

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Математички факултет

Група за математику

Драган Т. Станков

О СПЕКТРИМА АЛГЕБАРСКИХ  
ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

- Докторска дисертација -

БЕОГРАД 2008.

## ПРЕДГОВОР

Писоови (Pisot) или Писо-Виџајарагаванови (Pisot-Vijayaraghavan) бројеви имају дугу историју, пошто се изучавају још од 1912. Реални алгебарски исо број је Писоов ако и само ако су сви други његови алгебарски коњуџати по модулу строго мањи од 1. Ови бројеви се појављују у многим различитим областима истраживања у математици као што су бета развоји, дисјунктна покривања природних бројева, квази-решетке и квази-кристали, скупови изузеци у хармонијској анализи [31], и Салемови бројеви [31], [32]. У скорије време Ердос, Јо и Коморник су иницирали изучавање спектра дефинисаног као скуп вредности неке фамилије полинома, чији су коефицијенти из коначног скупа целих бројева, за фиксирани реални аргумент  $q$ . Основно питање у овом изучавању, јесте за које  $q$  је спектар дискретан. (Ваља напоменути да је спектар дискретан уколико у ма ком ограниченом сегменту реалне праве може бити највише коначно много елемената спектра.) Познато је да уколико је  $q$  Писоов број, спектар је дискретан без обзира из ког коначног скупа били коефицијенти фамилије полинома. Бижо (Bugsaud) је први показао да је и обрат претходне реченице тачан: ако је спектар броја  $q$  дискретан за сваки коначан скуп, из којег су коефицијенти фамилије полинома, тада је  $q$  Писоов број.

Основни нерешени проблем у овој области јесте, уколико су коефицијенти фамилије полинома из скупа  $\{-1, 0, 1\}$ , да ли важи хипотеза да је спектар броја  $q$ , у ознаци  $\Lambda(q)$ , дискретан ако и само ако је  $q$  Писоов број? На исто питање под условом да су коефицијенти фамилије полинома из скупа  $\{-1, 1\}$ , у ком случају спектар се означава са  $A(q)$ , недавно су Борвеин и Хер одговорили негативно. Они су нашли примере неписоових бројева чији су спектри  $A(q)$  дискретни. У овој дисертацији били представљени бесконачан низ неписоових бројева чији су спектри  $A(q)$  дискретни. Поједине резултате ове дисертације аутор је већ објавио у радовима [36], и [37].

Прва глава је уводног карактера и у њој су дате дефиниције и особине Писоових, Салемових бројева као и спектра. У другој глави, у трећем одељку, дата је фамилија алгебарских бројева чији  $\pm 1$  спектри су дискретни. Ово је резултат који је аутор већ објавио у [36], док је у четвртном одељку показао да су  $0, -1$  спектри исте фамилије бројева такође дискретни.

У трећој глави дати су резултати које је аутор већ објавио у [37]. У свом истраживању Борвсин и Хер су развили алгоритам и програм који препознају када је спектар дискретан. Недостатак овог алгоритма је што он не може да се заустави у случају када спектар није дискретан. У овој глави дат је алгоритам за израчунавање спектра, који препознаје да ли је спектар дискретан или не и зауставља се у оба случаја. Коришћењем овог критеријума део хипотезе Борвсина и Хера је доказан: ако је  $1 < q < 2$  и  $A(q)$  је дискретан тада сви реални коњугати броја  $q$  су по модулу мањи од  $q$ . За бесконачан низ бројева  $r_{2m}$  за које је Заими [42] показао да је  $A(r_{2m})$  дискретан, коришћењем овог критеријума аутор показује да спектар  $\Lambda(r_{2m})$  није дискретан. За дато  $q \in (1, 2)$  дат је оригиналан алгоритам који израчунава низ  $\pm 1$  полинома  $P_n(x)$  таквих да, решења  $\alpha_n > q$  једначина  $P_n(x) = \frac{1}{x-1}$  задовољавају  $\alpha_n \rightarrow q$ .

У четвртој глави установљена је бијекција између спектра и  $n$ -димензионалног векторског простора. Показано је да се итерације могу представити пријатељском матрицом минималног полинома. Такође је показано да уколико је спектар броја  $q$  ограничен тиме се при итерацијама онемогућава кретање дуж сопственог вектора који одговара највећој по модулу сопственој вредности а то је  $q$ . Стога се сада итерације крећу дуж сопственог вектора који одговара  $q_2$ , другој по величини модула сопственој вредности. Тиме можемо алгоритам у трећој глави још побољшати. Установљени су одређени односи који са итерацијама конвергирају како за  $q_2$  реално тако и за  $q_2$  комплексно.

У петој глави аутор се бави спектрима са иницијалном вредношћу који могу помоћи изучавању спектра. Нађен је услов који иницијална вредност треба да испуњава да би спектар био дискретан, ако је  $q$  Писоов број. Показано је у овом случају да је добијени оператор контракција.

У шестој глави наведене су основе итеративне теорије. Показано је да је скуп периодичних тачака ограничен, и да, уколико не садржи бијективне слике елемената скупа  $S$ , спектар не може бити дискретан. Овај скуп је густ у тзв. атрактору, који се пак може одредити методама фракталне геометрије, тако да се критеријум за дискретност спектра своди на проверу да ли одређена тачка припада скупу или не.

Захваљујем Професору др Жарку Мијајловићу на корисним саветима и експедитивности у вези са процедуром коју ова Теза мора да испуни. Академику Професору др Александру Ивићу, који ми је пружио сву могућу подршку, од високо-стручне преко лекторске до моралне, захваљујем на својском залагању како би ова Теза угледала светлост дана. Професору др Александру Липковском захваљујем на добронамерности, а велику захвалност дугујем и својој породици на разумевању и безрезервној подршци.

## Садржај

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| ПРЕДГОВОР                                             | iv |
| Глава 1. УВОД И ОСНОВНЕ ПОСТАВКЕ                      | 1  |
| 1. УВОД                                               | 1  |
| 2. ДЕФИНИЦИЈЕ                                         | 1  |
| 3. ОСОВИНЕ ПИСООВИХ И САЛЕМОВИХ БРОЈЕВА               | 2  |
| 4. СПЕКТРИ                                            | 6  |
| 5. УОПШТЕЊА ДЕФИНИЦИЈЕ СПЕКТРА                        | 8  |
| Глава 2. ФАМИЛИЈА ДИСКРЕТНИХ СПЕКТРА                  | 10 |
| 1. ПОЛАЗНЕ ИДЕЈЕ АЛГОРИТМА                            | 10 |
| 2. АЛГОРИТАМ ЗА ИЗРАЧУНАВАЊЕ СПЕКТРА                  | 10 |
| 3. ДОКАЗ ТЕОРЕМЕ                                      | 11 |
| 4. ДИСКРЕТНИ 0-СПЕКТРИ                                | 16 |
| Глава 3. АЛГОРИТАМ СА КРИТЕРИЈУМОМ ДИСКРЕТНОСТИ       | 24 |
| 1. ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ АЛГОРИТМА                         | 24 |
| 2. ПРИМЕНЕ АЛГОРИТМА                                  | 27 |
| 3. ТЕОРЕМА И ДОКАЗ ЊЕНОГ ПРВОГ ДЕЛА                   | 29 |
| 4. ДОКАЗ ТЕОРЕМЕ 12                                   | 32 |
| Глава 4. ПРОСТОРНА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА СПЕКТРА             | 40 |
| 1. МАТРИЧНО ОЗНАЧАВАЊЕ                                | 40 |
| 2. ДИСКРЕТНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ                        | 42 |
| 3. ДИСКРЕТНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ И СПЕКТРИ              | 44 |
| 4. КОМПЛЕКСНИ СЛУЧАЈ                                  | 49 |
| 5. ПОБОЉШАЊЕ АЛГОРИТМА                                | 53 |
| Глава 5. СПЕКТРИ СА ИНИЦИЈАЛНИМ ЕЛЕМЕНТИМА            | 57 |
| 1. ДЕФИНИЦИЈЕ СПЕКТРА СА ИНИЦИЈАЛНИМ ЕЛЕМЕНТИМА       | 57 |
| 2. ИЗРАЧУНАВАЊЕ СПЕКТРА СА ИНИЦИЈАЛНИМ ЕЛЕМЕНТИМА     | 58 |
| 3. ПИСООВИ БРОЈЕВИ И СПЕКТРИ СА ИНИЦИЈАЛНИМ ЕЛЕМЕНТОМ | 58 |
| 4. СОПСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ УНУТАР ЈЕДИНИЧНОГ ДИСКА        | 63 |
| Глава 6. ЕЛЕМЕНТИ ИТЕРАТИВНЕ ТЕОРИЈЕ                  | 68 |

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| 1. ИТЕРАТИВНИ ФУНКЦИОНАЛНИ СИСТЕМИ                        | 68 |
| 2. ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ                                      | 70 |
| 3. ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ИСТЕЗАЊА, ПРЕСЕЦАЊА И<br>УДВОСТРУЧАВАЊА | 72 |
| 4. ПРИКАЗИ АТРАКТОРА РАЧУНАРСКОМ ГРАФИКОМ                 | 75 |
| ПОГОВОР, ОТВОРЕНА ПИТАЊА И КОМЕНТАРИ                      | 82 |
| Библиографија                                             | 84 |
| Индекс појмова                                            | 86 |



## ГЛАВА 1

# УВОД И ОСНОВНЕ ПОСТАВКЕ

## 1. УВОД

Једна посебна класа бројева, свеприсутна у многим областима Математике, су такозвани *Писоови бројеви*, чије порекло, особине и многа појављивања ће бити тема овог рада. Неки једноставни примери Писоових бројева јесу златни пресек (приближно 1,61803), сви цели бројеви већи или једнаки од 2, и реални корен полинома  $x^3 - x - 1$  (приближно 1,324718). Салем је показао да је скуп Писоових бројева бесконачан и богато структуриран. Много тога је написано о броју  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  који се назива златни пресек а такође и божанска пропорција и који припада овој класи бројева. Писоови бројеви имају дугу историју, пошто их је проучавао Тју (Thue) још 1912. Салем се заинтересовао за Писоове бројеве  $q$  због њихове особине да  $q^n \rightarrow 0 \pmod{1}$  када  $n \rightarrow \infty$ . Поред тога Салем је показао да су то једини алгебарски бројеви са овом особином.

## 2. ДЕФИНИЦИЈЕ

Подсетимо се следећих дефиниција.

**ДЕФИНИЦИЈА 1.** Алгебарски број је комплексан број  $x$  који је корен неког целобројног полинома (тј. полинома са целобројним коефицијентима)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

где су  $a_i \in \mathbb{Z}$ .

**ДЕФИНИЦИЈА 2.** Минимални полином неког алгебарског броја  $x$  је целобројни полином најмањег степена чији је корен  $x$ .

**ДЕФИНИЦИЈА 3.** Алгебарски цео број је алгебарски број чији минимални полином има водећи коефицијент 1.

**ПРИМЕР 1.1.** Златни пресек је алгебарски цео број. Његов минимални полином је  $x^2 - x - 1$ .

**ДЕФИНИЦИЈА 4.** Алгебарски коњулати неког алгебарског броја  $x$  су остали корени минималног полинома броја  $x$ .

**ПРИМЕР 1.2.** Златни пресек  $\tau$  има минимални полином  $x^2 - x - 1$ . Други корен овог полинома је  $\tau_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  те су  $\tau$  и  $\tau_2$  алгебарски коњулати један другом. Приметимо да је  $|\tau_2| < 1$ .

**ДЕФИНИЦИЈА 5.** Нека је  $q$  реални алгебарски цео број већи од 1 чији је степен  $n$  и нека су  $q_2, q_3, \dots, q_n$  алгебарски конјугати броја  $x$ . Тада

(1) Ако важи  $|q_j| < 1, j = 2, 3, \dots, n$ , онда се  $q$  назива Писоов број.

(2) Ако важи  $|q_j| \leq 1, j = 2, 3, \dots, n$ , и барем за један  $|q_j| = 1$  онда се  $q$  назива Салемов број.

**ПРИМЕР 1.3.** Број  $\tau$  је Писоов број зато што је он алгебарски цео број степена 2,  $|\tau| > 1$  и за његов алгебарски конјугат важи  $|\tau_2| < 1$ .

**ПРИМЕР 1.4.** Посматрамо корене полинома  $x^8 - x^5 - x^4 - x^3 + 1$ . Један његов корен је  $\approx 1,2806$  и он је Салемов број.

### 3. ОСОБИНЕ ПИСООВИХ И САЛЕМОВИХ БРОЈЕВА

Поново нам пример броја  $\tau$  може бити инспиративан. Посматрамо низ

$$l_n = \tau^n + \tau_2^n.$$

Приметимо да је

$$l_0 = 2, l_1 = 1, l_2 = 3, l_3 = 4,$$

те очекујемо да су сви чланови низа цели. То заиста важи јер је овај низ, познатији као *Лукасов низ*, врло близак Фибоначијевим бројевима.

Видећемо, заправо, да слична особина важи за било који алгебарски цео број.

**ЛЕМА 1.1.** Нека је  $q_1$  алгебарски цео број чији конјугати су  $q_2, q_3, \dots, q_n$ . Тада је  $q_1^m + q_2^m + \dots + q_n^m \in \mathbb{Z}$  за  $m \in \mathbb{Z}$ .

**ДОКАЗ.** Нека је  $P(x) = (x - q_1)(x - q_2) \cdots (x - q_n)$  минималан полином броја  $q_1$ . Тада је

$$\ln P(x) = \sum_{i=1}^n \ln(x - q_i),$$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{d}{dx} \ln P(x) = \frac{1}{x - q_1} + \frac{1}{x - q_2} + \dots + \frac{1}{x - q_n},$$

$$\begin{aligned}
\frac{P'(\frac{1}{x})}{P(\frac{1}{x})} &= \frac{1}{\frac{1}{x} - q_1} + \frac{1}{\frac{1}{x} - q_2} + \cdots + \frac{1}{\frac{1}{x} - q_n}, \\
\frac{x^{n-1}P'(\frac{1}{x})}{x^n P(\frac{1}{x})} &= \frac{1}{1 - xq_1} + \frac{1}{1 - xq_2} + \cdots + \frac{1}{1 - xq_n}, \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - xq_i} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} x^j q_i^j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} x^j \sum_{i=1}^n q_i^j.
\end{aligned}$$

Нека је  $s_j = \sum_{i=1}^n q_i^j$ . Хоћемо да докажемо да је  $s_j \in \mathbb{Z}$ . Даље имамо

$$\frac{x^{n-1}P'(\frac{1}{x})}{x^n P(\frac{1}{x})} = \sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j = n + \sum_{j=1}^{\infty} s_j x^j,$$

јер је  $s_0 = n$ . Нека је  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ , тада је  $x^n P(\frac{1}{x}) = 1 + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n$ . Ово се назива *реципрочни полином* полинома  $P$ . Слично је

$$x^{n-1}P'(\frac{1}{x}) = n + (n-1)a_{n-1}x + (n-2)a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1}.$$

Зато имамо

$$\frac{n + (n-1)a_{n-1}x + (n-2)a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1}}{1 + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n} = n + \sum_{j=1}^{\infty} s_j x^j.$$

Сада, упоређујући коефицијенте, добијамо редом:  $s_0 = n$ ,  $(n-1)a_{n-1} = na_{n-1} + s_1$ , зато је  $s_1 = -a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ ,  $(n-2)a_{n-2} = na_{n-2} + s_1a_{n-1} + s_2$  тако да је  $s_2 \in \mathbb{Z}$ . Ове експлицитне формуле за  $s_j$  зову се *Њутнови идентитети*.  $\square$

Сада можемо доказати једну интересантну особину Писоових бројева. Означимо са  $\|x\|$  растојање реалног броја  $x$  од најближег целог броја тј. дефинишимо

$$\|x\| = \min_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|.$$

**ТЕОРЕМА 1.** *За сваки Писоов број  $q$  важи  $\|q^m\| \rightarrow 0$  када  $m \rightarrow \infty$ . (Другачије ово можемо записати као  $q^m \rightarrow 0 \pmod{1}$ .)*

**ДОКАЗ.** Нека је  $q$  степена  $n$  (тј. његов минимални полином је степена  $n$ ) и нека су његови алгебарски коњулати  $q_2, q_3, \dots, q_n$ .

Како је  $|q_j| < 1$  за све  $j$ , тада је  $\rho = \max |q_j| < 1$ . Пошто је, захваљујући претходној леми,  $q^m + q_2^m + \cdots + q_n^m \in \mathbb{Z}$  мора бити

$$q^m + q_2^m + \cdots + q_n^m = 0 \pmod{1}$$



те је  $|q^m + q_2^m + \dots + q_n^m| \leq |q|^m + |q_2|^m + \dots + |q_n|^m \leq |q|^m + (n-1)\rho^m \rightarrow |q|^m$  када  $m \rightarrow \infty$  тако да  $q^m \rightarrow 0(\text{mod } 1)$  када  $m \rightarrow \infty$ .  $\square$

Сада се намеће питање да ли су Писоови бројеви једини са особином да, када  $m \rightarrow \infty$ ,  $q^m$  тежи ка целом броју. Ово питање је за сада још увек нерешено, али оно што се зна јесте да су Писоови бројеви једини алгебарски бројеви са овом особином. Ово је показао Салем [32] следећим теоремама.

**ТЕОРЕМА 2.** *Ако је  $q > 1$  алгебарски број такав да постоји реалан број  $\lambda$  са особином  $\|\lambda q^m\| \rightarrow 0$  када  $m \rightarrow \infty$  тада је  $q$  Писоов број.*

Некад је тешко рећи да ли је неки број алгебарски или не, па може бити погодно користити следећи тест.

**ТЕОРЕМА 3.** *Ако је  $q > 1$  такав да постоји реалан број  $\lambda$  са особином*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|\lambda q^m\|^2 < \infty$$

*тада је  $q$  Писоов број.*

**ДОКАЗ.** Видети [32] стр. 4-10 доказе ових двеју теорема.  $\square$

Стога знамо да Писоови бројеви имају особину "тежења ка целом броју", и да су они једини алгебарски бројеви са овом особином. Да ли постоји неки број  $q$  који није алгебарски (такав број се назива трансцендентан) са овом особином, није познато али оно што знамо је

**ТЕОРЕМА 4.** *Скуп свих бројева  $q$  таквих да  $\|q^m\| \rightarrow 0(\text{mod } 1)$  када  $m \rightarrow \infty$  је пребројив.*

**ДОКАЗ.** Видети [32] стр. 11.  $\square$

Још једна необична особина Писоових бројева је доказана:

**ТЕОРЕМА 5.** *Скуп свих Писоових бројева је затворен.*

**ДОКАЗ.** Видети [32] стр. 13-21.  $\square$

**ТЕОРЕМА 6.** *Постоји најмањи Писоов број  $\approx 1,3247$ .*

Одредио га је Зигел [33], то је реални корен полинома  $x^3 - x - 1$  [35]. Познато је да је сваки Писоов број тачка нагомилевања скупа Салемових бројева. Није познато да ли постоји најмањи Салемов број. Најмањи којег је пронашао Лемер још 1933 [24] је  $\approx 1,1762$ , корен полинома  $x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$ . Мањи пример није нађен упркос бројним истраживањима уз помоћ рачунара [4, 7, 26]. Није познато ни да ли је скуп Салемових бројева ограничен одоздо бројем облика  $1 + \delta$  где је  $\delta$  позитивна константа.

**ТЕОРЕМА 7.** *Ако је  $s > 1$  Салемов број тада је  $\frac{1}{s}$  коњугат и сви други коњугати  $s_i$  задовољавају  $|s_i| = 1$ . Даље,  $P(x)$ , минимални полином броја  $s$ , има паран степен и реципрочан је (тј.  $P(x) = x^k P(\frac{1}{x})$ ).*

**ДОКАЗ.** По дефиницији  $s$  има коњугат  $s_j$  за који важи да је  $|s_j| = 1$ . Како је  $P(x)$  нерастављив у  $\mathbb{Z}$ ,  $s_j \neq 1$ ,  $s_j \neq -1$ . Стога, пошто је полином  $P(x)$  целобројан па дакле је и реалан,  $\overline{s_j}$ , комплексни коњугат броја  $s_j$ , мора бити алгебарски коњугат броја  $s$ . Такође, пошто је  $|s_j| = 1$  мора бити  $\overline{s_j} = \frac{1}{s_j}$ . Како је  $P(s_j) = 0$  и  $P(\frac{1}{s_j}) = 0$ , и пошто је  $P$  нерастављив  $P$  мора бити реципрочан полином. Стога, слободни члан полинома мора бити 1, и зато  $\frac{1}{s_j}$  мора бити његов корен. Пошто је број корена паран,  $P(x)$  мора бити парног степена.  $\square$

**ДЕФИНИЦИЈА 6.** *Нека је полином  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ . Висина полинома је*

$$H(P(x)) = \max\{|a_n|, |a_{n-1}|, \dots, |a_0|\}.$$

Један сада већ класичан резултат који је дао Бижо [9] користећи Гарсијину лему [16], показује нам да ако је  $q$  Писоов број, а  $P(x)$  је било који полином висине  $m$  са целим коефицијентима, тада је или  $P(q) = 0$  или је  $P(q)$  на удаљености од нуле која не може бити мања од одређене доње границе независно о ком се полиному ради.

**ТЕОРЕМА 8.** *Ако је  $q$  Писоов број, и  $P(x)$  је ма који полином висине  $m$  са целим коефицијентима, тада постоји константа  $c = c(q, m)$  таква да је или  $P(q) = 0$  или  $|P(q)| \geq c(q, m)$ .*

**ДОКАЗ.** Претпоставимо да је  $P(q) \neq 0$ . Нека су  $q_2, q_3, \dots, q_n$  коњугати броја  $q$ . Како је  $q$  алгебарски цео број,  $P(q)P(q_2) \cdots P(q_n)$  мора бити једнак целом броју па имамо:

$$|P(q)P(q_2) \cdots P(q_n)| \geq 1.$$

Одавде следи да је:

$$\begin{aligned} |P(q)| &\geq \frac{1}{|P(q_2) \cdots P(q_n)|} \\ &= \frac{1}{\prod_{i=2}^n |P(q_i)|} \\ &\geq \frac{1}{\prod_{i=2}^n \sum_{j=0}^{\infty} m |q_i|^j} \\ &\geq \frac{1}{\prod_{i=2}^n m \frac{1}{1-|q_i|}} \\ &\geq \frac{\prod_{i=2}^n (1-|q_i|)}{m^{n-1}}. \end{aligned}$$

Сада нам остаје само да дефинишемо  $c(q, m) = \frac{\prod_{i=2}^n (1 - |q_i|)}{m^n} > 0$ .  $\square$

#### 4. СПЕКТРИ

Доказ постојања границе  $c(q, m)$  у претходној теорему је конструктиван, али граница није одређена најбоље могуће. Намеће се питање која је то најбоља могућа граница  $c(q, m)$  и како је одредити. Да бисмо израчунали оптималну вредност за  $c(q, m)$  треба да обавимо минимизацију вредности  $P(q)$  по свим полиномима висине  $m$  са целим коефицијентима, при чему је  $P(q) > 0$ .

**ДЕФИНИЦИЈА 7.** Спектар броја  $q$  је скуп вредности полинома чији коефицијенти морају бити из неког коначног скупа целих бројева.

Може бити интересантна и структура спектра а не само просто одређивање његове најмање позитивне вредности.

Ердош, Јо и Коморник [12] су међу првима изучавали спектре реалних бројева. Спектри које су они разматрали, генерисани су класом полинома чији су коефицијенти само 0 и 1. Размотримо, за  $q \in (1, 2)$ :

$$\begin{aligned} Y(q) &= \{\epsilon_0 + \epsilon_1 q + \dots + \epsilon_n q^n : m \in \mathbb{N}, \epsilon_i \in \{0, 1\}\} = \\ &= \{0, 1, q, q+1, q^2, q^2+1, q^2+q, \dots\}. \end{aligned}$$

Уредимо скуп  $Y(q)$  као  $\{y_0 = 0 < y_1 < y_2 < y_3 < \dots\}$ . Ердош, Јо и Коморник су се бавили разликом  $y_{k+1} - y_k$ . Они су показали да за  $q > \tau$  (где је  $\tau$  златни пресекач) постоји бесконачно много бројева таквих да је  $y_{k+1} - y_k = 1$ . Ако је  $q < \tau$  и  $q$  је Писоов број они су показали да  $y_{k+1} - y_k \rightarrow 0$ . Касније је показано (Ердош, Јо и Јо [11]) да је  $y_{k+1} - y_k \leq 1$  за свако  $k$ . Ако је  $q$  Писоов број који је нула полинома  $x_n - x_{n-1} - \dots - 1$  тада је  $\liminf\{y_{k+1} - y_k\} = \frac{1}{q}$ . Ердош, Јо и Јо су поставили питање за које друге вредности  $q$  је овај инфимум строго већи од нуле?

Овај инфимум је подробније изучаван тако да је добио и своју ознаку

$$l(q) = \liminf\{y_{k+1} - y_k\}.$$

Можемо дефинисати ширу класу спектра на следећи начин:

$$Y^m(q) = \{\epsilon_0 + \epsilon_1 q + \dots + \epsilon_n q^n : m \in \mathbb{N}, \epsilon_i \in \{0, 1, \dots, m\}\}.$$

Уредимо скуп  $Y^m(q)$  као  $\{y_0^m = 0 < y_1^m < y_2^m < y_3^m < \dots\}$ . Проширимо дефиницију  $l(q)$  на очигледан начин:

$$l^m(q) = \liminf\{y_{k+1}^m - y_k^m\}.$$

Јасно је да је  $l(q) = l^1(q) \geq l^2(q) \geq l^3(q) \geq \dots \geq 0$ .

Први делимичан одговор на наведено питање дали су Ердош, Јо, и Шницер [14]. Они су показали да када је  $q < \tau$  тада је  $l^2(q) > 0$  ако и само ако је  $q$  Писоов број.

На питање када је  $l(q) > 0$  много потпуније је одговорио Бижо [9] који је показао да за  $q \in (1, 2)$  је  $l^m(q) > 0$  ако и само ако је  $q$  Писоов број. Бижо је такође проучавао проблем повезан са  $l^m(q)$ , који се односи на  $\limsup\{y_{k+1} - y_k\}$ . Зато уведемо ознаку:

$$L(q) = \limsup\{y_{k+1} - y_k\},$$

и проширимо је на очигледан начин:

$$L^m(q) = \limsup\{y_{k+1}^m - y_k^m\}.$$

Бижо је показао да је  $L(q) < 1$  за све  $q < \tau$  и да је  $L^2(q) < 1$  за све  $q \geq \tau$ . Такође он је показао да ако  $q$  није нула ниједног полинома висине 1, онда је  $l(q) = 0$  помоћу Дирихлеовог принципа. Добар приказ проблема који се односе на  $l(q)$  дали су Јо и Шницер [21]. Они су навели списак проблема од којих издвајамо два. Оба ова проблема су остала отворена до сада.

- (1) За  $q \in (1, 2)$ , да ли је  $l(q) > 0$  ако и само ако је  $q$  Писоов број?
- (2) За  $1 < q < \tau$  да ли  $l(q) = 0$  повлачи  $L(q) = 0$ ?

Ако обратимо пажњу само на  $l^m(q)$ , примећујемо да треба наћи минималну позитивну вредност скупа  $Y^m(q) = Y^m(q)$ . Како је ово скуп вредности свих полинома висине 1, долазимо до следеће дефиниције:

$$\Lambda(q) = \{\epsilon_0 + \epsilon_1 q + \dots + \epsilon_n q^n : \epsilon_i \in \{\pm 1, 0\}\}$$

и

$$\Lambda^m(q) = \{\epsilon_0 + \epsilon_1 q + \dots + \epsilon_n q^n : \epsilon_i \in \{\pm m, \pm(m-1), \dots, \pm 1, 0\}\}.$$

Отуда можемо редесинисати  $l(q)$  и  $l^m(q)$  овако:

$$l(q) = \inf\{|y| : y \in \Lambda(q), y \neq 0\}$$

и

$$l^m(q) = \inf\{|y| : y \in \Lambda^m(q), y \neq 0\}.$$

Лако је показати да су ове две дефиниције  $l(q)$ ,  $l^m(q)$  еквивалентне дефиницијама које смо дали раније. Наредни резултати Ердоша и Коморника [13] су:

- (1) Ако  $q$  није Писоов број и  $m \geq q - q^{-1}$  тада  $\Lambda^m(q)$  има коначну тачку нагомилавања.
- (2) Ако  $q$  није Писоов број, тада  $l^m(q) = 0$  за све  $m \geq \lceil q - q^{-1} \rceil + \lceil q - 1 \rceil$ .
- (3) Ако је  $q \in (1, 2^{\frac{1}{2}}]$  и  $q^2$  није први или други Писоов број, онда је  $l^m(q) = 0$  за све  $m$ .

Напоменимо да за  $q \in (1, 2)$ , из Ердошовог и Коморниковог другог резултата следи да је  $l^3(q) > 0$  ако и само ако је  $q$  Писоов број.

Ердош, Јо и Коморник [12] су показали да ако је  $q$  Писоов број тада је

$$l(q) \geq (1+q)^{-1} q^{(\log(d-1)+\log(1+q)-\log(1-Q))/\log Q},$$

где је  $d$  степен минималног полинома броја  $q$ , док је  $Q$  највећа апсолутна вредност осталих коњулата броја  $q$ .

Коморник, Лорети и Педићини [23] су показали да ако је  $q$  Писоов број који је корен  $x^3 - x^2 - 1$  тада је  $l(q) = q^2 - 2$ . За било које  $m$ , ако је  $\tau$  златни пресек, они дају комплетан опис за  $l^m(\tau)$ . Ако је  $F_k$   $k$ -ти Фибоначијев број ( $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ) и  $\tau^{k-2} < m \leq \tau^{k-1}$  тада  $l^m(\tau) = |F_k \tau - F_{k+1}|$ .

Још један спектар је проучаван а то је класа вредности  $\pm$  полинома у тачки  $q$  дефинисана

$$A(q) = \{\epsilon_0 + \epsilon_1 q + \dots + \epsilon_n q^n : \epsilon_i \in \{\pm 1\}\}$$

чија се минимална вредност  $a(q)$  дефинише

$$a(q) = \inf\{|y| : y \in A(q), y \neq 0\}.$$

Нас интересује када и како је  $A(q)$  дискретан. Потребне су нам дефиниције:

**ДЕФИНИЦИЈА 8.** Спектар  $\Lambda$  је дискретан ако за ма који коначан интервал  $[a, b]$  реалне праве,  $\Lambda \cap [a, b]$  има коначан број елемената. Еквивалентно је рећи да је  $\Lambda$  дискретан ако нема тачака нагомиланања.

**ДЕФИНИЦИЈА 9.** Спектар  $\Lambda$  је равномерно дискретан ако постоји  $\epsilon$  веће од нуле такво да су било које две различите вредности спектра на међусобној удаљености барем  $\epsilon$ .

Јасно је да је  $A(q) \subseteq \Lambda(q)$  те да се резултати у вези са  $A(q)$  могу проширити на  $\Lambda(q)$ . Перес и Соломјак [29] су показали да ако је број  $q$  Писоов, спектар  $A(q)$  је равномерно дискретан. Борвеин и Хер [3] су дали примере бројева  $q$  за које је  $A(q)$  дискретан, али није равномерно дискретан. Заими је нашао [42] четири бесконачне фамилије бројева  $q$  са том особином. Такође у Глави 3. дата је још једна бесконачна фамилија бројева  $q$  за које је  $A(q)$  дискретан, али није равномерно дискретан. Перес и Соломјак су такође показали да је  $A(q)$  густ у  $\mathbb{R}$  за скоро сваки број  $q \in (\sqrt{2}, 2)$ . Они су показали и да уколико је  $q \in (1, \sqrt{2})$  и  $q^2$  није корен полинома висине 1, тада је  $A(q)$  густ скуп.

## 5. УОПШТЕЊА ДЕФИНИЦИЈЕ СПЕКТРА

Због велике разноврсности спектра које изучавамо, добро је дати следећу општу дефиницију:



ДЕФИНИЦИЈА 10. Нека је  $S$  коначан скуп целих бројева и нека је  $q$  реалан број. Спектар броја  $q$  у односу на скуп  $S$  дефинише се као:

$$\Lambda^S(q) = \{\epsilon_0 + \epsilon_1 q + \cdots + \epsilon_n q^n : \epsilon_i \in S\}.$$

Примећујемо да користећи ту дефиницију имамо следеће:

- (1)  $\Lambda^m(q) = \Lambda^{\{-m, -m+1, \dots, m-1, m\}}(q)$
- (2)  $\Lambda(q) = \Lambda^{\{-1, 0, 1\}}(q)$
- (3)  $A(q) = \Lambda^{\{-1, 1\}}(q)$
- (4)  $Y^m(q) = \Lambda^{\{0, 1, \dots, m\}}(q)$
- (5)  $Y(q) = \Lambda^{\{0, 1\}}(q)$
- (6)  $B(q) = \Lambda^{\{-1, 0\}}(q)$

Даље се намће уопштење још једне дефиниције.

ДЕФИНИЦИЈА 11. Дефинишимо:

$$l^S(q) = \inf\{|y| : y \in \Lambda^S(q), y \neq 0\}.$$

Сада можемо обележавати:

- (1)  $l^m(q) = l^{\{-m, -m+1, \dots, m-1, m\}}(q)$
- (2)  $l(q) = l^{\{-1, 0, 1\}}(q)$
- (3)  $b(q) = l^{\{-1, 0\}}(q).$

## ГЛАВА 2

# ФАМИЛИЈА ДИСКРЕТНИХ СПЕКТАРА

### 1. ПОЛАЗНЕ ИДЕЈЕ АЛГОРИТМА

Ми смо заинтересовани за одређивање елемената спектра  $\Lambda^S(q)$  за различите скупове  $S \subseteq \mathbb{Z}$ . Одређивање  $\Lambda^S(q)$  је корисно за израчунавање,  $a(q)$ , или уопште  $l^S(q)$ . У случају  $l(q)$  узећемо да је  $S = \{-1, 0, 1\}$  и одредићемо најмању позитивну вредност у  $\Lambda^S(q)$ . Један алгоритам за одређивање  $\Lambda(q) \cup [\frac{-1}{q-1}, \frac{1}{q-1}]$  је дао Ка-Синг Лау у [22]. Он је одредио елементе спектра у  $[\frac{-1}{q-1}, \frac{1}{q-1}]$  за Писоове бројеве који су корени полинома  $x^3 - x^2 - x - 1$ ,  $x^3 - 2x^2 + x - 1$ ,  $x^2 - x - 1$ ,  $x^3 - x^2 - 1$ ,  $x^4 - x^3 - 1$  and  $x^3 - x - 1$ . У [3] Борвсин и Хер су уопштили овај алгоритам за одређивање елемената спектра  $\Lambda^S(q) \cap [\alpha_l, \alpha_u]$ . Недостатак овог алгоритма је што он не може да се заустави у случају када спектар није дискретан. Овај алгоритам ће бити побољшан у наредној глави тако да може препознати да ли је спектар дискретан или не и зауставља се у оба случаја. Дакле друга корист од израчунавања елемената спектра је у томе што можемо одговорити на питање да ли је спектар дискретан или не. Наиме важи следећа теорема

**Теорема А.** Нека је  $q$  реалан број који задовољава  $1 < q < 2$ . Тада је спектар  $\Lambda^S(q)$  дискретан ако и само ако је  $\Lambda^S(q) \cap [\alpha_l, \alpha_u]$  коначан.

### 2. АЛГОРИТАМ ЗА ИЗРАЧУНАВАЊЕ СПЕКТРА

Наводимо алгоритам Борвсина и Хера [3] зато што ћемо га користити у овој глави у доказу наредне теореме. Овај алгоритам ће бити побољшан у наредној глави тако да може препознати да ли је спектар дискретан или не и зауставља се у оба случаја.

Хер је у [17] доказао да ако је  $q > 1$  корен полинома  $x^n - x^{n-1} - \dots - x + 1$ , тада је спектар  $A(q)$  дискретан. Наредна теорема је уопштење овог Херовог резултата.

**ТЕОРЕМА 9.** Ако су  $n > 2k+3$ ,  $k \geq 0$  цели бројеви, и  $q$  је највећи реални корен полинома  $x^n - x^{n-1} - \dots - x^{k+1} + x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1$ , тада је  $A(q)$  дискретан.

АЛГОРИТАМ 1.

```

Spec(S,q)
  alpha[u]:=-min(s:s in S)/(q-1);
  alpha[l]:=-max(s:s in S)/(q-1);
  L[0]:=S;
  d:=0;
  repeat
    L[d+1]:=L[d];
    for p in (L[d] minus L[d-1]), s in S do
      if q*p + s in [alpha[l],alpha[u]] then
        L[d+1]=L[d+1] union {q*p + s}
      end if
    end do
    d:=d + 1;
  until L[d-1]=L[d];
  RETURN(L[d]);
end;

```

Слика 1. Алгоритам Борвсина и Хера [3]

ЗАПАЖАЊЕ 1. Ако је  $n = 2k + 3$  наведени полином се може раставити на чиниоце:

$$\begin{aligned}
 x^{2k+3} - x^{2k+2} - \dots - x^{k+1} + x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1 &= \\
 &= (x^{k+1} - x^k - x^{k-1} \dots - 1)(x^{k+2} - 1),
 \end{aligned}$$

и највећи реалан корен полинома је Писоов број који је корен полинома  $x^{k+1} - x^k - x^{k-1} \dots - 1$ . Јасно, у овом случају теорема и даље важи. Ово је, чини нам се, гранични случај после којег теорема престаје да важи.

### 3. ДОКАЗ ТЕОРЕМЕ

Да бисмо доказали да је  $A(q)$  дискретан, размотримо алгоритам и покажимо да он једноставно мора да се заустави. Биће нам потребна следећа запажања:

1.  $q^{k+1} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 1 \geq 0$  за  $n > 2k + 3$ .
2.  $q^m - q^{m-1} - \dots - q + 1 > \frac{1}{q-1}$  за сваки позитиван цео број  $m \leq n - (k + 1)$ .
3.  $q^{n-l} - q^{n-l-1} - \dots - q^{k-l+1} + q^{k-l} + \dots + q - 1 < -\frac{1}{q-1}$ , за  $0 \leq l \leq k$ . Стога на сваком кораку алгоритма имамо само један избор, те алгоритам мора да се заустави после  $n$  корака. Остаје нам да докажемо ова запажања.



1. Претпоставили смо да је  $n > 2k + 3$ , па важи следећа једнакост:

$$q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+1} + q^k + q^{k-1} + \dots + q + 1 = 0.$$

Додавањем и одузимањем  $q^{2k+3}$  на левој страни добијамо

$$(q^n - q^{n-1} - \dots - q^{2k+4} - 2q^{2k+3}) + (q^{k+2} - 1)(q^{k+1} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 1) = 0.$$

Показаћемо да је први сабирак

$$q^n - q^{n-1} - \dots - q^{2k+4} - 2q^{2k+3}$$

негативан, тако да мора бити

$$(q^{k+2} - 1)(q^{k+1} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 1) > 0.$$

Како је  $q^{k+2} - 1 > 0$  коначно се добија:

$$q^{k+1} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 1 > 0.$$

Остаје још да се докаже да је заиста

$$q^n - q^{n-1} - \dots - q^{2k+4} - 2q^{2k+3}$$

негативно. Како можемо извући испред заграде чинилац  $q^{2k+3}$  добијамо

$$q^{2k+3}(q^l - q^{l-1} - \dots - q - 2)$$

где је  $l = n - (2k + 3)$ , тако да је довољно да се докаже

**ЛЕМА 2.1.**  $q^l - q^{l-1} - \dots - q - 2$  је негативно за све позитивне целе бројеве  $l$  и за све реалне бројеве  $q \in (1, 2)$ .

**ДОКАЗ.** Посматрани израз се може преуредити:

$$\begin{aligned} q^l - 1 - (q^{l-1} + \dots + q + 1) &= q^l - 1 - \frac{q^l - 1}{q - 1} \\ &= (q^l - 1)\left(1 - \frac{1}{q - 1}\right). \end{aligned}$$

Сада је јасно, обзиром да је први чинилац позитиван а други је негативан, да је производ негативан.  $\square$

2. а) Размотримо најпре случај  $m \leq n - (k + 2)$ . Биће нам потребан низ

$$q - 1, q^2 - q - 1, \dots, q^{n-(k+2)} - q^{n-(k+3)} - \dots - q - 1.$$

Доказаћемо да су сви чланови низа ненегативни. Довољно је показати да је низ опадајући и да је његов последњи члан ненегативан. Како је разлика суседних чланова

$$q^{m-1} - q^{m-2} - \dots - q - 1 - (q^m - q^{m-1} - \dots - q - 1) = q^{m-1}(2 - q) > 0,$$

низ је опадајући. Претпоставили смо да је

$$q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+2} = q^{k+1} - q^k - \dots - q - 1$$

и дељењем ове једнакости са  $q^{k+2}$  се добија:

$$q^{n-(k+2)} - q^{n-(k+3)} - \dots - q - 1 = \frac{q^{k+1} - q^k - \dots - q - 1}{q^{k+2}} \geq 0,$$

користећи запажање 1, стога је последњи члан низа ненегативан. Тиме смо управо доказали да важи следећа

**ЛЕМА 2.2.** *Ако су претпоставке теореме 9 испуњене и  $m \leq n - (k + 2)$ , тада је*

$$q^m - q^{m-1} - \dots - q - 1 \geq 0.$$

Коначно додавањем 2 обема странама добија се:

$$\begin{aligned} q^m - q^{m-1} - \dots - q + 1 &\geq 2 \\ &> \frac{1}{q-1}. \end{aligned}$$

Последња неједнакост да је  $2 > \frac{1}{q-1}$ , следи из тога што је најмањи број овог облика приближно 1.62.

б) Сада размотримо случај  $m = n - (k + 1)$ . Треба да докажемо да је

$$(3.1) \quad q^{n-(k+1)} - \dots - q + 1 > \frac{1}{q-1}.$$

Множењем сваке стране са  $q^{k+1}$  ова неједнакост је еквивалентна са

$$q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+2} - q^{k+1} + q^k + \dots + q + 1 + (2q^{k+1} - q^k - \dots - q - 1) > \frac{q^{k+1}}{q-1}$$

односно са

$$2q^{k+1} - q^k - \dots - q - 1 > \frac{q^{k+1}}{q-1}.$$

Множењем сваке стране са  $q - 1$  неједнакост је еквивалентна са

$$2q^{k+2} - q^{k+1} - \dots - q^2 - q - 2q^{k+1} + q^k + q^{k-1} + \dots + 1 > q^{k+1}$$

и коначно са

$$(3.2) \quad 2q^{k+2} - 4q^{k+1} + 1 > 0.$$

Дакле треба да анализирамо полином  $P(x) = 2x^{k+2} - 4x^{k+1} + 1$ . Проценимо његове вредности за  $x = 1, 2, 2 - 2^{-(k+2)}$ . Можемо израчунати  $2 \cdot 1^{k+1}(1 - 2) + 1 = -1 < 0$ ,  $2 \cdot 2^{k+1}(2 - 2) + 1 = 1 > 0$ ,  $2(2 - 2^{-(k+2)})^{k+1}(2 - 2^{-(k+2)} - 2) + 1 = -(1 - 2^{-(k+3)})^{k+1} + 1 > 0$ . Закључујемо да полином  $P(x)$  има корен  $t_k \in (1, 2)$ . Анализирајући знак првог извода овог полинома на  $[1, 2]$  можемо видети да полином  $P(x)$  најпре опада, у  $x = 2 - \frac{2}{k+2}$  има минимум, а затим расте. Закључујемо да  $t_k \in (2 - \frac{2}{k+2}, 2)$  и полином је растући на овом интервалу. То значи да, ако докажемо да је  $q = q_{n,k} > t_k$ , онда мора бити  $P(q) > P(t_k) = 0$  дакле важи неједнакост (3.2). Тако ћемо доказати да важи и неједнакост (3.1), пошто, како смо

видели, су ове две неједнакости еквивалентне. Остаје да се докаже следећа

**ЛЕМА 2.3.** *Нека је  $n \geq 2k + 4$ , означимо са  $q = q_{n,k}$  највећи реалан корен полинома*

$$P_{n,k}(x) = x^n - x^{n-1} - \dots - x^{k+1} + x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1,$$

*и нека је  $t = t_k \in (1, 2)$  корен полинома  $P_k(x) = 2x^{k+2} - 4x^{k+1} + 1$ . Тада важи да је  $t < q$ .*

**ДОКАЗ.** Најпре размотримо случај  $n = 2k + 4$ . По претпоставци је

$$(3.3) \quad 2t^{k+2} - 4t^{k+1} + 1 = 0,$$

што даје

$$2t^{k+2} - 4t^{k+1} + 2 > 0.$$

Множењем последње неједнакост са  $-1/2$  добијамо

$$0 > -t^{k+3} + 2t^{k+2} - 1.$$

и такође

$$0 > -t^{k+3} + (2t^{k+2} + 1) - 2.$$

Једнакост (3.3) даје  $2t^{k+2} + 1 = 4t^{k+1}$ . Када заменимо то у претходну неједнакост добијамо

$$(3.4) \quad 0 > -t^{k+3} + 4t^{k+1} - 2.$$

Сада поново из једнакости (3.3) следи да је

$$-1 = 2t^{k+2} - 4t^{k+1}.$$

Множење обеју страна са  $t^{k+3}$  даје

$$-t^{k+3} = 2t^{2k+5} - 4t^{2k+4}.$$

Ако заменимо то у неједнакост (3.4) добијамо

$$0 > 2t^{2k+5} - 4t^{2k+4} + 4t^{k+1} - 2.$$

Делјењем обеју страна са 2 и користећи  $n = 2k + 4$  добијамо

$$\begin{aligned} 0 &> t^{n+1} - 2t^n + 2t^{k+1} - 1 \\ &> t^{n+1} - t^n - (t^n - 1) + 2(t^{k+1} - 1) \\ &> t^n(t - 1) - (t - 1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + 1) + \\ &\quad + 2(t - 1)(t^k + t^{k-1} + \dots + 1). \end{aligned}$$

Делјењем позитивним бројем  $t - 1$  даље се добија

$$\begin{aligned} 0 &> t^n - (t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + 1) + 2(t^k + t^{k-1} + \dots + 1) \\ 0 &> t^n - t^{n-1} - \dots - t^{k+1} + t^k + t^{k-1} + \dots + t + 1. \end{aligned}$$

Како је  $q_{n,k}$  највећи реални корен полинома, имамо:

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+1} + q^k + q^{k-1} + \dots + q + 1, \\ 0 &< 2^n - 2^{n-1} - \dots - 2^{k+1} + 2^k + 2^{k-1} + \dots + 2 + 1 = 2^{k+2} - 1, \end{aligned}$$

закључујемо да је  $t_k < q_{2k+4,k} < 2$ . Сада размотримо случај  $n > 2k + 4$ . Тврдимо да, ако је  $k$  фиксирано, низ  $q_{n,k}$  расте са  $n$  и ограничен је одозго са 2. Заиста,

$$\begin{aligned} q_{n,k}^{n+1} - q_{n,k}^n - \dots - q_{n,k}^{k+1} + q_{n,k}^k + q_{n,k}^{k-1} + \dots + q_{n,k} + 1 &= \\ &= q_{n,k}^{n+1} - 2q_{n,k}^n = q_{n,k}^n(q_{n,k} - 2) < 0, \end{aligned}$$

даје  $q_{n,k} < q_{n+1,k}$ , и

$$2^{n+1} - 2^n - \dots - 2^{k+1} + 2^k + 2^{k-1} + \dots + 2 + 1 = 2^{k+2} - 1 > 0$$

даје  $q_{n,k} < 2$ . Коначно закључујемо да је  $t_k < q_{n,k}$  за свако  $n \geq 2k + 4$ .  $\square$

3. Биће нам потребна следећа

**ЛЕМА 2.4.** *Ако је  $-\frac{1}{q-1} < qx + 1 \leq 0$ , и  $q \in (1, 2)$ , тада је  $-\frac{1}{q-1} < x < 0$ .*

**ДОКАЗ.** Из неједнакости  $qx + 1 \leq 0$  следи да је  $x \leq -\frac{1}{q} < 0$  док неједнакост  $-\frac{1}{q-1} < qx + 1$  даје  $-\frac{1}{q-1} - 1 < qx$  и  $-\frac{q}{q-1} < qx$ . Делјењем обеју страна са  $q$ , коначно добијамо  $-\frac{1}{q-1} < x$ .  $\square$

Посматрајмо следећи коначан низ бројева:

$$\begin{aligned} \alpha_{n-k-1} &= q^{n-k-1} - q^{n-k-2} - \dots - q - 1, \\ \alpha_{n-k} &= q^{n-k} - q^{n-k-1} - \dots - q + 1, \\ \alpha_{n-k+1} &= q^{n-k+1} - q^{n-k} - \dots - q^2 + q + 1, \\ &\dots \\ \alpha_n &= q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+1} + q^k + \dots + q + 1. \end{aligned}$$

Лако је проверити да је  $\alpha_{i+1} = q\alpha_i + 1, i = n-k-1, n-k, \dots, n-1$ . Претпоставка теореме даје  $\alpha_n = 0$ , стога можемо узастопном применом претходне леме закључити редом да је

$$\begin{aligned} -\frac{1}{q-1} &< \alpha_{n-1} < 0, \\ -\frac{1}{q-1} &< \alpha_{n-2} < 0, \\ &\dots \\ -\frac{1}{q-1} &< \alpha_{n-k-1} < 0. \end{aligned}$$

најзад, имамо да је за  $0 \leq l \leq k$

$$q^{n-l} - q^{n-l-1} - \dots - q^{k-l+1} + q^{k-l} + \dots + q - 1 = \alpha_{n-l} - 2 \leq -2 < -\frac{1}{q-1}.$$

Последња неједнакост да је  $-2 < -\frac{1}{q-1}$  је тачна зато што је  $q > 1$ , 62.  $\square$

#### 4. ДИСКРЕТНИ 0-СПЕКТРИ

Докажимо сада да је и  $B(q)$  коначан. Претпоставимо најпре да је  $n > 2k + 4$ . Докажимо следеће тврдње:

4.  $q^m - q^{m-1} - \dots - q > \frac{1}{q-1}$  за сваки природан број  $m \leq n - (k+2)$ ,

5.  $q^{n-m} - q^{n-m-1} - \dots - q^{k-m+2} - 1 < 0$ , за  $0 \leq m \leq k+1$ .

4. Треба доказати да су сви чланови низа  $q, q^2 - q, \dots, q^{n-(k+2)} - q^{n-(k+3)} - \dots - q$  већи од  $\frac{1}{q-1}$ . Видели смо у доказу запажања 2. да је низ за 1 мањих бројева опадајући. Зато је и овај низ опадајући те је довољно показати да је последњи члан

$$q^{n-(k+2)} - q^{n-(k+3)} - \dots - q > \frac{1}{q-1}.$$

Множењем обеју страна са  $q - 1$  добијамо

$$q^{n-(k+1)} - q^{n-(k+2)} - \dots - q^2 - (q^{n-(k+2)} - q^{n-(k+3)} - \dots - q) > 1.$$

Ова неједнакост је еквивалентна

$$q^{n-(k+1)} - 2q^{n-(k+2)} + q - 1 > 0,$$

односно после множења обеју страна бројем  $q^{k+2}$  са

$$q^{n+1} - 2q^n + q^{k+3} - q^{k+2} > 0.$$

Сада ће нам бити потребна следећа

**ЛЕМА 2.5.** Нека је  $q$  корен полинома  $x^n - x^{n-1} - \dots - x^{k+1} + x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1$  различит од 1. Тада за број  $q$  важи  $q^{n+1} - 2q^n + 2q^{k+1} - 1 = 0$ .

**ДОКАЗ.** Како важи  $q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+1} + q^k + q^{k-1} + \dots + q + 1 = 0$ . Ако искористимо формулу за сумирање геометријског реда имамо  $q^n - \frac{q^n - 1}{q - 1} + 2\frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} = 0$ , множењем ове једнакости са  $q - 1$  добија се  $q^{n+1} - q^n - q^n + 1 + 2q^{k+1} - 2 = 0$  чиме је лема доказана.  $\square$

Применом ове леме неједнакост је даље еквивалентна са

$$q^{k+3} - q^{k+2} - 2q^{k+1} + 1 > 0.$$

Ову неједнакост доказаћемо ако покажемо да важе следеће две неједнакости:

$$q^{k+3} - q^{k+2} - 2q^{k+1} + 1 > q^{k+3} - q^{k+2} - \dots - q - 1,$$

и

$$q^{k+3} - q^{k+2} - \dots - q - 1 > 0.$$



Прва неједнакост је еквивалентна са

$$0 > q^{k+1} - q^k - \dots - q - 2,$$

што је тачно на основу леме 2.1. Друга неједнакост је тачна јер су испуњени услови за примену леме 2.2. Наиме узмемо да је  $m = k+3$  и како је  $n \geq 2k+5$  биће  $m \leq n - (k+2)$ .

5. Није тешко показати да је низ бројева

$$\begin{aligned} q^{n-(k+1)} - q^{n-(k+2)} - \dots - q - 1, \quad q^{n-k} - q^{n-(k+1)} - \dots - q^2 - 1, \\ \dots, \quad q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

растући. (Довољно је показати да је низ за један већих бројева растући, обзиром да се у њему сваки члан добија множењем претходног члана са  $q > 1$ .) У запажању 5. тврди се да су сви чланови наведеног низа мањи од нуле. Довољно је доказати да је последњи члан наведеног низа мањи од нуле. Знамо да је  $q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+2} = q^{k+1} - q^k - \dots - q - 1$ . Зато је последњи члан низа

$$\begin{aligned} q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+2} - 1 &= q^{k+1} - q^k - \dots - q - 2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

применом леме 2.1.

Случај  $n = 2k+4$  мора да се разматра посебно. Докажимо следећа тврђења.

6.  $q^m - q^{m-1} - \dots - q > \frac{1}{q-1}$  за сваки природни број  $m \leq n - (k+3)$ .

7. За оба броја  $q^{n-(k+2)} - q^{n-(k+3)} - \dots - q$  и  $q^{n-(k+2)} - q^{n-(k+3)} - \dots - q - 1$  важи да се налазе у сегменту  $[0, \frac{1}{q-1}]$ .

8.  $q^{n-m} - q^{n-m-1} - \dots - q^{k-m+2} - 1 < 0$ , за  $0 \leq m \leq k+1$

9.  $q^{n-(k+2)+m} - q^{n-(k+3)+m} - \dots - q^{m+1} - q^{m-1} - q^{m-2} - \dots - q > \frac{1}{q-1}$ ,

за  $1 \leq m \leq k+3$

10.  $q^{n+2+m} - q^{n+1+m} - \dots - q^{n-k+1+m} - q^{n-k-1+m} - q^{n-k-2+m} - \dots - q^{1+m} - 1 < 0$ , за  $1 \leq l \leq k$

11.  $q^{n+2+k} - q^{n+1+k} - \dots - q^{n+1} - q^{n-1} - q^{n-2} - \dots - q^{1+k} = q^{n-1} - q^{n-2} - \dots - q^{k+2} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 1$ .

6. Већ смо видели у доказу запажања 4. да је низ  $q, q^2 - q, \dots, q^{n-(k+3)} - q^{n-(k+2)} - \dots - q$  опадајући. Зато је довољно доказати да је последњи члан

$$q^{n-(k+3)} - q^{n-(k+2)} - \dots - q > \frac{1}{q-1}.$$

Множењем обеју страна са  $q-1$  добијамо

$$q^{n-(k+2)} - q^{n-(k+3)} - \dots - q^2 - (q^{n-(k+3)} - q^{n-(k+4)} - \dots - q) > 1.$$

Ова неједнакост је еквивалентна са

$$q^{n-(k+2)} - 2q^{n-(k+3)} + q - 1 > 0,$$

односно, множењем обеју страна бројем  $q^{k+3}$  са

$$q^{n+1} - 2q^n + q^{k+4} - q^{k+3} > 0.$$

Сада можемо поново искористити лему 2.5 и добијамо да је неједнакост еквивалентна са

$$q^{k+4} - q^{k+3} - 2q^{k+1} + 1 > 0.$$

Ову неједнакост доказаћемо ако показаћемо да важе следће две неједнакости:

$$q^{k+4} - q^{k+3} - 2q^{k+1} + 1 > q^{k+2} - q^{k+1} - \dots - q - 1,$$

и

$$q^{k+2} - q^{k+1} - \dots - q - 1 > 0.$$

Прва неједнакост је еквивалентна са

$$q^{k+4} - q^{k+3} - q^{k+2} - q^{k+1} + q^k + q^{k-1} + q + 2 > 0,$$

односно са

$$q^{k+4} - q^{k+3} - q^{k+2} - q^{k+1} + q^k + q^{k-1} + q + 2 + \\ - (q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+1} + q^k + q^{k-1} + \dots + q + 1) > 0,$$

из чега се добија

$$-(q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+5} - 2q^{k+4}) + 1 > 0.$$

и најзад

$$-q^{k+4}(q^{n-(k+4)} - q^{n-(k+5)} - \dots - q - 2) + 1 > 0,$$

што је тачно јер је, на основу леме 2.1, израз у загради негативан. Друга неједнакост је тачна јер су испуњени услови за примену леме 2.2. Треба, дакле, узети да је  $m = k + 2$  и како је  $n = 2k + 4$  биће  $m \leq n - (k + 2)$ .

7. Пошто је први број очигледно већи од другог довољно је доказати да је мањи број већи од нуле а већи број мањи од  $\frac{1}{q-1}$ . Дакле с једне стране треба доказати неједнакост

$$q^{n-(k+2)} - q^{n-(k+3)} - \dots - q - 1 > 0.$$

Сумирајући чланове геометријског реда добијамо

$$q^{n-(k+2)} - \frac{q^{n-(k+2)} - 1}{q - 1} > 0.$$

Множењем са  $q - 1$  добија се

$$q^{n-(k+1)} - q^{n-(k+2)} - (q^{n-(k+2)} - 1) > 0.$$

Множењем са  $q^{k+2}$  имамо

$$q^{n+1} - 2q^n + q^{k+2} > 0.$$

Сада можемо искористити лему 2.5

$$q^{k+2} - 2q^{k+1} + 1 > 0.$$

Множењем са  $q^{k+3}$  и како је  $n = 2k + 4$  добићемо

$$q^{n+1} - 2q^n + q^{k+3} > 0.$$

Опет можемо искористити лему 2.5

$$q^{k+3} - 2q^{k+1} + 1 > 0.$$

Ово је тачно јер је  $q^2 > 2$ .

С друге стране треба доказати неједнакост

$$q^{n-(k+2)} - q^{n-(k+3)} - \dots - q < \frac{1}{q-1}.$$

Сумирајући чланове геометријског реда добијамо

$$q^{n-(k+2)} - \frac{q^{n-(k+2)} - 1}{q-1} + 1 < \frac{1}{q-1}.$$

Множењем са  $q-1$

$$q^{n-(k+1)} - q^{n-(k+2)} - (q^{n-(k+2)} - 1) + q - 1 < 1,$$

$$q^{n-(k+1)} - 2q^{n-(k+2)} + q - 1 < 0.$$

Множењем са  $q^{k+2}$  добијамо

$$q^{n+1} - 2q^n + q^{k+3} - q^{k+2} < 0.$$

Сада можемо искористити лему 2.5

$$q^{k+3} - q^{k+2} - 2q^{k+1} + 1 < 0.$$

Множењем са  $q^{k+1}$

$$(4.1) \quad q^n - q^{n-1} - 2q^{n-2} + q^{k+1} < 0.$$

Одузмимо  $q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+1} + q^k + q^{k-1} + \dots + q + 1 = 0$  од леве стране

$$-q^{n-2} + q^{n-3} - \dots + q^{k+2} + 2q^{k+1} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 1 < 0$$

$$-q^{2k+2} + q^{2k+1} + \dots + q^{k+2} + q^{k+1} + q^{k+1} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 1 < 0$$

$$(4.2) \quad (-q^{k+1} + 1)(q^{k+1} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 1) < 0.$$

Ово је тачно јер је  $-q^{k+1} + 1 < 0$  а у 6. смо доказали да је

$$q^{k+1} - q^k - q^{k-1} - \dots - q > \frac{1}{q-1} > 1$$

па мора бити

$$q^{k+1} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 1 > 0.$$

8. Доказује се потпуно исто као у запажању 5.

9. Треба доказати да су сви чланови низа

$$a_0 = q^{k+3} - q^{k+2} - \dots - q^2,$$

$$a_1 = q^{k+4} - q^{k+3} - \dots - q^3 - q,$$

...

$$a_{k+2} = q^{n+1} - q^n - \dots - q^{k+4} - q^{k+2} - q^{k+1} - \dots - q,$$



већи од  $\frac{1}{q-1}$ . Докажимо најпре да је овај низ опадајући. За низ важи рекурентна формула  $a_{i+1} = qa_i - q$ . Дакле треба доказати да је

$$qa_i - q < a_i,$$

што је еквивалентно са

$$a_i < \frac{q}{q-1}, i = 0, 1, \dots, k+1.$$

Ако покажемо да је  $a_0 < \frac{q}{q-1}$  то повлачи да је  $a_1 < a_0$  па ће бити  $a_1 < \frac{q}{q-1}$ . Следи да је  $a_2 < a_1$  итд. Закључујемо да је низ опадајући. У 7. смо доказали да је

$$q^{k+2} - q^{k+1} - \dots - q < \frac{1}{q-1}.$$

Множењем неједнакости са  $q$  добијамо да је  $a_0 < \frac{q}{q-1}$ .

Сада је довољно доказати да је последњи члан низа

$$q^{n+1} - q^n - \dots - q^{k+4} - q^{k+2} - q^{k+1} - \dots - q > \frac{1}{q-1}.$$

Множењем са  $q-1$ , а затим одузимањем 1 од обеју страна добијамо

$$q^{n+2} - 2q^{n+1} + q^{k+4} - q^{k+3} + q - 1 > 0.$$

Заменимо прва два сабирка применом леме 2.5

$$-2q^{k+2} + q + q^{k+4} - q^{k+3} + q - 1 > 0.$$

Помножимо са  $q^{k+1}$  и преуредимо

$$q^{n+1} - q^n - 2q^{n-1} + 2q^{k+2} - q^{k+1} > 0.$$

Одузмимо и додајмо  $q^n$

$$(q^{n+1} - 2q^n) + (q^n - 2q^{n-1}) + 2q^{k+2} - q^{k+1} > 0.$$

Заменимо изразе у обема заградама користећи поново лему 2.5

$$(-2q^{k+1} + 1) + (-2q^k + \frac{1}{q}) + 2q^{k+2} - q^{k+1} > 0.$$

Помножимо ову неједнакост са  $q$  и преуредимо

$$2q^{k+3} - 3q^{k+2} - 2q^{k+1} + q + 1 > 0.$$

Ову неједнакост сада можемо написати на следећи начин

$$(2q^{k+3} - 4q^{k+2} + q) + \frac{1}{2}(2q^{k+2} - 4q^{k+1} + 1) + \frac{1}{2} > 0,$$

односно

$$(q + \frac{1}{2})(2q^{k+2} - 4q^{k+1} + 1) + \frac{1}{2} > 0.$$

Ова неједнакост је тачна јер у првој загради имамо позитиван број а ако се сетимо неједнакости (3.2) видимо да и у другој загради имамо позитиван број.

10. Треба доказати да су сви чланови низа

$$\begin{aligned} a_1 &= q^{n+2} - q^{n+1} - \dots - q^{k+5} - q^{k+3} - q^{k+2} - \dots - q - 1, \\ a_2 &= q^{n+3} - q^{n+2} - \dots - q^{k+6} - q^{k+4} - q^{k+3} - \dots - q^2 - 1, \\ &\dots \\ a_{k+1} &= q^{n+k+2} - q^{n+k+1} - \dots - q^{2k+5} - q^{2k+3} - q^{2k+2} - \dots - q^{k+1} - 1, \end{aligned}$$

мањи од нуле. Није тешко видети да је овај низ растући јер ако посматрамо низ  $a'_1 = a_1 + 1, a'_2 = a_2 + 1, \dots, a'_{k+1} = a_{k+1} + 1$  за њега важи рекурентна веза  $a'_{i+1} = qa'_i$  те је низ  $a'_i$  растући. Закључујемо да је и низ  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$  растући. Зато да би доказали 10. довољно је да докажемо да је последњи члан низа  $a_{k+1}$  мањи од нуле. Пре тога биће корисно да прво докажемо 11. тј. да је  $a'_{k+1} = q^{n-1} - q^{n-2} - \dots - q^{k+2} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 1$ . Посматрамо разлику

$$\begin{aligned} a'_{k+1} &= (q^{n-1} - q^{n-2} - \dots - q^{k+2} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 1) \\ &= q^{n+k+2} - q^{n+k+1} - \dots - q^{n+1} - q^{n-1} - q^{n-2} - \dots - q^{k+1} + \\ &\quad - (q^{n-1} - q^{n-2} - \dots - q^{k+2} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 1) \\ &= q^{n+k+2} - q^{n+k+1} - \dots - q^{n+1} - 2q^{n-1} + q^k + q^{k-1} + \dots + q + 1 \\ &= (q^{k+2} + 1)(q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+1} + q^k + q^{k-1} - \dots + q + 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Остаје да се докаже да је  $a_{k+1} < 0$ . Из 11. имамо

$$q^{n-1} - q^{n-2} - \dots - q^{k+2} - q^k - q^{k-1} - \dots - q - 2 < 0.$$

Помножимо ову неједнакост са  $q$  и одузмимо  $q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+1} + q^k + q^{k-1} + \dots + q + 1 = 0$  од леве стране, добићемо

$$q^{k+2} - 2q^k - 2q^{k-1} - \dots - 2q^2 - 3q - 1 < 0.$$

Искористимо формулу за збир геометријског низа

$$q^{k+2} - 2\frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} - q + 1 < 0.$$

Множењем са  $q - 1$  ову неједнакост имамо

$$q^{k+3} - q^{k+2} - 2q^{k+1} + 2 - (q - 1)^2 < 0.$$

Множењем са  $q^{k+1}$  добијамо

$$q^n - q^{n-1} - 2q^{n-2} - q^{k+3} + 2q^{k+2} + q^{k+1} < 0.$$

Ова неједнакост ће бити доказана уколико докажемо следеће две неједнакости. Прва је

$$\begin{aligned} q^n - q^{n-1} - 2q^{n-2} - q^{k+3} + 2q^{k+2} + q^{k+1} \\ < q^n - q^{n-1} - 2q^{n-2} + q^{k+2} - q^{k+1} + q^k. \end{aligned}$$

а друга је

$$q^n - q^{n-1} - 2q^{n-2} + q^{k+2} - q^{k+1} + q^k < 0.$$

Прва неједнакост се своди на

$$0 < q^{k+3} - q^{k+2} - 2q^{k+1} + q^k,$$

односно, кад се подели бројем  $q^k$ , на

$$0 < q^3 - q^2 - 2q + 1.$$

Ово је тачно јер највећа нула полинома  $x^3 - x^2 - 2x + 1$  је приближно 1,802 тако да вредност полинома за  $x = q > 1,802$  мора бити позитивна. Да бисмо доказали другу неједнакост пођимо од тачне неједнакости

$$(1 - q^k)(q^{k+2} - q^{k+1} - \dots - q - 1) < 0.$$

(Број у првој загради је очигледно негативан а у 7. смо видели да је број у другој загради позитиван.) Када се лева страна измножи  $-q^{2k+2} + q^{2k+1} + q^{2k} + \dots + q^{k+3} + 2q^{k+2} - q^{k+1} - q^{k-2} - \dots - q - 1 < 0$ .

Додамо  $q^n - q^{n-1} - \dots - q^{k+1} + q^k + q^{k-1} + \dots + q + 1 = 0$  левој страни и добијамо другу неједнакост

$$q^n - q^{n-1} - 2q^{n-2} + q^{k+2} - q^{k+1} + q^k < 0.$$

За  $q_n = q > 1,876$ , колико приближно износи једини реални корен кубног полинома  $-2x^3 + 4x^2 - x + 1$ , закључујемо да је

$$0 > -2q^3 + 4q^2 - q + 1.$$

Делјењем бројем  $q - 1$  добија се:

$$\begin{aligned} 0 &> \frac{-2q^3 + 2q^2 + q^2 - q}{q - 1} + \frac{q^2 + 1}{q - 1} \\ &> \frac{q^2}{q - 1} - 2q^2 + q + \frac{1}{q - 1} \\ &> \frac{q^2}{q - 1} - 2q^2 + q + 1. \end{aligned}$$

Пребацивањем сабирка  $\frac{q^2}{q-1}$  на леву страну и множењем неједнакости бројем  $-1$  добија се

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{q - 1} &< 2q^2 - q - 1 \\ &< (q^n - q^{n-1} - \dots - q^2 + q + 1) + 2q^2 - q - 1 \\ &< q^n - q^{n-1} - \dots - q^3 + q^2 \\ &< q^2(q^{n-2} - q^{n-3} - \dots - q + 1). \end{aligned}$$

Коначно делјењем обеју страна бројем  $q^2$  добија се

$$\frac{1}{q - 1} < q^{n-2} - q^{n-3} - \dots - q + 1.$$

2. За  $m = n - 1$  и  $q_n = q > \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1,37$  следи да је

$$0 < 2q^2 - 2q - 1,$$

дељењем обеју страна бројем  $q - 1$

$$0 < \frac{2q^2 - 2q + q - 1}{q - 1} = \frac{q}{q - 1}.$$

Пребацивањем  $\frac{q}{q-1}$  на леву страну неједнакости добија се

$$\frac{q}{q - 1} < 2q + 1.$$

Множењем обеју страна неједнакости бројем  $-1$  добија се

$$-\frac{q}{q - 1} > -2q - 1.$$

$$-\frac{q}{q - 1} > q^n - q^{n-1} - \dots - q^2 + q + 1 - 2q - 1.$$

дељењем обеју страна неједнакости бројем  $q$  добија се

$$-\frac{1}{q - 1} > q^{n-1} - q^{n-2} - \dots - q - 1.$$

3. Приметимо да је  $q^n - q^{n-1} - \dots - q^2 + q - 1 = q^n - q^{n-1} - \dots - q^2 + q + 1 - 2 = -2 < -\frac{1}{q-1}$

Из свега овога можемо закључити да важи

ЛЕМА 2.6. Нека је  $n > 2k + 2$  а  $q$  највећи реални корен полинома

$$x^n - x^{n-1} - \dots - x^{k+1} + x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1.$$

Тада је

$$a(q) = \frac{q^{k+1} - q^k - \dots - q - 1}{q^{k+2}} \approx \frac{1}{2^{k+2}}.$$

## ГЛАВА 3

# АЛГОРИТАМ СА КРИТЕРИЈУМОМ ДИСКРЕТНОСТИ

### 1. ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ АЛГОРИТМА

Прва лема је Лема 1 из [3]. Укључујемо њен доказ због комплетности и зато што се варијација овог доказа појаљује при доказивању Леме 3.3.

**ЛЕМА 3.1.** *Нека је  $S$  коначан скуп целих бројева и нека је  $p$  реалан број. Нека је  $s_l = \min(S)$ ,  $s_u = \max(S)$ , и  $q > 1$ . Означимо  $\alpha_l = \frac{-s_u}{q-1}$ ,  $\alpha_u = \frac{-s_l}{q-1}$ . Ако  $p > \alpha_u$ , онда је  $qp + s > p$ , с друге стране ако је  $p < \alpha_l$ , онда је  $qp + s < p$  за све  $s \in S$ .*

**ДОКАЗ.** Претпоставимо да је  $p > \alpha_u$ . Множењем обеју страна са  $q - 1$  добијамо  $qp - p > -s_l$  и коначно  $qp + s_l > p$ . Сад имамо

$$qp + s \geq qp + s_l > p.$$

Можемо доказати аналогно да  $p < \alpha_l$  повлачи  $qp + s < p$  за све  $s \in S$ .  $\square$

Захваљујући овој леми можемо непосредно закључити да ако је  $p \notin [\alpha_l, \alpha_u]$  онда је  $qp + s \notin [\alpha_l, \alpha_u]$ .

**ЛЕМА 3.2.** *Нека  $S$ ,  $s_l$ ,  $s_u$ ,  $\alpha_u$ ,  $\alpha_l$  су дефинисани као у претходној леми и нека је  $2 > q > 1$ . Ако је  $p \in [\alpha_l, \alpha_u]$ , тада постоји  $s \in S$  такво да је  $qp + s \in [\alpha_l, \alpha_u]$ .*

**ДОКАЗ.** Полазећи од очигледне неједнакости

$$s_u - s_l < \frac{s_u - s_l}{q - 1},$$

доста лако можемо извести

$$\frac{\alpha_l - s_l}{q} < \frac{\alpha_u - s_u}{q}.$$

Друго, видимо да ако је  $p \in [\alpha_l, \frac{\alpha_u - s_u}{q}]$  тада је  $qp + s_u \in [\alpha_l, \alpha_u]$ , и слично ако је  $p \in [\frac{\alpha_l - s_l}{q}, \alpha_u]$  онда је  $qp + s_l \in [\alpha_l, \alpha_u]$ . Одавде добијамо тврђење леме.  $\square$

Следеће уопштавање леме 3.1, за случај када су  $p, q$  комплексни бројеви биће веома важно.



ЛЕМА 3.3. Нека су  $S, s_l, s_u$  дефинисани као у претходној леми. Нека су  $t, q_2$  комплексни бројеви и нека је  $|q_2| > 1$ . Означимо  $s_m = \max(|s_l|, |s_u|)$ . Ако је

$$(1.1) \quad |t| > \frac{s_m}{|q_2| - 1},$$

онда је  $|q_2 t + s| > |t|$  за све  $s \in S$ .

ДОКАЗ. Множењем обеју страна неједнакости (1.1) са  $|q_2| - 1$  добијамо  $|q_2||t| - |t| > s_m$  односно  $|q_2||t| - s_m > |t|$ . Како је неједнакост  $|q_2 t + s| \geq |q_2 t| - |s|$  увек испуњена, и како је очигледно да је  $s_m \geq |s|$  на крају можемо закључити да је

$$\begin{aligned} |q_2 t + s| &\geq |q_2 t| - |s| \\ &\geq |q_2||t| - s_m \\ &> |t|. \end{aligned}$$

□

ЛЕМА 3.4. Нека је  $q$  алгебарски цео број чији коњугат је  $q_2$ . Нека су  $\Lambda^S(q), \Lambda^S(q_2)$  спектри бројева  $q, q_2$  респективно. Тада постоји бијекција  $\sigma$  између ова два спектра

$$(1.2) \quad \sigma(qp + s) = q_2\sigma(p) + s$$

за свако  $p \in \Lambda$  и  $s \in S$ .

Лема 3.4 је директан резултат теорије Галоа (видети [41] Королар 2.6.2 или [39], глава VI, §39). Бијекција  $\sigma : \mathbb{Q}(q) \rightarrow \mathbb{Q}(q_2)$  је изоморфизам поља познат у теорији Галоа као акција Галоа.

ЛЕМА 3.5. Нека је  $q$  реалан број који није ни Писоов ни Салемов и који задовољава  $2 > q > 1$ . Нека је  $S, s_l, s_u, s_m, \alpha_l, \alpha_u, \Lambda^S(q), \Lambda^S(q_2)$  дефинисан као у претходне две леме. Ако постоји нека акција Галоа  $\sigma$  и број  $p \in \Lambda^S(q)$  такав да  $\sigma : \mathbb{Q}(q) \rightarrow \mathbb{Q}(q_2)$  за неки коњугат  $q_2$  броја  $q$  чији модуло  $|q_2| > 1$ ,  $p \in \Lambda^S(q) \cap [\alpha_l, \alpha_u]$ , и  $|\sigma(p)| > \frac{s_m}{|q_2| - 1}$ , тада  $\Lambda^S(q)$  није дискретан. Ако  $q$  нема ниједан коњугат који је по модулу једнак 1, тада важи и обрат претходне импликације.

ДОКАЗ. Нека је низ  $p_k$  дефинисан рекурентно:  $p_0 = p$ ,  $p_{k+1} = qp_k + s_k$  за неко  $s_k \in S$  такво да је  $qp_k + s_k \in [\alpha_l, \alpha_u]$ . Тада је низ  $|\sigma(p_k)|$  растући. Ово ћемо доказати индукцијом. Заста  $|\sigma(p_1)| = |\sigma(qp_0 + s_0)| = |q_2\sigma(p_0) + s_0| > |\sigma(p_0)|$ , коришћењем леме 3.3 узевши  $t = \sigma(p_0)$ . Како је  $|\sigma(p_1)| > |\sigma(p_0)| > \frac{s_m}{|q_2| - 1}$ , можемо поново искористити исту лему. Даље настављамо индукцијом:

$$\begin{aligned} |\sigma(p_{k+1})| &= |\sigma(qp_k + s_k)| \\ &= |q_2\sigma(p_k) + s_k| \\ &> |\sigma(p_k)|. \end{aligned}$$

Нека су  $p_i, p_j$ , два различита члана низа и нека је  $i > j$ . Тада нам  $|\sigma(p_i)| > |\sigma(p_j)|$  даје  $\sigma(p_i) \neq \sigma(p_j)$  из чега следи да је  $p_i \neq p_j$  зато што је  $\sigma$  бијекција. Из тога закључујемо да је  $\{p_k\}$  бесконачан. Како је он ограничен са  $\alpha_i$  и  $\alpha_n$  значи да мора имати барем једну тачку нагомилавања. Зато спектар  $\Lambda^S(q)$  није дискретан.

Да бисмо доказали обратни смер импликације биће нам потребне неке чињенице из теорије Галоа. Нека је минимални полином броја  $q$  степена  $n$ . Нека  $q$  има коњуgate  $q = q_1, q_2, \dots, q_n$ . Ако је  $p \in \Lambda^S(q)$ , тада постоји неки полином  $P(x)$  са коефицијентима из скупа  $S$  такав да је  $p = P(q)$ . Након дељења полинома  $P(x)$  минималним полиномом броја  $q$  добијамо остатак  $R(x)$  који је јединствен полином степена не већег од  $n - 1$ , са целим коефицијентима који задовољава  $p = R(q)$ . Тада постоји коњугат  $q_j, j \in 1, 2, \dots, n$  такав да је  $\sigma(p) = R(q_j)$  за сваку акцију Галоа  $\sigma$ . Доказаћемо супротни смер свођењем на противречност. Ако  $\Lambda^S(q)$  није дискретан, и ако нема акције Галоа са овом особином, тада постоји бесконачан скуп  $\{p_i\}$  такав да  $|p_i| = R_i(q) = |a_{i,0} + a_{i,1}q + \dots + a_{i,n-1}q^{n-1}| \leq \frac{s_m}{|q|-1}$ , и за све коњуgate  $q_j$  броја  $q$ ,  $|q_j| > 1$  важи следеће:

$$|a_{i,0} + a_{i,1}q_j + \dots + a_{i,n-1}q_j^{n-1}| \leq \frac{s_m}{|q_j|-1}.$$

Посматрајмо уређену  $n$ -торку бројева  $A_i(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n-1})$  као тачку простора  $\mathbb{R}^n$ . Тада ако је  $q_j$  реалан број, претходна неједнакост представља тачке између двеју паралелних хиперравни чији вектор нормале је  $(1, q_j, q_j^2, \dots, q_j^{n-1})$ . Ако број  $q_j$  није реалан, тада је  $\bar{q}_j$  такође коњугат броја  $q$ , зато мора бити:  $|R_i(q_j)| \leq \frac{s_m}{|q_j|-1}$  и  $|R_i(\bar{q}_j)| \leq \frac{s_m}{|\bar{q}_j|-1}$ . Како су  $|R_i(q_j) + R_i(\bar{q}_j)|$  и  $|R_i(q_j) - R_i(\bar{q}_j)|$  оба не већа од  $|R_i(q_j)| + |R_i(\bar{q}_j)|$  можемо лако израчунати

$$(1.3) \quad |a_{i,0} + a_{i,1}\Re(q_j) + \dots + a_{i,n-1}\Re(q_j^{n-1})| \leq \frac{s_m}{|q_j|-1},$$

$$(1.4) \quad |0 + a_{i,1}\Im(q_j) + \dots + a_{i,n-1}\Im(q_j^{n-1})| \leq \frac{s_m}{|q_j|-1}.$$

Стога, ако  $q_j$  није реалан тада  $q_j$  и  $\bar{q}_j$  дају два пара хиперравни. Ако је  $|q_j| < 1$  можемо приметити да је  $|R_i(q_j)| = |P_i(q_j)| \leq s_m(|1 + |q_j| + \dots + |q_j|^{n-1}|) < \frac{s_m}{1-|q_j|}$ , стога ми поново добијамо две или два пара хиперравни, зависно од тога да ли је  $q_j$  реалан број или не. Желимо да покажемо да тачке између свих ових хиперравни чине ограничен подскуп простора  $\mathbb{R}^n$ . У таквом подскупу може бити само коначно много тачака са целобројним координатама. Тада број полинома  $R_i(x)$  мора бити коначан и на крају добијамо контрадикцију да  $\{p_i\}$  мора бити коначан скуп. Ако докажемо да су вектори нормала ових хиперравни линеарно независни, тада помнути подскуп мора бити ограничен. Доказаћемо да детерминанта  $D$ , чије колоне чине вектори нормала, није нула. Можемо поћи од матрице чије су

колоне  $[1, q_j, \dots, q_j^{n-1}]^T$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Њена детерминанта је Вандермондова и стога је различита од нуле. Ако  $q_j \notin \mathbb{R}$  тада из  $[1, q_j, \dots, q_j^{n-1}]^T$  и  $[1, \bar{q}_j, \dots, \bar{q}_j^{n-1}]^T$  користећи очигледне линеарне трансформације можемо добити  $[1, \Re(q_j), \dots, \Re(q_j^{n-1})]^T$  и  $[0, \Im(q_j), \dots, \Im(q_j^{n-1})]^T$ . Због тога  $D$  није нула.  $\square$

Ако применимо алгоритам Борвеина и Хера за неписоов број  $q$  и ако  $\Lambda^S(q)$  није дискретан суочићемо се са бесконачном петљом. Коришћењем леме 3.3, и бијекције  $\sigma$  из 3.4 можемо усавршити овај алгоритам и снабдеи га критеријумом за излаз из петље када је  $\sigma(p) > \frac{s_m}{|q_2| - 1}$ . У алгоритму 2 претпоставља се да  $q$  има  $Nq2$  коњулата већих од један који формирају низ, нека је то  $q2$ .

## 2. ПРИМЕНЕ АЛГОРИТМА

Т. Зами у [42] је доказао да ако је  $r_{n+1}$  реалан позитиван корен полинома  $g_{n+1}(x) = x^{n+1} - 2(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$  тада је  $A(r_{n+1})$  дискретан спектар за  $n \geq 2$ . Ако је  $n+1$  паран број тада  $g_{2m}(x)$  има још један реалан корен  $t_{2m} < -1$ . Коришћењем нашег алгоритма са критеријумом дискретности, лако је доказати да  $\Lambda(r_{2m})$  није дискретан за свако  $m$ . Најпре да се уверимо да  $t_{2m} < -1$  постоји. Биће нам потребно следеће израчунавање:  $g_{2m}(-1) = (-1)^{2m} - 2((-1)^{2m-2} + (-1)^{2m-3} + \dots + (-1) + 1) = 1 - 2 = -1$ . Како је

$$g_{n+1}(x) = x^{n+1} - 2 \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^n(x - 2)(x + 1) + 2}{x - 1},$$

можемо израчунати  $g_{2m}(-2) = \frac{(-2)^{2m+1} + 2}{-3} > 0$  и закључити најзад да постоји корен  $t_{2m}$  полинома  $g_{2m}(x)$  у интервалу  $(-2, -1)$ . Доказаћемо да је

$$(2.1) \quad t_{2m}^{2m-1} - t_{2m}^{2m-2} - \dots - t_{2m} - 1 = \frac{1}{t_{2m} + 1}.$$

Множењем обеју страна ове једначине са  $(t_{2m} + 1)$  добијамо

$$\begin{aligned} (t_{2m}^{2m-1} - t_{2m}^{2m-2} - \dots - t_{2m} - 1)(t_{2m} + 1) &= 1 \Leftrightarrow \\ g_{2m}(t_{2m}) + 1 &= 1 \Leftrightarrow \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

На исти начин можемо доказати да је

$$(2.2) \quad r_{2m}^{2m-1} - r_{2m}^{2m-2} - \dots - r_{2m} - 1 = \frac{1}{r_{2m} + 1}.$$

Идеја је да се докаже да је

$$(2.3) \quad t_{2m}^{2m} - t_{2m}^{2m-1} - \dots - t_{2m}^2 - t_{2m} > \frac{1}{|t_{2m}| - 1}$$



## 2. ПРИМЕНЕ АЛГОРИТМА

### АЛГОРИТАМ 2.

```

SpecDC1(S,q,q2,Nq2)
  alphaU:=-min(s:s in S)/(q-1);
  alphaL:=-max(s:s in S)/(q-1);
  sM:=max(|s|:s in S)
  L[0]:=S;
  for j=1 to Nq2
    for p in L[0] do
      sigma[j,p]:=p;
    end do
    d:=0;
    repeat
      L[d+1]:=L[d];
      for p in (L[d] minus L[d-1]), s in S do
        if q*p + s in [alphaL,alphaU] then do
          L[d+1]=L[d+1] union {q*p + s};
          for j=1 to Nq2 do
            sigma[j,q*p+s]=
              q2[j]*sigma[j,p] + s;
            if |q2[j]*sigma[j,p] + s| >
              sM/(||q2[j]||-1)
            then RETURN("Not discrete")
          end do
        end do
      end if
    end do
    d:=d + 1;
  until L[d-1]=L[d];
  RETURN(L[d]);
end;

```

Слика 1. Одрџивање спектра алгебарског целог броја  $q$  са низом коњулата  $q_2$  изван јединичног диска.

и

$$(2.4) \quad 0 < r_{2m}^{2m} - r_{2m}^{2m-1} - \dots - r_{2m}^2 - r_{2m} < \frac{1}{|r_{2m}| - 1}.$$

То ће проузроковати да се алгоритам2 заустави са поруком "Not discrete". Заиста, коришћењем (2.1) и  $t_{2m} < -1$  неједнакост (2.3)

даје

$$\frac{t_{2m}}{t_{2m} + 1} > \frac{-1}{t_{2m} + 1} \Leftrightarrow t_{2m} < -1.$$

Аналогно коришћењем (2.2) и  $r_{2m} > 1$ , (2.4) даје

$$0 < \frac{r_{2m}}{r_{2m} + 1} < \frac{1}{r_{2m} - 1}.$$

Са обзиром да је прва неједнакост очигледна преостаје нам на крају да докажемо другу. Множењем обеју страна са  $(r_{2m} + 1)(r_{2m} - 1)$  добијамо да је  $r_{2m}^2 - 2r_{2m} - 1 < 0$ . Ово је тачно зато што функција  $y = x^2 - 2x - 1$  има негативне вредности између својих корена, на интервалу  $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ .

### 3. ТЕОРЕМА И ДОКАЗ ЊЕНОГ ПРВОГ ДЕЛА

Може ли спектар  $A(q)$  бити дискретан за неки број који није Писоов, најважније је отворено питање у овој области. Перес и Соломјак [29], доказавши да је  $A(q)$  густ за скоро свако  $q \in (\sqrt{2}, 2)$ , поставили су исто питање за спектар  $A(q)$ . У овом случају, на питање је дат позитиван одговор. Борвсин и Хер [3] су пронашли примере бројева  $q \in (1, 2)$  који нису Писоови, али је спектар  $A(q)$  дискрестан. Они су приметили да су сви ти примери такозвани Перонови бројеви.

**ДЕФИНИЦИЈА 12** (Перонов број). Перонов број је *реални алгебарски цео број*  $q > 1$  чији остали коњугати су по модулу мањи од  $q$ .

Следећа теорема обухвата део ове хипотезе, показујући да сви реални коњугати задовољавају Перонову особину у односу на број  $q$ .

**ТЕОРЕМА 10.** *Ако је број  $q$  такав да је  $1 < q < 2$  и ако је  $A(q)$  дискретан, тада сви реални коњугати броја  $q$  су по модулу строго мањи од  $q$ .*

Да бисмо лакше доказали теорему 10 поделићемо је у две теореме.

**ТЕОРЕМА 11.** *Ако је број  $q$  такав да је  $1 < q < 2$  и ако је  $A(q)$  дискретан, тада сви негативни реални коњугати броја  $q$  су по модулу строго мањи од  $q$ .*

**ТЕОРЕМА 12.** *Ако је број  $q$  такав да је  $1 < q < 2$  и ако је  $A(q)$  дискретан, тада сви позитивни реални коњугати броја  $q$  су по модулу строго мањи од  $q$ .*

Следећа лема, иако није неопходна у доказу теореме 11, приказује главну идеју на којој се заснива доказ ове теореме.

**ЛЕМА 3.6.** *Ако је број  $q$  такав да је  $1 < q < 2$  и ако је  $A(q)$  дискретан, тада сви негативни реални коњуџати броја  $q$  су по модулу не већи од  $\sqrt{2}$ .*

**ДОКАЗ.** Нека је  $q_2$  негативан коњуџат броја  $q$ . Ако је  $|q_2| \leq 1$ , тада је очигледно да је  $|q_2| < q$ , зато претпоставимо да је  $|q_2| > 1$ . Неједнакост  $\frac{1}{|q|-1} > |q-1|$  је еквивалентна са  $0 > q(q-2)$  стога је она тачна за сваки број  $q$ , такав да  $1 < q < 2$ . Ако је спектар  $A(q)$  дискретан тада, коришћењем леме 3.5, је  $\frac{1}{|q_2|-1} \geq |\sigma(q-1)| = |q_2-1|$ . Решимо ову неједначину:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|q_2|-1} &\geq q_2-1 \geq \frac{-1}{|q_2|-1} && \Leftrightarrow \\ \frac{1}{-q_2-1} &\geq q_2-1 \geq \frac{-1}{-q_2-1} && \Leftrightarrow \\ 1 &\geq -q_2^2+1 \geq -1 && \Leftrightarrow \\ 0 &\geq -q_2^2 \geq -2 && \Leftrightarrow \\ 0 &\leq q_2^2 \leq 2 && \Leftrightarrow \\ -\sqrt{2} &\leq q_2 < -1. \end{aligned}$$

□

Непосредна последица претходне леме је: ако  $q$  задовољава додатни услов да је  $q > \sqrt{2}$ , тада је теорема 11 тачна. Доказ целокупне ове теореме је сложенија варијанта доказа леме 3.6. Пре него што отпочнемо сам доказ теореме 11 биће потребно да размотримо фамилију полинома

$$P_{2m}(x) := x^{2m} - x^{2m-1} + \dots - x + 1 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Биће нам потребне следеће леме које се односе на ову фамилију полинома са коефицијентима 1, -1.

**ЛЕМА 3.7.** *Једначина  $P_{2m}(x) = \frac{1}{|x|-1}$  има тачно једно решење  $v_m$  на интервалу  $(-\infty, -1)$  за све  $m = 1, 2, \dots$ . За  $q_2 \in [v_m, -1)$  неједнакост  $P_{2m}(q_2) \leq \frac{1}{|q_2|-1}$  је тачна, а нетачна је када је  $q_2 \in (-\infty, v_m)$ . Низ  $v_m$  је растући,  $\lim_{m \rightarrow \infty} v_m = -1$  и ограничен одоздо,  $v_m > -2$ .*

ДОКАЗ. Решимо неједначину  $P_{2m}(x) \leq \frac{1}{|x|-1}$  на  $(-\infty, -1)$ . Користећи очевидне трансформације имамо

$$\begin{aligned} x^{2m} - x^{2m-1} + \dots - x + 1 &\leq \frac{1}{-x-1}, \\ \frac{x^{2m+1} + 1}{x+1} &\leq \frac{-1}{x+1}, \\ x^{2m+1} + 1 &\geq -1, \\ x^{2m+1} &\geq -2, \\ x &\geq -\sqrt[2m+1]{2}. \end{aligned}$$

Ако најзад дефинишемо  $v_m = -\sqrt[2m+1]{2}$ , тада сва тврђења леме 3.7 се лако изводе.  $\square$

ЛЕМА 3.8. Једначина  $P_{2m}(x) = \frac{1}{x-1}$  има тачно једно решење на  $u_m$  на интервалу  $(1, \infty)$  за све  $m = 1, 2, \dots$ . За  $q \in (1, u_m]$ , неједнакост  $P_{2m}(q) \leq \frac{1}{q-1}$  је тачна, а нетачна је за  $q \in (u_m, \infty]$ . Низ  $u_m$  је опадајући, тежи ка 1 и  $u_m < 2$ . Дефинишемо  $u_0 = 2$ ,  $v_0 = -\sqrt{2}$ . За све  $m \geq 0$ ,  $|v_m| < u_{m+1}$ .

ДОКАЗ. Решимо неједначину  $P_{2m}(x) \leq \frac{1}{x-1}$  на  $(1, \infty)$ . Имамо

$$\begin{aligned} x^{2m} - x^{2m-1} + \dots - x + 1 &\leq \frac{1}{x-1}, \\ \frac{x^{2m+1} + 1}{x+1} &\leq \frac{1}{x-1}, \\ (x^{2m+1} + 1)(x-1) &\leq x+1, \\ x^{2m+2} - x^{2m+1} &\leq 2, \\ x^{2m+1} &\leq \frac{2}{x-1}. \end{aligned}$$

Како је а) рационална функција  $\frac{2}{x-1}$  опадајућа на интервалу  $(1, \infty)$ , б) полиномна функција  $x^{2m+1}$  је растућа на интервалу  $(1, \infty)$ , с)  $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2}{x-1} = +\infty > 1 = 1^{2m+1}$ , д)  $\frac{2}{2-1} = 2 < 2^{2m+1}$ , постоји тачно једна тачка пресека, нека је то  $x = u_m$ , графика ових двеју функција на  $(1, 2)$ . Такође ови аргументи обезбеђују да, за  $q \in (1, u_m]$ , неједнакост  $P_{2m}(q) \leq \frac{1}{q-1}$  је тачна, а нетачна је за  $q \in (u_m, 2]$ . Како је  $\frac{2}{u_m-1} = u_m^{2m+1} < u_m^{2(m+1)+1}$ , и  $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2}{x-1} = +\infty > 1 = 1^{2(m+1)+1}$  закључујемо да је  $u_{m+1} \in (1, u_m)$ , па зато  $u_m$  опада. Остаје да се докаже да је  $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = 1$ . Нека је  $\epsilon$  реалан број такав да је  $1 > \epsilon > 0$ , тада можемо наћи довољно велико  $m_0$  тако да  $(1+\epsilon)^{2m+1} > \frac{2}{\epsilon}$  за све  $m \geq m_0$ . Користећи а), б), с) закључујемо да је  $u_m \in (1, 1+\epsilon)$ . Ако пустимо  $\epsilon$  да тежи 0, тада добијамо да  $u_m$  тежи 1. Како је  $u_1 \approx 1.54369$  и  $v_0 = -\sqrt{2}$ , јасно је да је  $|v_0| < |u_1|$ . У ствари ми смо показали да је  $t \in (1, u_{m+1})$  ако и само ако је

$P_{2m+2}(t) < \frac{1}{t-1}$  ако и само ако је  $t^{2m+3} < \frac{2}{t-1}$ , за  $t \in (1, 2)$ . Ако узмемо  $t = |v_m| = \sqrt[2m+1]{2}$  тада је очигледно да је  $t^{2m+1} = 2$ , зато последња неједнакост даје

$$(3.1) \quad t^2 < \frac{1}{t-1},$$

што остаје да се докаже. Како је функција  $\frac{1}{x-1}$  опадајућа на интервалу  $(1, 2)$ , полиномна функција  $x^2$  је растућа на интервалу  $(1, 2)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} = +\infty > 1 = 1^2$ ,  $\frac{1}{2-1} = 1 < 2^{2m+1}$  постоји тачно једна тачка пресека, за  $t_0 \approx 1.46557$ , графика ових двеју функција на  $(1, 2)$ . Можемо такође закључити да је за свако  $t < t_0$  неједнакост (3.1) испуњена. Како је  $|v_m| \leq \sqrt[3]{2} \approx 1.25992$ , за све  $m = 1, 2, \dots$  и последње тврђење ове леме је доказано.  $\square$

ДОКАЗ ТЕОРЕМЕ 11. Како низ  $u_m$  опада и тежи ка 1 за свако  $q \in (1, 2)$ , можемо одредити  $m$  тако да је

$$(3.2) \quad u_{m+1} < q \leq u_m.$$

Као што се тврди у леми 3.8 важи неједнакост  $P_{2m}(q) \leq \frac{1}{q-1}$ . Како је спектар  $A(q)$  дискрестан, коришћењем леме 3.5, мора бити тачна неједнакост  $P_{2m}(q_2) \leq \frac{1}{|q_2|-1}$ . Коришћењем леме 3.7, закључујемо да је  $q_2 \in [v_m, -1)$  стога

$$(3.3) \quad |q_2| \leq |v_m|.$$

Користећи последње тврђење леме 3.8 имамо

$$(3.4) \quad |v_m| < u_{m+1}.$$

Повезујући (3.3), (3.4), (3.2) најзад добијамо  $|q_2| < q$ .  $\square$

#### 4. ДОКАЗ ТЕОРЕМЕ 12

Наредна лема, иако није неопходна у доказу теореме 12, приказује главну идеју на којој се заснива доказ ове теореме.

ЛЕМА 3.9. *Ако за број  $q$  важи  $1 < q < \sqrt{2}$  и ако је спектар  $A(q)$  дискрестан, тада су сви позитивни реални коњулати броја  $q$  не већи од  $\sqrt{2}$ .*

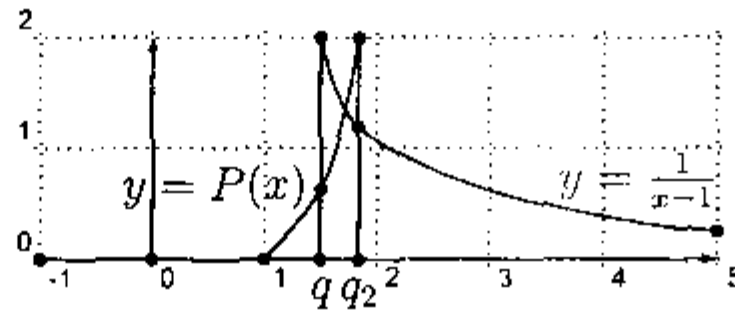
ДОКАЗ. Нека је  $q_2$  позитивни реални коњулат броја  $q$ . Ако је  $|q_2| \leq 1$ , тада је очигледно да је  $|q_2| < \sqrt{2}$ . Нека је  $|q_2| > 1$ , и узмимо да је  $p$  једнако  $q + 1$ . Неједнакост  $\frac{1}{|q|-1} > |q+1|$  даје  $2 > q^2$  па је тачна за све  $q$ , који задовољавају  $1 < q < \sqrt{2}$ . Ако је спектар  $A(q)$  дискрестан тада, коришћењем леме 3.5 је,  $\frac{1}{|q_2|-1} \geq |\sigma(p)| = |q_2 + 1|$ . Одавде добијамо да је  $1 < q_2 \leq \sqrt{2}$  аналогно са претходном неједнакошћу.  $\square$



Овај доказ приказује главну идеју на којој се заснива и доказ теореме 12. Ако постоји неки  $\pm 1$  полином  $P(x)$  и  $\alpha > q$  такв да је  $P(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ , и полином  $P(x)$  је растући на  $(q, \infty)$  можемо закључити да је  $q_2 \leq \alpha$ . Ако је могуће конструисати полином  $P(x)$  чији корен  $\alpha > q$  је близак броју  $q$  колико желимо, тада  $q_2$  тежи ка  $q$ . Најзад закључујемо да је  $q_2 \leq q$ . Алгоритам Тро1 нам даје конструкцију таквог полинома. Нека је  $P_n(x)$  полином степена  $n$ , са коефицијентима  $1, -1$  и са водећим коефицијентом  $1$ .

**ДЕФИНИЦИЈА 13.** Дефинисаћемо рекурзивно фамилију  $S$  полинома на следећи начин: 1)  $1 \in S$ , 2) ако је  $P(x) \in S$  онда је  $xP(x) - 1 \in S$  и  $xP(x) + 1 \in S$ .

Очигледно је да је  $S = \{P_n(x)\}$ .



Слика 2. Један растући полином  $P(x) \in S$  чији график пресеца график функције  $y = \frac{1}{x-1}$  у тачки  $x = \alpha > q$ . Ако је  $q_2 > \alpha$  коњугат броја  $q$ , тада спектар  $A(q)$  није дискретаан зато што је  $|P(q_2)| > \frac{1}{q_2-1}$ , на основу леме 3.5.

**ДЕФИНИЦИЈА 14.** Дефинисаћемо рекурзивно фамилију  $T$  полинома на следећи начин: 1)  $x - 2 \in T$ , ако је  $Q(x) \in T$  онда је 2)  $xQ(x) \in T$  и 3)  $xQ(x) + 2x - 2 \in T$ .

**ЛЕМА 3.10.** Реалан број  $\alpha \in (1, 2]$  је решење једначине  $P_n(x) = \frac{1}{x-1}$  ако и само ако постоји полином  $Q \in T$  такв да је  $Q(\alpha) = 0$ .

**ДОКАЗ.** Како је једначина  $P_n(x) = \frac{1}{x-1}$  еквивалентна једначини  $P_n(x)(x-1) - 1 = 0$  за  $x \in (1, 2]$ , треба да докажемо да је  $P_n(x)(x-1) - 1 \in T$  за све  $P_n(x) \in S$ . Искористићемо математичку индукцију по  $n$ . За  $n = 0$ , пошто је  $P_n(x) = 1$ , следи да је  $1(x-1) - 1 = x - 2 \in T$ . Претпоставимо да је  $P_k(x)(x-1) - 1 \in T$  за  $k = n$ . Испитајмо случај  $k = n + 1$ . Ако је  $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - 1$ , тада је  $(xP_n(x) - 1)(x-1) - 1 = x(P_n(x)(x-1) - 1) \in T$  на основу индуктивне хипотезе и дефиниције фамилије  $T$ . Ако је  $P_{n+1}(x) = xP_n(x) + 1$ , тада је  $(xP_n(x) + 1)(x-1) - 1 = xP_n(x)(x-1) + x - 2 = x(P_n(x)(x-1) - 1) + 2x - 2 \in T$  користећи индуктивну хипотезу и дефиницију фамилије  $T$ .  $\square$

ЗАПАЖАЊЕ 2. Није тешко видети да је

$$T = \{x^n - 2x^{k_1} + 2x^{k_2} - \dots + 2x^{k_{m-1}} - 2x^{k_m}\}$$

за све природне бројеве  $n > k_1 > k_2 > \dots > k_{m-1} > k_m \geq 0$ .

ЛЕМА 3.11. За све полиноме  $Q(x) \in T$  највећа реална нула је  $\alpha$  полинома  $Q(x)$  је на сегменту  $(1, 2]$ .

ДОКАЗ. Довољно је доказати следеће: за све полиномс  $Q(x) \in T$  важи следеће  $Q(1) = -1$ ,  $Q(2) \geq 0$ ; за  $x > 2$  функција  $Q(x)$  је позитивна и растућа. Доказаћемо то индукцијом по  $n$ , степену полинома  $Q(x)$ . За  $n = 1$  имамо да је  $Q(x) = x - 2$ , па је тврђење тачно. Претпоставимо да је  $Q(1) = -1$ ,  $Q(2) \geq 0$  и функција  $Q(x)$  је позитивна и растућа на  $(2, \infty)$  за све  $Q(x)$  степена  $k = n$ . Како је производ (збир) двеју позитивних, растућих функција такође позитивна, растућа функција, закључујемо да је тврђење тачно за  $xQ(x)$  и  $xQ(x) + 2x - 2$ . За  $x = 1$  очигледно је да полиноми  $xQ(x)$  и  $xQ(x) + 2x - 2$  имају вредност  $-1$ , јер смо претпоставили да је  $Q(1) = -1$ .  $\square$

ЗАПАЖАЊЕ 3. Постоје полиноми фамилије  $T$  који имају више од једне нуле на сегменту  $(1, 2]$ . Такав је на пример  $x^{15} - 2x^{14} + 2x^{10} - 2$  чије нуле су приближно: 1,134505, 1,218523, 1,816964.

ЛЕМА 3.12. Нека је полином  $P_n(x)$  из фамилије  $S$ . Реални број  $\alpha \in (1, 2]$  је решење једначине  $P_n(x) = \frac{-1}{x-1}$  ако и само ако постоји полином  $Q \in T$  такав да је  $Q(\alpha) + 2 = 0$ .

ДОКАЗ. Ако помножимо једначину  $P_n(x) = \frac{-1}{x-1}$  са  $x-1$  добијамо  $P_n(x)(x-1) + 1 = 0$  за  $x \in (1, 2]$ . Захваљујући томе што је доказано у лему 3.10 да је полином  $Q(x) = P_n(x)(x-1) - 1 \in T$  за све  $P_n(x) \in S$ , тврђење непосредно следи.  $\square$

Претпоставићемо да имамо функцију GRZ (the Greatest Real Zero) која одређује највећу реалну нулу полинома из фамилије  $T$ . (Можемо користити, на пример, Њутнову методу полазећи од тачке 2.) Размотримо алгоритам на слици 3.

Можемо испитати како овај алгоритам ради на следећем примеру.

ПРИМЕР 3.1. Нека је  $q$  једнак  $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618034$ . Починемо са  $Q = x - 2$  и  $GRZ(Q(x)) = 2$ . Како је  $q^2 - 2 = q - 1 > 0$  прва "while" петља се неће извршити те ће зато  $Q$  остати  $x - 2$ . Како је  $q^3 - 2q^2 + 2q - 2 \approx 0,236 > 0$  и  $q^4 - 2q^3 + 2q - 2 \approx -0,382 < 0$  друга "while" петља даје  $k = 3$  и  $Q = x^4 - 2x^3 + 2x - 2$ . Ту се завршава "repeat-until" петља.

Како је  $q^5 - 2q^4 + 2q^2 - 2 \approx 0,618 > 0$  прва "while" петља неће изменити  $Q = x^4 - 2x^3 + 2x - 2$ . Друга "while" петља ће израчунати  $q^6 - 2q^5 + 2q^3 - 2q^2 + 2q - 2 \approx 0,236 > 0$ ,  $q^7 - 2q^6 + 2q^4 - 2q^3 + 2q - 2 = -0,382 < 0$ : па зато други пролаз кроз "repeat-until" петљу даје

```

Tpol(q, epsilon)
  Q(x) := x - 2;
  repeat
    while qQ(q) + 2q - 2 ≤ 0 do
      Q(x) := xQ(x) + 2x - 2;
    end do
    difference := |GRZ(Q(x)) - q|
    if difference ≥ epsilon then
      k := 2;
      while qkQ(q) + 2q - 2 ≥ 0 do
        k := k + 1;
      end do
      Q(x) := xkQ(x) + 2x - 2;
    end if
    difference := |GRZ(Q(x)) - q|
  until difference < epsilon
  RETURN(Q(x));
end;

```

СЛИКА 3. Одређивање полинома  $Q(x) \in T$  чија највећа реална нула је  $q \in (1, 2]$ .

$Q = x^7 - 2x^6 + 2x^4 - 2x^3 + 2x - 2$ ,  $GRZ(Q(x)) \approx 1,645 > q$ . Следећи пролаз ће дати  $Q = x^{10} - 2x^9 + 2x^7 - 2x^6 + 2x^4 - 2x^3 + 2x - 2$  уз  $GRZ(Q(x)) \approx 1,625 > q$  и тако даље.

Следећа лема обезбеђује да ће се прва "while" петља извршавати само коначан број пута.

ЛЕМА 3.13. Дефинисаћемо низ полинома  $Q_m(x)$  рекурзивно:

$$Q_0(x) = Q(x), \quad Q_{m+1}(x) = xQ_m(x) + 2x - 2.$$

Ако  $-2 < Q(q) < 0$ , тада постоји  $m$  такво да је  $Q_m(q) \geq 0$ .

ДОКАЗ. Можемо доказати индукцијом да је  $Q_m(x) = x^m(Q_0(x) + 2) - 2$  зато што  $Q_1(x) = xQ_0(x) + 2x - 2 = x(Q_0(x) + 2) - 2$  и  $Q_{m+1}(x) = x(x^m(Q_0(x) + 2) - 2) + 2x - 2 = x^{m+1}(Q_0(x) + 2) - 2x + 2x - 2 = x^{m+1}(Q_0(x) + 2) - 2$ . Како је низ  $q^m$  растући и неограничен, и  $Q_0(q) + 2 > 0$ , закључујемо да је  $\lim_{m \rightarrow \infty} Q_m(q) = +\infty$ .  $\square$

После прве "while" петље  $qQ(q) + 2q - 2$  мора бити позитивно, док је  $Q(q)$  и даље негативно. Због тога за  $k \geq 2$  довољно велико

$$(4.1) \quad q^k Q(q) + 2q - 2$$

ће бити негативно. Зато и друга "while" петља ће такође бити извршена само коначан број пута. За ово  $k$ , знамо из алгоритма да



је

$$(4.2) \quad q^{k-1}Q(q) + 2q - 2 > 0,$$

што повлачи да је  $q^k Q(q) > -2q^2 + 2q$ . Одредимо доњу границу израза у (4.1). Користећи претходну неједнакост имамо

$$\begin{aligned} q^k Q(q) + 2q - 2 &> -2q^2 + 2q + 2q - 2 \\ &= 2q(2 - q) - 2 \\ &> -2. \end{aligned}$$

Закључујемо сада да су сви услови претходне леме испуњени, па ће зато наредна "repeat-until" петља бити извршена у коначно много корака.

Сада можемо увести следећу дефиницију. Означимо са  $Q_0(x) = x - 2$  и сваки пролаз кроз "repeat-until" петљу алгоритма даје следећи члан низа  $Q_n$ . Коришћењем претходне леме добијамо

$$(4.3) \quad Q_{n+1}(x) = x^k(x^m(Q_n(x) + 2) - 2) + 2x - 2 > 0$$

где, као и у леми,  $m \geq 0$  је број пролазака кроз прву "while" петљу и  $k \geq 2$  је број пролазака кроз другу "while" петљу. Такође ћемо означавати са  $\alpha_n = \text{GRZ}(Q_n(x))$ . Како је  $Q_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{m+k}Q_n(\alpha_n) + 2\alpha_n^{m+k} - 2\alpha_n^k + 2\alpha_n - 2 = 2\alpha_n^k(\alpha_n^m - 1) + 2\alpha_n - 2 > 0$  и  $Q_n(q) < 0$  имамо  $q < \alpha_{n+1} < \alpha_n$ .

**ЗАПАЖАЊЕ 4.** У претходном примеру, можемо приметити да се  $Q(q)$  периодично мења, зато је  $Q_n(x) = x^{3n+1} - 2x^{3n} + 2(x - 1)(x^{3(n-1)} + x^{3(n-2)} + \dots + 1)$ .

**ПРИМЕР 3.2.** Користећи алгоритам *Tpol* за  $q = 1.94$  и  $\epsilon = 0.000007$  можемо израчунати полином  $P(x) = x^{20} - 2x^{19} + 2x^{14} - 2x^{12} + 2x^{11} - 2x^{10} + 2x^9 - 2x^8 + 2x^7 - 2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 2x - 2$  за који је  $\text{GRZ}(P(x)) = 1.9400064$ .

**ЛЕМА 3.14.** За  $n = 1, 2, \dots$ , полиноми  $Q_n(x)$  су растуће и конкавне функције на сегменту  $(q, +\infty]$  за које важи  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q'_n(q) = +\infty$ .

**ДОКАЗ.** Можемо закључити из алгоритма, да се друга "while" петља мора извршити. Видећемо да можемо претпоставити да прва "while" петља није извршена. Доказаћемо индукцијом да је  $Q'_n(q) \geq n + 1$  и  $Q''_n(q) \geq 0$ . За  $Q_0(x) = x - 2$  имамо  $Q'_0(q) = 1 = q^0$ ,  $Q''_0(q) = 0 \geq 0$ . Како је  $Q'_{n+1}(x) = kx^{k-1}Q_n(x) + x^k Q'_n(x) + 2$  и

$q^{k-1}Q_n(q) > -2q + 2 > 0$ , што следи из (4.2),

$$\begin{aligned} Q'_{n+1}(q) &= kq^{k-1}Q_n(q) + q^k Q'_n(q) + 2 \\ &> k(-2q + 2) + q^k(n+1) + 2 \\ &= q^k - 2kq + 2k + nq^k + 2 \\ &\geq nq^k + 2 \\ &\geq n + 2, \end{aligned}$$

прво тврђење је потврђено. Користимо да је  $q^k - 2kq + 2k \geq 0$ . Да бисмо доказали ово потребна нам је функција  $f_1(x) = x^k - 2kx + 2k$ . Наћи ћемо њен минимум и показати да је он позитиван. Како је  $f'_1(x) = kx^{k-1} - 2k$  можемо наћи  $f'_1(x) = 0$  за  $x_m = \sqrt[k-1]{2}$ . Остаје да се докаже да је  $f_1(x_m) > 0$ .

$$\begin{aligned} f_1(x_m) &> 0 \Leftrightarrow \\ 2^{\frac{1}{k-1}} - 2k^{\frac{1}{k-1}} + 2k &> 0 \Leftrightarrow \\ k &> (k-1)^{\frac{1}{k-1}} \Leftrightarrow \\ \frac{k}{k-1} &> \sqrt[k-1]{2} \Leftrightarrow \\ \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} &> 2. \end{aligned}$$

Последња неједнакост је тачна за  $k \geq 2$ , зато што је добро познато да је низ на левој страни растући и да тежи ка  $e$ . Како је  $Q''_{n+1}(x) = k(k-1)x^{k-2}Q_n(x) + 2kx^{k-1}Q'_n(x) + x^k Q''_n(x)$  и  $q^{k-2}Q_n(q) > -2 + \frac{2}{q}$ , што следи из (4.2),

$$\begin{aligned} Q''_{n+1}(q) &= k(k-1)q^{k-2}Q_n(q) + 2kq^{k-1}Q'_n(q) + q^k Q''_n(q) \\ &> k(k-1)\left(-2 + \frac{2}{q}\right) + 2kq^{k-1} \\ &> k(k-1)\left(-2 + \frac{2}{q}\right) + kq^k \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Последња неједнакост остаје да буде доказана. Она је еквивалентна са

$$\begin{aligned} kq^k &> k(k-1)\left(2 - \frac{2}{q}\right) \Leftrightarrow \\ q^{k+1} &> (k-1)(2q-2) \Leftrightarrow \\ \frac{1}{k-1} &> \frac{2}{q^k} - \frac{2}{q^{k+1}}. \end{aligned}$$

Да бисмо доказали последњу неједнакост потребна нам је функција  $f_2(x) = \frac{2}{x^k} - \frac{2}{x^{k+1}}$ . Наћи ћемо њен максимум и показати да је он мањи од  $\frac{1}{k-1}$ . Како је  $f'_2(x) = -\frac{2k}{x^{k+1}} + \frac{2(k+1)}{x^{k+2}}$ , видимо да је  $f'_2(x) = 0$

for  $x_M = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}$ . Остаје да се докаже да је  $\frac{1}{k-1} > f_2(x_M)$ . Ово је еквивалентно са

$$\begin{aligned} \frac{1}{k-1} &> \frac{2}{x_M^k} - \frac{2}{x_M^{k+1}} \Leftrightarrow \\ \frac{x_M^{k+1}}{k-1} &> 2(x_M - 1) \Leftrightarrow \\ x_M^k x_M &> 2(x_M - 1)(k-1) \Leftrightarrow \\ (1 + \frac{1}{k})^k (1 + \frac{1}{k}) &> 2(1 + \frac{1}{k} - 1)(k-1) \Leftrightarrow \\ (1 + \frac{1}{k})^k (1 + \frac{1}{k}) &> 2(1 - \frac{1}{k}). \end{aligned}$$

Последња неједнакост је тачна за  $k \geq 2$ , зато што је добро познато да је низ  $(1 + \frac{1}{k})^k$  растући и да тежи ка  $e$ . Закључујемо да је друго тврђење тачно.

Ако је прва "while" петља извршена  $m > 0$  пута уведемо ознаку  $Q_{n,m}(x) = x^m(Q_n(x) + 2) - 2$ , ћенсе  $Q'_{n,m}(x) = mx^{m-1}(Q_n(x) + 2) + x^m Q'_n(x)$ . За  $x = q$  добијамо  $Q'_{n,m}(q) > q^m Q'_n(q)$ , зато што ће бити доказано у наредној лемида је  $Q_n(q) + 2 > 0$ . Како је  $Q''_{n,m}(x) = m(m-1)x^{m-2}(Q_n(x) + 2) + 2mx^{m-1}Q'_n(x) + x^m Q''_n(x)$ , за  $x = q$  добијамо  $Q''_{n,m}(q) > 0$ . Зато, управо изложени индуктивни доказ остаје да важи и у случају  $m > 0$ .  $\square$

ЛЕМА 3.15. За  $n = 0, 1, 2, \dots$ , имамо  $-2 < Q_n(q) < 0$ .

ДОКАЗ. Очигледно је из алгоритма да је  $Q_n(q) < 0$ . Доказаћемо да је  $-2 < Q_n(q)$  индукцијом. За  $Q_0(x) = x - 2$  тврђење важи. Из алгоритма имамо  $q^{m+1}(Q_n(q) + 2) - 2 > 0$ , тако да добијамо  $Q_{n,m}(q) = q^m(Q_n(q) + 2) - 2 > \frac{2}{q} - 2 > -2$ . Како је  $q^{k-1}Q_{n,m}(q) + 2q - 2 \geq 0$  имамо  $Q_{n+1}(q) + 2 = q^k Q_{n,m}(q) + 2q \geq q^k Q_{n,m}(q) + 2q^2 - 2q \geq 0$ .  $\square$

Прва последица последњих двеју лема је да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = q$ . Користећи лему 3.14 можемо тврдити да је график функције  $Q_n(x)$  на сегменту  $(q, +\infty]$  је изнад њене тангенте у тачки  $x = q$ . Ова тангента је  $y = Q_n(q) + Q'_n(q)(x - q)$ . Нека је

$$\beta_n = q - \frac{Q_n(q)}{Q'_n(q)}$$

нула одговарајуће линеарне функције. Како је низ  $Q_n(q)$  ограничен и низ  $Q'_n(q)$  расте ка  $+\infty$ , закључујемо да низ  $\beta_n$  тежи ка  $q$ . Очигледно је да је  $q < \alpha_n < \beta_n$ , користећи лему 3.14. Коначно користећи ово закључујемо да  $\alpha_n$  тежи ка  $q$  такође.

ДОКАЗ ТЕОРЕМЕ 12. Нека је  $q_2 > q$  коњугат алгебарског целог броја  $q$ . Користењем алгоритма Tr01 за  $q = q$  и  $\text{epsilon} = \frac{q_2 - q}{2}$  добијамо  $Q_n(x)$  тако да је  $-2 < Q_n(q) < 0$  и  $\text{GRZ}(Q_n(x)) = \alpha_n <$

$q_2$ . Како је  $Q_n(x) \in T$  постоји полином  $P_{n-1}(x) \in S$  такав да је  $P_{n-1}(x)(x-1) - 1 = Q_n(x)$ . Зато за  $x \in (1, 2]$  закључујемо да је  $-2 < Q_n(x) < 0$  ако и само ако  $\frac{-1}{x-1} < P_{n-1}(x) < \frac{1}{x-1}$ . Због тога коришћењем леме 3.15 имамо  $\frac{-1}{q-1} < P_{n-1}(q) < \frac{1}{q-1}$ . Како је  $\alpha_n < q_2$ , коришћењем леме 3.14, добијамо  $P_{n-1}(q_2) > \frac{1}{q_2-1}$ . Коначно, коришћењем леме 3.5, закључујемо да спектар  $A(q)$  не може бити дискретан.  $\square$

#### Отворена питања и коментари

- (1) Можемо ли уопштити алгоритам 1 за случај када је  $q$  Салемов број или је  $|q_2| = 1$ ?
- (2) Можемо ли искористити алгоритам 1 да докажемо хипотезу да сваки број  $q$  за који важи да је спектар  $A(q)$  дискретан мора бити Перонов?
- (3) Можемо ли искористити алгоритам 1 да докажемо да је за свако  $q_n$ , за које је доказано у [42] да је спектар  $A(q_n)$  дискретан,  $\Lambda(q_n)$  није дискретан, посебно у случају када коњулати броја  $q_n$ , који су већи од 1 по модулу, нису реални?
- (4) Најважније отворено питање у овој области је хипотеза да је спектар  $\Lambda(q)$  дискретан ако и само ако је  $q$  Писоов број. Алгоритам 1 омогућава нам да проверимо да ли број  $q$  има дискретан спектар или не, и он ће се зауставити у оба случаја. Зато он може да се користи за нумеричко проверавање хипотезе (или за евентуално налажење контра примера).

## ГЛАВА 4

# ПРОСТОРНА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА СПЕКТРА

## 1. МАТРИЧНО ОЗНАЧАВАЊЕ

У целокупном овом поглављу користићемо ознаке које ћемо навести на самом почетку. Нека је  $P_n(x) = x^n - b_{n-1}x^{n-1} - b_{n-2}x^{n-2} - \dots - b_0$  минимални полином броја  $q$  степена  $n$ . Нека  $q$  има коњугате  $q = q_1, q_2, \dots, q_n$ . Ако је  $p \in \Lambda^S(q)$ , тада постоји неки полином  $P(x)$  са коефицијентима из скупа  $S$  такав да је  $p = P(q)$ . Након дељења полинома  $P(x)$  минималним полиномом  $P_n(x)$  броја  $q$ , добијамо остатак  $R(x)$  који је јединствен полином степена не већег од  $n-1$ , са целим коефицијентима који задовољава  $p = R(q) = a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_0$ . Тиме сваки елемент спектра идентификујемо са уређеном  $n$ -торком бројева  $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)$ , коју ћемо често називати и итерација.

Поставља се питање како можемо одредити уређену  $n$ -торку следбеника  $qr + s$  елемента спектра  $p$ . Нека је  $R'(q) = a'_{n-1}q^{n-1} + a'_{n-2}q^{n-2} + \dots + a'_0$  јединствен полином степена  $\leq n-1$  такав да  $R'(q) = pq + s$ . Тада можемо израчунати  $a'_i$  користећи  $a_i$ :

$$\begin{aligned} pq + s &= (a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_0)q + s \\ &= a_{n-1}q^n + a_{n-2}q^{n-1} + \dots + a_0q + s \\ &= a_{n-1}(b_{n-1}q^{n-1} + b_{n-2}q^{n-2} + \dots + b_0) + a_{n-2}q^{n-1} + \\ &\quad + \dots + a_0q + s \\ &= (a_{n-1}b_{n-1} + a_{n-2})q^{n-1} + (a_{n-1}b_{n-2} + a_{n-3})q^{n-2} + \dots + \\ &\quad + (a_{n-1}b_1 + a_0)q + a_{n-1}b_0 + s \\ &= a'_{n-1}q^{n-1} + a'_{n-2}q^{n-2} + \dots + a'_0. \end{aligned}$$

Погодно је ову једнакост записати користећи матричну нотацију:

$$\begin{bmatrix} a'_{n-1} \\ a'_{n-2} \\ \vdots \\ a'_1 \\ a'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$$



Матрица

$$\text{compr}(P_n) = \begin{bmatrix} b_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

је позната у литератури као пријатељска матрица полинома  $P_n(x)$ . Добро је познато да је  $P_n(x)$  њен карактеристични полином ([1] Теорема 4.4.14). Стога су сопствене вредности пријатељске матрице полинома  $q = q_1, q_2, \dots, q_n$ . За њене сопствене векторе важи следећа

**ЛЕМА 4.1.** *Сопствени вектори  $v_i$  пријатељске матрице полинома  $\text{compr}(P_n)$  који одговарају сопственим вредностима  $q_i$  имају координате које су једнаке коефицијентима полинома  $\frac{P_n(x)}{x - q_i}$ .*

**ДОКАЗ.** Користећи Вијетова правила за полином  $P_n(x)$ ,  $\frac{P_n(x)}{x - q_i}$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} b_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ b_{n-3} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\sum_{j \neq i} q_j \\ \sum_{i \neq j_1 \neq j_2 \neq i} q_{j_1} q_{j_2} \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} q_1 q_2 \cdots q_{i-1} q_{i+1} \cdots q_n \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n q_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\sum_{j_1 \neq j_2} q_{j_1} q_{j_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ (-1)^{n-2} \sum_{j=1}^n q_1 q_2 \cdots q_{j-1} q_{j+1} \cdots q_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ (-1)^{n-1} q_1 q_2 \cdots q_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \\ & \begin{bmatrix} 1 \\ -\sum_{j \neq i} q_j \\ \sum_{i \neq j_1 \neq j_2 \neq i} q_{j_1} q_{j_2} \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} q_1 q_2 \cdots q_{i-1} q_{i+1} \cdots q_n \end{bmatrix} = \\ & = q_i \begin{bmatrix} 1 \\ -\sum_{j \neq i} q_j \\ \sum_{i \neq j_1 \neq j_2 \neq i} q_{j_1} q_{j_2} \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} q_1 q_2 \cdots q_{i-1} q_{i+1} \cdots q_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

**ЛЕМА 4.2.** *Сопствени вектор  $v_i$  матрице  $\text{compr}(P_n)$  који одговара сопственој вредности  $q_i$  је ортогоналан на вектор  $(q_j^{n-1}, q_j^{n-2}, \dots, 1)^T$  за  $i \neq j$ .*

ДОКАЗ. Користећи претходну лему вектор  $v_i$  има координате које су једнаке коефицијентима полинома  $\frac{P_n(x)}{x-q_i}$ . Зато је скаларни производ вектора  $v_i$  и  $(q_j^{n-1}, q_j^{n-2}, \dots, 1)^T$  је једнак  $\frac{P_n(q_j)}{x-q_i}$  па зато он мора бити нула.  $\square$

ЛЕМА 4.3. Нека је  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  skup сопствених вектора матрице  $\text{compr}(P_n)$ . Тада је skup сопствених вектора  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  линеарно независан.

ДОКАЗ. Нека сопствени вектор  $v_i$  одговара сопственој вредности  $q_i$ . Како је  $P_n(x)$  минимални полином броја  $q_i$  он је несводљив у прстену полинома  $Q[x]$ . Сваки несводљив полином у пољу карактеристике 0, какво је  $\mathbb{Q}$ , је сепарабилан (видети [30] королар 1.6.3), стога су нуле полинома  $P_n(x)$   $q_1, q_2, \dots, q_n$  међусобно различите. То је довољан услов (видети [34] теорема 5.7) да су вектори  $v_1, v_2, \dots, v_n$  линеарно независни.  $\square$

Закључујемо да вектори  $v_1, v_2, \dots, v_n$  чине базу векторског простора. Шта се дешава ако представимо неки вектор са целобројним координатама у овој бази?

ЛЕМА 4.4. Нека је  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  skup сопствених вектора матрице  $\text{compr}(P_n)$ . Ако се било који вектор  $M$  са целобројним координатама растави у бази сопствених вектора тада ниједна компонента не може бити једнака нули.

ДОКАЗ. Нека је  $M = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$  растављање вектора  $M$  у бази  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Претпоставимо супротно да је, рецимо,  $\alpha_1 = 0$ , што не умањује општост. Користећи лему 4.1 закључујемо да следећи полином

$$0 \frac{P_n(x)}{x-q_1} + \alpha_2 \frac{P_n(x)}{x-q_2} + \dots + \alpha_n \frac{P_n(x)}{x-q_n}$$

мора имати целобројне коефицијенте. Тада је, међутим, вредност овог полинома једнака нули за аргумент  $x = q_1$ , а степен овог полинома је не већи од  $n-1$ . Ово је у контрадикцији са претпоставком да је  $P_n(x)$  минимални полином бројева  $q_1, q_2, \dots, q_n$  степена  $n$ .  $\square$

## 2. ДИСКРЕТНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ

Дискретни динамички систем је изузетно користан алат за моделовање у широкој класи дисциплина. Ево дефиниције таквог система.

ДЕФИНИЦИЈА 15. Дискретни линеарни динамички систем је низ вектора  $x^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , често називаних стања, који је дефинисан иницијалним вектором  $x^{(0)}$  и правилом

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + t^{(k)}, k = 0, 1, \dots,$$

где је матрица  $A$  фиксирана квадратна матрица, названа матрица транзиције система, а вектори  $t^{(k)}$  припадају коначном скупу вектора  $T$ .

Из претходне дефиниције можемо израчунавати:  $x^{(1)} = Ax^{(0)} + t^{(0)}$ ,

$$x^{(2)} = Ax^{(1)} + t^{(1)} = A \cdot (Ax^{(0)} + t^{(0)}) + t^{(1)} = A^2x^{(0)} + At^{(0)} + t^{(1)},$$

и најзад

$$(2.1) \quad x^{(k)} = A^k x^{(0)} + A^{k-1}t^{(0)} + \dots + At^{(k-2)} + t^{(k-1)}.$$

ДЕФИНИЦИЈА 16. Спектрални радијус  $\rho(A)$  матрице  $A$  са сопственим вредностима  $q_1, q_2, \dots, q_n$  је следећи број

$$\rho(A) = \max\{|q_1|, |q_2|, \dots, |q_n|\}.$$

Ако је  $q_1 = \rho(A)$  и  $q_1$  је једина вредност са том особином, тада је  $q_1$  доминантна сопствена вредност матрице  $A$ . Ако је  $|q_1| > |q_2|$  а све остале сопствене вредности су по модулу мање од  $|q_2|$ , онда се  $q_2$  назива субдоминантна сопствена вредност матрице  $A$ . Одговарајући сопствени вектори се називају доминантни сопствени вектор матрице  $A$  односно субдоминантни сопствени вектор матрице  $A$ .

Представићемо векторе  $x^{(0)}, t^{(k)}$  у бази сопствених вектора. Дакле, нека је

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x^{(0)} &= c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n, \\ t^{(k)} &= c_1^{(k)} v_1 + c_2^{(k)} v_2 + \dots + c_n^{(k)} v_n. \end{aligned}$$

Како је

$$\begin{aligned} Ax^{(0)} &= A(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) \\ &= c_1 A(v_1) + c_2 A(v_2) + \dots + c_n A(v_n) \\ &= c_1 q_1 v_1 + c_2 q_2 v_2 + \dots + c_n q_n v_n. \end{aligned}$$

Ако применимо  $A$  узастопно  $m$  пута на вектор  $x^{(0)}$  имаћемо

$$A^m x^{(0)} = c_1 q_1^m v_1 + c_2 q_2^m v_2 + \dots + c_n q_n^m v_n.$$

На сличан начин је

$$\begin{aligned} At^{(k)} &= A(c_1^{(k)} v_1 + c_2^{(k)} v_2 + \dots + c_n^{(k)} v_n) \\ &= c_1^{(k)} A(v_1) + c_2^{(k)} A(v_2) + \dots + c_n^{(k)} A(v_n) \\ &= c_1^{(k)} q_1 v_1 + c_2^{(k)} q_2 v_2 + \dots + c_n^{(k)} q_n v_n. \end{aligned}$$

Ако применимо  $A$  узастопно  $m$  пута на вектор  $t^{(k)}$  имаћемо

$$A^m t^{(k)} = c_1^{(k)} q_1^m v_1 + c_2^{(k)} q_2^m v_2 + \dots + c_n^{(k)} q_n^m v_n.$$



Ако све ово применимо на (2.1) добићемо

$$\begin{aligned}
 x^{(k)} &= c_1 q_1^k v_1 + c_2 q_2^k v_2 + \cdots + c_n q_n^k v_n + \\
 &\quad + c_1^{(0)} q_1^{k-1} v_1 + c_2^{(0)} q_2^{k-1} v_2 + \cdots + c_n^{(0)} q_n^{k-1} v_n + \cdots + \\
 &\quad + c_1^{(k-2)} q_1 v_1 + c_2^{(k-2)} q_2 v_2 + \cdots + c_n^{(k-2)} q_n v_n + \\
 &\quad + c_1^{(k-1)} v_1 + c_2^{(k-1)} v_2 + \cdots + c_n^{(k-1)} v_n \\
 &= (c_1 q_1^k + c_1^{(0)} q_1^{k-1} + \cdots + c_1^{(k-2)} q_1 + c_1^{(k-1)}) v_1 \\
 &\quad + (c_2 q_2^k + c_2^{(0)} q_2^{k-1} + \cdots + c_2^{(k-2)} q_2 + c_2^{(k-1)}) v_2 + \cdots + \\
 &\quad + (c_n q_n^k + c_n^{(0)} q_n^{k-1} + \cdots + c_n^{(k-2)} q_n + c_n^{(k-1)}) v_n.
 \end{aligned}$$

Ако уведемо ознаку

$$(2.3) \quad P_i^{(k)}(q_i) = c_i q_i^k + c_i^{(0)} q_i^{k-1} + \cdots + c_i^{(k-2)} q_i + c_i^{(k-1)}$$

коначно добијамо да је

$$(2.4) \quad x^{(k)} = P_1^{(k)}(q_1) v_1 + P_2^{(k)}(q_2) v_2 + \cdots + P_n^{(k)}(q_n) v_n.$$

При томе је  $P_i^{(k)}(q_i)$  полином  $k$ -тог степена израчунат за аргумент  $x = q_i$ . Користиће нам још и следеће:

**ЗАПАЖАЊЕ 5.** *Како су вектори  $t^{(k)}$  из коначног скупа  $T$  из (2.2) следи да су коефицијенти  $c_i^{(k)}$  такође из коначног скупа. Одавде закључујемо да постоји граница  $h$  од које није већа висина ни једног полинома  $P_i^{(k)}(x)$ .*

Поред тога биће нам важно и следеће:

**ЗАПАЖАЊЕ 6.** *Ако посматрамо једнакост (2.3) можемо закључити да је  $P_i^{(k+1)}(q_i) = q_i P_i^{(k)}(q_i) + c_i^{(k)}$ .*

### 3. ДИСКРЕТНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ И СПЕКТРИ

Уколико треба изучити спектар  $\Lambda^S(q)$ , где је  $q$  алгебарски цео број, нас ће превасходно интересовати дискретни динамички систем, чија је матрица пријатељска матрица минималног полинома броја  $q$ , док су вектори  $x^{(0)} = t^{(k)} = [0, 0, \dots, 0, s]^T = s[0, 0, \dots, 0, 1]^T$  при чему је  $s \in S$ . Ако је

$$[0, 0, \dots, 0, 1]^T = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n,$$

онда је

$$x^{(0)} = s(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n),$$

$$(3.1) \quad t^{(k)} = s^{(k)}(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n).$$

Ако применимо  $A$  узастопно  $m$  пута на вектор  $x^{(0)}$  имаћемо

$$A^m x^{(0)} = s(c_1 q_1^m v_1 + c_2 q_2^m v_2 + \cdots + c_n q_n^m v_n).$$

Ако применимо  $A$  узастопно  $m$  пута на вектор  $t^{(k)}$  имаћемо

$$A^m t^{(k)} = s^{(k)}(c_1 q_1^m v_1 + c_2 q_2^m v_2 + \dots + c_n q_n^m v_n).$$

Из (3.1) закључујемо да у формули (2.3) треба заменити  $c_i$  са  $sc_i$  односно  $c_i^{(k)}$  са  $s^{(k)}c_i$  па зато постају

$$(3.2) \quad P_i^{(k)}(q_i) = c_i(s q_i^k + s^{(0)} q_i^{k-1} + \dots + s^{(k-2)} q_i + s^{(k-1)})$$

коначно ако уведемо ознаку

$$Q^{(k)}(x) = s x^k + s^{(0)} x^{k-1} + \dots + s^{(k-2)} x + s^{(k-1)}$$

добивамо следеће

$$(3.3) \quad x^{(k)} = Q^{(k)}(q_1) c_1 v_1 + Q^{(k)}(q_2) c_2 v_2 + \dots + Q^{(k)}(q_n) c_n v_n.$$

при чему су коефицијенти полинома  $Q^{(k)}(x)$  из скупа  $S$ .

**ЗАПАЖАЊЕ 7.** Како вектор  $[0, 0, \dots, 0, 1]^T$  има целобројне координате, на основу леме 4.4 закључујемо да међу бројевима  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ни један није једнак нули.

Докажимо следећу лему.

**ЛЕМА 4.5.** Нека су бројеви  $q_1, q_2$  такви да је  $|q_1| > 1, |q_2| > 1$ . Претпоставимо да је  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(k)}(q_2) = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(k)}(q_1) = \infty$ . За  $|q_1| > |q_2|$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q^{(k)}(q_2)}{Q^{(k)}(q_1)}$$

је једнак нули, док за  $|q_1| < |q_2|$  је овај лимес бесконачан.

**ДОКАЗ.**

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q^{(k)}(q_2)}{Q^{(k)}(q_1)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s q_2^k + s^{(0)} q_2^{k-1} + \dots + s^{(k-2)} q_2 + s^{(k-1)}}{s q_1^k + s^{(0)} q_1^{k-1} + \dots + s^{(k-2)} q_1 + s^{(k-1)}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q_2^k (s + s^{(0)} \frac{1}{q_2} + \dots + s^{(k-2)} \frac{1}{q_2^{k-1}} + s^{(k-1)} \frac{1}{q_2^k})}{q_1^k (s + s^{(0)} \frac{1}{q_1} + \dots + s^{(k-2)} \frac{1}{q_1^{k-1}} + s^{(k-1)} \frac{1}{q_1^k})} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{q_2}{q_1} \right)^k \cdot \frac{s + s^{(0)} \frac{1}{q_2} + \dots + s^{(k-2)} \frac{1}{q_2^{k-1}} + s^{(k-1)} \frac{1}{q_2^k}}{s + s^{(0)} \frac{1}{q_1} + \dots + s^{(k-2)} \frac{1}{q_1^{k-1}} + s^{(k-1)} \frac{1}{q_1^k}}. \end{aligned}$$

Није тешко показати да први чинилац,  $(\frac{q_2}{q_1})^k$ , тежи нули односно  $\infty$  зависно од тога да ли је  $|q_1| > |q_2|$  или  $|q_1| < |q_2|$  а да је други чинилац ограничен, одакле следи тврђење леме.  $\square$

**ТЕОРЕМА 13.** Нека је  $v_1, v_2, \dots, v_n$  база сопствених вектора који одговарају сопственим вредностима  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , за које, без умањења општости можемо претпоставити, да су јединични вектори. Нека је  $q_1$  доминантна, а  $q_2$  субдоминантна сопствена вредност. Нека је вектор  $x^{(k)}$  представљен у бази сопствених вектора

као у (3.3). Уколико је  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(k)}(q_1) = \infty$  тада низ

$$\frac{\|x^{(k+1)}\|}{\|x^{(k)}\|} \rightarrow |q_1|.$$

Уколико је низ  $Q^{(k)}(q_1)$  ограничен а  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(k)}(q_2) = \infty$  онда је

$$\frac{\|x^{(k+1)}\|}{\|x^{(k)}\|} \rightarrow |q_2|.$$

ДОКАЗ. Искористићемо (3.3) тако да имамо

$$\frac{\|x^{(k+1)}\|}{\|x^{(k)}\|} = \frac{\|Q^{(k+1)}(q_1)c_1v_1 + Q^{(k+1)}(q_2)c_2v_2 + \dots + Q^{(k+1)}(q_n)c_nv_n\|}{\|Q^{(k)}(q_1)c_1v_1 + Q^{(k)}(q_2)c_2v_2 + \dots + Q^{(k)}(q_n)c_nv_n\|}.$$

Ако је  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(k)}(q_1) = \infty$  онда имамо

$$\frac{\|x^{(k+1)}\|}{\|x^{(k)}\|} = \frac{|Q^{(k+1)}(q_1)c_1| \|v_1 + \frac{Q^{(k+1)}(q_2)c_2}{Q^{(k+1)}(q_1)c_1}v_2 + \dots + \frac{Q^{(k+1)}(q_n)c_n}{Q^{(k+1)}(q_1)c_1}v_n\|}{|Q^{(k)}(q_1)c_1| \|v_1 + \frac{Q^{(k)}(q_2)c_2}{Q^{(k)}(q_1)c_1}v_2 + \dots + \frac{Q^{(k)}(q_n)c_n}{Q^{(k)}(q_1)c_1}v_n\|}.$$

Сада можемо искористити претходну лему да закључимо да

$$\frac{Q^{(k)}(q_2)}{Q^{(k)}(q_1)}, \dots, \frac{Q^{(k)}(q_n)}{Q^{(k)}(q_1)}$$

теже нули кад  $k \rightarrow \infty$ . Поред тога је

$$Q^{(k+1)}(q_1) = q_1 Q^{(k)}(q_1) + s^{(k)}.$$

Стога мора бити

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)}\|}{\|x^{(k)}\|} = |q_1|.$$

Уколико је низ  $Q^{(k)}(q_1)$  ограничен а  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(k)}(q_2) = \infty$ , онда имамо

$$\frac{\|x^{(k+1)}\|}{\|x^{(k)}\|} = \frac{|Q^{(k+1)}(q_2)c_2| \left\| \frac{Q^{(k+1)}(q_1)c_1}{Q^{(k+1)}(q_2)c_2}v_1 + v_2 + \dots + \frac{Q^{(k+1)}(q_n)c_n}{Q^{(k+1)}(q_2)c_2}v_n \right\|}{|Q^{(k)}(q_2)c_2| \left\| \frac{Q^{(k)}(q_1)c_1}{Q^{(k)}(q_2)c_2}v_1 + v_2 + \dots + \frac{Q^{(k)}(q_n)c_n}{Q^{(k)}(q_2)c_2}v_n \right\|},$$

и мора бити

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q^{(k)}(q_1)}{Q^{(k)}(q_2)} = 0.$$

Сада можемо искористити претходну лему да закључимо да

$$\frac{Q^{(k)}(q_3)}{Q^{(k)}(q_2)}, \dots, \frac{Q^{(k)}(q_n)}{Q^{(k)}(q_2)}$$

теже нули кад  $k \rightarrow \infty$ . Поред тога је

$$Q^{(k+1)}(q_2) = q_2 Q^{(k)}(q_2) + s^{(k)}.$$

Стога имамо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)}\|}{\|x^{(k)}\|} = |q_2|.$$

□

ТЕОРЕМА 14. Нека је  $v_1, v_2, \dots, v_n$  база сопствених вектора који одговарају сопственим вредностима  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , за које, без умањења општости можемо претпоставити, да су јединични вектори. Нека је  $v_1$  доминантни а  $v_2$  субдоминантни сопствени вектор. Нека је вектор  $x^{(k)}$  представљен у бази сопствених вектора као у (3.3). Уколико је  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(k)}(q_1) = \infty$  тада низ

$$\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \rightarrow \pm v_1.$$

Уколико је низ  $Q^{(k)}(q_1)$  ограничен а  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(k)}(q_2) = \infty$  онда је

$$\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \rightarrow \pm v_2.$$

ДОКАЗ. Искористићемо (3.3) тако да имамо

$$\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} = \frac{Q^{(k)}(q_1)c_1v_1 + Q^{(k)}(q_2)c_2v_2 + \dots + Q^{(k)}(q_n)c_nv_n}{\|Q^{(k)}(q_1)c_1v_1 + Q^{(k)}(q_2)c_2v_2 + \dots + Q^{(k)}(q_n)c_nv_n\|}.$$

Ако је  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(k)}(q_1) = \infty$  онда имамо

$$\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} = \frac{Q^{(k)}(q_1)c_1(v_1 + \frac{Q^{(k)}(q_2)c_2}{Q^{(k)}(q_1)c_1}v_2 + \dots + \frac{Q^{(k)}(q_n)c_n}{Q^{(k)}(q_1)c_1}v_n)}{Q^{(k)}(q_1)c_1\|v_1 + \frac{Q^{(k)}(q_2)c_2}{Q^{(k)}(q_1)c_1}v_2 + \dots + \frac{Q^{(k)}(q_n)c_n}{Q^{(k)}(q_1)c_1}v_n\|}.$$

Сада можемо искористити претходну лему да закључимо да

$$\frac{Q^{(k)}(q_2)}{Q^{(k)}(q_1)}, \dots, \frac{Q^{(k)}(q_n)}{Q^{(k)}(q_1)}$$

теже нули. Стога

$$\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \rightarrow \pm v_1.$$

Уколико је низ  $Q^{(k)}(q_1)$  ограничен а  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(k)}(q_2) = \infty$ , онда имамо

$$\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} = \frac{Q^{(k)}(q_2)c_2(\frac{Q^{(k)}(q_1)c_1}{Q^{(k)}(q_2)c_2}v_1 + v_2 + \dots + \frac{Q^{(k)}(q_n)c_n}{Q^{(k)}(q_2)c_2}v_n)}{Q^{(k)}(q_2)c_2\|\frac{Q^{(k)}(q_1)c_1}{Q^{(k)}(q_2)c_2}v_1 + v_2 + \dots + \frac{Q^{(k)}(q_n)c_n}{Q^{(k)}(q_2)c_2}v_n\|},$$

и мора бити

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q^{(k)}(q_1)}{Q^{(k)}(q_2)} = 0.$$

Сада можемо искористити претходну лему да закључимо да

$$\frac{Q^{(k)}(q_3)}{Q^{(k)}(q_2)}, \dots, \frac{Q^{(k)}(q_n)}{Q^{(k)}(q_2)}$$

теже нули. Стога

$$\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \rightarrow \pm v_2.$$

□

ПРИМЕР 4.1. Нека је број  $q \approx 1,8019$  корен полинома  $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ . И остали корени су реални:  $q_2 \approx -1,24698$ ,  $q_3 \approx 0,44504$ . Нека је скуп  $S = \{-1, 1\}$ . У табели 1 наведен је део спектра који се добија помоћу алгоритма 1. Можемо приметити да се коефицијенти  $a_i$  постепено удаљују од нуле. Шта више однос  $\frac{a'_1}{a_1}$  се приближава  $-1,24698$ , колико износи субдоминантни корен  $q_2$ . То је у складу са претходном теоремом. Заиста, на сваком кораку алгоритма бирамо  $s$  тако да

$$R(q) = a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_1q + a_0$$

буде близак нули. То значи да је вектор  $v = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)^T$  близак вектору ортогоналном на вектор  $(q^{n-1}, q^{n-2}, \dots, q, 1)^T$ . На основу леме 4.2 знамо да је овај вектор ортогоналан на сопствене векторе који одговарају осталим сопственим вредностима. Зато, ако вектор  $v$  запишемо у бази сопствених вектора, тада компонента дуж сопственог вектора који одговара сопственој вредности  $q$  мора бити блиска нули. Другим речима, на сваком кораку алгоритма онемогућавамо кретање дуж сопственог вектора који одговара  $q$  али не спутавамо кретање по осталим сопственим векторима. На основу претходне теореме вектор  $\frac{v}{\|v\|}$  тежи ка субдоминантном сопственом вектору  $v_2$ . То можемо лако проверити. На основу леме 4.1 знамо да су координате вектора  $v_2$  коефицијенти полинома  $\frac{P(x)}{x-q_2} = x^2 - 2,24698x + 0,80194$ . Лако је утврдити да је вектор  $(1; -2,24698; 0,80194)$  приближно колинеаран са векторима у табели 1. Наиме у последње две колоне израчунавани су количници:  $\frac{a_1}{a_2}$  који очито тежи  $-2,24698$  и  $\frac{a_0}{a_2}$  који тежи  $0,80194$ . То је и разлог зашто је однос  $\frac{a_{k+1}}{a_k}$  близак сопственој вредности  $-1,24698$ . Истој вредности се приближава однос  $\frac{R^{k+1}(q_2)}{R^k(q_2)}$ . То је у складу са наредном лемом.

ЛЕМА 4.6. Користећи ознаке на почетку ове главе, нека имамо две узастопне итерације

$$(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)^T, (a'_{n-1}, a'_{n-2}, \dots, a'_0)^T.$$

Ако  $a_i \rightarrow \infty$ , тада вредност полинома  $R(x)x - R'(x) =$

$$(3.4) \quad (a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0)x - (a'_{n-1}x^{n-1} + a'_{n-2}x^{n-2} + \dots + a'_0),$$

за  $x = q_1, q_2, \dots, q_n$  тежи ка нули, где су  $x = q_1, q_2, \dots, q_n$  корени минималног полинома  $P_n(x)$  броја  $q = q_1$ .

ДОКАЗ. На почетку ове главе смо показали да је

$$\begin{aligned} pq + s &= (a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_0)q + s \\ &= a'_{n-1}q^{n-1} + a'_{n-2}q^{n-2} + \dots + a'_0. \end{aligned}$$



Одавде следи да је  $q$  корен следећег полинома степена  $n$ :

$$(3.5) \quad (a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0)x + s - (a'_{n-1}x^{n-1} + a'_{n-2}x^{n-2} + \dots + a'_0).$$

Како је  $n$  степен минималног полинома  $P_n(x)$  броја  $q$  последњи полином мора бити једнак полиному  $P_n(x)$  помноженом неким целим бројем а тај број мора бити баш  $a_{n-1}$ . Ако поделимо полиноме (3.4) и (3.5) са  $a_{n-1}$  закључујемо да се они разликују за  $\frac{s}{a_{n-1}}$ . Ако  $a_i \rightarrow \infty$  онда пошто је  $s$  ограничено, следи да низ полинома (3.4) равномерно конвергира минималном полиному  $P_n(x)$  броја  $q$  на неком диску који садржи све нуле тог полинома. Из равномерне конвергенције следи да вредности низа ових полинома за  $x = q_j$  теже  $P_n(q_j) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .  $\square$

**ЗАПАЖАЊЕ 8.** Видели смо у теорему 14 да  $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)^T$  тежи ка сопственом вектору  $v_1$  односно  $v_2$ . Такође смо видели да су координате вектора  $v_1$  односно  $v_2$  коефицијенти полинома  $\frac{P_n(x)}{x-q_1}$  односно  $\frac{P_n(x)}{x-q_2}$ . Зато су вредности ових полинома за  $x = q_1$  односно  $x = q_2$  различите од нуле. Из (3.4) следи да  $\frac{R'(q_1)}{R(q_1)}$  односно  $\frac{R'(q_2)}{R(q_2)}$  тежи ка  $q_1$  односно  $q_2$ .

Претходно запажање можемо проверити на примеру 4.1 и табели 1 у случају када је  $q_2$  реално. Случај када је  $q_2$  комплексан број наведен је у примеру 4.2 и табелама 2 и 3.

#### 4. КОМПЛЕКСНИ СЛУЧАЈ

Размотримо случај када су алгебарски коњулати неког алгебарског целог броја  $q_1$  комплексни бројеви.

**ЛЕМА 4.7.** Нека је  $\text{compr}(P_n)$  пријатељска матрица минималног полинома  $P_n(x)$  неког алгебарског целог броја  $q_1$ . Нека је  $v = [v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_0]^T$  сопствени вектор који одговара комплексној сопственој вредности  $q$  матрице  $\text{compr}(P_n)$ . Тада је и  $\bar{q}$  сопствена вредност матрице  $\text{compr}(P_n)$  којој одговара сопствени вектор  $V$  чије координате су једнаке (комплексним) коњулатима координата вектора  $v$  тј.  $V = [\bar{v}_{n-1}, \bar{v}_{n-2}, \dots, \bar{v}_0]^T$ .

**ДОКАЗ.** Познато је да је  $P_n(x)$  карактеристични полином пријатељске матрице  $\text{compr}(P_n)$  ([1] Теорема 4.4.14). Стога су  $q_1, q, \bar{q}$  корени карактеристичног полинома  $P_n(x)$ . Видели смо (лема 4.1) да су координате сопственог вектора  $v$  једнаке коефицијентима полинома  $\frac{P_n(x)}{x-q}$ . Зато мора бити

$$v_{n-1}x^{n-1} + v_{n-2}x^{n-2} + \dots + v_0 = \frac{P_n(x)}{x-q}.$$

ТАБЕЛА 1. Спектар који није дискретаан са реалном субдоминантном сопственом вредношћу

| a2    | a1    | a0    | R(q)  | R(q2)    | $\frac{R'(q_2)}{R(q_2)}$ | s | a1/a2   | a0/a2  |
|-------|-------|-------|-------|----------|--------------------------|---|---------|--------|
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0,000    |                          | 0 |         |        |
| 0     | 1     | -1    | 0,801 | -2,247   | -0,8019                  | - |         |        |
| 1     | -1    | -1    | 0,445 | 1,801    | 1,8019                   | - | -1,0000 | -1,000 |
| 0     | -1    | 2     | 0,198 | 3,247    | 1,5549                   | - |         |        |
| 1     | -2    | 1     | 0,643 | 5,048    | -1,4450                  | + | -2,0000 | 1,0000 |
| -1    | 3     | -2    | 0,158 | -7,295   | 1,1099                   | - | -3,0000 | 2,0000 |
| -2    | 4     | 0     | 0,713 | -8,097   | -1,1234                  | - | -2,0000 | 0,0000 |
| 2     | -4    | 1     | 0,286 | 9,097    | 1,3569                   | + | -2,0000 | 0,5000 |
| 2     | -5    | 3     | 0,484 | 12,344   | 1,3279                   | + | -2,5000 | 1,5000 |
| 3     | -7    | 3     | 0,127 | 16,393   | -1,1859                  | - | -2,3333 | 1,0000 |
| -4    | 9     | -2    | 1,229 | -19,442  | -1,1955                  | - | -2,2500 | 0,5000 |
| 5     | -10   | 3     | 1,215 | 23,244   | -1,2900                  | + | -2,0000 | 0,6000 |
| -5    | 13    | -6    | 1,190 | -29,985  | -1,2136                  | + | -2,6000 | 1,2000 |
| 8     | -16   | 4     | 1,144 | 36,391   | -1,2744                  | + | -2,0000 | 0,5000 |
| -8    | 20    | -9    | 1,062 | -46,379  | -1,2254                  | + | -2,5000 | 1,1257 |
| 12    | -25   | 7     | 0,915 | 56,834   | -1,2645                  | + | -2,0833 | 0,5837 |
| -13   | 31    | -13   | 0,649 | -71,870  | -1,2330                  | + | -2,3846 | 1,0000 |
| 18    | -39   | 12    | 0,170 | 88,621   | 1,2582                   | + | -2,1666 | 0,6666 |
| 21    | -48   | 19    | 0,693 | 111,509  | -1,2559                  | - | -2,2857 | 0,9047 |
| -27   | 61    | -22   | 0,249 | -140,049 | 1,2398                   | - | -2,2592 | 0,8148 |
| -34   | 76    | -26   | 0,549 | -173,639 | 1,2412                   | - | -2,2352 | 0,7647 |
| -42   | 94    | -33   | 0,009 | -215,524 | -1,2516                  | + | -2,2381 | 0,7857 |
| 52    | -117  | 43    | 1,016 | 269,754  | -1,2506                  | + | -2,2500 | 0,8269 |
| -65   | 147   | -53   | 0,831 | -337,378 | -1,2440                  | - | -2,2615 | 0,8153 |
| 82    | -183  | 64    | 0,497 | 419,703  | 1,2493                   | - | -2,2317 | 0,7804 |
| 101   | -228  | 83    | 0,103 | 524,362  | -1,2450                  | - | -2,2574 | 0,8217 |
| -127  | 285   | -100  | 1,185 | -652,868 | -1,2454                  | - | -2,2410 | 0,7874 |
| 158   | -354  | 126   | 1,136 | 813,114  | -1,2482                  | + | -2,2405 | 0,7974 |
| -196  | 442   | -159  | 1,048 | -1014,93 | -1,2459                  | + | -2,2551 | 0,8112 |
| 246   | -551  | 195   | 0,889 | 1264,605 | -1,2477                  | + | -2,2398 | 0,7926 |
| -305  | 687   | -247  | 0,602 | -1577,93 | -1,2463                  | + | -2,2524 | 0,8098 |
| 382   | -857  | 304   | 0,085 | 1966,655 | -1,2464                  | + | -2,2434 | 0,7958 |
| -475  | 1068  | -381  | 1,154 | -2451,37 | -1,2465                  | - | -2,2484 | 0,8021 |
| 593   | -1331 | 474   | 1,079 | 3055,820 | -1,2473                  | + | -2,2445 | 0,7993 |
| -738  | 1660  | -594  | 0,945 | -3811,54 | -1,2467                  | + | -2,2493 | 0,8048 |
| 922   | -2070 | 737   | 0,704 | 4751,919 | -1,2471                  | + | -2,2451 | 0,7993 |
| -1148 | 2581  | -923  | 0,268 | -5926,54 | 1,2468                   | + | -2,2482 | 0,8040 |
| -1433 | 3219  | -1147 | 0,515 | -7389,28 | 1,2468                   | + | -2,2463 | 0,8004 |
| -1786 | 4013  | -1432 | 0,070 | -9213,28 | -1,2470                  | - | -2,2469 | 0,8017 |
| 2227  | -5004 | 1787  | 1,127 | 11489,77 | -1,2470                  | - | -2,2469 | 0,8024 |
| -2777 | 6241  | -2228 | 1,031 | -14328,5 | -1,2469                  | + | -2,2473 | 0,8023 |

Нека је  $x$  реалан број. Коњугујмо обе стране претходне једнакости

$$\begin{aligned}\overline{v_{n-1}}x^{n-1} + \overline{v_{n-2}}x^{n-2} + \cdots + \overline{v_0} &= \overline{\left(\frac{P_n(x)}{x-q}\right)} \\ &= \frac{\overline{P_n(x)}}{\overline{x-q}} \\ &= \frac{P_n(x)}{x-\overline{q}},\end{aligned}$$

зато што полином  $P_n(x)$  има целобројне коефицијенте. На основу исте леме, из последње једнакости, закључујемо да сопственој вредности  $\overline{q}$  матрице  $\text{compr}(P_n)$  одговара сопствени вектор  $V = [\overline{v_{n-1}}, \overline{v_{n-2}}, \dots, \overline{v_0}]^T$ . За вектор  $V$  користићемо и ознаку  $\overline{v}$ .  $\square$

**ЛЕМА 4.8.** Нека је  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  скуп сопствених вектора матрице  $\text{compr}(P_n)$ . Нека вектор  $v_2$  одговара комплексној сопственој вредности  $q_2$ , а вектор  $v_3$  одговара коњуговано-комплексној сопственој вредности  $\overline{q_2}$ . Нека је  $M = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$  растављање вектора  $M$  са реалним координатама у бази  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Тада је  $\alpha_3 = \overline{\alpha_2}$ .

**ДОКАЗ.** Коњуговаћемо обе стране једнакости

$$M = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Из леме 4.1 следи да реалној сопственој вредности одговара сопствени вектор чије су све координате реалне. Како се комплексне сопствене вредности појављују у коњугованим паровима и њима одговарају сопствени вектори који су један другом коњуговани закључујемо да важи следећа скуповна једнакост

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}\}$$

и да је  $v_3 = \overline{v_2}$ . Зато је

$$\overline{M} = M = \overline{\alpha_1} \overline{v_1} + \overline{\alpha_2} \overline{v_2} + \cdots + \overline{\alpha_n} \overline{v_n}$$

растављање вектора  $M$  са реалним координатама поново у бази  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Како је растављање вектора у бази јединствено, мора бити  $\alpha_3 = \overline{\alpha_2}$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 15.** Нека је  $v_1, v_2, \dots, v_n$  база сопствених вектора који одговарају сопственим вредностима  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , за које, без умањења општости можемо претпоставити, да су јединични вектори. Нека је  $q_1$  доминантна сопствена вредност и нека  $q_2, q_3 = \overline{q_2}$  чине коњуговани пар сопствених вредности таквих да су све остале сопствене вредности по модулу мање од  $|q_2| < |q_1|$ . Нека је вектор  $x^{(k)}$  представљен у бази сопствених вектора као у (3.3). Уколико је низ  $Q^{(k)}(q_1)$  ограничен а  $\lim_{k \rightarrow \infty} |Q^{(k)}(q_2)| = \infty$  онда ако



низ вектори

$$\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|}$$

запишемо у бази сопствених вектора тада све компоненте теже нули изузев компоненти уз коњуговани пар сопствених вектора  $v_2, v_3$ .

ДОКАЗ. Уколико је низ  $Q^{(k)}(q_1)$  ограничен а  $\lim_{k \rightarrow \infty} |Q^{(k)}(q_2)| = \infty$  онда имамо да је  $|Q^{(k)}(q_2)| = |\overline{Q^{(k)}(q_2)}| = |Q^{(k)}(\overline{q_2})|$

$$\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} = \frac{|Q^{(k)}(q_2)c_2| \left( \frac{Q^{(k)}(q_1)c_1}{|Q^{(k)}(q_2)c_2|} v_1 + \frac{Q^{(k)}(q_2)c_2}{|Q^{(k)}(q_2)c_2|} v_2 + \dots + \frac{Q^{(k)}(q_n)c_n}{|Q^{(k)}(q_2)c_2|} v_n \right)}{|Q^{(k)}(q_2)c_2| \left\| \frac{Q^{(k)}(q_1)c_1}{|Q^{(k)}(q_2)c_2|} v_1 + \frac{Q^{(k)}(q_2)c_2}{|Q^{(k)}(q_2)c_2|} v_2 + \dots + \frac{Q^{(k)}(q_n)c_n}{|Q^{(k)}(q_2)c_2|} v_n \right\|},$$

и мора бити

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q^{(k)}(q_1)}{Q^{(k)}(q_2)} = 0.$$

Сада можемо искористити лему 4.5 да закључимо да

$$\frac{Q^{(k)}(q_4)}{Q^{(k)}(q_2)}, \dots, \frac{Q^{(k)}(q_n)}{Q^{(k)}(q_2)}$$

теже нули кад  $k \rightarrow \infty$ . Због тога је

$$\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \approx \frac{\frac{Q^{(k)}(q_2)c_2}{|Q^{(k)}(q_2)c_2|} v_2 + \frac{Q^{(k)}(\overline{q_2})\overline{c_2}}{|Q^{(k)}(q_2)c_2|} \overline{v_2}}{\left\| \frac{Q^{(k)}(q_2)c_2}{|Q^{(k)}(q_2)c_2|} v_2 + \frac{Q^{(k)}(\overline{q_2})\overline{c_2}}{|Q^{(k)}(q_2)c_2|} \overline{v_2} \right\|}.$$

□

Из последњег запажања следи да је, уколико је  $R(q)$  ограничено, однос  $\frac{R'(q_2)}{R(q_2)}$  тежи ка  $q_2$  и то важи било да је  $q_2$  реалан или комплексан број. У реалном случају, уколико спектар није дискрестан, однос  $\frac{a'_i}{a_i}$  конвергира такође ка  $q_2$ . Поставља се питање да ли и у комплексном случају, само на основу табеле итерација, може да се установи некаква конвергенција.

ЛЕМА 4.9. Нека су  $v = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)^T$ ,  $v' = (a'_{n-1}, a'_{n-2}, \dots, a'_0)^T$ ,  $v'' = (a''_{n-1}, a''_{n-2}, \dots, a''_0)^T$  три узастопне итерације у рачунању спектра броја  $q$  који није дискрестан. Нека  $q_2 = \alpha + \beta i$ , највећи по модулу коњугат броја  $q$ , није реалан број.  $R(q) = a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_1q + a_0$ . Уколико се при свакој итерацији  $s$  бира тако да  $R'(q) = qR(q) + s$  буде унутар основног сегмента тада важе следеће формуле

$$(4.1) \quad \frac{a''_i a_j - a_i a''_j}{2a'_i a_j - 2a_i a'_j} \rightarrow \alpha$$

$$(4.2) \quad \frac{2a'_i \alpha - a_i \alpha^2 - a''_i}{-a_i} \rightarrow \beta^2$$

ДОКАЗ. Важи следећа апроксимација:  $(a'_0 + b'_0 i, a'_1 + b'_1 i, \dots, a'_{n-1} + b'_{n-1} i) \approx (\alpha + \beta i)(a_0 + b_0 i, a_1 + b_1 i, \dots, a_{n-1} + b_{n-1} i)$ . Проблем је што су  $b$ -ови непознати, они се при итерацијама не појављују. Укључивањем три итерације и две координате  $i$ -ту и  $j$ -ту овај проблем се може превазићи. Како је  $(\alpha + \beta i)(a_j + b_j i) = \alpha a_j - \beta b_j + (\alpha b_j + \beta a_j)i$  закључујемо да је

$$(4.3) \quad a_j \alpha - b_j \beta = a'_j$$

$$(4.4) \quad a_j \beta + b_j \alpha = b'_j$$

$$(4.5) \quad a'_j \alpha - b'_j \beta = a''_j$$

$$(4.6) \quad a'_j \beta + b'_j \alpha = b''_j$$

Ако из прве једначине изразимо  $b_j$  и уврстимо га у другу једначину, па затим тако добијено  $b'_j$  уврстимо у трећу једначину добијамо:

$$a'_j \alpha - (a_j \beta + \frac{a_j \alpha - a'_j}{\beta} \alpha) \beta = a''_j.$$

Ако одавде изразимо  $\beta^2$  онда се лако добија (4.2). Ако у последњу формулу уместо  $j$  ставимо  $i$  закључујемо да важи

$$\frac{2a'_i \alpha - a_i \alpha^2 - a''_i}{-a_i} = \frac{2a'_j \alpha - a_j \alpha^2 - a''_j}{-a_j} (= \beta^2).$$

Ако помножимо обе стране са  $a_i a_j$  видимо да се потиру чланови уз  $\alpha^2$ . Када најзад изразимо одавде  $\alpha$  добијамо (4.1).  $\square$

Да ове формуле заиста важе, можемо се уверити на следећем примеру, у последњим колонама табеле 3.

ПРИМЕР 4.2. Нека је број  $q \approx 1,8105$  корен полинома  $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ . Остали корени су коњуговано комплексни:  $q_2 \approx 0,0947 + 1,2837i$ ,  $q_3 = \overline{q_2}$ . Нека је скуп  $S = \{-1, 1\}$ . У табели 2 наведен је део спектра који се добија помоћу алгорита 1. Можемо приметити да се коефицијенти  $a_i$  постепено удаљују од нуле. Однос  $\frac{a'_i}{a_i}$  у овом случају не конвергира. На сваком кораку алгорита бирамо  $s$  тако да  $R(q) = a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_1 q + a_0$  буде близак нули. Зато према последњем запажању однос  $\frac{R'(q_2)}{R(q_2)}$  тежи ка  $q_2$  што се види у последњој колони табеле 2. У табели 3 проверавамо формуле из претходне леме. Последња колона се рачуна по формули  $q_2 \approx \frac{a'_1 a_2 - a_1 a'_2}{2a'_1 a_2 - 2a_1 a'_2} + \sqrt{\frac{2a'_1 \alpha - a_1 \alpha^2 - a''_1}{-a_1}}$ .

## 5. ПОБОЉШАЊЕ АЛГОРИТМА

Захваљујући претходним двема теоремама можемо побољшати критеријум излаза из алгорита. У алгориту 2 претпоставља се да  $q$  има  $Nq2$  коњугата већих од један који формирају низ  $q2$ . Није неопходно на сваком кораку алгорита испитивати да ли је

ТАБЕЛА 2. Спектар који није дискретан са комплексним субдоминантним коњугатом

| a2     | a1     | a0     | R(q)   | R(q2)           | s | $\frac{R'(q_2)}{R(q_2)}$ |
|--------|--------|--------|--------|-----------------|---|--------------------------|
| 0      | 0      | 1      | 1,0    | 1,0000 + 0i     | 0 |                          |
| 0      | 1      | -1     | 0,8105 | -0,9053+1,2837i | - | 0,4616-1,80400i          |
| 1      | -1     | -1     | 0,4675 | -2,7338-1,0405i | - | 0,4142-1,16213i          |
| 1      | -3     | 2      | -0,153 | 0,0768-3,6080i  | - | 0,1006-1,56078i          |
| -1     | 0      | 4      | 0,7219 | 5,6390-0,24322i | + | -0,0822-1,27611i         |
| -2     | 6      | -4     | 0,3071 | -0,1536+7,2160i | - | 0,0976-1,42226i          |
| 2      | 0      | -7     | -0,443 | -10,278+0,4864i | - | -0,0023-1,27915i         |
| 4      | -11    | 7      | 0,1962 | -0,5981-13,148i | + | 0,0981-1,20784i          |
| -3     | -1     | 11     | -0,644 | 15,822-2,0134i  | + | 0,1569-1,29166i          |
| -7     | 17     | -8     | -0,167 | 5,0836+20,121i  | - | 0,1065-1,23703i          |
| 3      | 6      | -20    | 0,6973 | -24,348+8,4321i | - | 0,1314-1,29644i          |
| 12     | -26    | 8      | 0,2625 | -14,131-30,458i | + | 0,1072-1,25673i          |
| -2     | -16    | 35     | -0,524 | 36,762-21,026i  | + | 0,1152-1,29547i          |
| -20    | 39     | -5     | 0,0501 | 31,474+45,201i  | + | 0,1051-1,26884i          |
| -1     | 35     | -59    | 1,0907 | -54,045+44,687i | + | 0,1057-1,29283i          |
| 33     | -57    | -4     | 0,9747 | -63,487-65,146i | + | 0,1024-1,27587i          |
| 9      | -70    | 98     | 0,7648 | 76,617-87,672i  | + | 0,0890-1,27728i          |
| -52    | 80     | 26     | 0,3847 | 118,80+90,051i  | + | 0,0893-1,28779i          |
| -24    | 130    | -157   | -0,303 | -105,34+161,04i | + | 0,0918-1,27939i          |
| 82     | -109   | -71    | 0,4508 | -215,72-119,98i | - | 0,0982-1,28177i          |
| 55     | -235   | 245    | -0,183 | 132,59-288,30i  | - | 0,0960-1,28661i          |
| -125   | 135    | 166    | 0,6673 | 383,66+142,90i  | + | 0,0924-1,28459i          |
| -115   | 416    | -376   | 0,2083 | -148,10+506,06i | + | 0,0952-1,28556i          |
| 186    | -146   | -346   | -0,622 | -664,68-142,18i | - | 0,0932-1,28405i          |
| 226    | -718   | 559    | -0,127 | 120,56-866,75i  | - | 0,0945-1,28261i          |
| -266   | 107    | 677    | -1,231 | 1123,1+72,663i  | - | 0,0956-1,28368i          |
| -425   | 1209   | -797   | -1,22  | 14,114+1448,6i  | - | 0,0947-1,28305i          |
| 359    | 53     | -1274  | -1,225 | -1857,3+155,35i | + | 0,0942-1,28370i          |
| 771    | -1992  | 1078   | -1,218 | -374,39-2369,6i | + | 0,0946-1,28415i          |
| -450   | -464   | 2314   | -1,206 | 3007,6-705,10i  | + | 0,0950-1,28382i          |
| -1364  | 3214   | -1349  | -1,184 | 1191,1+3794,1i  | + | 0,0948-1,28350i          |
| 486    | 1379   | -4091  | -1,144 | -4756,9+1888,4i | + | 0,0945-1,28367i          |
| 2351   | -5063  | 1459   | -1,071 | -2873,9-5927,7i | - | 0,0946-1,28388i          |
| -361   | -3243  | 7054   | -0,939 | 7338,4-4250,9i  | + | 0,0948-1,28380i          |
| -3965  | 7776   | -1082  | -0,701 | 6153,3+9017,9i  | + | 0,0947-1,28367i          |
| -154   | 6848   | -11894 | -0,269 | -10992,+8753,6i | + | 0,0946-1,28370i          |
| 6540   | -11586 | -461   | 0,5120 | -12277,-13282,i | + | 0,0947-1,28370i          |
| 1494   | -13541 | 19619  | -0,072 | 15887,-17019,i  | + | 0,0947-1,28371i          |
| -10553 | 16631  | 4481   | -1,132 | 23353,+18783,i  | - | 0,0947-1,28372i          |
| -4475  | 25587  | -31658 | -1,049 | -21899,+31758,i | - | 0,0947-1,28372i          |
| 16637  | -22708 | -13424 | -0,900 | -42843,-25104,i | + | 0,0947-1,28375i          |
| 10566  | -46698 | 49912  | -0,630 | 28170,-57378,i  | + | 0,0947-1,28376i          |
| -25566 | 28780  | 31699  | -0,141 | 76328,+30727,i  | + | 0,0947-1,28374i          |

ТАБЕЛА 3. Спектар који није дискретан са комплексним субдоминантним коњугатом, провера формула (4.1) и (4.2)

| a2     | a1     | a0     | R(q)   | R(q2)           | s | q2              |
|--------|--------|--------|--------|-----------------|---|-----------------|
| 0      | 0      | 1      |        | 0,0000+0,00000i | 0 | +i              |
| 0      | 1      | -1     | 0,810  | -0,9053+1,2837i | - | 0,5000+1,32288  |
| 1      | -1     | -1     | 0,467  | -2,7338-1,0405i | - | 0,2500+1,19896i |
| 1      | -3     | 2      | -0,153 | 0,0768-3,6080i  | - | 0,0000+1,41421i |
| -1     | 0      | 4      | 0,721  | 5,6390-0,24322i | - | 0,0000+i        |
| -2     | 6      | -4     | 0,307  | -0,1536+7,2160i | - | 0,0833+1,35144i |
| 2      | 0      | -7     | -0,443 | -10,278+0,4864i | - | 0,0454+i        |
| 4      | -11    | 7      | 0,196  | -0,5981-13,148i | + | 0,1216+1,24610i |
| -3     | -1     | 11     | -0,644 | 15,822-2,0134i  | + | 0,1293+1,25965i |
| -7     | 17     | -8     | -0,167 | 5,0836+20,121i  | - | 0,1182+1,26448i |
| 3      | 6      | -20    | 0,697  | -24,348+8,4321i | - | 0,1200+1,26975i |
| 12     | -26    | 8      | 0,262  | -14,131-30,458i | - | 0,1065+1,27271i |
| -2     | -16    | 35     | -0,524 | 36,762-21,026i  | - | 0,1080+1,28419i |
| -20    | 39     | -5     | 0,050  | 31,474+45,201i  | + | 0,1112+1,28404i |
| -1     | 35     | -59    | 1,09   | -54,045+44,687i | + | 0,1115+1,27443i |
| 33     | -57    | -4     | 0,974  | -63,487-65,146i | + | 0,0901+1,27154i |
| 9      | -70    | 98     | 0,764  | 76,617-87,672i  | + | 0,0873+1,28449i |
| -52    | 80     | 26     | 0,384  | 118,80+90,051i  | + | 0,0921+1,28588i |
| -24    | 130    | -157   | -0,303 | -105,34+161,04i | + | 0,0938+1,28121i |
| 82     | -109   | -71    | 0,450  | -215,72-119,98i | - | 0,0962+1,28227i |
| 55     | -235   | 245    | -0,183 | 132,59-288,30i  | - | 0,0944+1,28562i |
| -125   | 135    | 166    | 0,667  | 383,66+142,90i  | + | 0,0940+1,28537i |
| -115   | 416    | -376   | 0,208  | -148,10+506,06i | + | 0,0944+1,28481i |
| 186    | -146   | -346   | -0,622 | -664,68-142,18i | - | 0,0941+1,28454i |
| 226    | -718   | 559    | -0,127 | 120,56-866,75i  | - | 0,0956+1,28303i |
| -266   | 107    | 677    | -1,23  | 1123,1+72,663i  | - | 0,0950+1,28235i |
| -425   | 1209   | -797   | -1,22  | 14,114+1448,6i  | - | 0,0936+1,28339i |
| 359    | 53     | -1274  | -1,22  | -1857,3+155,35i | + | 0,0944+1,28453i |
| 771    | -1992  | 1078   | -1,21  | -374,39-2369,6i | + | 0,0953+1,28405i |
| -450   | -464   | 2314   | -1,20  | 3007,6-705,10i  | - | 0,0950+1,28331i |
| -1364  | 3214   | -1349  | -1,18  | 1191,0+3794,1i  | - | 0,0944+1,28351i |
| 486    | 1379   | -4091  | -1,14  | -4756,9+1888,4i | - | 0,0945+1,28396i |
| 2351   | -5063  | 1459   | -1,07  | -2873,9-5927,7i | - | 0,0948+1,28389i |
| -361   | -3243  | 7054   | -0,939 | 7338,4-4250,9i  | + | 0,0948+1,28367i |
| -3965  | 7776   | -1082  | -0,701 | 6153,3+9017,9i  | + | 0,0947+1,28367i |
| -154   | 6848   | -11894 | -0,269 | -10992,+8753,6i | + | 0,0947+1,28371i |
| 6540   | -11586 | -461   | 0,512  | -12277,-13282,i | + | 0,0947+1,28371i |
| 1494   | -13541 | 19619  | -0,072 | 15887,-17019,i  | + | 0,0947+1,28370i |
| -10553 | 16631  | 4481   | -1,13  | 23353,+18783,i  | - | 0,0947+1,28370i |
| -4475  | 25587  | -31658 | -1,04  | -21899,+31758,i | - | 0,0947+1,28375i |
| 16637  | -22708 | -13424 | -0,900 | -42843,-25104,i | + | 0,0947+1,28376i |
| 10566  | -46698 | 49912  | -0,630 | 28170,-57378,i  | + | 0,0947+1,28375i |
| -25566 | 28780  | 31699  | -0,141 | 76328,+30727,i  | + | 0,0947+1,28374i |

АЛГОРИТАМ 3.

```

Spec(S,q,q2)
  alphaU:=-min(s:s in S)/(q-1);
  alphaL:=-max(s:s in S)/(q-1);
  sM:=max(|s|:s in S)
  L[0]:=S;
  for p in L[0] do
    f[p]:=p;
  end do
  d:=0;
  repeat
    L[d+1]:=L[d];
    for p in (L[d] minus L[d-1]), s in S do
      if q*p + s in [alphaL,alphaU] then do
        L[d+1]=L[d+1] union {q*p + s};
        f[q*p+s]=q2*f[p] + s;
        if |q2*f[p] + s|>sM/(|q2|-1) then
          RETURN("Not discrete")
        end do
      end if
    end do
    d:=d + 1;
  until L[d-1]=L[d];
  RETURN(L[d]);
end;

```

Слика 1. Одређивање спектра алгебарског целог броја  $q$  чији највећи по модулу коњугат  $q_2$  је изван јединичног диска.

$|qp + s| > \frac{sM}{|q|-1}$  по свим члановима низа  $q_2$ ,  $|q_2|>1$ , већ само по највећем, по апсолутној вредности, члану. Нека је то  $q_2$ . Како се на сваком кораку  $s^{(k)}$  одређује тако што се испитује да ли је  $q*p + s$  in  $[\alpha_L, \alpha_U]$  и како је  $Q^{(k+1)}(q) = q*p + s$  закључујемо да је низ  $Q^{(k)}(q)$  ограничен. Уколико је  $q_2$  реалан онда ако низ вектора

$$\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|}$$

запишемо у бази сопствених вектора тада компоненте дуж сопствених вектора који одговарају осталим коњугатима, теже нули. Уколико је  $q_2$  комплексан компоненте дуж сопствених вектора који одговарају осталим коњугатима, изузев  $\overline{q_2}$ , теже нули.



## ГЛАВА 5

### СПЕКТРИ СА ИНИЦИЈАЛНИМ ЕЛЕМЕНТИМА

#### 1. ДЕФИНИЦИЈЕ СПЕКТРА СА ИНИЦИЈАЛНИМ ЕЛЕМЕНТИМА

Због велике разноврсности спектра које изучавамо, добро је дати следећу општу дефиницију која представља уопштење дефиниције 10:

**Дефиниција 17.** *Нека је  $S$  коначан skup целих бројева,  $D$  коначан skup реалних бројева и нека је  $q$  реалан број. Спектар броја  $q$  са иницијалним елементима из skupa  $D$  у односу на skup  $S$  дефинише се као:*

$$\Lambda^S(q; D) = \{ \epsilon_0 + \epsilon_1 q + \dots + \epsilon_n q^n + dq^{n+1} : \epsilon_i \in S, d \in D \}.$$

Као посебне случајеве ове дефиниције уводимо следеће дефиниције:

- (1)  $\Lambda^m(q; D) = \Lambda^{\{-m, -m+1, \dots, m-1, m\}}(q; D)$
- (2)  $\Lambda(q; D) = \Lambda^{\{-1, 0, 1\}}(q; D)$
- (3)  $A(q; D) = \Lambda^{\{-1, 1\}}(q; D)$
- (4)  $Y^m(q; D) = \Lambda^{\{0, 1, \dots, m\}}(q; D)$
- (5)  $Y(q; D) = \Lambda^{\{0, 1\}}(q; D).$

Даље се намеће уопштење још једне дефиниције.

**Дефиниција 18.** *Дефинишимо:*

$$l^S(q; D) = \inf \{ |y| : y \in \Lambda^S(q; D), y \neq 0 \}.$$

Сада можемо обележавати:

- (1)  $l^m(q; D) = l^{\{-m, -m+1, \dots, m-1, m\}}(q; D)$
- (2)  $l(q; D) = l^{\{-1, 0, 1\}}(q; D)$
- (3)  $a(q; D) = l^{\{-1, 1\}}(q; D).$

Ова општа дефиниција представља уопштење дефиниције 10 зато што није тешко показати да је

$$\Lambda^S(q) = \Lambda^S(q; S).$$

У случају да је skup  $D = \{d\}$  једночлан уместо  $\Lambda^S(q; \{d\})$  пишемо  $\Lambda^S(q; d)$ , а аналогно се појављују ознаке  $\Lambda^m(q; d)$ ,  $\Lambda(q; d)$ ,  $A(q; d)$ ,  $Y^m(q; d)$ ,  $Y(q; d)$ . Такође уместо  $l^S(q; \{d\})$  писаћемо  $l^S(q; d)$ .

## 2. ИЗРАЧУНАВАЊЕ СПЕКТРА СА ИНИЦИЈАЛНИМ ЕЛЕМЕНТИМА

За израчунавање елемената спектра са иницијалним елементима можемо користити алгоритам који се незнатно разликује од алгоритма Борвеина и Хера представљеног на слици 1. Разлика је у трећем реду где као иницијални скуп уместо

$$L[0] := S;$$

треба да стоји

$$L[0] := D;.$$

## 3. ПИСООВИ БРОЈЕВИ И СПЕКТРИ СА ИНИЦИЈАЛНИМ ЕЛЕМЕНТОМ

Пример златног пресека поново нам може бити инспиративан.

**ЛЕМА 5.1.** *Количник два броја облика  $m\tau + n$  (при чему је делилац различит од нуле), где је  $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  златни пресек,  $m, n \in \mathbb{Z}$ , је број облика  $p\tau + s$  где су  $p, s \in \mathbb{Q}$ .*

**ДОКАЗ.** Показаћемо да за било које целе бројеве  $m_1, n_1, m_2, n_2$ , при чему бројеви  $m_2, n_2$  нису оба једнака нули, постоје рационални бројеви  $p, s$  такви да је

$$\frac{m_1\tau + n_1}{m_2\tau + n_2} = p\tau + s.$$

Множењем обеју страна бројем  $m_2\tau + n_2$  добија се

$$m_1\tau + n_1 = m_2p\tau^2 + (m_2s + n_2p)\tau + n_2s.$$

Сада можемо искористити да је  $\tau^2 = \tau + 1$ .

$$m_1\tau + n_1 = (m_2s + n_2p + m_2p)\tau + n_2s + m_2p.$$

Ова једначина се своди на линеарни систем:

$$\begin{aligned} m_2s + (n_2 + m_2)p &= m_1 \\ n_2s + m_2p &= n_1. \end{aligned}$$

Систем има јединствено решење уколико је детерминанта система  $m_2^2 - n_2^2 - m_2n_2$  различита од нуле. Претпоставимо супротно да је  $m_2^2 - n_2^2 - m_2n_2 = 0$ . Ако фиксирамо цео број  $n_2$  решавањем ове квадратне једначине можемо одредити  $m_2 = \frac{n_2 \pm \sqrt{5n_2^2}}{2}$  тј.  $m_2 = n_2 \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Ово је немогуће ако су бројеви  $m_2, n_2$  цели. Јединствено решење система су бројеви  $p, s$  који очигледно морају бити рационални јер су све детерминанте  $\Delta, \Delta_p, \Delta_s$  целобројне.  $\square$

У наредној теорему претпоставка је да је скуп  $D = \{d\}$  једночлан.

**ТЕОРЕМА 16.** Нека је број  $\tau$  исти као у претходној лемми. Спектар  $\Lambda^S(\tau; d)$  је дискретан ако и само ако је иницијални елемент облика  $d = p\tau + s$ ,  $p, s \in \mathbb{Q}$ .

**ДОКАЗ.**  $\Rightarrow$  смер. Ако је спектар дискретан тада мора да постоје цели бројеви  $k, l, \epsilon_i, \eta_j$  за које је

$$\epsilon_0 + \epsilon_1\tau + \dots + \epsilon_k\tau^k + d\tau^{k+1} = \eta_0 + \eta_1\tau + \dots + \eta_l\tau^l + d\tau^{l+1},$$

где су  $\epsilon_i \in S, \eta_j \in S, k \neq l$ . Одавде следи да је

$$d = \frac{\epsilon_0 + \epsilon_1\tau + \dots + \epsilon_k\tau^k - (\eta_0 + \eta_1\tau + \dots + \eta_l\tau^l)}{\tau^{l+1} - \tau^{k+1}}.$$

Познато је да се и бројилац и именилац тада могу написати у облику  $m\tau + n$  где су  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Користећи претходну лему добијамо да је  $d = p\tau + s, p, s \in \mathbb{Q}$ .

$\Leftarrow$  смер. Нека је иницијални елемент облика  $d = p\tau + s, p, s \in \mathbb{Q}$ . Нека су бројеви  $p = \frac{p_1}{p_2}, s = \frac{s_1}{s_2}, p_1, s_1 \in \mathbb{Z}, p_2, s_2 \in \mathbb{N}$ . Тада је произвољни елемент спектра облика

$$P(\tau) = \epsilon_0 + \epsilon_1\tau + \dots + \epsilon_n\tau^n + \left(\frac{p_1}{p_2}\tau + \frac{s_1}{s_2}\right)\tau^{n+1},$$

$\epsilon_i \in S$ . Нека је  $t = NZS(p_2, s_2)$  највећи заједнички садржалац за бројеве  $p_2, s_2$ . Тада полином  $P_1(x) = tP(x)$  има целобројне коефицијенте и висина му је

$$h = \max\left\{\max\{t|s| : s \in S\}, \frac{t|p_1|}{p_2}, \frac{t|s_1|}{s_2}\right\}.$$

Пошто висина  $h$  не зависи од тога који полином смо одабрали можемо применити теорему 8 на полином  $P_1(x)$ . Закључујемо да постоји константа  $c(\tau, h)$  таква да је или  $P_1(\tau) = 0$  или  $|P_1(\tau)| \geq c(\tau, h)$ . Одавде следи да је или  $P(\tau) = 0$  или  $|P(\tau)| \geq \frac{c(\tau, h)}{t}$ . Најзад из овога следи да је спектар  $\Lambda^S(\tau; \{d\})$  дискретан.  $\square$

Природно се намеће питање може ли се претходна теорема уопштити? Одговор је потврдан. Најпре важи уопштење претходне леме.

**ЛЕМА 5.2.** Нека је  $q$  Писоов број чији је минимални полином  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  где су  $a_i \in \mathbb{Z}$ . Количник два броја  $B(q) = b_{n-1}q^{n-1} + b_{n-2}q^{n-2} + \dots + b_1q + b_0, C(q) = c_{n-1}q^{n-1} + c_{n-2}q^{n-2} + \dots + c_1q + c_0$  (при чему је делилац  $C(q)$  различит од нуле), где су  $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ , је број облика  $d_{n-1}q^{n-1} + d_{n-2}q^{n-2} + \dots + d_1q + d_0$  где су  $d_i \in \mathbb{Q}$ .

**ДОКАЗ.** Нека су  $b_0, b_1, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}$  цели, при чему бројеви  $c_i$  нису сви једнаки нули. Показаћемо да постоје рационални бројеви  $d_i$  такви да је

$$\frac{B(q)}{C(q)} = d_{n-1}q^{n-1} + d_{n-2}q^{n-2} + \dots + d_1q + d_0.$$



Како је  $q$  Писоов број полином  $P(x)$  је несводљив у прстену  $\mathbb{Z}[x]$ , те је по Гаусовој лемми ([18] теорема 2.24) несводљив и у пољу  $\mathbb{Q}[x]$ . Зато су полиноми  $C(x) = c_{n-1}q^{n-1} + c_{n-2}q^{n-2} + \dots + c_1q + c_0$  и  $P(x)$  узајамно прости у пољу  $\mathbb{Q}[x]$  па стога ([18] теорема 2.15) морају да постоје полиноми  $V(x), W(x)$  са рационалним коефицијентима такви да је  $V(x)C(x) + W(x)P(x) = 1$ . Одавде следи да је  $V(q)C(q) = 1$ , односно  $V(q) = \frac{1}{C(q)}$ . Коначно следи да је  $\frac{B(q)}{C(q)} = B(q)V(q)$ .  $\square$

У наредној теорему претпоставка је да је скуп  $D = \{d\}$  једночлан.

**ТЕОРЕМА 17.** *Нека је  $q$  Писоов број чији је минимални полином  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  где су  $a_i \in \mathbb{Z}$ . Спектар  $\Lambda^S(q; d)$  је дискретан ако и само ако је иницијални елемент облика  $d = d_{n-1}q^{n-1} + d_{n-2}q^{n-2} + \dots + d_1q + d_0$ ,  $d_i \in \mathbb{Q}$ .*

**ДОКАЗ.**  $\Rightarrow$  смер. Ако је спектар дискретан тада мора да постоје цели бројеви  $k, l, \epsilon_i, \eta_j$

$$\epsilon_0 + \epsilon_1q + \dots + \epsilon_kq^k + dq^{k+1} = \eta_0 + \eta_1q + \dots + \eta_lq^l + dq^{l+1},$$

где су  $\epsilon_i \in S, \eta_j \in S, k \neq l$ . Одавде следи да је

$$d = \frac{\epsilon_0 + \epsilon_1q + \dots + \epsilon_kq^k - (\eta_0 + \eta_1q + \dots + \eta_lq^l)}{q^{l+1} - q^{k+1}}.$$

Дељењем одговарајућих полинома бројиоца односно имениоца са моничним полиномом  $P(x)$  добијају се остаци са целим коефицијентима степена  $\leq n$ . Зато се број  $d$  може написати као количник бројева  $B(q), C(q)$  који су наведени у претходној лемми. Користећи претходну лему добијамо да је  $d = d_{n-1}q^{n-1} + d_{n-2}q^{n-2} + \dots + d_1q + d_0$ ,  $d_i \in \mathbb{Q}$ .

$\Leftarrow$  смер. Нека је иницијални елемент облика  $d = d_{n-1}q^{n-1} + d_{n-2}q^{n-2} + \dots + d_1q + d_0$ ,  $d_i \in \mathbb{Q}$ . Нека су бројеви  $d_i = \frac{p_i}{r_i}$ ,  $p_i \in \mathbb{Z}, r_i \in \mathbb{N}$ . Тада је произвољни елемент спектра облика

$$P(q) = \epsilon_0 + \epsilon_1q + \dots + \epsilon_nq^n + (d_{n-1}q^{n-1} + d_{n-2}q^{n-2} + \dots + d_1q + d_0)q^{n+1}$$

где  $\epsilon_i \in S$ . Нека је  $t$  највећи заједнички садржалац за бројеве  $r_i$ . Тада полином  $P_1(x) = tP(x)$  има целобројне коефицијенте и висина му је

$$h = \max \left\{ \max \{t|s| : s \in S\}, \max \left\{ \frac{t|p_i|}{r_i} : i = 0, 1, \dots, n-1 \right\} \right\}.$$

Пошто висина  $h$  не зависи од тога који полином смо одабрали можемо применити теорему 8 на полином  $P_1(x)$ . Закључујемо да постоји константа  $c(q, h)$  таква да је или  $P_1(q) = 0$  или  $|P_1(q)| \geq c(q, h)$ . Одавде следи да је или  $P(q) = 0$  или  $|P(q)| \geq \frac{c(q, h)}{t}$ . Најзад из овога следи да је спектар  $\Lambda^S(q; d)$  дискретан.  $\square$

Интересантно је да постоји једна иницијална вредност за коју је спектар  $\Lambda(q; d)$  дискретан за свако  $q$ ! Ако  $q$  није Писоов број писам нашао ниједну другу иницијалну вредност за коју је овај спектар дискретан.

ЛЕМА 5.3. Спектар  $\Lambda(q; \frac{1}{q-1})$  је дискретан за свако  $q$  за које важи  $1 < q < 2$ .

ДОКАЗ. Како је  $q\frac{1}{q-1} - 1 = \frac{1}{q-1}$ ,  $q\frac{1}{q-1} > \frac{1}{q-1}$ ,  $q\frac{1}{q-1} + 1 > \frac{1}{q-1}$ , значи да је у сегменту  $[\frac{-1}{q-1}, \frac{1}{q-1}]$  свега један елемент спектра.  $\square$

Пошто је спектар  $A(q; \frac{1}{q-1}) \subset \Lambda(q; \frac{1}{q-1})$  јасно је да је и овај спектар дискретан за свако  $q$  за које важи  $1 < q < 2$ . За спектар  $A(q; d)$  постоји још иницијалних вредности  $d$  таквих да је  $A(q; d)$  дискретан за свако  $q$ .

ЛЕМА 5.4. Спектар  $A(q; \frac{1}{q+1})$  је дискретан за свако  $q$  за које важи  $\tau < q < 2$  где је  $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  златни пресек.

ДОКАЗ. Како је  $q\frac{1}{q+1} - 1 = \frac{-1}{q+1}$ ,  $q\frac{1}{q+1} + 1 = \frac{1}{q+1}$ ,  $q\frac{1}{q+1} + 1 > \frac{1}{q+1}$ ,  $q\frac{1}{q+1} - 1 < \frac{-1}{q+1}$  значи да су у сегменту  $[\frac{-1}{q+1}, \frac{1}{q+1}]$  свега два елемента спектра. Последње две неједнакости треба доказати. Пошто су оне очигледно једна другој еквивалентне, довољно је доказати да је

$$\frac{q}{q+1} + 1 > \frac{1}{q-1}.$$

Множењем обеју страна са  $(q-1)(q+1)$  добија се еквивалентна неједнакост

$$q(q-1) + q^2 - 1 > q + 1.$$

Када се ослободимо заграда и пребацимо све чланове на леву страну добијамо неједнакост

$$2(q^2 - q - 1) > 0$$

која је очигледно тачна.  $\square$

Заправо, за фиксирано  $q$  за које важи  $\tau < q < 2$ , можемо конструисати бесконачно дискретних спектра  $A(q; d)$ . Ако је  $f_-(x) = qx - 1$ , линеарна функција онда је  $f_-^{-1}(x) = \frac{x+1}{q}$  инверзна функција функције  $f_-(x)$ . Нека је

$$f_-^{-2}(x) = f_-^{-1}(f_-^{-1}(x)), f_-^{-3}(x) = f_-^{-1}(f_-^{-1}(f_-^{-1}(x))), \dots$$

Може се показати следећа

ЛЕМА 5.5. Низ  $f_-^{-1}(x), f_-^{-2}(x), \dots, f_-^{-k}(x)$  је растући.

ДОКАЗ. Довољно је показати да је  $x < f_-^{-1}(x)$ , за  $x < \frac{1}{q-1}$ . Заиста одавде следи да је  $xq - x < 1$  и коначно  $x < \frac{x+1}{q}$  што је и требало доказати.  $\square$

Ако је  $f_+(x) = qx + 1$  ова линеарна функција је очигледно растућа. У претходној лемми смо показали да је  $f_+(\frac{1}{q+1}) > \frac{1}{q-1}$ . Стога мора бити и  $f_+(f_-^k(\frac{1}{q+1})) > \frac{1}{q-1}$  за свако  $k$ . Овим смо показали да важи следећа

**ЛЕМА 5.6.** *Спектар  $A(q; f_-^k(\frac{1}{q+1}))$  је дискретан за свако  $q$  за које важи  $\tau < q < 2$  за свако  $k$ . И овде је  $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  златни пресек.*

Уколико је неки од  $f_-^k(\frac{1}{q+1}) = 1$  тада се лако показује да је и  $f_-^k(\frac{-1}{q+1}) = -1$ . Следи да је спектар  $A(q)$  дискретан. За  $k = 1$  добијамо једначину  $\frac{1}{q+1} = q - 1$  чије решење  $q = \sqrt{2}$  не испуњава услов  $\tau < q < 2$ . За  $k = 2$  добијамо следећу једначину  $\frac{1}{q+1} = q^2 - q - 1$ . Множењем обеју страна са  $q + 1$  добија се једначина  $q^3 - 2q - 2 = 0$ . Њено реално решење је приближно 1,769292 и оно није Писоов број. Ако наставимо даље добићемо корене једначина  $q^4 - 2q^2 - 2q - 2 = 0$ ,  $q^5 - 2q^3 - 2q^2 - 2q - 2 = 0$ . Ове бројеве је разматрао Зами у [42]. Он је показао да полином

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= (x+1)(x^n - x^{n-1} - \dots - x - 1) - 1 \\ &= x^{n+1} - 2(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) \end{aligned}$$

има реалан корен који је назвао  $r_{n+1}$ , да је  $1 < r_{n+1} < 2$ , да је  $r_{n+1}$  растући низ који тежи ка 2. Такође је показао да су  $r_{n+1}$  Перонови бројеви који нису ни Писоови ни Салемови. И наравно показао је на сличан начин као и ми претходно да је спектар  $A(r_{n+1})$  дискретан.

У претходном случају смо заправо из једначине  $f_+(f_-(x)) = x$ , извели да је  $x = \frac{1}{q+1}$ . Ово се може наставити даље па имамо:  $f_+(f_-(f_-(x))) = x$ , што даје  $q(q(qx - 1) - 1) + 1 = x$ . Решавањем ове једначине добија се  $x_1 = \frac{q^2+q-1}{q^3-1}$ . Ако је уз то  $q(qx_1 - 1) + 1 > \frac{1}{q-1}$  то се може записати као  $f_+(f_-(x_1)) > \frac{1}{q-1}$ . Из  $x < \frac{1}{q-1}$  следи да је  $xq - x < 1$  и коначно  $xq - 1 < x$  тј.  $f_-(x) < x$ . Како је функција  $f_+(x)$  растућа следи да је  $f_+(x_1) > f_+(f_-(x_1)) > \frac{1}{q-1}$  то јест  $qx_1 + 1 > \frac{1}{q-1}$ . Закључујемо да је спектар  $A(q; x_1)$  дискретан за свако  $q$  које задовољава

$$q(qx_1 - 1) + 1 > \frac{1}{q-1}.$$

Остаје да се реши ова неједнакост. Када заменимо  $x_1$  имамо

$$q\left(q\frac{q^2+q-1}{q^3-1} - 1\right) + 1 > \frac{1}{q-1}.$$

Множењем обеју страна са  $q^3 - 1$ , затим пребацивањем свих чланова на леву страну и дељењем неједначине са 2 добија се

$$q^3 - q^2 - 1 > 0.$$

Решење ове неједначине је  $q > 1,465571$ . Ако се подсетимо леме 5.5 видимо да је  $f_+(f_-^k(x_1)) > \frac{1}{q-1}$ . Тиме смо доказали следећу лему

**ЛЕМА 5.7.** *Спектар  $A(q; f_-^k(\frac{q^2+q-1}{q^3-1}))$  је дискретан за свако  $q$  за које важи  $q^3 - q^2 - 1 > 0$  и  $q < 2$  за свако  $k$ .*

Постоје примери бројева  $q$  таквих да  $A(q)$  није дискретан али да за поједине  $d$  спектар  $A(q; d)$  јесте дискретан.

#### 4. СОПСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ УНУТАР ЈЕДИНИЧНОГ ДИСКА

Ако алгоритам за израчунавање спектра са иницијалним елементом применимо на Писоов број и ако одаберемо иницијални елемент  $a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_1q + a_0$  можемо приметити да се бројеви  $a_i$  постепено приближавају нули. На крају стижу до  $0, \pm 1$  и тада алгоритам престаје са радом. Како ово објаснити? На сваком кораку алгоритма проверавамо да ли је  $a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_1q + a_0$  по модулу мање од  $\frac{1}{q-1}$ , дакле блиско нули. То значи да је вектор  $v = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)^T$  близак вектору ортогоналном на  $(q^{n-1}, q^{n-2}, \dots, q, 1)$ . На основу леме 4.2 знамо да је овај вектор ортогоналан на сопствене векторе који одговарају осталим сопственим вредностима. Зато, ако вектор  $v$  запишемо у бази сопствених вектора, тада компонента дуж сопственог вектора који одговара сопственој вредности  $q$  мора бити блиска нули. Другим речима, на сваком кораку алгоритма онмогућавамо кретање дуж сопственог вектора који одговара  $q$  али не спутавамо кретање по осталим сопственим векторима. Како су сви остали сопствени вектори по модулу мањи од 1 овакав оператор је заправо контракција. Ово се може још боље разумети ако размотримо следећи

**ПРИМЕР 5.1.** *Нека је  $q \approx 1,7549$  Писоов број: корен полинома  $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$  док је скуп  $S = \{-1, 0, 1\}$ . Остала два корена чини коњуговано-комплексни пар:  $q_2 \approx 0,12256 + 0,74486i$ ,  $\bar{q}_2$ . Иницијални елементи можемо одабрати на следећи начин. Одредимо количник  $\frac{P(x)}{x-q_2}$  који мора бити без остатка. Добија се полином  $x^2 + (-1,8774388 + 0,7448618i)x + 0,2150799 - 1,3071413i = R(x) + I(x)i$  где су полиноми  $R(x) = x^2 + (-1,8774388)x + 0,2150799$ ,  $I(x) = 0,7448618x - 1,3071413$  реални. Како је  $q$  нула полинома  $\frac{P(x)}{x-q_2}$ ,  $q$  мора бити нула оба полинома  $R(x), I(x)$ . Ако у полиному  $10000I(x)$  заокружимо коефицијенте на целе бројеве тада мора бити блиски нули његова вредност за  $x = q$  тј.*

$$7448q - 13071,$$

коју ћемо узети за иницијални елемент. У табели 1 наведен је део спектра који се добија помоћу алгоритма из одељка 2 ове главе.

Можемо приметити да се коефицијенти  $a_i$  постепено приближавају нули. Последња итерација 1 има следбеника  $q - 1$  који је већ наведен у табели.

Овакво понашање наводи нас да алгоритам за израчунавање спектра са иницијалним елементом применимо на неписоов број чији су сви коњугати по модулу мањи од 1 изузев једног,  $q_2$ , који је по модулу строго већи од 1, а који може бити и комплексан те имати свог коњуговано комплексног пара  $\overline{q_2}$ . Алгоритам ћемо изменити тако што ћемо на сваком кораку проверавати да ли је  $a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_1q + a_0$  по модулу мање од  $\frac{1}{q-1}$ , и да ли је  $a_{n-1}q_2^{n-1} + a_{n-2}q_2^{n-2} + \dots + a_1q_2 + a_0$  по модулу мање од  $\frac{1}{|q_2|-1}$ . Овако измењен алгоритам, под називом алгоритам 4, наведен је на слици 1 овог поглавља.

**ПРИМЕР 5.2.** Нека је број  $q \approx 1,821$  корен полинома  $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 2$ . Остали корени су:  $q_2 \approx -0,7615 + 0,9922i$ ,  $q_3 \approx 0,702$ . За иницијални елемент узећемо

$$-24585q^3 + 7326q^2 + 29728q + 70039,$$

док је skup  $S = \{-1, 0, 1\}$ . У табели 2 наведен је део спектра који се добија помоћу алгоритма 4. Можемо приметити да се коефицијенти  $a_i$  постепено приближавају нули. Шта више однос  $\frac{a'_1}{a_1}$  је приближно 0.702029, колико износи најмањи корен  $q_3$ . Тек када коефицијенти постану сасвим блиски нули, при крају табеле, овај однос се нарушава. Последња итерација  $-q+3$  нема следбеника зато што је  $-q^2+3q > \frac{1}{q-1}$  док је  $|-q_2^2+3q_2-1| > \frac{1}{|q_2|-1}$ . Објашњење за овакво понашање слично је малопређашњем, за Писоове бројеве. На сваком кораку алгоритма проверавамо да ли су  $a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_1q + a_0$  као и  $a_{n-1}q_2^{n-1} + a_{n-2}q_2^{n-2} + \dots + a_1q_2 + a_0$  блиски нули. То значи да је вектор  $v = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)^T$  близак вектору ортогоналном на векторе  $(q^{n-1}, q^{n-2}, \dots, q, 1)^T$ ,  $(q_2^{n-1}, q_2^{n-2}, \dots, q_2, 1)^T$  и  $(\overline{q_2}^{n-1}, \overline{q_2}^{n-2}, \dots, \overline{q_2}, 1)^T$ . На основу леме 4.2 знамо да су ови вектори ортогонални на сопствене векторе који одговарају осталим сопственим вредностима. Закључујемо да, како је четврти сопствени вектор  $v_3$  који одговара сопственој вредности  $q_3$  ортогоналан на сва три ова вектора, вектор  $v$  мора бити приближно колинеаран са њим. На основу леме 4.1 знамо да су координате вектора  $v_3$  коефицијенти полинома  $\frac{P(x)}{x-q_3} = x^3 - 0,29797x^2 - 1,209184x - 2,84888$ . Лако је утврдити да је вектор  $(1; -0,29797; -1,209184; -2,84888)$  приближно колинеаран са векторима из табеле 2. То је и разлог зашто је однос  $\frac{a'_1}{a_1}$  близак сопственој вредности 0.702029 те је овакав оператор заправо контракција.



ТАБЕЛА 1. Спектар са иницијалним елементом  
Писоовог броја

| a2    | a1    | a0    | $R(q_1)$  | $R(q_2)$                | s |
|-------|-------|-------|-----------|-------------------------|---|
| 0     | -7448 | 13071 | 0,671142  | 12158,1644+ -5547,7304i | 0 |
| -7448 | 13071 | 0     | 0,1777717 | 5622,4111- 8376,2155i   | 0 |
| -1825 | 7448  | -7449 | 0,0668453 | -5551,0334+ 5214,5178i  | - |
| 3798  | -5624 | -1826 | 0,8721830 | -4565,4361+ -3495,6552i | - |
| 1972  | -5624 | 3797  | 0,5305745 | 2043,2347- -3829,0504i  | - |
| -1680 | 1825  | 1972  | 0,9310934 | 3102,5345+ 1052,6345i   | 0 |
| -1535 | 3652  | -1681 | 0,6339550 | -404,8170+ 2439,9714i   | - |
| 582   | -146  | -1535 | 0,1125136 | -1867,0563+ -2,4869i    | 0 |
| 1018  | -2117 | 581   | 0,9523252 | -227,9762+ -1391,0036i  | - |
| -81   | -437  | 1017  | 0,6712143 | 1007,1644+ -340,2938i   | - |
| -599  | 1098  | -81   | 0,1778990 | 376,9111+ 708,4914i     | 0 |
| -100  | 518   | -600  | 0,0670687 | -482,5335+ 367,5802i    | - |
| 318   | -500  | -101  | 0,8725751 | -333,9363+ -314,3697i   | - |
| 136   | -419  | 317   | 0,5312626 | 192,2344+ -287,2659i    | - |
| -147  | 181   | 136   | 0,9323009 | 237,5338+ 107,9804i     | 0 |
| -113  | 283   | -148  | 0,6360740 | -52,3180+ 190,1641i     | - |
| 57    | -35   | -113  | 0,1162322 | -148,0581+ -15,6630i    | 0 |
| 79    | -170  | 56    | 0,9588509 | -7,4794+ -112,2025i     | - |
| -12   | -23   | 78    | 0,6826661 | 81,6587+ -19,3228i      | - |
| -47   | 90    | -12   | 0,1979956 | 24,4010+ 58,4562i       | 0 |
| -4    | 35    | -48   | 0,1023358 | -41,5512+ 25,3398i      | - |
| 27    | -44   | -5    | 0,9344645 | -24,9672+ -27,8442i     | - |
| 10    | -32   | 26    | 0,6398709 | 16,6801+ -22,0098i      | - |
| -12   | 16    | 10    | 0,1228951 | 18,4386+ 9,7268i        | 0 |
| -8    | 22    | -13   | 0,9705436 | -5,9853+ 14,9263i       | - |
| 6     | -5    | -9    | 0,7031854 | -12,8516+ -2,6288i      | - |
| 7     | -15   | 6     | 0,2340043 | 0,3830+ -9,8949i        | 0 |
| -1    | -1    | 6     | 0,1655267 | 6,4172+ -0,9274i        | - |
| -3    | 7     | -2    | 0,0453567 | 0,4773+ -4,6663i        | - |
| 1     | 1     | -4    | 0,8344732 | -4,4172+ -0,9274i       | - |
| 3     | -5    | 0     | 0,4643985 | -2,2322+ -3,1766i       | - |
| 1     | -3    | 3     | 0,8149626 | 2,0925+ -2,0520i        | 0 |
| -1    | 2     | 0     | 0,4301597 | 0,7849+ 1,3071i         | - |
| 0     | 1     | -1    | 0,7548776 | -0,8774+ 0,7449i        | 0 |
| 1     | -1    | -1    | 0,3247179 | -1,6624+ -0,5623i       | - |
| 1     | -2    | 1     | 0,5698402 | 0,2151+ -1,3071i        | 0 |
| 0     | 0     | 1     | 1         | 1,0000+ 0,0000i         | 0 |

## АЛГОРИТАМ 4.

```

Spec(a,q)
  alphaU:=-min(s:sin S)/(q-1);
  alphaL:=-max(s:s in S)/(q-1);
  sM:=max(|s|:s in S);
  p:=a[0]+a[1]*q+a[2]*q^2+...+a[n-1]*q^(n-1);
  L[0]:={p};
  sigma[p]:=a[0]+a[1]*q2+a[2]*q2^2+...+a[n-1]*q2^(n-1);
  d:=0;
  repeat
    L[d+1]:=L[d];
    for p in (L[d] minus L[d-1]), s in S do
      if q*p + s in [alphaL,alphaU]
        and |q2*sigma[p] + s|<sM/(|q2|-1) then
        L[d+1]=L[d+1] union {q*p + s}
        sigma[q*p+s]=q2*sigma[p] + s;
      end if
    end do
    d:=d + 1;
  until L[d-1]=L[d];
  RETURN(L[d]);
end;

```

СЛИКА 1. Алгоритам који рачуна део спектра са ограниченом компонентом дуж субдоминантног сопственог вектора.

ТАБЕЛА 2. Понашање слично Писоовом броју

| a3     | a2    | a1    | a0     | $R(q_1)$ | $R(q_2)$          | s |
|--------|-------|-------|--------|----------|-------------------|---|
| -24585 | 7326  | 29728 | 70039  | 0,90965  | -1,1072+ -0,3909i | 0 |
| -17259 | 5143  | 20869 | 49169  | 0,65653  | 0,2310+ -0,8009i  | - |
| -12116 | 3610  | 14651 | 34517  | 0,19557  | -0,3812+ 0,8392i  | - |
| -8506  | 2535  | 10285 | 24232  | 0,35614  | -0,5423+ -1,0173i | 0 |
| 5971   | -1779 | -7220 | -17011 | 0,35143  | -0,4224+ -0,2367i | - |
| 4192   | -1249 | -5069 | -11942 | 0,63997  | 0,5565+ -0,2389i  | 0 |
| 2943   | -877  | -3558 | -8385  | 0,16543  | -1,1868+ 0,7340i  | + |
| 2066   | -615  | -2499 | -5886  | 0,30126  | 0,1754+ -1,7365i  | 0 |
| -1451  | 433   | 1754  | 4133   | 0,45138  | -0,5894+ -1,4965i | + |
| 1018   | -303  | -1231 | -2901  | 0,17799  | -0,9337+ -0,5549i | - |
| -715   | 213   | 865   | 2037   | 0,67585  | -0,2616+ 0,5039i  | + |
| -502   | 150   | 607   | 1429   | 0,23076  | -1,3007+ -0,6433i | - |
| 352    | -105  | -425  | -1003  | 0,57975  | -0,6288+ 0,8007i  | - |
| 247    | -73   | -299  | -704   | 0,05576  | -0,3156+ -1,2337i | 0 |
| 174    | -52   | -210  | -495   | 0,92260  | 0,4645+ -0,6264i  | + |
| 122    | -36   | -147  | -349   | 0,68011  | -1,9752+ -0,0161i | + |
| 86     | -25   | -105  | -245   | 0,23852  | 0,5202+ -1,9475i  | + |
| -61    | 19    | 73    | 173    | 0,56563  | -0,5362+ -1,9992i | + |
| -42    | 12    | 51    | 121    | 0,03005  | 1,3920+ 0,9905i   | - |
| -30    | 9     | 37    | 85     | 0,05473  | -1,0428+ 0,6268i  | + |
| -21    | 7     | 25    | 59     | 0,92072  | -0,8278+ -1,5121i | - |
| -14    | 4     | 17    | 41     | 0,67668  | 1,1307+ 0,3302i   | - |
| -10    | 3     | 13    | 27     | 0,23227  | -2,1886+ 0,8704i  | - |
| -7     | 3     | 7     | 20     | 0,42298  | 0,8031+ -2,8344i  | 0 |
| 4      | 0     | -6    | -13    | 0,22971  | -1,2008+ -2,9554i | - |
| -4     | 2     | 5     | 9      | 0,58167  | -2,8468+ -1,0592i | + |
| -2     | 1     | 1     | 7      | 0,05926  | 2,2189+ -2,0179i  | - |
| -1     | -1    | 3     | 4      | 0,10792  | 0,3124+ 3,7384i   | 0 |
| -2     | 2     | 2     | 3      | 0,19653  | -2,9472+ -2,5369i | + |
| 0      | 0     | -1    | 3      | 0,17895  | 3,7615+ -0,9922i  | - |

Ради уштеде меморије и процесорског времена, програмски се мењају знаци свим бројевима у реду, уколико је  $R(q_1)$  негативно. Тиме се истовремено обрађују елементи спектра супротних знакова.



## ЕЛЕМЕНТИ ИТЕРАТИВНЕ ТЕОРИЈЕ

### 1. ИТЕРАТИВНИ ФУНКЦИОНАЛНИ СИСТЕМИ

Почнимо ову главу описом опште конструкције фрактала, за коју су Канторов скуп, фон-Кохова крива и други стандардни примери специјални случајеви.

Многи скупови које зовемо фрактали сачињени су од делова који су, на неки начин, слични целини, и ту особину можемо звати самосличност. На пример Канторов скуп је унија две њему сличне копије. Затим код фон-Кохове криве полазимо од сегмента  $[0, 1]$ , нека је то скуп  $E_0$ . Скуп  $E_1$  се добија издвајањем средње трећине из  $E_0$  коју замењујемо са остале две стране једнакостраничног троугла чија је основица издвојена трећина. Скуп  $E_2$  добијамо применом исте процедуре на сваки од четири сегмента у  $E_1$ , и тако даље. Дакле  $E_k$  се добија замeњивањем средње трећине, сваке од дужи од којих је сачињен  $E_{k-1}$ , са друге две стране једнакостраничног троугла. Када  $k$  тежи бесконачности добијени низ полигоналних линија тежи граничној кривој која се зове фон-Кохова крива. Јасно је да је она унија четири њој сличне копије. Ове самосличности нису само особине фрактала већ оне заправо могу бити коришћене да их дефинишу, овај приступ показао се изузетно користан.

Нека је  $D$  затворен подскуп  $\mathbb{R}^n$ . Бијекција  $S : D \rightarrow D$  се назива контракција на скупу  $D$  уколико постоји број  $c$  такав да је  $0 < c < 1$  и за све  $x, y \in D$  важи  $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$ . Јасно је да је ма која контракција непрекидно пресликавање.

Нека су  $S_1, S_2, \dots, S_m$  контракције. Подскуп  $F$  скупа  $D$  називамо инваријантним за трансформације  $S_i$  уколико важи

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Показује се да су такви инваријантни скупови често фрактали. Ово је најлакше илустровати на примеру када је  $F$  Канторов скуп. Нека су  $S_1, S_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задате као  $S_1(x) = \frac{1}{3}x$ ;  $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ . Тада су  $S_1(F)$ ,  $S_2(F)$  управо лева и десна "половина" скупа  $F$ , тако да је  $F = S_1(F) \cup S_2(F)$ . Зато је  $F$  инваријантан скуп за бијекције  $S_1$  и  $S_2$ , које репрезентују фундаменталну самосличност Канторовог скупа.

Показије се да фамилија контракција, или итеративни функционални систем, како се често назива, дефинише јединствен, непразан, компактан инваријантни скуп. То значи да је, на пример, Канторов скуп комплетно описан као компактан инваријантни скуп бијекција  $S_1$  и  $S_2$  дефинисаних горе.

Дефинисаћемо метрику или растојање између подскупова скупа  $D$ . Нека  $\mathcal{S}$  означава класу свих непразних, компактних подскупова скупа  $D$ . Подсетимо се да је  $\delta$ -паралелно тело скупа  $A \in \mathcal{S}$  је скуп тачака на растојању мањем од  $\delta$  од скупа  $A$  т.ј.  $A_\delta = \{x \in D : (\exists a \in A)(|x - a| \leq \delta)\}$ .  $\mathcal{S}$  постаје метрички простор дефинисањем растојања  $d(A, B)$  између два скупа  $A, B$  као најмање  $\delta$  такво да  $\delta$ -паралелно тело скупа  $A$  садржи скуп  $B$  и обратно:

$$d(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \wedge B \subset A_\delta\}.$$

Једноставном провером може се утврдити да је  $d$  метрика или функција растојања, позната као Хаусдорфова метрика на класи  $\mathcal{S}$ . Тако (i)  $d(A, B) \geq 0$ , при чему једнакост важи ако и само ако је  $A = B$ , (ii)  $d(A, B) = d(B, A)$ , (iii)  $d(A, B) \geq d(A, C) + d(C, B)$  за ма које  $A, B, C$  из класе  $\mathcal{S}$ .

**ТЕОРЕМА 18.** Нека су  $S_1, S_2, \dots, S_m$  контракције на  $D \subset \mathbb{R}^n$  тако да

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad (x, y \in D)$$

где је  $c_i < 1$  за свако  $i$ . Тада постоји јединствен непразан компактан скуп  $F$  тако да је он инваријантан за  $S_i$ , т.ј. који задовољава

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Ако поред тога дефинишемо трансформацију  $S$  на класи  $\mathcal{S}$  непразних компактних скупова као

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$$

и означимо са  $S^k$   $k$ -ту итерацију скупа  $S$  задату са  $S^0(E) = E$ ,  $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$  за  $k \geq 1$ , тада је

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$$

за ма који скуп  $E$  класе  $\mathcal{S}$  такав да  $S(E) \subset E$ , за свако  $i$ .

**ДОКАЗ.** Приметимо да су скупови из класе  $\mathcal{S}$  трансформисани од стране  $S$  у друге скупове из  $\mathcal{S}$ . Нека је  $E$  неки скуп из класе  $\mathcal{S}$  такав да је  $S_i(E) \subset E$  за све  $i$ ; на пример, ако је лопта  $B_r(0)$  са центром у координатном почетку и полупречником  $r$  онда нам  $D \cap B_r(0)$  може послужити уколико је  $r$  довољно велико. Тада је  $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$  тако да је  $S^k(E)$  опадајући низ непразних

компактних скупова, који мора имати непразан компактни пресек  $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} S^k(E)$ . Како је  $S^k(E)$  опадајући низ, следи да  $S(F) = F$  тако да је  $F$  инваријантан.

Да бисмо показали да је инваријантан скуп јединствен најпре приметимо да је за  $A, B \in \mathcal{S}$

$$d(S(A), S(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B))$$

(јер ако је  $\delta$  такво да  $\delta$ -паралелно тело  $(S_i(A))_\delta$  садржи  $S_i(B)$  за свако  $i$ , тада  $(\bigcup_{i=1}^m S_i(A))_\delta$  садржи  $\bigcup_{i=1}^m S_i(B)$ ). Зато је

$$d(S(A), S(B)) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} c_i\right) d(A, B).$$

Следи да ако су  $S(A) = A$  и  $S(B) = B$  инваријантни скунови, тада  $d(A, B) = 0$ , одакле следи да је  $A = B$ .  $\square$

## 2. ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ

У последње време јавила се експлозија интересовања за динамичке системе. То је пре свега због снажних рачунара који су омогућили да се теоријска анализа преточи у нумеричко истраживање. То је такође делимично и због појаве тополошких метода за проучавање квалитативног понашања система, које унапређује традиционални квантитативни прилаз. Ова област добија подстицај у све широј примени у разноврсним дисциплинама: од биологије, географије, економије до традиционалних примена у инжењерству и физици. Много је писано о динамичким системима и хаосу. Општи приступ би захтевао излет у ергодичну теорију, бифуркациону теорију и многе друге области.

Нека је  $D$  подскуп  $\mathbb{R}^n$  (често  $\mathbb{R}^n$  сам), и нека је  $f : D \rightarrow D$  непрекидна функција. Као што је уобичајено,  $f^k$  означава  $k$ -ту итерацију функције  $f$ , тако да је  $f^0(x) = x$ ,  $f^1(x) = f(x)$ ,  $f^2(x) = f(f(x))$ , итд.; приметимо да је  $f^k(x)$  је у  $D$  ако је  $x$  тачка из скупа  $D$ . Типично  $x, f(x), f^2(x), \dots$ , су вредности неке величине у моменту  $0, 1, 2, \dots$ . Тако вредност у моменту  $k + 1$  је одређена вредношћу у моменту  $k$  на коју се примењује функција  $f$ . Примери укључују биолошке популације, вредност инвестиције у зависности од камата и пореских услова, и позиција честице флуида при сталном протоку.

Итеративна схема  $\{f^k\}$  се зове дискретан динамички систем. Ми смо заинтересовани за понашање низа итерација који се зове орбита,  $\{f^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  за разне иницијалне тачке  $x \in D$ . На пример, ако је  $f(x) = \cos(x)$  низ  $f^k(x)$  конвергира ка  $0,739$  када  $k \rightarrow \infty$  за било које иницијално  $x$ . Понекад расподела итерација које се појављује је скоро случајна. С друге стране  $f^k(x)$  може конвергирати ка  $w$ , фиксној тачки пресликавања, т.ј. тачки скупа  $D$  за коју важи  $f(w) = w$ . Још општије,  $f^k(x)$  може конвергирати орбити

од период- $p$  тачака  $\{w, f(w), f^2(w), \dots, f^{p-1}(w)\}$ , где је  $p$  најмањи природни број такав да  $f^p(w) = w$  у смислу да  $|f^k(x) - f^i(x)| \rightarrow 0$  када  $k \rightarrow \infty$ . Понекад,  $f^k(x)$  се може појављивати случајно, али увек остајући близу неког скупа, који може бити фрактал и који се често назива фрактални атрактор или неособични атрактор.

Грубо речено, атрактор је скуп коме све оближње орбите конвергирају. Прецизније, подскуп  $F$  скупа  $D$  је атрактор функције  $f$  ако је  $F$  затворен скуп који је инваријантан за функцију  $f$  (т.ј.  $f(F) = F$ ) тако да растојање  $f^k(x)$  од  $F$  конвергира нули када  $k \rightarrow \infty$  за све  $x$  из неког отвореног скупа  $V$  који садржи  $F$ . Скуп  $V$  се назива басен атракције скупа  $F$ . Уобичајено је захтевати да је скуп  $F$  минималан у смислу да ниједан његов прави подскуп не задовољава ове услове. Слично, затворени инваријантни скуп  $F$  од којег се оближње тачке итерацијама одбијају зове се репелер; ово је приближно еквивалентно са тврдњом да је  $F$  атрактор за инверзну (могуће вишесзначну) функцију  $f^{-1}$ . Атрактор или репелер може бити једна тачка или период- $p$  орбита. Ипак, чак и релативно једноставне функције  $f$  могу имати фрактални атрактор.

Приметимо да је скуп  $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(D)$  инваријантан у односу на  $f$ . Како је  $f^k(x) \in \bigcap_{i=1}^k f^i(D)$  за свако  $x \in D$ , итерације  $f^k(x)$  се приближавају скупу  $F$  када  $k \rightarrow \infty$ , и  $F$  је често атрактор функције  $f$ .

Веома често, ако  $f$  има фрактални атрактор или репелер  $F$ , тада  $f$  показује "хаотично" понашање на  $F$ . Постоје различите дефиниције хаоса;  $f$  се сматра хаотичном на скупу  $F$  ако су сви следећи услови испуњени.

- (1) Орбита  $\{f^k(x)\}$  је густа у скупу  $F$  за неко  $x \in F$ .
- (2) Периодичне тачке функције  $f$  су густе у скупу  $F$ .
- (3)  $f$  има осетљиво понашање у зависности од почетних услова; то значи да постоји број  $\delta > 0$  такав да за било које  $x \in F$  постоје тачке  $y \in F$  произвољно блиске тачки  $x$  тако да је  $|f^k(x) - f^k(y)| \geq \delta$  за неко  $k$ . Стога итерације тачака које су иницијално близу једна другој не остају блиске.

Из услова (1) следи да  $F$  не може бити подељен на мање затворене скупове, док (3) одсликава непредвидљивост итерација тачака из  $F$ .

Динамички системи су природно подесни за истраживање уз помоћ рачунара. Грубо говорећи, атрактори су скупови који се могу видети када се орбите уцртају на рачунару. За неку иницијалну тачку  $x$  треба израчунати стотинак итерација под претпоставком да се не разликују од неког атрактора. Рачунарске слике могу нас довести у заблуду, зато што расподела  $f^k(x)$  на атрактору може бити неравномерна, стога поједини делови атрактора могу бити посећивани веома ретко.

### 3. ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ИСТЕЗАЊА, СЕЧЕЊА И УДВОСТРУЧАВАЊА

Један од најједноставнијих динамичких система са фракталним атрактором је "пекарева трансформација", названа тако јер личи на узастопно истезање комада теста и прсавијање на пола. Нека је  $E = [0, 1] \times [0, 1]$  јединични квадрат. За фиксирано  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$  дефинисаћемо "пекареву трансформацију"  $f: E \rightarrow E$  свако

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, \lambda y) & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ (2x - 1, \lambda y + \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} < x \leq 1). \end{cases}$$

Ова трансформација може бити схваћена као истезање  $E$  у  $2 \times \lambda$  правоугаоник, који се затим пресеца на два  $1 \times \lambda$  правоугаоника који се затим постављају један изнад другог са размаком од  $1 - \lambda$  између њих. Тада је  $E_k = f^k(E)$  опадајући низ скупова, где  $E_k$  укључује  $2^k$  хоризонталних трака висине  $\lambda^k$  раздвојених размацима од најмање  $(1 - \lambda)\lambda^{k-1}$ . Како је  $f(E_k) = E_{k+1}$  овај низ тежи компактном скупу  $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$  који задовољава  $f(F) = F$ . Можемо приметити да је ова трансформација по  $y$ -координати контракција док је по  $x$ -координати екстензија.

Нека су  $q_1, q_2, \dots, q_n$  корени полинома  $x^n - b_{n-1}x^{n-1} - b_{n-2}x^{n-2} - \dots - b_1x - b_0$ . Искористимо матричне ознаке уведене у четвртој глави:

$$\begin{bmatrix} a'_{n-1} \\ a'_{n-2} \\ \vdots \\ a'_1 \\ a'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$$

где је  $s \in S$  такво да је  $\frac{-s_u}{\|q_1\|-1} \leq a'_{n-1}q_1^{n-1} + a'_{n-2}q_1^{n-2} + \dots + a'_0 \leq \frac{-s_l}{\|q_1\|-1}$ . Ово можемо краће писати као  $v' = Av + P$ . Периодична тачка периода  $m$  задовољава

$$v = A^m v + A^{m-1}P_{m-1} + A^{m-2}P_{m-2} + \dots + P_0.$$

Све периодичне тачке периода  $m$  можемо одредити решавањем претходне једначине по  $v$ :

$$(3.1) \quad v = (E - A^m)^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} A^i P_i,$$

где су  $P_i = (0, 0, \dots, 0, s_i)^T$ ,  $s_i \in S$  по свим  $m$ -торкама  $(s_{m-1}, s_{m-2}, \dots, s_0)$  бројева из скупа  $S$ , којих има  $|S|^m$ .  $E$  је јединична матрица реда  $n$ . Прва тачка следеће леме доказује се аналогно леми 3.3.

**ЛЕМА 6.1.** Нека су  $S, s_l, s_u$  дефинисани као у леми 3.1. Нека су  $t, q_2$  комплексни бројеви и нека је  $|q_2| < 1$ . Означимо  $s_m = \max(|s_l|, |s_u|)$ . Тада важи:



(1) ако је

$$(3.2) \quad |t| > \frac{s_m}{1 - |q_2|},$$

онда је  $|q_2 t + s| < |t|$  за све  $s \in S$ ,

(2) ако је

$$(3.3) \quad |t| \leq \frac{s_m}{1 - |q_2|},$$

онда је  $|q_2 t + s| \leq \frac{s_m}{1 - |q_2|}$  за све  $s \in S$ .

ДОКАЗ. (1) Множењем обеју страна неједнакости (3.2) са  $1 - |q_2|$  добијамо  $|t| - |q_2||t| > s_m$  односно  $|q_2||t| + s_m < |t|$ . Како је неједнакост  $|q_2 t + s| \leq |q_2 t| + |s|$  увек испуњена, и како је очигледно да је  $s_m \geq |s|$  на крају можемо закључити да је

$$\begin{aligned} |q_2 t + s| &\leq |q_2 t| + |s| \\ &\leq |q_2||t| + s_m \\ &< |t|. \end{aligned}$$

(2) Множењем обеју страна неједнакости (3.3) са  $|q_2|$  а затим додавањем  $s_m$  добијамо  $|q_2||t| + s_m \leq \frac{|q_2|s_m}{1 - |q_2|} + s_m$ . Како је неједнакост  $|q_2 t + s| \leq |q_2 t| + |s|$  увек испуњена, и како је очигледно да је  $s_m \geq |s|$  на крају можемо закључити да је

$$\begin{aligned} |q_2 t + s| &\leq |q_2 t| + |s| \\ &\leq |q_2||t| + s_m \\ &\leq \frac{|q_2|s_m}{1 - |q_2|} + s_m \\ &= s_m \left( \frac{|q_2|}{1 - |q_2|} + 1 \right) \\ &= s_m \frac{1}{1 - |q_2|}. \end{aligned}$$

□

Сада можемо доказати следећу теорему која лоцира периодичне тачке.

ТЕОРЕМА 19. Нека су алгебарски коњугати  $q_2, q_3, \dots, q_n$ , броја  $q = q_1$  по модулу различити од 1. Уређеној  $n$ -торки  $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)$  придружимо полином  $R(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$ . Означимо са  $W$  следећи скуп уређених  $n$ -торки  $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)$

$$W = \left\{ (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0) : |R(q_i)| \leq \frac{s_m}{||q_i| - 1|} \right\}.$$

где је  $i = 1, 2, \dots, n$  док је  $s_m$  дефинисано као у претходној лемми. Тада је  $W$  компактан скуп и све периодичне тачке налазе се у њему.

ДОКАЗ. Да је скуп  $W$  ограничен доказали смо у лемми 3.5. Како је овај скуп очигито затворен следи да је компактан. Ако је тачка  $A_1(a_{1,n-1}, a_{1,n-2}, \dots, a_{1,0})$  изван скупа  $W$  тада из његове дефиниције следи да је за неку  $i$   $|R_1(q_i) = a_{1,n-1}q_i^{n-1} + a_{1,n-2}q_i^{n-2} + \dots + a_{1,0}| > \frac{s_m}{||q_i|-1|}$ . Ако је  $|q_i| > 1$  тада на основу леме 3.3 важи да је  $|R_2(q_i)| = |q_i R_1(q_i) + s_i| > |t|$ . Закључујемо да за итерацијама добијени низ тачака  $A_k$  низ вредности одговарајућих полинома  $|R_k(q_i)|$  је строго растући, те у низу тачака  $A_k$  не може бити једнаких, и зато  $A_1$  не може бити периодична тачка. Ако је  $|q_i| < 1$  тада из примера 5.1 закључујемо да итерацијама низ вредности одговарајућих полинома  $|R_k(q_i)|$  може да се "врати" у сегмент  $[-\frac{s_m}{||q_i|-1|}, \frac{s_m}{||q_i|-1|}]$ , али зато на основу тачке (2) претходне леме он више не може из њега да "изађе". Стога поново закључујемо да  $A_1$  не може бити периодична тачка. Остаје случај када низ вредности одговарајућих полинома  $|R_k(q_i)|$  остаје ван сегмента  $[-\frac{s_m}{||q_i|-1|}, \frac{s_m}{||q_i|-1|}]$ . Али тада на основу тачке (1) претходне леме низ  $|R_k(q_i)|$  је строго опадајући тако да поново у низу тачака  $A_k$  не може бити једнаких, и зато  $A_1$  не може бити периодична тачка.  $\square$

ЛЕМА 6.2. *Уређеној  $n$ -торки  $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)$  придружимо полином  $R(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$ . Тада је  $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0) = (a'_{n-1}, a'_{n-2}, \dots, a'_0)$  ако и само ако је  $R(q) = R'(q)$ .*

ДОКАЗ.  $(\Rightarrow)$  смер је очигледан. Докажимо  $(\Leftarrow)$  смер. Ако је  $a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_0 = a'_{n-1}q^{n-1} + a'_{n-2}q^{n-2} + \dots + a'_0$  тада је  $R(x) - R'(x)$  полином степена  $\leq n-1$  са целобројним коефицијентима чија нула је  $q$  што је могуће само ако је  $R(x) - R'(x) \equiv 0$  зато што је минимални полином броја  $q$  степена  $n$ .  $\square$

ТЕОРЕМА 20. *Ако тачка  $(0, 0, \dots, 0, s)$ ,  $s \in S$  није у атрактору онда спектар  $\Lambda^S(q)$  није дискретан.*

ДОКАЗ. Ако тачка  $(0, 0, \dots, 0, s)$ ,  $s \in S$  није у атрактору онда она није периодична тачка. Ово је тачна реченица јер је то контрапозиција тачног исказа да је свака периодична тачка у атрактору. Али тада су сви елементи дела спектра  $\Lambda^S(q) \cap [\frac{-s_n}{q-1}, \frac{-s_l}{q-1}]$  међусобно различити, на основу претходне леме, те спектар не може бити дискретан.  $\square$

Користићемо следећу теорему која је доказана у [2].

ТЕОРЕМА 21. *Атрактор ИФС је затварање скупа његових периодичних тачака.*

#### 4. ПРИКАЗИ АТРАКТОРА РАЧУНАРСКОМ ГРАФИКОМ

Ако се задржимо на случају  $n = 2$  т.ј. бројевима чији је минимални полином  $x^2 - b_1x - b_0$  тада је пријатељска матрица овог полинома

$$\begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Коришћењем (3.1) када је  $m = 14$  можемо начинити програм (у MATHCAD-у) за одређивање скупа периодичних тачака који је приказан на слици 1. ове главе. Изменом параметара  $b_0, b_1$  матрице  $A$  чије су сопствене вредности  $q_1, q_2$  добијене су слике 2-5. Видели смо из теореме 19 да је овај скуп унутар паралелограма  $W$  у пресеку два пара паралелних правах:

$$(4.1) \quad y \leq -q_i x \pm \frac{1}{||q_i| - 1|}.$$

По једна права из сваког пара је приказана на сликама. Крупнијим тачкама је представљен скуп фиксних тачака а ситнијим слика овог скупа након трансформације

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ако тако трансформисани скуп "подигнемо" за 1 и "спустимо" за 1 па затим одбацимо тачке ван паралелограма  $W$  примећујемо да добијамо заправо скуп од кога смо пошли. Ово је стандардна особина атрактора. Можемо приметити да у правцу сопственог вектора чија одговарајућа сопствена вредност је по модулу већа од 1 имамо екстензију док у правцу сопственог вектора чија одговарајућа сопствена вредност је по модулу мања од 1 имамо контракцију.

На слици 2. представљен је скуп фиксних тачака када је  $q_1$  златни пресек. Видимо да је тада затварање овог скупа заправо целокупан паралелограм  $W$  у пресеку два пара паралелних правах (4.1).

У случају када су  $q_1, q_2$  коњуговано-комплексни пар бројева из теореме 19 имамо следећу везу

$$|y + q_i x| \leq \frac{1}{||q_i| - 1|}.$$

Ако је  $q_i = \alpha_i + \beta_i i$  онда добијамо  $|y + \alpha_i x + \beta_i x i| \leq \frac{1}{||q_i| - 1|}$ . Нађимо апсолутну вредност  $\sqrt{(y + \alpha_i x)^2 + \beta_i^2 x^2} \leq \frac{1}{||q_i| - 1|}$ . Ово се може решити по  $y$  најпре квадрирањем, затим пребацивањем члана  $\beta_i^2 x^2$  на десну страну и на крају кореновањем

$$(4.2) \quad y \leq -\alpha_i x \pm \sqrt{-\beta_i^2 x^2 + \frac{1}{||q_i| - 1|^2}}.$$



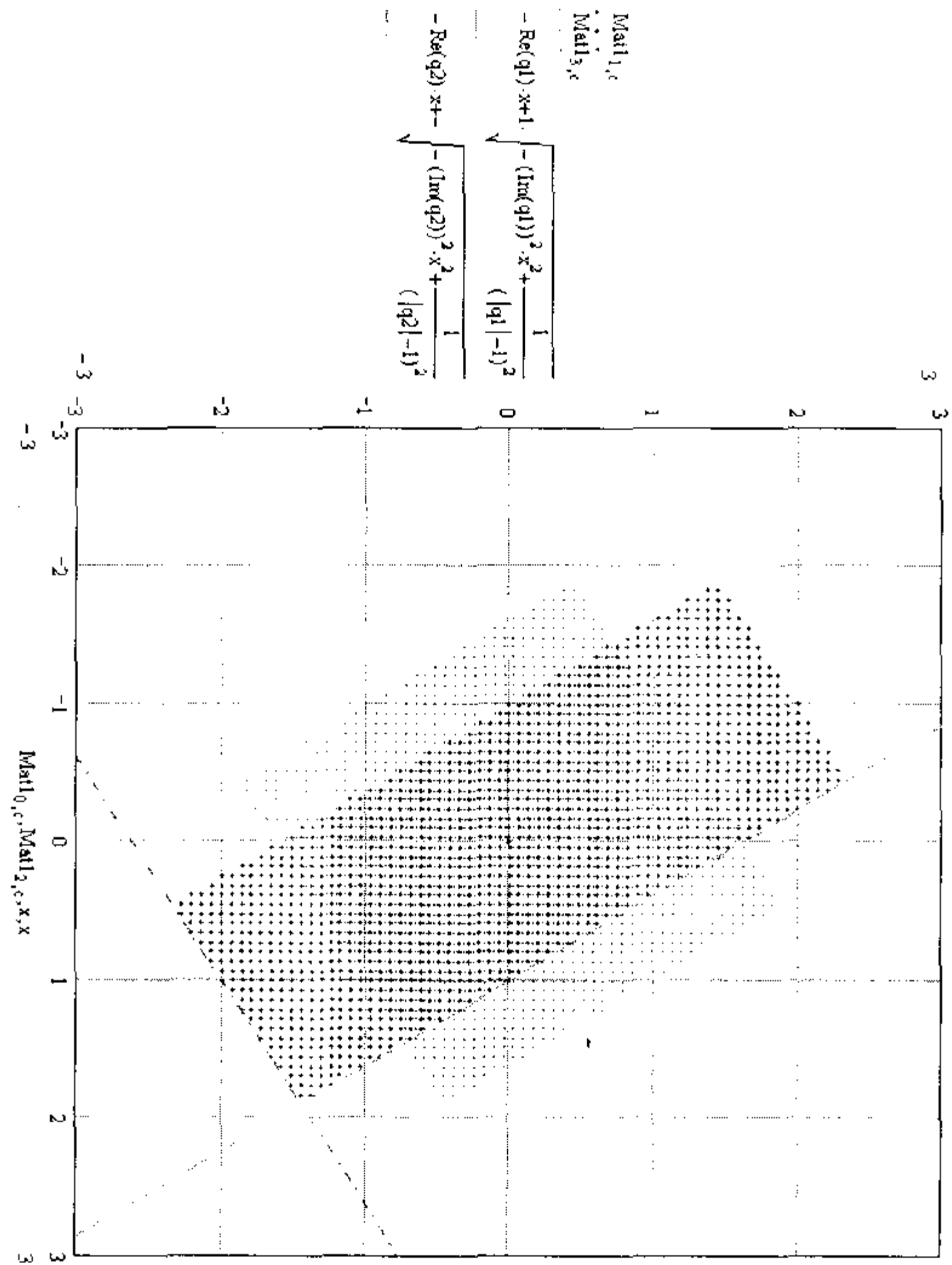
```

Matl :=
  c ← 0
  for i ∈ 0..n-1
    pi ← -1
    M ←  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
    while i ≤ n ∧ c < 2n + 1
      v ← (An - E)  $\begin{pmatrix} 0 \\ p_i \end{pmatrix}$ 
      v1 ← A v
      M ← augment(M, stack(v, v1))
      c ← c + 1
      i ← 0
      Change ← 0
      while (¬Change ∧ i ≤ n-1)
        if pi < 1
          pi ← pi + 2
          Change ← 1
        otherwise
          pi ← -1
          i ← i + 1
    M

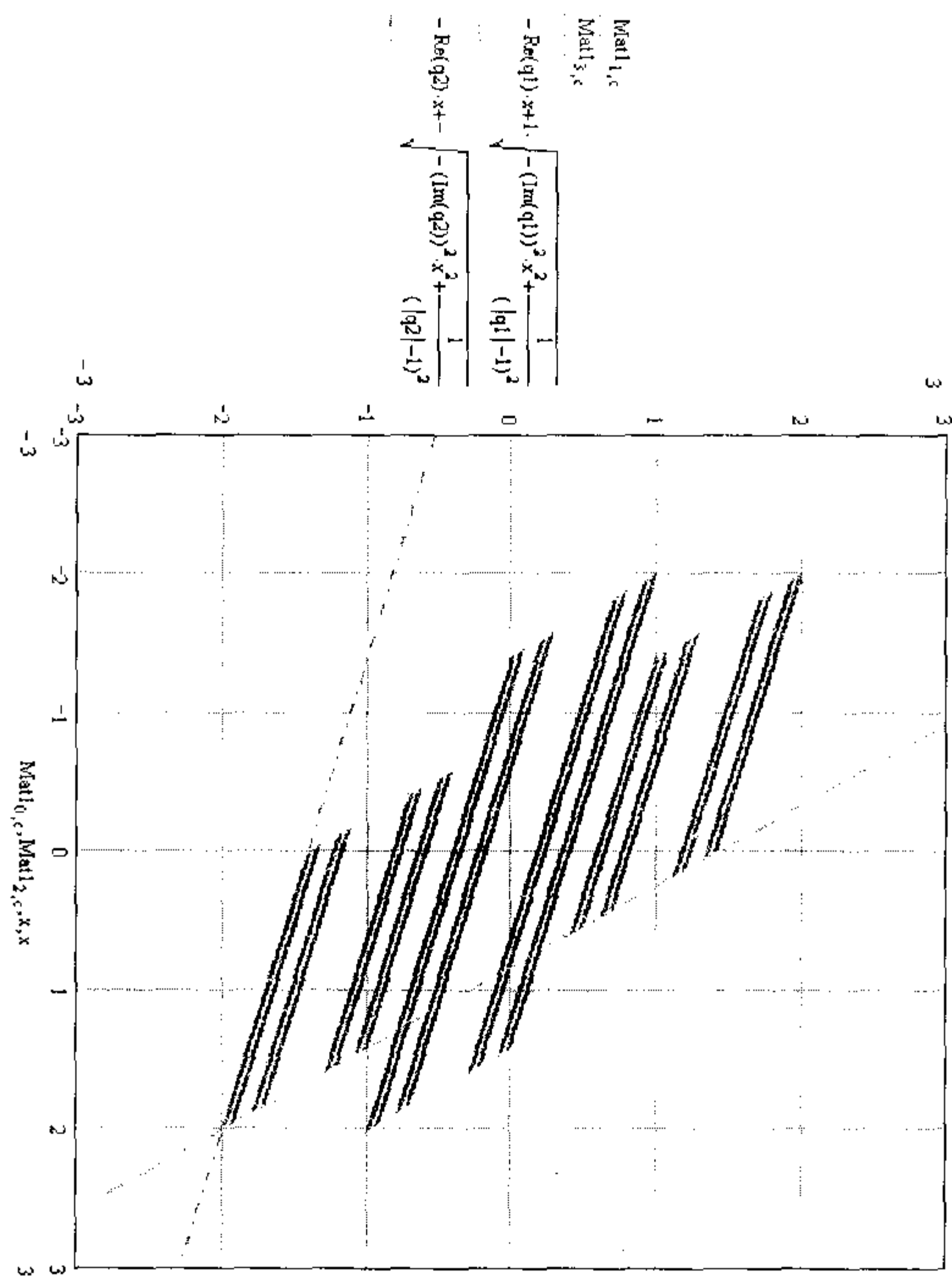
```

Слика 1. Програм који израчунава фрактални атрактор одређивањем периодичних тачака.

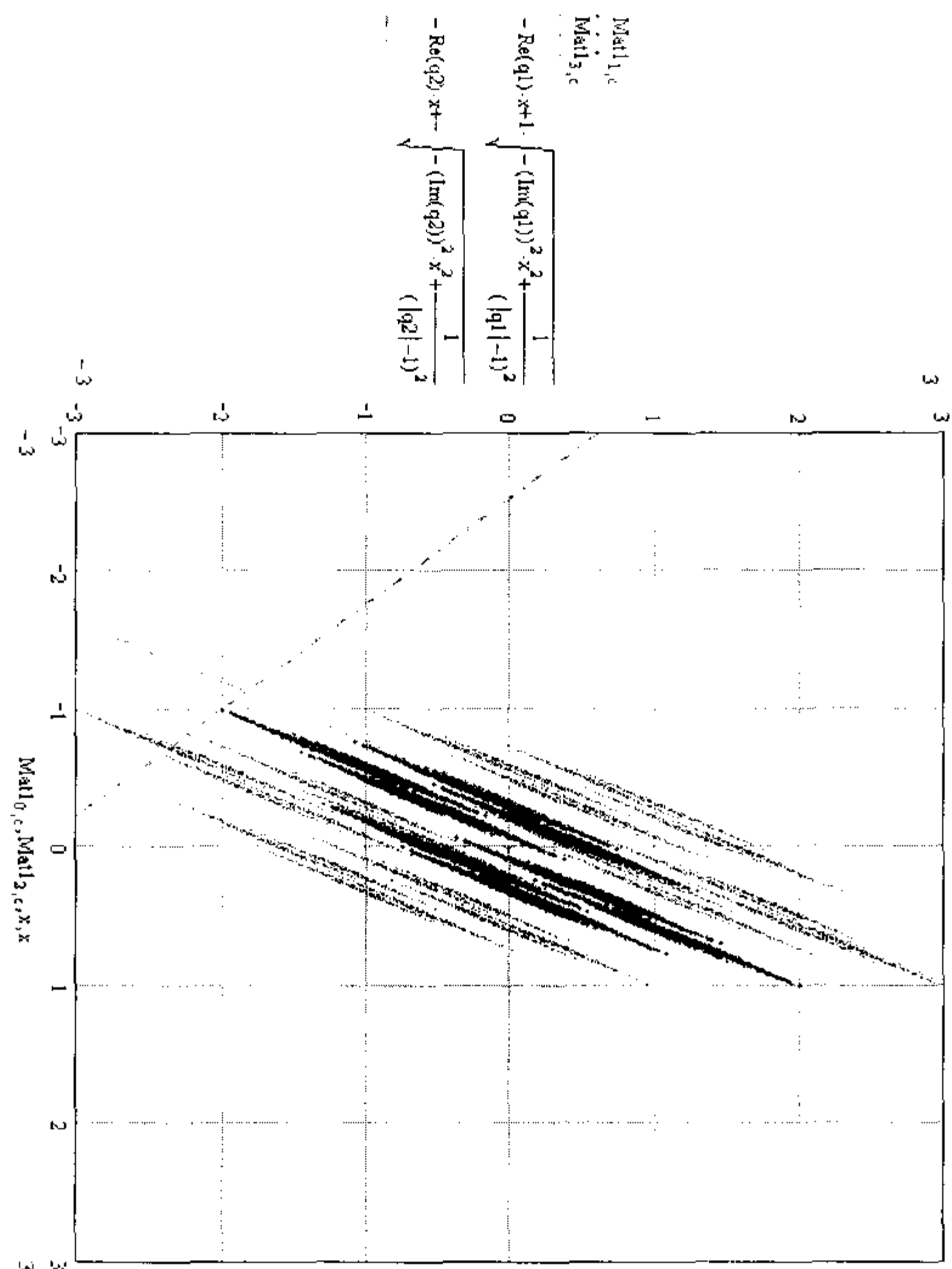
Није тешко закључити да је ово унутрашњост елипсе што се види на последњим двома сликама. Погодно је за програмирање што се последња релација (4.2) за  $q_i$  реално односно  $\beta = 0$  своди на (4.1).



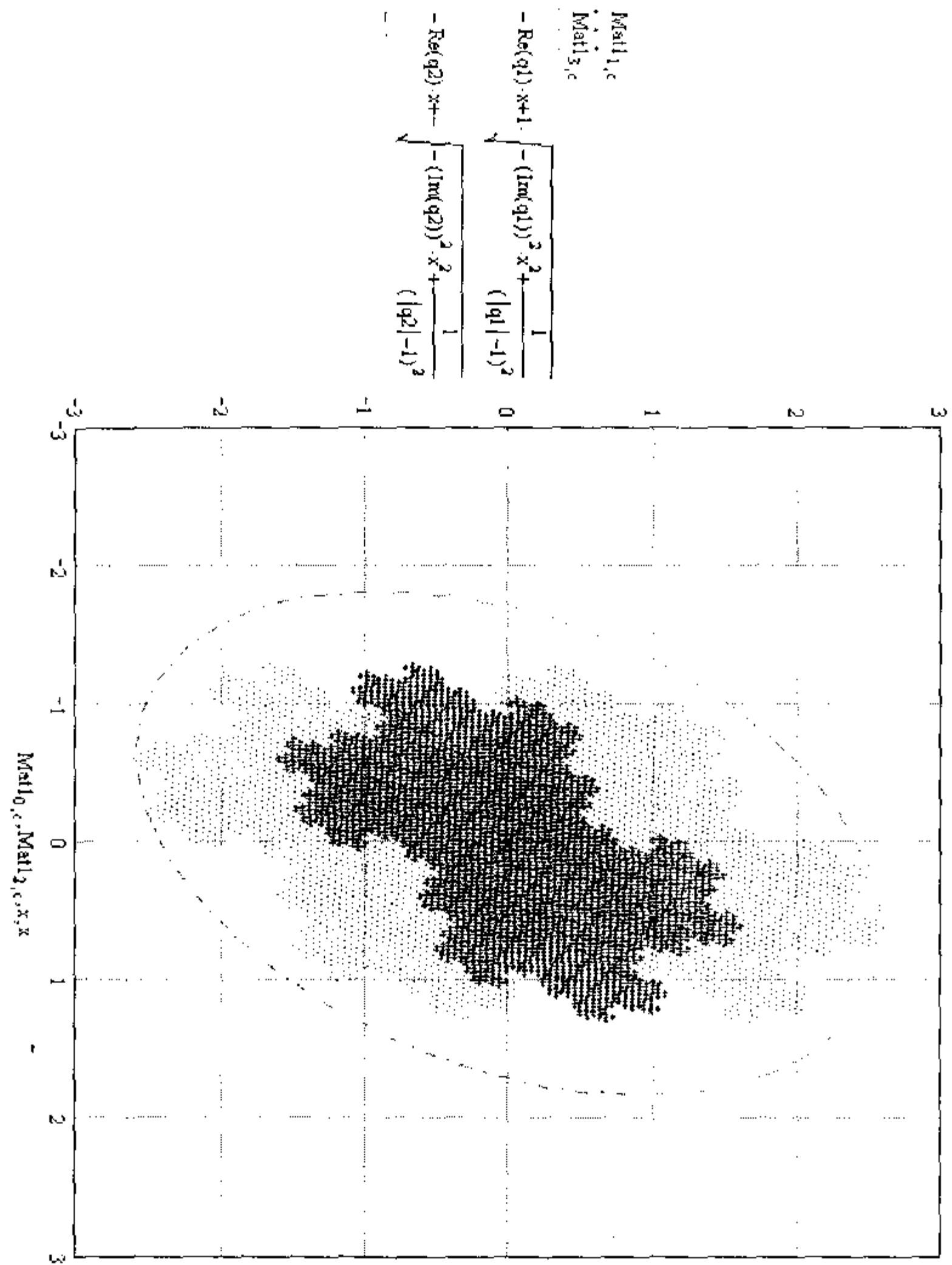
СЛИКА 2. Фрактални атрактор када је  $q_1$  златни пресек т.ј. када су  $q_1 \approx 1,618$ ,  $q_2 \approx -0,618$  корени полинома  $x^2 - x - 1$ .



Слика 3. Фрактални атрактор када су  $q_1 \approx 1,707$ ,  $q_2 \approx 0,293$  корени полинома  $x^2 - 2x + 0,5$ . Како њему очигледно не припада тачка  $(0,1)$ , према теорему 20, спектар  $A(q_1)$  није дискретан.

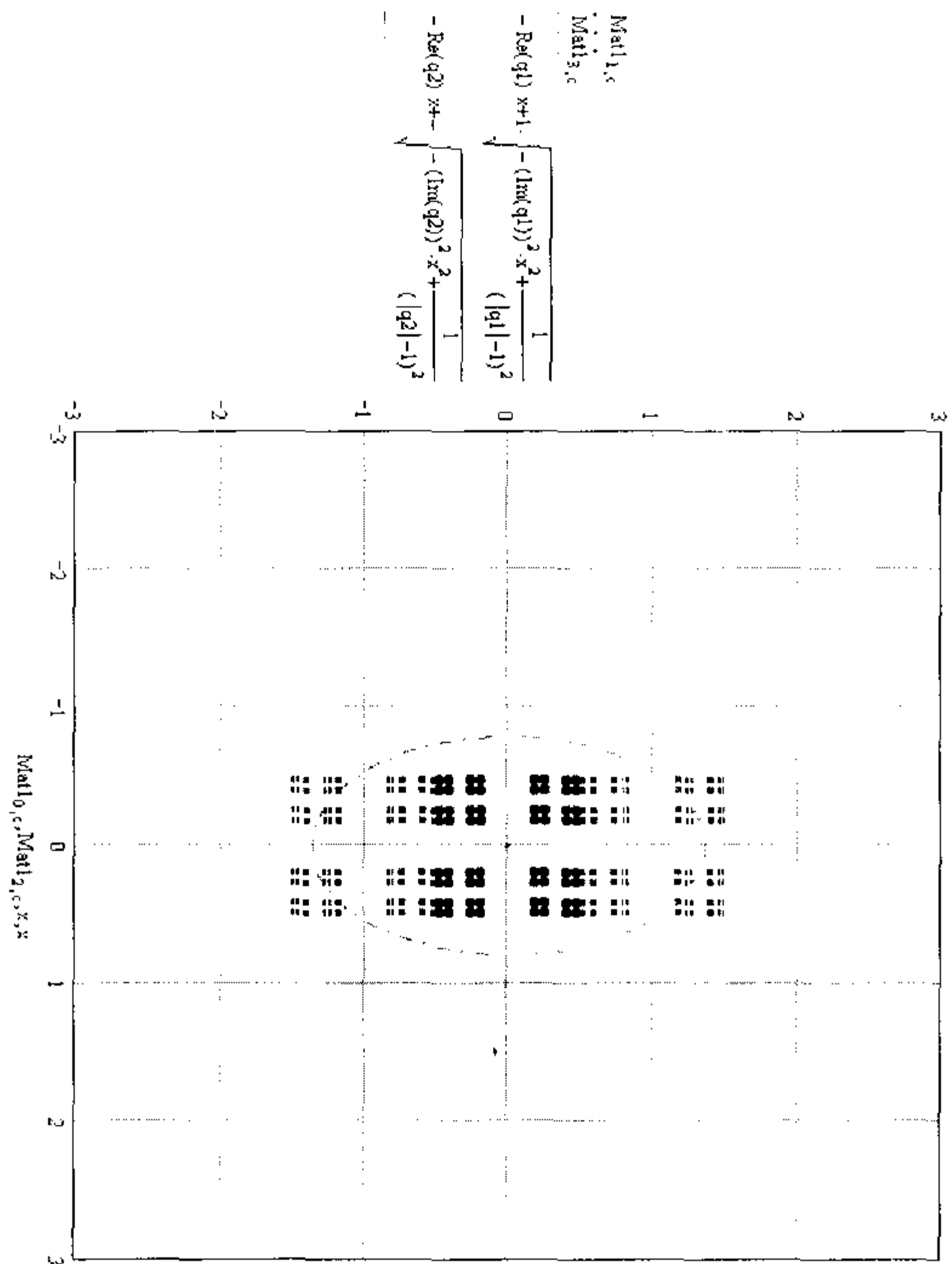


СЛИКА 4. Фрактални атрактор када су  $q_1 \approx 1,3028$ ,  $q_2 \approx -2,3028$  корени полинома  $x^2 + x - 3$ . Како њему очигледно не припада тачка  $(0,1)$ , према теореме 20, спектар  $A(q_1)$  није дискретан.



СЛИКА 5. Фрактални атрактор када су  $q_1 \approx -0,5 + 1,3229i$ ,  $q_2 \approx -0,5 - 1,3229i$  корени полинома  $x^2 + x + 2$ .





СЛИКА 6. Фрактални атрактор када су  $q_1 = \sqrt{3}i$ ,  $q_2 = -\sqrt{3}i$ .

## ПОГОВОР, ОТВОРЕНА ПИТАЊА И КОМЕНТАРИ

У овој тези расветљена су нека стара питања у вези са спектрима алгебарских бројева, нека су само делом решена а појавила су се и нека нова, која такође захтевају решење. На овом месту ћемо их истакнути као путоказ за будуће истраживање.

- (1) Можемо ли уопштити алгоритам 2 за случај када је  $q$  Салевов број или је  $|q_2| \approx 1$ ?
- (2) Можемо ли искористити алгоритам 2 да докажемо хипотезу да сваки број  $q$  за који важи да је спектар  $A(q)$  дискретан мора бити Перонов?
- (3) Можемо ли искористити алгоритам 2 да докажемо да је за свако  $q_n$ , за које је доказано у [42] да је спектар  $A(q_n)$  дискретан,  $\Lambda(q_n)$  није дискретан, посебно у случају када конјугати броја  $q_n$ , који су већи од 1 по модулу, нису реални? Ово важи и за фамилију бројева  $q_n$  изложених у глави 2 за коју нисмо у општем случају доказали да спектар  $\Lambda(q_n)$  није дискретан.

Најважније отворено питање у овој области је хипотеза да је спектар  $\Lambda(q)$  дискретан ако и само ако је  $q$  Писоов број. Из ове тезе произилази да наведену хипотезу можемо "напасти" са барем још три стране:

- (1) Алгоритам 2 омогућава нам да проверимо да ли број  $q$  има дискретан спектар или не, и он ће се зауставити у оба случаја. Зато он може да се користи за нумеричко проверавање хипотезе (или за евентуално налажење контра примера).
- (2) Видели смо да је спектар  $\Lambda(q; \frac{\pm 1}{q-1})$  са иницијалним елементом дискретан за свако  $q > 1$ . Такође смо видели да, ако је  $q$  Писоов а  $d = P(q)$  где је  $P(x)$  полином са рационалним коефицијентима, тада је  $\Lambda(q; d)$  дискретан. Да ли постоји неки број  $q$  који није Писоов и  $d$  у интервалу  $(\frac{-1}{q-1}, \frac{1}{q-1})$  тако да је  $\Lambda(q; d)$  дискретан или се може показати да такав број не постоји? Да ли нам решење тог проблема може помоћи у решавању наведене хипотезе?

- (3) У 6. глави смо успоставили везу између спектара и атрактора динамичког система. Показано је да је скуп периодичних тачака ограничен, и да, уколико не садржи бијективне слике елемената скупа  $S$ , спектар не може бити дискретан. Овај скуп је густ у атрактору, који се пак може одредити методама фракталне геометрије, тако да се критеријум за дискретност спектра своди на проверу да ли одређена тачка припада скупу или не. Ово би даље требало разрадити и тиме можда добити критеријум за дискретност спектра  $\Lambda(q)$  када је  $q$  Салемов број или је  $|q_2| \approx 1$ .



## Библиографија

- [1] W. Adkins, S. Weintraub, (1992), *An Approach via Module Theory*, New York, Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics No. 136.
- [2] M. Barnsley, (1988), *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston-San Diego-New York-Berkeley-London-Sydney-Tokyo-Toronto.
- [3] P. Borwein, K. Hare, (2002), *Some computations on the spectra of Pisot and Salem numbers*, Math Comp **71**(238): 767–780.
- [4] David W. Boyd, (1980), *Reciprocal polynomials having small measure*, Math. Comp., **35**(152):1361–1377.
- [5] David W. Boyd, (1984), *Pisot numbers in the neighborhood of a limit point*. II. Math. Comp., **43**(168):593–602.
- [6] David W. Boyd, (1985), *Pisot numbers in the neighbourhood of a limit point*. I. J. Number Theory, **21**(1):17–43.
- [7] David W. Boyd, (1989) *Reciprocal polynomials having small measure*. II. Math. Comp., **53**(187):355–357, S1–S5.
- [8] N. Božović and Ž. Mijajlović, (1983), *Uvod u teoriju grupa*, Naučna knjiga, Beograd.
- [9] Y. Bugcaud, (1996), *On a property of Pisot numbers and related questions*. Acta Math Hungarica **73**: 33–39.
- [10] A. Dubickas, (2006), *Arithmetical properties of powers of algebraic numbers*, Bull. London Math. Soc. **38**: 70–80.
- [11] P. Erdős, M. Joó, and I. Joó, (1992), *On a problem of Tamás Varga*, Bull. Soc. Math. France **120** no. 4, 507–521.
- [12] P. Erdős and I. Joó and V. Komornik, (1998), *On the sequence of numbers of the form  $\{\epsilon_0 + \epsilon_1 q + \dots + \epsilon_n q^n : \epsilon_i \in \{0, 1\}\}$* , Acta Arithmetica, **83** (3), 201–210.
- [13] P. Erdős and V. Komornik, (1998), *Developments in non-integer bases*, Acta Math. Hungar. **79** no. 1-2, 57–83.
- [14] P. Erdős, I. Joó, and F. J. Schnitzer, *On Pisot numbers*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **39** (1996), 95–99 (1997).
- [15] K. Falconer, (1990). *Fractal geometry*, John Wiley & sons, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore.
- [16] A. Garsia, (1962). *Arithmetic properties of Bernoulli convolutions*, Trans. Amer. Math. Soc. **102**: 409–432.
- [17] K. G. Hare, *Pisot numbers and the spectra of real numbers*, Ph.d. thesis, Simon Fraser University, (2002), June.
- [18] J. Howie, (2006), *Fields and Galois theory*, Springer-Verlag London Limited.
- [19] A. Ivić, (1985), *The Riemann Zeta-Function*, New York: Wiley (2nd edn. Mineola, New York: Dover, 2003).
- [20] A. Ivić, Ž. Mijajlović, (1995), *On Kurepa's problems in number theory*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. **57**(71), 19–28.
- [21] I. Joó and F. J. Schuitzer, (1996), *On some problems concerning expansions by noninteger bases*. Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. **133**, 3–10 (1997).

- [22] Ka-Sing Lau, (1993), *Dimension of a family of singular Bernoulli convolutions*, J. Funct. Anal. **116** no. 2, 335–358.
- [23] V. Komornik, P. Loreti, and M. Pedicini, (2000), *An approximation property of Pisot numbers*, J. Number Theory **80** no. 2, 218–237.
- [24] D. H. Lehmer, (1933), *Factorization of certain cyclotomic functions*, Ann. of Math. (2), **34**(3):461–479.
- [25] Aleksandar Lipkovski, *Algebraic geometry (Selected Topics)*, (1997), Matematički Institut SANU. Zb. Rad., Beograd, **7**(15), 5–70.
- [26] Michael J. Mossinghoff, (1998), *Polynomials with small Mahler measure*, Math. Comp., **67**(224):1697–1705, S11–S14.
- [27] Žarko Mijajlović, (1987), *An introduction to model theory*, Novi Sad: University of Novi Sad, Institute of Mathematics. IV, 165 p.
- [28] Žarko Mijajlović, Miloš Milošević, Aleksandar Perović, (2007), *Sums of like powers and some dense sets*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. **81**(95), 45–52.
- [29] Y. Peres. B. Solomyak, (2000), *Approximation by polynomials with coefficients  $\pm 1$* , J Number Theory **84**: (2) 185–198.
- [30] S. Roman, (2006), *Field theory*, Graduate Texts in Mathematics 158, Springer.
- [31] R. Salem, (1945), *Power series with integral coefficients*, Duke Math. J. **12**, 153–172.
- [32] Raphaël Salem, (1963), *Algebraic numbers and Fourier analysis*, D. C. Heath and Co., Boston, Mass.
- [33] C.L. Siegel, (1944), *Algebraic integers whose conjugates lie in the unit circle*, Duke Math. J. **11** 597–602.
- [34] Thomas S. Shores, (2007), *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis*, Springer.
- [35] C. J. Smyth, (1971), *On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer*, Bull. London Math. Soc., **3**, 169–175.
- [36] D. Stankov, (2008), *A Class Of Discrete Spectra Of Non-Pisot Numbers*, Publications de l'institut Mathématique, electronically published, 7 pages.
- [37] D. Stankov, (2008), *On spectra of neither Pisot nor Salem algebraic integers*, Monatshefte für Mathematik, electronically published, <http://dx.doi.org/10.1007/s00605-008-0048-0>, 17 pages.
- [38] D. Stankov, (2001), *The fractal dimension of graphs of some functions*, Proc. of the 10th congr. of Yugoslav math., Belgrade, Yugoslavia, January 21–24, 2001. University of Belgrade, Faculty of Mathematics, 311–315.
- [39] B. Van der Waerden, (1971), *Algebra I, achte auflage der modernen Algebra*, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.
- [40] T. Vijayaraghavan, (1940), *On the fractional parts of the powers of a number*, J. London Math. Soc. **15** 159–160.
- [41] S. Weintraub, (2006), *Galois Theory*, New York: Springer.
- [42] T. Zaimi, (2007), *Approximation by polynomials with bounded coefficients*, J Number Theory **127**: 103–117.

## Индекс појмова

$\delta$ -паралелно тело, 72  
атрактор, 74  
број  
    Фибоначијев, 8  
    Перопов, 30  
    Нисоов, 2  
    Салемов, 2  
    алгебарски, 1  
    алгебарски цео, 1  
    трансцендентан, 4  
дискретан динамички систем, 73  
дискретни линеарни динамички  
    систем, 43  
доминантна сопствена вредност, 44  
доминантни сопствени вектор, 44  
фрактал, 71  
контракција, 71  
крива  
    фох-Кохова, 71  
метрика, 72  
    Хаусдорфова, 72  
низ  
    Лукасов, 2  
полином  
    минимални, 1  
    реципрочни, 3  
    всипа, 5  
пријатељска матрица полинома, 42  
репелер, 74  
скуп  
    Канторов, 71  
спектар  
    дискретан, 8  
    равномерно дискретан, 8  
спектрални радијус, 44  
субдоминантна сопствена вредност,  
    44  
субдоминантни сопствени вектор,  
    44  
трансформација  
    пекарева, 75

