A \cap R$ određuje jedno brojevno polje [**91**, str. 37]. Naime, analogno Teoremi 1.5.5. važi tvrđenje:

Teorema 1.5.8. *Skup* $A_R = \{a \in R \,|\, a$ je algebarski element nad $\mathbf{Q}\}$ *određuje polje* $\mathbf{A}_R = (A_R, +, \cdot, 0, 1)$, *koje je jedno potpolje polja kompleksnih brojeva* **C**. *Polje realnih algebarskih brojeva* $\mathbf{A}_R = (A_R, +, \cdot, 0, 1)$ *je prebrojivo algebarsko raširenje polja racionalnih brojeva* **Q**.

1.6 Algebarsko zatvorenje polja

Važi sledeće tvrđenje koje nazivamo *osnovna teorema algebre* [**67**, str. 122]:

Teorema 1.6.1. *Svaki polinom* $\mathfrak{p} \in C[z]$, *stepena* $\deg \mathfrak{p}(z) \geq 1$, *ima bar jedan koren u polju kompleksnih brojeva* **C**.

Dalje, može se pokazati da važi tvrđenje [**79**, str. 226]:

Teorema 1.6.2. *Neka je* **F** *polje. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni*:

1. *Svaki polinom* $\mathfrak{p} \in F[x]$ *stepena* $\deg \mathfrak{p}(x) > 1$ *ima bar jedan koren u* F.
2. *Svaki polinom* $\mathfrak{p} \in F[x]$ *stepena* $\deg \mathfrak{p}(x) > 1$ *jeste proizvod linearnih faktora.*
3. *Svaki nesvodljiv polinom* $\mathfrak{p}(x)$ *iz* $F[x]$ *je linearan.*
4. *Polje* **F** *nema pravih algebarskih raširenja.*

Polje $\mathbf{F}$ je *algebarski zatvoreno* ako ispunjava ma koji od prethodnih iskaza **1−4.** Prema osnovnoj teoremi algebre, polje kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ je algebarski zatvoreno. Polje racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$ i polje realnih brojeva $\mathbf{R}$ nisu algebarski zatvorena. Za polje algebarskih brojeva važi tvrđenje [**91**, str. 37]:

Teorema 1.6.3. *Polje algebarskigh brojeva* $\mathbf{A}$ *je algebarski zatvoreno.*

Dokaz. Neka je $\mathfrak{p} \in A[x]$ polinom stepena $n = \deg \mathfrak{p}(x) > 1$. Dokazujemo da posmatrani polinom ima bar jedan koren u A. Prema osnovnoj teoremi algebre polinom $\mathfrak{p}(x)$ ima bar jedan koren $\alpha \in C$. Dovoljno je dokazati da $\alpha \in A$. Primetimo da je polinom

$$\mathfrak{p}(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

sa koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$. Otud su elementi $a_0, a_1, \ldots, a_n \in C$ algebarski elementi nad poljem $\mathbf{Q}$. Posmatrajmo $\mathbf{M} = \mathbf{Q}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ kao jedno algebarsko raširenje polja $\mathbf{Q}$. Za to raširenje $a_0, a_1, \ldots, a_n \in M$, i element $\alpha \in C$ je algebarski nad $\mathbf{M}$. Dalje, polje $\mathbf{M}(\alpha)$ je jedno algebarsko raširenje polja $\mathbf{M}$. Na osnovu Teoreme 1.3.3. polje $\mathbf{M}(\alpha)$ je algebarsko raširenje polja $\mathbf{Q}$. Odatle, element $\alpha \in C$ je algebarski nad poljem $\mathbf{Q}$. Po definiciji skupa A, dokazano je $\alpha \in A$. Time je dokazano da je $\mathbf{A}$ algebarski zatvoreno polje. ■

Dalje, dokazujemo da je svako polje jedno potpolje nekog algebarski zatvorenog polja. U tu svrhu razmotrimo konstrukciju novih polja pomoću unije lanca polja. Naime, za $(I, \leq)$ linearno uređen skup posmatrajmo lanac polja $\mathcal{L} = \{\mathbf{F}_i \,|\, i \in I\}$, tj. za $i, j \in I$ ako je $i \leq j$ neka je $\mathbf{F}_i \leq \mathbf{F}_j$. Formirajmo skup:

$$E = \bigcup_{i \in N_0} F_i.$$

Operacije $+_E$ i $\cdot_E$ definišemo na način koji sledi. Za svaka dva elementa $a, b \in E$ postoje $i, j \in I$, takvi da $a \in F_i$ i $b \in F_j$. Neka je $k = \max\{i, j\}$; definišemo:

$$a +_E b = a +_{F_k} b \qquad \text{i} \qquad a \cdot_E b = a \cdot_{F_k} b.$$

Tada je algebarska struktura $\mathbf{E} = (E, +_E, \cdot_E, 0, 1)$ polje koje nazivamo *unijom polja.*

Primer 1.6.4. *Za polja Galoisa važi:* $\mathbf{GF}(p^n) < \mathbf{GF}(p^m)$ *akko* $n|m$ [**91**]. *Samim tim, za fiksirani prost broj* p *posmatrajmo niz polja* GALOIS*a* $\mathbf{E}_{k_i} = \mathbf{GF}(p^{k_i})$ *za* k_i*−indekse takve da* $k_i|k_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. *Tada unija:*

$$\mathbf{K} = \bigcup_{i \in N} E_{k_i}$$

jeste algebarski zatvoreno polje koje sadrži posmatrani niz polja.

Važi sledeće tvrđenje [**91**, str. 37]:

Teorema 1.6.5. *Svako polje* $\mathbf{F}$ *je potpolje nekog algebarski zatvorenog polja* $\mathbf{K}$.

Dokaz. Označimo $\mathbf{E}_0 = \mathbf{F}$. Za polje $\mathbf{F}$ posmatrajmo skup polinoma $F[x]$. Za kardinal[2] $k = \max\{\aleph_0, |F|\}$ sve polinome iz $F[x]$ možemo poređati u niz:

$$\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\alpha, \ldots$$

po ordinalima $\alpha < k$. Dalje se konstruiše polje $\mathbf{F}_\alpha$ po ordinalu α na način koji sleduje. Ako je ordinal α sukcesor, tj. $\alpha = \beta + 1$, tada određujemo $\mathbf{F}_\alpha$ kao korensko polje polinoma $\mathfrak{p}_\beta$ nad $\mathbf{F}_\beta$. Ako je ordinal α granični ordinal, tada formiramo polje unije $\mathbf{E}_1 = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{F}_\alpha$, gde određujemo $\mathbf{F}_\alpha$ kao korensko polje polinoma $\mathfrak{p}_\alpha$ nad $\mathbf{E}_1$ (polje $\mathbf{E}_1$ je definisano kao unija po $\beta < \alpha$). Zatim, uočavamo proizvoljni polinom $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(x)$ nad $F[x]$ i dokazujemo da on ima koren u polju $\mathbf{E}_1$. Zaista, važi $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ sa nekim indeksom i u ordinalnom nizu. Prema načinu definisanja, polinom polja $\mathfrak{p}$ ima koren u $\mathbf{F}_{i+1}$, a samim tim i u $\mathbf{E}_1$ (polje $\mathbf{F}_{i+1}$ je potpolje polja $\mathbf{E}_1$). Kao što je određeno polje $\mathbf{E}_1$, kao raširenje polja $\mathbf{E}_0$, tako određujemo polje $\mathbf{E}_2$ kao raširenje polja $\mathbf{E}_1$. Nastavljajući prethodnu konstrukciju po ordinalima određujemo polje unije

$$\mathbf{K} = \bigcup_i \mathbf{E}_i.$$

Dokazujemo da je prethodno određeno polje traženo raširenje. Posmatrajmo polinom $\mathfrak{q} \in K[x]$ stepena $n = \deg \mathfrak{q}(x) \geq 1$. Tada je $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(x) = \mathfrak{q}_0 + \mathfrak{q}_1 x + \ldots \mathfrak{q}_n x^n$, za neke elemente $\mathfrak{q}_i \in \mathbf{E}_{k_i}$ $(0 \leq i \leq n)$. Uzimajući $m = \max\{k_0, k_1, \ldots, k_n\}$, tada je $\mathfrak{q} \in E_m[x]$. Po prethodnoj konstrukciji, polinom $\mathfrak{q}(x)$ ima koren u polju $\mathbf{E}_{m+1}$, pa i polju $\mathbf{K}$. Na taj način je dokazano da je $\mathbf{K}$ algebarski zatvoreno polje. ∎

Polje $\mathbf{E}$ je *algebarsko zatvorenje polja* $\mathbf{F}$ ako je $\mathbf{E}$ algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}$ i ako je $\mathbf{E}$ algebarski zatvoreno polje. Tada važi tvrđenje [**91**, str. 39]:

Teorema 1.6.6. *Svako polje* $\mathbf{F}$ *ima algebarsko zatvorenje.*

Dokaz. Prema Teoremi 1.6.5. postoji algebarsko zatvoreno polje $\mathbf{K}$ koje sadrži polje $\mathbf{F}$. Formirajmo skup

$$E = \{\alpha \in K \mid \alpha \text{ je algebarski element nad } \mathbf{F}\}.$$

Dokažimo da E određuje potpolje polja $\mathbf{K}$. Neka $\alpha, \beta \in E$. Tada su $\alpha \in K$ i $\beta \in K$ algebarski elementi nad $\mathbf{F}$. Primetimo da je $\mathbf{F}(\alpha, \beta)$ raširenje polja $\mathbf{F}$ i $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}(\alpha, \beta)$. Kako su $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta \in K$ i $\alpha^{-1} \in K$ $(\alpha \neq 0)$ algebarski elementi

[2] za beskonačno polje uzimamo $k = |F|$, a za konačno polje uzimamo $k = \aleph_0$

nad $\mathbf{F}(\alpha,\beta)$ i kako je $\mathbf{F}(\alpha,\beta)$ algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}$, tada prema Napomeni 1.3.4. $\big(\mathbf{M}=\mathbf{K},\ \mathbf{K}=\mathbf{F}(a,b)$ i $\mathbf{F}=\mathbf{F}\big)$ elementi $\alpha+\beta, \alpha\cdot\beta$ i α^{-1} $(\alpha\neq 0)$ su algebarski nad poljem $\mathbf{F}$. Prema tome, dokazano je $\alpha+\beta, \alpha\cdot\beta \in E$ i $\alpha^{-1}\in E$ $(\alpha \neq 0)$. Sveukupno $\mathbf{E}$ jeste potpolje algebarski zatvorenog polja $\mathbf{K}$. Očigledno je da je $\mathbf{E}$ raširenje polja $\mathbf{F}$, jer se F može poistovetiti sa skupom algebarskih elemenata koji imaju minimalni polinom prvog reda. Dokazujemo da je $\mathbf{E}$ algebarski zatvoreno polje. Neka je $\mathfrak{p}\in E[x]$ polinom stepena $n=\deg \mathfrak{p}(x)>1$. Dokazujemo da posmatrani polinom ima bar jedan koren u E. Prema Teoremi 1.6.5. polinom $\mathfrak{p}(x)$ ima bar jedan koren $\alpha\in K$. Dovoljno je dokazati da $\alpha\in E$. Primetimo da je polinom:

$$\mathfrak{p}(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$$

sa koeficijentima $a_0,a_1,\ldots,a_n\in E$. Odatle, elementi $a_0,a_1,\ldots,a_n\in K$ su algebarski elementi nad poljem $\mathbf{F}$. Posmatrajmo $\mathbf{M}=\mathbf{F}(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ kao jedno algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}$. Za to raširenje $a_0,a_1,\ldots,a_n\in M$ i element $\alpha\in K$ je algebarski nad $\mathbf{M}$. Dalje, polje $\mathbf{M}(\alpha)$ je jedno algebarsko raširenje polja $\mathbf{M}$. Na osnovu Teoreme 1.3.3. polje $\mathbf{M}(\alpha)$ je algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}$. Odatle, element $\alpha\in K$ je algebarski nad poljem $\mathbf{F}$. Po definiciji skupa E dokazano je $\alpha\in E$. Time je dokazano da je $\mathbf{E}$ algebarski zatvoreno polje. ■

U vezi sa prethodnom teoremom, navodimo tvrđenje [**91**, str. 40] kojim je algebarsko zatvorenje polja do na izomorfizam jedinstveno određeno.

Teorema 1.6.7. *Neka su data polja $\mathbf{F}$ i $\mathbf{F}'$ za koja postoji izomorfizam $\sigma:\mathbf{F}\cong\mathbf{F}'$. Ako su $\mathbf{K}$ i $\mathbf{K}'$ algebarska zatvorenja redom polja $\mathbf{F}$ i $\mathbf{F}'$, tada postoji izomorfizam $\theta:\mathbf{K}\cong\mathbf{K}'$ takav da je $\theta\big|_F=\sigma$.*

Posebno, u drugoj glavi, u dokazu Teoreme 2.3.4., koristićemo sledeće tvrđenje [**81**, str. 49]:

Teorema 1.6.8. *Neka su $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ dva algebarski zatvorena polja koja su raširenja polja $\mathbf{A}$, takva da je $|B_1|=|B_2|=\kappa>\max\{\aleph_0,|A|\}$. Tada su $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ izomorfna polja.*

Na osnovu prethodnog razmatranja, algebarsko zatvorenje polja $\mathbf{F}$ je korektno određeno kao najmanje algebarski zatvoreno polje $\bar{\mathbf{F}}$ koje sadrži polazno polje. Dalje navodimo oblike nekih konkretnih algebarskih zatvorenja [**40**], [**91**, str. 41]:

Teorema 1.6.9. $\bar{\mathbf{Z}}_p=\bigcup\limits_{n\in N}\mathbf{GF}(p^{n!})$, $\bar{\mathbf{Q}}=\mathbf{A}$ *i* $\bar{\mathbf{R}}=\mathbf{C}$.

Na kraju sekcije navedimo tvrđenje o kardinalnosti algebarskih zatvorenja [**96**, str. 235.]:

Teorema 1.6.10. 1. *Ako je polje $\mathbf{F}$ konačno, tada za algebarsko zatvorenje $\bar{\mathbf{F}}$ važi $|\bar{\mathbf{F}}|=\aleph_0$.* **2.** *Ako je polje $\mathbf{F}$ beskonačno, tada za algebarsko zatvorenje $\bar{\mathbf{F}}$ važi $|\bar{\mathbf{F}}|=|\mathbf{F}|$.*

1.7 Transcendentna raširenja polja

U prvom delu ove sekcije razmotrimo prosta transcendentna raširenja. Važi sledeće tvrđenje [**79**, str. 225]:

Teorema 1.7.1. *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i neka je element* $b \in K$ *transcendentan nad poljem* $\mathbf{L}$*. Tada važi:*

1. *Prsten* $\mathbf{F}[b]$ *je izomorfan prstenu polinoma* $\mathbf{F}[x]$*.*

2. *Polje* $\mathbf{F}(b)$ *je najmanje potpolje polja* $\mathbf{K}$*, koje sadrži* $F \cup \{b\}$*.*

Napomena 1.7.2. *Domen polja* $\mathbf{F}(b)$ *je skup:*

$$F(b) = \Big\{ \frac{\mathfrak{p}(b)}{\mathfrak{q}(b)} \;\Big|\; \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in F[x] \;\wedge\; \mathfrak{q}(b) \neq 0 \Big\}.$$

Osnovno tvrđenje za prosta transcendentna raširenja dato je sledećim tvrđenjem koje se naziva LÜROTHova teorema [**48**, str. 70]:

Teorema 1.7.3. *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{L}$ *i neka je element* $x \in K$ *transcendentan nad poljem* $\mathbf{L}$*. Svako međupolje* $\mathbf{L}_1$*, takvo da je* $L \subset L_1 \subseteq L(x)$*, ima oblik* $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}(y)$ *za neki element* y *koji predstavlja vrednost neke racionalne funkcije po* x *nad* $\mathbf{L}$*, tj.* $y \in L(x)$*.*

Napomena 1.7.4. *U narednoj sekciji razmotrićemo dalja proširenja* LÜROTH*ove teoreme.*

Razmotrimo složena raširenja polja. Neka je polje $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$. Elementi $a_1, \ldots, a_n \in K$ jesu *algebarski zavisni elementi nad poljem* $\mathbf{F}$ ako je $\mathfrak{p}(a_1, \ldots, a_n) = 0$, za neki nenula polinom $\mathfrak{p} \in F[x_1, \ldots, x_n]$. U suprotnom, elementi $a_1, \ldots, a_n \in K$ nazivaju se *algebarski nezavisni elementi nad poljem* $\mathbf{F}$. Za neprazan podskup $S \subseteq K$ smatramo da je *algebarski nezavisan skup* ako je takav svaki konačan podskup skupa S. U suprotnom, S je *algebarski zavisan skup*. Dodatno smatramo da je $\emptyset-$prazan skup algebarski nezavisan.

Primer 1.7.5. *Posmatrajmo polje realnih brojeva* $\mathbf{R}$ *kao raširenje polja racionalnih brojeva* $\mathbf{Q}$*. Tada su npr. elementi* $a_1 = \sqrt{2}$ *i* $a_2 = \sqrt{3}$ *algebarski zavisni elementi jer npr.* $\mathfrak{p}(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2 - 5 = 0$*. S druge strane npr. elementi* $a_1 = 1$ *i* $a_2 = \pi$ *jesu algebarski nezavisni* (*u suprotnom* π *nije transcendentan*)*.*

Važe sledeća tvrđenja [**105**, str. 1]:

Teorema 1.7.6. *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i neka su elementi* $a_1, \ldots, a_n \in K$ *algebarski nezavisni elementi nad poljem* $\mathbf{F}$*. Tada važi* $F(x_1, \ldots, x_n) \cong F(a_1, \ldots, a_n)$*.*

Dokaz. Funkcija

$$f = f\big(\mathfrak{p}(x_1,\dots,x_n)\big) = \mathfrak{p}(a_1,\dots,a_n), \tag{1}$$

za $\mathfrak{p}\in F[x_1,\dots,x_n]$, predstavlja homomorfizam $f : F[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow F[a_1,\dots,a_n]$. Po definiciji, funkcija f je surjektivna. Na osnovu algebarske nezavisnosti elemenata $a_1,\dots,a_n\in K$ sleduje da je posmatrana funkcija f i injektivna. Dalje, funkcija

$$f = f\Big(\frac{\mathfrak{p}(x_1,\dots,x_n)}{\mathfrak{q}(x_1,\dots,x_n)}\Big) = \frac{\mathfrak{p}(a_1,\dots,a_n)}{\mathfrak{q}(a_1,\dots,a_n)}, \tag{2}$$

za $\mathfrak{p},\mathfrak{q} \in F[x_1,\dots,x_n]$ tako da $\mathfrak{q}(a_1,\dots,a_n) \neq 0$, predstavlja homomorfizam $f : F[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow F[a_1,\dots,a_n]$ koji je raširenje od (1). Tako određen homomorfizam je takođe bijektivan, dakle radi se o izomorfizmu. ∎

Lema 1.7.7. *Neka je polje* **K** *raširenje polja* **F** *i neka je podskup $S\subset K$ algebarski nezavisan skup nad* **F**. *Za element $c\in K\backslash F(S)$, skup $S\cup\{c\}$ je algebarski nezavisan nad* **F** *ako i samo ako je c transcendentan element nad* $\mathbf{F}(S)$.

Dokaz. Neka je skup $S\cup\{c\}$ algebarski nezavisan nad **F**, i pretpostavimo da je c algebarski element nad $\mathbf{F}(S)$. Tada važi

$$\frac{\mathfrak{p}_n(s)}{\mathfrak{q}_n(s)}c^n + \ldots + \frac{\mathfrak{p}_0(s)}{\mathfrak{q}_0(s)} = 0,$$

za neko $s=(s_1,\dots,s_m)\in S$ $\big(\mathfrak{p}_i,\mathfrak{q}_i\in F[S]$ i $\mathfrak{q}_i(s)\neq 0$ za $i=0,\dots,n\big)$. Prethodna jednakost je u kontradikciji sa algebarskom nezavisnošću skupa $S\cup\{c\}$. Obrnuto, neka je element c transcendentan nad poljem $\mathbf{F}(S)$ i pretpostavimo da je skup $S\cup\{c\}$ algebarski zavisan nad **F**. Tada važi

$$\mathfrak{r}_n(s)c^n + \ldots + \mathfrak{r}_0(s) = 0,$$

za neko $s=(s_1,\dots,s_m)\in S$ $\big(\mathfrak{r}_i\in F[S]$ za $i=0,\dots,n\big)$. Prethodna jednakost je u kontradikciji sa transcendentnošću elementa c nad poljem $\mathbf{F}(S)$. ∎

Neka je polje **K** raširenje polja **F**. Podskup $B\subseteq K$ nazivamo *transcendentna baza raširenja* $\mathbf{K}/\mathbf{F}$ ako je B maksimalni algebarski nezavisan skup nad **F**. Tada, za svako $c\in K\backslash B$ skup $B\cup\{c\}$ jeste algebarski zavisan skup. Važe tvrđenja [**105**, str. 2]:

Teorema 1.7.8. *Neka je polje* **K** *raširenje polja* **F** *i neka je $B\subseteq K$ algebarski nezavisan skup. Skup B je transcendentna baza raširenja* $\mathbf{K}/\mathbf{F}$ *ako i samo ako je raširenje* $\mathbf{K}/\mathbf{F}(B)$ *algebarsko.*

Dokaz. Neka je B transcendentna baza raširenja $\mathbf{K}/\mathbf{F}$. Posmatrajmo proizvoljni element $c \in K \backslash F(B)$. Tada je $c \in K \backslash B$. Odatle, prema definiciji transcendentne baze, sleduje da je $B \cup \{c\}$ algebarski zavisan skup. Koristeći kontrapoziciju prethodne Leme, proizilazi da je element c algebarski nad $\mathbf{F}(B)$. Obrnuto, neka je raširenje $\mathbf{K}/\mathbf{F}(B)$ algebarsko, za neki algebarsko nezavisan skup $B \subseteq K$. Svaki element $c \in K$ je algebarski nad $\mathbf{F}(B)$. Specijalno, svaki $c \in K \backslash B$ je algebarski nad $\mathbf{F}(B)$. Tada važi

$$\frac{p_n(b)}{q_n(b)} c^n + \ldots + \frac{p_0(b)}{q_0(b)} = 0,$$

za neko $b = (b_1, \ldots, b_m) \in B$ $\big(p_i, q_i \in F[B]$ i $q_i(b) \neq 0$ za $i = 0, \ldots, n\big)$. Prethodna jednakost pokazuje da je $B \cup \{c\}$ algebarski zavisan skup. Odatle proizilazi da je B transcendentna baza raširenja $\mathbf{K}/\mathbf{F}$. ■

Teorema 1.7.9. *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i neka je* $S \subseteq K$ *takav skup da je raširenje* $\mathbf{K}/\mathbf{F}(S)$ *algebarsko. Tada skup* S *sadrži transcendentnu bazu* B *raširenja* $\mathbf{K}/\mathbf{F}$.

Dokaz. Za $S \subseteq K$ posmatrajmo skup $\mathcal{T}$ svih algebarski nezavisnih skupova $T \subseteq S$ nad poljem $\mathbf{F}$. Tada je $\mathcal{T}$ neprazan jer $\emptyset \in \mathcal{T}$. Prema ZORNovoj lemi postoji, u odnosu na inkluziju, maksimalni algebarsko nezavisan skup $B \subseteq S$. Dokazujemo da je $\mathbf{F}(S)$ algebarsko raširenje od $\mathbf{F}(B)$. Pretpostavimo suprotno, da postoji element $c \in \big(K \backslash F(B)\big) \cap F(S)$ koji je transcendentan nad $\mathbf{F}(B)$; tada, prema prethodnoj Lemi, skup $S_c = B \cup \{c\}$ jeste algebarski nezavisan skup nad $\mathbf{F}$. Samim tim, skup S_c je maksimalniji algebarski nezavisan skup od B, što je nemoguće. Konačno, po pretpostavci, $\mathbf{K}$ je algebarsko raširenje od $\mathbf{F}(S)$ i prethodno je dokazano da je $\mathbf{F}(S)$ algebarsko raširenje od $\mathbf{F}(B)$. Odatle sleduje da je $\mathbf{K}$ je algebarsko raširenje od $\mathbf{F}(B)$. Prema prethodnoj teoremi skup B je transcendentna baza raširenja $\mathbf{K}/\mathbf{F}$. ■

Posledica 1.7.10. *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$*; tada postoji transcendentna baza* B *raširenja* $\mathbf{K}/\mathbf{F}$.

Ako je B transcendentna baza raširenja $\mathbf{K}/\mathbf{F}$, tada raširenje $\mathbf{K} = \mathbf{F}(B)$ nazivamo *čisto transcendentno raširenje.*

Primer 1.7.11. *Za ma koje polje* $\mathbf{K}$*, polje racionalnih funkcija* $\mathbf{K}(x_1, \ldots, x_n)$ *je čisto transcendentno raširenje nad* $\mathbf{K}$ *(gde su* $x_1, \ldots, x_n$ *su međusobno nezavisne promenljive). Za polje realnih brojeva* $\mathbf{R}$*, raširenje* $\mathbf{R}(x, \sin x, e^x)$ *je čisto transcendentno raširenje nad* $\mathbf{R}$ [**64**].

Kardinalni broj $|B|$ označavamo tr.deg$(\mathbf{K}/\mathbf{F})$ i nazivamo *stepenom transcendentnosti raširenja* $\mathbf{K}/\mathbf{F}$. Korektnost prethodnog definisanja proizilazi na osnovu naredna dva tvrđenja [**105**, str. 2]:

Teorema 1.7.12. *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$. *Ako su* B *i* C *konačne transcendentne baze raširenja* $\mathbf{K}/\mathbf{F}$, *tada važi* $|B| = |C|$.

Dokaz. Neka su $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ i $C = \{c_1, b_2, \ldots, b_m\}$ dve transcendentne baze raširenja $\mathbf{K}/\mathbf{F}$, takve da je $m \geq n$. Pokazaćemo da je za bazu $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ i element $c_1 \in C$ moguće formirati novu transcendentnu bazu $B_1 = \{c_1, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_n}\}$, za neku permutaciju $(b_{\pi_1}, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_n})$ od $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Element $c_1 \in C$ ispunjava jednačinu:

$$\frac{\mathfrak{p}_t(b)}{\mathfrak{q}_t(b)} c_1^t + \ldots + \frac{\mathfrak{p}_0(b)}{\mathfrak{q}_0(b)} = 0, \tag{1}$$

za neki izbor elemenata $b = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s)$ koji formiraju skup $\bar{B}_s = \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s\} \subseteq B$ $\big(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i \in F[B_s]$ i $\mathfrak{q}_i(b) \neq 0$ za $i = 0, \ldots, t\big)$. Pri tom, dodatno, odredimo podskup $\bar{B}_s$ skupa B tako da je sa minimalnim brojem $b-$elemenata koji figurišu u (1). Dalje, iz (1) proizilazi polinomska jednačina po elementu $\bar{b}_1$:

$$\mathfrak{r}_k(c_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_s)\bar{b}_1^k + \ldots + \mathfrak{r}_0(c_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_s) = 0, \tag{2}$$

za neke polinome $\mathfrak{r}_0, \ldots, \mathfrak{r}_k$ tako da $\mathfrak{r}_k(c_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_s) \neq 0$. Odatle je $\bar{b}_1$ algebarski element nad $\mathbf{F}(c_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_s)$. Iz minimalnosti skupa $\bar{B}_s$ sleduje da skup $\{c_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_s\}$ jeste algebarski nezavisan; inače, u suprotnom bi postojala nova jednačina po c_1 sa manjim brojem elemenata iz skupa B. Tražena permutacija π, prema prethodnom, konkretno je određena sa $b_{\pi_1} = \bar{b}_1, b_{\pi_2} = \bar{b}_2, \ldots, b_{\pi_s} = \bar{b}_s$. Dokazaćemo da je skup $\{c_1, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_j}\}$ algebarski nezavisan skup za svako $j = s+1, \ldots, n$. Posebno za $j = s+1$, ako bi elementi $c_1, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_s}, b_{\pi_{s+1}}$ bili algebarski zavisni, tada bi element c_1 bio algebarski element nad poljem $\mathbf{F}(b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_s}, b_{\pi_{s+1}})$. Raširenja $\mathbf{F}(b_{\pi_1}, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_s}, b_{\pi_{s+1}})/\mathbf{F}(c_1, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_s})$ i $\mathbf{F}(c_1, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_s})/\mathbf{F}(b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_s})$ jesu algebarska. Na osnovu (2), element $b_{\pi_1} = \bar{b}_1$ je algebarski nad $\mathbf{F}(c_1, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_s}, b_{\pi_{s+1}})$. Odatle, prema Napomeni 1.3.4., proizilazi da je b_{π_1} algebarski element nad poljem $\mathbf{F}(b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_s})$, što je nemoguće jer je $\{b_{\pi_1}, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_s}\}$ algebarski nezavisan skup. Odatle, indukcijom, svaki skup $\{c_1, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_j}\}$ jeste algebarski nezavisan za $j = s+1, \ldots, n$, a time i posebno skup $B_1 = \{c_1, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_n}\}$. Konačno, iz činjenice da su elementi $b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_n} \in K$ algebarski nad $\mathbf{F}(c_1, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_n})$ i iz činjenice da je na osnovu (2) element $b_{\pi_1} = \bar{b}_1 \in K$ algebarski nad $\mathbf{F}(c_1, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_n})$, sleduje zaključak da je $\mathbf{K}$ jedno algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}(c_1, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_n})$. Sveukupno, prema teremi 1.7.8., skup $B_1 = \{c_1, b_{\pi_2}, \ldots, b_{\pi_n}\}$ je nova transcendentna baza. Nastavljajući prethodni postupak dodavanja novih $c-$elemenata iz transcendentne baze C, proizilazi zaključak $m = n$. ■

Napomena 1.7.13. *Dokaz Teoreme* 1.7.12. *nastao je dopunom dokaza koji su navedeni u* [**105**], [**103**] *i* [**86**].

Teorema 1.7.14. *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i neka su* B *i* C *transcendentne baze raširenja* $\mathbf{K}/\mathbf{F}$. *Ako je* B *beskonačna transcendentna baza, tada je i* C *beskonačna transcendentna baza i važi* $|B| = |C|$.

Dokaz. Ako je B beskonačna transcendentna baza, na osnovu prethodne teoreme, tada je i C beskonačna transcendentna baza. Dalje, posmatrajmo $b \in B$. Tada je $b \in K$ algebarski element nad $\mathbf{F}(C)$. Neka se $C_b \subseteq C$ sastoji od koeficijenata minimalnog polinoma elementa b nad $\mathbf{F}(C)$. Budući da b nije algebarski nad $\mathbf{F}$, tada je $C_b \neq \emptyset$. Pri tom, skupovi C_b su konačni. Formirajmo $C' = \bigcup_{b\in B} C_b$. Uočimo zatim da svaki element $u \in K$ koji je algebarski nad $\mathbf{F}(B)$ jeste i algebarski nad $\mathbf{F}(C')$. Odatle, raširenje $\mathbf{K}/\mathbf{F}(C')$ jeste algebarsko i važi $C' \subseteq C$. Navedeno je dovoljno da zaključimo da je C' transcendentna baza i odatle $C' = C$. Na osnovu prethodnog razmatranja važi $|C| = |C'| = |\bigcup_{b\in B} C_b| \leq |B|$. Zamenom mesta B i C takođe važi $|B| \leq |C|$. Sveukupno, $|B| = |C|$. ■

Primer 1.7.15. *Za čista transcendentna raširenja koja su razmatrana u Primeru* 1.7.11. *važi:* $\mathrm{tr.deg}(\mathbf{K}(x_1,\ldots,x_n)/\mathbf{K}) = n$ *i* $\mathrm{tr.deg}(\mathbf{R}(x, \sin x, e^x)/\mathbf{R}) = 3$ [**64**].

Kao posledica prethodnog razmatranja, važi tvrđenje [**84**, str. 106]:

Teorema 1.7.16. *Neka je* S *transcendentna baza raširenja* $\mathbf{K}/\mathbf{F}$. *Tada je polje raširenja* $\mathbf{K} = \mathbf{F}(S)$ *izomorfno polju racionalnih funkcija* $\mathbf{F}(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$, *sa tačno* $|\Lambda| = \mathrm{tr.deg}(\mathbf{K}/\mathbf{F})$ *međusobno nezavisnih promenljivih.*

Na kraju, navodimo tvrđenje za računanje stepena transcendentnosti uzastopnih raširenja. Važi pomoćno tvrđenje.

Lema 1.7.17. *Neka su* $\boldsymbol{x}^{\alpha_1},\ldots,\boldsymbol{x}^{\alpha_r}$ *monomi u* $\mathbf{K}[x_1,\ldots,x_n]$ *sa međusobno različitim multistepenima. Tada je skup monoma* $\{\boldsymbol{x}^{\alpha_1},\ldots,\boldsymbol{x}^{\alpha_r}\}$ *linearno nezavisan skup.*

Dokaz. Tvrđenje se dokazuje matematičkom indukcijom po n. ■

Na osnovu prethodnog sleduje tvrđenje [**105**, str. 3]:

Teorema 1.7.18. *Za raširenja* $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ *i* $\mathbf{K}/\mathbf{F}$ *važi:*

$$\mathrm{tr.deg}(\mathbf{E}/\mathbf{F}) = \mathrm{tr.deg}(\mathbf{E}/\mathbf{K}) + \mathrm{tr.deg}(\mathbf{K}/\mathbf{F}).$$

Dokaz. Neka je T transcendentna baza za raširenje $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ i neka je S transcendentna baza za raširenje $\mathbf{K}/\mathbf{F}$. Dokazujemo da je $S \cup T$ transcendentna baza za raširenje $\mathbf{E}/\mathbf{F}$. Primetimo da je $T \cap F = \emptyset$, odatle $S \cap T = \emptyset$. Samim tim, $|S \cup T| = |S| + |T|$. Raširenja $\mathbf{E}/\mathbf{K}(T)$ i $\mathbf{K}/\mathbf{F}(S)$ su algebarska. Odatle je i $\mathbf{K}(T)/\mathbf{F}(S)(T)$ algebarsko raširenje. Sad iz $\mathbf{F}(S)(T) = \mathbf{F}(S \cup T)$ i prethodnog proizilazi da je $\mathbf{E}/\mathbf{F}(S \cup T)$

algebarsko raširenje. Za dokaz teoreme dovoljno je dokazati da je $S \cup T$ algebarski nezavisan skup. Pretpostavimo suprotno: da za $x_1, \ldots, x_n \in S$ i $y_1, \ldots, y_m \in T$ važi:

$$\mathfrak{p}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \tag{1}$$

za neki nenula polinom $\mathfrak{p} \in F[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$. Tada je:

$$\mathfrak{p}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = \sum_{i \in I} \mathfrak{q}_i(y_1, \ldots, y_m) x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}, \tag{2}$$

za neke $\mathfrak{q}_i \in F[y_1, \ldots, y_m]$, gde je $I \subset N_0^n$ konačan skup multistepena. Prema prethodnoj lemi iz (1) i (2), na osnovu algebarske nezavisnosti elemenata $x_1, \ldots, x_n$, sleduje da za svako $i \in I$ važi $\mathfrak{q}_i(y_1, \ldots, y_m) = 0$. Odatle, na osnovu algebarske nezavisnosti elemenata $y_1, \ldots, y_m$ dolazimo do zaključka da su za svako $i \in I$ polinomi $\mathfrak{q}_i$ nula polinomi. Odatle je i $\mathfrak{p}$ nula polinom, tj. skup $S \cup T$ je algebarski nezavisan. Konačno, tvrđenje je dokazano. ■

1.8 Eliminacija kvantora u algebarski zatvorenim poljima

Teorija T jezika L dopušta eliminaciju kvantora ukoliko za svaku formulu φ jezika L postoji formula ψ jezika L, koja ne sadrži kvantore i za koju važi:

$$T \vdash \varphi \Longleftrightarrow \psi.$$

Primer 1.8.1. *Egzistencijalna formula*:

$$(\exists x \in R)(ax^2 + bx + c = 0) \tag{φ}$$

u zavisnosti od realnih parametara a, b, c određuje da li jednačina $ax^2 + bx + c = 0$ ima realna rešenja. Kao što je pokazano u [**77**, str. 55–56], rešen oblik jednačine (φ) *je dat disjunkcijom*:

$$\begin{aligned}
& \Big(a \neq 0 \;\wedge\; b^2 - 4a < 0\Big) \\
\vee\;& \Big(a \neq 0 \;\wedge\; b^2 - 4ac \geq 0 \;\wedge\; x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\Big) \\
\vee\;& \Big(a \neq 0 \;\wedge\; b^2 - 4ac \geq 0 \;\wedge\; x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\Big) \\
\vee\;& \Big(a = 0 \;\wedge\; b \neq 0 \;\wedge\; x = -\frac{c}{a}\Big) \\
\vee\;& \Big(a = 0 \;\wedge\; b = 0 \;\wedge\; c = 0 \;\wedge\; x = x\Big) \\
\vee\;& \Big(a = 0 \;\wedge\; b = 0 \;\wedge\; c \neq 0\Big).
\end{aligned}$$

Samim tim, polazna formula je ekvivalentna sa sledećom bezkvantorskom formulom:

$$\Big(a \neq 0 \;\wedge\; b^2 - 4ac \geq 0\Big) \vee \Big(a = 0 \;\wedge\; b \neq 0\Big) \vee \Big(a = 0 \;\wedge\; b = 0 \;\wedge\; c = 0\Big). \tag{ψ}$$ ■

Teorija algebarski zatvorenih polja ACF se definiše kao teorija polja u kojoj, pored aksioma **1−10.** teorije polja, važi i beskonačan niz aksioma:

$$(\forall a_0)(\forall a_1)\ldots(\forall a_n)\big(a_n \neq 0 \Longrightarrow (\exists x)(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0)\big),$$

za prirodan broj $n \geq 1$ [**109**, str. 399]. Polje kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ i polje algebarskih brojeva $\mathbf{A}$ jesu primeri algebarski zatvorenih polja. Neka je $\mathbf{K}$ ma koje algebarski zatvoreno polje. Neka su $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ literali[3] nad poljem $\mathbf{K}$. Dokazujemo da za svaku formulu φ oblika:

$$(1) \qquad (\exists x)\big(\alpha_0 \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n\big)$$

postoji bezkvantorska formula ψ, takva da je $\phi \Longleftrightarrow \psi$.

Postupak eliminacije kvantora u algebarski zatvorenim poljima, koji dalje izlažemo, dat je prema [**110**] i [**111**], a potiče od [**34**]. Termi su polinomi, koje razmatramo po promenljivoj x. Budući da je u algebarski zatvorenim poljima svaki literal ili jednakost ili različitost, tada (1) možemo razmatrati u obliku:

$$(2) \qquad (\exists x)\big(\mathtt{p}_1(x)=0 \wedge \ldots \wedge \mathtt{p}_n(x)=0 \ \wedge\ \mathtt{q}_1(x)\neq 0 \wedge \ldots \wedge \mathtt{q}_m(x)\neq 0\big),$$

za neke polinome $\mathtt{p}_1, \ldots, \mathtt{p}_n, \mathtt{q}_1, \ldots, \mathtt{q}_n \in K[x]$. Korišćenjem sledeće ekvivalencije $\mathtt{q}_i(x)\neq 0 \ \wedge\ \mathtt{q}_{i+1}(x)\neq 0 \Longleftrightarrow \mathtt{q}_i(x)\mathtt{q}_{i+1}(x)\neq 0$, prethodna formula se može razmatrati u obliku sa najviše jednom različitošću:

$$(3) \qquad (\exists x)\big(\mathtt{p}_1(x)=0 \wedge \ldots \wedge \mathtt{p}_n(x)=0 \ \wedge\ \mathtt{q}(x)\neq 0\big),$$

za $\mathtt{q} = \mathtt{q}_1 \cdot \ldots \cdot \mathtt{q}_m$. Sledeći korak je redukcija n jednakosti u prethodnoj formuli na najviše jednu jednakost, primenom algoritma pseudodeljenja polinoma koji je razmatran u sekciji **1.2.**

Neka su dati polinomi $\mathtt{p}_1, \ldots, \mathtt{p}_n \in C[x]$ i neka polinom $\mathtt{p}(x) = \mathtt{p}_n(x)$ ispunjava $\deg_x \mathtt{p}(x) < \deg_x \mathtt{p}_i(x)$ za $i \in \{1, 2, \ldots, n–1\}$. Posmatrajmo nad poljem $\mathbf{C}$ konjunkciju:

$$(4) \qquad \mathtt{p}(x)=0 \ \wedge\ \bigwedge_{i=1}^{n-1} \mathtt{p}_i(x)=0.$$

Neka je polinom $\mathtt{p}(x)$ sa vodećim koeficijentom $\mathtt{a}$. Na osnovu niza polinoma:

$$(5) \qquad \mathtt{p}_1(x), \mathtt{p}_2(x), \ldots, \mathtt{p}_{n-1}(x),$$

pseudodeljenjem redom sa polinomom $\mathtt{p}(x)$ dobijamo niz pseudo-ostataka:

$$(6) \qquad \mathtt{r}_1(x), \mathtt{r}_2(x), \ldots, \mathtt{r}_{n-1}(x).$$

[3]literali su atomične formule ili negacije atomičnih formula

Naime, tada važe jednakosti:

$$a^{k_i}p_i(x) = q_i(x)\,p(x) + r_i(x), \tag{7}$$

za neke pseudokoličnike $q_i(x)$, pseudo-ostatke $r_i(x)$ i prirodne brojeve k_i za indekse $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Predstavimo polinom $p(x)$ na sledeći način:

$$p(x) = ax^m + \overline{p}(x), \tag{8}$$

tj. kao sumu vodećeg terma ax^m i polinoma $\overline{p}(x)$ $\big(\deg_x \overline{p}(x) < m = \deg_x p(x)\big)$. Vodeći koeficijent a polinoma $p(x)$ je polinom po drugim promenljivima ili konstanta. Ako je $a = 0$, tada je $p(x) = p$ konstanta koja je ili jednaka nuli ili različita od nule. Ukoliko je $a \neq 0$, tada imamo redukcionu ekvivalenciju:

$$p(x) = 0 \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{n-1} p_i(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) = 0 \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{n-1} r_i(x) = 0. \tag{9}$$

Na osnovu prethodnog razmatranja konjukciju (4) zamenjujemo sa disjunkcijom:

$$\underbrace{\Big(a = 0 \wedge p(x) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} p_i(x) = 0\Big)}_{(10/1)} \vee \underbrace{\Big(a \neq 0 \wedge p(x) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} r_i(x) = 0\Big)}_{(10/2)}. \tag{10}$$

Ukoliko u prethodnoj konjukciji (10) važi $a = 0$ i $p(x) = p = 0$, tada se prvi član konjukcije (10/1) svodi na konjukciju oblika: $p_1(x) = 0 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ p_{n-1}(x) = 0$. Tako dobijena konjukcija je oblika (4) i ima $n-1$ član. Inače, ako je $a = 0$ i $p(x) = p \neq 0$, konjukcija (10) je netačna. Za $a \neq 0$ se razmatra drugi član konjukcije (10/2) koji se svodi na konjukciju oblika $p(x) = 0 \ \wedge \ r_1(x) = 0 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ r_{n-1}(x) = 0$. Tako dobijena konjukcija je oblika (4) i ima n članova, pri tom $n-1$ polinoma $r_1(x), \ldots, r_{n-1}(x)$ jeste strogo manjeg stepena od m stepena polinoma $p(x)$. Prethodni postupak pseudodeljenja se ponavlja konačan broj koraka, sve dok se konjukcija (4) ne svede na jednu polinomsku jednakost:

$$p(x) = 0, \tag{11}$$

po promenljivoj x. Na taj način, umesto (3) možemo razmatrati slučaj najviše jedne jednakosti i jedne različitosti:

$$(\exists x)(p(x) = 0 \wedge q(x) \neq 0). \tag{12}$$

Dalje, vezano za formulu (12), mogući su sledeći slučajevi:

1. Neka je formula (12) ekvivalentna formuli:

$$(\exists x)(\mathfrak{p}(x) = 0), \tag{13}$$

za neki polinom $\mathfrak{p}(x) = \mathfrak{a}_m x^m + \ldots + \mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{a}_0 = 0$. Budući da se formula odnosi na modele teorije algebarski zatvorenih polja, tada je (13) ekvivalentna sa bezkvantorskom formulom ψ:

$$\bigvee_{i=1}^{m} \mathfrak{a}_i \neq 0 \ \vee \ \mathfrak{a}_0 = 0. \tag{14}$$

2. Neka je formula (12) ekvivalentna formuli:

$$(\exists x)(\mathfrak{q}(x) \neq 0), \tag{15}$$

za neki polinom $\mathfrak{q}(x) = \mathfrak{b}_k x^k + \ldots + \mathfrak{b}_1 x + \mathfrak{b}_0 = 0$. S obzirom da se formula odnosi na modele teorije algebarski zatvorenih polja, prethodna formula je ekvivalentna sa postojanjem x tako da $\mathfrak{q}(x) = 1 (\neq 0)$. Samim tim, formula (15) je ekvivalentna sa činjenicom da $\mathfrak{q}(x)$ nije nula polinom, a to zapisujemo bezkvantorskom formulom ψ:

$$\bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{b}_i \neq 0 \ \vee \ \mathfrak{b}_0 \neq 0. \tag{16}$$

3. Posmatrajmo formulu (12) koja je ekvivalentna tvrđenju da za polinome:

$$\mathfrak{p}(x) = \sum_{i=0}^{m} \mathfrak{a}_i x^i \quad \text{i} \quad \mathfrak{q}(x) = \sum_{i=0}^{k} \mathfrak{b}_i x^i \tag{17}$$

postoji koren $\mathfrak{c}$ polinoma $\mathfrak{p}(x)$ koji nije koren polinoma $\mathfrak{q}(x)$. Koeficijenti prethodnih polinoma $\mathfrak{a}_i$ i $\mathfrak{b}_j$ su takvi da $\mathfrak{a}_m \neq 0$ i $\mathfrak{b}_k \neq 0$. Budući da se formula odnosi na modele teorije algebarski zatvorenih polja, polinomi $\mathfrak{p}(x)$ i $\mathfrak{q}(x)$ imaju linearnu faktorizaciju:

$$\mathfrak{p}(x) = \mathfrak{a}_m (x - \mathfrak{c}_1) \cdot \ldots \cdot (x - \mathfrak{c}_m) \tag{18}$$

i

$$\mathfrak{q}(x) = \mathfrak{b}_k (x - \mathfrak{d}_1) \cdot \ldots \cdot (x - \mathfrak{d}_k), \tag{19}$$

za korene $\mathfrak{c}_i$ i $\mathfrak{d}_j$ koji se mogu i ponavljati $\big(i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, k\}\big)$. Pretpostavimo da ne važi formula (12), tj. da je tačno:

$$\neg(\exists x)(\mathfrak{p}(x) = 0 \wedge \mathfrak{q}(x) \neq 0). \tag{20}$$

Zatim, na osnovu:

$$\neg(\exists)(\mathfrak{p}(x) = 0 \wedge \mathfrak{q}(x) \neq 0) \iff (\forall x)(\mathfrak{p}(x) = 0 \implies \mathfrak{q}(x) = 0), \tag{21}$$

ako je tačna formula (20), tada se svaki koren $\mathfrak{c}_i$ podudara sa nekim korenom $\mathfrak{d}_j$. Specijalno, za koren $\mathfrak{c}_i$ polinoma $\mathfrak{p}(x)$, višestrukosti $\nu \leq m$, važi $(x - \mathfrak{c}_i)^\nu \mid \mathfrak{q}(x)^\nu$. Znači da na osnovu (20) sleduje:

$$\mathfrak{p}(x) \mid \mathfrak{b}_k \mathfrak{q}(x)^m, \tag{22}$$

bez obzira na stepen $k = \deg_x \mathfrak{q}(x)$. Primetimo da je uslov (22), na osnovu ekvivalencije (21), ekvivalentan sa uslovom (20). Odatle dobijamo zaključak:

$$(\exists x)(\mathfrak{p}(x) = 0 \wedge \mathfrak{q}(x) \neq 0) \iff \mathfrak{p}(x) \nmid \mathfrak{b}_k \mathfrak{q}(x)^m. \tag{23}$$

Dalje, možemo pseudopodeliti $\mathfrak{b}_k \mathfrak{q}(x)^m$ sa $\mathfrak{p}(x)$:

$$\mathfrak{b}_k^{k+1} \mathfrak{q}(x)^m = \hat{\mathfrak{q}}(x) \cdot \mathfrak{p}(x) + \hat{\mathfrak{r}}(x), \tag{24}$$

sa nekim pseudo-ostatakom $\hat{\mathfrak{r}}(x)$ koji ispunjava $\deg_x \hat{\mathfrak{r}} < \deg_x \mathfrak{p}$. Budući da $\mathfrak{b}_k \neq 0$ nije polinom po promenljivoj x, tada:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}(x) \nmid \mathfrak{b}_k \mathfrak{q}(x)^m &\iff \mathfrak{p}(x) \nmid \mathfrak{b}_k^{k+1} \mathfrak{q}(x)^m \\ &\underset{(24)}{\iff} \mathfrak{p}(x) \nmid \hat{\mathfrak{r}}(x). \end{aligned} \tag{25}$$

Konačno, iz prethodnog proizilazi:

$$\big((\exists x)\mathfrak{p}(x) = 0 \ \wedge \ \mathfrak{q}(x) \neq 0)\big) \iff (\exists x)\hat{\mathfrak{r}}(x) \neq 0, \tag{26}$$

što je razmatrano u slučaju **2.**

Dajemo kratko objašnjenje zašto je dovoljno izvršiti eliminaciju kvantora samo u formuli oblika (1). Naime, svaku predikatsku formulu možemo razmatrati u preneks normalnom obliku $(Q_1)(Q_2)...(Q_n)M$ $\big(Q_i-$kvantori i $M-$matrica formule$\big)$. Tada za $i := n, \ldots, 1$ svaki univerzalni kvantor Q_i prevodimo u egzistencijalni Q_i. Potom, matricu formule prevodimo u disjunktivnu normalnu formu. To nam omogućuje da prođemo egzistencijalnim kvantorom Q_i disjunkcije. Prethodno opisanim algoritmom eliminišemo svaki egzistencijalni kvantor koji deluje na konjukcije literala.

Na kraju, napomenućemo nekoliko činjenica u vezi sa eliminacijom kvantora u teoriji algebarski zatvorenih polja. Neka je algebarsko zatvoreno polje $\mathbf{K}$ karakteristike p, gde je p određeno ili kao nula ili kao prost broj. Tada, po prethodno opisanoj eliminaciji kvantora, kada su svi kvantori eliminisani, dobijamo bulovsku kombinaciju oblika $z = 0$, odnosno $z \neq 0$, za neki ceo broj z (posmatranu u prstenu celih brojeva datog polja). Za takvu bulovsku kombinaciju, u datoj karakteristici p, moguće je odrediti istinitosnu vrednost. Dakle, važi tvrđenje:

Teorema 1.8.2. *Teorija algebarski zatvorenih polja* ACF0 *odnosno* ACFp*, date karakteristike* 0 *odnosno* $p-$*prost broj, dopušta eliminaciju kvantora i predstavlja kompletnu teoriju.*

U opštem slučaju, ako nije određena karakteristika algebarski zatvorenog polja, nije moguće odrediti istinitosnu vrednost bulovske kombinacije posle eliminacija kvantora. Saglasno definiciji kompletne teorije iz sekcije **2.3.** zaključujemo:

Teorema 1.8.3. *Teorija algebarski zatvorenih polja* ACF *nije kompletna teorija.*

Na kraju, napomenimo da se razna tvrđenja mogu dokazati u teoriji zatvorenih polja, poput VIETEovih formula:

$$(27)\quad \big(ax^2+bx+c=0 \,\wedge\, ay^2+by+c=0 \,\wedge\, x\neq y\big) \Longrightarrow \big(axy=c \,\wedge\, a(x+y)=-b\big).$$

Širi spisak sličnih tvrđenja, od kojih su neka dokazana u teoriji algebarski zatvorenih polja, dat je u [**122**]. Napomenimo da postoji više postupaka eliminacije kvantora u algebarski zatvorenim poljima. Jedan drugačiji postupak eliminacije je dat uz upotrebu rezolventi u [**57**].

1.9 Lürothova teorema

U ovom delu dokazaćemo sledeću opštiju formu LÜROTHove teoreme u odnosu na formulaciju koja data Teoremom 1.7.3.. Naime, važi tvrđenje [**89**, str. 35]:

Teorema 1.9.1. *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{L}$ *i neka je element* $x\in K$ *transcendentan nad poljem* $\mathbf{L}$*. Svako međupolje* $\mathbf{L}_1$*, takvo da je* $L\subset L_1\subseteq L(x)$*, ima oblik* $\mathbf{L}_1=\mathbf{L}(y)$ *za neki element* y *koji predstavlja vrednost nekog nekonstantnog polinoma po* x *nad* $\mathbf{L}$*, tj.* $y\in L[x]$*.*

Dokaz. Na početku dokaza pretpostavimo da je y proizvoljni element iz $L(x)\backslash L$. Tada prema Napomeni 1.7.2. važi

$$(1)\qquad y=\frac{\mathfrak{p}(x)}{\mathfrak{q}(x)},$$

za neke polinome $\mathfrak{p}(x),\mathfrak{q}(x)\in L[x]$. Označimo sa $m=\max\{\deg\mathfrak{p}(x),\deg\mathfrak{q}(x)\}$; tada je $m\geq 1$. U jednakosti (1) pretpostavljamo da su $\mathfrak{p}(x)$ i $\mathfrak{q}(x)$ uzajamno prosti polinomi. Dalje, iz (1) zaključujemo da važi

$$(2)\qquad \mathfrak{p}(x)-\mathfrak{g}(x)\cdot y=0,$$

što je, na osnovu činjenice da $y\notin L$, dovoljno da zaključimo da za polinom

$$(3)\qquad \mathfrak{k}=\mathfrak{k}(X)=\mathfrak{p}(X)-\mathfrak{q}(X)\cdot y\in L(y)[X]$$

važi

$$\deg\big(\Bbbk(X)\big) = m. \tag{4}$$

Primetimo da iz (2) zaključujemo da je x algebarski nad poljem $\mathbf{L}(y)$, jer je nula polinoma $\Bbbk(X)$. Dalje, u dokazu koristimo činjenicu da je y transcendentan element nad $\mathbf{L}$. Zaista, ako bi element y bio algebarski nad $\mathbf{L}$, tada bi na osnovu (1) element x bio algebarski element nad $\mathbf{L}$, što je nemoguće. Pri tom, iz transcendentnosti elementa y nad $\mathbf{L}$, na osnovu Teoreme 1.7.1., $\mathbf{L}[y]$ možemo shvatiti kao prsten polinoma. Stoga, polinom $\Bbbk(X)$ iz $L[y,X]$ može imati samo jedan linearan faktor po y. Iz nesvodljivosti razlomka (1) proizilazi nesvodljivost polinoma $\Bbbk(X)$. Odatle

$$|L(x) : L(y)| = m. \tag{5}$$

Dalje, prema prethodnom razmatranju element x je algebarski nad poljem $\mathbf{L}(y)$, a samim tim i nad posmatranim potpoljem $\mathbf{L}_1$ $\big(\mathbf{L} \leq \mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}(x)\big)$. Označimo sa n stepen minimalnog polinoma

$$\hbar = \hbar(X) = X^n + y_1(x)X^{n-1} + \ldots + y_{n-1}(x)X + y_0(x) \in L[X] \tag{6}$$

elementa x nad poljem $\mathbf{L}_1$, sa nekim racionalnim koeficijentima

$$y_i = y_i(x) = \frac{\mathfrak{p}_i(x)}{\mathfrak{q}_i(x)} \in L(x), \tag{7}$$

za $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Na osnovu minimalnosti polinoma $\hbar(X)$ važi

$$|\mathbf{L}(x) : \mathbf{L}_1| = n. \tag{8}$$

Sad iz

$$\underbrace{|\mathbf{L}(x) : \mathbf{L}(y)|}_{=m} = \underbrace{|\mathbf{L}(x) : \mathbf{L}_1|}_{=n} \cdot |\mathbf{L}_1 : \mathbf{L}(y)| \tag{9}$$

zaključujemo

$$|\mathbf{L}_1 : \mathbf{L}(y)| = \frac{m}{n}. \tag{10}$$

Dokazaćemo da postoji $y \in L(x)$ tako da tada u prethodnoj jednakosti važi $m = n$, tj. $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}(y)$. Prvo, primetimo da koeficijenti $y_i = y_i(x) \in L_1 \subseteq L(x)$ polinoma $\hbar(X)$ nisu svi u skupu L, jer je x transcendentan element nad $\mathbf{F}$. Samim tim, postoji indeks k takav da

$$y = y_k(x) = \frac{\mathfrak{p}_k(x)}{\mathfrak{q}_k(x)} \in L(x) \backslash L. \tag{11}$$

Za tako određen element y zadržavamo oznake iz prethodnog dela dokaza. Dalje, primetimo da je element x koren minimalnog polinoma $h(X)$ kao i polinoma $k(X)$. Samim tim, postoji polinom $s(x,X)$ tako da

$$k(X) = s(x,X) \cdot h(X). \tag{12}$$

Budući da je element y oblika (11), tada važi dvojna jednakost

$$k(X) = p_k(X) - q_k(X) \cdot \underbrace{\frac{p_k(x)}{q_k(x)}}_{=y} = s(x,X) \cdot h(X), \tag{13}$$

što dovodi do

$$q_k(x)k(X) = p_k(X)q_k(x) - q_k(X)p_k(x) = q_k(x)s(x,X) \cdot h(X). \tag{14}$$

Formirajmo polinom

$$r(x) = q_0(x)q_1(x)\ldots q_{n-1}(x), \tag{15}$$

kojim ćemo izvršiti množenje dvojne jednakosti (14). Na taj način dobijamo

$$r(x)q_k(x)k(X) = q_k(x)s(x,X) \cdot \underline{r(x)h(X)}, \tag{16}$$

gde je

$$\begin{aligned} \underline{r(x)h(X)} \;&=\; q_0(x)\ldots q_{n-1}(x)X^n \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \big(q_0(x)\ldots q_{i-1}(x)q_{i+1}(x)\ldots q_{n-1}(x)\big)X^{n-i}. \end{aligned} \tag{17}$$

Dalje, iz (16) i (17) dobijamo

$$\begin{aligned} r(x)k(X) \;&=\; s(x,X) \cdot \Big(\underbrace{q_0(x)\ldots q_{n-1}(x)}_{(=r(x))}X^n \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \big(q_0(x)\ldots q_{i-1}(x)q_{i+1}(x)\ldots q_{n-1}(x)\big)X^{n-i}\Big). \end{aligned} \tag{18}$$

Na osnovu nesvodljivosti polinoma $k(X)$ proizilazi da je $s(x,X) = s(x)$ konstanta po promenljivoj X, tj. $n = m$. Primetimo na kraju da je u prethodnoj jednakosti sa leve strane faktor $r(x)$. Sa desne strane, jedini faktor je $s(x) \in L[x]$, jer desna strana nema drugih faktora po x. Na osnovu stepena polinoma po x na levoj i desnoj strani prethodne jednakosti, zaključujemo da je $s(x)$ takođe konstanta i po x. Znači da na levoj strani prethodne jednakosti $r(x)$ jeste polinomski faktor po x a na desnoj strani nema faktora po x. Navedeno je jedino moguće ako je $r(x) = 1$. Odatle sleduje konačan zaključak da je posmatrano međupolje $\mathbf{F}_1$ generisano sa jednim nekonstantnim polinomom po x nad $\mathbf{L}$. ■

Napomena 1.9.2. *Navedeni dokaz je dobijen dopunom dokaza* LÜROTH*ove teoreme, koji su navedeni u* [**48**] i [**68**].

U ovom delu, na osnovu članka [**66**], izložićemo geometrijsku tumačenje LÜROTHove teoreme. Neka su $t_1, \dots t_n$ realne promenljive, za koje pretpostavljamo da su linearno nezavisne nad $\mathbf{Q}$. Dalje, za data dva niza polinoma $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n \in Q[t_1, \dots, t_m]$, $(\mathfrak{q}_i \neq 0)$, formirajmo niz racionalnih funkcija:

$$\langle \mathfrak{p}/\mathfrak{q} \rangle \qquad x_1 = \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{q}_1}, \dots, x_n = \frac{\mathfrak{p}_n}{\mathfrak{q}_n} \in Q(t_1, \dots, t_m)$$

koji nazivamo *nizom parametarskih jednačina racionalne krive*. Pri tom, pretpostavljamo da nisu svi polinomi $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$ konstante i da svaka dva polinoma $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$ nemaju zajedničkih faktora. Posmatranom nizu parametarskih jednačina pridružimo *sliku niza parametarskih jednačina racionalne krive* u R^n kao sledeći skup:

$$\mathrm{IM}(\langle \mathfrak{p}/\mathfrak{q} \rangle) = \Big\{ (x_1, \dots, x_n) \,\Big|\, (\exists t \in R^m)\big(x_1 = \frac{\mathfrak{p}_1(t)}{\mathfrak{q}_1(t)} \wedge \dots \wedge x_n = \frac{\mathfrak{p}_n(t)}{\mathfrak{q}_n(t)}\big) \Big\}.$$

Niz parametarskih jednačina $\langle \mathfrak{p}/\mathfrak{q} \rangle$ je *odgovarajući* (*proper*) *niz parametarskih jednačina* ako je ispunjeno da za svako $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathrm{IM}(\langle \mathfrak{p}/\mathfrak{q} \rangle)$ postoji tačno jedno $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in R^m$, tako da je $\alpha_i = \mathfrak{p}_i(\tau)/\mathfrak{q}_i(\tau)$ $(i = 1, \dots, n)$. Pri tom, dodatno, dopuštamo za podskupove skupa $\mathrm{IM}(\langle \mathfrak{p}/\mathfrak{q} \rangle)$, čija je dimenzija manja od n, da prethodni uslov jednoznačnosti nije ispunjen. XIAO-SHAN GAO i SHANG-CHING CHOU u radu [**66**] dokazali su, na osnovu LÜROTHove teoreme, da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.9.3. *Ako niz parametarskih jednačina* $\langle \mathfrak{p}/\mathfrak{q} \rangle$ *sa jednim parametrom* t_1 $(m = 1)$ *nije odgovarajući, tada je moguće naći novi parametar* $u_1 = \mathfrak{r}(t_1)/\mathfrak{s}(t_1)$, *za* $\mathfrak{r}, \mathfrak{s} \in Q[t_1]$, $(\mathfrak{s} \neq 0)$, *sa kojim se dobija odgovarajući niz parametarskih jednačina racionalne krive*:

$$x_1 = \frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{s}_1}, \dots, x_n = \frac{\mathfrak{r}_n}{\mathfrak{s}_n} \in Q(u_1).$$

Napomena 1.9.4. *Napomenimo da rad* [**66**] *predstavlja dopunu geometrijskog tumačenja koje je dato u knjizi* [**42**, str. 253–254]. *Takođe, rad* [**66**] *predstavlja i prirodni nastavak samog* LÜROTH*ovog rada* [**2**] *iz* 1876. *godine, koji se odnosio na racionalne krive.*

Prvo algebarsko uopštenje rezultata J. LÜROTHa [**2**] potiče od P. GORDANA [**4**] iz 1887. godine. Naime, iz GORDANovog rada proizilazi da za polja nulte karakteristike važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.9.5. *Neka je* $\mathbf{L}$ *polje i* $\mathbf{L}(x_1, \dots, x_n)$ *polje racionalnih funkcija. Za svako međupolje* $\mathbf{L}_1$, *takvo da* $L \subset L_1 \subseteq L(x_1, \dots, x_n)$, *stepena transcendentnosti* $\mathrm{tr.deg}(\mathbf{L}_1/\mathbf{L}) = 1$ *postoji* $y \in L(x_1, \dots, x_n)$, *tako da* $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}(y)$.

Prethodno tvrđenje, za polja proizvoljne karakteristiku, dokazao je J. IGUSA, 1951. godine [**20**]. Teorema 1.9.1. može da se uopšti u sledećem obliku:

Teorema 1.9.6. *Neka je* $\mathbf{L}$ *polje i* $\mathbf{L}(x_1,\ldots,x_n)$ *polje racionalnih funkcija i neka međupolje* $\mathbf{L}_1$*, takvo da* $L\subset L_1\subseteq L(x_1,\ldots,\,x_n)$*, sadrži nekonstantne polinome. Ako je stepen transcendentnosti* $\mathrm{tr.deg}(\mathbf{L}_1/\mathbf{L})=1$*, tada postoji* $y\in L[x_1,\ldots,x_n]$ *tako da* $\mathbf{L}_1=\mathbf{L}(y)$*.*

Navedeno tvrđenje sleduje za polja nulte karakteristike na osnovu rada E. NOETHER iz 1915. godine [**7**], a za polja proizvoljne karakteristike tvrđenje je dokazao A. SCHINZEL 1963. godine [**26**]. Na kraju ove sekcije istaknimo da je na osnovu LÜROTHove teoreme I. GUSIĆ 2000. godine u [**87**] dokazao sledeće tvrđenje koje se odnosi na algebarsku zavisnost polinoma nad algebarski zatvorenim poljem. Naime, važi tvrđenje:

Teorema 1.9.7. *Neka je* $\mathbf{K}$ *algebarski zatvoreno polje i* $\mathbf{H}$ *jedno njegovo raširenje. Ako su* $\mathfrak{p},\mathfrak{q}\in H[x]$ *dva nekonstantna polinoma, tada su* $\mathfrak{p}$ *i* $\mathfrak{g}$ *algebarski zavisni nad* $\mathbf{K}$ *ako i samo ako postoji polinom* $\mathfrak{h}\in K[x]$ *takav da* $\mathfrak{p}\in K[\mathfrak{h}]$ *i* $\mathfrak{g}\in K[\mathfrak{h}]$*.*

2 TEORIJA DIFERENCIJALNIH POLJA

2.1 Modeli, elementarna ekvivalencija modela

Jezik L predikatskog računa određuje se unijom $L = \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$, gde je $\mathcal{R}$ skup simbola relacija jezika, $\mathcal{F}$ skup simbola funkcija jezika i $\mathcal{C}$ skup simbola konstanti jezika. Za jezik L posebno se formira skup promenljivih $\mathcal{V}$. Nad skupom $\mathcal{C} \cup \mathcal{V}$ pomoću funkcija jezika formira se skup *termova*. Potom, formiraju se *atomične formule* kao algebarski zakoni jednakosti dva terma ili kao *elementarne formule* određene kao relacije nad konačnim skupom termova. Nad skupom atomičnih formula pomoću logičkih veznika $\vee$, $\wedge$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\neg$ i kvantora $\forall$ i $\exists$ formiraju se *predikatske formule*. Za jezik L, označimo sa Sent_L skup predikatskih formula bez slobodnih promenljivih. Takve formule nazivamo *rečenice*. Podskup $T \subseteq \mathrm{Sent}_L$ određuje *teoriju*. Same rečenice iz T nazivaju se *specijalne aksiome teorije* T.

Neka je zadana teorija T na jeziku L predikatskog računa. Algebarska struktura

$$\mathbb{A} = (A, \mathcal{R}_A, \mathcal{F}_A, \mathcal{C}_A) \tag{1}$$

jeste *model*, ako postoji interpretacija $\mathcal{J} : L \longrightarrow L_A = \mathcal{R}_A \cup \mathcal{F}_A \cup \mathcal{C}_A$ tako da se svaka relacija iz L interpretira relacijom iste ar-nosti iz L_A, svaka funkcija iz L interpretira funkcijom iste ar-nosti iz L_A i svaka konstanta iz L interpretira konstantom iz L_A. Samim tim

$$\mathbb{A} = (A, \mathcal{J}(s))_{s \in L}. \tag{2}$$

Ako imamo dva predikatska jezika L_1 i L_2 takva da $L_1 \subseteq L_2$, i algebarsku strukturu $\mathbb{A}$ datu sa (1), tada možemo formirati dva modela $\mathbb{A}_1 = (A, \mathcal{J}(s))_{s \in L_1}$ i $\mathbb{A}_2 = (A, \mathcal{J}(s))_{s \in L_2}$. U tom slučaju $\mathbb{A}_1$ je *suženje modela* $\mathbb{A}_2$; odnosno $\mathbb{A}_2$ je *raširenje modela* $\mathbb{A}_1$. Sa druge strane, neka su nad istim predikatskim jezikom L data dva modela $\mathbb{A} = (A, \mathcal{J}(s))_{s \in L}$ i $\mathbb{B} = (B, \mathcal{J}(s))_{s \in L}$ tako da je $A \subseteq B$, svaka funkcija iz L_A se dobija kao restrikcija odgovarajuće funkcije iz L_B i svaka relacija iz L_B se dobija kao restrikcija odgovarajuće relacije iz L_A. Tada $\mathbb{A}$ je *podmodel* od $\mathbb{B}$, što označavamo $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$; odnosno $\mathbb{B}$ je *nadmodel* od $\mathbb{A}$, što označavamo $\mathbb{B} \geq \mathbb{A}$. Dalje, za dva modela $\mathbb{A} = (A, \mathcal{J}(s))_{s \in L}$ i $\mathbb{B} = (B, \mathcal{J}(s))_{s \in L}$, istog jezika L preslikavanje $\Phi : A \longrightarrow B$ predstavlja *homomorfizam modela* ako za svaku operaciju f, dužine k, važi $\Phi\big(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k)\big) = f^{\mathbb{B}}\big(\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_k)\big)$ i ako za svaku relaciju R, dužine

n, važi $R^{\mathbb{A}}\big(a_1,\ldots,a_n\big) \Longrightarrow R^{\mathbb{B}}\big(\Phi(a_1),\ldots,\Phi(a_n)\big)$. Ako je $\Phi : A \longrightarrow B$ injekcija, tada se radi o *utapanju modela* $\mathbb{A}$ *u model* $\mathbb{B}$, što označavamo $\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$. Ako je $\Phi : A \longrightarrow B$ bijekcija, tada se radi o *izomorfizmu modela* $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$, što označavamo $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$. Specijalno za model $\mathbb{A}$, izomorfizme $\Phi : A \longrightarrow A$ nazivamo *automorfizmima modela.*

Relacija zadovoljena u teoriji modela uvodi se u više koraka. Za model $\mathbb{A}$, prvo se uvodi *vrednost terma* t *pri valuaciji* $\mu : \mathrm{Var}_L \longrightarrow A$ induktivno po složenosti terma. Vrednost terma pri valuaciji označavamo sa $t^{\mathbb{A}}[\mu]$. Dalje, za model $\mathbb{A}$ uvodi se *relacija zadovoljnja predikatske formule* φ *pri valuaciji* $\mu : \mathrm{Var}_L \longrightarrow A$ induktivno po složenosti predikatske formule. Relaciju zadovoljenja formule pri valuaciji označavamo $\mathbb{A} \models \varphi[\mu]$ [**60**]. Specijalno, ako je φ rečenica iz Sent_L, tada $\top,\bot-$vrednost $\mathbb{A} \models \varphi[\mu]$ ne zavisi od valuacije $\mu : \mathrm{Var}_L \longrightarrow A$. Tako dobijenu vrednost označavamo $\mathbb{A} \models \varphi$. Dalje, za model $\mathbb{A}$ jezika L definišemo *teoriju modela* $\mathbb{A}$ kao sledeći skup

$$\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \{\varphi \in \mathrm{Sent}_L \mid \mathbb{A} \models \varphi\}.$$

Modeli $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ jezika L jesu *elemantarno ekvivalentni*, u oznaci $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$, ukoliko važi $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \mathrm{Th}(\mathbb{B})$. Tada kažemo da modeli $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ imaju ista svojstva prvog reda. Važe sledeća osnovna tvrđenja [**60**]:

Teorema 2.1.1. *Neka su dva modela $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jezika L međusobno izomorfna, tada su oni elementarno ekvivalentni.*

Teorema 2.1.2. *Neka su data dva modela $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jezika L, pri čemi je model $\mathbb{A}$ konačan; ako su modeli $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ elementarno ekvivalentni tada su oni međusobno izomorfni.*

Za dva modela $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jezika L, kažemo da je *model* $\mathbb{A}$ *elementarno umetnut u model* $\mathbb{B}$ ako postoji utapanje $g : A \longrightarrow B$, tako da za svaku formulu $\varphi \in \mathrm{Form}_L$ i svaku valuaciju domena A važi $\mathbb{A} \models \varphi[a_0,\ldots,a_n]$ akko $\mathbb{B} \models \varphi[g(a_0),\ldots,g(a_n)]$. Tada za preslikavanje g kažemo da ostvaruje *elementarno utapanje* $g : A \xrightarrow{\prec} B$. Specijalno, ako je $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$ i ako inkluziono preslikavanje $i_A : A \longrightarrow B$ $\big(i_A(x) = x,\ x \in A\big)$ ostvaruje elementarno utapanje, tada kažemo da je *model* $\mathbb{A}$ *elementaran podmodel od modela* $\mathbb{B}$, što označavamo $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$. Važe tvrđenja [**60**]:

Teorema 2.1.3. [Tarski$-$Vaught] *Neka za dva modela $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jezika L važi $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$ i za svaku formulu $\varphi = \varphi(x,y_1,\ldots,y_n)$ i sve $a_1,\ldots,a_n \in A$ važi:*

$$\mathbb{B} \models (\exists x \in B)\varphi(x,y_1,\ldots,y_n)[a_1,\ldots,a_n] \implies (\exists a \in A)\, \mathbb{B} \models \varphi[a,a_1,\ldots,a_n],$$

tada je $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$.

Za primenu Teoreme TARSKI−VAUGHTa dovoljno je da za modele $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ važi $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$ i da važi uslov da za sve $a_1, \ldots, a_n \in A$ i za svako $b \in B$ postoji automorfizam $f : B \longrightarrow B$ modela $\mathbb{B}$, tako da je: $f(a_1) = a_1, \ldots, f(a_n) = a_n$ i $f(b) = a$. Na osnovu toga proizilazi sledeći primer.

Primer 2.1.4. *Važi* $(Q, <) \prec (R, <)$ [**60**, str. 36] *i samim tim* $(Q, <) \equiv (R, <)$ (*videti Teoremu* 2.1.5.). *Pri tom* $(Q, <) \ncong (R, <)$ *jer ne postoji bijekcija između skupa realnih i racionalnih brojeva.*

Na kraju istaknimo da je veza između pojma elementarnih podmodela i pojma elementarne ekvivalencije data tvrđenjem:

Teorema 2.1.5. *Neka za dva modela* $\mathbb{A}$ *i* $\mathbb{B}$ *jezika* L *važi* $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$, *tada su oni elementarno ekvivalentni, tj.* $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.

2.2 Metod novih konstanti, dijagrami modela

Dualno *interpretaciji* $\mathcal{J} : L \longrightarrow L_A$ jezika L sa modelom $\mathbb{A} = (A, \mathcal{J}(s))_{s \in L}$ uvodi se *metod novih konstanti* (*imenovanje*). Za elemente domena $a \in A$, tada sa $\underline{a} \in \mathcal{C}_A$ određuje se *ime elementa* a. Za funkciju $f : A^k \longrightarrow A$, tada sa $\underline{f} \in \mathcal{C}_A$ određujemo *ime funkcije* f dužine k. Za reaciju $R \subseteq A^k$, tada sa $\underline{R} \in \mathcal{R}_A$ određujemo *ime relacije* R dužine k. Za formiran jezik $L_A = \mathcal{R}_A \cup \mathcal{F}_A \cup \mathcal{C}_A$ uvodimo *prirodnu interpretaciju elementa* $\underline{s} \in L_A$ *u domenu* A sa $\mathcal{J}(\underline{s}) = s$. Primetimo da važi $\mathcal{C}_A = A$. Za neke elemente domena $a_0, \ldots, a_n \in A$ dobijamo jezik $L' = L \cup \{\underline{a}_0, \ldots, \underline{a}_0\}$ kao jedno *prosto raširenje jezika* L. Tada model $\mathbb{A}' = (\mathbb{A}, a_0, \ldots, a_n)$ nazivamo *prostim raširenjem modela* $\mathbb{A}$ (*nastalo uvođenjem konačno mnogo novih konstanti*). Dalje važe tvrđenja [**60**, str. 29]:

Lema 2.2.1. *Neka je* $\mathbb{A}$ *model i za neke izabrane elemente domena* $a_0, \ldots, a_n \in A$ *neka je* $\mathbb{A}' = (\mathbb{A}, a_0, \ldots, a_n)$ *prosto raširenje modela. Tada za proizvoljni term* $t = t(x_0, \ldots, x_n)$ *važi*

$$t^{\mathbb{A}}[a_0, \ldots, a_n] = t^{\mathbb{A}'}[\underline{a}_0, \ldots, \underline{a}_n].$$

Teorema 2.2.2. *Neka je* $\mathbb{A}$ *model i za neke izabrane elemente* $a_0, \ldots, a_n \in A$ *neka je* $\mathbb{A}' = (\mathbb{A}, a_0, \ldots, a_n)$ *prosto raširenje modela. Tada za proizvoljnu predikatsku formulu* $\varphi = \varphi(x_0, \ldots, x_n)$ *važi*

$$\mathbb{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_n] \ \textit{akko} \ \mathbb{A}' \models \varphi[\underline{a}_0, \ldots, \underline{a}_n].$$

Neka je $\mathbb{A}$ model jezika L i $X \subseteq A$. Dalje, razmotrimo skup izabranih elemenata domena $X \in A$ sa kojima dobijamo jezik $L' = L \cup \{\underline{a} \ | a \in X \ \}$ kao jedno *prosto raširenje jezika* L (*nastalo uvođenjem familije novih konstanti*). Tada je $\mathbb{A}' =$

$(\mathbb{A}, a)_{a \in X}$ *prosto raširenje modela* $\mathbb{A}$. Pod *dijagramom modela* $\mathbb{A}$ podrazumevaćemo skup

$$\Delta_{\mathbb{A}} = \{\varphi \in \mathrm{Sent}_{L_A} \mid \mathbb{A} \models \varphi \text{ i } \varphi \text{ je literal}\}$$

gde je *literal* formula određena kao ili atomična formula ili negacija atomične formule. Dalje, pod *elementarnim dijagramom modela* $\mathbb{A}$ podrazumevaćemo skup

$$\mathrm{Th}(\mathbb{A}, a)_{a \in A} = \{\varphi \in \mathrm{Sent}_{L_A} \mid (\mathbb{A}, a)_{a \in A} \models \varphi\}.$$

Primetimo da dopunom dijagrama sa tačnim rečenicama dobijamo elementarni dijagram. Navodimo jedan takav primer prema [**55**, str. 309-310]:

Primer 2.2.3. *Razmotrimo realno uređeno polje* $\mathbb{R} = (R, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ *kao model jezika* $L = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$. *Tada dijagram modela* $\mathbb{R}$ *određujemo kao skup (popis) rečenica* $\Delta_{\mathbb{R}}$ *koje su zadovoljene u modelu* $\mathbb{R}$ *tako da predstavljaju atomične formule npr.* $1+2=3$, $1<\pi$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}, \ldots$ *ili negacije atomičnih formula npr.* $\neg(1=2)$, $\neg(\pi \leq 1)$, $\neg(2=e), \ldots$. *Dijagram* $\Delta_{\mathbb{R}}$, *kao skup (popis), proširujemo do elementarnog dijagrama* $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, r)_{r \in R}$ *rečenicama koje određuju teoriju modela* $(\mathbb{R}, r)_{r \in R}$, *npr.* $(\exists x \in R)(x^2 - 2 = 0)$, $(\forall x \in R)(\forall y \in R)(\exists z \in R)(x < y \Longrightarrow (x < z \wedge z < y)), \ldots$. *Primetimo da rečenica* $(\forall x \in R)(x \cdot 0 = 0)$ *pripada elementarnom dijagramu od* $\mathbb{R}$, *a nije u dijagramu od* $\mathbb{R}$ *jer nije literal (atomična formula ili negacija atomične formule). Koristeći se prethodnim elementarnim dijagramom od* $\mathbb{R}$ *može se pokazati, uz upotrebu stava potpunosti, da postoji model za nestandardan model realnog uređenog polja.*

Preko dijagrama modela, odnosno elementarnog dijagrama modela, imamo karakterizaciju utapanja modela, odnosno elementarnog utapanja modela. Naime, važe tvrđenja [**60**, str. 90]:

Teorema 2.2.4. *Neka su* $\mathbb{A}$ *i* $\mathbb{B}$ *modeli jezika* L. *Tada se model* $\mathbb{A}$ *utapa u model* $\mathbb{B}$, *u oznaci* $\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$, *ako model* $\mathbb{B}$ *ima prostu ekspanziju* $(\mathbb{B}, b_a)_{a \in A}$ *takvu da je* $(\mathbb{B}, b_a)_{a \in A} \models \Delta_{\mathbb{A}}$.

Teorema 2.2.5. *Neka su* $\mathbb{A}$ *i* $\mathbb{B}$ *modeli jezika* L. *Tada se model* $\mathbb{A}$ *elementarno utapa u model* $\mathbb{B}$, *u oznaci* $\mathbb{A} \xrightarrow{\prec} \mathbb{B}$, *ako model* $\mathbb{B}$ *ima prostu ekspanziju* $(\mathbb{B}, b_a)_{a \in A}$ *takvu da je* $(\mathbb{B}, b_a)_{a \in A} \models \mathrm{Th}(\mathbb{A}, a)_{a \in A}$.

2.3 Razni tipovi kompletnosti teorija

Teorija T jezika L je *kompletna teorija* ako za svaku rečenicu φ nad jezikom L te teorije važi ili da je $\varphi \in T$ ili da je $\neg\varphi \in T$. Teorija algebarskih polja AF je primer teorije koja nije kompletna. Naime, rečenica $\exists x\,(x \cdot x = 2)$ je tačna za polje realnih brojeva $\mathbf{R}$ i netačna za polje racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$. Teorija algebarski zatvorenih polja ACF karakteristike 0 jeste primer kompletne teorije (videti Teoremu 1.8.2.).

Teorija T jezika L je *modelski kompletna teorija* akko za svaka dva modela $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ teorije T iz $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ sledi $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$. Navedena definicija potiče od A. ROBINSONa [**81**, str. 37]. Važi tvrđenje [**94**]:

Teorema 2.3.1. *Neka je T teorija jezika L. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1^0. *Teorija T je modelski kompletna.*

2^0. *Za svaki model $\mathbf{A}$ teorije T, teorija $T \cup \Delta_A$ je kompletna teorija.*

Neka su T i T^* dve teorije iste signature. A. ROBINSON, prema [**81**, str. 71], uveo je pojam T^* *jeste modelsko kompletiranje teorije* T ako:

1^0. Teorija T je podteorija teorije T^* $(T \leq T^*)$.

2^0. Svaki model $\mathbf{A}$ teorije T može se raširiti do modela $\mathbf{B}$ teorije T^*.

3^0. Za svaki model $\mathbf{A}$ teorije T, teorija $T \cup \Delta_A$ je kompletna teorija.

Uslov **3^0.**, prema [**81**, str. 71], može se zameniti sa sledećim ekvivalentnim uslovom:

3^0.′ Neka je $\mathbf{A}$ model teorije T i neka postoje modeli $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ teorije T^*, takvi da je $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}_i$ $(i = 1, 2)$; tada su modeli $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ *elementarno ekvivalentni nad podmodelom* $\mathbf{A}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_1 & \equiv & \mathbf{B}_2 \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & \mathbf{A} & \end{array}$$

Za razmatranje modelske kompletnosti neophodan je pojam zasićenih modela. Naime, pod *zasićenim modelima* podrazumevamo one modele koji realizuju sve moguće neprotivrečne skupove formula. Neprotivrečne skupove formula nazivamo *tipovima*.

Primer 2.3.2. *Polje* $\mathbf{F}$ *realizuje tip* $\Sigma(x) = \{\mathfrak{p}(x) \neq 0 \,|\, \mathfrak{p} \in Q[x] \wedge \mathrm{dg}((x)) \geq 1\}$ *akko polje* $\mathbf{F}$ *sadrži transcendentan element nad* $\mathbf{Q}$ [**60**, str. 100].

Neka je $\mathbb{A}$ model jezika L i $X \subseteq A$. Formirajmo $\mathbb{A}_X = (\mathbb{A}, a)_{a \in X}$ kao prosto proširenje modela $\mathbb{A}$ elementima skupa X. Pod *tipom modela* $\mathbb{A}_X$ podrazumevamo svaki skup formula $p(x)$ jezika L_X koji je konačno neprotivurečan sa teorijom $\mathrm{Th}\,\mathbb{A}_X$ [**60**]. Dalje navodimo više varijanti definicije zasićenosti: 1^0. Model $\mathbb{A}$ je *zasićen model nad skupom* $X \subseteq A$ akko je svaki tip $p(x)$ nad $\mathbb{A}_X$ realizovan u modelu $\mathbb{A}_X$. 2^0. Model $\mathbb{A}$ je *zasićen model* akko je model $\mathbb{A}$ zasićen nad svakim $X \subseteq A$, za $|X| < |A|$. 3^0. Model $\mathbb{A}$ je $\kappa-$zasićen, gde je κ neki kardinalni broj, akko je model $\mathbb{A}$ zasićen nad svakim $X \subseteq A$, gde je $|X| < \kappa$. Iz prethodnih definicija proizilazi da je $\mathbb{A}$ zasićen akko je $|A|-$zasićen. Važi sledeće osnovno tvrđenje o postojanju κ^+-zasićenih modela (κ^+ je najmanji kardinal koji je veći od kardinala κ), koje dato u [**60**, str. 104]:

Teorema 2.3.3. *Neka je* $\mathbf{A}$ *jedan beskonačan model jezika* L*, tako da* $|L| < \kappa$ *za beskonačan kardinal* κ*. Tada postoji* κ^+-*zasićen model* $\mathbf{B}$*, tako da* $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$ *i da je pri tom* $|B| \leq |A|^\kappa$ *.*

Važi tvrđenje o modelskom kompletiranju teorije algebarskih polja [**81**, str. 72]:

Teorema 2.3.4. *Teorija algebarski zatvorenih polja je modelsko kompletiranje teorije polja.*

Dokaz. Proveravamo osobine $\mathbf{1^0}$., $\mathbf{2^0}$. i $\mathbf{3^0}$. modelskog kompletiranja. Osobine $\mathbf{1^0}$. i $\mathbf{2^0}$. sleduju na osnovu postojanja algebarskog zatvorenja (Teorema 1.6.6.). Dokazujemo $\mathbf{3^0}$. Neka su $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ dva algebarski zatvorena polja koja su raširenja polja $\mathbf{A}$. Dokazujemo $\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{B}_2$ nad podmodelom $\mathbf{A}$. Koristimo sledeći ekvivalent aksiome izbora [**60**, str. 95]:

> Gornja LÖWENHEIM-SKOLEM teorema: *Neka je* $\mathbf{B}$ *beskonačan model jezika* L *i neka je* κ *beskonačan kardinalni broj takav da* $\kappa > |B| + |L|$*; tada postoji elementarno raširenje* $\mathbf{C}$ *modela* $\mathbf{B}$ *takvo da je* $|C| > \kappa$*.*

Prema gornjoj LÖWENHEIM-SKOLEM teoremi postoje elementarna raširenja $\mathbf{B}_i^*$ od $\mathbf{B}_i$ $(i = 1, 2)$ tako da $|B_1^*| = |B_2^*| = \kappa$, pri čemu $\kappa > \max\{|A|, \aleph_0\}$. Prema Teoremi 1.6.8. važi $\mathbf{B}_1^* \cong \mathbf{B}_2^*$. Samim tim $\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{B}_2$. ■

Koristeći se tzv. metodom sendviča modela [**94**, str. 51], za modelsko kompletiranje neke teorije važi sledeća Teorema o jedinstvenosti:

Teorema 2.3.5. *Teorija* T *jezika* L *može imati najviše jedno modelsko kompletiranje.*

Teorija T jezika L je *podmodelski kompletna* akko za svaki podmodel $\mathbf{A}$ nekog modela teorije T, teorija $T \cup \Delta_A$ jedna kompletna teorija. Važi tvrđenje:

Teorema 2.3.6. *Svaka podmodelski kompletna teorija je i modelski kompletna.*

Napomena 2.3.7. A. MARCJA *i* C. TOFFALORI *u* [**102**, str. 87] *navode primer teorije* T*, dobijene kao podteorija realno zatvorenih polja* RCF *izostavljanjem simbola* $\leq$ *iz jezika teorije* RCF*, kao primer modelsko kompletne teorije koja nije i podmodelski kompletna* (*samim tim ne dopušta eliminaciju kvantora*)*.*

Zatim, navodimo sledeću ROBINSONovu karakterizaciju podmodelske kompletnosti [**81**, str. 73]:

Teorema 2.3.8. *Neka je* T *teorija jezika* L*. Sledeći uslovi su ekvivalentni*:

$\mathbf{1^0}$. *Teorija* T *je podmodelski kompletna.*

$\mathbf{2^0}$. *Teorija* T *dopušta eliminaciju kvantora.*

$\mathbf{3^0}$. *Teorija* T *je modelsko kompletiranje univerzalne teorije.*

Napomena 2.3.9. *Ekvivalent* **3⁰.** *potiče od* A. ROBINSONa [**35**, str. 68]. *Preciznije,* A. ROBINSON *je dokazao implikaciju* **3⁰.** $\Longrightarrow$ **2⁰.** *Prethodnu teoremu nazivamo* ROBINSONov kriterijum za podmodelsku kompletnost.

Neka je T univerzalna teorija i neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dva modela teorije T, tako da je $\mathbf{A}$ podmodel teorije $\mathbf{B}$. Za element $b \in B$ sa $\mathbf{A}(a)$ označavamo podmodel od $\mathbf{B}$ koji ima $A \cup \{b\}$ za skup nosač. Takav model $\mathbf{A}(b)$ nazivamo *prostim raširenjem modela* $\mathbf{A}$ [**35**]. L. BLUM je dokazala sledeću Teoremu [**35**, str. 89]:

Teorema 2.3.10. *Neka su T i T^* teorije najviše prebrojivog jezika L takve da je:*

1⁰. *teorija T je podteorija teorije T^*;*

2⁰. *teorija T je jedna univerzalna teorija;*

3⁰. *svaki model teorije T je sadržan u nekom modelu teorije T^*.*

Tada je T^* modelsko kompletiranje teorije T akko svaki dijagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}^* & & \\ \uparrow & & \\ \mathbf{B} & \longrightarrow & \mathbf{B}(c) \end{array} \tag{1}$$

dopunjuje do komutativnog dijagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}^* & & \\ \uparrow & \nwarrow & \\ \mathbf{B} & \longrightarrow & \mathbf{B}(c), \end{array} \tag{2}$$

pri čemu su $\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}(c)$ modeli teorije T i $\mathbf{B}^*$ je $|B|^+$−zasićen model teorije T^*.

Napomena 2.3.11. *Na osnovu prethodnog* BLUMinog kriterijuma za modelsko kompletiranje teorije *proizilazi da teorija algebarski zatvorenih polja jeste jedna modelski kompletna teorija. U slučaju algebarski zatvorenih polja, $\mathbf{B}(c)$ je polje nastalo andjunkcijom polja $\mathbf{B}$ sa elementom c. Tada, transcendentna dimenzija polja $\mathbf{B}^*$ jednaka je kardinalu $|B|^+$. Na osnovu* BLUM*inog kriterijuma takođe sleduje da je teorija diferencijalno zatvorenih polja jeste jedna modelski kompletna teorija.*

Dalje, modelske kompletne teorije pod nekim dodatnim uslovima jesu i kompletne teorije. Jedan dovoljan uslov je određen pojmom prostih modela. Naime, za teoriju T, model $\mathbf{A}$ je *prost model* ako je utopljiv u svaki model $\mathbf{B}$ te teorije. A. MARCJA i C. TOFFALORI u [**102**] navode primer polja (kompleksnih) algebarskih brojeva, kao primer prostog modela za teoriju algebarski zatvorenih polja ACF karakteristike 0. Važi tvrđenje [**102**, str. 87]:

Teorema 2.3.12. *Neka je T modelski kompletna teorija. Ako teorija T ima prost model, tada je teorija T kompletna.*

Napomena 2.3.13. *Teorija algebarski zatvorenih polja* ACF*, bez određene karakteristike, jeste primer modelski kompletne teorije koja nije i kompletna teorija. Tek fiksiranjem karakteristike 0 ili p-prost broj dobijamo kompletnu teoriju algebarski zatvorenih polja* $\mathsf{ACF0}$ *ili* ACFp *respektivno.*

Na kraju ove sekcije dokazujemo tvrđenje o zasićenosti teorije algebarski zatvorenih polja kao jednu posledicu eliminacije kvantora. Važe tvrđenja [**94**, str. 41-42]:

Lema 2.3.14. *Neka je* $\mathbf{F}$ *algebarski zatvoreno polje i neka je $X \subseteq F$. Tada, za svaku formulu $\varphi(x)$ nad jezikom L_X skup elemenata:*

$$\varphi(F) = \{a \in F \mid \mathbf{F} \models \varphi[a]\} \tag{3}$$

jeste ili konačan ili kofinitan.

Dokaz. Posmatramo $\mathbf{F}$ kao model ACF. Skup F nije konačan. Zaista, u suprotnom, ako je $F = \{a_1, \dots, a_n\}$, tada postoji polinom $\mathfrak{p}(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) + 1$ iz $F[x]$ koji nema nule u polju $\mathbf{F}$. Budući da teorija algebarski zatvorenih polja dopušta eliminaciju kvantora, to bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\varphi(x)$ formula bez kvantora. Atomične formule u ACF koje imaju x kao jedinu promenljivu jesu oblika

$$\frac{\mathfrak{p}(x)}{\mathfrak{q}(x)} = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{\mathfrak{r}(x)}{\mathfrak{s}(x)} \neq 0, \tag{4}$$

za neke polinome $\mathfrak{p}(x), \mathfrak{q}(x), \mathfrak{r}(x), \mathfrak{s}(x)$ nad poljem $\mathbf{F}$ takve da $\mathfrak{q}(x) \neq 0$ i $\mathfrak{s}(x) \neq 0$. Budući da je u ACF svaki polinom nenultog stepena sa nepraznim i konačnim brojem nula, tada je skup vrednosti x za koje je $\mathfrak{p}(x) = 0$ konačan, odnosno skup vrednosti x za koje je $\mathfrak{r}(x) \neq 0$ kofinitan (dakle, skup vrednosti x za koje je $\mathfrak{r}(x) = 0$ je konačan, tj. finitan). Primetimo da se sve bezkvantorske formule dobijaju negacijama i konjukcijama atomičnih formula. Samim tim, skup vrednosti a za koji je $\mathbf{F} \models \varphi[a]$ dobija se pomoću preseka i komplemenata skupova ili konačnih ili kofinitnih skupova. Dakle, $\varphi(F)$ je ili konačan ili kofinitan skup. ■

Teorema 2.3.15. *Svaki model* $\mathbf{F}$ *teorije* ACF *je zasićen.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{F}$ algebarsko zatvoreno polje i neka je $\kappa = |F|$ kardinalni broj polja ($\kappa \geq \aleph_0$). Uočimo podskup $X \subseteq F$, tako da $|X| < \kappa$ i neprotivurečan skup formula, tj. tip $t(x)$ nad $\mathbf{F}_X$. Kako teorija algebarski zatvorenih polja dopušta eliminaciju kvantora, to bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je svaka formula $\varphi(x)$ iz tipa $t(x)$ $(x \in X)$ bezkvantorska formula predstavljena u disjuktivnoj normalnoj formi. Na osnovu prethodne Leme, razlikujemo dva slučaja:

1^0. Postoji $\varphi(x)$ iz tipa $t(x)$ tako da je skup svedoka konačan: $\varphi(F) = \{a_1, \dots, a_n\}$. Tada bar jedno $a_i \in \varphi(F)$ realizuje tip, inače dolazimo do kontradikcije.

2^0. Neka je za svako $\varphi(x)$ iz tipa $t(x)$ skup svedoka $\varphi(F)$ kofinitan. Na osnovu činjenice da je $|t(x)| \leq |X| < \kappa$, dobijamo:

$$\bigcap_{\varphi(x)\in t(x)} \varphi(F) \neq \emptyset,$$

pa samim tim postoji $a \in F$ koji realizuje $t(x)$. ■

Napomena 2.3.16. *Može se pokazati da važi sledeće preciznije tvrđenje: Algebarski zatvoreno polje* **F** *je zasićeno ako i samo ako je beskonačnog ranga transcendentnosti nad njegovim prostim potpoljem. Pri tom, potpolje je prosto ako je izomorfno polju* GALOIS*a ili ako je izomorfno polju racionalnih brojeva. Iz navedenog tvrđenja proizilazi da je svako neprebrojivo algebarski zatvoreno polje zasićeno* [**60**, str. 101].

2.4 Diferencijalni prsten i diferencijalno polje

Neka je **K** komutativan prsten sa jedinicom. Preslikavanje $D : K \longrightarrow K$ nazivamo *izvodom*, ako za svako $x, y \in K$ važe LEIBNIZove aksiome:

$$D(x+y) = D(x) + D(y) \tag{1}$$

i

$$D(x \cdot y) = x \cdot D(y) + y \cdot D(x). \tag{2}$$

Prsten sa izvodom D nazivamo *diferencijalni prsten.* Neka su data dva diferencijalna prstena $\mathbf{K}_1$ i $\mathbf{K}_2$. Homomorfizam $f : K_1 \longrightarrow K_2$ prstena $\mathbf{K}_1$ i $\mathbf{K}_2$ takav da $f\big(D(a)\big) = D\big(f(a)\big)$ naziva se *homomorfizam diferencijalnih prstena* $\mathbf{K}_1$ i $\mathbf{K}_2$. Ako je **K** polje, onda odgovarajuću strukturu sa izvodom nazivamo *diferencijalnim poljem.* Izvod se često označava i sa $'$ oznakom, u smislu da je $y' = D(y)$ $(y \in K)$.

Primer 2.4.1. 1^0. *Neka je* **F** *ma koje polje. Ako za skup polinoma* $F[x]$ *i polinom* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in F[x]$ *definišemo formalan izvod na uobičajen način* $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'(x) = n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1$, *tada* $\mathbf{F}[x]$ *određuje jedan diferencijalni prsten.*

2^0. *Neka je* **F** *ma koje polje. Prethodno uveden formalni izvod nad prstenom polinoma* $\mathbf{F}[x]$ *možemo proširiti na polje racionalnih funkcija* $\mathbf{F}(x)$ *na sledeći način:*

$$\Big(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}\Big)' = \frac{\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{q} - \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}'}{\mathfrak{q}^2}.$$

Tada $\mathbf{F}(x)$ *određuje jedno diferencijalno polje.*

3^0. *Neka je* $\mathbf{F}$ *ma koje polje. Ukoliko odredimo izvod kao trivijalni izvod* $a'=0$, *za* $a\in F$, *tada od polja* $\mathbf{F}$ *dobijamo trivijalno diferencijalno polje.*

4^0. *Polje racionalnih kompleksnih funkcija* $\mathbf{C}(z)$ *jeste diferencijalno polje ako se definiše diferenciranje na uobičajeni način* $\mathsf{f}'=d\mathsf{f}/dz$ (*kao izvod kompleksne funkcije*), *za* $\mathsf{f}\in\mathbf{C}(z)$.

5^0. *Neka je* $S\subseteq C$ *neprazan otvoren povezan skup polja kompleksnih brojeva* $\mathbf{C}$. *Neka je* $\mathcal{M}_S$ *skup meromorfnih funkcija na skupu* S. *Ako definišemo diferenciranje za* $\mathsf{f}\in\mathcal{M}_S$ *na uobičajen način* $\mathsf{f}'=d\mathsf{f}/dz$ (*kao izvod kompleksne funkcije*). *Tada skup* $\mathcal{M}_S$ *određuje jedno diferencijalno polje. Dokažimo, na primer, da diferencijalni prsten* $\mathcal{M}_S$ *jeste i integralni domen* (*prsten bez delilaca nule*). *Zaista, neka* $\mathsf{f}_1\cdot\mathsf{f}_2=\mathsf{0}$ *za* $\mathsf{f}_1,\mathsf{f}_2\in\mathcal{M}_S$. *Dokazujemo da je tada* $\mathsf{f}_1=\mathsf{0}$ *ili* $\mathsf{f}_2=\mathsf{0}$. *Prvo pretpostavimo da je za svako* $z\in S$ *tačno* $\mathsf{f}_1(z)\neq 0$, *tada mora biti* $\mathsf{f}_2(z)=0$ *za sve* $z\in S$, *tj.* $\mathsf{f}_2=\mathsf{0}$. *Dalje, neka postoji* z_0 *tako da je* $\mathsf{f}_1(z_0)=0$. *Pretpostavimo da* z_0 *jeste tačka nagomilavanja skupa gde se* f_1 *anulira, tada prema stavu jedinstvenosti za analitičke funkcije* $\mathsf{f}_1=\mathsf{0}$. *Inače, ako je* z_0 *tačka nagomilavanja gde se* f_1 *ne anulira, tada se na njoj anulira* f_2. *Ponovo prema stavu jedinstvenosti za analitičke funkcije* $\mathsf{f}_2=\mathsf{0}$.

6^0. *Prsten realnih beskonačno diferencijabilnih funkcija* $C^\infty(\mathbf{R})$ *jeste diferencijalni prsten ako se definiše diferenciranje na uobičajeni način* $\mathsf{f}'=d\mathsf{f}/dx$ (*kao izvod realne funkcije*) *za* $\mathsf{f}\in C^\infty(\mathbf{R})$. *Tako određen diferencijalni prsten nije i diferencijalno polje jer posmatrana algebarska struktura nije integralni domen. Naime, za realne beskonačno diferencijabilne funkcije*:

$$\mathsf{f}_1=\begin{cases} e^{-1/x^2} & : \ x>0 \\ 0 & : \ x\leq 0 \end{cases} \qquad i \qquad \mathsf{f}_2=\begin{cases} 0 & : \ x\geq 0 \\ e^{-1/x^2} & : \ x<0 \end{cases}$$

važi $\mathsf{f}_1\cdot\mathsf{f}_2=\mathsf{0}$ *i pri tom* $\mathsf{f}_1,\mathsf{f}_2\neq\mathsf{0}$.

7^0. *Prethodni primeri diferencijalnih polja jesu primeri diferencijalnih polja sa* funkcijskom reprezentacijom, *gde svi elementi razmatranih polja jesu funkcije. Napomenimo da postoje primeri diferencijalnih polja bez funkcijske reprezentacije elemenata. Jedan takav primer su* Hardy*jeva polja klica* (*germs*) *neprekidnih realnih funkcija koje su definisane u okolini* $+\infty$. *Pod klicama podrazumevamo odgovarajuće klase ekvivalencija nad funkcijama i od tih klasa formiramo diferencijalno polje, definišući izvod na odgovarajući način nad tim klasama funkcija.*

Primer 2.4.2. *Označimo sa* $\mathcal{M}$ *skup meromorfnih funkcija nad skupom* $\mathbf{C}$, *sa uobičajenim diferenciranjem* $\mathsf{f}'=d\mathsf{f}/dz$ *kompleksne funkcije* $\mathsf{f}\in\mathcal{M}$. *Naime, ako je* $S=C$, *tada koristimo oznaku* $\mathcal{M}$ *umesto* $\mathcal{M}_C$. *Neka je* e *cela funcija i* u *meromorfna funkcija. Tada važi pravilo kompozicije*:

$$D\big(\mathsf{u}(\mathsf{e})\big)=\big(D\mathsf{u}\big)(\mathsf{e})\cdot D(\mathsf{e}). \tag{3}$$

Dalje razmatramo neka osnovna tvrđenja vezana za diferencijalna polja [**19**], [**72**]:

Lema 2.4.3. *Neka je* $\mathbf{K}$ *diferencijalni prsten. Tada važi:*

$\mathbf{1^0}$. *Za svaki element* $a \in K$ *važi:* $D(a^n) = na^{n-1}D(a)$ $(n \in N)$.

$\mathbf{2^0}$. *Za svaki element* $a \in K$ *i inverzibilni element* $b \in K$ *važi:* $D\Big(\dfrac{a}{b}\Big) = \dfrac{bD(a) - aD(b)}{b^2}$.

Dokaz. $\mathbf{1^0}$. Tvrđenje sleduje indukcijom. Zaista, primetimo da je $D(0) = 0$ i $D(1) = 0$ iz $D(0+0) = D(0) + D(0)$ i $D(1+0) = D(1) + D(0)$. Odatle za $n = 1$ sleduje $D(a^1) = 1a^0D(a)$, odnosno za $n = 2$ sleduje $D(a^2) = D(a \cdot a) = aD(a) + aD(a) = 2aD(a)$. Neka je za prirodan broj n tačno $D(a^n) = na^{n-1}D(a)$. Tada $D(a^{n+1}) = D(a^n \cdot a) = a^n \cdot D(a) + a \cdot D(a^n) = a^n \cdot D(a) + a \cdot na^{n-1}D(a) = (n+1)a^nD(a)$.

$\mathbf{2^0}$. Tvrđenje sleduje na osnovu implikacije:

$$D(a) = D\Big(b \cdot \frac{a}{b}\Big) = b \cdot D\Big(\frac{a}{b}\Big) + \frac{a}{b} \cdot D(b) \implies D\Big(\frac{a}{b}\Big) = \frac{bD(a) - aD(b)}{b^2}. \blacksquare$$

Teorema 2.4.4. *Ako je* $\mathbf{K}$ *diferencijalni prsten koji je i integralni domen, onda se izvod može na jedinstven način produžiti na odgovarajuće polje razlomaka.*

Dokaz. Na osnovu drugog dela prethodne Leme, za element $a \in K$ i inverzibilni element $b \in K$ važi: $D\Big(\dfrac{a}{b}\Big) = \dfrac{bD(a) - aD(b)}{b^2}$. Dokazujemo da rezultat diferenciranja ne zavisi od predstavnika klase razlomka $\dfrac{a}{b}$. Zaista, neka za razlomak $\dfrac{c}{d}$ važi da $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, tj. $ad = bc$. Tada dobijamo zaključak o jedinstvenosti:

$$\begin{aligned}
ad = bc &\implies aD(d) + dD(a) = bD(c) + cD(b) \qquad /\cdot(bd)\\
&\implies (ad)bD(d) + bd^2D(a) = b^2dD(c) + (bc)dD(b)\\
&\implies (bc)bD(d) + bd^2D(a) = b^2dD(c) + (ad)dD(b)\\
&\implies \big(bD(a) - aD(b)\big)d^2 = \big(dD(c) - cD(d)\big)b^2 \quad /:(b^2d^2)\\
&\implies D\Big(\frac{a}{b}\Big) = \frac{bD(a) - aD(b)}{b^2} = \frac{dD(c) - cD(d)}{d^2} = D\Big(\frac{c}{d}\Big). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Dalje u ovoj sekciji razmatramo samo diferencijalne prstene, odnosno diferencijalna polja nulte karakteristike. Od posebnog interesa za strukturu raširenja diferencijalnih polja jeste sledeće tvrđenje [**81**, str. 111]:

Teorema 2.4.5. *Neka je* $\mathbf{F}$ *diferencijalno polje i neka postoji polje* $\mathbf{H}_n = \mathbf{F}(b_0, \ldots, b_n)$ *kao jedno konačno raširenje polja* $\mathbf{F}$ *sa elementima* $b_0, \ldots, b_n$*, tako da važi:*

1^0. *za svako $k < n$ element b_k je transcendentan nad poljem $\mathbf{H}_{k-1} = \mathbf{F}(b_0, \ldots, b_{k-1})$,*

2^0. *element b_n je algebarski nad poljem $\mathbf{H}_{n-1} = \mathbf{F}(b_0, \ldots, b_{n-1})$.*

Tada postoji tačno jedno utapanje polja $\mathbf{H}_n$ u diferencijalno raširenje polja $\mathbf{F}$, tako da je za sve $k < n$ tačno: $b_{k+1} = b_k^{'}$.

Dokaz. Posmatrajmo polinomski prsten $\mathbf{F}[y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n]$. Posmatrajmo polinom:

$$g(y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n) = \sum_{j \in J} a_{j_0 \ldots j_{n-1} j_n} y_0^{j_0} \ldots y_{n-1}^{j_{n-1}} y_n^{j_n}, \tag{4}$$

gde je $a_{j_0 \ldots j_{n-1} j_n} \in F$ i J je konačan skup indeksa. Definišimo pomoćni polinom:

$$\hat{g}(y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n) = \sum_{j \in J} a^{'}_{j_0 \ldots j_{n-1} j_n} y_0^{j_0} \ldots y_{n-1}^{j_{n-1}} y_n^{j_n}. \tag{5}$$

Elementi $b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n$ po pretpostavci su u nekom diferencijalnom raširenju od $\mathbf{F}$. Neka je $g(b_0, \ldots, b_{n-1}, y_n)$ nesvodljiv polinom iz $H_{n-1}[y_n]$, takav da $\mathbf{H}_n \cong \mathbf{H}_{n-1}[y_n]/\langle g \rangle$ i neka je $\partial g / \partial y_i$ formalno diferenciranje polinoma $g = g(y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ po promenljivoj y_i. Tada je $g(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n) = 0$ (na osnovu definicije $\mathbf{H}_n$). Dokazujemo da za polinom $g(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ iz $F[b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n]$ možemo uvesti izvod polinoma na sledeći način:

$$g(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n)^{'} = \hat{g}(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n) + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n) \cdot b_{i+1}, \tag{6}$$

gde je element b_{n+1} određen pomoću sledeće formule:

$$b_{n+1} = -\frac{\hat{g}(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n) \cdot b_{i+1}}{\frac{\partial g}{\partial y_n}(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n)}. \tag{7}$$

Pri tom:

$$\frac{\partial g}{\partial y_n}(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n) \neq 0. \tag{8}$$

U suprotnom bi imali polinom $\partial g / \partial y_n(b_0, \ldots, b_{n-1}, y_n)$ koji bi bio nižeg stepena od stepena polinoma $g(b_0, \ldots, b_{n-1}, y_n)$ po y_n i koji se anulira za $y_n = b_n$. Navedeno je nemoguće jer je g nesvodljiv polinom. Primetimo da je $g(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n) = 0$ i $g(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n)^{'} = 0$ (po načinu formiranja elementa b_{n+1}). Iz (6) i (7) proizilazi:

$$0 = g(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n)^{'} = \hat{g}(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n) \cdot b_{k+1}. \tag{9}$$

Dalje, dokazujemo da za svaka dva polinoma $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \in F[y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n]$, takva da:

$$\mathfrak{g}_1(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n) = \mathfrak{g}_2(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n) \tag{10}$$

važi jednakost izvoda $\mathfrak{g}_1(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n)' = \mathfrak{g}_2(b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n)'$. Primetimo da iz (10) proizilazi:

$$\mathfrak{g}_1(b_0, \ldots, b_{n-1}, y_n) \equiv \mathfrak{g}_2(b_0, \ldots, b_{n-1}, y_n) \mod \mathfrak{g}(b_0, \ldots, b_{n-1}, y_n). \tag{11}$$

Samim tim:

$$\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{q}, \tag{12}$$

gde $\mathfrak{q} \in H_{n-1}[y_n]$. Neka je $\mathfrak{q} = \mathfrak{r}/\mathfrak{s}$, za $\mathfrak{r} \in F[y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n]$, $\mathfrak{s} \in F[y_0, \ldots, y_{n-1}]$ i $\mathfrak{s} \neq 0$. Odatle:

$$\mathfrak{r} \cdot \big(\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_2\big) = \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{r}. \tag{13}$$

U prethodnoj jednakosti, zamenom vektor argumenata $(y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ sa vektorom $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ i formalnim diferenciranjem obe strane jednakosti dobijamo:

$$\mathfrak{q}(\vec{b}) \cdot \big(\mathfrak{g}_1(\vec{b})' - \mathfrak{g}_2(\vec{b})'\big) = \mathfrak{g}(\vec{b}) \cdot \mathfrak{r}(\vec{b})' + \mathfrak{g}(\vec{b})' \cdot \mathfrak{r}(\vec{b}) = 0, \tag{14}$$

jer je $\mathfrak{g}(\vec{b}) = 0$ i $\mathfrak{g}(\vec{b})' = 0$. Na osnovu $\mathfrak{q}(\vec{b}) \neq 0$ sleduje traženi zaključak:

$$\mathfrak{g}_1(\vec{b})' = \mathfrak{g}_2(\vec{b})'. \tag{15}$$

Na osnovu prethodnog, izvod je korektno definisan na prstenu $\mathbf{H}_n = \mathbf{F}[b_0, \ldots, b_n]$ i za $\mathbf{H}_n$ važe LEIBNIZova aksiome diferenciranja. Prema Teoremi 2.4.4. postoji tačno jedno produženje diferencijalnog integralnog domena $\mathbf{H}_n$ do najmanjeg diferencijalnog raširenja, tj. odgovarajućeg polja razlomaka. Na osnovu prethodne konstrukcije, za sve $k < n$ važi: $b_{k+1} = b_k'$. ∎

Neka su $\mathbf{F}$ i $\mathbf{K}$ diferencijalna polja i neka je $\mathbf{F} \leq \mathbf{K}$. Razmotrimo vrste *prostih proširenja diferencijalnog polja* $\mathbf{F}$ sa elementom $b \in K \backslash F$. Naime, u diferencijalnoj algebri razmatramo sledeće strukture:

1⁰. $\mathbf{F}[b]$ određujemo kao prsten generisan sa $F \cup \{b\}$,

2⁰. $\mathbf{F}(b)$ određujemo kao polje generisano sa $F \cup \{b\}$,

3⁰. $\mathbf{F}\{b\}$ određujemo kao diferencijalni prsten generisan sa $F \cup \{b\}$,

4⁰. $\mathbf{F}\langle b \rangle$ određujemo kao diferencijalno polje generisano sa $F \cup \{b\}$.

Diferencijalni polinomi jedne promenljive. Neka je $\mathbf{F}$ diferencijalno polje. *Diferencijalni polinom jedne promenljive* $\mathfrak{p}(y) = \mathfrak{p}(y, y', \ldots, y^{(n)})$ jeste element diferencijalnog prstena $\mathbf{F}\{y\} = \mathbf{F}[y, y', \ldots, y^{(n)}, \ldots]$. Ako je $\mathfrak{p} \in F\{y\} \backslash F$, tada *red diferencijalnog polinoma* $\mathfrak{p}(y)$ jeste najveći prirodan broj $n = \mathrm{ord}(\mathfrak{p})$ takav da se $y^{(n)}$

javlja u diferencijalnom polinomu $\mathfrak{p}(y)$. Ako je $\mathfrak{p} \in F$ tada definišemo $\mathrm{ord}(\mathfrak{p}) = -1$ i pišemo $\mathfrak{p}(a)=\mathfrak{p}$ za svako $a \in F$. Neka su $\mathbf{F}$ i $\mathbf{K}$ diferencijalna polja i neka je $\mathbf{F} \leq \mathbf{K}$. Razmotrimo vrste *prostih proširenja diferencijalnog polja* $\mathbf{F}$ sa $b \in K \backslash F$.

1. Element *b* je diferencijalno-algebarski nad F. Neka za element b postoji nenula diferencijalni polinom $\mathfrak{p} \in \mathbf{F}\{y\}$ takav da $\mathfrak{p}(b) = 0$, tada element b jeste *diferencijalno-algebarski nad* $\mathbf{F}$. Ne umanjujući opštost, neka je diferencijalni polinom $\mathfrak{p}$ sa najmanjim *redom* n i najmanjim algebarskim stepenom po $y^{(n)}$. U tom slučaju:

$$\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y^{(n)}}(b) \neq 0, \tag{16}$$

jer bi tada postojao diferencijalni polinom nižeg reda po $y^{(n)}$. Neka je:

$$\mathfrak{p}(y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n) = \sum_{j \in J} a_{j_0 \ldots j_{n-1} j_n} y_0^{j_0} \ldots y_{n-1}^{j_{n-1}} y_n^{j_n}, \tag{17}$$

gde je $a_{j_0 \ldots j_{n-1} j_n} \in F$ i J je konačan skup indeksa. Analogno dokazu Teoreme 2.4.5. možemo odrediti:

$$b^{(n+1)} = -\frac{\hat{\mathfrak{p}}(b, \ldots, b^{(n-1)}, b^{(n)}) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y_k}(b, \ldots, b^{(n-1)}, b^{(n)}) \cdot b^{(i+1)}}{\dfrac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y^{(n)}}(b, \ldots, b^{(n-1)}, b^{(n)})}, \tag{18}$$

za $\hat{\mathfrak{p}}(y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n) = \sum_{j \in J} a'_{j_0 \ldots j_{n-1} j_n} y_0^{j_0} \ldots y_{n-1}^{j_{n-1}} y_n^{j_n}$ (gde je $a'_{j_0 \ldots j_{n-1} j_n}$ izvod elementa $a_{j_0 \ldots j_{n-1} j_n}$). Odatle je $b^{(n+1)} \in F(b, \ldots, b^{(n-1)}, b^{(n)})$. Samim tim, proizilazi: $b^{(j)} \in F(b, \ldots, b^{(n-1)}, b^{(n)})$ za svako j. Ovim je dokazano da polje $\mathbf{F}(b, \ldots, b^{(n-1)}, b^{(n)})$ jeste zatvoreno za diferenciranje $'$. Saglasno uvedenim oznakama:

$$\mathbf{F}\langle b \rangle = \mathbf{F}(b, \ldots, b^{(n-1)}, b^{(n)}). \tag{19}$$

2. Element *b* je diferencijalno-transcendentan nad F. Tada element b ne anulira nijedan nenula diferencijalni polinom i naziva se *diferencijalno-transcendentan nad* $\mathbf{F}$. Kao u algebarskom slučaju:

$$\mathbf{F}\langle b \rangle \cong \mathbf{F}\langle y \rangle. \tag{20}$$

2.5 Diferencijalne redukcije u prstenu diferencijalnih polinoma

Neka je $\mathbf{K}$ diferencijalno polje. U prstenu diferencijalnih polinoma $\mathbf{K}\{y_1, \ldots, y_n\}$ razmotrićemo razne diferencijalne redukcije prema članku [**119**]. Polazimo od diferencijalnog polinomskog prstena $\mathbf{K}\{y_1, \ldots, y_n\}$ nad diferencijalnim poljem $\mathbf{K}$ po diferencijalnim promenljivima $y_1, \ldots, y_n$, koji možemo shvatiti i kao polinomijalni prsten nad $\mathbf{K}$ određen familijom algebarskih promenljivih $\mathbf{y} = \{y_{i,j}\}_{1\leq i\leq n, j}$, takvih da:

$$D(y_{i,j}) = y_{i,j+1}. \tag{1}$$

Napomenimo da vršimo identifikaciju $y_{i,0}$ sa y_i; takođe, napomenimo da za $y_{i,j}$ koristimo ravnopravno oznake $y_i^{(j)}$, $D^j(y_i)$. Diferencijalne promenljive $y_{i,j}$ nazivamo *izvodima*. Smatramo da je svaka familija izvoda algebarski nezavisna nad $\mathbf{K}$.

Diferencijalni polinom $\mathfrak{p}$ predstavlja element iz diferencijalnog polinomskog prstena $\mathbf{K}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Svaki diferencijalni polinom $\mathfrak{p}$ sadrži konačno mnogo izvoda i oni se mogu interpretirati kao promenljive u odgovarajućem polinomijalnom prstenu. Prvo za diferencijalne promenljive definišemo *rangiranje diferencijalnih promenljivih* kao što sleduje. Naime, rangiranje određujemo kao ma koje totalno uređenje $<$ skupa izvoda $\mathbf{y} = \{y_{i,j} \,|\, 1 \leq i \leq n,\ j \in N\}$ tako da:

$$v < D(v) \ \text{ za svaki izvod } v \tag{2}$$

i

$$v_1 < v_2 \implies D(v_1) < D(v_2) \ \text{ za sve izvode } v_1,\, v_2. \tag{3}$$

Uobičajeno je da se u diferencijalnoj algebri koriste dve vrste rangiranja: *mešano rangiranje* i *nemešano rangiranje*. Bez potrebe za formalnim uvođenjem, navedena rangiranja ilustovaćemo samo sa sledeća dva primera za dve diferencijalne promenljive.

Primer 2.5.1. *Neka je za* $n = 2$ *utvrđen poredak dve diferencijalne promenljive* $y_1 < y_2$. *Tada pri mešanom rangiranju važi:*

$$y_1 < y_2 < y_1' < y_2' < y_1'' < y_2'' < \ldots .$$

Primer 2.5.2. *Neka je za* $n = 2$ *utvrđen poredak dve diferencijalne promenljive* $y_1 < y_2$. *Tada pri nemešanom rangiranju važi:*

$$y_1 < y_1' < y_1'' < \ldots < y_2 < y_2' < y_2'' < \ldots .$$

Neka je prvo zadan poredak među diferencijalnim promenljivima i neka je potom izvršeno rangiranje izvoda. Izdvojimo, u odnosu na zadano rangiranje, izvod najvišeg ranga $u_\mathfrak{p}$ kao *lider diferencijalnog polinoma*. Za diferencijalni polinom $\mathfrak{p}$, *red diferencijalnog polinoma u odnosu na lider* $u_\mathfrak{p}$ određujemo kao najveći prirodan broj r tako da se izvod $u_\mathfrak{p} = y_j^{(r)}$ javlja u $\mathfrak{p}$ za neku diferencijalnu promenljivu y_j. Tada možemo predstaviti diferencijalni polinom $\mathfrak{p}$ kao običan polinom po jednoj promenljivoj $u_\mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{p} = I_k u_\mathfrak{p}^k + I_{k-1} u_\mathfrak{p}^{k-1} + \ldots + I_1 u_\mathfrak{p} + I_0, \tag{4}$$

gde je $k = \deg_{u_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p})$ *stepen diferencijalnog polinoma u odnosu na lider* $u_{\mathfrak{p}}$. Primetimo da u prethodnoj reprezentaciji koeficijenti $I_k, I_{k-1}, \dots, I_0$ sadrže samo izvode nižeg ranga od ranga lidera $u_{\mathfrak{p}}$. Koeficijent I_k nazivamo *inicijalnim koeficijentom diferencijalnog polinoma–inicijalom.* Važi:

$$
\begin{aligned}
D(\mathfrak{p}) &= D\big(\sum_{j=0}^{k} I_j u_{\mathfrak{p}}^j\big) = \sum_{j=0}^{k} D\big(I_j u_{\mathfrak{p}}^j\big) = \sum_{j=0}^{k} \big(D(I_j)u_{\mathfrak{p}}^j + I_j D(u_{\mathfrak{p}}^j)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \big(jI_j u_{\mathfrak{p}}^{j-1} D(u_{\mathfrak{p}})\big) + \sum_{j=0}^{k} \big(D(I_j)\, u_{\mathfrak{p}}^j\big) \qquad (5)\\
&= \underbrace{\big(k\, I_k\, u_{\mathfrak{p}}^{k-1} + (k-1)\, I_{k-1}\, u_{\mathfrak{p}}^{k-2} + \ldots + I_1\big)}_{S_{\mathfrak{p}}} D(u_{\mathfrak{p}}) \\
&+ D(I_k)u_{\mathfrak{p}}^k + D(I_{k-1})u_{\mathfrak{p}}^{k-1} + \ldots + D(I_1)u_{\mathfrak{p}} + D(I_0).
\end{aligned}
$$

Tada izraz:

$$S_{\mathfrak{p}} = k\, I_k\, u_{\mathfrak{p}}^{k-1} + (k-1)\, I_{k-1}\, u_{\mathfrak{p}}^{k-2} + \ldots + I_1 \qquad (6)$$

nazivamo *separant diferencijalnog polinoma.* Osnovne osobine separanta su date tvrđenjem:

Teorema 2.5.3. *Za diferencijalni polinom* $\mathfrak{p} = I_k u_{\mathfrak{p}}^k + I_{k-1}u_{\mathfrak{p}}^{k-1} + \ldots + I_1 u_{\mathfrak{p}} + I_0$ *važi:*

$$I_{D(\mathfrak{p})} = \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u_{\mathfrak{p}}} = S_{\mathfrak{p}}. \qquad (7)$$

i

$$D(\mathfrak{p}) = S_{\mathfrak{p}} \cdot D(u_{\mathfrak{p}}) + \Sigma, \qquad (8)$$

gde je Σ *konačna suma termova u kojima se javljaju izvodi nižeg ranga od* $D(u_{\mathfrak{p}})$.

Dokaz. Prva osobina direktno sleduje na osnovu (5). Druga osobina sleduje na osnovu činjenice da važi $v < u_{\mathfrak{p}} \Longrightarrow D(v) < D(u_{\mathfrak{p}})$. Odatle lider za $D(\mathfrak{p})$ je $D(u_{\mathfrak{p}})$, a inicijalni koeficijent je upravo separant $S_{\mathfrak{p}}$. ■

Primer 2.5.4. *Diferencijalni polinom* $\mathfrak{g} = (y_1')^3 y_2'' + 2y_1'(y_2'')^2 + (y_2'')^2$ *sredimo po stepenima:* $\mathfrak{g} = (2y_1'+1)(y_2'')^2 + (y_1')^3 y_2''$ *u odnosu na lider* $u_{\mathfrak{g}} = y_2''$. *Važi:*

$$
\begin{aligned}
D(\mathfrak{g}) &= D\big(2y_1'+1\big)(y_2'')^2 + (2y_1'+1)\underline{D\big((y_2'')^2\big)} + D\big((y_1')^3\big)y_2'' + \big(y_1'\big)^3 \underline{D\big(y_2''\big)} \\
&= (2y_1'+1)\, \underline{2\, y_2'''} + 2y_1''(y_2'')^2 + \big(y_1'\big)^3 \underline{y_2'''} + 3(y_1')^2(y_2'')^2 \qquad (9)\\
&= \underbrace{\big((y_1')^3 + 4y_1'y_2'' + 2y_2''\big)}_{S_{\mathfrak{g}}} \cdot \underbrace{y_2'''}_{D(u_{\mathfrak{g}})} + \underbrace{3(y_1')^2 y_1'' y_2'' + 2y_1''(y_2'')^2}_{T=\Sigma}.
\end{aligned}
$$

Samim tim, separant posmatranog diferencijalnog polinoma $\mathfrak{g}$ *je*:

$$S_{\mathfrak{g}} = (y_1^{'})^3 + 4y_1^{'}y_2^{''} + 2y_2^{''}. \tag{10}$$

Kao što je istaknuto u prethodnoj teoremi, u sumi $T = \Sigma$ *javljaju se izvodi nižeg ranga od* $y_2^{'''} = D(u_{\mathfrak{g}})$.

Dalje uvodimo pojam *diferencijalne redukcije* diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}$ po diferencijalnom polinomu $\mathfrak{g}$ kao što sleduje. Neka se lider $u_{\mathfrak{g}}$ diferencijalnog polinoma $\mathfrak{g}$ javlja u diferencijalnom polinomu sa najviše k-tim stepenom $u_{\mathfrak{g}}^k$ $(k \geq 1)$. Pretpostavimo da smo uzastopnim diferenciranjem diferencijalnog polinoma $\mathfrak{g}$ dobili niz:

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{g}) &= S_{\mathfrak{g}} \cdot D(u_{\mathfrak{g}}) + T_1 \\ D^2(\mathfrak{g}) &= S_{\mathfrak{g}} \cdot D^2(u_{\mathfrak{g}}) + T_2 \\ &\vdots \\ D^k(\mathfrak{g}) &= S_{\mathfrak{g}} \cdot D^k(u_{\mathfrak{g}}) + T_k, \end{aligned} \tag{11}$$

tako da su izrazi T_j sume termova koji sadrže izvode manjeg ranga od izraza $D^j(u_{\mathfrak{g}})$ $(1 \leq j \leq k)$. Neka su svi izvodi $D^j(u_{\mathfrak{g}})$ zamenjeni u diferencijalni polinom $\mathfrak{p}$ pomoću razlomaka:

$$D^j(u_{\mathfrak{g}}) = \frac{D^j(\mathfrak{g}) - T_j}{S_{\mathfrak{g}}} \tag{12}$$

$(1 \leq j \leq k)$. Tada dobijamo racionalni izraz $\mathfrak{p} = \mathfrak{s}$, koji se množenjem sa $S_{\mathfrak{g}}^k$ može dovesti do oblika:

$$S_{\mathfrak{g}}^k \mathfrak{p} = \hat{\mathfrak{q}}_k D^k(\mathfrak{g}) + \hat{\mathfrak{q}}_{k-1} D^{k-1}(\mathfrak{g}) + \ldots + \hat{\mathfrak{q}}_1 D(\mathfrak{g}) + \hat{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}, \tag{13}$$

gde $\hat{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}$ ne sadrži izavode od $u_{\mathfrak{g}}$, za neke diferencijalne polinome $\hat{\mathfrak{q}}_j$ $(1 \leq j \leq k)$. Tada se $\hat{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}$ naziva *parcijalni ostatak* $\mathfrak{p}$ u odnosu $\mathfrak{g}$ [**119**].

Primer 2.5.5. *Odredimo parcijalni ostatak pri parcijalnoj redukciji diferencijalnog polinoma* $\mathfrak{p} = 5(y_1^{'})^2(y_2^{'''})^3 - 10(y_1^{'})^3 y_2^{''}$ *sa diferencijalnim polinomom* $\mathfrak{g} = (y_1^{'})^3 y_2^{''} + 2y_1^{'}(y_2^{''})^2 + (y_2^{''})^2$. *Na osnovu prethodnog primera, za lider* $u_{\mathfrak{g}} = y_2^{''}$, *važi*:

$$D(\mathfrak{g}) = \underbrace{\big((y_1^{'})^3 + 4y_1^{'}y_2^{''} + 2y_2^{''}\big)}_{S_{\mathfrak{g}}} \cdot \underbrace{y_2^{'''}}_{D(u_{\mathfrak{g}})} + \underbrace{3(y_1^{'})^2 y_1^{''} y_2^{''} + 2y_1^{''}(y_2^{''})^2}_{T=\Sigma}, \tag{14}$$

za izvod $D(\mathfrak{g})$*, separant* $S_{\mathfrak{g}} = (y_1^{'})^3 + 4y_1^{'}y_2^{''} + 2y_2^{''}$ *i sumu* $T = 3(y_1^{'})^2y_1^{''}y_2^{''} + 2y_1^{''}(y_2^{''})^2$. *Samim tim, iz prethodne jednakosti* $D(\mathfrak{g}) = S_{\mathfrak{g}}D(u_{\mathfrak{g}}) + T$*, nalazimo:*

$$y_2^{'''} = D(u_{\mathfrak{g}}) = \frac{D(\mathfrak{g}) - T}{S_{\mathfrak{g}}} = \frac{D(\mathfrak{g}) - \big(3(y_1^{'})^2y_1^{''}y_2^{''} + 2y_1^{''}(y_2^{''})^2\big)}{(y_1^{'})^3 + 4y_1^{'}y_2^{''} + 2y_2^{''}}. \tag{15}$$

Zamenom prethodnog izraza za $y_2^{'''}$ *u diferencijalni polinom* $\mathfrak{p} = 5(y_1^{'})^2(y_2^{'''})^3 - 10(y_1^{'})^3y_2^{''}$ *dobijamo jednakost:*

$$\mathfrak{p} = 5(y_1^{'})^2(y_2^{'''})^3 - 10(y_1^{'})^3y_2^{''} = 5(y_1^{'})^2\Big(\frac{D(\mathfrak{g}) - T}{S_{\mathfrak{g}}}\Big)^3 - 10(y_1^{'})^3y_2^{''}. \tag{16}$$

Odatle, množenjem sa $\big(S_{\mathfrak{g}}\big)^3$*, dolazimo do tražene jednakosti:*

$$\begin{aligned} \big(S_{\mathfrak{g}}\big)^3\mathfrak{p} &= 5(y_1^{'})^2\big(D(\mathfrak{g}) - T\big)^3 - 10(y_1^{'})^3y_2^{''}\big(S_{\mathfrak{g}}\big)^3 \\ &= \hat{\mathfrak{q}}_1 D(\mathfrak{g}) + \underbrace{5(y_1^{'})^2\big(-T\big)^3 - 10(y_1^{'})^3y_2^{''}\big(S_{\mathfrak{g}}\big)^3}_{\hat{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}}, \end{aligned} \tag{17}$$

gde je količnik $\hat{\mathfrak{q}}_1$ *eksplicitno dat sa:*

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{q}}_1 &= 5(y_1^{'})^2\Big(\big(D(\mathfrak{g})\big)^2 - 3D(\mathfrak{g})T + T^2\Big) \\ &= 5(y_1^{'})^2\Big(\Big(\big((y_1^{'})^3 + 4y_1^{'}y_2^{''} + 2y_2^{''}\big)\cdot y_2^{'''} + 3(y_1^{'})^2y_1^{''}y_2^{''} + 2y_1^{''}(y_2^{''})^2\Big)^2 \\ &\quad -3\Big(\big((y_1^{'})^3 + 4y_1^{'}y_2^{''} + 2y_2^{''}\big)\cdot y_2^{'''} + 3(y_1^{'})^2y_1^{''}y_2^{''} + 2y_1^{''}(y_2^{''})^2\Big)T + T^2\Big), \end{aligned} \tag{18}$$

za $T = (y_1^{'})^2y_1^{''}y_2^{''} + 2y_1^{''}(y_2^{''})^2$. *Parcijalni ostatak* $\hat{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}$ *je eksplicitno dat sa:*

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}} &= 5(y_1^{'})^2\big(-T\big)^3 - 10(y_1^{'})^3y_2^{''}\big(S_{\mathfrak{g}}\big)^3 \\ &= 5(y_1^{'})^2\big(-T\big)^3 - 10(y_1^{'})^3y_2^{''}\big((y_1^{'})^3 + 4y_1^{'}y_2^{''} + 2y_2^{''}\big)^3, \end{aligned} \tag{19}$$

za $T = (y_1^{'})^2y_1^{''}y_2^{''} + 2y_1^{''}(y_2^{''})^2$. *Napomenimo da se sva pojavljivanja* $y_2^{'''}$ *u desnoj strani jednakosti* (17) *nalaze u količniku* $\hat{\mathfrak{q}}_1$ $\big($*u levoj strani jednakosti* (17) *su u diferencijalnom polinomu* $\mathfrak{p}\big)$ *i nema ih u parcijalnom ostatku* $\hat{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}$.

Dalje, za dva diferencijalna polinoma $\mathfrak{p}$ i $\mathfrak{g}$ primetimo da u parcijalnom ostatku $\hat{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}$ može da se javi lider $u_{\mathfrak{g}}$. Stoga se parcijalni ostatak može dalje redukovati algebarskim pseudodeljenjem sa polinomom $\mathfrak{g}$. Neka je $I_{\mathfrak{g}}$ vodeći term diferencijalnog polinoma $\mathfrak{g}$. Tada postoji prirodan broj n, takav da se iz (13) dobija sledeća jednačina:

$$I_{\mathfrak{g}}^n S_{\mathfrak{g}}^k \mathfrak{p} = \mathfrak{q}_k D^k(\mathfrak{g}) + \mathfrak{q}_{k-1} D^{k-1}(\mathfrak{g}) + \ldots \mathfrak{q}_1 D(\mathfrak{g}) + \mathfrak{r}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}, \tag{20}$$

gde $\mathfrak{r}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}$ ne sadrži izvode od $u_{\mathfrak{g}}$, za neke diferencijalne polinome $\mathfrak{q}_j$ $(1 \leq j \leq k)$ i nižeg je stepena od stepena $u_{\mathfrak{g}}$ diferencijalnog polinoma $\mathfrak{g}$. Tada se $\mathfrak{r}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}$ naziva *totalni ili Ritt-Kolchinov ostatak* $\mathfrak{p}$ u odnosu $\mathfrak{g}$. Prethodna kompozicija parcijalne redukcije i pseudodeljenja naziva se *totalna redukcija* [**119**].

Primer 2.5.6. *Odredimo Ritt-Kolchinov ostatak pri totalnoj redukciji diferencijalnog polinoma* $\mathfrak{p} = 5y_1^{'}y_1^{''}y_2^{'''} - 10(y_1^{'})^3y_2^{''}$ *sa diferencijalnim polinomom* $\mathfrak{g} = (y_1^{'})^3y_2^{''} + 2y_1^{'}(y_2^{''})^2 + (y_2^{''})^2$. *Analogno Primerima* 2.5.4. *i* 2.5.5., *za lider* $u_{\mathfrak{g}} = y_2^{''}$ *dobijamo jednakost*:

$$S_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{p} = 5y_1^{'}y_1^{''}\Big(D(\mathfrak{g}) - TS_{\mathfrak{g}}\Big) - 10(y_1^{'})^3y_2^{''}S_{\mathfrak{g}}, \tag{21}$$

za izvod $D(\mathfrak{g})$, *separant* $S_{\mathfrak{g}} = (y_1^{'})^3 + 4y_1^{'}y_2^{''} + 2y_2^{''}$ *i sumu* $T = 3(y_1^{'})^2y_1^{''}y_2^{''} + 2y_1^{''}(y_2^{''})^2$. *Tako dolazimo do tražene jednakosti*:

$$\begin{aligned} S_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{p} &= 5y_1^{'}y_1^{''}\big(D(\mathfrak{g}) - T\big) - 10(y_1^{'})^3y_2^{''}S_{\mathfrak{g}} \\ &= \hat{\mathfrak{q}}_1 D(\mathfrak{g}) + \underbrace{-5y_1^{'}y_1^{''}T - 10(y_1^{'})^3y_2^{''}S_{\mathfrak{g}}}_{\hat{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}}, \end{aligned} \tag{22}$$

gde je količnik $\hat{\mathfrak{q}}_1$ *eksplicitno dat sa*:

$$\hat{\mathfrak{q}}_1 = 5y_1^{'}y_1^{''} \tag{23}$$

i gde je parcijalni ostatak $\hat{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}$ *eksplicitno dat sa*:

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}} &= -5y_1^{'}y_1^{''}T - 10(y_1^{'})^3y_2^{''}S_{\mathfrak{g}} \\ &= -5y_1^{'}y_1^{''}\big(3(y_1^{'})^2y_1^{''}y_2^{''} + 2y_1^{''}(y_2^{''})^2\big) - 10(y_1^{'})^3y_2^{''}\big((y_1^{'})^3 + 4y_1^{'}y_2^{''} + 2y_2^{''}\big). \end{aligned} \tag{24}$$

Uvedimo nove promenljive:

$$x = y_{1,1} = y_1^{'}, \quad y = y_{1,2} = y_1^{''}, \quad z = y_{2,2} = y_2^{''}. \tag{25}$$

Da bi odredili Ritt-Kolchinov ostatak izvršimo pseudodeljenje polinoma:

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}} &= -5xy\big(3x^2yz + 2yz^2\big) - 10x^3z\big(x^3 + 4xz + 2z\big) \\ &= \big(-10xy^2 - 40x^3 - 20x^2y\big)z^2 + \big(-15x^3y^2 - 10x^5\big)z \end{aligned} \tag{26}$$

polinomom:

$$\mathfrak{g} = (2x+1)z^2 + x^3z. \tag{27}$$

Prema algoritmu pseudodeljenja dobijamo jednakost:

$$\begin{aligned} (2x+1)^1 \cdot \hat{\mathfrak{r}} = {} & \big(\underbrace{-10xy^2 - 20x^2y - 40x^3}_{\mathfrak{q}}\big) \cdot \mathfrak{g} + \\ & \big(\underbrace{(-20x^4 - 15x^3)\,y^2 + 20x^5y + (20x^6 - 10x^5)}_{\mathfrak{r}}\big), \end{aligned} \tag{28}$$

na osnovu koje je određen pseudo-ostatak:

$$\mathfrak{r} = (-20x^4 - 15x^3)\,y^2 + 20x^5y + (20x^6 - 10x^5). \tag{29}$$

Dakle, Ritt-Kolchinov ostatak je diferencijalni polinom:

$$\mathfrak{r} = \big(-20(y_1^{'})^4 - 15(y_1^{'})^3\big)\,(y_1^{''})^2 + 20(y_1^{'})^5(y_1^{''}) + \big(20(y_1^{'})^6 - 10(y_1^{'})^5\big). \tag{30}$$

Za dva diferencijalna polinoma $\mathfrak{p}$ i $\mathfrak{g}$ jednakost (20) zapisujemo na sledeći način:

$$I_{\mathfrak{g}}^n S_{\mathfrak{g}}^k \mathfrak{p} \equiv \mathfrak{r}_{\mathfrak{p},\mathfrak{g}}\big(\mathrm{mod}\langle \mathfrak{g}\rangle\big), \tag{31}$$

gde je $\langle \mathfrak{g}\rangle$ diferencijalni ideal generisan diferencijalnim polinomom $\mathfrak{g}$ (za definiciju diferencijalnog ideala videti sekciju **2.8**). Napomenimo da u slučaju prstena diferencijalnih polinoma diferencijalni ideal ne mora biti konačno generisan. Ukoliko je diferencijalni ideal $\mathcal{I}$ konačno generisan sa diferencijalnim polinomima $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r$, tj. $\mathcal{I} = \langle \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r\rangle$ tada za svaki diferencijalni polinom $\mathfrak{p}$ iz prstena diferencijalnih polinoma postoji *Ritt-Kolchinov ostatak* $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{p},I}$ koji ispunjava sledeću relaciju:

$$I_{\mathfrak{g}_1}^{n_1} \ldots I_{\mathfrak{g}_r}^{n_r} S_{\mathfrak{g}_1}^{k_1} \ldots S_{\mathfrak{g}_r}^{k_r} \mathfrak{p} \equiv \mathfrak{r}_{\mathfrak{p},I}\big(\mathrm{mod}\,\mathcal{I}\big). \tag{32}$$

Napomenimo da ako je $\mathfrak{r}_{\mathfrak{p},I} = 0$, tada prema [**119**] važi:

$$I_{\mathfrak{g}_1}^{n_1} \ldots I_{\mathfrak{g}_r}^{n_r} S_{\mathfrak{g}_1}^{k_1} \ldots S_{\mathfrak{g}_r}^{k_r} \mathfrak{p} \in \mathcal{I} \tag{33}$$

ili

$$\mathfrak{p} \in \mathcal{I} : \mathfrak{w}^{\infty}, \tag{34}$$

za diferencijalni polinom $\mathfrak{w} = I_{\mathfrak{g}_1} \ldots I_{\mathfrak{g}_r} S_{\mathfrak{g}_1} \ldots S_{\mathfrak{g}_r}$ koji je određen kao proizvod inicijala i separanata od diferencijalnih polinoma $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r$ respektivno. Na osnovu totalne diferencijalne redukcije, u diferencijalnoj algebri se dalje razmatraju pojmovi *autoredukovanog skupa* (*diferencijalnih*) *polinoma* $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r\}$ i *karakterističnog skupa* za pravi diferencijalni ideal $\mathcal{I} = \langle \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r\rangle$ (v. npr. [**39**], [**119**]). U sekciji **2.8.** izložićemo neke osobine diferencijalnih ideala koji se koriste u trećoj glavi ovog rada.

2.6 Diferencijalno zatvorena polja

Izložićemo kratak razvoj teorije diferencijalno zatvorenih polja prema [**112**]. Polazni rezultat je Teorema eliminacije A. SEIDENBERGa [**21**]:

Teorema 2.6.1. *Neka je* $\mathbf{K}$ *diferencijalno polje i neka su* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{g}$ *diferencijalni polinomi nad* $\mathbf{K}$ *sa promenljivima* $y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_k$. *Neka je data formula*:

$$\varphi = \exists y_1 \ldots \exists y_n \psi, \tag{1}$$

za

$$\psi = \bigwedge_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_k) = 0 \quad \wedge \quad \mathfrak{g}(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_k) \neq 0. \tag{2}$$

Tada postoji diferencijalno raširenje $\mathbf{K}'$ *diferencijalnog polja* $\mathbf{K}$ *i formula* $\hat{\varphi}$, *tako da važi*: $\mathbf{K}' \models \varphi \Longleftrightarrow \hat{\varphi}$. *Pri tom,* $\hat{\varphi}$ *se može odrediti kao bezkvantorska formula oblika*:

$$\hat{\varphi} = \bigvee_{j=1}^{r} \hat{\psi}_j \tag{3}$$

za

$$(4)\qquad \hat{\psi}_j = \bigwedge_{i=1}^{m_j} \mathfrak{p}_{ij}(u_1,\ldots,u_k) = 0 \;\wedge\; \mathfrak{g}_j(u_1,\ldots,u_k) \neq 0$$

i neke diferencijalne polinome $\mathfrak{p}_{1j},\ldots,\mathfrak{p}_{s_j j},\mathfrak{g}_j \in K\{u_1,\ldots,u_k\}$ $(1 \leq j \leq r)$.

Napomena 2.6.2. A. SEIDENBERG *je pokazao da se formula* $\hat{\varphi}$ *može efektivno konstruisati iz* φ*.* F. BOULIER 1996. *godine, u radu* [**74**]*, dao je izmene* SEIDENBERG*ovog algoritma koje doprinose njegovoj efikasnosti.*

Na osnovu prethodne SEIDENBERGove teoreme iz 1956. godine, A. ROBINSON je 1959. dao aksiomatiku diferencijalno zatvorenih polja sa sledeće tri aksiome:

***A*.1.** Važe aksiome algebarske teorije polja.

***A*.2.** Važe LEIBNIZove aksiome za izvode teorije diferencijalnih polja.

***A*.3.** Svaka egzistencijalna formula je ekvivalentna odgovarajućoj bezkvantorskoj formuli koja se dobija po SEIDENBERGovoj proceduri (Teorema 2.6.1.).

A. ROBINSON je dokazao modelsku kompletnost teorije diferencijalno zatvorenih polja. Takođe, A. ROBINSON dokazao je da teorija diferencijalno zatvorenih polja karakteristike 0 dopušta eliminaciju kvantora (a time je, u današnjim terminima, dokazao i podmodelsku kompletnost). Napomenimo da za teoriju diferencijalno zatvorenih polja važi *princip prenosa za diferencijalno zatvorena polja*: Za $\mathbf{F} \leq \mathbf{K}$ i polinome $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_k \in F\{x_1,\ldots,x_n\}$, ako sistem jednačina $\mathfrak{p}_1 = 0,\ldots,\mathfrak{p}_k = 0$ ima rešenje u $\mathbf{K}$, onda ima rešenje i u $\mathbf{F}$.

Analizirajući ROBINSONovu aksiomatiku, E. BLUM je 1968. godine je dokazala da umesto šeme aksioma ***A*.3.** možemo koristiti šemu aksiomoma:

***A*.3′.** Za svaki par diferencijalnih polinoma $\mathfrak{p},\mathfrak{g}\in K\{x\}$, $\mathfrak{g}\neq 0$, takvih da je:

$$\mathrm{ord}(\mathfrak{p}) > \mathrm{ord}(\mathfrak{g}),$$

postoji $c\in K$ tako da je:

$$\mathfrak{p}(c) = 0 \text{ i } \mathfrak{g}(c) \neq 0.$$

Primetimo da je BLUMina aksiomatika jednostavnija i prirodnija od ROBINSONove. Dalje, u vezi sa sekcijom **2.3.**, napomenimo da je pojam podmodelske kompletnosti uveo G. SACKS 1972. godine [**35**]. Prema [**112**], G. SACKS je formulisao tvrđenje da diferencijalno zatvorena polja dopuštaju eliminaciju kvantora preko SEIDENBERGove procedure. Napomenimo da je, prema radu [**112**], prvi dokaz da teorija diferencijalno zatvorenih polja u smislu BLUMine aksiomatike dopušta eliminaciju kvantora dao V. WEISPFENNING 1973. godine. Dalje, u ovom radu razmatramo teoriju diferencijalno zatvorenih polja DCF na jeziku $L = \{+,\cdot,D,0,1\}$ sa aksiomama ***A*.1.**, ***A*.2.**, ***A*.3′.** Pri tom, ovde izlažemo neke osnovne osobine diferencijalno zatvorenih polja nulte karakteristike DCF0.

Lema 2.6.3. *Svako diferencijalno zatvoreno polje* $\mathbf{K}$ *jeste i algebarski zatvoreno polje.*

Dokaz. Neka je $\mathfrak{p} \in K[x]$ diferencijalni polinom nultog reda ($\mathrm{ord}(\mathfrak{p}) = 0$), tj. neka je $\mathfrak{p}$ običan algebarski polinom stepena većeg ili jednakog jedan ($\deg(\mathfrak{p}) \geq 1$). Posmatrajmo ma koji nenula element $\mathfrak{g} \in K \backslash \{0\}$, tada je $-1 = \mathrm{ord}(\mathfrak{g}) < \mathrm{ord}(\mathfrak{p})$. Prema BLUMINoj aksiomi, postoji $c \in K$ tako da je $\mathfrak{p}(c) = 0$ i $\mathfrak{g}(c) = \mathfrak{g} \neq 0$. Navedeno dokazuje algebarsku zatvorenost polja $\mathbf{K}$. ■

Istaknimo jednu od osnovnih razlika između algebarski zatvorenih i diferencijalno zatvorenih polja. Za algebarski zatvorena polja nema pravih algebarskih raširenja, dok za diferencijalno zatvoreno polje postoje prava diferencijalna raširenja. Naime, za svako difrencijalno zatvoreno polje $\mathbf{K}$ i element $a \notin K$, tada na $\mathbf{K}\langle a \rangle$ možemo proširiti diferenciranje sa $D(a) = 0$. Dalje, važi tvrđenje:

Teorema 2.6.4. *Za svako diferencijalno polje* $\mathbf{K}$ *postoji diferencijalno zatvoreno raširenje* $\mathbf{H}$.

Napomena 2.6.5. *Prethodno tvrđenje je dokazano sa Posledicom* 2.8.5. *Leme* 2.8.3. (*sekcija* **2.8.**).

Napomena 2.6.6. *Napomenimo da diferencijalno zatvoreno raširenje nije jedinstveno određeno. Može se pokazati, kao što je navedeno u* [**81**, str. 115], *da za diferencijalno polje* $\mathbf{K}$ *postoji diferencijalno zatvoreno raširenje* $\mathbf{H}$ *takvo da je sastavljeno od diferencijalno-algebarskih elemenata nad polaznim poljem.*

Na kraju ove sekcije razmotrimo pojam diferencijalnog zatvorenja. Neka je $\mathbf{K}$ diferencijalno polje, tada *diferencijalno zatvorenje od* $\mathbf{K}$ jeste minimalno diferencijalno zatvoreno raširenje polaznog polja. Tako određeno polje označavaćemo $\overline{\mathbf{K}}$. Može se pokazati [**81**, str. 117] da diferencijalno zatvorenje $\overline{\mathbf{K}}$ predstavlja jedan prost model kompletne teorije generisane sa $\mathsf{DCF0} \cup \Delta_{\mathbf{K}}$ i da važi sledeće tvrđenje (L. BLUM):

Teorema 2.6.7. *Neka je* $\mathbf{K}$ *diferencijalno polje; tada postoji jedinstveno do na izomorfizam određeno diferencijalno zatvorenje* $\overline{\mathbf{K}}$.

Napomena 2.6.8. *Napomenimo da su* A. MARCJA *i* C. TOFALORI *u* [**102**, str. 112], *istakli da za sada nemamo eksplicitno određene primere diferencijalno zatvorenih polja nulte karakteristike (sa netrivijalnim diferenciranjem), kao što za algebarsko zatvorena polja nulte karakteristike imamo eksplicitne primere polja poput polja algebarskih brojeva* $\mathbf{A}$ *i polja kompleksnih brojeva* $\mathbf{C}$.

2.7 Eliminacija kvantora u teoriji diferencijalno zatvorenih polja

Kao što je napomenuto u prethodnoj sekciji, G. SACKS je formulisao tvrđenje da diferencijalno zatvorena polja dopuštaju eliminaciju kvantora preko SEIDENBERGove procedure. U ovoj sekciji dajemo prikaz WEISPFENNINGovog eliminacionog algoritma koji su A. DOLZMANN i T. STURM izložili 2004. u radu [**112**]. Navedeni algoritam je od strane A. DOLZMANNa i T. STURMa realizovan programskim paketom REDLOG (skraćeno od REDUCE i LOGIC), koji su navedeni autori razvili kao nadogradnju programskog paketa REDUCE sa primenama u logici.

Neka je **K** diferencijalno zatvoreno polje i neka je **Z** kopija skupa celih brojeva u tom polju. Posmatrajmo diferencijalni polinom $\mathfrak{p} \in K\{y\}$. Tada se diferencijalni polinom $\mathfrak{p}$ može zapisati kao suma koja se sastoji od sabiraka tipa koeficijent puta diferencijalni monom:

$$\mathfrak{p} = \sum_{\mathfrak{t} \in \mathrm{dm}(\mathfrak{p})} \mathrm{coef}(\mathfrak{p}, \mathfrak{t}) \cdot \mathfrak{t}. \tag{1}$$

U prethodnom zapisu $\mathrm{dm}(\mathfrak{p})$ je skup diferencijalnih monoma, a za fiksirani diferencijalni monom $\mathfrak{t}$ iz $\mathrm{dm}(\mathfrak{p})$ izraz $\mathrm{coef}(\mathfrak{p}, \mathfrak{t})$ jeste suma koeficijenata koji se javljaju uz diferencijalne monome.

Primer 2.7.1. *Diferencijalni polinom* $\mathfrak{p} = y' y''^3 + y' y'' + u_1 y'' + y'' + u_2$ *može se zapisati kao u formuli* (1) *na sledeći način*:

$$\mathfrak{p} = y' y''^3 + y' y'' + (u_1 + 1) y'' + u_2. \tag{2}$$

Tada je $\mathrm{dm}(\mathfrak{p}) = \{y' y''^3, \, y' y'', \, y'', \, 1\}$ *i odatle očitavamo vrednosti odgovarajućih koeficijenata*: $\mathrm{coef}(\mathfrak{p}, y' y''^3) = 1$, $\mathrm{coef}(\mathfrak{p}, y' y'') = 1$, $\mathrm{coef}(\mathfrak{p}, y'') = u_1 + 1$, $\mathrm{coef}(\mathfrak{p}, 1) = u_2$.

U algoritmu koji izlažemo zadržavamo standardne oznake diferencijalne algebre. Neka je $\mathfrak{p} \in K\{y\}$ diferencijalni polinom. Tada koristimo oznake koje su već definisane u sekcijama **2.4**–**2.5**: $\mathrm{ord}(\mathfrak{p})$ je red diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}$, $\deg(\mathfrak{p})$ je stepen diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}$, vodeći koeficijent od $\mathfrak{p}$ u oznaci $I(\mathfrak{p})$ naziva se inicijal diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}$ i konačno, $S(\mathfrak{p}) = \partial \mathfrak{p} / \partial y^{(s)}$ jeste separant diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}$. U ovoj sekciji, dodatno, definišemo *redukt*, u oznaci $\mathrm{red}(\mathfrak{p})$, diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}$ koji predstavlja diferencijalni polinom bez vodećeg terma. Algoritam razmatramo za formulu oblika:

$$\exists \, y \Big(\bigwedge_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i = 0 \ \wedge \ \mathfrak{g} \neq 0 \Big), \tag{3}$$

gde su dati diferencijalni polinomi $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{g} \in \mathbf{Z}\{y, u_1, \ldots, u_k\}$ i gde je y vodeća promenljiva. Razlikujemo slučajeve:

1. Osnovni slučajevi.

1.1 Ako je $\mathfrak{g} = 0$, rezultat eliminacije je zaključak da je (3) netačna formula.

1.2 Ako je u (3) određeno $m = 0$, tada je posmatrana formula ekvivalentna sa bezkavantorskom formulom da $\mathfrak{g}$ nije nula polinom:

$$\bigvee_{\mathfrak{t}\in \mathrm{dm}(\mathfrak{g})} \mathrm{coef}(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \neq 0.$$

1.3 Neka je u (3) određeno $m = 1$ (javlja se samo jedan diferencijalni polinom $\mathfrak{p}_1$) i $\mathfrak{g} = c \in Z\backslash\{0\}$. U ovom slučaju, posmatrana formula je ekvivalentna sa bezkavantorskom formulom disjunkcije $\mathfrak{p}_1$ nije konstanta ili $\mathfrak{p}_1$ nije konstantan nula polinom, što formalno zapisujemo:

$$\mathrm{coef}(\mathfrak{p}_1, 1) = 0 \quad \vee \bigvee_{\mathfrak{t}\in \mathrm{dm}(\mathfrak{p}_1)\backslash\{1\}} \mathrm{coef}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}) \neq 0.$$

1.4 Neka je u (3) određeno $m = 1$ (javlja se samo jedan diferencijalni polinom $\mathfrak{p}_1$) i $\mathfrak{g} = I(\mathfrak{p}_1)\cdot\hat{\mathfrak{g}}$ tako da je ispunjeno: $\mathrm{ord}(\hat{\mathfrak{g}}) < \mathrm{ord}(\mathfrak{p}_1)$. Samim tim, $\mathrm{ord}(\mathfrak{p}_1) \neq 0$ i $\mathfrak{g} \neq 0 \Longleftrightarrow \hat{\mathfrak{g}} \neq 0$. U ovom slučaju, posmatrana formula je ekvivalentna sa bezkvantorskom formulom konjukcije nije $\mathfrak{p}$ nula polinom i nije $\hat{\mathfrak{g}}$ nula polinom, što formalno zapisujemo:

$$\bigvee_{\mathfrak{t}\in \mathrm{dm}(\mathfrak{p}_1)} \mathrm{coef}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}) \neq 0 \quad \wedge \bigvee_{\mathfrak{t}\in \mathrm{dm}(\hat{\mathfrak{g}})} \mathrm{coef}(\hat{\mathfrak{g}}, \mathfrak{t}) \neq 0.$$

1.5 Neka je u (3) određeno $m = 1$ (javlja se samo jedan diferencijalni polinom $\mathfrak{p}_1$) i $\mathfrak{g} = I(\mathfrak{p}_1) \cdot \hat{\mathfrak{g}}$ tako da je ispunjeno: $\mathrm{ord}(\hat{\mathfrak{g}}) = \mathrm{ord}(\mathfrak{p}_1)$. Neka je $u = y^{(k)}$ lider diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}_1$ i neka je $d = \deg(\mathfrak{p}_1)$ stepen tog diferencijalnog polinoma u odnosu na lider. Izdvojimo inicijalni koeficijent I_d diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}_1$. Tada je $\mathfrak{p}_1 = I_d u^d + \ldots + I_0$. Po pretpostavci $\mathfrak{g} = I(\mathfrak{p}_1)\cdot\hat{\mathfrak{g}} = I_d \cdot \hat{\mathfrak{g}}$ i takođe: $\mathfrak{g} = I_d(J_e u^e + \ldots + J_0)$, gde je $e = \deg(\mathfrak{g})$ stepen tog diferencijalnog polinoma u odnosu na isti lider. Samim tim, postoji pseudo-ostatak $\mathfrak{r}$ tako da $\mathfrak{a}^k I_d^{de}\hat{\mathfrak{g}}^d = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{r}$, za $\mathfrak{a}$ vodeći term od $\mathfrak{p}_1$ i neko $k \in N_0$. Sad (3) je ekvivalentno sa činjenicom da postoji y tako da važi $\mathfrak{p}_1 = 0 \wedge \mathfrak{r} \neq 0$, što postaje prethodni slučaj. Samim tim, formula (3) je ekvivalentna sa uslovom:

$$\bigvee_{\mathfrak{t}\in \mathrm{dm}(\mathfrak{p}_1)} \mathrm{coef}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}) \neq 0 \quad \wedge \bigvee_{\mathfrak{t}\in \mathrm{dm}(\mathfrak{r})} \mathrm{coef}(\mathfrak{r}, \mathfrak{t}) \neq 0.$$

Napomenimo da se naredni slučaj za $m = 1$ kad je $\mathrm{ord}(\mathfrak{g}) > \mathrm{ord}(\mathfrak{p}_1)$ razmatra u slučaju rekurzije **2.2.2.**

2. Slučajevi rekurzije. Neka je $s_i = \operatorname{ord}(\mathfrak{p}_1)$ i $d_i = \deg(\mathfrak{p}_i)$ za $i \in \{1, \ldots, m\}$. Ne umanjujući opštost neka su uređeni parovi leksikografski uređeni $(s_1, d_1) \geq \ldots \geq (s_m, d_m)$ u skupu N^2. Slučajeve rekurzije samo nabrajamo bez detaljnije analize:

2.1 Ako je $\deg(\mathfrak{p}_m) = 0$, tada se diferencijalna promenljiva y ne javlja u $\mathfrak{p}_m$ i ova procedura se rekurzivno primenjuje na slučaj formule:

$$\exists\, y\Big(\bigwedge_{i=1}^{m-1} \mathfrak{p}_i = 0 \ \wedge\ \mathfrak{g} \neq 0\Big).$$

2.2 Neka je $\deg(\mathfrak{p}_m) > 0$, tada se diferencijalna promenljiva y javlja u $\mathfrak{p}_m$. Tada su A. Dolzamann i T. Sturm umesto formule φ:

$$\exists\, y\Big(\bigwedge_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i = 0 \ \wedge\ \mathfrak{g} \neq 0\Big)$$

razmatrali ekvivalentnu formulu datu kao disjunkciju $\varphi_1 \vee \varphi_2$ sa članovima:

$$\varphi_1 = \exists\, y\Big(\bigwedge_{i=1}^{m-1} \mathfrak{p}_i = 0 \ \wedge\ I(\mathfrak{p}_m) = 0 \ \wedge\ \operatorname{red}(\mathfrak{p}_m) = 0 \ \wedge\ \mathfrak{g} \neq 0\Big),$$
$$\varphi_2 = \exists\, y\Big(\bigwedge_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i = 0 \ \wedge\ I(\mathfrak{p}_m)\cdot \mathfrak{g} \neq 0\Big).$$

Naime, oni pokazuju da za formulu φ_1 postoji ekvivalentna bezkvantorska formula $\hat{\varphi}_1$ i za formulu φ_2 postoji ekvivalentna bezkvantorska formula $\hat{\varphi}_2$. Tada je φ ekvivalentna bezkvantorskoj formuli $\hat{\varphi}_1 \vee \hat{\varphi}_2$. Do tog zaključka A. Dolzmann i T. Sturm dolaze razmatrajući sledeće rekurzivne podslučajeve:

2.2.1 Neka je $m = 1$ i $\operatorname{ord}(\mathfrak{g}) \leq \operatorname{ord}(\mathfrak{p}_1)$. Tada se procedura svodi na razmatrane slučajeve **1.3−1.5**.

2.2.2 Neka je $m = 1$ i $\operatorname{ord}(\mathfrak{g}) > \operatorname{ord}(\mathfrak{p}_1)$. Tada se procedura rešava pseudodeljenjem polinoma $S(\mathfrak{p}_1)^{d_1}\mathfrak{g}$ sa polinomom $\mathfrak{p}_1^{s'-s_1}$ za $s' = \operatorname{ord}(\mathfrak{g})$ ili pseudodeljenjem polinoma $S(S(\mathfrak{p}_1))^{d_1}\mathfrak{p}_1$ sa polinomom $S(\mathfrak{p}_1)^{s_1 - s''}$ za $s'' = \operatorname{ord}(S(\mathfrak{p}_1))$.

2.2.3 Neka je $m > 1$. Tada se procedura rešava nalaženjem ostatka $\mathfrak{r}$ pri pseudodeljenju polinoma $I(\mathfrak{p}_m^{(s_{m-1}-s_m)})^{d_{m-1}}\mathfrak{p}_{m-1}$ sa polinomom $\mathfrak{p}_m^{(s_{m-1}-s_m)}$. Rezultat parcijalne eliminacije za φ_2 dobija se rekurzivnim pozivanjem procedure na formulu:

$$\exists\, y\Big(\bigwedge_{i=1}^{m-2} \mathfrak{p}_i = 0 \ \wedge\ \mathfrak{p}_m = 0 \ \wedge\ \mathfrak{r} = 0 \ \wedge\ I(\mathfrak{p}_m)\cdot \mathfrak{g} \neq 0\Big).$$

U drugom delu ove sekcije, navodimo dokaz eliminacije kvantora za teoriju diferencijalno zatvorenih polja kao direktnu posledicu BLUMinog kriterijuma. Naime, važe tvrđenja [**81**, str. 116, 117]:

Teorema 2.7.2. *Teorija* DCF0 *diferencijalno zatvorenih polja nulte karakteristike jeste modelsko kompletiranje teorije* DF0 *diferencijalnih polja nulte karakteristike.*

Dokaz. Prema BLUMinom kriterijumu, za modelsku kompletnost (Teorema 2.3.10.), dovoljno je dokazati sledeće tvrđenje:

> Neka je $\mathbf{K}$ diferencijalno polje koje ima diferencijalno zatvoreno raširenje $\mathbf{H}/\mathbf{K}$, tako da je κ^{+}–zasićeno za $\kappa = \max\{\aleph_0, |K|\}$. Tada za svako prosto diferencijalno raširenje $\mathbf{K}\langle c\rangle$ od $\mathbf{K}$ postoji $b \in H$, tako da važi izomorfizam $\mathbf{K}\langle b\rangle \cong \mathbf{K}\langle c\rangle$.

Navedeno tvrđenje dokazujemo razlikovanjem slučajeva:

1. Element c je diferencijalno-algebarski nad $\mathbf{K}$. Tada postoji nenula diferencijalni polinom $\mathfrak{p} \in \mathbf{K}\{y\}$, takav da $\mathfrak{p}(c) = 0$. Pretpostavimo da je $\mathfrak{p}$ najmanjeg reda i za dati red najmanjeg stepena. Tada razmotrimo skup neprotivrečnih formula π (tip), koji se sastoji od diferencijalne jednakosti $\mathfrak{p}(y) = 0$ i diferencijalnih nejednakosti $\mathfrak{g}(y) \neq 0$, $\mathfrak{g} \in \mathbf{K}\{y\}$, tako da $0 \leq \mathrm{ord}(\mathfrak{g}) < \mathrm{ord}(\mathfrak{p})$. Budući da je $\mathbf{H}$ diferencijalno zatvoreno polje, svaki konačan podskup skupa formula π se realizuje u $\mathbf{H}$. Zbog zasićenosti modela $\mathbf{H}$ postoji element $b \in H$, takav da se za $y = b$ realizuje ceo tip π. Na osnovu razmatranja o diferencijalno-algebarskim elementima u sekciji **2.4** (str. 47) sleduje da je $\mathbf{K}\langle b\rangle \cong \mathbf{K}\langle c\rangle$.

2. Element c je diferencijalno-transcendentan nad $\mathbf{K}$. Tada razmotrimo skup neprotivrečnih formula π (tip), koji se sastoji od diferencijalnih nejednakosti $\mathfrak{g}(y) \neq 0$, $\mathfrak{g} \in \mathbf{K}\{y\}$, tako da $0 \leq \mathrm{ord}(\mathfrak{g})$. Budući da je $\mathbf{H}$ diferencijalno zatvoreno polje, svaki konačan podskup skupa formula π se realizuje u $\mathbf{H}$. Zbog zasićenosti modela $\mathbf{H}$ postoji element $b \in H$, takav da se za $y = b$ realizuje ceo tip π. Na osnovu razmatranja o diferencijalno-transcendentnim elementima u sekciji **2.4** (str. 47) sleduje da je $\mathbf{K}\langle b\rangle \cong \mathbf{K}\langle c\rangle$. ■

Teorema 2.7.3. *Teorija* DCF0 *diferencijalno zatvorenih polja nulte karakteristike jeste kompletna i dopušta eliminaciju kvantora.*

Dokaz. Prema prethodnoj teoremi, teorija diferencijalno zatvorenih polja karakteristike 0 jeste modelski kompletna, što po Teoremi 2.3.1. znači da je $\mathsf{DCF0} \cup \Delta(\mathbf{Q})$ kompletna teorija. Budući da $\mathbf{Q}$ jedinstveno određuje diferencijalno potpolje koje se utapa u ma koji model teorije DCF0, na osnovu postojanja prostog modela, prema Teoremi 2.3.12. sleduje da je teorija diferencijalno zatvorenih polja karakteristike 0 jedna kompletna teorija. Dalje, za dokaz da teorija diferencijalno zatvorenih polja karakteristike 0 dopušta eliminaciju kvantora dovoljno je dokazati, prema ROBINSONovom kriterijumu (Teoremi 2.3.8.), da je ta teorija modelsko kompletiranje neke univerzalne teorije. Tražena univerzalna teorija je teorija diferencijalnih domena karakteristike 0 (prema Teoremi 2.4.4. svako polje razlomaka diferencijalnog domena se na jedinstven način utapa u diferencijalno polje, ovde u diferencijalno zatvoreno polje karakteristike 0). ■

Posledica 2.7.4. (Seidenberg) *Neka je S sistem od konačno mnogo diferencijalno-algebarskih jednačina po n nepoznatih $y_1, \dots, y_n$ i njihovih izvoda, tako da su te jednačine sa racionalnim koeficijentima. Tada je rekurzivno odlučivo da li sistem S ima rešenja u nekom diferencijalnom polju karakteristike* 0.

Napomena 2.7.5. A. SEIDENBERG [**22**], [**30**] *je dokazao da se svako diferencijalno polje koje je konačno generisano nad poljem* $\mathbf{Q}$ *utapa u diferencijalno polje holomorfnih funkcija koje su meromorfne u nekom otvorenom skupu kompleksne ravni koji sadrži* 0*. Skup takvih funkcija obrazuje diferencijalno polje $\mathcal{N}$ u odnosu na standardno diferenciranje $D\mathfrak{f} = d\mathfrak{f}/dz$* [**81**, str. 110]. *U tom smislu, rezultat iz prethodne posledice može se preneti i sa diferencijalnog polja karakteristike* 0 *na diferencijalno polje $\mathcal{N}$.*

2.8 Diferencjalni ideali

Neka je $\mathbf{P}$ diferencijalni prsten, tada skup C_P jezgro operatora diferenciranja $'$ nazivamo *konstantama diferencijalnog prstena*. Skup $C_P \subseteq P$ određuje diferencijalni potprsten diferencijalnog prstena $\mathbf{P}$. Važi tvrđenje:

Primer 2.8.1. *Neka je* $\mathbf{K}$ *diferencijalno polje karakteristike $k \neq 2$ i $C_K \neq K$ sa netrivijalnim izvodom D. Tada postoji $a \in K \backslash C_K$ tako da $D^2(a) \neq 0$. Ako je $D^2(a) \neq 0$ tvrđenje je dokazano. Neka je $D^2(a) = 0$, dokazujemo da tada $D^2(a^2) \neq 0$. Ukoliko bi bilo $D^2(a) = 0$ i $D^2(a^2) = 0$, tada bi imali jednakost*:

$$(1) \quad 0 = D^2(a^2) = D\big(D(a^2)\big) = D\big(2aD(a)\big) = 2\big(\big(D(a)\big)^2 + aD^2(a)\big) = 2\big(D(a)\big)^2.$$

Odatle proizilazi $D(a) = 0$, što nije jer $a \in K \backslash C_K$. Za diferencijalno polje $\mathbf{K}$ *karakteristike $k \neq 2$ i $C_K \neq K$ važi da za svaki $n \in N$ postoji $a \in K \backslash C_K$, tako da $D^n(a) \neq 0$. Ovim je pokazano da višestruki izvod D^n, za svako $n \in N$, nije trivijalan.*

Neka je $\mathbf{P}$ diferencijalni prsten, ideal $I \subseteq F$ naziva se *diferencijalni ideal* ako važi:

$$(2) \qquad a \in I \implies a' \in I.$$

Za diferencijalni polinom $\mathfrak{p} \in P\{X\}$ posmatrajmo skup:

$$(3) \qquad I(\mathfrak{p}) = \big\{\mathfrak{g} \in P\{X\} \,|\, S_{\mathfrak{p}}^k \cdot \mathfrak{g} \in \langle \mathfrak{p} \rangle \text{ za neki } k \in N\big\},$$

gde je $\langle \mathfrak{p} \rangle$ diferencijalni ideal generisan sa diferencijalnim polinomom $\mathfrak{p}$ i $S_{\mathfrak{p}}$ separant diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}$ (videti sekciju **2.5**). Tada važe tvrđenja [**72**, str. 40, 41]:

Lema 2.8.2. *Skup $I(\mathfrak{p})$ određuje diferencijalni ideal u diferencijalnom prstenu* $\mathbf{P}$.

Dokaz. Važi $P\{X\}\,I(\mathfrak{p}) \subseteq I(\mathfrak{p})$. Dalje, neka $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \in I(\mathfrak{p})$. Tada za neke prirodne brojeve $k_1, k_2 \in N$, $k_1 \leq k_2$, važi: $S_\mathfrak{p}^{k_1} \cdot \mathfrak{g}_1 \in \langle\mathfrak{p}\rangle$ i $S_\mathfrak{p}^{k_2} \cdot \mathfrak{g}_2 \in \langle\mathfrak{p}\rangle$. Odatle: $S_\mathfrak{p}^{k_2} \cdot (\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2) \in \langle\mathfrak{p}\rangle$, tj. $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 \in I(\mathfrak{p})$. Znači da je $I(\mathfrak{p})$ ideal. Dokazujemo da je $I(\mathfrak{p})$ jedan diferencijalni ideal. Zaista, neka je $S_\mathfrak{p}^n \mathfrak{g} \in \langle\mathfrak{p}\rangle$ (za neko n), tada postoji $\mathfrak{q} \in P\{X\}$ tako da $S_\mathfrak{p}^n \mathfrak{g} = \mathfrak{q}\,\mathfrak{p}$, odnosno $S_\mathfrak{p}^{n+1} \mathfrak{g} = S_\mathfrak{p} \mathfrak{q}\,\mathfrak{p}$. Dalje, važi implikacija:

$$S_\mathfrak{p}^n \mathfrak{g} \in \langle\mathfrak{p}\rangle \implies D\big(S_\mathfrak{p}^{n+1}\mathfrak{g}\big) \in \langle\mathfrak{p}\rangle, \tag{4}$$

jer $\mathfrak{p}, D(\mathfrak{p}) \in \langle\mathfrak{p}\rangle$. Tada, iz $D\big(S_\mathfrak{p}^{n+1}\mathfrak{g}\big) = (n+1) S_\mathfrak{p}^n D(S_\mathfrak{p})\,\mathfrak{g} + S_\mathfrak{p}^{n+1}\,\mathfrak{g}'$, imamo zaključak:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \in I(\mathfrak{p}) &\implies S_\mathfrak{p}^n \mathfrak{g} \in \langle\mathfrak{p}\rangle \qquad\qquad \text{(za neko } n)\\ &\underset{(4)}{\implies} D\big(S_\mathfrak{p}^{n+1}\mathfrak{g}\big) \in \langle\mathfrak{p}\rangle\\ &\implies S_\mathfrak{p}^{n+1}\,\mathfrak{g}' = D\big(S_\mathfrak{p}^{n+1}\mathfrak{g}\big) - (n+1) D(S_\mathfrak{p}) \cdot \big(\, S_\mathfrak{p}^n \mathfrak{g}\,\big) \in \langle\mathfrak{p}\rangle\\ &\implies \mathfrak{g}' \in I(\mathfrak{p}). \;\blacksquare \end{aligned} \tag{5}$$

Lema 2.8.3. *Neka je u diferencijalnom prstenu* **P** *karakteristike nula diferencijalni polinom* $\mathfrak{p} \in P\{X\}$ *nesvodljiv reda* n. *Ako je* $\mathfrak{g} \in \langle\mathfrak{p}\rangle \backslash \{0\}$, *tada* $\mathfrak{g}$ *je reda najmanje* n. *Posebno, ako je* $\mathfrak{g}$ *tačno reda* n *tada važi*: $\mathfrak{p} \,\big|\, \mathfrak{g}$.

Dokaz. Neka se lider $X = u_\mathfrak{p}$ diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}$ javlja u diferencijalnom polinomu sa najviše ℓ-tim stepenom $u_\mathfrak{p}^\ell$ $(\ell \geq 1)$. Uzastopnim diferenciranjem diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}$ dobijamo:

$$\mathfrak{p}^{(\ell)} = D^\ell(\mathfrak{p}) = S_\mathfrak{p} \cdot D^\ell(u_\mathfrak{p}) + T_\ell = S_\mathfrak{p} \cdot X^{n+\ell} + T_\ell \tag{6}$$

tako da izrazi T_ℓ jesu sume termova koji sadrže izvode po X reda najviše $n + \ell - 1$ za $1 \leq \ell \leq k$. Neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0\mathfrak{p} + \mathfrak{a}_1\mathfrak{p}^{(1)} + \ldots + \mathfrak{a}_k\mathfrak{p}^{(k)} \in \langle\mathfrak{p}\rangle \backslash \{0\}$. Sredimo polinom $\mathfrak{g}$ po stepenima X. Tada zamenom izraza za X^{n+k} iz (6) u prethodni izraz za $\mathfrak{g}$, nakon sređivanja, zaključujemo da postoji prirodan broj m tako da važi:

$$S_\mathfrak{p}^m \mathfrak{g} = \mathfrak{b}_{k-1}\mathfrak{p}^{(k-1)} + \ldots + \mathfrak{b}_0\mathfrak{p}. \tag{7}$$

Nastavljajući redukcije iz (6), redom za sve niže stepene diferencijalne promenljive X, zaključujemo da postoji $\mathfrak{c} \in P\{X\}$ tako da:

$$S_\mathfrak{p}^m \mathfrak{g} = \mathfrak{c}\,\mathfrak{p}. \tag{8}$$

Stepen separanta $S_\mathfrak{p}$ je manji od stepena polinoma $\mathfrak{p}$, stoga $\mathfrak{p}$ ne deli $S_\mathfrak{p}$. Na osnovu nesvodljivosti polinoma $\mathfrak{p}$, zaključujemo da $\mathfrak{g}$ je reda najmanje n. Specijalno ako je $\mathfrak{g}$ reda n, tada važi: $\mathfrak{p} \,\big|\, \mathfrak{g}$. $\blacksquare$

Napomena 2.8.4. *U* [**72**] *je pokazano da tvrđenje Leme važi kada se diferencijalni ideal* $\langle\mathfrak{p}\rangle$ *zameni sa diferencijalnim idealom* $I(\mathfrak{p})$.

Posledica 2.8.5. *Na osnovu ove Leme moguće je dokazati Teoremu* 2.6.4. *da svako diferencijalno polje* $\mathbf{K}$ *ima diferencijalno zatvoreno raširenje* $\mathbf{H}$. *Zaista, posmatrajmo dva diferencijalna polinoma* $\mathfrak{p}, \mathfrak{g} \in K\{X\} \backslash \{0\}$ *i neka je* $n = \operatorname{ord}(\mathfrak{p}) > \operatorname{ord}(\mathfrak{g})$. *Neka je* $\mathfrak{h}$ *nerastavljiv faktor od* $\mathfrak{p}$ *koji sadrži lider* $X^{(n)}$. *Na osnovu prethodne Leme, polinom* $\mathfrak{g}$ *ne može pripadati idealu* $\mathcal{I} = I(\mathfrak{p})$. *Dalje, ideal* $\mathcal{I}$ *je prost diferencijalni ideal i* $\mathbf{K}\{X\}/\mathcal{I}$ *je integralni domen. Primetimo da se diferencijalno polje utapa kao diferencijalni prsten u integralni domen* $\mathbf{K}/\mathcal{I}$, *pri čemu se diferenciranje na količničkoj strukturi* $\mathbf{K}/\mathcal{I}$ *uvodi sa* $D(\mathfrak{p} + \mathcal{I}) = D(\mathfrak{p}) + \mathcal{I}$. *Neka je* $\mathbf{F}$ *polje razlomaka integralnog domena* $\mathbf{K}/\mathcal{I}$. *Prema konstrukciji ideala* $\mathcal{I}$, *diferencijalni polinom* $\mathfrak{p}$ *ima* $X + \mathcal{I}$ *za nulu i pri tom* $\mathfrak{g}(X + \mathcal{I}) = \mathfrak{g}(X) + \mathcal{I} \neq \mathcal{I}$, *jer* $g \notin \mathcal{I}$. *Samim tim,* $X + \mathcal{I}$ *nije nula za* $\mathfrak{g}$. *Dakle, u ekstenziji* $\mathbf{F}/\mathbf{K}$ *polinom* $\mathfrak{p}$ *ima sve nule. Nastavljajući taj proces, uniranjem odgovarajućih polja, zaključujemo da postoji diferencijalno zatvoreno raširenje* $\mathbf{H}$ *diferencijalnog polja* $\mathbf{K}$. *Ovim je ujedno dokazana i Teorema* 2.6.4. ■

Lema 2.8.6. *Neka je* $\mathbf{P}$ *diferencijalni prsten karakteristike nula. Za nesvodljiv diferencijalni polinom* $\mathfrak{p} \in P\{X\}$, $\mathfrak{p} \neq 0$, *diferencijalni ideal* $I(\mathfrak{p})$ *je prost. Obrnuto, svaki nenula prost diferencijalni ideal u* $\mathbf{P}\{X\}$ *jeste oblika* $I(\mathfrak{p})$ *za neki nenula nesvodljiv diferencijalni polinom* $\mathfrak{p} \in P\{X\}$.

Dokaz. Dokazujemo da je diferencijalni ideal $I(\mathfrak{p})$ prost. Neka za dva nenula diferencijalna polinoma $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1 \in P\{X\}$ važi $\mathfrak{g}_1 \cdot \mathfrak{g}_2 \in I(\mathfrak{p})$. Tada postoje parcijalni ostaci $\mathfrak{r}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{p}}, \mathfrak{r}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{p}} \in P\{X\}$ takvi da za separant $S_\mathfrak{p}$ i neke prirodne brojeve m_1, m_2 važi:

$$S_\mathfrak{p}^{m_1} \mathfrak{g}_1 \equiv \mathfrak{r}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{p}} \big(\mathrm{mod}\ \langle \mathfrak{p} \rangle\big) \quad \text{i} \quad S_\mathfrak{p}^{m_2} \mathfrak{g}_2 \equiv \mathfrak{r}_{\mathfrak{g}_2,\mathfrak{p}} \big(\mathrm{mod}\ \langle \mathfrak{p} \rangle\big). \tag{9}$$

Samim tim:

$$S_\mathfrak{p}^{m_1+m_2} \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \equiv \mathfrak{r}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{p}} \mathfrak{r}_{\mathfrak{g}_2,\mathfrak{p}} \big(\mathrm{mod}\ \langle \mathfrak{p} \rangle\big). \tag{10}$$

Iz pretpostavke $\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \in I(\mathfrak{p})$ sleduje da $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_r \in I(\mathfrak{p})$. Prema prethodnoj Lemi $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2$ je reda najmanje $n = \operatorname{ord}(\mathfrak{p})$ i važi $\mathfrak{p} | \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2$. Na osnovu nesvodljivosti polinoma $\mathfrak{p}$ sleduje da $\mathfrak{p} | \mathfrak{r}_1$ ili $\mathfrak{p} | \mathfrak{r}_2$. Neka je za indeks $i \in \{1, 2\}$ ispunjen uslov $\mathfrak{p} | \mathfrak{r}_i$, tada $S_\mathfrak{p}^{m_i} \mathfrak{g}_i \in \langle \mathfrak{p} \rangle$ i time $\mathfrak{g}_i \in I(\mathfrak{p})$. Dakle $\mathfrak{g}_1 \in I(\mathfrak{p})$ ili $\mathfrak{g}_2 \in I(\mathfrak{p})$. Znači da je posmatrani ideal $I(\mathfrak{p})$ prost.

Neka je $\mathcal{I}$ prost diferencijalni ideal u $P\{X\}$ i izdvojimo iz tog ideala nenula nesvodljiv diferencijalni polinom $\mathfrak{p}$ koji je najmanjeg reda i za taj red najmanjeg stepena. Dokazujemo da je $\mathcal{I} = I(\mathfrak{p})$. Za proizvoljni diferencijalni polinom $\mathfrak{g} \in I(\mathfrak{p})$ postoji prirodan broj m, takav da $S_\mathfrak{p}^m \mathfrak{g} \in \langle \mathfrak{p} \rangle$. Kako je diferencijalni polinom $\mathfrak{p}$ iz diferencijalnog ideala $\mathcal{I}$, tada je $\langle \mathfrak{p} \rangle \subseteq \mathcal{I}$. Samim tim, $S_\mathfrak{p}^m \mathfrak{g} \in \mathcal{I}$. Pošto je separant $S_\mathfrak{p}$ nižeg reda od polinoma $\mathfrak{p}$ i ideal $\mathcal{I}$ je prost, mora biti $\mathfrak{g} \in \mathcal{I}$. Znači da je $I(\mathfrak{p}) \subseteq \mathcal{I}$. Obrnuto, posmatrajmo proizvoljan polinom $\mathfrak{g} \in \mathcal{I}$. Odredimo Ritt-Kolchinov ostatak $\mathfrak{r}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ pri Ritt-Kolchinovoj redukciji polinoma $\mathfrak{g}$ sa polinomom $\mathfrak{p}$:

$$I_\mathfrak{p}^k S_\mathfrak{p}^m \mathfrak{g} = \mathfrak{q}_m D^m(\mathfrak{p}) + \mathfrak{q}_{m-1} D^{m-1}(\mathfrak{p}) + \ldots + \mathfrak{q}_1 D(\mathfrak{p}) + \mathfrak{r}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}, \tag{11}$$

gde je $I_{\mathfrak{p}}$ inicijal diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}$ $(k, m \in N)$ i $\mathfrak{q}_j$ diferencijalni polinomi $(1 \leq j \leq m)$. Primetimo, Ritt-Kolchinov ostatak $\mathfrak{r}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ ne sadrži izvode od $u_{\mathfrak{p}}$ i nižeg je stepena od stepena $u_{\mathfrak{p}}$ diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}$. Kako su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{p}$ u diferencijalnom idealu $\mathcal{I}$, tada je $\mathfrak{r}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ takođe u diferencijalnom idealu $\mathcal{I}$. Pošto je $\mathfrak{r}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ nižeg reda od $\mathfrak{p}$, saglasno polaznom određenju diferencijalnog polinoma $\mathfrak{p}$, sleduje $\mathfrak{r}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}} = 0$. Dalje, budući da je Ritt-Kolchinov ostatak $\mathfrak{r}_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ ujedno i pseudo-ostatak iz (11) proizilazi da $\mathfrak{p} | S_{\mathfrak{p}}^m \mathfrak{g}$ (jer je $I_{\mathfrak{p}}$ inicijal za diferencijalni polinom $\mathfrak{p}$). Odatle sleduje $S_{\mathfrak{p}}^m \mathfrak{g} \in \langle \mathfrak{p} \rangle$, čime je dokazano $\mathfrak{g} \in I(\mathfrak{p})$. Samim tim $\mathcal{I} \subseteq I(\mathfrak{p})$. Sveukupno $\mathcal{I} = I(\mathfrak{p})$. ■

Neka je $\mathbf{P}$ diferencijalni prsten karakteristike nula. Neka je $\mathcal{I} \subseteq P$ prost nenula diferencijalni ideal. Tada, prema prethodnom tvrđenju, postoji nesvodljiv polinom $\mathfrak{p}$, takav da je $\mathcal{I} = I(\mathfrak{p})$. Takav polinom nazivamo *minimalan polinom prostog diferencijalnog ideala* $\mathcal{I}$. Red n minimalnog polinoma $\mathfrak{p}$ određuje *diferencijalni rang prostog diferencijalnog ideala* $\mathcal{I}$, što zapisujemo $\mathrm{RD}(\mathcal{I}) = n$. Specijalno za nula ideal $\mathcal{I} = \langle 0 \rangle$ definišemo $\mathrm{RD}(\mathcal{I}) = \omega$.

Neka je $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$ i $\alpha \in K \backslash F$. Uvedimo oznaku $I(\alpha/F)$ za *ideal diferencijalnih polinoma iz $F\{X\}$ koji se anuliraju u elementu α*. Elementi tog ideala su diferencijalni polinomi $\mathfrak{g} \in F\{X\}$, takvi da $\mathfrak{g}(\alpha) = 0$. U tom idealu postoji nenula nesvodljiv diferencijalni polinom $\mathfrak{p}$ koji je najmanjeg reda i za taj red najmanjeg stepena važi:

$$I(\alpha/K) = I(\mathfrak{p}) \Big(= \big\{ \mathfrak{g} \in P\{X\} \mid S_{\mathfrak{p}}^k \cdot \mathfrak{g} \in \langle \mathfrak{p} \rangle \text{ za neki } k \in N \big\} \Big). \tag{12}$$

Odatle, na osnovu prethodne leme, ideal $I(\alpha/K)$ je prost diferencijalni ideal u $\mathbf{F}[X]$. Ako je $I(\alpha/F) \neq \langle 0 \rangle$, tada element $\alpha \in K \backslash F$ jeste diferencialno-algebarski nad F. U suprotnom ako je $I(\alpha/F) = \langle 0 \rangle$, tada element $\alpha \in K \backslash F$ jeste diferencijalno-transcendentan nad F.

Važi tvrđenje [**72**, str. 42]:

Teorema 2.8.7. *Neka je $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$ i $\alpha \in K \backslash F$. Tada je $\mathrm{RD}\big(I(\alpha/F)\big)$ diferencijalni rang prostog diferencijalnog ideala $I(\alpha/F)$ jednak stepenu transcendentnosti algebarskog polja $\mathbf{F}\langle \alpha \rangle$, tj.*

$$\mathrm{RD}\big(I(\alpha/F)\big) = \mathrm{tr.deg}\big(\mathbf{F}\langle \alpha \rangle\big). \tag{13}$$

Dokaz. Neka je $\mathrm{RD}\big(I(\alpha/F)\big) = \omega$, tada α nije nula nijednog polinoma iz $F\{X\}$. Samim tim, obično polje $\mathbf{F}\langle \alpha \rangle$ je izomorfno sa poljem $\mathbf{F}(X_0, X_1, \ldots)$ nastalo raširenjem polja F sa prebrojivo mnogo algebaski nezavisnih promenljivih. Dalje, neka je $\mathrm{RD}\big(I(\alpha/F)\big) = n$ konačan prirodan broj. Samim tim, postoji minimalni polinom $\mathfrak{p}$, reda n, takav da važi jednakost $I(\alpha/F) = I(\mathfrak{p})$, za $\alpha \in K \backslash F$. Tada je $\mathfrak{p}(\alpha) = 0$ i elementi $\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n-1)}$ su algebarski nezavisni i važi $\mathbf{F}\langle \alpha \rangle = \mathbf{F}(\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n-1)})$ (sekcija **2.4.**, str. 47). Stoga je $\alpha^{(n+j)}$ algebarski element nad $\mathbf{F}\langle \alpha \rangle$, za svako $j \in N_0$. Samim tim, skup $\{\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n-1)}\}$ jeste baza transcendentnosti za polje $\mathbf{F}\langle \alpha \rangle$. Sveukupno važi navedena jednakost. ■

2.9 Diferencijalno-algebarska raširenja

U ovom delu izlažemo, prema radovima [**126**] i [**127**], neke osobine proširenja diferencijalnih polja, koje su analogne osobinama proširenja algebarskih polja (bez diferencijalnih operatora). Neka je $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$ i $\beta \in K \backslash F$, tada $\mathbf{L}\langle\beta\rangle$ određuje najmanje diferencijalno potpolje od diferencijalnog polja $\mathbf{K}$ koje sadrži $L \cup \{\beta\}$. Za diferencijalni polinom $\mathfrak{p} \in F[y, y_1, y_2, \ldots, y_n]$ jednačina $\mathfrak{p}(y, Dy, D^2y, \ldots, D^ny) = 0$ naziva se *diferencijalno-algebarska jednačina po y*. Važe tvrđenja [**127**]:

Lema 2.9.1. *Neka je* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i* $\beta \in K$*. Tada je element* β *diferencijalno-algebarski nad poljem* $\mathbf{F}$ *ako i samo ako je* $\mathrm{tr.deg}\big(\mathbf{F}\langle\beta\rangle \,|\, \mathbf{F}\big) < \infty$.

Dokaz. Neka je β diferencijalno-algebarski nad poljem $\mathbf{F}$. Element β zadovoljava jednu netrivijalnu diferencijalno-algebarsku jednačinu $\mathfrak{p}(y, Dy, D^2y, \ldots, D^ny) = 0$ za neki minimalni diferencijalni polinom $\mathfrak{p} \in F[y, y_1, y_2, \ldots, y_n]$, $\mathfrak{p} \neq 0$, koji je upravo reda $n = \mathrm{ord}(\mathfrak{p})$. Tada elementi $\beta, D\beta, D^2\beta, \ldots, D^n\beta$ jesu algebarski zavisni nad poljem $\mathbf{F}$, $\mathrm{tr.deg}\big(\mathbf{F}(\beta)|\mathbf{F}\big) = n$ i pri tom:

$$I(\beta/\mathbf{F}) = \big\{\mathfrak{g} \in F\{X\} \,|\, \mathfrak{g}(\beta) = 0\big\} = I(\mathfrak{p}). \tag{1}$$

Prema Teoremi 2.8.7. je ispunjeno $\mathrm{tr.deg}\big(\mathbf{F}\langle\beta\rangle|\mathbf{F}\big) = n < \infty$, što je i trebalo dokazati. Obrnuto, neka $\mathrm{tr.deg}\big(\mathbf{F}\langle\beta\rangle|\mathbf{F}\big) = n < \infty$, tada su $\beta, D\beta, D^2\beta, \ldots, D^n\beta$ algebarski zavisni nad $\mathbf{F}$, čime je $I(\beta/\mathbf{F}) \neq \langle 0\rangle$ (saglasno definiciji diferencijalnog ideala $I(\beta/\mathbf{F})$). Drugim rečima, postoji netrivijalna diferencijalno-algebarska jednačina koju ispunjava element β, čime je element β diferencijalno-algebarski nad poljem $\mathbf{F}$. ■

Neka je $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$ i neka su elementi $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ diferencijalno-algebarski elementi nad $\mathbf{F}$. Tada je:

$$\mathbf{F}\langle\beta_1, \ldots, \beta_k\rangle = \mathbf{F}\langle\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}\rangle\langle\beta_k\rangle, \tag{2}$$

i svaki element β_k je diferencijalno-algebarski nad $\mathbf{F}\langle\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}\rangle$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Tada, prema Teoremi 1.7.18. i Lemi 2.9.1. važi:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr.deg}\big(\mathbf{F}\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle \,|\, \mathbf{F}\big) \;=\; & \mathrm{tr.deg}\big(\mathbf{F}\langle\, \beta_1, \ldots, \beta_n \,\rangle \,|\, \mathbf{F}\langle\, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \,\rangle\big) \;+ \\ & \mathrm{tr.deg}\big(\mathbf{F}\langle\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\rangle|\mathbf{F}\langle\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\rangle\big) \;+ \\ & \vdots \\ & +\, \mathrm{tr.deg}\big(\mathbf{F}\langle\beta_1\rangle \,|\, \mathbf{F}\big) < \infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Odatle, svaki element $\gamma \in \mathbf{F}\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ je diferencijalno-algebarski nad $\mathbf{F}$. Samim tim, imamo zaključak da je diferencijalno polje $\mathbf{F}\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ jedno diferencijalno-algebarsko raširenje diferencijalnog polja $\mathbf{F}$. Dalje važi tvrđenje:

Lema 2.9.2. *Neka je* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i* $\gamma, \beta_1, \ldots, \beta_n \in K$. *Ako su elementi* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in K$ *diferencijalno-algebarski nad* $\mathbf{F}$ *i ako je element* $\gamma \in K$ *diferencijalno-algebarski nad* $\mathbf{F}\langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \rangle$*, tada je element* γ *diferencijalno-algebarski nad* $\mathbf{F}$.

Dokaz. Posmatrajmo diferencijalno raširenje $\mathbf{F}\langle \gamma, \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle = \mathbf{F}\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle \langle \gamma \rangle$. Prema algebarskim osobinama diferencijalne-transcendentnosti (Teorema 1.7.18.) sleduje:

$$
\begin{aligned}
\text{tr.deg}\big(\mathbf{F}\langle \gamma, \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle \,|\, \mathbf{F}\big) &= \text{tr.deg}\big(\mathbf{F}\langle\, \gamma, \beta_1, \ldots, \beta_n \,\rangle \,|\, \mathbf{F}\langle\, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \,\rangle\big) + \\
&\qquad \text{tr.deg}\big(\mathbf{F}\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle \,|\, \mathbf{F}\big) \;=\; k + \ell \;<\; \infty,
\end{aligned} \tag{4}
$$

za neke brojeve $k, \ell \in N$. Samim tim je $\mathbf{F}\langle\, \gamma, \beta_1, \ldots, \beta_n \,\rangle$ diferencijalno-algebarsko raširenje diferencijalnog polja $\mathbf{F}$. Odatle je $\gamma \in K$ diferencijalno-algebarski nad $\mathbf{F}$. ∎

Lema 2.9.3. *Neka je* $\mathbf{K}$ *diferencijalno-algebarsko raširenje polja* $\mathbf{L}$ *i neka je* $\mathbf{L}$ *diferencijalno-algebarsko raširenje polja* $\mathbf{F}$*, tada je* $\mathbf{K}$ *diferencijalno-algebarsko raširenje polja* $\mathbf{F}$.

Dokaz. Dokazujemo da je svaki element γ diferencijalnog polja $\mathbf{K}$ diferencijalno-algebarski nad poljem $\mathbf{F}$. Za element $\gamma \in K$ imamo pretpostavku da je diferencijalno-algebarski nad poljem $\mathbf{L}$. Tada postoji diferencijalni polinom $\mathfrak{p} \in L\{X\}$, takav da je $\mathfrak{p} \in I(\gamma/L)$. Neka su $\beta_1, \ldots, \beta_k$ sve konstante iz L koje se javljaju kao koeficijenti u diferencijalnom polinomu $\mathfrak{p}$. Tada je element γ diferencijalno-algebarski nad diferencijalnim poljem $\mathbf{F}\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$. Prema Lemi 2.9.2. proizilazi da je element γ diferencijalno-algebarski nad diferencijalnim poljem $\mathbf{F}$. ∎

Lema 2.9.4. *Neka je* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i* $\gamma \in K$. *Element* γ *je diferencijalno-algebarski nad poljem* $\mathbf{F}$ *ako i samo ako je izvod tog elementa* $D(\gamma)$ *diferencijalno-algebarski nad istim poljem* $\mathbf{F}$.

Dokaz. Neka je $\gamma \in K$ diferencijalno-algebarski nad $\mathbf{F}$. Tada postoji nenula diferencijalni polinom $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\big(X, X_1, \ldots, X_n\big)$ sa koeficijentima iz F, tako da se anulira za $X = \gamma, X_1 = D(\gamma), \ldots, X_n = D^n(\gamma)$, tj. $\mathfrak{p}\big(\gamma, D(\gamma), \ldots, D^n(\gamma)\big) = 0$ za neki prirodan broj $n \in N$. Formirajmo novi diferencijalni polinom:

$$
\mathfrak{g}\big(X_1, X_2, \ldots, X_n\big) = \mathfrak{p}\big(\gamma, X_1, X_2, \ldots, X_n\big) \tag{5}
$$

sa koeficijentima iz diferencijalnog polja $\mathbf{F}\langle \gamma \rangle$. Po određenju diferencijalnog polinoma $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\big(X_1, X_2, \ldots, X_n\big)$ važi:

$$
\mathfrak{g}\big(D(\gamma), D(D(\gamma)), \ldots, D^{n-1}(D(\gamma))\big) = 0. \tag{6}
$$

Navedeno dokazuje da je $D(\gamma)$ diferencijalno-algebarski element diferencijalnog polja $\mathbf{F}\langle \gamma \rangle$. Sad iskoristimo pretpostavku da je element γ diferencijalno-algebarski nad $\mathbf{F}$, što je prema Lemi 2.9.2. dovoljno da zaključimo da je element $D(\gamma)$ diferencijalno-algebarski nad poljem $\mathbf{F}$. Obrnuto tvrđenje je očigledno. ∎

Teorema 2.9.5. *Neka je* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$. *Formirajmo skup*:

$$L = \big\{\gamma \in K \mid \gamma \text{ je diferencijalno-algebarski element nad } \mathbf{F}\big\}. \tag{7}$$

Tada važi:

1. *Skup* L *određuje diferencijalno polje* $\mathbf{L}$ *koje je diferencijalno potpolje za* $\mathbf{K}$ *i jeste diferencijalno-algebarsko raširenje za* $\mathbf{F}$, *tj.* $\mathbf{F} \leq \mathbf{L} \leq \mathbf{K}$.

2. *Ako je diferencijalno polje* $\mathbf{K}$ *diferencijalno-algebarski zatvoreno, tada je i diferencijalno polje* $\mathbf{L}$ *diferencijalno-algebarski zatvoreno.*

Dokaz. 1. Neka $\alpha, \beta \in L$, tada su α i β diferencijalno-algebarski elementi nad $\mathbf{F}$ (saglasno definiciji skupa L). Diferencijalno polje $\mathbf{F}\langle\alpha, \beta\rangle$ je diferencijalno-algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}$. Samim tim $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta \in F\langle\alpha, \beta\rangle$ i $\beta^{-1} \in F\langle\alpha, \beta\rangle$ za $\beta \neq 0$. Prema prethodnoj Lemi 2.9.4., skup L je zatvoren za diferenciranje. Znači da skup L određuje diferencijalno potpolje $\mathbf{L}$ diferencijalnog polja $\mathbf{K}$. Pri tom, $\mathbf{L}$ jeste diferencijalno-algebarsko raširenje za $\mathbf{F}$.

2. Neka su dati polinomi $\mathfrak{p}, \mathfrak{g} \in L\{X\}$, takvi da važi $\mathrm{ord}(\mathfrak{p}) > \mathrm{ord}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} \neq 0$. Tada, saglasno Napomeni 2.9.6., postoji diferencijalno zatvoreno raširenje $\mathbf{H}/\mathbf{L}$ u kome sistem dve jednačine $\mathfrak{p}(X) = 0$ i $Y\mathfrak{g}(X) - 1 = 0$ ima rešenje $X = c$ i $Y = 1/\mathfrak{g}(c)$, tako da $\mathfrak{g}(c) \neq 0$. Drugim rečima, postoji $c \in H$ tako da $\mathfrak{p}(c) = 0$ i $\mathfrak{g}(c) \neq 0$. Budući da su raširenja $\mathbf{H}$ i $\mathbf{K}$ elementarno ekvivalentna nad L i teorija $\mathsf{DCF0}$ podmodelski kompletna, tada iz $\mathbf{L} \leq \mathbf{H}, \mathbf{K}$ sleduje $\mathbf{H}_L \equiv \mathbf{K}_L$. Odatle zaključujemo da postoje elementi $\beta_1, \ldots, \beta_n \in L$ i $\gamma \in K$ tako da za $\mathfrak{p}, \mathfrak{g} \in F\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ važi $\mathfrak{p}(\gamma) = 0$ i $\mathfrak{g}(\gamma) \neq 0$. Znači da je element γ diferencijalno-algebarski nad $F\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ i pri tom su elementi $\beta_1, \ldots, \beta_n$ diferencijalno-algebarski nad $\mathbf{F}$. Prema Lemi 2.9.2. element γ je diferencijalno-algebarski nad $\mathbf{F}$. Odatle $\gamma \in L$. Znači da sistem $\mathfrak{p}(X) = 0$ i $\mathfrak{g}(X) \neq 0$ ima rešenje u L; čime je $\mathbf{L}$ diferencijalno zatvoreno polje. ■

Napomena 2.9.6. *Razne aksiomatike teorije diferencijalno zatvorenih polja razmatrane su u* [**124**]. *Između ostalog, dokazano je da je princip prenosa za diferencijalno zatvorena polja jedan ekvivalent* BLUM*ine aksiome* (*sekcija* **2.6.**). *Jedan deo dokaza te ekvivalencije, za diferencijalno polje* $\mathbf{L}$, *iskorišćen je u prethodnom dokazu. Naime, u prethodnom dokazu se koristi činjenica da ako za polinome* $\mathfrak{p}, \mathfrak{g} \in L\{X\}$, $\mathfrak{g} \neq 0$, *važi uslov* $\mathrm{ord}(\mathfrak{p}) > \mathrm{ord}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} \neq 0$, *tada sistem dve jednačine* $\mathfrak{p}(X) = 0$ *i* $Y\mathfrak{g}(X) - 1 = 0$ *ima rešenje po* X *i* Y *u raširenju* $\mathbf{L}_1/\mathbf{L}$ *koje predstavlja polje razlomaka za* $\mathbf{L}\{X\}/\mathcal{I}$, *gde je* $\mathcal{I}$ *minimalan prost ideal koji sadrži* $\mathfrak{p}$ [**124**, *str.* 54].

Lürothova teorema teoriji diferencijalnih polja. E. KOLCHIN je u radovima [**14**] i [**15**] razmatrao raširenja diferencijalnih polja. U radu [**15**] E. KOLCHIN je razmatrao proširenje LÜROTHove teoreme iz teorije algebarskih polja u teoriju diferencijalnih polja. Napomenimo da prvi takav rezultat potiče od J. F. RITTa koji je 1932. godine dokazao u radu [**13**] sledeće tvrđenje:

Teorema 2.9.7. *Ako je* $\mathbf{K}$ *diferencijalno polje i ako je* $\mathbf{H} = \mathbf{K}\langle a_1, a_2\rangle$ *diferencijalno potpolje od* $\mathbf{K}\langle y\rangle$*, gde su* $a_{1,2}$ *elementi i* y *diferencijalna promenljiva, tada je* $\mathbf{H}$ *prosto diferencijalno raširenje diferencijalnog polja* $\mathbf{K}$*.*

E. R KOLCHIN je 1944. godine dokazao sledeće tvrđenje [**15**]:

Teorema 2.9.8. *Neka je* $\mathbf{K}$ *diferencijalno polje karakteristike* 0*,* y *diferencijalna promenljiva i neka je* $\mathbf{H}$ *diferencijalno polje takvo da je* $\mathbf{K} \leq \mathbf{H} \leq \mathbf{K}\langle y\rangle$*. Tada postoji element* $a \in H$*, tako da je* $\mathbf{H} = \mathbf{K}\langle a\rangle$*. Ako su* $a_1, a_2 \in H$ *dva elementa takva da je* $\mathbf{H} = \mathbf{K}\langle a_1\rangle = \mathbf{K}\langle a_2\rangle$*, tada postoje* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ *tako da* $a_2 = (\alpha\, a_1 + \beta)/(\gamma\, a_1 + \delta)$*.*

Navodimo noviji rezultat za LÜROTHovu teoremu u teoriji diferencijalnih polja. G. XIAO-SHAN i X. TAO, u radu [**98**] iz 2002. godine, dali su konstruktivan dokaz za LÜROTHovu teoremu u teoriji diferencijalnih polja. Naime, važi tvrđenje:

Teorema 2.9.9. *Neka je* $\mathbf{K}$ *diferencijalno polje,* y *diferencijalna promenljiva i neka postoje racionalne funkcije* $g_1(y), \ldots, g_r(y)$ *koje su elementi diferencijalnog polja* $\mathbf{K}\langle y\rangle$*. Tada postoji algoritam za nalaženje racionalne funkcije* $g(y)$ *u* $\mathbf{K}\langle y\rangle$*, tako da je* $\mathbf{K}\langle g_1, \ldots, g_n\rangle = \mathbf{K}\langle g\rangle$*.*

U navedenom radu [**98**], izložen algoritam se koristi za nalaženje jednostavnijih racionalnih parametarskih reprezentacija krivih koje imaju parametarizaciju zadatu raznim racionalnim funkcijama nad diferencijalnim poljem.

3 JEDAN METOD DOKAZIVANJA DIFERENCIJALNE TRANSCENDENTNOSTI

3.1 Metode dokazivanja diferencijalne transcendentnosti

U ovoj glavi, glavni predmet proučavanja je diferencijalno polje meromorfnih funkcija $\mathcal{M}$ za koje razmatramo kad neka funkcija iz $\mathcal{M}$ jeste diferencijalno-transcendentna, tj. nije rešenje nijedne diferencijalno-algebarske jednačine sa koeficijentima nad poljem racionalnih funkcija. Prvi dokaz diferencijalne transcendentnosti potiče od HÖLDERa [**3**] iz 1887. godine i odnosi se na diferencijalnu transcendentnost gama funkcije. U ovoj sekciji navešćemo neke metode dokazivanja diferencijalne transcendentnosti funkcija prema člancima Y. SIBUYA, S. SPERBERa [**50**] i L. A. RUBELa [**63**].

1^0. Maillet-Mahlerov kriterijum. Ako stepeni red $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jeste rešenje diferencijalno-algebarske jednačine, tada postoje konstante $\alpha, K > 0$ takve da:

$$|a_n| \le K\big(n!\big)^{\alpha}. \tag{1}$$

Negacijom prethodnog uslova možemo dobiti diferencijalno-transcendentne funkcije koje su predstavljene formalnim stepenim redovima (pri tome, dopušta se i nulti poluprečnik konvergencije). Jedan takav stepeni red je naveden u [**63**]:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(n!\big)^{n} z^n. \tag{2}$$

2^0. Popkenovi kriterijumi. J. POPKEN u svojoj disertaciji pokazuje da za niz algebarskih brojeva $\langle a_n \rangle$ ako stepeni red $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jeste rešenje diferencijalno-algebarske jednačine, tada za nenulte koeficijente a_n važi:

$$|a_n| \ge \exp\big(-c_f n (\log n)^2\big), \tag{3}$$

za neku konstantu c_f (koja zavisi od funkcije f) [**50**], [**63**]. Jedan takav stepeni red naveden je u [**63**]:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n^n)!}. \tag{4}$$

Pod istim pretpostavkama za polazni stepeni red, J. POPKEN dokazuje da takođe važi:

$$|a_n| \le \exp\bigl(-c_f^{'} n \log n\bigr), \tag{5}$$

za neku konstantu $c_f^{'}$ (koja zavisi od funkcije f) [**50**].

3^0. Sibuya-Sperberov kriterijum. U radu [**50**] Y. SIBUYA i S. SPERBER su pokazali da za niz algebarskih brojeva $\langle a_n \rangle$ ako je stepeni red $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ rešenje diferencijalno-algebarske jednačine, tada za svaku $p-$adsku normu važi:

$$|a_n|_p \le \exp\bigl(-c_f^{''} n\bigr), \tag{6}$$

za neku konstantu $c_f^{''}$ (koja zavisi od funkcije f i izabrane $p-$adske norme) [**50**]. G. KARTIEL, koristeći prethodni kriterijum, u radu [**100**] je dokazao da je sledeća funkcija diferencijalno-transcendentna:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k^k} z^k, \tag{7}$$

koja je definisana za $z \notin [e, \infty)$. Naime, G. KARTIEL je izborom 2-norme, koristeći SIBUYA-SPERBERov kriterijum, pokazao da je prethodna funkcija diferencijalno-transcendentna.

Razni drugi postupci dokazivanja diferencijalne transcendentnosti, koji su bazirani uglavnom na specijalizovanim rezultatima niza matematičara (A. HURWITZ, G. POLYA, E. MAILLET, K. MAHLER, A. OSTROWSKI, J. POPKEN, N. STEINMETZ, Y. SIBUYA, S. SPERBER, L. LIPSHITZ, L. A. RUBEL, ...), prikazani su u radu L. A. RUBELa [**63**].

3.2 Diferencijalna transcendentnost gama funkcije

U ovoj sekciji dajemo dokaz HÖLDERove teoreme da je gama funkcija diferencijalno-transcendentna nad poljem racionalnih funkcija [**3**]. Izlažemo dokaz OSTROWSKOG, prema radovima [**9**] i [**12**]. Prvi dokaz [**9**], na predlog HAUSDORFFa, A. OSTROWSKI je dopunio do drugog dokaza koji je dat u [**12**]. Napomenimo da je u knjizi [**29**] reprodukovan dokaz iz [**9**], a u radu [**63**] dokaz iz [**12**].

Pre izlaganja dokaza navodimo neke definicije prema radovima Ostrowskog [**9**] i [**12**]. Pretpostavimo da je $y = y(z)$ proizvoljan broj puta diferencijabilna funkcija. Koristimo uobičajeno označavanje k-tog izvoda $y^{(k)}$ sa y_k, za $k \in \{1, 2, \ldots\}$. Saglasno definiciji diferencijalno-algebarske jednačine iz sekcije **2.9.**, diferencijalno-algebarska jednačina sa polinomskim koeficijentima iz $\mathbf{C}(z)$ jeste jednačina oblika:

$$(1) \qquad \mathfrak{p}(z, y, y_1, \ldots, y_k) = 0,$$

gde je $\mathfrak{p}(z, y, y_1, \ldots, y_k)$ konačna suma sledećeg oblika:

$$(2) \qquad \mathfrak{p}(z, y, y_1, \ldots, y_k) = \sum_i A_{i_0, i_1, \ldots, i_k}(z)(y)^{i_0}(y_1)^{i_1} \ldots (y_k)^{i_k},$$

za neke polinome $A = A(z) = A_{i_0, i_1, \ldots, i_k}(z) \in C[z]$. Dalje, neka je iz sume (2) izdvojen term:

$$(3) \qquad t = A(z)(y)^{i_0}(y_1)^{i_1} \ldots (y_k)^{i_k},$$

tada zbir:

$$(4) \qquad r = i_0 + i_1 + \ldots + i_k$$

nazivamo *dimenzijom terma* t, a zbir:

$$(5) \qquad s = i_1 + 2i_2 + \ldots + ki_k$$

nazivamo *težinom terma* t.

Sumu (2) zapisujemo po opadajućoj dimenziji r termova, a ako ima termova iste dimenzije r tada ih zapisujemo po opadajućoj težini s. Ako ima termova (3) istih dimenzija r i iste težine s, tada ih zapisujemo po opadajućem poretku stepena i_k. Ako ima termova (3) istih dimenzija r i iste težine s i istog stepena i_k, tada ih zapisujemo po opadajućem poretku stepena i_{k-1}. Nastavljajući prethodni postupak, termove zapisujemo po opadajućoj dimenziji r, težini s i stepenima $i_k, i_{k-1}, \ldots, i_1$. Svi polinomski koeficijenti istih dimenzija r, težina s i stepena $i_k, i_{k-1}, \ldots, i_1$ određuju u zbiru novi polinomski koeficijent $A(z)$ stepena i_0. U konačnom broju koraka moguće je sumu (2) zapisati kao sumu opadajućih termovima formiranih na prethodni način i izdvojiti *vodeći term* [**9**].

U dokazu se koristi samo činjenica da je gama funkcija[4] $\Gamma(z)$ proizvoljan broj puta diferencijabilna funkcija za koju važi funkcionalna jednačina:

$$(6) \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

za $z \in C \backslash \{0, -1, -2, \ldots\}$. Važi tvrđenje:

Teorema 3.2.1. (Hölder) *Gama funkcija $y = \Gamma(z)$ nije rešenje nijedne diferencijalno-algebarske jednačine nad poljem kompleksnih racionalnih funkcija $\mathbf{C}(z)$.*

[4] definisana u sekciji **3.3.**

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da gama funkcija ispunjava neku diferencijalno-algebarsku jednačinu tipa (1). Od svih tih diferencijalno-algebarskih jednačina izaberimo onu čiji je vodeći term minimalan (u odnosu na prethodno opisan poredak u skupu termova). Neka je izabrana diferencijalna jednačina:

$$\mathfrak{p}(z, y, y_1, \ldots, y_k) = 0, \tag{7}$$

sa vodećim termom $A(z)(y)^{i_0}(y_1)^{i_1}\ldots(y_k)^{i_k}$ dimenzije:

$$r = i_0 + i_1 + \ldots + i_k \tag{8}$$

i težine:

$$s = i_1 + 2i_2 + \ldots + ki_k. \tag{9}$$

Ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti, s jedne strane da je $A(z)$ moničan polinom najmanjeg stepena i, s druge strane, da $\mathfrak{p}(z, y, y_1, \ldots, y_k)$ nije deljivo ni sa y, ni sa ma kojim linearnim faktorom $(z - \alpha)$ za $\alpha \in C$. U daljem delu dokaza razlikujemo četiri celine.

1. Za svaku drugu diferencijalno-algebarsku jednačinu:

$$\hat{\mathfrak{p}}(z, y, y_1, \ldots, y_k) = 0, \tag{10}$$

sa vodećim termom $\hat{A}(z)(y)^{i_0}(y_1)^{i_1}\ldots(y_k)^{i_k}$ važi:

$$A(z)|\hat{A}(z). \tag{11}$$

Zaista, po pretpostavci o minimalnosti vodećeg terma, za $\mathfrak{p}$ sleduje da je polinom $A(z)$ manjeg stepena od polinoma $\hat{A}(z)$. Samim tim, postoje polinomi P i Q takvi da:

$$\hat{A}(z) = Q(z) \cdot A(z) + R(z), \tag{12}$$

za neki polinom $R(z)$ nižeg stepena od polinoma $A(z)$. Tada posmatrajmo diferencijalno-algebarsku jednačinu:

$$\begin{aligned} &\hat{\mathfrak{p}}(z, y, y_1, \ldots, y_k) - Q(z)\mathfrak{p}(z, y, y_1, \ldots, y_k) \\ &= \Big(\hat{A}(z)(y)^{i_0}(y_1)^{i_1}\ldots(y_k)^{i_k}\Big) - \Big(Q(z)A(z)(y)^{i_0}(y_1)^{i_1}\ldots(y_k)^{i_k}\Big) + \ldots \\ &= \Big(R(z)(y)^{i_0}(y_1)^{i_1}\ldots(y_k)^{i_k}\Big) + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Tako određena diferencijalno-algebarska jednačina je minimalnijeg vodećeg terma, što je nemoguće. Samim tim, $R(z) = 0$. Znači, važi (11) i dodatno:

$$\hat{\mathfrak{p}}(z, y, y_1, \ldots, y_k) = \frac{\hat{A}(z)}{A(z)}\mathfrak{p}(z, y, y_1, \ldots, y_k). \tag{14}$$

2. Dokazujemo da su svi termovi koji se javljaju u (7) iste dimenzije r. Zaista, neka je (7) zapisano u obliku:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{p}(z, y, y_1, \dots, y_k)\\
&= A_{i_0,i_1,\dots,i_k}(z)(y)^{i_0}(y_1)^{i_1}\dots(y_k)^{i_k}\\
&+\sum_{t=0}^{s} f_{r,s-t}(z, y, y_1, \dots, y_k) + \varphi(z, y, y_1, \dots, y_k) = 0,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

gde su $f_{r,s-t}$ sume termova dimenzije r i težine $s-t$, a φ suma termova dimenzije manje od r. Po pretpostavci, gama funkcija ispunjava funkcionalnu jednačinu (6). Za $\hat{z} = z + 1$ i $\hat{y} = zy$ uočimo da smenom $y \mapsto \hat{y}$ dobijamo sledeće transformacije:

$$
\begin{aligned}
y_1 \mapsto \hat{y}_1 &= \hat{y}' = (zy)' = zy' + y = zy_1 + y,\\
y_2 \mapsto \hat{y}_2 &= \hat{y}'' = (zy)'' = zy'' + 2y' = zy_2 + 2y_1,\\
&\vdots\\
y_k \mapsto \hat{y}_k &= \hat{y}^{(k)} = (zy)^{(k)} = zy^{(k)} + ky^{(k-1)} = zy_k + ky_{k-1}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Samim tim, smenom $y \mapsto \hat{y}$ polazna jednačina (7) prelazi u jednačinu $\mathfrak{p}(z+1, zy, (zy)', \dots, (zy)^{(k)}) = 0$, koju zapisujemo u sledećem obliku:

$$
\mathfrak{p}(\hat{z}, \hat{y}, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_k) = 0.
\tag{17}
$$

Dalje, smenom $y \mapsto \hat{y}$ ostvaruje se zamena:

$$
\big(y_\nu\big)^{i_\nu} \mapsto \big(\hat{y}_\nu\big)^{i_\nu} = \big(zy_\nu + \nu y_{\nu-1}\big)^{i_\nu} = \sum_{p_\nu+q_\nu=i_\nu} \binom{i_\nu}{p_\nu} \nu^{q_\nu} z^{p_\nu} (y_{\nu-1})^{q_\nu} (y_\nu)^{p_\nu},
\tag{18}
$$

za $\nu = 1, 2, \dots, k$. Posmatrajmo pri smeni $y \mapsto \hat{y}$ sliku vodećeg terma:

$$
\begin{aligned}
&A(z)y^{i_0}(y_1)^{i_1}\dots(y_k)^{i_k}\\
&\mapsto A(\hat{z})\hat{y}^{i_0}(\hat{y}_1)^{i_1}\dots(\hat{y}_k)^{i_k}\Big(=A(z+1)\cdot(zy)^{i_0}(zy_1+y)^{i_1}\dots(zy_k+y_{k-1})^{i_k}\Big)\\
&= A(z+1)\cdot(zy)^{i_0}\\
&\sum_{p_1+q_1=i_1}\dots\sum_{p_k+q_k=i_k} \underbrace{\binom{i_1}{p_1}\dots\binom{i_k}{p_k}1^{q_1}\dots k^{q_k}}_{c_{p_1,\dots,p_k}} z^{p_1+\dots+p_k} y^{q_1}(y_1)^{p_1}\dots(y_{k-1})^{q_k}(y_k)^{p_k}\\
&= A(z+1)\cdot\\
&\sum_{p_1,\dots,p_k} c_{p_1,\dots,p_k} z^{i_0+p_1+\dots+p_k} y^{i_0+q_1}(y_1)^{p_1+q_2}\dots(y_{k-1})^{(p_{k-1}+q_k)}(y_k)^{p_k},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

pri čemu $c_{p_1,\ldots,p_k} = \binom{i_1}{p_1}\ldots\binom{i_k}{p_k}1^{q_1}\ldots k^{q_k}$ i $p_1+q_1 = i_1,\ldots,p_k+q_k = i_k$. Dimenzija termova u sumi (19) iznosi:

$$\begin{aligned} & i_0+q_1+(p_1+q_2)+\ldots+(p_{k-1}+q_k)+p_k \\ & = i_0+i_1+i_2+\ldots+i_{k-1}+i_k = r. \end{aligned} \tag{20}$$

Dakle, dimenzija termova ostaje nepromenljiva. Težina termova u sumi (19) iznosi:

$$\begin{aligned} & (p_1+q_2)+2(p_2+q_3)+3(p_3+q_4)\ldots+(k-1)(p_{k-1}+q_k)+kp_k \\ & = (p_1+q_1)+2(p_2+q_2)+\ldots+k(p_k+q_k)-q_1-q_2-\ldots-q_k \\ & = i_1+2i_2+\ldots+ki_k-q_1-q_2-\ldots-q_k = s-(q_1+\ldots+q_k). \end{aligned} \tag{21}$$

Težina termova ostaje nepromenljiva samo u slučaju $q_1 = \ldots = q_k = 0$, inače je manja od težine polaznog terma. U slučaju $q_1 = \ldots = q_k = 0$ važi:

$$c_{i_1,\ldots,i_k} = 1. \tag{22}$$

Samim tim vodeći term jednačine (17) je oblika:

$$z^r A(z+1)(y)^{i_0}(y_1)^{i_1}\ldots(y_k)^{i_k}, \tag{23}$$

gde $A(z+1)$ nema faktor oblika z. Dalje, prema delu **1.**, zaključujemo:

$$A(z) \mid z^r A(z+1). \tag{24}$$

Samim tim, postoji polinom stepena r:

$$B(z) = \frac{z^r A(z+1)}{A(z)} = z^r+\ldots \tag{25}$$

takav da na osnovu (14) važi:

$$\mathfrak{p}(\hat{z},\hat{y},\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_k) = B(z)\mathfrak{p}(z,y,y_1,\ldots,y_k). \tag{26}$$

Na osnovu linearne nezavisnosti monoma, po promenljivima $y, y_1, \ldots, y_k$ iz (26) proizilazi i dodatni zaključak:

$$\varphi(\hat{z},\hat{y},\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_k) = B(z)\varphi(z,y,y_1,\ldots,y_k). \tag{27}$$

Pretpostavimo da se transformacijama (16) iz $\varphi(z,y,y_1,\ldots,y_k)$ promenljiva z javlja sa najvišim stepenom m u polinomskom članu $\alpha(z)$ nekog terma. Smenom $y \mapsto \hat{y}$ iz $\varphi(z,y,y_1,\ldots,y_k)$ dobijamo $\varphi(\hat{z},\hat{y},\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_k)$ sa najvišim stepenom po z određenim u sledećem proizvodu $z^{\hat{i}_0+\hat{p}_1+\ldots+\hat{p}_k}\alpha(z+1)$ na osnovu analogne smene sa smenom (19).

Tako određen stepen je dat kao sledeća suma:

$$m+\hat{i}_0+\hat{p}_1+\ldots+\hat{p}_k, \tag{28}$$

gde $\hat{p}_1+\hat{q}_1=\hat{i}_1,\ldots,\hat{p}_k+\hat{q}_k=\hat{i}_k$, pri čemu za stepene $\hat{i}_0,\hat{i}_1,\ldots,\hat{i}_k$ važi sledeća nejednakost za dimenzije termova: $\hat{r}=\hat{i}_0+\hat{i}_1+\ldots+\hat{i}_k\le r-1$. Na osnovu toga, za sumu datu sa (28) važi nejednakost:

$$m+\hat{i}_0+\hat{p}_1+\ldots+\hat{p}_k=m+\hat{r}-(\hat{q}_1+\ldots+\hat{q}_k)\le m+r-1. \tag{29}$$

S druge strane, $B(z)\varphi(z,y,y_1,\ldots,y_k)$ je sa najvišim stepenom koji je jednak $r+m$. Tako dolazimo do zaključka da $\varphi(z,y,y_1,\ldots,y_k)=0$. Na taj način, (15) je oblika:

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}(z,y,y_1,\ldots,y_k) &= A_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(z)(y)^{i_0}(y_1)^{i_1}\ldots(y_k)^{i_k}\\ &\quad+\sum_{t=0}^{s} f_{r,s-t}(z,y,y_1,\ldots,y_k)=0.\end{aligned} \tag{30}$$

3. Dokazujemo da je $B(z)=z^r$. Posmatrajmo inverzne veze od (16) date eksplicitno na sledeći način:

$$\begin{aligned}
z &= \hat{z}-1,\\
y &= \frac{\hat{y}}{z}=\frac{\hat{y}}{\hat{z}-1},\\
y_1 &= \frac{\hat{y}_1-y}{z}=\frac{\hat{y}_1-\dfrac{\hat{y}}{\hat{z}-1}}{\hat{z}-1}=\frac{\hat{y}_1}{\hat{z}-1}-\frac{\hat{y}}{(\hat{z}-1)^2},\\
y_2 &= \frac{\hat{y}_2-2y_1}{z}=\frac{\hat{y}_2-2\Big(\dfrac{\hat{y}_1}{\hat{z}-1}-\dfrac{\hat{y}}{(\hat{z}-1)^2}\Big)}{\hat{z}-1}=\frac{\hat{y}_2}{\hat{z}-1}-\frac{2\hat{y}_1}{(\hat{z}-1)^2}+\frac{2\hat{y}}{(\hat{z}-1)^3},\\
&\ \vdots\\
y_k &= \frac{\hat{y}_k-ky_{k-1}}{z}=\frac{\hat{y}_k}{\hat{z}-1}-\frac{k\hat{y}_{k-1}}{(\hat{z}-1)^2}+\frac{k(k-1)\hat{y}_{k-2}}{(\hat{z}-1)^3}+\ldots+(-1)^k\frac{k!\hat{y}}{(\hat{z}-1)^{k+1}}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Tada za $\nu=0,1,2,\ldots,k$ važi:

$$y_\nu=\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i\frac{\dfrac{\nu!}{(\nu-i)!}\hat{y}_{\nu-i}}{(\hat{z}-1)^{i+1}}, \tag{32}$$

pri čemu uzimamo $\hat{y}_0 = \hat{y}$. Uvedimo polinome g_ν određene na sledeći način:

$$g_\nu(\hat{z}, \hat{y}, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_\nu) = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \frac{\nu!}{(\nu-i)!} (\hat{z}-1)^{\nu-i} \hat{y}_{\nu-i}, \tag{33}$$

za $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k$. Tada veze (31) dobijaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
z &= \hat{z}-1,\\
y &= \frac{\hat{y}}{z} = \frac{g_0(\hat{z},\hat{y})}{(\hat{z}-1)} = \frac{\hat{y}}{\hat{z}-1},\\
y_1 &= \frac{\hat{y}_1 - y}{z} = \frac{g_1(\hat{z},\hat{y},\hat{y}_1)}{(\hat{z}-1)^2} = \frac{\hat{y}_1(\hat{z}-1)-\hat{y}}{(\hat{z}-1)^2},\\
y_2 &= \frac{\hat{y}_2 - 2y_1}{z} = \frac{g_2(\hat{z},\hat{y},\hat{y}_1,\hat{y}_2)}{(\hat{z}-1)^3} = \frac{\hat{y}_2(\hat{z}-1)^2 - 2\hat{y}_1(\hat{z}-1) + 2\hat{y}}{(\hat{z}-1)^3},\\
&\vdots\\
y_k &= \frac{\hat{y}_k - k y_{k-1}}{z} = \frac{g_k(\hat{z},\hat{y},\hat{y},\hat{y}_1,\hat{y}_2,\ldots,\hat{y}_k)}{(\hat{z}-1)^{k+1}}\\
&= \frac{\hat{y}_k(\hat{z}-1)^k - k\hat{y}_{k-1}(\hat{z}-1)^{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{k!}{1!}\hat{y}_{k-1}(\hat{z}-1) + (-1)^k k!\hat{y}}{(\hat{z}-1)^{k+1}}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Primetimo da svaki polinom g_ν pri deljenju sa $(\hat{z}-1)$ ima ostatak:

$$g_\nu(1, \hat{y}, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_\nu) = (-1)^\nu \nu! \hat{y}, \tag{35}$$

za $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k$. Potom, izvršimo zamenu (34) u sliku vodećeg terma (19):

$$A(z+1) \sum_{p_1,\ldots,p_k} c_{p_1,\ldots,p_k} z^{i_0+p_1+\ldots+p_k} y^{i_0+q_1} y_1^{p_1+q_1} \ldots y_{k-1}^{p_{k-1}+q_k} y_k^{p_k}, \tag{36}$$

pri čemu $p_1 + q_1 = i_1, \ldots, p_k + q_k = i_k$. Na taj način dobijamo izraz:

$$A(\hat{z}) \sum_{p_1,\ldots,p_k} c_{p_1,\ldots,p_k} (\hat{z}-1)^{i_0+p_1+\ldots+p_k} \left(\frac{g_0}{(\hat{z}-1)}\right)^{i_0+q_1} \left(\frac{g_1}{(\hat{z}-1)^2}\right)^{p_1+q_2} \ldots \left(\frac{g_k}{(\hat{z}-1)^{k+1}}\right)^{p_k}. \tag{37}$$

Stepen uz $(\hat{z}-1)$ dat je sumom: $i_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_k - \Big(i_0 + q_1 + 2(p_1+q_2) + \ldots + k(p_{k-1}+q_k) + (k+1)p_k\Big) = -\Big(i_1 + 2i_2 + \ldots k i_k\Big) = -s$. Samim tim, izraz (37) se zapisuje u sledećem obliku:

$$\frac{\displaystyle\sum_{p_1,\ldots,p_k} c_{p_1,\ldots,p_k} A(\hat{z}) g_0^{i_0+q_1} g_1^{p_1+q_1} \ldots g_{k-1}^{p_{k-1}+q_k} g_k^{p_k}}{(\hat{z}-1)^s} = \frac{Q_1(\hat{z},\hat{y},\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_k)}{(\hat{z}-1)^s}, \tag{38}$$

za neki polinom $Q_1(\hat{z}, \hat{y}, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_k)$, koji na osnovu (35) (38) nema faktor oblika $(\hat{z} - 1)$. Pri tom je $A(1) \neq 0$, jer $A(z+1)$ nema faktora oblika z. Za termove težine $s - t$ važi sličan zaključak da se svaki takav term može zapisati u obliku racionalne funkcije sa imeniocem oblika $(\hat{z} - 1)^{s-t}$. Sveukupno, postoji polinom G takav da jednakost (26) posle zamene (34) dobija oblik:

$$(\hat{z} - 1)^s \mathfrak{p}(\hat{z}, \hat{y}, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_k) = B(\hat{z} - 1) G(\hat{z}, \hat{y}, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_k). \tag{39}$$

Primetimo da iz poslednje jednakosti možemo zaključiti: ako bi polinom $B(\hat{z} - 1)$ imao koren $\hat{z} = \beta \neq 1$, tada bi polinom $\mathfrak{p}(\hat{z}, \hat{y}, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_k)$ bio deljiv sa $(\hat{z} - \beta)$, što je nemoguće. Odatle ostaje jedina mogućnost:

$$B(\hat{z} - 1) = (\hat{z} - 1)^r, \tag{40}$$

odnosno:

$$B(z) = z^r. \tag{41}$$

Napomenimo da važi i dodatni zaključak: $s \geq r$. Zatim, na osnovu (25) i (41) zaključujemo da važi:

$$A(z+1) = A(z). \tag{42}$$

Odatle, na osnovu $\Delta A(z) = 0$, dobijamo zaključak:

$$A(z) = A, \tag{43}$$

gde je A neka konstanta različita od nule.

4. Dokazujemo da na osnovu $B(z) = z^r$ polazna pretpostavka dovodi do kontradikcije. Razmotrimo jednačinu (26) eksplicitno zapisanu u obliku:

$$\mathfrak{p}(z+1, zy, zy_1+y, zy_2+2y_1, \ldots, zy_k+ky_{k-1}) = z^r \mathfrak{p}(z, y, y_1, y_2, \ldots, y_k). \tag{44}$$

Primetimo da za $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ iz (44) dobijamo jednakost oblika:

$$\mathfrak{p}(z+1, 0, zy_1, zy_2+2y_1, \ldots, zy_k+ky_{k-1}) = z^r \mathfrak{p}(z, 0, y_1, y_2, \ldots, y_k). \tag{45}$$

Neka je vodeći term za $\mathfrak{p}(z, 0, y_1, y_2, \ldots, y_k)$ oblika $C(z) y_1^{j_1} \ldots y_k^{j_k}$. Tada iz (45) važi:

$$z^{j_1+j_2+\ldots+j_k} C(z+1) y_1^{j_1} \ldots y_k^{j_k} = z^r C(z) y_1^{j_1} \ldots y_k^{j_k}. \tag{46}$$

Iz prethodne jednakosti s jedne strane zaključujemo da $r = j_1 + j_2 + \ldots + j_k$, a s druge strane da važi:

$$C(z+1) = C(z). \tag{47}$$

Odatle, na osnovu $\Delta C(z) = 0$, dobijamo zaključak:

$$C(z) = C, \tag{48}$$

gde je C neka konstanta različita od nule. Primetimo da je polinom $\mathfrak{p}(z, 0, y_1, y_2, \ldots, y_k)$ sa vodećim termom $Cy_1^{j_1} \ldots y_k^{j_k}$ u kojem ne učestvuje z. Tada prethodni polinom $\mathfrak{p}(z, 0, y_1, \ldots, y_k)$ nije deljiv ni sa linearnim faktorom $(z-1)$, jer vodeći term $Cy_1^{j_1} \ldots y_k^{j_k}$ učestvuje u ostatku pri deljenju sa $(z-1)$. Odatle zaključak:

$$\mathfrak{p}(1, 0, y_1, y_2, \ldots, y_k) \not\equiv 0. \tag{49}$$

Primetimo da za $\boldsymbol{z = 0}$ iz (44) dobijamo :

$$\mathfrak{p}(1, 0, y, 2y_1, 3y_2, \ldots, ky_{k-1}) \equiv 0. \tag{50}$$

Zamenjujući $y, 2y_1, 3y_2, \ldots, ky_{k-1}$ redom sa $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ iz (50) dobijamo:

$$\mathfrak{p}(1, 0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k) \equiv 0. \tag{51}$$

Tada (49) i (51) predstavljaju kontradikciju. Svođenjem na kontradikciju sleduje tvrđenje teoreme. ■

Napomena 3.2.2. S. B. BANK *i* R. P. KAUFMAN *su u radu* [**43**] *proučili* HAUSDORFF*ov dokaz* [**11**] HÖLDER*ove teoreme i odredili dovoljne uslove da diferencijalno polje funkcija* (*koje je ekstenzija polja racionalnih funkcija*) *ima osobinu da je gama funkcija diferencijalno-transcendentna nad tim poljem funkcija.*

3.3 Analitičke osobine gama funkcije

U ovoj sekciji razmatramo analitičke osobine gama funkcije i srodnih funkcija (KUREPINE funkcije, alternirajuće KUREPINE funkcije i RIEMANNove zeta funkcije) vezanih za pojam glavne vrednosti u tački. Pored toga navodimo neke poznate i neke nove reprezentacije za KUREPINU i alternirajuću KUREPINU funkciju, koje su s jedne strane vezane za pojam glavne vrednosti u tački, a s druge strane nam omogućavaju izdvajanje nekih novih primera diferencijalno-transcendentnih funkcija.

Glavna vrednost gama funkcije. Gama funkcija se definiše kao određeni integral:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{1}$$

koji konvergira za $\mathrm{Re}(z) > 0$. Prethodno definisana funkcija može se analitički produžiti na ceo skup kompleksnih brojeva C sem u tačkama $z = -k$ za vrednosti $k \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Jedan način analitičkog produženja dat je jednakošću:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int\limits_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{2}$$

videti npr. [**28**], [**41**], [**75**, str. 121]. Rezidijum u tački $z=-k$ iznosi:

$$\operatorname*{Res}_{z=-k}\Gamma(z)=\frac{(-1)^k}{k!}. \tag{3}$$

Domen funkcije $\Gamma(z)$ može se proširiti, u smislu glavne vrednosti u tački, na ceo skup kompleksnih brojeva C na način koji izlažemo. Naime, za meromorfnu funkciju $f(z)$, na osnovu CAUCHYjeve integralne formule, definišemo *glavnu vrednost u tački a* kao što sleduje [**31**], [**99**]:

$$\operatorname*{v.p.}_{z=a} f(z)=\lim_{\rho\to 0_+}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{z-a}\,dz. \tag{4}$$

Ako je za funkciju $f(z)$ tačka a regularna, tada $\operatorname*{v.p.}_{z=a} f(z)=f(a)$; inače, glavna vrednost u polu $z=a$ postoji kao konačan kompleksan broj:

$$\operatorname*{v.p.}_{z=a} f(z)=\operatorname*{res}_{z=a}\Big(\frac{f(z)}{z-a}\Big), \tag{5}$$

kao što je navedeno u [**107**]. Navodimo osnovne osobine glavne vrednosti u tački. Za dve meromorfne funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$ važi aditivnost [**31**]:

$$\operatorname*{v.p.}_{z=a}\Big(f_1(z)+f_2(z)\Big)=\operatorname*{v.p.}_{z=a} f_1(z)+\operatorname*{v.p.}_{z=a} f_2(z). \tag{6}$$

Pri tom, u radu [**31**] pokazano je da za glavnu vrednost ne važi multiplikativnost. Naime, za glavnu vrednost važi sledeće tvrđenje:

Teorema 3.3.1. *Neka je $f_1(z)$ holomorfna funkcija u tački a i $f_2(z)$ meromorfna funkcija takva da je a pol reda m. Tada važi:*

$$\operatorname*{v.p.}_{z=a}\Big(f_1(z)\cdot f_2(z)\Big)=\sum_{k=0}^{m}\frac{f_1^{(k)}(a)}{k!}\operatorname*{v.p.}_{z=a}\Big((z-a)^k\cdot f_2(z)\Big). \tag{7}$$

Dokaz. Neka su funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$ date redovima:

$$f_1(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f_1^{(i)}(a)}{i!}(z-a)^i \quad \text{i} \quad f_2(z)=\sum_{j=-m}^{\infty}c_j(z-a)^j, \tag{8}$$

za $c_j\in C$ $(j=-m,\ldots,-1,0,1,2,\ldots)$. Primetimo da je $\operatorname*{v.p.}_{z=a} f_2(z)=c_0$. Množenjem redova:

$$\frac{f_1(z)-f_1(a)}{z-a}\cdot f_2(z)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_1^{(i)}(a)}{i!}(z-a)^{i-1}\cdot\sum_{j=-m}^{\infty}c_j(z-a)^j \tag{9}$$

dobijamo formulu:

$$\operatorname*{res}_{z=a}\Big(\frac{f_1(z)-f_1(a)}{z-a}\cdot f_2(z)\Big)=\sum_{k=1}^{m}\frac{f_1^{(k)}(a)}{k!}\cdot c_{-k}\,. \tag{10}$$

Odatle:

$$\begin{aligned}\operatorname*{v.p.}_{z=a}\Big(f_1(z)\cdot f_2(z)\Big) &= \operatorname*{res}_{z=a}\Big(\frac{f_1(z)\cdot f_2(z)}{z-a}\Big)\\ &= \operatorname*{res}_{z=a}\Big(\frac{f_2(z)}{z-a}\Big)\cdot f_1(a)+\operatorname*{res}_{z=a}\Big(\frac{f_1(z)-f_1(a)}{z-a}\cdot f_2(z)\Big)\\ &= f_1(a)\cdot c_0+\sum_{k=1}^{m}\frac{f_1^{(k)}(a)}{k!}\cdot c_{-k}\\ &= \sum_{k=0}^{m}\frac{f_1^{(k)}(a)}{k!}\operatorname*{v.p.}_{z=a}\Big((z-a)^k\cdot f_2(z)\Big)\,.\ \blacksquare\end{aligned} \tag{11}$$

Napomena 3.3.2. *Za funkciju $f(z)$ smatramo da je holomorfna u tački ako postoji okolina tačke, tako da funkcija $f(z)$ ima izvod u svim tačkama te okoline* [**123**, str. 34].

Posledica 3.3.3. *Za holomorfnu funkciju $f_1(z)$ u tački a i meromorfnu funkciju $f_2(z)$ koja ima prost pol a važi sledeća jednakost*:

$$\operatorname*{v.p.}_{z=a}\Big(f_1(z)\cdot f_2(z)\Big)=f_1(a)\cdot\operatorname*{v.p.}_{z=a}f_2(z)+f_1^{'}(a)\cdot\operatorname*{res}_{z=a}f_2(z). \tag{12}$$

Prethodna formula, u slučaju RIEMANN*ove zeta funkcije $f_2(z)=\zeta(z)$, izvedena je u radu* [**62**].

Za meromorfnu funkciju $f(z)$ sa prostim polom a postoji prosta formula za računanje glavne vrednosti u tački a, kao što je navedeno u [**99**]:

$$\operatorname*{v.p.}_{z=a}f(z)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(a-\varepsilon)+f(a+\varepsilon)}{2}\,. \tag{13}$$

Specijalno za gama funkciju važi [**31**], [**99**]:

$$\operatorname*{v.p.}_{z=-n}\Gamma(z)=(-1)^n\frac{\Gamma^{'}(n+1)}{\Gamma(n+1)^2}=\frac{-\gamma+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n!}, \tag{14}$$

gde je γ EULERova konstanta i $n\in N_0$.

Glavna vrednost Kurepinih funkcija. Đ. Kurepa uveo je u radu [**32**] funkciju $K(z)$ integralom:

$$K(z) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^z - 1}{t - 1}\, dt, \tag{15}$$

koja konvergira za $\mathrm{Re}\, z > 0$ i predstavlja jedno analitičko proširenje sume faktorijela:

$$K(n) = \sum_{i=0}^{n-1} i!. \tag{16}$$

Za funkciju $K(z)$ koristimo naziv Kurepina *funkcija* i ona jeste jedno rešenje funkcionalne jednačine:

$$K(z) - K(z-1) = \Gamma(z). \tag{17}$$

Primetimo da je na osnovu prethodne funkcionalne jednačine moguće odrediti analitičko produženje Kurepine funkcije $K(z)$ za $\mathrm{Re}\, z \leq 0$. Tako određena Kurepina funkcija $K(z)$ jeste meromorfna funkcija sa prostim polovima u tačkama $z = -1$ i $z = -n$ $(n \geq 3)$. U tački $z = -2$ Kurepina funkcija ima otklonjiv singularitet, pri tom $K(-2) \stackrel{def}{=} \lim_{z \to -2} K(z) = 1$. Vrednosti rezidijuma Kurepine funkcije određene su sa:

$$\operatorname*{res}_{z=-1} K(z) = -1 \quad \text{i} \quad \operatorname*{res}_{z=-n} K(z) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \quad (n \geq 3). \tag{18}$$

Prethodni rezultati za Kurepinu funkciju navedeni su prema [**37**] i [**38**]. Funkcionalna jednačina (17), pored Kurepine funkcije $K(z)$, ima još jedno rešenje:

$$K_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(z-n), \tag{19}$$

pri tom prethodni red apsolutno konvergira na skupu $C \backslash Z$ [**99**].

Proširenje domena funkcija $K(z)$ i $K_1(z)$, u smislu glavne vrednosti u tački, dato je sledećim tvrđenjima [**38**], [**99**].

Lema 3.3.4. *Definišimo* $L_1 = -\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname*{v.p.}_{z=-n} \Gamma(z)$, *tada važi:*

$$L_1 = \frac{1}{e}\Big(\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n}\Big) = \frac{\mathrm{Ei}(1)}{e} \approx 0.697\,174\,883\,, \tag{20}$$

gde je $\mathrm{Ei}(t) = e^t \int_0^\infty \frac{e^{-x}\, dx}{t - x}$ *funkcija eksponencijalnog integrala za* $t > 0$ [**33**, **3.352**/6.].

Teorema 3.3.5. *Za funkcije $K(z)$ i $K_1(z)$ važi:*

$$\underset{z=-n}{\text{v.p.}}\, K(z) = -\sum_{i=0}^{n-1} \underset{z=-i}{\text{v.p.}}\, \Gamma(z) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \frac{\Gamma'(i+1)}{\Gamma(i+1)^2} \quad (n \in N) \tag{21}$$

i

$$\underset{z=n}{\text{v.p.}}\, K_1(z) = \underset{z=n}{\text{v.p.}}\, K(z) - L_1 \quad (n \in Z). \tag{22}$$

Veza između funkcija $K(z)$ i $K_1(z)$ data je SLAVIĆ*evom formulom* [**38**], [**53**], [**99**]:

Teorema 3.3.6. *Važi:*

$$K(z) = \frac{1}{e}\Big(\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n}\Big) - \frac{\pi}{e} \operatorname{ctg} \pi z + \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(z-n), \tag{23}$$

pri čemu se vrednosti u prethodnoj formuli, u celobrojnim tačkama z, uzimaju u smislu glavne vrednosti u tački.

Napomena 3.3.7. *U radu* [**99**] B. MALEŠEVIĆ *je dokazao sledeću formulu:*

$$K(z) = \frac{\mathrm{Ei}(1) + \mathrm{i}\,\pi}{e} + \frac{(-1)^z \Gamma(1+z)\Gamma(-z,-1)}{e}, \tag{24}$$

za vrednosti $z \in C \backslash \{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$. U prethodnoj formuli $\mathrm{Ei}(z)$ *i* $\Gamma(z,a)$ *su eksponencijalni integral i nekompletna gama funkcija respektivno. Napomenimo da je u radu* [**125**] *koristeći se formulom* (24) *dato, numeričkim postupkom, jedno poboljšanje odgovarajuće nejednakosti iz rada* [**108**, *Lema* 4.3] *koja se odnosi na* KUREPINU *funkciju $K(x)$ za realne vrednosti $x > 0$.*

Analogno Kurepinoj funkciji $K(z)$, razmatra se funkcija $A(z)$ definisana integralom:

$$A(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^{z+1} - (-1)^z t}{t+1}\, dt, \tag{25}$$

koja konvergira za $\mathrm{Re}\, z > 0$ [**97**] i predstavlja jedno analitičko proširenje alternirajuće sume faktorijela:

$$A(n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} i!. \tag{26}$$

Napomenimo da za kompleksne vrednosti z izraz $(-1)^z$ računamo kao $e^{z(i\pi)}$. Za funkciju $A(z)$ koristimo naziv *alternirajuća* KUREPINA *funkcija* i ona jeste jedno rešenje funkcionalne jednačine:

$$A(z) + A(z-1) = \Gamma(z+1). \tag{27}$$

Primetimo da je na osnovu prethodne funkcionalne jednačine moguće odrediti analitičko produženje alternirajuće KUREPINE funkcije $A(z)$ za $\mathrm{Re}\, z \leq 0$. Tako određena alternirajuća KUREPINA funkcija $A(z)$ jeste meromorfna funkcija sa prostim polovima u tačkama $z = -n$ $(n \geq 2)$. Vrednosti rezidijuma alternirajuće KUREPINE funkcije određene su sa:

$$\operatorname*{res}_{z=-n} A(z) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \quad (n \geq 2). \tag{28}$$

Prethodni rezultati za alternirajuću KUREPINU funkciju navedeni su prema [**97**]. Funkcionalna jednačina (27), pored alternirajuće KUREPINE funkcije $A(z)$, ima još jedno rešenje:

$$A_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma(z+1-n); \tag{29}$$

pri tom, prethodni red apsolutno konvergira na skupu $C \backslash Z$ [**107**].

Proširenje domena funkcija $A(z)$ i $A_1(z)$, u smislu glavne vrednosti u tački, dato je sledećim tvrđenjima [**107**]:

Lema 3.3.8. *Definišimo* $L_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname*{v.p.}_{z=-(n-1)} \Gamma(z)$, *tada važi:*

$$L_2 = 1 + e\gamma - e\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!n}\Big) = 1 + e\mathrm{Ei}(-1) \approx 0.403\,652\,337\,, \tag{30}$$

gde je $\mathrm{Ei}(t) = -e^t \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{tx}\, dx}{1+x}$ *funkcija eksponencijalnog integrala za* $t < 0$ [**33**, **3.352**/4.].

Dokaz. Na osnovu (14) važi:

$$L_2 = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)^2} = 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n!} - \gamma e \right), \tag{31}$$

pri tom prethodni redovi konvergiraju. Važi RAMANUJANova formula [**56**, str. 46]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n!} x^n = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!\, n} x^n, \tag{32}$$

za $x\in C$. Dalje, koristimo formulu [**51**, **5.2.8.**/3.]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!\,n}=-\gamma-\ln|t|+\mathrm{Ei}(t), \tag{33}$$

za $t\in R\backslash\{0\}$. Na osnovu (31), (32) za $x=1$ i (33) za $t=-1$ dobijamo (30). ∎

Napomena 3.3.9. *Razmatrajući* (32) *za* $x=-1$ *i* (33) *za* $t=1$, *analogno prethodnom dokazu, sleduje dokaz Leme* 3.3.4.

Teorema 3.3.10. *Za funkcije* $A(z)$ *i* $A_1(z)$ *važi:*

$$\underset{z=-n}{\text{v.p.}}\,A(z)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n+1-i}\underset{z=-(i-1)}{\text{v.p.}}\,\Gamma(z)=(-1)^{n+1}\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\Gamma'(i)}{\Gamma(i)^2}\right)\quad(n\in N) \tag{34}$$

i

$$\underset{z=n}{\text{v.p.}}\,A_1(z)=(-1)^nL_2+\underset{z=n}{\text{v.p.}}\,A(z)\quad(n\in Z). \tag{35}$$

Dokaz. 1. Na osnovu funkcionalne jednačine (27), nizom redukcija: $A(z+n)=\Gamma(z+n+1)-A(z+n-1)=\Gamma(z+n+1)-\big(\Gamma(z+n)-A(z+n-2)\big)=\ldots=\Gamma(z+n+1)-\Gamma(z+n)+\ldots+(-1)^{n-1}\Gamma(z+2)+(-1)^nA(z)$, dobija se jednakost:

$$A(z)=(-1)^nA(z+n)+\Big(\Gamma(z+2)-\ldots+(-1)^{n+1}\Gamma(z+n+1)\Big). \tag{36}$$

Razmatrajući prethodnu jednakost za tačku $z=-n$, u smislu glavne vrednosti u tački, na osnovu formule (14), proizilazi da je navedena formula tačna.

2. Za $n\geq 0$ važi:

$$\begin{aligned}\underset{z=n}{\text{p.v.}}\,A_1(z)&=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\underset{z=n+1-i}{\text{p.v.}}\,\Gamma(z)=(-1)^n\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\underset{z=-(i-1)}{\text{p.v.}}\,\Gamma(z)\\&+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\Gamma(i+1)=(-1)^nL_2+A(n)\end{aligned} \tag{37}$$

i za $n<0$ važi:

$$\begin{aligned}\underset{z=n}{\text{p.v.}}\,A_1(z)&=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\underset{z=n+1-i}{\text{p.v.}}\,\Gamma(z)=(-1)^{(-n)}\left(\sum_{i=(-n)}^{\infty}(-1)^i\underset{z=-i+1}{\text{p.v.}}\,\Gamma(z)\right)\\&=(-1)^{(-n)}\left(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\underset{z=-(i-1)}{\text{p.v.}}\,\Gamma(z)\right)-(-1)^{(-n)}\left(\sum_{i=0}^{(-n)-1}(-1)^{-i}\underset{z=-(i-1)}{\text{p.v.}}\,\Gamma(z)\right)\\&=(-1)^nL_2+\left(\sum_{i=0}^{(-n)-1}(-1)^{(-n)+1-i}\underset{z=-(i-1)}{\text{p.v.}}\,\Gamma(z)\right)=(-1)^nL_2+\underset{z=n}{\text{p.v.}}\,A(z).\ \blacksquare\end{aligned} \tag{38}$$

Veza između funkcija $A(z)$ i $A_1(z)$ data je formulom SLAVIĆevog tipa, koja je dokazana u [**107**]:

Teorema 3.3.11. *Važi:*

$$A(z) = \Big(e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!\,n} - 1 - e\gamma\Big)(-1)^z + \frac{\pi e}{\sin\pi z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Gamma(z{+}1{-}n), \tag{39}$$

pri čemu se vrednosti u prethodnoj formuli, u celobrojnim tačkama z, uzimaju u smislu glavne vrednosti u tački.

Napomena 3.3.12. *Teorema* 3.3.10. *predstavlja specijalni slučaj Teoreme* 3.3.11. *za celobrojne tačke* (*u smislu glavne vrednosti u tački*). *Napomenimo da u opštem slučaju Teorema* 3.3.11. *je dokazana u* [**107**] *postupkom koji je potpuno analogan postupku kojim je dokazana Teorema* 3.3.6. *u radovima* [**38**] *i* [**99**].

Napomena 3.3.13. *U radu* [**107**] B. Malešević *je dobio sledeću formulu:*

$$A(z) = -\big(1{+}e\,\mathrm{Ei}(-1)\big)(-1)^z + e\,\Gamma(z{+}2)\,\Gamma(-z{-}1,1), \tag{40}$$

za vrednosti $z\in C\backslash\{-2,-3,-4,\ldots\}$ *kao direktnu posledicu odgovarajuće formule iz* [**51**, str. 325, formula 13]. *U prethodnoj formuli* $\mathrm{Ei}(z)$ *i* $\Gamma(z,a)$ *su eksponencijalni integral i nekompletna gama funkcija respektivno. Napomenimo da je moguće koristeći formulu* (40), *numeričkim postupkom iz rada* [**125**], *dati razna poboljšanja odgovarajućih nejednakosti iz rada* [**114**], *koja se odnose na realni deo alternirajuće* Kurepine *funkcije* $A(x)$ *za realne vrednosti* $x > -2$.

Glavna vrednost zeta funkcije i Casimirova energija. Riemannova zeta funkcija $\zeta(s)$ ima samo jedan (prost) pol $s=1$ u kome je glavna vrednost data sa:

$$\mathop{\mathrm{v.p.}}_{s=1}\zeta(s) = \gamma, \tag{41}$$

kao što je navedeno u [**31**]. Navedena jednakost sleduje iz Laurentovog razvoja Riemannove zeta funkcije u okolini pola $s=1$ [**75**, str. 155]. Za nas je od interesa glavna vrednost globalne spektralne zeta $\zeta_L(s)$ funkcije koja je jedno uopštenje Riemannove zeta funkcije $\zeta(s)$. Navodimo definiciju globalne spektralne zeta funkcije prema [**118**]. Naime, neka je L eliptički diferencijalni operator drugog reda koji deluje samo po promenljivoj x i neka su $\varphi(t,x) = e^{\pm i\omega t}\varphi_n(x)$ rešenja jednačine:

$$\left(L + \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\varphi(t,x) = 0, \tag{42}$$

gde su ω i c konstante. Dalje, neka skalari λ_n ispunjavaju $L\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x)$. Tada *globalnu spektralnu zeta funkciju* definišemo sa [**44**], [**118**]:

$$\zeta_L(s) = \sum_n \lambda_n^{-s}. \tag{43}$$

CASIMIR*ova energija* polja $\varphi(t,x)$ uvodi se glavnom vrednošću [**62**], [**118**]:

$$E_0 = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\zeta_L(-\frac{1}{2}+\varepsilon) + \zeta_L(-\frac{1}{2}-\varepsilon)}{2} = \frac{1}{2} \operatorname*{v.p.}_{s=-\frac{1}{2}} \zeta_L(s). \tag{44}$$

Napomenimo da su u radu [**118**] dati pregledi raznih vrednosti CASIMIRove energije, zavisno od polja nad kojim se razmatra. Svi proračuni koji su navedeni u [**118**] bazirani su na radu [**62**] i odnose se na razne globalne spektralne zeta funkcije koje imaju po pravilu proste polove.

3.4 Jedan metod dokazivanja diferencijalne transcendentnosti

U ovoj sekciji, prema radovima [**126**] i [**127**], izlažemo jedan metod dokazivanja diferencijalne transcendentnosti, koji se odnosi na skup meromorfnih funkcija $\mathcal{M}_S$ nad nepraznim otvorenim povezanim skupom $S \subseteq C$ polja kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$, sa uobičajenim diferenciranjem $\mathsf{f}' = d\mathsf{f}/dz$ kompleksne funkcije $\mathsf{f} \in \mathcal{M}_S$. Kao što je napomenuto u Primeru 2.4.1. / 5^0: ako je $S = C$, tada koristimo oznaku $\mathcal{M}$ umesto $\mathcal{M}_C$. Neka je $\mathcal{C} = \mathbf{C}(z)$ polje kompleksnih racionalnih funkcija. Metod će se zasnivati na sekciji **2.9.** prethodne glave. Vršimo „funkcijsku" interpretaciju Teoreme 2.9.5. uzimajući da je diferencijalno polje $\mathbf{K} = \mathcal{M}$, diferencijalno potpolje $\mathbf{F} = \mathcal{C} \leq \mathbf{K} = \mathcal{M}$ i diferencijalno međupolje $\mathbf{L} = \mathcal{L}$ formirano sa skupom nosačem:

$$\mathsf{L} = \{\mathsf{g} \in \mathcal{M} \mid \mathsf{g} \text{ je diferencijalno-algebarska funkcija nad } \mathcal{C}\}. \tag{1}$$

Posmatrajmo celu funkciju e i meromorfnu funkciju g. Tada kompozicija $\mathsf{e} \circ \mathsf{g}$ nije uvek meromorfna funkcija kao što pokazuje sledeći primer.

Primer 3.4.1. *Neka su date cela funkcija* $\mathsf{e}(z) = e^z$ *i meromorfna funkcija* $\mathsf{g}(z) = \dfrac{1}{z}$. *Tada je* $\mathsf{g} \circ \mathsf{e}(z) = \dfrac{1}{e^z}$ *meromorfna funkcija kao količnik dve cele funkcije. S druge strane, primetimo da funkcija* $\mathsf{e} \circ \mathsf{g}(z) = e^{1/z}$ *nije meromorfna funkcija, jer je* $z=0$ *esencijalni singularitet.*

U sledećem primeru razmotrimo neka računanja izvoda elemenata iz diferencijalnog polja $\mathcal{M}$, uz upotrebu pravila proizvoda (videti Primer 2.4.2).

Primer 3.4.2. *U ovom primeru razmatramo skup meromorfnih funkcija* $\mathcal{M}$, *sa uobičajenim diferenciranjem* $\mathsf{f}' = d\mathsf{f}/dz$ *funkcije* $\mathsf{f} \in \mathcal{M}$. *Neka je* e *cela funkcija i* u *meromorfna funkcija. Tada važi pravilo kompozicije*: $D\big(\mathsf{u}(\mathsf{e})\big) = \big(D\mathsf{u}\big)(\mathsf{e}) \cdot D(\mathsf{e})$. *Razmotrimo slučaj kada je* $\mathsf{e}' \neq 0$, *tj. kada je* e *nekonstantna funkcija. Odredimo redom sledeće kompozicije*: $\big(D^1\mathsf{u}\big) \circ \mathsf{e}$, $\big(D^2\mathsf{u}\big) \circ \mathsf{e}$ *i* $\big(D^3\mathsf{u}\big) \circ \mathsf{e}$. *Na osnovu pravila* *kompozicije, iz jednakosti* $D\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big) = D\big(\mathfrak{u}(\mathfrak{e})\big) = \big(D\mathfrak{u}\big)(\mathfrak{e})\cdot D(\mathfrak{e}) = \big(D\mathfrak{u}\big)\circ\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{e}'$ *dobijamo*:

$$\big(D\mathfrak{u}\big)\circ\mathfrak{e} = \frac{1}{\mathfrak{e}'}\cdot D\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big). \tag{2}$$

Dalje iz:

$$\begin{aligned} D^2\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big) &= D^2\big(\mathfrak{u}(\mathfrak{e})\big) = D\big((D\mathfrak{u})(\mathfrak{e})\cdot\mathfrak{e}'\big) \\ &= D\big((D\mathfrak{u})(\mathfrak{e})\big)\cdot\mathfrak{e}' + (D\mathfrak{u})(\mathfrak{e})\cdot D(\mathfrak{e}') \\ &= (D^2\mathfrak{u})(\mathfrak{e})\cdot(\mathfrak{e}')^2 + (D\mathfrak{u})(\mathfrak{e})\cdot\mathfrak{e}'' \\ &= (D^2\mathfrak{u})\circ\mathfrak{e}\cdot(\mathfrak{e}')^2 + \big((D\mathfrak{u})\circ\mathfrak{e}\big)\cdot\mathfrak{e}'' \\ &\underset{(2)}{=} (D^2\mathfrak{u})\circ\mathfrak{e}\cdot(\mathfrak{e}')^2 + \Big(\frac{1}{\mathfrak{e}'}\cdot D\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big)\Big)\cdot\mathfrak{e}'' \end{aligned} \tag{3}$$

nalazimo:

$$\begin{aligned} \big(D^2\mathfrak{u}\big)\circ\mathfrak{e} &= \frac{1}{(\mathfrak{e}')^2}\cdot\Big(D^2\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big) - \frac{\mathfrak{e}''}{\mathfrak{e}'}\cdot D^1\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big)\Big) \\ &= \frac{1}{(\mathfrak{e}')^2}\cdot D^2\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big) - \frac{\mathfrak{e}''}{(\mathfrak{e}')^3}\cdot D^1\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big) \\ &= \frac{\mathfrak{e}'\cdot D^2\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big) - \mathfrak{e}''\cdot D^1\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big)}{(\mathfrak{e}')^3}. \end{aligned} \tag{4}$$

Analogno prethodnom, može se pokazati da važi:

$$\begin{aligned} \big(D^3\mathfrak{u}\big)\circ\mathfrak{e} &= \frac{1}{(\mathfrak{e}')^3}\cdot D^3\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big) - \frac{3\mathfrak{e}''}{(\mathfrak{e}')^4}\cdot D^2\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big) - \Big(\frac{3(\mathfrak{e}'')^2}{(\mathfrak{e}')^5} - \frac{\mathfrak{e}'''}{(\mathfrak{e}')^4}\Big)\cdot D^1\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big) \\ &= \frac{(\mathfrak{e}')^2\cdot D^3\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big) - 3\mathfrak{e}''\mathfrak{e}'\cdot D^2\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big) + \big(3(\mathfrak{e}'')^2 - \mathfrak{e}'''\mathfrak{e}'\big)\cdot D^1\big(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}\big)}{(\mathfrak{e}')^5}. \end{aligned} \tag{5}$$

Važi tvrđenje:

Teorema 3.4.3. *Neka je* $\mathfrak{e}$ *cela diferencijalno-algebarska funkcija i neka je* $\mathfrak{g}$ *meromorfna diferencijalno-algebarska funkcija. Tada je kompozicija* $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{e}$ *jedna meromorfna diferencijalno-algebarska funkcija.*

Dokaz. Neka je $\mathfrak{g}$ meromorfna diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathcal{C}$. Tada postoji diferencijalni polinom $\mathfrak{p}\in\mathcal{C}[z, u_0, u_1, \ldots, u_n]$, takav da je tačno:

$$\mathfrak{p}\big(z, \mathfrak{g}(z), D(\mathfrak{g}(z)), \ldots, D^n(\mathfrak{g}(z))\big) = 0. \tag{6}$$

Za celu diferencijalno-algebarsku funkciju $\mathfrak{e}$ razlikujemo dva slučaja. Prvi slučaj je $\mathfrak{e}' = 0$, tada je $\mathfrak{e}$ konstanta i kompozicija $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{e}$ je trivijalno meromorfna diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathcal{C}$. Drugi slučaj je $\mathfrak{e}' \neq 0$, tj. kada je $\mathfrak{e}$ nekonstanta funkcija. Tada postoje racionalni izrazi $\ell_{k,j}$, takvi da je za svaku meromorfnu funkciju $\mathfrak{u}$:

$$(D^k\mathfrak{u})\circ\mathfrak{e} = \sum_{j=1}^{k} \ell_{k,j} D^j(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}). \tag{7}$$

Tvrđenje važi za $k = 1$, $k = 2$ i $k = 3$ kao što je razmatrano u Primeru 3.4.2. (videti formule (2), (4) i (5)). Dalje, neka za k važi jednakost (7) za određene racionalne izraze $\ell_{k,j}$ $(1 \leq j \leq k)$. Tada za $k+1$ iz $D\big((D^k\mathfrak{u})\circ\mathfrak{e}\big) = D\big(D^k\mathfrak{u}(\mathfrak{e})\big) = \big(D^{k+1}\mathfrak{u}\big)(\mathfrak{e})\cdot D\mathfrak{e} = \big(D^{k+1}\mathfrak{u}\big)\circ\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{e}'$ i induktivne pretpostavke dobijamo:

$$\begin{aligned}
\big(D^{k+1}\mathfrak{u}\big)\circ\mathfrak{e} &= \frac{1}{\mathfrak{e}'}\cdot D\big((D^k\mathfrak{u})\circ\mathfrak{e}\big)\\
&= \frac{1}{\mathfrak{e}'}\cdot D\Big(\sum_{j=1}^{k}\ell_{k,j}D^j(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e})\Big)\\
&= \frac{1}{\mathfrak{e}'}\cdot\sum_{j=1}^{k} D\big(\ell_{k,j}D^j(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e})\big)\\
&= \frac{1}{\mathfrak{e}'}\cdot\sum_{j=1}^{k}\Big(D\big(\ell_{k,j}\big)\cdot D^j(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}) + \ell_{k,j}\cdot D\big(D^j(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e})\big)\Big)\\
&= \frac{1}{\mathfrak{e}'}\cdot\sum_{j=1}^{k}\Big(\ell'_{k,j}\cdot D^j(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}) + \ell_{k,j}\cdot D^{j+1}(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e})\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\frac{\ell'_{k,j}+\ell_{k,j-1}}{\mathfrak{e}'}\cdot D^j(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}) = \sum_{j=1}^{k+1}\ell_{k+1,j}\cdot D^j(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{e}),
\end{aligned}\tag{8}$$

pri čemu važi rekurentna relacija:

$$\ell_{k+1,j} = \frac{\ell'_{k,j}+\ell_{k,j-1}}{\mathfrak{e}'},\quad \ell_{1,1} = 1/\mathfrak{e}',\ \ \ell_{k,0} = 0,\ \ \ell_{k,j} = 0\ (j>k). \tag{9}$$

Odatle je npr. $\ell_{j,j} = 1/(\mathfrak{e}')^j$ $(1 \leq j \leq k)$. Dalje, kompozicija $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}\circ\mathfrak{e}$ je jedna meromorfna funkcija. Sad uvedimo u razmatranje novi diferencijalni polinom:

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}\big(\mathfrak{e}, y, \ell_{1,1}Dy, \ell_{2,2}D^2y + \ell_{2,1}Dy, \ldots, \ell_{n,n}D^ny + \ldots + \ell_{n,1}Dy\big). \tag{10}$$

Dokazujemo da je meromorfna funkcija $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}\circ\mathfrak{e}$ rešenje diferencijalno-algebarske jednačine $\mathfrak{p}_1 = 0$. Zaista, na osnovu (7) za $z = \mathfrak{e}$ važi:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1\big(z, \mathfrak{f}, D\mathfrak{f}, \ldots, D^n\mathfrak{f}\big) &= \mathfrak{p}\big(\mathfrak{e}, \mathfrak{g}\circ\mathfrak{e}, \ell_{1,1}D(\mathfrak{g}\circ\mathfrak{e}), \ell_{2,2}D^2(\mathfrak{g}\circ\mathfrak{e}) + \ell_{2,1}D(\mathfrak{g}\circ\mathfrak{e}),\\
&\qquad \ldots, \ell_{n,n}D^n(\mathfrak{g}\circ\mathfrak{e}) + \ldots + \ell_{n,1}D(\mathfrak{g}\circ\mathfrak{e})\big)\\
&= \mathfrak{p}\big(\mathfrak{e}, \mathfrak{g}\circ\mathfrak{e}, (D\mathfrak{g})\circ\mathfrak{e}, \ldots, (D^n\mathfrak{g})\circ\mathfrak{e}\big)\\
&= \big(\mathfrak{p}\big(z, \mathfrak{g}(z), D(\mathfrak{g}(z)), \ldots, D^n(\mathfrak{g}(z))\big)\big)\Big|_{z=\mathfrak{e}} = 0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Samim tim, meromorfna funkcija $\mathsf{f} = \mathfrak{g}\circ\mathfrak{e}$ jeste diferencijalno-algebarska nad $\mathcal{C}$. ∎

Napomena 3.4.4. *Prethodno dokazana teorema daje tvrđenje koje je obrnuto u odnosu na tvrđenje* N. Steinmetz*a* [**47**]:

> *Neka su date kompleksne funkcije* $\mathsf{f} = \mathsf{f}(z)$ *i* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(z)$ *takve da je kompozicija* $\mathsf{f}\circ\mathfrak{g}(z)$ *meromorfna diferencijalno-algebarska funkcija, i ako je* $\mathfrak{g}(z)$ *jedna cela diferencijalno-algebarska kompleksna funkcija, tada je funkcija* $\mathsf{f}(z)$ *jedna meromorfna diferencijalno-algebarska funkcija* [**47**, Tvrđenje 2.].

Napomena 3.4.5. *Primetimo da iz dokaza prethodne teoreme dobijamo sledeći niz formula*:

$$
\begin{aligned}
\big(D\mathfrak{u}\big)(\mathfrak{e}) &= \frac{D\big(\mathfrak{u}(\mathfrak{e})\big)}{\mathfrak{e}'}\\
\big(D^2\mathfrak{u}\big)(\mathfrak{e}) &= \frac{\mathfrak{e}'\cdot D^2\big(\mathfrak{u}(\mathfrak{e})\big) - \mathfrak{e}''\cdot D\big(\mathfrak{u}(\mathfrak{e})\big)}{(\mathfrak{e}''')^3}\\
\big(D^3\mathfrak{u}\big)(\mathfrak{e}) &= \frac{(\mathfrak{e}')^2\cdot D^3\big(\mathfrak{u}(\mathfrak{e})\big) - 3\mathfrak{e}''\mathfrak{e}'\cdot D^2\big(\mathfrak{u}(\mathfrak{e})\big) + \big(3(\mathfrak{e}'')^2 - \mathfrak{e}'''\mathfrak{e}'\big)\cdot D\big(\mathfrak{u}(\mathfrak{e})\big)}{(\mathfrak{e}''')^5}\\
&\;\;\vdots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Neka je data beskonačno diferencijabilna kompleksna funkcija $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(\mathfrak{x})$ *i neka su uvedene redom smene* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t) = \mathfrak{e}(t)$ *i* $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(t) = \mathfrak{y}(\mathfrak{e}(t))$ *za kompleksni parametar* t. *Tada važi*: $\mathfrak{y}'_{\mathfrak{x}} = (D\mathfrak{u})(\mathfrak{e})$, $\mathfrak{y}'_t = D(\mathfrak{u}(\mathfrak{e}))$ *i* $\mathfrak{x}'_t = D(\mathfrak{e})$. *Saglasno uvedenim oznakama, formule* (12) *dobijaju zapis dobro poznatih formula za implicitno diferenciranje*:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{y}'_{\mathfrak{x}} &= \frac{\mathfrak{y}'_t}{\mathfrak{x}'_t}\\
\mathfrak{y}''_{\mathfrak{x}^2} &= \frac{\mathfrak{x}'_t\cdot\mathfrak{y}''_{t^2} - \mathfrak{x}''_{t^2}\cdot\mathfrak{y}'_t}{(\mathfrak{x}'_t)^3}\\
\mathfrak{y}'''_{\mathfrak{x}^3} &= \frac{(\mathfrak{x}'_t)^2\cdot\mathfrak{y}'''_{t^3} - 3\mathfrak{x}''_{t^2}\mathfrak{x}'_t\cdot\mathfrak{y}''_{t^2} + \big(3(\mathfrak{x}''_{t^2})^2 - \mathfrak{x}'''_{t^3}\mathfrak{x}'_t\big)\cdot\mathfrak{y}'_t}{(\mathfrak{x}'_t)^5}\\
&\;\;\vdots
\end{aligned}
\tag{13}
$$

koje su navedene za $n = 1, 2, 3$ *u* [**17**, str. 280]. *Primenu navedenih formula za* $n = 1, 2, 3, 4, 5$ *razmatrao je* J. B. REYNOLDS *u* [**16**]. T. M. APOSTOL *u članku* [**88**] *navodi vezu eksponencijalnih* BELL*ovih polinomima i formula za parametarske izvode. Takođe, u istom članku je dobijena rekurentna formula za izvode višeg reda, koja se razlikuje od formule* (9).

Na osnovu Teoreme 2.9.5. i prethodne Teoreme 3.4.3. proizilazi sledeće tvrđenje [**127**] na kojem zasnivamo jedan metod dokazivanja diferencijalne transcendentnosti:

Teorema 3.4.6. *Neka je* $\mathsf{c}=\mathsf{c}(z)$ *meromorfna funkcija koja je i diferencijalno-transcendentna nad* $\mathcal{C}$ *i neka je* $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}\big(z, u_0, u_1, \ldots, u_m, y_1, \ldots, y_n\big)$ *racionalni izraz nad* $\mathcal{L}$. *Ako su* $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_m$ *cele funkcije koje su diferencijalno-algebarske nad* $\mathcal{C}$ *koje nisu konstante i ako za* $\mathsf{b}=\mathsf{b}(z)$ *meromorfnu funkciju važi*:

$$\mathfrak{r}\big(z, \mathsf{b}(z), \mathsf{b}\circ\mathsf{e}_1(z), \ldots, \mathsf{b}\circ\mathsf{e}_m(z), D\mathsf{b}(z), \ldots, D^n\mathsf{b}(z)\big) = \mathsf{c}(z), \tag{14}$$

tada je $\mathsf{b} = \mathsf{b}(z)$ *diferencijalno-transcendentna funkcija nad* $\mathcal{C}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je meromorfna funkcija $\mathsf{b} = \mathsf{b}(z)$ i diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathcal{C}$, tj. $\mathsf{b} \in \mathcal{L}$. Tada prema prethodnoj Teoremi 3.4.3. važi:

$$\mathsf{b}\circ\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{b}\circ\mathsf{e}_m \in \mathcal{L}. \tag{15}$$

Sa druge strane, prema Lemi 2.9.4. važi:

$$D\mathsf{b}, \ldots, D^n\mathsf{b} \in \mathcal{L}. \tag{16}$$

Konačno, za racionalni izraz $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\big(z, u_0, u_1, \ldots, u_m, y_1, \ldots, y_n\big)$ nad $\mathcal{L}$ važi:

$$\mathfrak{r}\big(z, \mathsf{b}(z), \mathsf{b}\circ\mathsf{e}_1(z), \ldots, \mathsf{b}\circ\mathsf{e}_m(z), D\mathsf{b}(z), \ldots, D^n\mathsf{b}(z)\big) \in \mathcal{L}. \tag{17}$$

Na osnovu jednakosti (14) dolazimo do kontradikcije. Svođenjem na kontradikciju sleduje da je $\mathsf{b} = \mathsf{b}(z)$ diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathcal{C}$. ■

3.5 Neki primeri diferencijalno transcendentnih funkcija

U ovom delu izlažemo konkretne primere dokaza diferencijalne transcendentnosti nekih klasa kompleksnih funkcija uz upotrebu Teoreme 3.4.6. prethodne sekcije. Napomenimo da je u većini konkretnih slučajeva dovoljno razmatrati cele funkcije $\mathsf{e}_i = \mathsf{e}_i(z)$ kao linearne funkcije $\alpha_i z + \beta_i$, za $\alpha_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq m)$ i racionalnu funkciju $\mathfrak{r}$ određenu kao polinomsku funkciju $\mathfrak{p}$ nad $\mathcal{C}$ $\big($primetimo da je $\mathcal{C} \leq \mathcal{L}\big)$.

Pre svega, na osnovu HÖLDERove teoreme, primetimo da gama funkcija $\Gamma(z)$ nije diferencijalno-algebarska nad $\mathcal{C} = \mathbf{C}(z)$ poljem kompleksnih racionalnih funkcija. Budući da je $\Gamma(z)$ meromorfna funkcija, tada možemo zaključiti da važi:

$$\Gamma(z) \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{L}. \tag{1}$$

U ovom delu suštinski koristimo prethodnu činjenicu i Teoremu 2.9.5. po kojoj je $\mathcal{L}$ jedno diferencijalno polje.

1^0. Riemannova zeta funkcija. Polazimo od definicije:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}=\prod_{p\text{ - prost}}\big(1-p^{-s}\big)^{-1}, \tag{2}$$

za $\mathrm{Re}(s)>1$. Tako određena kompleksna funkcija može se meromorfno produžiti na celu kompleksnu ravan i tako određena RIEMANNova funkcija ima samo prost pol $s=1$ [**101**]. Za RIEMANNovu funkciju važi sledeća funkcionalna jednačina [**1**]:

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\,\Gamma((1-s)/2)\,\zeta(1-s). \tag{3}$$

Na osnovu poznatih jednakosti za gama funkciju [**101**, str. 492]:

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)=\pi/\sin\pi s \quad \text{i} \quad \Gamma(s)\,\Gamma(s+1/2)=2\sqrt{\pi}2^{-2s}\,\Gamma(2s) \tag{4}$$

sleduje funkcionalna jednačina:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{\pi^{-(1-s)/2}}{\pi^{-s/2}}\,\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}\,\zeta(1-s)\\ &= \pi^{-1/2+s}\,\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}\,\frac{\Gamma(s/2+1/2)}{\Gamma(s/2+1/2)}\,\zeta(1-s)\\ &= \pi^{-1/2+s}\,\frac{\Gamma(1/2-s/2)\,\Gamma(1/2+s/2)}{2\sqrt{\pi}2^{-s}\Gamma(s)}\,\zeta(1-s)\\ &= \pi^{-1}(2\pi)^s\,\frac{\pi/\sin\big(\pi(1/2-s/2)\big)}{2\Gamma(s)}\,\zeta(1-s)=\frac{(2\pi)^s}{2\Gamma(s)\cos\big(\frac{\pi s}{2}\big)}\,\zeta(1-s).\end{aligned} \tag{5}$$

Uobičajeno je da prethodnu funkcionalnu jednačinu zapisujemo u obliku [**101**, str. 9]:

$$\zeta(s)=\chi(s)\zeta(1-s), \quad \text{gde je} \quad \chi(s)=\frac{(2\pi)^s}{2\,\Gamma(s)\cos\big(\frac{\pi s}{2}\big)}\,. \tag{6}$$

Dokazujemo da je $\zeta(s)$ diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathcal{C}$. Zaista, pretpostavimo da je $\zeta(s)$ jedna diferencijalna-algebarska funkcija nad $\mathcal{C}$, tj. $\zeta(s)\in\mathcal{L}$. Tada $\zeta(1-s)$ i $\zeta(s)/\zeta(1-s)$ pripadaju $\mathcal{L}$; samim tim $\chi(s)\in\mathcal{L}$. Takođe, $(2\pi)^s$, $\cos\big(\frac{\pi s}{2}\big)\in\mathcal{L}$. Budući da je $\mathcal{L}$ polje, to iz (6) sleduje kontradikcija $\Gamma=\Gamma(s)\in\mathcal{L}$. Odatle sleduje da je RIEMANNova zeta funkcija diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathcal{C}$.

2^0. Dirichletovi *L*-redovi. Polazimo od definicije DIRICHLETovog L-reda:

$$L_k(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\kappa_k(n)\frac{1}{n^s} \quad (k\in Z), \tag{7}$$

gde je $\kappa_k(n)$ DIRICHLETov karakter po modulu k koji određuje DIRICHLETov L-red [**75**, str. 244]. Napomenimo da DIRICHLETovi L-redovi konvergiraju za $\mathrm{Re}(s)>1$ jer je $|\kappa_k(n)| \leq 1$. Specijalno, izborom trivijalnog karaktera $\kappa_0(n) = 1$ dobijamo $\zeta(s)=L_0(s)$. Dalje, razmatramo DIRICHLETove L-redove za netrivijalni karakter. Svaki takav red određuje kompleksnu funkciju koja se može meromorfno produžiti na celu kompleksnu ravan. Važe funkcionalne jednačine [**6**], [**92**]:

$$L_{-k}(s) = 2^s \pi^{s-1} k^{-s+\frac{1}{2}} \Gamma(1-s) \cos(\frac{\pi s}{2})\, L_{-k}(1-s) \tag{8}$$

i

$$L_{+k}(s) = 2^s \pi^{s-1} k^{-s+\frac{1}{2}} \Gamma(1-s) \sin(\frac{\pi s}{2})\, L_{+k}(1-s), \tag{9}$$

za $k\in N$. Analogno postupku koji je primenjen za RIEMANNovu zeta funkciju, proizilazi da su svi DIRICHLETovi redovi $L_{+k}(s)$, $L_{-k}(s)$ $(k \in N)$ diferencijalno-transcendentne funkcije nad $\mathcal{C}$. Posebno, navedeno se odnosi na DIRICHLETovu eta funkciju:

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^s} = (1-2^{1-s})\, L_{+1}(s) \tag{10}$$

i DIRICHLETovu beta funkciju:

$$\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{(2n+1)^s} = L_{-4}(s). \tag{11}$$

Selbergova klasa Dirichletovih redova. U ovom delu razmatramo SELBERG*ovu klasu* DIRICHLETovih redova:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{12}$$

za koje važe sledeće četiri aksiome [**83**]:

(i) Funkcija $(s-1)^m F(s)$ je cela funkcija po s za neki nenegativan ceo broj m.

(ii) Za koeficijente a_n važi: $a_n = O(n^{\varepsilon})$ za svako $\varepsilon > 0$.

(iii) Postoji funkcija - gama faktor $\gamma_F(s)$ oblika:

$$\gamma_F(s) = e^{i\varphi} q^s \prod_{i=1}^{k} \Gamma(\omega_i s + \mu_i)$$

za neke $k\in N$, $\varphi\in R$, $q>0$, $\omega_i>0$ i $\mathrm{Im}(\mu_i)\geq 0$ $(\mu_i\in C)$; tako da za funkciju:

$$\Phi(s) = \gamma_F(s)\, F(s),$$

važi funkcionalna jednačina:

$$\Phi(s) = \overline{\Phi(1-\overline{s})}.$$

(iv) Važi:

$$a_1 = 1 \quad \text{i} \quad \log F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

gde je $b_n = 0$, osim ako je n pozitivan stepen prostog broja tako da važi: $b_n = O(n^\theta)$ za neko $\theta < 1/2$.

Napomenimo da je B. CONREY u [**80**] posebno razmatrao *L-funkcije*, kao potklasu DIRICHLETovih redova iz SELBERGove klase, za koje je $\omega_i = 1/2$ i za koje važi funkcionalna jednačina:

$$e^{i\varphi} q^s \prod_{i=1}^{k} \Gamma\Big(\frac{s}{2} + \mu_i\Big) F(s) = e^{-i\varphi} q^{1-s} \prod_{i=1}^{k} \Gamma\Big(\frac{1-s}{2} + \overline{\mu}_i\Big) \overline{F}(1-s). \tag{13}$$

B. CONREY i saradnici u radu [**120**] dali su jednu novu aksiomatiku familije L-funkcija (nezavisno od SELBERGove klase). Napomenimo da, u smislu te aksiomatike, D. FARMER u radu [**121**] je razmatrao varijantu[5] L-funkcija za koje važi funkcionalna jednačina poput funkcionalne jednačine (13). Posebno, za L-funkcije koje je razmatrao B. CONREY [**80**] u slučaju $\mu_i = 0$, na osnovu (4) i (13), sleduje zaključak da su takve funkcije diferencijalno-transcendentne nad $\mathcal{C}$. Napomenimo da je za pojedine funkcije iz SELBERGove klase, moguće dobiti dokaz diferencijalne-transcendentnosti, koristeći rezultat S. BANKa o diferencijalnoj transcendentnosti odgovarajućih proizvoda gama funkcija [**46**].

3⁰. Ramanujan-Dirichlet *L* red. S. RAMANUJAN [**8**] je razmatrao τ-funkciju kao funkciju koja implicitno ispunjava:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} \tag{14}$$

za $q = e^{2\pi i z}$, $|q| < 1$. RAMANUJAN-DIRICHLETov L-red je definisan sumom:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}, \tag{15}$$

za $\mathrm{Im}(s) > 0$. Funkcija $f(s)$ može se meromorfno produžiti u C na osnovu funkcionalne jednačine [**24**, str. 173]:

$$f(s) = \frac{(2\pi)^s}{(2\pi)^{12-s}} \frac{\Gamma(12-s)}{\Gamma(s)} f(12-s). \tag{16}$$

[5]određenu sa gama faktorom $\gamma_L(s) = P(s) q^s \prod_{i=1}^{k} \Gamma\Big(\frac{s}{2} + \mu_i\Big)$, za odgovarajući polinom $P(s)$

Odatle sleduje veza:

$$f(s) = -\frac{\pi^{2s-12}}{4^{6-s}} \left(\prod_{i=1}^{11} (s-i) \Big/ \sin\big(\pi s\big) \right) \frac{1}{\Gamma(s)^2} f(12-s), \tag{17}$$

na osnovu koje, analogno postupku koji je primenjen za Riemannovu zeta funkciju, sleduje da je $f(s)$ diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathcal{C}$.

4^0. Kurepina funkcija. Posmatrajmo Kurepinu funkciju:

$$K(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} \frac{t^z - 1}{t-1}\, dt, \tag{18}$$

za $\mathrm{Re}(z) > 0$. Kao što je istaknuto u sekciji **3.3** tako određena kompleksna funkcija može se meromorfno produžiti na celu kompleksnu ravan na osnovu funkcionalne jednačine:

$$K(z) - K(z-1) = \Gamma(z). \tag{19}$$

Pri tom, funkcija $K(z)$ ima proste polove u tačkama $z = -1$ i $z = -n$ $(n \geq 3)$. Dokazujemo da svako meromorfno rešenje $y = K(z)$ funkcionalne jednačine (19) jeste diferencijalno-transcendentna funkcija. Pretpostavimo suprotno: $K \in \mathcal{L}$. Tada $y = K(z)$ ispunjava neku diferencijalno-algebarsku jednačinu:

$$\mathfrak{p}\big(z, y, Dy, D^2y, \ldots, D^ny\big) = 0. \tag{20}$$

gde je $\mathfrak{p}(z, y, y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{C}[z, y, y_1, \ldots, y_n]$. Saglasno Teoremi 3.4.3., $y = K(z+1) \in \mathcal{L}$, jer je $\mathfrak{e} = z+1$ cela diferencijalno-algebarska funkcija. Na osnovu (19) sleduje $\Gamma \in \mathcal{L}$. Svođenjem na kontradikciju dokazano je da je svako meromorfno rešenje funkcionalne jednačine (19) diferencijalno-transcendentna funkcija. Napomenimo da je u radu [**99**] navedeno još jedno meromorfno rešenje posmatrane funkcionalne jednačine:

$$K_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(z-n). \tag{21}$$

Tako definisana funkcija jeste meromorfna i ima proste polove u svim celobrojnim tačkama. Prema prethodnom razmatranju ona je jedna diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathcal{C}$. Navodimo prema radovima D. Slavića i B. Maleševića vezu između funkcija $K(z)$ i $K_1(z)$:

$$K(z) = \frac{1}{e}\Big(\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n}\Big) - \frac{\pi}{e} \operatorname{ctg} \pi z + K_1(z), \tag{22}$$

gde su vrednosti u celobrojnim tačkama date u smislu glavne vrednosti u tački (sekcija **3.3.**). Napomenimo da je u radu [**82**] Ž. MIJAJLOVIĆ dokazao diferencijalnu transcendentnost KUREPINE funkcije $K(z)$. B. MALEŠEVIĆ je u [**99**] dokazao da su sva meromorfna rešenja funkcionalne jednačine (19) diferencijalno-transcendentne funkcije.

5^0. Alternirajuća Kurepina funkcija. Posmatrajmo alternirajuću KUREPINU funkciju:

$$A(z) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^{z+1} - (-1)^z t}{t+1}\, dt, \tag{23}$$

za $\mathrm{Re}(z) > 0$. Kao što je istaknuto u sekciji **3.3.** tako određena kompleksna funkcija može se meromorfno produžiti na celu kompleksnu ravan na osnovu funkcionalne jednačine:

$$A(z) + A(z-1) = \Gamma(z+1). \tag{24}$$

Pri tom, funkcija $A(z)$ ima proste polove u tačkama $z=-n$ $(n \geq 2)$. Dokazujemo da svako meromorfno rešenje $y = A(z)$ funkcionalne jednačine (24) jeste diferencijalno-transcendentna funkcija. Pretpostavimo suprotno: $A \in \mathcal{L}$. Tada $y = A(z)$ ispunjava neku diferencijalno-algebarsku jednačinu:

$$\mathfrak{p}\big(z, y, Dy, D^2y, \ldots, D^n y\big) = 0. \tag{25}$$

gde je $\mathfrak{p}(z, y, y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{C}[z, y, y_1, \ldots, y_n]$. Saglasno Teoremi 3.4.3. $y = A(z–1) \in \mathcal{L}$, jer je $\mathfrak{e} = z-1$ cela diferencijalno-algebarska funkcija. Na osnovu (24) sleduje[6] $\Gamma \in \mathcal{L}$. Svođenjem na kontradikciju dokazano je da je svako meromorfno rešenje funkcionalne jednačine (24) diferencijalno-transcendentna funkcija. Navedenu osobinu meromorfnih rešenja dao je B. MALEŠEVIĆ u [**107**]. Takođe, u radu [**107**] navedeno je još jedno meromorfno rešenje posmatrane funkcionalne jednačine:

$$A_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma(z+1-n). \tag{26}$$

Tako definisana funkcija jeste meromorfna i ima proste polove u svim celobrojnim tačkama. Prema prethodnom razmatranju, ona je jedna diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathcal{C}$. Navodimo prema radu B. MALEŠEVIĆa vezu između funkcija $A(z)$ i $A_1(z)$:

$$A(z) = \Big(e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!\, n} - 1 - e\gamma\Big)(-1)^z + \frac{\pi e}{\sin \pi z} + A_1(z), \tag{27}$$

[6] jer je $\Gamma(z+1) = A(z) + A(z-1)$ u $\mathcal{L}$, a time je i $\Gamma(z)$ u $\mathcal{L}$

gde su vrednosti u celobrojnim tačkama date u smislu glavne vrednosti u tački (sekcija **3.3.**). Napomenimo da je u radu [**107**] dokazano da su sva meromorfna rešenja funkcionalne jednačine (24) diferencijalno-transcendentne funkcije.

6^0. Milovanovićevi nizovi funkcija. G. MILOVANOVIĆ je u radu [**73**] razmatrao nizove meromorfnih funkcija uvedene rekurentnom vezom:

$$K_m(z) - K_m(z-1) = K_{m-1}(z), \quad K_{-1}(z) = \Gamma(z), \;\; K_0(z) = K(z). \tag{28}$$

Korišćenjem ovde razmatranog metoda, proizilazi da su svi članovi tog niza diferencijalno-transcendentne funkcije nad $\mathcal{C}$. Potpuno dualno prethodnom, možemo definisati alternirajuće MILOVANOVIĆeve nizove meromorfnih funkcija koje uvodimo rekuretnom vezom:

$$A_m(z) + A_m(z-1) = A_{m-1}(z), \quad A_{-1}(z) = \Gamma(z+1), \;\; A_0(z) = A(z). \tag{29}$$

Korišćenjem ovde razmatranog metoda, proizilazi da su svi članovi tog niza diferencijalno-transcendentne funkcije nad $\mathcal{C}$.

7^0. Gautschi-Waldvogel familije funkcija. W. GAUTSCHI i J. WALDVOGEL su u članku [**90**] razmatrali familiju integrala:

$$I(\alpha, x) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^\alpha}{t-x}\, dt, \tag{30}$$

za $\alpha > -1$, $x > 0$, pri čemu se prethodni integral računa u smislu CAUCHYeve vrednosti nesvojstvenog integrala (zbog singulariteta u tački $t = x > 0$). Tako određena familija integrala za fiksirano $x > 0$ ispunjava funkcionalnu jednačinu:

$$I(\alpha, x) = xI(\alpha-1, x) + \Gamma(\alpha). \tag{31}$$

Samim tim, za fiksirano $x > 0$ funkcija $\mathsf{f}(\alpha) = I(\alpha, x)$ može se meromorfno produžiti na celu kompleksnu ravan i tako određena funkcija, shodno razmatranom metodu, jeste diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathcal{C}$. Potpuno dualno prethodnom, možemo definisati alternirajuću GAUTSCHI-WALDVOGEL familiju integrala:

$$J(\alpha, x) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^\alpha}{t+x}\, dt \tag{32}$$

za $\alpha > -1$, $x > 0$. Tako određena familija integrala za fiksirano $x > 0$ ispunjava funkcionalnu jednačinu:

$$J(\alpha, x) = -xJ(\alpha-1, x) + \Gamma(\alpha). \tag{33}$$

Samim tim, za fiksirano $x > 0$ funkcija $\mathsf{g}(\alpha) = J(\alpha, x)$ može se meromorfno produžiti na celu kompleksnu ravan i tako određena funkcija, shodno razmatranom metodu, jeste diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathcal{C}$. Takođe, svi rezultati iz rada [**90**] vezani za I-familiju integrala mogu se preneti i na J-familiju integrala.

8^0. Hadamardova faktorijalna funkcija. HADAMARDova faktorijelna funkcija je definisana na sledeći način [**23**]:

$$H(z) = \frac{1}{\Gamma(z-1)} \frac{d}{dz} \log \left(\Gamma\Big(\frac{1-z}{2}\Big) \Big/ \Gamma\Big(1 - \frac{z}{2}\Big) \right). \tag{34}$$

Može se pokazati da HADAMARDova faktorijelna funkcija ima samo otklonjive singularitete, pa je možemo u tim tačkama dodefinisati do cele kompleksne funkcije. Pri tom, HADAMARDova faktorijelna funkcija ispunjava sledeću funkcionalnu jednačinu:

$$H(z+1) = zH(z) + \frac{1}{\Gamma(1-z)}. \tag{35}$$

Korišćenjem ovde razmatranog metoda, proizilazi da je HADAMARDova faktorijelna funkcija diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathcal{C}$. Napomenimo da se HADAMARDova faktorijelna funkcija $H(z)$ i EULERova faktorijelna funkcija $\Gamma(z)$ podudaraju na skupu prirodnih brojeva. Takođe, moguće je naći još primera meromorfnih (celih) funkcija koje se podudaraju na skupu prirodnih brojeva sa EULERovom faktorijelnom funkcijom $\Gamma(z)$. Jedan primer takve diferencijalno-transcendentne funkcije navodi P. LUSCHNY [**128**].

9^0. Barnesova G funkcija. E. BARNES definisao je G-funkciju u obliku proizvoda [**5**]:

$$G(z+1) = (2\pi)^{z/2} e^{-(z(z+1)+\gamma z^2)/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n e^{-z+z^2/(2n)} \right), \tag{36}$$

gde je γ EULERova funkcija. BARNESova G-funkcija je jedna cela funkcija i ona ispunjava funkcinalnu jednačinu:

$$G(z+1) = \Gamma(z)G(z). \tag{37}$$

Korišćenjem ovde razmatranog metoda, proizilazi da je BARNESova G-funkcija diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathcal{C}$.

10^0. Primeri tabličnih integrala. Izdvojimo neke integrale iz tablica integrala [**25**] i [**33**], koji su diferencijalno-transcendentne funkcije po kompleksnoj promenljivoj p. Prvo dokažimo da sledeća meromorfna funkcija:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{e^x - 1} \, dx = \Gamma(p)\zeta(p) \tag{38}$$

jeste jedna diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathcal{C}$. Navedeno sleduje prema razmatranom metodu uz korišćenje funkcionalne jednačine:

$$\zeta(1-p) = 2(2\pi)^{-p} \cos\Big(\frac{p\pi}{2}\Big)\big(\Gamma(p)\zeta(p)\big). \tag{39}$$

Koristeći ovde razmatrani metod izdvajamo deset primera tabličnih integrala po parametru[7] p, koji su diferencijalno-transcendentne funkcije nad $\mathcal{C}$.

$f(p)$	parametri	
$\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^{ax}-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\,\zeta(p)$	$(\mathrm{Re}\,p>0, \mathrm{Re}\,a>1)$	[25] **860.39** [33] **3.411**/1
$\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^{ax}+1}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\Big(1-\frac{2}{2^p}\Big)\zeta(p)$	$(\mathrm{Re}\,p>0\,,\ \mathrm{Re}\,a>0)$	[25] **860.49** [33] **3.411**/3
$\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{\mathrm{sh}(ax)}\,dx = \frac{2\Gamma(p)}{a^p}\Big(1-\frac{1}{2^p}\Big)\zeta(p)$	$(\mathrm{Re}\,p>1\,,\ a>0)$	[25] **860.509** [33] **3.523**/1
$\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{\mathrm{ch}(ax)}\,dx = \frac{2\Gamma(p)}{a^p}\,\beta(p)$	$(\mathrm{Re}\,p>0\,,\ a>0)$	[25] **860.539** [33] **3.523**/3
$\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\sin(mx)\,dx = \frac{\Gamma(p)\sin(p\,\theta)}{(a^2+m^2)^{p/2}}$	$\sin\theta=m/r, \cos\theta=a/r,$ $r=(a^2+m^2)^{1/2},$ $(\mathrm{Re}\,p>-1\,,\ \mathrm{Re}\,a>\lvert\mathrm{Im}\,m\rvert)$	[25] **860.89** [33] **3.944**/5
$\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\cos(mx)\,dx = \frac{\Gamma(p)\cos(p\,\theta)}{(a^2+m^2)^{p/2}}$	$\sin\theta=m/r, \cos\theta=a/r,$ $r=(a^2+m^2)^{1/2},$ $(\mathrm{Re}\,p>0\,,\ \mathrm{Re}\,a>\lvert\mathrm{Im}\,m\rvert)$	[25] **860.99** [33] **3.944**/6
$\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\mathrm{sh}(mx)\,dx$ $=\frac{1}{2}\,\Gamma(p)\,\Big((a-m)^{-p}-(a+m)^{-p}\Big)$	$(\mathrm{Re}\,p>-1\,,\ \mathrm{Re}\,a>\lvert\mathrm{Re}\,m\rvert)$	[33] **3.551**/1
$\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\mathrm{ch}(mx)\,dx$ $=\frac{1}{2}\,\Gamma(p)\,\Big((a-m)^{-p}+(a+m)^{-p}\Big)$	$(\mathrm{Re}\,p>0\,,\ \mathrm{Re}\,a>\lvert\mathrm{Re}\,m\rvert)$	[33] **3.551**/2
$\int\limits_0^\infty \Big((a+ix)^{-p}-(a+ix)^{-p}\Big)\sin(mx)\,dx$ $=\frac{\pi i m^{p-1}e^{-ma}}{\Gamma(p)}$	$(\mathrm{Re}\,p>0\,,\ \mathrm{Re}\,a>0\,,\ m>0)$	[33] **3.769**/1
$\int\limits_0^\infty \Big((a+ix)^{-p}+(a+ix)^{-p}\Big)\cos(mx)\,dx$ $=\frac{\pi m^{p-1}e^{-ma}}{\Gamma(p)}$	$(\mathrm{Re}\,p>0\,,\ \mathrm{Re}\,a>0\,,\ m>0)$	[33] **3.769**/2

[7] vrednosti ostalih parametara smatramo fiksiranim

11^0. Niz funkcija $H_k(z)$. Posmatrajmo niz meromorfnih funkcija:

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^k}, \tag{40}$$

za $k = 2, 3, \ldots$. Prethodni niz funkcija, za realne vrednosti $z = x \in (0, 1]$, podudara se sa nizom vrednosti HURWITZove zeta funkcije $\zeta(k, x)$ za $k = 2, 3, \ldots$ [**101**, str. 41]. Dalje važi:

$$H_k(z) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} D^k \ln \Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} D^{k-1}\Big(\big(D\,\Gamma(z)\big) \cdot \Gamma(z)^{-1}\Big), \tag{41}$$

saglasno [**33**] (**8.363**/8). Dokazujemo da niz funkcija $H_k(z)$ jeste niz diferencijalno-transcendentnih funkcija. Posmatrajmo niz izvoda:

$$\begin{array}{rcl} H_2(z) & = & \dfrac{\big(D^2\Gamma(z)\big)\Gamma(z) - \big(D\,\Gamma(z)\big)^2}{\Gamma(z)^2} \\ H_3(z) & = & -\dfrac{1}{2!}\,\dfrac{\big(D^3\Gamma(z)\big)\big(\Gamma(z)\big)^2 - 3\big(D^2\Gamma(z)\big)\big(D\,\Gamma(z)\big)\Gamma(z) + 2\big(D\,\Gamma(z)\big)^3}{\Gamma(z)^3} \\ & \vdots & \end{array} \tag{42}$$

Na osnovu (41) moguće je odrediti k-ti član prethodnog niza $H_k(z)$ u obliku:

$$H_k(z) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\,\frac{\mathfrak{p}_k\big(z, \Gamma(z), D\,\Gamma(z), \ldots, D^k\Gamma(z)\big)}{\Gamma(z)^k}, \tag{43}$$

za neki polinom $\mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}_k\big(z, u_0, u_1, \ldots, u_k\big)$. Odatle k-ti član niza $H_k(z)$ ispunjava netrivijalnu diferencijalno-algebarsku jednačinu:

$$\mathfrak{p}_k\big(z, \Gamma(z), D\,\Gamma(z), \ldots, D^k\Gamma(z)\big) + (-1)^{k-1}(k-1)!\big(\Gamma(z)\big)^k H_k(z) = 0. \tag{44}$$

Na osnovu prethodne diferencijalne jednačine, $\Gamma(z)$ jeste diferencijalno-algebarska nad $\mathcal{C}\langle H_k\rangle$. Navedeno dovodi do zaključka da je $\Gamma(z)$ diferencijalno-algebarska jednačina nad $\mathcal{C}$, što je kontradikcija. Samim tim, dokazana je diferencijalna-transcendentnost niza funkcija $H_k(z)$.

LITERATURA

[**1**] B. RIEMANN: *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie (1859) (`http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/`).

[**2**] J. LÜROTH: *Beweis eines Satzes über rationale Curven*, Mathematiche Annalen, **9**, (1876), 163-165 (`http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/ssearch/`).

[**3**] O. HÖLDER: *Über die Eigenschaft der Gamma Funktion keiner algebraische Differentialgleichung zu genüng*, Mathematiche Annalen, **28**, (1887), 1-13.

[**4**] P. GORDAN: *Über biquadratische Gleichungen*, Mathematiche Annalen, **29**, (1887), 318-326.

[**5**] E. W. BARNES: *The Theory of the G-Function*, Quart. J. Pure Appl. Math. **31** (1900), 264–314.

[**6**] E. LANDAU: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, *Prvo izdanje*: Leipzig, Berlin, B. G. Teubner, 1909., *Drugo izdanje - reprint*: Chelsea Publishing Co., New York, 1953., *Treće izdanje - reprint*: Chelsea Publishing Co., New York, 1974., *Četvrto izdanje - reprint*: University of Michigan Library 2001., (`http://name.umdl.umich.edu/ABV2766.0002.001`, `http://books.google.com/`).

[**7**] E. NOETHER: *Körper und Systeme rationaler Funktionen*, Mathematiche Annalen, **76**, (1915) 161-196.

[**8**] S. RAMANUJAN: *On certain arithmetical functions*, Trans. Cambr. Phil. Soc. **22**, (1916), 159–184.

[**9**] A. OSTROWSKI: *Neuer Beweis des Hölderschen Satzes, dass die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt*, Math. Ann., **79** (1919), 286-288.

[**10**] A. Ostrowski: *Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen*, Math. Zeitschrift, **8**, (1920), 241 - 298.

[**11**] F. Hausdorff: *Zum Hölderschen Satz über* $\Gamma(x)$. Math. Ann. **94** (1925), 244-247.

[**12**] A. Ostrowski: *Zum Hölderschen Satz über* $\Gamma(x)$, Math. Ann., **94**, (1925), 248-251.

[**13**] J. F. Ritt: *Differential equation from the algebraic standpoint*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **XIV**, Ch. VIII, New York 1932.

[**14**] E. R. Kolchin: *Extensions of differential field I*, Annals of Mathematics, Vol. **43**, No. 4 (Oct. 1942), 724-729.

[**15**] E. R. Kolchin: *Extensions of differential field II*, Annals of Mathematics, Vol. **45**, No. 2 (Oct. 1944), 358-361.

[**16**] J. B. Reynolds: *Reversion of Series with Applications*, The American Mathematical Monthly, Vol. **51**, No. 10., (Dec. 1944), pp. 578-580.

[**17**] Г. М. Фихтенгольц: *Курс дифференциального и интегральног исчисления*, том 1, огиз, Москва 1947.

[**18**] H. B.,G. Casimir: *On the attraction of two perfectly conducting plates*, Proc. Kon. Akad. Ned. Wet. **51** (1948), 793-795.

[**19**] J. F. Ritt: *Differential algebra*, Amer. Math. Soc. Publication 1950.

[**20**] J. Igusa: *On a theorem of Lüroth*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A Math. **26**, (1951), 251-253.

[**21**] A. Seidenberg: *An eleimination theory for differential algebra*, University of California Publications in Mathematics, New Series, **3**, (1956), 31-66, .

[**22**] A. Sidenberg: Abstract differential algebra and the analytic case I., Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 159-164.

[**23**] P. J. Davis: *Leonhard Euler's Integral: a historical profile of the gamma function*, The American Mathematical Monthly **66** (1959), 849-869.

[**24**] G. H. Hardy: *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work*, 3rd ed. Chelsea, New York, 1959.

[**25**] H. B. Dwight: *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, 4-th ed. The Macmillan Co., New York, 1961.

[**26**] A. Schinzel: *Reducibility of polynomials in several variables*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. **11** (1963), 633-638.

[**27**] E. Artin: *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1964.

[**28**] A. I. Markushevich: *Theory of Functions of Mathematical Physics*, Vol. II, Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1965.

[**29**] А. О. Гельфонд: *Исчисление конечных разностей*, Наука, Москва 1967.

[**30**] A. Seidenberg: *Abstract differential algebra and the analytic case* II., Proc. Amer. Math. Soc. **23** (1969) 689-691.

[**31**] D. Slavić: *On summation of series*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. **302** - **319** (1970), 53-59. (`http://pefmath2.etf.bg.ac.yu`).

[**32**] Đ. Kurepa: *On the left factorial function* $!n$, Math. Balkanica **1** (1971), 147-153.

[**33**] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик: *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, издание пятое, Наука, Москва 1971.

[**34**] G. Kreisel, J. L. Krivine: *Elements of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam 1971.

[**35**] G. E. Sacks: *Saturated Model Theory*, W. A. Benjamin, Reading, Massachusetts 1972.

[**36**] M. Stojaković: *Teorija jednačina*, Naučna knjiga 1973.

[**37**] Đ. Kurepa: *Left factorial in complex domain*, Mathematica Balkanica **3** (1973), 297-307.

[**38**] D. Slavić: *On the left factorial function of the complex argument*, Mathematica Balkanica **3** (1973), 472-477.

[**39**] E. R. Kolchin: *Differential Algebra and Algebraic Groups*, New York, Academic Press 1973.

[**40**] Jacob T. B. Beard, Jr.: *Computing in* GF(q), Mathematics of Computation, Vol. **28**, No. 128 (1974), 1159-1166.

[**41**] G. LEIBBRANDT: *Introduction to the technique of dimensional regularization*, Rev. Mod. Phys., Vol. **47**, No. 4, October 1975, 849-876.

[**42**] Б. Л. ВАН ДЕР ВАРДЕН: *Алгебра*, Москва, Наука, 1976.

[**43**] S. B. BANK, R. P. KAUFMAN: *An extension of Holder's theorem concerning the Gamma function*, Funkcialaj Elvacioj, **19** (1976), 53-63.

[**44**] S. W. HAWKING: *Zeta function regularization of path integrals in curved space-time*, Commun.Math.Phys. **55**, No. 2, (1977), 133−148.

[**45**] S. W. HAWKING: *The Path Integral Approach to Quantum Gravity*, Chapter VII. General Relativity - An Einstein Centenary Survey. (eds. S.W. Hawking and W. Israel), Cambridge Univ. Press 1979.

[**46**] S. BANK: *On Certain Canonical Products which Cannot Satisfy Algebraic Differential Equations*, Funkcialaj Ekvacioj, **23** (1980) 335-349.

[**47**] Steinmetz,N., *Über die faktorisierbaren Lösungen gewöhnlicher*, Mathematische Zeitschrift, **170**, (1980) 169-180.

[**48**] V. PERIĆ: *Algebra* II, Svjetlost, Sarajevo 1980.

[**49**] D. E. KNUTH: *The art of computer programming*, vol. **2**., 2-nd ed., Addison-Wesley 1981.

[**50**] Y. SIBUYA, S. SPERBER: *Arithmetic Properties of Power Series Solutions of Algebraic Differential Equations*, Annals of Mathematics, **113** (1981), 111-157.

[**51**] А. П. ПРУДНИКОВ, Ю. А. БРЫЧКОВ, О. И. МАРИЧЕВ: *Интгралы и ряды*, Москва 1981.

[**52**] K. IRELAND, M. ROSEN: *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag 1982.

[**53**] I. O. MARICHEV: *Handbook of Integral Transformation of Higher Transcendental Functions*: *Theory and Algorithmic Tables*, Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1983.

[**54**] Ž. MIJAJLOVIĆ, N. BOŽOVIĆ: *Uvod u teoriju grupa*, Naučna knjiga, Beograd 1983.

[**55**] S. i M. PREŠIĆ: *Uvod u matematičku logiku, Drugo izdanje*: Matematički Institut, Beograd 1984.

[**56**] B. C. BERNDT: *Ramanujan's Notebooks - Part* I, Springer-Verlag, 1985.

[**57**] Ž. MIJAJLOVIĆ, Z. MARKOVIĆ, K. DOŠEN: *Hilbertovi problemi i logika*, Matematička biblioteka **48**, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1986.

[**58**] V. DAŠIĆ: *Algebra*, Univerzitetska riječ, Podgorica 1987.

[**59**] J. M. BORWEIN, P. B. BORWEIN: Π & *the AGM*: *A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, John Wiley & Sons, New York, 1987.

[**60**] Ž. MIJAJLOVIĆ: *An introduction to model theory*, Institut za matematiku, Novi Sad 1987.

[**61**] S. K. BLAU, M. VISSER, A. WIPF: *Gravitational Fields And The Casimir Energy*, Los Alamos Report LA-UR-88-**1542**, (1988).

[**62**] S. K. BLAU, M. VISSER, A. WIPF: *Zeta Functions And The Casimir Energy*, Nucl. Phys. B **310**, (1988), 163-180.
(`http://www.physics.wustl.edu/~visser/publish.html`)

[**63**] L. A. RUBEL: *A survey of transcendentally transcendental functions*, The American Mathematical Monthly, **96**, (1989), 777-788.

[**64**] F. VAINSTEIN: *Error Detection and Correction in Numerical Computations by Algebraic Methods*, Lecture notes in Computer Science **539.**, (1991), 456-464.

[**65**] Ž. MIJAJLOVIĆ & KOAUTORI: *Nestandardna analiza*, preprint, Beograd 1992.

[**66**] X.-S. GAO, S.-C. CHOU: *Implicitization of Rational Parametric Equations*, Journal of Symbolic Computation, **14** No.5, 1992, 459-470.

[**67**] Ž. MIJAJLOVIĆ: *Algebra* I, MILGOR, Beograd, Moskva 1993.

[**68**] S. ROMAN: *Field Theory*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics Vol. **158**, 1994.

[**69**] R. K. GUY: *Unsolved problems in number theory*, Springer-Verlag, second edition 1994.

[**70**] E. ELIZALDE, S. D. ODINTSOV, A. ROMEO, A. A. BYTSENKO, S. ZERBINI: *Zeta Regularization Techniques With Applications*, World Scientific, 1994.

[**71**] A. IVIĆ, Ž. MIJAJLOVIĆ: *On Kurepa problems in number theory*, Publ. Inst. Math. (N.S.) **57**, (**71**) (1995), 19-28. (`http://www.komunikacija.org.yu/komunikacija/casopisi/publication/71/index_e`).

[**72**] D. MARKER, M. MESSMER, A. PILLAY: *Model Theory of Fields*, Springer 1996.

[**73**] G. V. MILOVANOVIĆ: *A sequence of Kurepa's functions*, Scientific Review, Ser. Sci. Eng. **19 − 20** (1996), 137-146 (`http://gauss.elfak.ni.ac.yu/publ.html`).

[**74**] F. BOULIER: *An optimization of Seidenberg's elimination algorithm in differential algebra*, Mathematics and Computers in Simulation **42** (1996), 439-448.

[**75**] A. IVIĆ: *Uvod u analitičku teoriju brojeva*, Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci − Novi Sad, 1996.

[**76**] G. M. BERGMAN: *Lüroth's Theorem and some related results*, Graduate course materials, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, 1997., preprint at `http://math.berkeley.edu/~gbergman/grad.hndts/`

[**77**] S. PREŠIĆ: *Raznice I*, Prosvetni pregled, Beograd, 1997.

[**78**] R. FRÖBERG: *An Introduction to Gröbner bases*, John Wiley & Sons Ltd., 1997.

[**79**] M. GRULOVIĆ: *Osnovi teorije grupa*, Feljton, Novi Sad 1997.

[**80**] B. CONREY: *L-functions*, web handbook 1997 (`http://www.aimath.org/~conrey/`).

[**81**] S. G. SIMPSON: *Model Theory*, Course Math **563**, The Penn. State University 1998 (`http://www.math.psu.edu/simpson/courses/math563/master.pdf`)

[**82**] Ž. MIJAJLOVIĆ, Z. MARKOVIĆ: *Some recurrence formulas related to differential operator θD*, Facta Universitatis, SER. MATH. INFORM. **13** (1998), 7-17.

[**83**] J. KACZOROWSKI, A. PERELLI: *Functional independence of the singularities of a class of Dirichlet series*, American J. Math. **120** (1998), 289-303.

[**84**] J. BRUNDAN: *Algebra,* (*Lecture*: *Fields*), Math. course **647**, Department of Mathematics, University of Oregon, 1999., (`http://www.uoregon.edu/~brundan/math647fall99`).

[**85**] D. WANG: *Elimination Methods and Applications*, Doktorska Disertacija, Institut d'Informatique et de Mathematiques Appliquees de Grenoble 1999.

[**86**] L. EVENS: *Algebra*, Math. course **D70**, Dep. of Math., Northwestern University, 1999., (`http://www.math.northwestern.edu/~len/d70/`).

[**87**] I. GUSIĆ: Algebraic independence of polynomials, Acta arithmetica, **XII**, No. 1 (2000), 27-29.

[**88**] T. M. APOSTOL: *Calculating Higher Derivatives of Inverses*, The American Mathematical Monthly, Vol. **107**, No. 8., (Oct. 2000), pp. 738-741.

[**89**] J. GUTRIERREZ: *Computational aspects on Lüroth's theorem*, First Joint International Meeting of the AMS and the Hong Kong Mathematical Society, Hong Kong Baptist University; 13-16 December 2000 (`www.math.hkbu.edu.hk/hkms/ams-hkms2000/timetable/algebra.pdf`).

[**90**] W. GAUTSCHI, J. WALDVOGEL: *Computing the Hilbert transform of the generalized Laguerre and Hermite weight functions*, BIT **41**:**3** (2001), 490-503.

[**91**] Ž. MIJAJLOVIĆ: *Predavanja iz algebre* II, preprint, Beograd 2001.

[**92**] R. SHAIL: *A class of infinite sums and integrals*, Math. Comp. **70** (2001), 789-799.

[**93**] D. CVETKOVIĆ, S. SIMIĆ: *Odabrana poglavlja iz diskretne matematike*, Akademska misao, Beograd 2002.

[**94**] Ž. MIJAJLOVIĆ: *Teorija modela*, preprint, Beograd 2002.

[**95**] W. P. JOHNSON: *The Curious History of Faà di Brunos Formula*, The American Mathematical Monthly, March 2002, Vol. **109**, 217 - 234.

[**96**] S. LANG: *Algebra*, 3rd edition, Springer-Verlag 2002.

[**97**] A. PETOJEVIĆ: *The function* ${}_vM_m(s;a,z)$ *and some well-known sequences*, Journal of Integer Sequences, Vol. **5**, (2002), Article 02.16. (`http://www.math.uwaterloo.ca/JIS/oldindex.html`).

[**98**] G. XIAO-SHAN, X. TAO: *Lüroth's theorem in differential fields*, Journal of Systems Science and Complexity, Vol. **5**. No. 4, (2002), 376-383.

[**99**] B. MALEŠEVIĆ: *Some considerations in connection with Kurepa's function*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. **14** (2003), 26-36 (`http://pefmath2.etf.bg.ac.yu`).

[**100**] G. KARTIEL: *Solution to Rubel's question about differentially algebraic dependence on initial values*, Illinois Journal of Mathematics, Vol. **47**, No. 4, (2003), 1261-1272.

[**101**] A. IVIĆ: *The Riemann zeta-function*: *Theory and Applications*, *Prvo izdanje*: John Wiley & Sons, New York, 1985., *Drugo izdanje*: Courier Dover Publications 2003.

[**102**] A. MARCJA, C. TOFFALORI: *A guide to classical and modern model theory*, Kluwe Academic Publishers 2003.

[**103**] A. AGBOOLA: *Algebra* (Lecture Transcendental Extensions), Math. course **220C**, Department of Mathematics, University of California, Santa Barbara, 2004., (`http://www.math.ucsb.edu/~johnoson/`).

[**104**] W. J. GILBERT, W. K. NICHOLSON: *Modern algebra with applications*, John Wiley & Sons, New Yersy 2004.

[**105**] J. A. CHEN: *Advanced Algebra* II (*Lecture*: *Transcendental Extension*) Graduate course materials, Department of Mathematics, National Taiwan University, 2004., preprint, (`http://www.math.ntu.edu/~jkchen/`)

[**106**] F. OLLIVIER, B. SADIK: *An effective weak generalization of Lüroth-Ritt theorem*, International Conference on Polynomial System Solving, Paris, November 24-25-26, 2004., Paris 6, University,
(`http://www-calfor.lip6.fr/ICPSS/papers/360S/360S.htm`).

[**107**] B. MALEŠEVIĆ: *Some considerations in connection with alternating Kurepa's function*, preprint, (2004) (`http://arXiv.org/abs/math/0406236`).

[**108**] B. MALEŠEVIĆ: *Some inequalities for Kurepa's function*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Volume **5**, Issue 4, Article 84, 2004. (`http://jipam.vu.edu.au/`)

[**109**] J. HARRISON: *Introduction to Logic and Automated Theorem Proving*, preprint 2004, (`https://www.cs.indiana.edu/classes/b619/`).

[**110**] C. BARRETT: *Logic and Verification* (*Courant Inst. Course G*22.3033-003), *Lecture* 10: *Algebraically Closed Fields*, Comp. Sci. Dep., Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, Spring 2004.
(`http://www.cs.nyu.edu/courses/spring04/G22.3033-003/`)

[**111**] F. MARIĆ, M. MARIĆ: *Quantifier elimination in fields*, Etran 2004.

[**112**] A. DOLZMANN, T. STURM: *Generalized Constraint Solving over Differential Algebras*, printed in V. G. GANZHA, E. W. MAYR, E. V. VOROZHTSOV (editors): *Computer Algebra in Scientific Computing*, Proceedings of the CASC 2004, pages 111-125, TUM München, 2004.

[**113**] P. ALFELD: *Transfinite Numbers and Set Theory*, 2005.
(`http://www.math.utah.edu/~alfeld/math/sets.html`)

[**114**] B. MALEŠEVIĆ: *Some inequalities for alternating Kurepa's function*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. **16** (2005), 70-76.

[**115**] W. T. GOWERS: *Why the concept of a field extension is a natural one ?*, W. T. GOWERS−mathematical discussions, preprint 2005.
(`http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/galois.html`)

[**116**] T. STURM: *Generalized Constraint Solving by Elimination Methods*, Kumulative Habilitationsschrift. FMI, Universität Passau, D-94030 Passau, Germany, January 2005.

[**117**] P. SEBAH, X. GOURDON: *Classification of numbers*: *overview*, 2005 (`http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html`).

[**118**] V. V. NESTERENKO, G. LAMBIASE, G. SCARPETTA: *Calculation of the Casimir energy at zero and finite temperature - some recent results*, Rivista del Nuovo Cimento, **27**, 6, (2005), 1-74 (`http://arxiv.org/abs/hep-th/0503100`).

[**119**] W. SIT: *Introduction to Computational Differential Algebra*, I & II, First of two lectures as part of Graduate Center Series For Kolchin Seminar in Differential Algebra, 2005-2006 (`http://www.sci.ccny.cuny.edu/~ksda/`).

[**120**] B. CONREY, D. FARMER, J. KEATING, M. RUBINSTEIN, C. SNAITH: *Integral moments of L-functions*, Proceedings of the London Mathematical Society (2005), **91**: 33-104 (`http://arxiv.org/abs/math.NT/0206018`).

[**121**] D. FARMER: *Modeling families of L-functions*, preprint (`http://arxiv.org/abs/math.NT/0511107`).

[**122**] F. WIEDIJK: *Formalizing* 100 *Theorems*, Nijmegen Institute for Computing and Information Sciences, 2006 (`http://www.cs.ru.nl/~freek/100/`).

[**123**] M. MATELJEVIĆ: *Kompleksne funkcije* 1 & 2, Društvo matematičara Srbije 2006.

[**124**] D. HASKELL, A. PILLAY, CH. STEINHORN (ED.) *Model Theory, Algebra, and Geometry*, MSRI Publications – Volume **39**; *Section four* D. MARKER: *Model Theory of Differential Fields*, (`http://www.msri.org/communications/books/Book39/files`).

[**125**] B. MALEŠEVIĆ: *One method for proving inequalities by computer*, Journal of Inequalities and Applications, Vol. 2007, Article ID **78691** (`http://arxiv.org/ abs/math.CA/0608789`).

[**126**] Ž. MIJAJLOVIĆ, B. MALEŠEVIĆ: *Analytical and Differential-Algebraic Properties Of Gamma Function*, prihvaćeno za štampu u International Journal of Applied Mathematics & Statistics, Special Volume dedicated to the Tricentennial Birthday Anniversary of L. Euler, 2007, (http://arxiv.org/abs/math.NT/0605430).

[**127**] Ž. MIJAJLOVIĆ, B. MALEŠEVIĆ: *Differentially transcendental functions*, prihvaćeno za štampu u Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin 2007, (http://arxiv.org/ abs/math.NT/0412354).

[**128**] P. LUSCHNY: *Hadamard's Gamma function and a new factorial function* (http://www.luschny.de/math/factorial/FastFactorialFunctions.htm).

INDEKS

KUREPINA funkcija, 80
  SLAVIĆeva formula, 81
  alternirajuća KUREPINA funkcija, 81
  alternirajuća SLAVIĆEVA formula, 83

Diferencijalna transcendentnost
  Kriterijumi za diferencijalnu transcendentnost funkcija, 68
  HÖLDERova teorema, 70
  RIEMANNova zeta funkcija, 90
  DIRICHLETovi L-redovi, 90
  L-funkcije, 91
  RAMANUJAN-DIRICHLETov L-red, 92
  KUREPINA funkcija, 93
  alternirajuća KUREPINA funkcija, 94
  MILOVANOVIĆEVI nizovi funkcija, 95
  GAUTSCHI-WALDVOGEL familije funkcija, 95
  HADAMARDova faktorijalna funkcija, 96
  BARNESova G funkcija, 96
  Primeri tabličnih integrala, 96
  Niz funkcija $H_k(z)$, 98
Diferencijalni ideali, 60
  minimalni polinom prostog diferencijalnog ideala $\mathcal{I}$, 63
  rang prostog dif. ideala $\mathrm{RD}(\mathcal{I})$, 63
Diferencijalni polinom, 48
  lider diferencijalnog polinoma $u_{\mathfrak{p}}$, 48
  stepen dif. polinoma $\deg_{u_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p})$, 49
  separant $S_{\mathfrak{p}}$, 49
  red $\mathrm{ord}(\mathfrak{p})$, 46
  parcijalni ostatak, 50
  totalni ostatak, 51
  diferencijalno-algebarska jednačina, 64
Diferencijalno polje, 42
  LEIBNIZove aksiome, 42
  meromorfnih funkcija $\mathcal{M}$, 43
  pravilo kompozicije u $\mathcal{M}$, 43
  diferencijalno-algebarski element, 47
  diferencijalno-transcendentni element, 47
  diferencijalni prsten $\mathbf{F}\{b\}$, 46
  diferencijalno polje $\mathbf{F}\langle b\rangle$, 46
Diferencijalno zatvorena polja, 53
  SEIDENBERGova teorema eliminacije, 53
  ROBINSONova aksiomatika, 54
  BLUMINA aksioma, 54
  princip prenosa, 54
  diferencijalno zatvorenje, 55
Dijagram modela
  dijagram $\Delta_{\mathbb{A}}$, 37
  elementarni dijagram $\mathrm{Th}(\mathbb{A}, a)_{a\in A}$, 37

Eliminacija kvantora, 24
  za teoriju ACF, 25
  za teoriju DCF, 56

Glavna vrednost u tački, 77
  gama funkcije, 79

KUREPINE funkcije, 81
alternirajuće KUREPINE funkcije, 83
RIEMANNOVE zeta funkcije, 84
CASIMIRova energija, 85

Kompletna teorija, 37
modelski kompletna, 38
podmodelski kompletna, 39
ROBINSONov kriterijum, 39
BLUMIN kriterijum, 40

Modeli, 34
elementaran podmodel $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$, 35
elementarna ekvivalencija $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$, 35
izomorfizam modela $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$, 35
prosto raširenje, 36
teorija modela $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$, 35
utapanje modela $\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$, 35
zasićeni modeli, 38

Polinom, 3
stepen polinoma deg, 3
visina polinoma, 15
pseudodeljivost polinoma, 6
minimalni polinom elementa polja, 10
Polje
aksiome teorije polja, 1
algebarski element, 9
algebarski nezavisni elementi, 19
algebarski zatvoreno, 16
algebarski zavisni elementi, 19
algebarsko zatvorenje polja, 17
diferencijalno-algebarskih elemenata $\mathbf{L}$, 66
korensko polje, 13
polje algebarskih brojeva, 14
polje racionalnih izraza $\mathbf{F}(x)$, 5
polje razlomaka nad skupom, 12
transcendentni element, 9
unija lanaca polja, 16
uređeno polje, 1
Prsten
ideal prstena, 2
količnički ideal $I : a$, 3
prsten polinoma $\mathbf{F}[x]$, 4
prsten polinoma nad skupom, 12
zasićenje ideala $I : a^\infty$, 3

Raširenje polja, 9
algebarsko raširenje, 9
prosto algebarsko raširenje, 11
prosto transcendentno raširenje, 11
transcendentno raširenje, 9

Skup
prirodnih brojeva N, 2
celih brojeva Z, 2
racionalnih brojeva Q, 2
algebarskih brojeva A, 14
realnih brojeva R, 14
kompleksnih brojeva C, 5

Teorema LÜROTHa
u teoriji algebarskih polja, 19, 29
u teoriji diferencijalnih polja, 66
Teorija, 34
ACF, 25
DCF, 54
Transcendentna baza raširenja, 20
stepen transcendentnosti tr.deg, 21