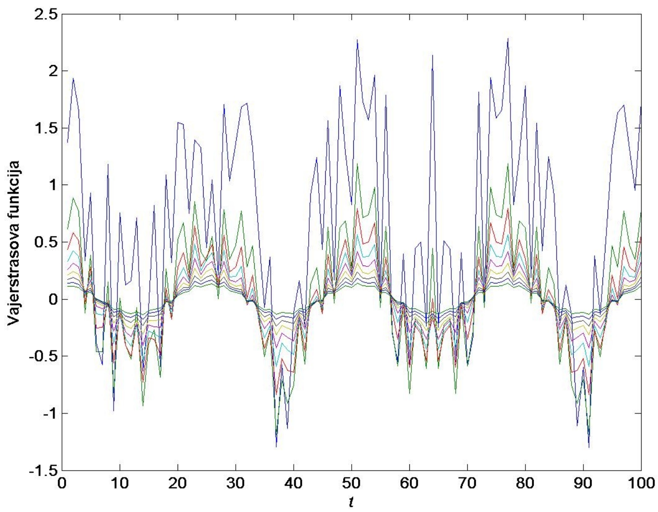
MATEMATIČKI FAKULTET

UNIVERZITET U BEOGRADU

Teorija haosa i fraktalna analiza biosignala

Doktorska disertacija

Slađana Z. Spasić



Beograd, 2007.

Mentor:

Prof. dr Aleksandar Jovanović, vanredni profesor
Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

Članovi komisije:

Prof. dr Aleksandar Jovanović, vanredni profesor
Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

Prof. dr Ljubiša Kocić, redovni profesor
Elektronski fakultet Univerziteta u Nišu

Prof. dr Boško Jovanović, redovni profesor
Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

Apstrakt

Ova disertacija je rezultat višegodišnjeg rada na istraživanju primene teorije haosa i fraktalne analize signala. Predstavljeni su matematički, algoritamski i računarski aspekti analize kompleksnih signala. Posvećena je pažnja modifikaciji i aplikaciji metoda fraktalne analize u biomedicini i meteorologiji, a posebno je dat matematičko-aplikativni doprinos u multidisciplinarnom razvoju analitičkih alata za pristup, integraciju i analizu eksperimentalnih podataka i naprednih teorija o funkcionisanju nervnog sistema.

U prvom delu disertacije (poglavlja 1, 2, 3, 4) su dati istorijski prikaz i osnovni pojmovi teorije haosa, definicija i osobine fraktalne dimenzije; u drugom delu (poglavlje 5) je dat osvrt na konstrukciju fraktala i fraktalne funkcije; u trećem delu (poglavlja 6, 7, 8, 9) su prikazani postojeći algoritmi za izračunavanje fraktalne dimenzije vremenskih serija – bioloških signala, prilog simulaciji i modeliranju aktivnosti populacije neurona, originalni pristupi merenja kompleksnosti signala, originalni fraktalni analitički alati, aplikacija fraktalne analize i njena biomedicinska semantika, kao i sveobuhvatni zaključak rezultata; u četvrtom delu (poglavlja 10,11, 12, 13) pored literature opisani su originalni programi i date posebne definicije.

Predložena je brza i jednostavna nova metoda za izračunavanje fraktalne dimenzije koristeći usrednjene apsolutne vrednosti prvih *n* izvoda (tj. konačnih razlika) signala u vremenskom domenu. Naznačene su nove mogućnosti aplikacije predloženih fraktalnih alata gde izbor parametara fraktalne analize bioloških signala, nije samo sveden na veštinu istraživača, već stvara nove perspektive za rad multidisciplinarnih timova gde je matematički doprinos bitan.

Ova disertacija je bazirana na sledećim publikacijama:

I.

1. **Spasić S.** (2006), Fractal analysis of synthetic and biological signals, Proceedings of The 4th Conference on Nonlinear Analysis and Applied Mathematics, Targoviste, (Ed. D. Teodorescu), CD.

2. **Spasić S.** (2006), Fraktalna analiza sintetičkih signala – sinusnih i Vajerštrasovih funkcija, Zbornik radova sa 50. Konferencije ETRAN-a, Beograd, 3. Knjiga, Pp.184-186.

3. **Spasić S.,** Ćulić M., Grbić G., Martać L, Kesić S., Soković. M. (2006): Fractal analysis of rat brain activity after camphor administration. The 9th International Conference, Fractal 2006, Wien, Book of Abstracts, Pp.19-20.

4. **Spasić S.**, Kalauzi A, Ćulić M., Grbić G., Martać Lj. (2005). Fractal analysis of rat brain activity after injury, *Medical & Biological Engineering & Computing,* **Vol. 43**, Issue 3, Pp.345-348.

5. Kalauzi A., **Spasić S.,** Ćulić M., Grbić G., Martać Lj. (2005). Consecutive differences as a method of signal fractal analysis. *Fractals* , **Vol.13,** No.4, Pp.283-292.

6. **Spasić S.,** Kalauzi A., Ćulić M., Grbić G., Martać Lj. (2005). Estimation of parameter k_{max} in fractal analysis of rat brain activity. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, **Vol. 1048,** Pp. 427-429.

7. **Spasić S.** Ćulić M., Grbić G., Martać Lj., Jovanović A. (2005). Fractal Analysis of Artificial and Cerebellar Signals at Sampling Frequencies of 32-4096 Hz, *3rd Serbian-Hungarian Joint Symposium on Intelligent Systems*, Subotica, Serbia and Montenegro, (ISBN: 963-7154-41-8) Pp.67-72.

8. Kalauzi A, **Spasić S.** (2004). Estimation of neuronal population activity changes in rat cerebellum using one electrode. *Comparative Physiology & Biochemistry (A)* , **Vol. 138**, 1, Pp.61-69.

9. Kalauzi A, Ćulić M, Martać Lj, Grbić G, Saponjić J, Jovanović A, Janković B, **Spasić S.** (2003). New view on cerebellar cortical background activity in rat: Simulation. *Neuroscience Research Communications*, **Vol. 32**, Pp.211-217.

II.

10. Kocić M. Lj. and **Spasić S.** (2006). Orthonormal decomposition of fractal interpolating functions, *Facta Universitatis* (Nis) *Ser. Math. Inform.*, **Vol.21**, Pp.1-10.

11. **Spasić S.** and Kocić M. Lj. (2005). Application of orthonormal decomposition on fractal interpolating functions, Zbornik radova u celini saopštenih na III Kongresu matematičara Makedonije, Struga.

Zahvalnica

Zahvaljujem se svojim profesorima: Aleksandru Jovanoviću, mentoru, kao i Ljubiši Kociću i Bošku Jovanoviću za svesrdnu pomoć u savetima i literaturi, a posebno na dobronamernosti i podršci u svim fazama izrade doktorata.

Naročitu zahvalnost dugujem Milki Ćulić, rukovodiocu projekta osnovnih istraživanja na kome sam angažovana, koja me je zainteresovala za oblast neuronauka i koja mi je pružala neprekidnu podršku u mome radu.

Zahvaljujem Aleksandru Kalauziju, naučnom savetniku, na razmeni mišljenja i na ustupanju meteoroloških podataka kao i na ustupanju podataka EEG signala zdravih ljudi dobijenih od Dr Aleksandre Vučković.

Posebno se zahvaljujem direktoru Centra za multidisciplinarne studije Željku Vučiniću, jer sam angažovanjem na naučnim projektima finansiranim od strane Ministarstva nauke Republike Srbije bila u mogućnosti da se bavim istraživačkim radom i dođem do ovih rezultata. Zahvaljujem se kolegama, posebno Mr Gordani Grbić i Mr Ljiljani Martać, iz Instituta za biološka istraživanja na timskom radu u okviru zajedničkih projekata, kao i na kolegijalnosti saradnika iz CMS-a.

Najveću zahvalnost dugujem mojoj porodici – Ljubiši, Emi, Dunji i mojim roditeljima na svakodnevnoj podršci, razumevanju i pomoći.

Sadržaj

1. Uvodne napomene o analizi biosignala - Nelinearne metode

Nelinearnim analitičkim alatima dat je poseban značaj u oblasti neuroinformatike (Wrobel, 2005) - multidisciplinarnom istraživačkom polju koje se bavi razvojem baza podataka i kompjuterskih modela u neuronaukama.

Prema izveštaju francuskog Nacionalnog instituta za istraživanja u informatici i automatici (http://www.inria.fr/rapportsactivite/RA2005/complex/complex.pdf) za 2005, danas u svetskoj nauci postoji veliko interesovanje za korišćenje fraktala kao modela složenih prirodnih fenomena. Goldberger (Goldberger i sar., 1990) smatra da fiziologija predstavlja jednu od najbogatijih laboratorija za studije fraktala i haosa kao i drugih tipova nelinearne dinamike. On ističe da rasvetljavanje fraktalnih i nelinearnih mehanizama koji učestvuju u fiziološkoj kontroli i kompleksnim mrežama signala predstavlja najveći izazov u postgenomskoj eri (Goldberger, 2002). Matematička teorija - haos ili nelinearna dinamika, primenjena u medicini (i kod zdravih i kod bolesnih ispitanika) treba da formira nov način razmišljanja kako bi se obezbedili bolji opisni, objašnjavajući i predikcioni modeli u cilju postizanja i unapređivanja zdravlja (Rambihar i Baum, 1999). Glavna motivacija za izučavanje fraktalne analize bioloških signala u primenjenoj matematici je doprinos novim pristupima u dijagnostici, terapiji i prognostici mnogih bolesti u medicini, kao i razjašnjavanje mehanizama raznih regulatornih procesa u živom organizmu, kao i kod starenja. Ova teza treba da omogući pronalaženje nekih invarijantnih parametara dinamičkog sistema koji bi eventualno otvorili put ka adaptivnom softveru za inteligentnu analizu signala biološkog porekla. Doktorska disertacija je slojevita i sadrži više koraka u odgovoru na postavljenu temu:

1. Analiza neuronskih procesa i izbor matematičkih metoda koje su primerene toj analizi.
2. Razrada, usavršavanje i predlog novih metoda i modela za analizu i modeliranje neuronske aktivnosti.
3. Implementacija metoda koje treba da omoguće doslednu primenu matematičkih modela sa integracijom kompletnog laboratorijskog ambijenta u samom softveru.

Glavni cilj ove disertacije bio je da se usavršavanjem, adaptacijom i povećanjem efikasnosti metoda fraktalne i spektralne analize prate promene u biološkim signalima nastale u različitim fiziološkim stanjima koje bi dovele do novih saznanja o funkcionisanju nervnog sistema. Takođe je bilo značajno ustanovljavanje invarijanti kao kvantifikatora haotičnog ponašanja nervnog sistema i njihovo povezivanje sa važnim promenama u dinamičkom ponašanju sistema. U teorijskom delu ove disertacije pažnja se posvećuje i afinim automorfizmima koji bi mogli predstavljati jedan od elementarnih dinamičkih elemenata u prirodi. Iteracijom afinosti može se postići nelinearnost koja karakteriše mnoge strukture i procese u živom svetu.

Ova disertacija obrađuje aktuelne a nedovoljno istražene probleme u oblasti analize signala i teoriji haosa. Neposredno su postavljeni sledeći zadaci:

1. Utvrđivanje karakteristika bioloških signala i razlika u odnosu na signale sintetičkog porekla.
2. Utvrđivanje promene fraktalne dimenzije signala koji potiče iz nervnog sistema u različitim eksperimentalnim uslovima.
3. Pronalaženje novih alata fraktalne analize.
4. Ispitivanje koncepta fraktalne interpolacije.

Treba istaći da je, u prikazu aplikacije fraktalne analize u biologiji i medicini, ovom doktorskom disertacijom i odgovarajućim originalnim radovima dat doprinos primeni fraktalne analize električne aktivnosti centralnog nervnog sistema.

2. Teorija haosa i njegova matematička osnova

2.1 Razvoj pojma haosa

Od svih naučnih oblasti koje su se pojavile u drugoj polovini dvadesetog veka nijedna nije tako brzo prodrla u sve prirodne, tehničke i društvene nauke kao teorija haosa. Teorija haosa je otvorila nov pogled na suprotstavljenost reda i nereda. Pokazalo se da iza haotičnosti stoje red i forma.

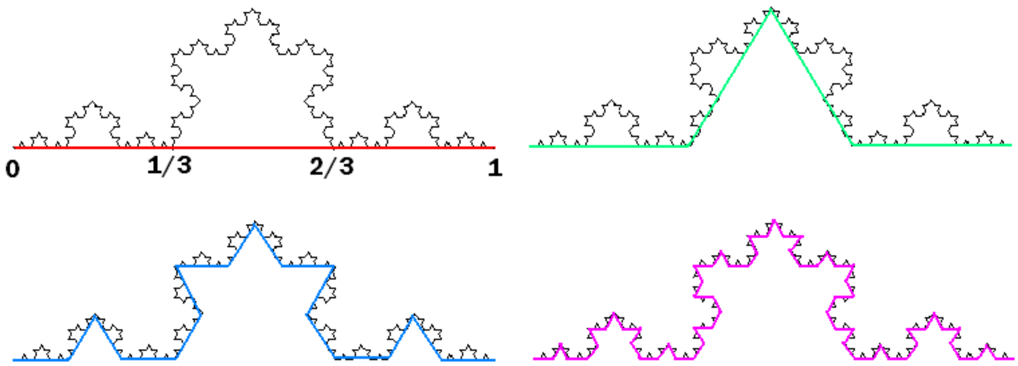
Reč *haos* (grčki χαος) potiče od starogrčkog *haino* (χaino) sa izvornim značenjem bezdan, što se odnosi na prazan, neograđen prostor (Kocić, 2007a). Stari Grci su prvi koristili ovaj termin da označe neodređenost ili nepojmljivost neke prirodne pojave, a Hesiod je prvi koristio ovaj pojam u pomenutom značenju. Kasnije, značenje pojma haos je promenjeno. Tako je Aristotel pod haosom podrazumevao *prazan prostor*. Tek mnogo kasnije, u vreme renesanse, ova reč postaje sinonim za zbrku i nered.

Neophodnost razvijanja teorije haosa se najpre pojavila u fizici. Naime, primećeno je da pod određenim uslovima, mehanički oscilatori počinju da se ponašaju tako da je njihova dinamika mogla da se opiše kao neregularna i haotična. Tako se u fizici, u drugoj polovini 20-og veka otvara novo revolucionarno poglavlje: haos. Razvoj novih oblasti fizike početkom dvadesetog veka, kvantne mehanike Ervina Šredingera i teorije relativiteta Alberta Ajnštajna, zahtevao je i nova otkrića u matematici. Pokazalo se da su neeuklidske i projektivne geometrije, u sprezi sa teorijom grupa odlično formalno sredstvo za opis novih oblasti fizike.

Haos se ne može uspešno opisati Euklidovom, a takođe ni neeuklidskim kao što su geometrije Rimana i Lobačevskog. Oblici koji se sreću u prirodi su u ogromnoj većini upravo haotični: geološki oblici, rečni tokovi, oblaci, površina mora, arhitektura živih tkiva, mreža neurona, itd. Ovakvim oblicima velike složenosti, bavi se *fraktalna geometrija.* Prvi nagoveštaji onoga što se danas naziva *teorija haosa* pojavili su se u matematici početkom 19. veka kada je Pjer Laplas uveo novu disciplinu kojom je želeo da opiše pojave koje su odstupale od uređenosti i poretka. On je uveo verovatnoću u nameri da u tim pojavama pronađe neke nepromenljive karakteristike. Suprotno načelu determinizma, teorija verovatnoće dovela je do zaključka da budućnost na slučajan način zavisi od prošlosti, što je jedan od osnovnih aksioma teorije haosa.

U drugoj polovini 19. veka, Karl Vajerštras je definisao neprekidnu funkciju realne promenljive (*Vajerštrasova funkcija*) koja nije diferencijabilna ni u jednoj tački oblasti definisanosti, a dužina njenog grafika, na ma koliko malom intervalu, je beskonačna. Međutim, verovatno najpoznatiji pojam u vezi sa teorijom haosa je *Kantorov skup* (u terminologiji teorije haosa: *Kantorov prah*) koji se dobija iterativnom procedurom posle beskonačno mnogo koraka brisanja srednje trećine intervala, počev od intervala [0, 1]. Suma dužina odstranjenih podintervala je jednaka 1, što znači da je mera Kantorovog skupa jednaka 0. S druge strane ovaj skup sadrži kontinuum mnogo tačaka tj. može se obostrano jednoznačno preslikati na interval [0, 1], tj. ne može se svesti na skup izolovanih tačaka.

Krajem 19. i početkom 20. veka pojavila su se još dva značajna rezultata. To su *Peanova* i *fon Kohova kriva*. Đuzepe Peano je 1890. godine konstruisao krive koje »ispunjavaju prostor« a koje su dobijene neprekidnim surjektivnim preslikavanjem intervala [0, 1] na jedinični kvadrat. Za ovaj rezultat Hauzdorf je 1914. napisao da je jedan od najznačajnijih rezultata u teoriji skupova. Peanova kriva je izuzetno komplikovana i ispunjava jedinični kvadrat.



Slika 1. Konstrukcija Kohove krive.

Helge fon Koh objavio je 1906. analitički izraz i konstrukciju krive poznate pod nazivom fon Kohova kriva (sl.1) i dokazao da je kriva neprekidna, beskonačne dužine i da nije diferencijabilna ni u jednoj tački. Krivu je konstruisao deljenjem duži na tri jednaka dela i zamenom srednjeg segmenta sa druge dve stranice jednakostraničnog trougla koji je konstruisan nad srednjim segmentom. Postupak se beskonačno ponavlja. Ako se prilikom konstrukcije pođe od jednakostraničnog trougla i iteracija primeni na sve tri njegove stranice rezultat je geometrijska slika poznata pod imenom fon Kohova pahuljica. Veliki matematičari Sofija Kovalevska i Aleksandar Ljapunov, naslutili su značaj ovih novih krivih. Međutim, Anri Poenkare se zaista može nazvati pretečom teorije haosa. On je prikazao skup *orbita* preslikavanja $f : X \to X$, tj. kao skup

$$\left\{x, f(x), f^2(x), \ldots \middle| x \in X\right\}$$

gde je X proizvoljan m-dimenzionalni prostor. Trajektoriju koja spaja ove tačke danas nazivamo *dinamička trajektorija*, a presek ove trajektorije sa (m-1)-dimenzionalnim prostorom je *Poenkareov presek.*

Početkom dvadesetog veka, značajan doprinos razvoju kompleksne dinamike dao je Pjer Fatu, radeći na teoriji iteracija kompleksnih analitičkih funkcija. Gaston Žilija radio je na sličnim matematičkim problemima i 1918. god, objavio je novu klasu funkcija u osnovnoj formi, a detaljnije ih je razradio u radu iz 1925. što je privuklo veliku pažnju tadašnje matematičke javnosti, ali je ubrzo i palo u zaborav. Tek 50-tak godina kasnije, proučavajući Žilijaov rad, Benoa Mandelbrot je 1974., u IBM-u pomoću računara, dobio prvi grafik jednog Žilija skupa (Glajk, 2001). Ovime je započeo razvoj sasvim nove matematičke oblasti, kao i razvoj prvih računarskih programa za crtanje grafika. U knjizi iz 1975. "Fraktali: forma, slučajnost i dimenzija" Mandelbrot prvi put uvodi pojam *fraktal* od latinske reči *fractus*, što znači fragment ili nepravilan oblik. Godine 1982, Mandelbrot objavljuje monografiju "Fraktalna geometrija prirode" proširenu i prefinjenu verziju prethodne knjige koja odmah postaje bestseler u naučnom svetu. Kako je sam autor rekao ova knjiga je "manifest i zbrka primera". U svojim traganjima za što jednostavnijim dinamičkim sistemima Mandelbrot je došao do skupa tačaka kompleksne ravni $\{z_n, n = 0,1,2,...\}$ generisanog kvadratnom rekurentnom jednačinom

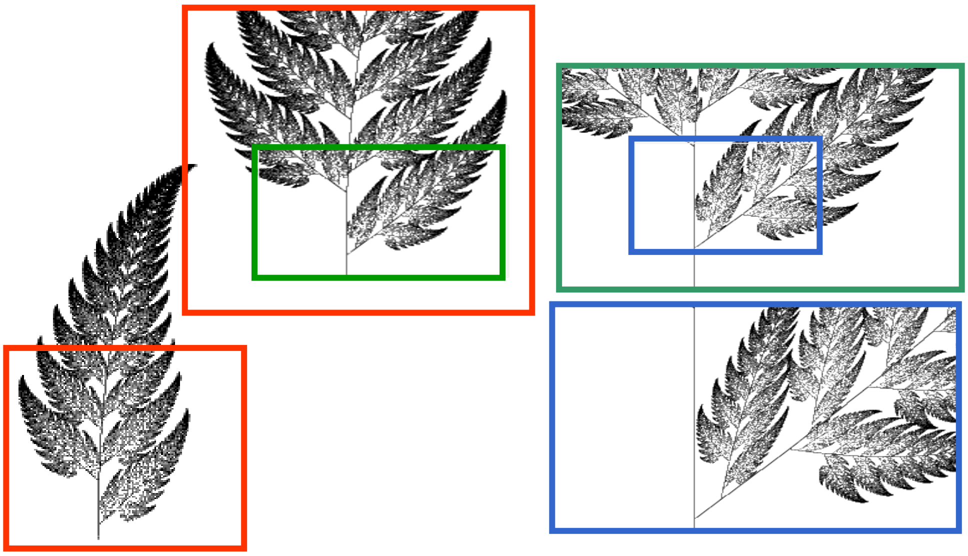
$$z_{n+1} = z_n^2 + z_0$$

gde je z_0 konstanta koja pripada kompleksnoj ravni i gde orbita od z_n ne teži beskonačnosti i pripada datom skupu tačaka $\{z_n, n = 0,1,2,...\}$. Takav skup naziva se *Mandelbrotov skup*. Prethodno navedena rekurentna jednačina je osnovna jednačina u konstrukciji objekata fraktalne geometrije koje je jedino moguće prikazati pomoću računara. Slika koja se dobija na ovaj način je veoma komplikovana i ima osobinu *samosličnosti* koja je ilustrovana na primeru paprati (sl.2). Mandelbrot je uveo pojam *fraktalne dimenzije*. Ako skup S podelimo na $N(r)$ podudarnih delova takvih da dijametar d svakog od tih delova bude d r, tada granična vrednost D (ukoliko postoji), a data je sa

$$D = \lim_{r \to 0} \log N(r) / \log(1/r)$$

predstavlja fraktalnu dimenziju skupa S. Ovako definisan pojam fraktalne dimenzije bio je način da se reši paradoks do koga je dovodila Kantorova konstrukcija. Na osnovu date definicije može se izračunati da je fraktalna dimenzija Peanove krive jednaka je 2, a vrednost fraktalne dimenzije Kohove krive iznosi približno 1,2612.

U prirodi se mogu videti objekti koje karakteriše fraktalna struktura. Fraktalni objekti su nepravilni i se javljaju mnogo češće nego pravilni geometrijski oblici; na primer, u živoj prirodi - paprat (sl. 2), karfiol, drveće čiji su delovi slični celini, hidre, pluća, neuroni, a i u neživoj prirodi - erozivne stene, morski talasi, pesak, polarna svetlost, meteorski rojevi, vazdušne turbulencije, itd.



Slika 2. Paprat - klasičan primer fraktalnog objekta i njegove samosličnosti.

U konstruktivnoj teroriji fraktalnih skupova važnu ulogu imaju afina preslikavanja (Kocić, 2005; Spasić i Kocić, 2005; Kocić i Spasić, 2005; Weisstein, http:\\mathworld.wolfram.com). Objekat vrlo složene fraktalne strukture može biti određen malim brojem kontraktivnih afinih preslikavanja. Tako na primer, Barnslijeva paprat (Barnsley, 1988) (sl.A1.1, A1.2 Appendix 1) može biti predstavljena kao invarijantan skup četiri afine transformacije. Da bismo ovo ilustrovali potrebno je dati definicije afine transformacije i iterativnog sistema funkcija (IFS).

Definicija 1. Afina transformacija w u realnoj ravni $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je definisana sa w: $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{gde je } x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Definicija 2. Iterativni sistem funkcija $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_n\}$, je konačan niz kontraktivnih afinih preslikavanja u ravni sa koeficijentima a_i, b_i, c_i, d_i, e_i i f_i, za i = 0, 1,..., n.

Dakle, Barnslijeva paprat se može zadati (Falconer,1990) pomoću sledećeg IFS:$\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4\}$ i verovatnoćama izbora određene kontrakcije p_1, p_2, p_3, p_4:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} x, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix},$$

i gde su p_1= 0.01, p_2=0.85, p_3=0.07, p_4=0.07.

Na osnovu determinističkog i randomnog algoritma za konstrukciju fraktalnih skupova pomoću IFS konstruisana je Barnslijeva paprat (Appendix 1, Primer 1.)

2.2 Neki važni pojmovi teorije haosa

U vremenu pre nego što je Mandelbrot svojim slikama fraktala uzdrmao matematičku javnost, bilo je još radova pojedinih naučnika iz raznih oblasti kao što je Edvard Lorenc, meteorolog koji je 1963. prvi izračunao i nacrtao prvih nekoliko putanja atraktora koji je danas poznat pod nazivom Lorencov atraktor. Zatim, tu su radovi lekara Ota Reslera, fizičara Davida Ruelea, matematičara Florensa Takensa,... Nije slučajno da su naučnici iz različitih oblasti uspeli da uoče čudnu, naizgled kontradiktornu dinamiku potpuno različitih sistema. Naime,u matematici i fizici teorija haosa opisuje ponašanje određenih nelinearnih dinamičkih sistema koji pos specifičnim uslovima pokazuji dinamiku veoma osetljivu na početne uslove. Kao rezultat ove osetljivosti, ponašanje haotičnih sistema izgleda kao randomno, čak i onda kada su sistemi deterministički, tj. kada su njihova buduća stanja strogo definisana početnim uslovima i kada nema slučajnih elemenata u dinamici sistema. Ovakvo ponašanje sistema poznato je kao deterministički haos ili samo haos. Teorija haosa je odgovarajuć za opisivanje na prvi pogled potpuno različitih pojava kao što su kretanje zvezda u galaksijama, gubitak čestica iz akceleratora, prostiranje impulsa duž nervnih ćelija, konstruisanje elektronskih kola, prevrtanje brodova na uzburkanom moru,, pojava polarne svetlosti, kretanje cena sirovina na berzi i slično.

Opišimo najpre neke matematičko-fizičke osobine dinamičkih sistema. *Dinamički sistemi* opisuju se pomoću običnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx}{dt} = F_{\mu}(x(t))$$

ili pomoću iterativnih preslikavanja

$$x_{n+1} = f_{\mu}\left(x_n\right)$$

gde je x vektor iz faznog prostora R^m, $m>1$, a μ parametar ili skup parametara. Ovi sistemi mogu zavisiti od vremena neprekidno ili diskretno. Dinamički sistemi kod kojih su funkcije $F_{\mu}(x)$ ili $f_{\mu}(x)$ nelinearne nazivaju se *nelinearni dinamički sistemi.* Neuređeno ili haotično kretanje može nastati samo kod ovih sistema. Svi poznati fizički sistemi su, u stvari, nelinearni, ali se oni mogu ponašati gotovo kao linearni, kada su blizu uspostavljanja ravnoteže. Veoma jednostavan nelinearni sistem može imati krajnje složeno ponašanje.

Stanje sistema u vremenskom trenutku t potpuno se može opisati skupom od m promenljivih:

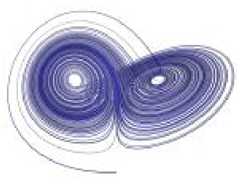
$$x_t = \left(x_1(t),\ldots,x_m(t)\right),$$

gde $x_i(t)$ može biti bilo koja fizička veličina (brzina, položaj, temperatura, …) u trenutku t. Apstraktni prostor u kome se predstavljaju tačke x_t zove se *fazni prostor*. Odnosno, bilo koje stanje sistema u vremenskom trenutku t, predstavljeno je tačkom u faznom prostoru, a sve informacije o njegovom položaju, brzini ili frekvenciji sadržane su u koordinatama te tačke. Ako se sistem menja na neki način, tačka se pomera na nov položaj u faznom prostoru. Ako se sistem stalno menja, tačka opisuje putanju u faznom prostoru. Rešavanjem jednačina nelinearnih dinamičkih sistema sa početnim uslovom x_0,

$$x(t) = \phi_t(x_0)$$

dobijaju se *trajektorije* ili *orbite*. *Atraktor* je skup trajektorija u koji evolvira dinamički sistem posle dovoljno mnogo vremena. To znači da tačke koje pripadaju atraktoru ostaju u ovom skupu čak i posle malih promena sistema. Geometrijski gledano, atraktor može biti fiksna tačka, kriva ili složeni skup sa fraktalnom strukturom koji se naziva čudni atraktor. Ovaj naziv dali su David Ruele i Floris Takens u zajedničkom radu 1971. godine.

Trajektorije koje polaze iz domena atrakcije posle dovoljno dugog vremena završavaju u atraktoru i mogu biti periodične, haotične ili nekog drugog tipa. Odatle sledi jednostavna definicija: *atraktor* je skup tačaka nagomilavanja (trajektorije) kada t , za svako x iz domena atrakcije.



Slika 3. Lorencov atraktor. Prvi čudni atraktor otkrio je i opisao Edvard Lorenc 1963. godine, ispitujući jednačine dinamike fluida radi boljeg razumevanja procesa u

atmosferi. Lorenc je ustanovio da trajektorije u faznom prostoru Navije-Stoksovih jednačina konvergiraju ka objektu prikazanom na slici.

Oblik čudnih atraktora je najčešće veoma složen i neobičan, a najpoznatiji su Lorencov, Reslerov i Enoov.

Neke osobine čudnog atraktora su:

– to je ograničeni deo faznog prostora zapremine nula koji privlači sebi sve trajektorije iz domena atrakcije;

– on je kompaktan, tj. ne sadrži odvojene celine;

– tipična trajektorija mora tokom vremena evolucije da „poseti“ svaku tačku atraktora;

– čudni atraktori su okarakterisani fraktalnom dimenzijom i imaju svojstva fraktala;

– i osnovna osobina, osetljivost na početne uslove kao direktne posledice anizotropne kontrakcije faznog prostora. Ovo za posledicu ima da će se u početku veoma bliske tačke tokom vremena naći proizvoljno daleko jedne od drugih. Ovo pak dovodi do principijelne neodredljivosti njihovog položaja, do porasta entropije u sistemu, i haosa.

Međutim, čudni atraktor ispoljava paradoksalno ponašanje:

– determinističko, jer određuje ponašanje sistema tj. predstavlja ograničenu oblast faznog prostora;

– haotično, jer je ponašanje sistema nepredvidljivo tj. nemoguće je predvideti buduća kretanja sistema.

Antagonizam ovih osobina najbolje se vidi na sl. 3. Ograničena površina atraktora, kao skupa svih stanja sistema, predstavlja njegovu determinisanost. Možemo biti sigurni da stanje sistema nece biti nikada u nekoj tački van oblasti atraktora. Osobina haotičnosti predstavljena je nemogućnošću predviđanja u kojoj će se tački atraktora sistem naći posle izvesnog vremena. Kako komponente nelinearnog sistema deluju jedne na druge, putanje sistema mogu biti sasvim različite, sistem je nestabilan i može na nepredvidive načine menjeti putanje u atraktoru. Međutim, čudni atraktor će uvek nametati red neperiodičnim putanjama tj. putanje nikada neće “izaći” van atraktora. Ova nepravilnost asocira na svojstvo haotičnih sistema poznato kao „osetljiva zavisnost od početnih uslova“. Iz napred rečenog, haos predstavlja aperiodično kretanje koje generiše čudne atraktore u faznom prostoru. Haotični sistem će biti nepromenljiv ako se njegova određena vrsta neregularnosti održi nasuprot malim ometanjima. Lorencov sistem je primer toga. Haos koji je Lorenc otkrio bio je, sa svom svojom nepredvidljivošću, stabilan. Bio je lokalno nepredvidiv, globalno nepromenljiv.

Dakle, ponašanje nelinearnih sistema potpuno je nepredvidivo i uvek različito. Kada se izbace iz ravnoteže, oni spontano prelaze u nova, složenija i veoma organizovana stanja. Alternativa tome je da postanu apsolutno haotični. Često postoje određene tačke, *tačke bifurkacije*, u kojima je nemoguće bilo šta predvideti, i sistem tada postaje izuzetno osetljiv i na najmanja kretanja.

3. Fraktali i biološki modeli

Kao što smo videli ‘haos’ predstavlja čitav spektar kompleksnog dinamičkog ponašanja koji varira od blago narušene linearnosti, preko periodičnosti, multiperiodičnosti do skoro sasvim nasumičnog i stohastičkog ponašanja ili rasporeda delova nekog sistema.

Značajna karakteristika fizioloških sistema je njihova izuzetna kompleksnost, kako po morfologiji, tako i po funkciji. Brojni primeri kompleksnih anatomskih struktura pokazuju geometriju nalik fraktalnoj (Goldberger et al., 2002). Morfologija raznih tkiva može se lako prepoznati kao dovoljno kompleksna i sa izrazitim elementima samosličnosti da već na prvi pogled ispunjava osnovne kriterijume fraktalnosti. Osim toga, funkcija mnogih organa pokazuje elemente haotičnosti u okviru dinamike svojih aktivnosti.

Domeni u organizaciji bioloških modela mogu biti:

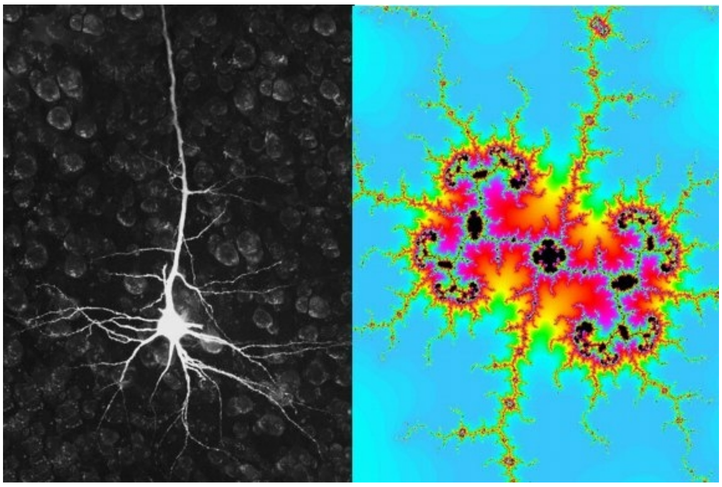
- Morfologija tkiva i organa (topološki domen),
- Organizacija rada tkiva i organa (topološko-vremenski domen),
- Funkcija tkiva i organa (vremenski domen).

Pritom treba imati u vidu da kao što krug nacrtan šestarom nije idealan matematički krug već njegova aproksimacija, tako nigde u prirodi ne postoje idealni fraktali. Ali mnogi “fraktalni” objekti kao što su mahovina, paprat, drveće, perje, itd. su mnogo bliži idealnim fraktalima nego ijednom jednostavnom geometrijskom obliku. I zbog toga je mnogo prirodnije te objekte predstaviti idealnim fraktalima nego bilo kojom klasičnom euklidskom konstrukcijom.

3.1 Morfologija tkiva i organa u topološkom domenu

Osvrnućemo se najpre na morfološki aspekt, ili na topološku organizaciju nekih tkiva koja imaju važnu ulogu u ljudskom organizmu. Po morfologiji se ističu tri grupe struktura tipa fraktala: *razgranate*, *sunđeraste* i *slojevite*.

U *razgranate* strukture možemo ubrojati neurone, plućno i bubrežno tkivo, krvne sudove, resice unutar tankog creva, pljuvačne žlezde, kanale jetre itd. Na sl. 4 je prikazana slika neurona i mogući fraktalni model koji prikazuje njegovu topologiju. Na primeru neurona možemo videti da on nije idealan fraktal, jer se grananje dendrita ne nastavlja u beskonačnost. Takođe, fraktalni model koji aproksimativno predstavlja neuron nije idealan, jer je to samo kompjuterska slika iscrtana linijom određene debljine, a proces crtanja ide samo do detalja koji se mogu graficki prikazati. Međutim, fraktalna aproksimacija morfologije neurona je bolja nego bilo koja druga geometrijska aproksimacija sastavljena od sfera, kupa, cilindara, piramida i prizmi. Razlog tome je što neuroni imaju neregularne oblike i u osnovi diskontinualne morfogenetske obrasce, što je povezano i sa njihovim funkcionalnim diverzitetom. Formiranje teoretskog modela koji opisuje svo bogatstvo tako kompleksne strukture predstavlja jedan od glavnih izazova teoretske biologije i primenjene matematike (Fernandez i Jelinek, 2001). Karakterizacija morfologije nervnih ćelija zahteva korišćenje više kvantitativnih parametara. Jedan od njih je fraktalna dimenzija kao karakteristika koja predstavlja stepen kompleksnosti razvoja i sazrevanja neurona. Određivanje fraktalne dimenzije neurona u morfološkom smislu, pored drugih uobičajeno korišćenih morfometrijskih kriterijuma, može mnogo da pomogne u određivanju različitih tipova neurona ili neurona koji pokazuju morfološke različitosti tokom razvoja (rasta), bolesti ili eksperimentalnih tretmana. Tako Zhang i saradnici (Zhang i sar., 2006) kvantifikuju degenerativne promene u beloj moždanoj masi u normalnom procesu starenja kod ljudi upravo pomoću fraktalne dimenzije.



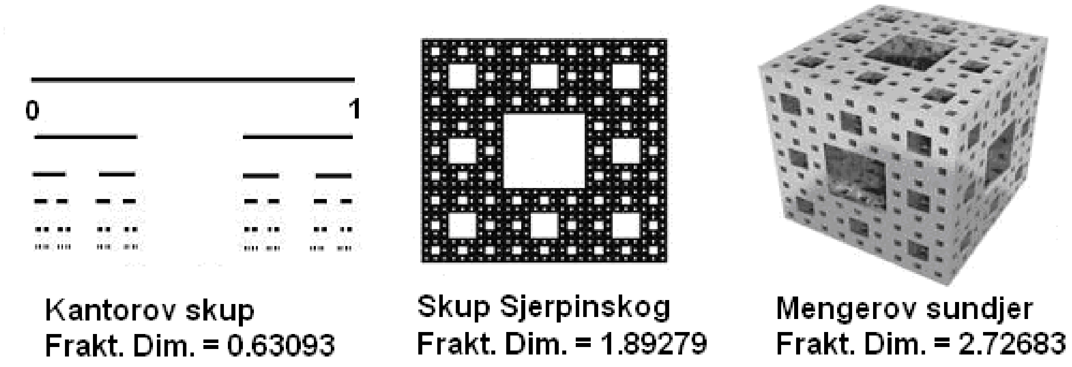
Slika 4. Neuron (levo) i mogući fraktalni model neurona (desno)

Sledeću grupu predstavljaju **sunđeraste** ili **šupljikave** strukture. Mnoga tkiva imaju ovakvu prostornu strukturu, a jedan od primera je koštano tkivo. Šupljikavost se u fraktalnoj geometriji odmah dovodi u vezu sa osnovnim modelom – sa Kantorovim (*Cantor*) fraktalnim skupom. Šupljikavost ovog skupa je posledica procesa oduzimanja (odstranjivanja) srednje trećine u svakoj etapi iterativnog procesa. Često se Kantorov skup zove i "skup dobijen odstranjivanjem srednje trećine". Počinje se sa jediničnim intervalom i u svakoj sledećoj etapi se od skupa dobijenog u predhodnoj iteraciji oduzima srednja trećina svakog segmenta. Dakle, u prvoj iteraciji to je segment [1/3, 2/3]. U drugoj to su dva segmenta, [1/9, 2/9] i [7/9,8/9] itd. U svakoj sledećoj iteraciji broj odstranjenih segmenata se duplira. Ako se proces nastavi do beskonačnosti dobija se da je ukupna dužina svih odstranjenih intervala

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots\right) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-2/3} = 1\,,$$

pa je dužina Kantorovog skupa jednaka nuli.

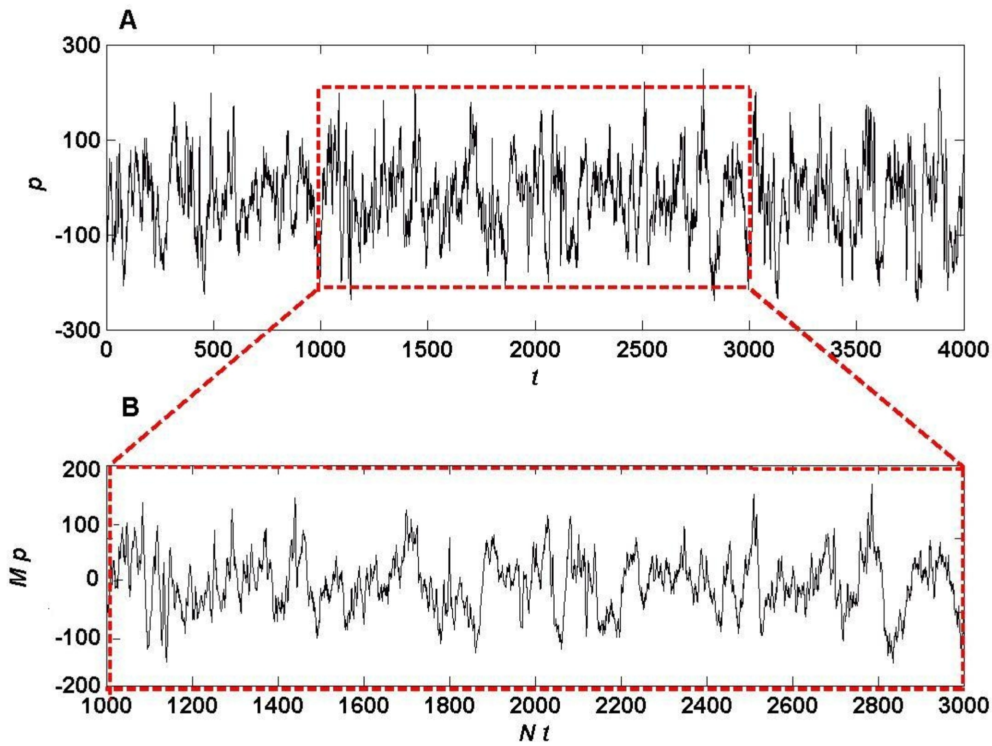
Slično tome, skup Sjerpinskog (sl. 5, sredina) nastaje iteracijom procesa odstranjivanja "srednjeg" kvadrata dok Mengerov sunđer (sl. 5, desno) nastaje analognim odstranivanjem “srednje” kocke. Mengerov sunđer može biti model za prethodno navedeni primer koštanog tkiva.



Slika 5. Kantorov skup (jednodimenzioanalan), Skup Sjerpinskog (dvodimenzionalan) i Mengerov sunđer (trodimenzionalan).

3.2 Funkcija tkiva i organa u vremenskom domenu

Dinamička analiza biomedicinskih fenomena može biti urađena ili matematičkim modeliranjem ili analizom vremenskih serija (Savi, 2005). Samosličnost tj. fraktalne osobine možemo naći u biološkim signalima (vremenskim serijama) kao npr. u promeni električnog potencijala u moždanim strukturama, u srčanom ritmu (Vuksanović, 2005), itd. Najveći izazov za detekciju i kvantifikovanje samosličnih osobina u kompleksnim vremenskim procesima je činjenica da ovakvi procesi predstavljaju zavisnost od dve fizičke veličine; na x-osi je predstavljeno vreme, a na y-osi je predstavljena promena neke fizičke veličine u vremenu tj. u datom primeru promena električnog potencijala u mozgu (sl. 6). Zbog toga se za poređenje ovakvih podataka koriste dva uveličavajuća faktora, tj. skalirajući faktori duž x i y ose. Posmatrajući promenu električnog potencijala mozga u vremenskom domenu možemo ilustrovati koncept samosličnosti kod vremenskih nizova. Na sl. 6 prikazana su dva prozora sa dve vremenske skale n_1 i n_2 kod samosličnog niza podataka $p(t)$, a na sl. 6B. dato je uvećanje prozora sa vremenskom skalom n_2 gde se vidi vremenski niz sa sl. 6A koji je uvećan faktorom uvećanja N po x osi i faktorom uvećanja M po y osi.



Slika 6. Samosličnost vremenske serije na primeru neurobiološkog signala.

4. Fraktalna geometrija

U ovom poglavlju daćemo pregled nekih osnovnih koncepata fraktalne geometrije: definiciju fraktala i fraktalne dimenzije, neke od načina za kvantifikovanje fraktalne strukture. Na kraju ćemo dati opis iterativnog sistema funkcija i dimenzije sličnosti.

Invarijantni skupovi haotičnih dinamičkih sistema su često fraktali. Pojam "fraktal" za sada nema jedinstvenu definiciju (Pap E, 1999). Zato Falkoner (Falconer, 1990) daje opisnu definiciju fraktala:

a. Fraktal poseduje finu strukturu na svakoj skali;
b. Zbog svoje neregularnosti, ne može se opisati klasičnom geometrijom;
c. Ima osobinu samosličnosti;
d. Njegova fraktalna dimenzija je obično veća od topološke dimenzije;
e. U najvećem broju slučajeva se definiše rekurzivno.

S druge strane, Mandelbrot (Mandelbrot, 1983) daje nešto drugačiju definiciju: Fraktalni skup je skup u metričkom prostoru čija je Hausdorf-Bezikovičeva dimenzija D veća od njegove topološke dimenzije D_T.

4.1 Pojam fraktalne dimenzije

Kako je prethodno rečeno, fraktali predstavljaju geometrijske obrasce haosa. Pored samosličnosti, jedna od najznačajnijih osobina fraktala je da je njihova fraktalna dimenzija obično veća od topološke dimenzije. Većina popularnih alata za opisivanje fraktalne strukture su u stvari različite formulacije fraktalne dimenzije. Topološka dimenzija skupa koja je uvek prirodan broj postaje neodgovarajuća mera za neregularne skupove kao što su fraktali. Grubo govoreći, fraktalna dimenzija je broj koji predstavlja veličinu prostora koji zauzima skup. Ona predstavlja generalizaciju intuitivnog shvatanja pojma dimenzije geometrijskih objekata, kao što je predstava o tome da je tačka dimenzije nula, linija dimenzije jedan, itd. Kriva beskonačne dužine, ali površine nula trebalo bi da ima fraktalnu dimenziju između jedan i dva. Najčešće pominjane u literaturi su *Hausdorfova dimenzija* i *dimenzija prebrojavanja kocki.* Hausdorfova dimenzija je realan broj koji karakteriše geometrijsku kompleksnost ograničenog podskupa u R^n, ali je teško praktično je izračunati u određenom slučaju. Ona se još naziva *Hausdorf-Bezikovičeva dimenzija.* (Pap, 1999; Hilborn, 2004). Dimenzija prebrojavanja kocki se bazira na pojmu “merenja na skali”. Ova definicija je jednostavna za određivanje i kompjutersku implementaciju. Daćemo formalne definicije ovih dimenzija.

4.1.1 Hausdorf-Bezikovičeva dimenzija

Definicija 3. Za podskup F od R^n, s 0 i proizvoljno 0 definišemo skupovnu funkciju

$$ {}_{\delta}(F) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} d(U_i)^s \;\middle|\; \{U_i\} \text{ je } \delta\text{- pokrivač za } F \right\} $$

gde je $d(A) = \sup\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \mid \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in A\}$ za $A \subset R^n$, a $\|\boldsymbol{x}\| = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}$ uobičajena norma u R^n za $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$.

Pod - pokrivačem skupa F podrazumevamo familiju skupova $\{U_i\}$ sa osobinom $F \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ i $d(U_i) < \delta$ za i $\boldsymbol{N}$. Onda je

$$(F) = \lim_{\delta \to 0} \quad {}_{\delta}(F)$$

s – dimenzionalna Hausdorfova mera od F.

Hausdorfova dimenzija skupa F je data sa

$$\dim_{\mathbf{H}} F = \inf\{s \mid \quad (F) = 0\} = \sup\{s \mid \quad (F) = \infty\}.$$

Ako je s ceo broj, onda je s-dimenzionalna Hausdorfova mera ekvivalentna Lebegovoj meri (Pap,1999). U teoriji fraktala ova osobina se uobičajeno zove prebrojiva stabilnost. Mi nismo eksplicitno koristili Hausdorfovu dimenziju u ovom radu, ali je njena definicija navedena zato što je ova dimenzija neka vrsta ekvivalenta fraktalnoj dimenziji. Hausdorfova dimenzija Kantorovog skupa je log2 / log3.

4.1.2 Dimenzija prebrojavanja kocki

Druga vrsta fraktalne dimenzije izvedena je iz *mere prebrojavanja kocki* (eng. box-counting measure, box-counting dimension) i zove se *dimenzija prebrojavanja kocki* i *kapacitet Kolmogorova* ili *dimenzija kapaciteta* (eng., Kolmogorov capacity, capacity dimension). Na dinamiku sistema prvi put je primenio Kolmogorov (Kolmogorov, 1958). Dimenzija prebrojavanja kocki je nešto jednostavnije definisana od Hausdorf-Bezikovičeve dimenzije. Njena definicija i prateće teoreme se koriste kao osnova za eksperimentalno određivanje fraktalne dimenzije fizičkih skupova.

Definicija 4: Donja i gornja dimenzija prebrojavanja kocki podskupa F od R^n su date sa

$$\underline{\dim}_{\mathbf{B}} F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \qquad \overline{\dim}_{\mathbf{B}} F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \tag{10}$$

respektivno. Tada je dimenzija prebrojavanja kocki za F data sa

$$\dim_{\mathbf{B}} F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{11}$$

ako postoji granična vrednost, gde *N (F)* može biti jedna od sledećih veličina:

a. najmanji broj zatvorenih lopti poluprečnika koji pokrivaju skup *F*;

b. najmanji broj kocki ivice koji pokrivaju *F*;

c. broj kocki u -mreži kocki koje seku *F*;

d. najmanji broj skupova dijametra ne većeg od koji pokrivaju *F*;

e. najveći broj disjunktnih lopti poluprečnika sa centrima u *F*.

Naravno, granična vrednost (11) ne mora da postoji i u tom slučaju se koriste granične vrednosti iz (10). U opštem slučaju dimenzije definisane definicijama 3 i 4 nisu ekvivalentne, već važi $\dim_{\mathbf{H}}$ $\dim_{\mathbf{B}}$. Detalji su dati u (Falconer,1990).

4.1.3 Teoretsko određivanje fraktalne dimenzije i neke njene osobine

Teorema 1: (o dimenziji prebrojavanja kocki; Barnsley,1988) Neka je F neprazan, kompaktan podskup od R^n, a R^n euklidski metrički prostor. Izvršimo pokrivanje R^n zatvorenim kockama stranice $(1/2^m)$. Neka $N_m(F)$ označava broj kocki stranice dužine $(1/2^m)$ koje presecaju F . Ako

$$D = \lim_{m \to \infty} \frac{\log N_m(F)}{\log 2^m}$$

onda F ima fraktalnu dimenziju $\dim_{\mathbf{B}} F = D$.

Teorema 2: Neka je n pozitivan ceo broj i neka je dat metrički prostor (R^n, euklidska mera). Fraktalna dimenzija $\dim_{\mathbf{B}} F$ postoji za sve neprazne kompaktne skupove F iz R^n. Neka je G takođe zatvoren i kompaktan u R^n tako da je F G, a sa $\dim_{\mathbf{B}} G$ označimo fraktalnu dimenziju od G. Tada je $\dim_{\mathbf{B}} F$ $\dim_{\mathbf{B}} G$.

Posebno važi

$$0 \quad \dim_{\mathbf{B}} F \quad n.$$

Dokaz: Dokazujemo teoremu za slučaj $n = 2$. Bez gubljenja opštosti pretpostavimo da je $F \quad E$, gde je E kompaktan jedinični kvadrat u R^2. Sledi da je $N\ (F) \quad N\ (E)$ za sve 0. Dakle, za sve 0 1 imamo

$$0 \quad \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} \quad \frac{\log N_{\delta}(E)}{-\log \delta}.$$

Sledi, da

$$0 \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_{\delta}(E)}{-\log \delta} = 2$$

Dakle, lim desne strane nejednakosti postoji i jednak je 2, a iz toga sledi i da postoji lim leve strane i ograničen je odozgo sa 2, a odozdo nulom. Dakle, fraktalna dimenzija $\dim_{\mathbf{B}} F$ je definisana, nenegativna je i manja ili jednaka 2.

Zamenom jediničnog kompaktnog kvadrata E nepraznim kompaktnim skupom G dobija se $\dim_{\mathbf{B}} F \quad \dim_{\mathbf{B}} G$. Kraj dokaza.

Teorema 3: Neka je n pozitivan ceo broj i neka je dat metrički prostor (R^n, d), gde je d euklidska metrika. Neka su F i E neprazni kompaktni skupovi iz R^n. Neka je $\dim_{\mathbf{B}} F$ fraktalna dimenzija skupa F data definicijom 3. Ako su $\dim_{\mathbf{B}} E$ i $\dim_{\mathbf{B}}(F \quad E)$ fraktalne dimenzije skupova E i $F \quad E$ respektivno i ako je $\dim_{\mathbf{B}} E \quad \dim_{\mathbf{B}} F$ tada je

$$\dim_{\mathbf{B}}(F \quad E) = \dim_{\mathbf{B}} F.$$

4.1.4 Eksperimentalno određivanje fraktalne dimenzije

Kada se susrećemo sa skupovima iz realnog fizičkog sveta nastaje praktična potreba za određivanjem njihove fraktalne dimezije. Najpre se vrši modeliranje tih skupova na najbolji mogući način kao podskupova u (R^2, d) ili (R^3, d), gde je d euklidska metrika. Zatim se na bazi definicije fraktalne dimenzije, a nekada na osnovu navedenih teorema, kao što je teorema o prebrojavanju kocki analizira model kako bi se odredila fraktalna dimenzija realnog fizičkog skupa. Međutim, još uvek nije široko prihvaćen jedinstveni način za pridruživanje fraktalne dimenzije skupu eksperimentalnih podataka.

Dakle, ako imamo skup tačaka F u (R^2, d) čiju fraktalnu dimenziju želimo da izračunamo, počinjemo pokrivanje tog skupa diskovima radijusa , gde uzima vrednosti $_1$, $_2$, $_3$,..., $_m$ tako da je $_1$ $_2$ $_3$ ... $_m$, m N. Za svaki pokrivač skupa F diskovima radijusa $_i$ broj diskova tog pokrivača je $N_i(F)$. Dakle imamo sledeći skup eksperimetalno dobijenih podataka u tab. 1:

Tabela 1: Minimalan broj diskova različitog radijusa $_i$, i=1,m potrebnih da se pokrije dati skup F.

$_i$	$_1$	$_2$	$_3$	...	$_m$
$N_i(F)$	$N_1(F)$	$N_2(F)$	$N_3(F)$	...	$N_m(F)$

Ove podatke prikazaćemo u log-log formatu u sledećoj tabeli (tab. 2):

Tabela 2: Podaci u log- log formatu dobijeni iz tabele1. potrebni za eksperimentalno određivanje fraktalne dimenzije skupa F.

- ln $_i$	- ln $_1$	- ln $_2$	- ln $_3$	...	- ln $_m$
ln $N_i(F)$	ln $N_1(F)$	ln $N_2(F)$	ln $N_3(F)$	...	ln $N_m(F)$

Podaci iz tabele 2. mogu se grafički prikazati u koordinatnom sistemu i metodom najmanjih kvadrata određuje se prava linija koja aproksimira ovaj skup podataka. Nagib ove prave predstavlja aproksimaciju fraktalne dimenzije skupa F.
Ovako izračunata fraktalna dimenzija predstavlja eksperimentalno merljiv parametar koji može biti korišćen da kvantifikuje haos (Barnsley, 1988).

4.1.5 Odnos Hausdorf-Bezikovičeve, fraktalne i topološke dimenzije

Teorema 4: Neka je n pozitivan ceo broj i neka je F podskup metričkog prostora (R^n, d), gde je d euklidska metrika. Neka je $\dim_{\mathbf{B}} F$ fraktalna dimenzija skupa F i neka je $\dim_{\mathbf{H}} F$ Hausdorf-Bezikovičeva dimenzija skupa F. Tada je

$$0 \leq \dim_{\mathbf{H}}(F) \leq \dim_{\mathbf{B}} F \leq n.$$

4.1.6 Algebarske osobine fraktalne dimenzije

Jednostavnom primenom definicije Hausdorfove dimenzije dobija se:

1. Ako je $F \subset E$ onda je $\dim_{\mathbf{H}} F \leq \dim_{\mathbf{H}} E$,
2. $\dim_{\mathbf{H}}(F \cup E) = \mathbf{max}\{\dim_{\mathbf{H}} E, \dim_{\mathbf{H}} F\}$.

Zamenom **max** supremumom, osobina 2 važi i za prebrojivu uniju skupova. Ove osobine važe i za dimenziju prebrojavanja kocki, za podskup i konačnu uniju skupova, dok za prebrojivu uniju ne važi.

4.2 Druge karakterizacije fraktalne strukture

Dimenzija fraktala je mera geometrijske neregularnosti na malim skalama. Hausdorfova i dimezija prebrojavanja kocki su invarijantne pri bi-Lipšicovim transformacijama: transformacije za koje postoje konstante c_1, c_2 takve da

$$c_1|x-y| \le |f(x)-f(y)| \le c_2|x-y|.$$

Skupovi sa pozitivnom Lebegovom merom mogu imati strukturu na proizvoljno malim skalama. Takvi skupovi se zovu *puni fraktali* (eng. fat fractals). Hausdorfova ili dimenzija prebrojavanja kocki punih fraktala je celobrojna i samim tim gubi se karakterizacija fraktalne prirode skupa.

Na kraju ćemo pomenuti još i *multifraktale*. Multifraktalnost počiva na razmatranju da li raspodela tačaka skupa, tj. mera može imati fraktalne osobine. Ovo je čest slučaj kod dinamičkih sistema. U prikazu osnovnih koncepata fraktalne geometrije (Robins, 2000), prvi korak u multifraktalnoj analizi je tačkasta lokalizacija koncepta dimenzije. Ovo se postiže analizom skaliranja fraktalne mere loptama $B_r(x)$ sa centrom u tački x i radijusom r 0:

$$\dim_{\mathbf{loc}}\mu(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\log \mu(B_r(x))}{\log r}.$$

Posmatraju se podskupovi fraktala koje čine tačke sa istom lokalnom dimenzijom. Raspodela dimenzija ovih podskupova je multifraktalni spektar. Multifraktalnost je otkrivena u mnogim osnovnim fizičkim i hemijskim procesima, a u skorije vreme i kod fluktuacije srčanih otkucaja zdravih osoba (Amaral, 2004).

4.2.1 Eksponenti Ljapunova

Procena osobina nelinearnih dinamičkih sistema zasniva se na statističkim i geometrijskim osobinama atraktora. Ove osobine se mogu izraziti preko entropije, koja kvantifikuje kompleksnost sistema, različitih dimenzija (informaciona, Hausdorfova ili fraktalna, korelaciona, dimenzija samo-sličnosti, itd.) koje kvantifikuju broj stepeni slobode, kao i preko eksponenata Ljapunova koji predstavljaju kvantitativnu meru stepena haotičnosti tj. mere osetljivost sistema na početne uslove (Hilborn, 2004; Eckmann i Ruelle, 1985). Ideja rekonstrukcije atraktora iz eksperimentalnih podataka je osnov za ispitivanje nelinearne dinamike posmatranog sistema. Ovakva ideja se zasniva na dve osnovne pretpostavke:

1. posmatranje dinamike sistema može se ograničiti na konačno dimenzioni atraktor u faznom prostoru;
2. moguće je obrazovati nekoliko različitih signala $y_i(t)$ iz originalnog signala $x(t)$.

Jedna od metoda kojom se uz ove osnovne pretpostavke može rekonstruisati atraktor jeste *metoda koordinata kašnjenja* (eng. time-delay coordinate). Atraktor rekonstruisan pomoću koordinata kašnjenja jeste m-dimenzionalna projekcija čiji izgled tj. kvalitet rekonstrukcije zavisi od izbora dva parametra: - *vremena kašnjenja* (eng. time delay) i m - minimalne umetnute dimenzije (eng. minimum embedding dimension). Vreme kašnjenja povezuje stanje sistema u nekom trenutku t sa nekim prethodnim stanjem t - . Minimalna umetnuta dimenzija predstavlja broj promenljivih koje generišu dati vremenski niz.

Eksponenti Ljapunova, $_j$ (j = 1, 2, ..., m) definišu meru osetljivosti sistema na perturbacije u početnim uslovima preko brzine divergencije trajektorija dinamičkog sistema u faznom prostoru. Kod diskretnih vremenskih nizova ova mera se odnosi na proračun brzine divergencije tačaka koje su u početnom trenutku bile bliske. Vrednost $_j$ zavisi od početnih uslova, kao i od smera perturbacije sistema u početnom trenutku. Može se pokazati da većina perturbacija dovodi do vrednosti najvećeg eksponenta Ljapunova (LLE) $_1$, iako istovremeno postoje i pravci koji dovode do manjih vrednosti ($_1$ $_2$ ... $_m$).

Prisustvo ili odsustvo vrednosti $_j$ = 0 u spektru eksponenata Ljapunova govori o tome da li se dinamika sistema može opisati diferencijalnim jednačinama ili ne. Ako se dinamika sistema može opisati diferencijalnim jednačinama, bar jedna vrednost $_j$ će biti jednaka 0. Stabilni periodični sistemi imaće jedan karakteristični eksponent jednak 0 i ostale negativne. To znači da je rastojanje između trajektorija nezavisno od vremena. Kvaziperiodični sistemi, sa k nezavisnih frekvencija, imaće k eksponenata jednakih 0 i ostale negativne. Nijedan od ovih sistema neće imati vrednost LLE 0. Kada je najveći eksponent Ljapunova pozitivan, sistem se definiše kao haotičan ili osetljiv na početne uslove. Kao što nam je poznato, kod haotičnih sistema male perturbacije u početnim uslovima mogu dovesti do velikih razlika u stanjima sistema u nekom posmatranom trenutku. Pozitivne vrednosti LLE javljaju se samo u sistemima čija vremenska evolucija u faznom prostoru ima najmanje tri dimenzije (Eckmann i Ruelle, 1985). Za procenu osetljivosti sistema na početne uslove preko najvećeg eksponenta Ljapunova potrebno je poznavanje dinamike datog sistema tj. poznavanje osobina atraktora u faznom prostoru. Međutim, u eksperimentalnim uslovima najčešće se meri samo jedna fizička veličina u funkciji vremena, a fazni prostor nije unapred poznat. Vrednost najvećeg eksponenta u spektru eksponenata Ljapunova obrnuto je proporcionalna vremenu za koje se može predvideti ponašanje sistema.

Ljapunovljevi eksponenti se u opštem slučaju ne mogu izračunati analitički i zbog toga se u većini slučajeva služimo numeričkim tehnikama. Za izračunavanje Ljapunovljevih eksponenata iz konačnih skupova eksperimentalnih podataka, predložene su i korišćene razne metode (Babloyantz i Destexhe, 1986; Das i sar., 2002). Ukratko ćemo izneti metodu za određivanje LLE koju su predložili Rozenštajn i saradnici (Rosenstaine i sar., 1994) koja je pogodna za procenu LLE kod kratkotrajnih vremenskih nizova sa prisustvom šuma. Metoda se zasniva na praćenju divergencije parova najbližih susednih tačaka i usrednjavanju vrednosti LLE dobijenih za sve parove.

Za diskretnu vremensku seriju najveći eksponent Ljapunova se definiše na sledeći način:

$$\lambda_1(i) = \frac{1}{i \cdot t_s} \cdot \frac{1}{M-i} \sum_{j=1}^{M-i} \ln \frac{d_j(i)}{d_j(0)}$$

gde je t_s vreme odabiranja uzorka u datom vremenskom nizu, $d_j(0)$ je rastojanje između j-tog para najbližih suseda u početnom trenutku t_0, $d_j(i)$ je rastojanje između j-tog para najbližih suseda u trenutku t_i tj. posle i t_s vremena, M je broj tačaka u rekonstruisanom faznom prostoru, N je ukupan broj tačaka vremenske serije i

$$M = \frac{1}{N-(m-1)\cdot\tau}$$

U prvoj aproksimaciji se pretpostavlja da j-ti par susednih tačaka divergira brzinom koja je određena sa λ_1. Može se pokazati da važi

$$d_j(i) \approx d_j(0)\cdot e^{\lambda_1 i t_s}$$

Logaritmovanjem obe strane jednačine dobija se

$$\ln d_j(i) \approx \ln d_j(0) + \lambda_1 i t_s$$

Ovo su jednačine pravih za j=1, 2, ..., M-1 čiji su koeficijenti pravca približno λ_1. Najveći eksponent Ljapunova λ_1 određuje se kao koeficijent pravca prave dobijene metodom najmanjih kvadrata nad podacima

$$y(i) = \frac{1}{t_s}\langle \ln d_j(i)\rangle, \quad i=1, 2, 3, ..., N$$

gde vrednost u uglastoj zagradi predstavlja srednju vrednost po j.

4.2.2 Iterativni sistemi funkcija

Praktičan alat za generisanje i analizu fraktala sa određenim stepenom samosličnosti su iterativni sistemi funkcija (IFS – iterated function system). Koncept iterativnog sistema funkcija je formalizovao Hačinson (Hutchinson, 1981). Detalji o osobinama IFS mogu se naći u (Barnsley, 1988). Mi smo u ovoj tezi za generisanje primera fraktala koristili IFS u R^2 zadate na sledeći način:

Iterativni sistem funkcija je konačan skup $w_1, w_2, ..., w_n$ afinih linearnih transformacija u R^2. Pretpostavimo da je svaka funkcija w_j, j {1,...,n} određena realnim brojevima a_j, b_j, e_j, c_j, d_j i f_j

$$w_j(x, y) = (a_j x + b_j y + e_j,\ c_j x + d_j y + f_j).$$

Osnovna karakteristika linearnog preslikavanja koje vodi fraktalima je da redukuje rastojanje. Ovakva preslikavanja nazivaju se kontrakcije.

4.2.3 Dimenzija sličnosti

Svaka funkcija f_i iz R^n koja zadovoljava uslov

$$|f_i(x) - f_i(y)| = c_i |x - y| \quad \text{za sve } x, y, \text{ gde je } 0 < c_i < 1$$

naziva se kontrakcija i ona pripada skupu transformacija sličnosti, a c_i zovemo odnos sličnosti f_i. Dakle, svaka funkcija f_i koja zadovoljava gore zadati uslov transformiše podskup od R^n u geometrijski sličan skup. Neka je X invarijantan skup za familiju (IFS) od m kontrakcija f_i, i=1,..., m.

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(X).$$

Skup X koji je invarijantan u odnosu na familiju kontrakcija zove se samosličan skup ili strogo samosličan skup. Trougao Sjerpinskog, Barnslijeva paprat i mnogi poznati fraktali su atraktori IFS kontrakcija. Dimenzija sličnosti, u oznaci $\dim_S$, je jednaka vrednosti s koja zadovoljava sledeći uslov:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1.$$

U opštem slučaju važi $\dim_H(X) \leq \dim_S(X)$. Hausdorfova dimenzija prebrojavanja kocki i dimenzija sličnosti su ekvivalentne (Falconer, 1990) u slučaju da IFS: f_i, i=1,..., m zadovoljava uslov otvorenog skupa ako postoji neprazan ograničen otvoren skup V takav da zadovoljava

$$V \supset \bigcup_{i=1}^{m} f_i(V),$$

gde su $f_i(V)$ disjunktni skupovi (Falconer, 1990).

5. Konstrukcija fraktala i fraktalne funkcije

Transformacije sličnosti i koncept samosličnosti čine važnu osnovu fraktala i iterativnih sistema funkcija (http://mathworld.wolfram.com). Osobina samosličnosti objekta ostaje invarijantna pri promeni svih skala tj. objekt poseduje skalirajuću simetriju. Kod prirodnih objekata ili merenja, međutim, pokazuje se statistička samosličnost ako njihove osobine ostaju invarijantne u odnosu na skalu u ograničenom opsegu. Ponovno skaliranje u iterativnom postupku je generalno izotropno tj. uniformno u svim pravcima.

Samoafinost predstavlja generalizaciju samosličnosti što je osnovna osobina većine determinističkih fraktala. Samoafini objekti predstavljaju uniju reskaliranjih kopija sebe samih. Reskaliranje je anizotropno, tj. zavisno od pravca, npr. skaliranje po x i y-osi je različito. Deo samoafinog objekta je sličan čitavom objektu posle anizotropnog skaliranja. Za mnoge randomne neravne površi se pretpostavlja da pripadaju randomnim objektima koji pokazuju samoafine osobine i oni se tretiraju kao statistički fraktali. Dakle, fraktalima se mogu opisati objekti ili merenja koja ne poseduju translatornu simetriju, već su samoslični ili samoafini i pokazuju ponašanje po stepenom zakonu.

Od posebnog značaja je da se podsetimo osnovnih pojmova kao što su afine transformacije, njihova uloga u konstrukciji fraktala i da definišemo neke nove pojmove kao što su dekompozicija grupe afinih transformacija po glavnim podgrupama i ortonormalna dekompozicija fraktalnih interpolacionih funkcija. Sledi potpoglavlje 5.1 dobijeno je ljubaznošću prof. Lj. Kocića u obliku rukopisa (Kocić, 2007b) i poglavlje 5.2 koje je delom iz rada (Kocić i Spasić, 2005).

5.1 Teoretski koncept afinih transformacija $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

Pretpostavimo da je proizvoljnoj Euklidovoj ravni E^2, pridružen Dekartov koordinatni sistem tako da se E^2 poklapa sa proizvodom RxR. Nadalje ćemo poistovećivati E^2 i R^2.

Definicija 5. Afina transformacija realne ravni $R^2 \to R^2$ je definisana sa, $w : \boldsymbol{x} \quad A\boldsymbol{x} + \mathbf{b}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ gde je $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $a, b, c, d, e, f \in \mathrm{R}$.

Skup svih afinih transformacija ravni označavaćemo sa $\mathcal{A}$.

Definicija 6. Afina transformacija je *ortogonalna*, ako važi $AA^T = A^TA = \rho^2\mathbf{I}$, $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ako je $\rho = 1$, tj. ako važi $AA^T = A^TA = \mathbf{I}$, transformacija je *unitarna* ili *ortonormalna*. Ukoliko je det A= 1, transformacija je *unimodularna*.

Primedba 1. Primetimo da iz $AA^T = \mathbf{I}$ sledi $A^{-1} = A^T$ odakle $A^T A = \mathbf{I}$, dakle $AA^T = A^TA$. Slično, iz $AA^T = \rho^2\mathbf{I}$ sledi $AA^T = A^TA$.

Definicija 7. Sledeće transformacije iz $\mathcal{A}$ su ortogonalne:

1. *Translacija*, $\boldsymbol{x} \quad \mathbf{I}\boldsymbol{x} + \mathbf{b}$;
2. *Rotacija*, $\boldsymbol{x} \quad A_\theta \boldsymbol{x}$, pri čemu je $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \neq 0, \theta \in \mathrm{R}$;
3. *Simetrije,*
   a. *u odnosu na x-osu*, $\boldsymbol{x} \quad S_x \boldsymbol{x}$, pri čemu je $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,
   b. *u odnosu na y-osu*, $\boldsymbol{x} \quad S_y \boldsymbol{x}$, pri čemu je $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
   c. *u odnosu na koordinatni početak*, $\boldsymbol{x} \quad S_0 \boldsymbol{x}$, gde je $S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
4. *Homotetija* (*homogeno skaliranje*), $\boldsymbol{x} \quad s\mathbf{I}\boldsymbol{x}$, gde je $s \neq 0, s \in \mathrm{R}$;

Ove transformacije se jos nazivaju *transformacije sličnosti* (Tricot, 1995).

Definicija 8. Sledeće neortogonalne transformacije su važni elementi skupa $\mathcal{A}$:

1. *Nehomogeno skaliranje*, $\boldsymbol{x} \quad A_t \boldsymbol{x}$, gde je $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ ($t \quad 0$), koje se naziva *razvlačenje za* $|t| > 1$ *i sažimanje za* $|t| < 1$;
2. *Iskošenje*, $\boldsymbol{x} \quad A_u \boldsymbol{x}$, gde je $A_u = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($u \quad \mathrm{R}$).

Primetimo da je simetrija u odnosu na y-osu kompozicija homotetije sa faktorom -1 i simetrije u odnosu na x-osu

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \mathbf{I} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -S_x .$$

Sa druge strane, simetrija u odnosu na x-osu, $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je razvlačenje za $t = -1$. Takodje, negativni faktor homotetije $s = -1$, označava centralnu simetriju u odnosu na koordinatni početak. Homotetija u kombinaciji sa rotacijom se ponekad naziva *spiralna sličnost.*

Tako, translacija, rotacija i simetrija su ortonormalne (unitarne) i unimodularne, homotetija je ortogonalna a iskošenje je unimodularna transformacija. Tricot (Tricot, 1995) naziva kompoziciju translacije, simetrije i homotetije *pomerajem.*

Lema 1. Za rotaciju važi $A_{(\alpha+\beta)} = A_\alpha + A_\beta$ i $A_{c\alpha} = cA_\alpha$, $c \in$ R. Rotacija $A_{(2k+1)\pi}, k \in$ N se još naziva i *centralna simetrija*. Za razvlačenje i iskošenje važi

$$A_t^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix},\ A_t A_t^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix},\ \mathrm{A}_t^T = \mathrm{A}_t,\ \lim_{t\to 1} \mathrm{A}_t = \mathbf{I},$$

$$A_u^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_u A_u^T = \begin{pmatrix} 1+u^2 & u \\ u & 1 \end{pmatrix},\ \lim_{u\to 0} \mathrm{A}_u = \mathbf{I},\ \lim_{u\to 0} \mathrm{A}_u \mathrm{A}_u^T = \mathbf{I}.$$

5.1.1 Algebarska struktura afinih transformacija

Teorema 1. *U odnosu na operaciju kompozicije preslikavanja, afine transformacije čine grupu* $(\mathcal{A}, \circ)$.

Dokaz: i) Grupoidno svojstvo. Neka su f_1 i f_2 elementi skupa $\mathcal{A}$. Tada je

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}_1\boldsymbol{x} + \mathbf{b}_1,\ f_2(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}_2\boldsymbol{x} + \mathbf{b}_2,$$

i pritom važi

$$(f_1 \ \ f_2)(\boldsymbol{x}) = f_1(f_2(\boldsymbol{x})) = f_1(\mathrm{A}_2\boldsymbol{x} + \mathbf{b}_2) = \mathrm{A}_1(\mathrm{A}_2\boldsymbol{x} + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_1 = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\boldsymbol{x} + \mathrm{A}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1.$$

Dakle, linearni deo transformacije $f_3 = f_1 \ \ f_2$ definisan je matricom $\mathrm{A}_3 = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, i pritom je $|\mathrm{A}_3| = |\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2| = |\mathrm{A}_1||\mathrm{A}_2| \ \ 0$, dok je vektor translacije dat sa $\mathbf{b}_3 = \mathrm{A}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1$. Dakle, $f_3 \ \ \mathcal{A}$.

ii) Asocijativnost je osobina kompozicije preslikavanja.

iii) Neutralni element je identička transformacija $\boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{I}\boldsymbol{x}$.

vi) Inverzni element. Neka je $f \in$. Tada je $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}) - \mathbf{b}$, odakle sledi $\boldsymbol{x} = \mathrm{A}^{-1}f(\boldsymbol{x}) - \mathrm{A}^{-1}\mathbf{b}$, jer je po definiciji A invertibilna matrica. Otuda, $f^{-1}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}^{-1}\boldsymbol{x} - \mathrm{A}^{-1}\mathbf{b}$, a kako je $|\mathrm{A}^{-1}| = 1/|\mathrm{A}|$ 0, sledi $f^{-1} \in$.

Teorema 2. *Unimodularne afine transformacije* $(\;\; ,\circ)$ *čine podgrupu grupe* $(\;\; ,\circ)$.

Dokaz: Neka su f_1 i f_2 unimodularne transformacije iz . Dakle, $f_1(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}_1\boldsymbol{x} + \mathbf{b}_1$, $f_2(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}_2\boldsymbol{x} + \mathbf{b}_2$, pri čemu $|\mathrm{A}_1| = |\mathrm{A}_2| = 1$. U dokazu prethodne teoreme pokazano je da $(f_1\; f_2)(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\boldsymbol{x} + \mathrm{A}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1 = \mathrm{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{b}$ i $|\mathrm{A}| = |\mathrm{A}_1||\mathrm{A}_2| = 1$. Neutralni element $\boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{I}\boldsymbol{x}$ je unimodularna transformacija jer je $|\,\mathbf{I}\,| = 1$. Inverzno preslikavanje ima matricu A^{-1}, i $|\mathrm{A}^{-1}| = 1/|\mathrm{A}| = 1$, pa je takodje unimodularno. S druge strane, primer transformacije date matricom $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ koja nije unimodularna pokazije da je . Dakle, $(\;\; ,\circ)$ je netrivijalna podgrupa grupe $(\;\; ,\circ)$.

Teorema 3. *Transformacije sličnosti (ortogonalne afine transformacije)* $(\;\; ,\circ)$ *čine podgrupu grupe* $(\;\; ,\circ)$.

Dokaz: Neka su f_1 i f_2 ortogonalne transformacije iz . Kako je $(f_1\; f_2)(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\boldsymbol{x} + \mathrm{A}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1$, a na osnovu ortogonalnosti $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1^{\mathrm{T}} = \rho_1^2\,\mathbf{I}$, $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_2^{\mathrm{T}} = \rho_2^2\,\mathbf{I}$, dobija se

$$\mathrm{A}_3\mathrm{A}_3^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2)^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}_1(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_2^{\mathrm{T}})\mathrm{A}_1^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}_1\rho_2^2\mathbf{I}\mathrm{A}_1^{\mathrm{T}} = \rho_1^2\rho_2^2\mathbf{I}.$$

Stavljanjem $\rho_3^2 = \rho_1^2\rho_2^2$, dobijamo $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_3^{\mathrm{T}} = \rho_3^2\mathbf{I}$, pa sledi da je A_3 takođe ortogonalna matrica, tj. $f_3 = f_1\; f_2$ je transformacija sličnosti. Neutralni element $\boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{I}\boldsymbol{x}$ pripada ortogonalnim transformacijama jer je **I** ortogonalna matrica. Inverzna transformacija koristi matricu A^{-1} i kako je $AA^{T}=\rho^{2}\mathbf{I}$, sledi $A^{-1}(A^{-1})^{T}= (AA^{T})^{-1}= (1/\rho)^{2}\mathbf{I}$, tj. ortogonalnost inverznog elementa. Najzad, primer iste matrice kao u dokazu Teoreme 2, pokazije de je . Dakle, $(\quad ,\circ)$ je netrivijalna podgrupa grupe $(\quad ,\circ)$.

Lema 2. Sva rešenja jednačine

$$X^{T}X = XX^{T} \tag{12}$$

na skupu kvadratnih matrica drugog reda su

$$X_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \; a, b, d \quad \mathrm{R}.$$

Matrice koje zadovoljavaju (12) nazivaju se *normalnim.*

Lema 3. Sva rešenja jednačine $X^{T}X = \mathbf{I}$ na skupu kvadratnih matrica drugog reda su

$$X_1 = \begin{pmatrix} p & -q \\ -q & -p \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}, \tag{13}$$

pri čemu je $p^2 + q^2 = 1$, p, q R. Ovakve matrice su unitarne.

Takođe, na osnovu Leme 2, rešenja (13) zadovoljavaju jednačinu (12) i sva su unimodularna. Primetimo da se može staviti $p = \cos\theta$, $q = \sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

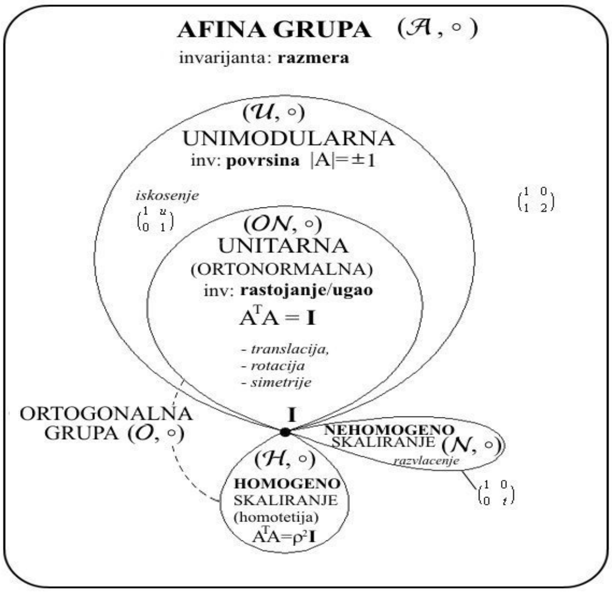
Teorema 4. *Ortonormalne transformacije* $(\quad ,\circ)$ *čine podgrupu grupe ortogonalnih transformacija* $(\quad ,\circ)$.

Dokaz: Kako dokaz Teoreme 3 važi i za slučaj ortonormalnosti ($\rho = 1$), to je podskup ortonormalnih transformacija podgrupa ortogonalne grupe. Pritom je , jer, na primer, matrice oblika $X = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$, s 0, s 1, ne zadovoljava relaciju $X^T X = \mathbf{I}$, tako da je podgrupa netrivijalna.

Teorema 5. *Ortonormalna grupa* $(\quad ,\circ)$ *je podgrupa grupe unimodularnih transformacija* $(\quad ,\circ)$.

Dokaz: Skup ortonormalnih transformacija je zatvoren u odnosu na kompoziciju jer iz $A_1 A_1^T = \mathbf{I}$, $A_2 A_2^T = \mathbf{I}$ sledi $(A_1 A_2)^T (A_1 A_2) = A_2^T (A_1^T A_1) A_2 = A_2^T \mathbf{I} A_2 = \mathbf{I}$. S druge strane, neutralni element je zajednički za $(\quad ,\circ)$ i $(\quad ,\circ)$, dok inverzni element f^{-1} elementa f , takodje pripada jer važi $\mathbf{I} = (AA^T) = (AA^T)^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (A^{-1})^T A^{-1}$ (na osnovu Lema 2 i 3, A i A^T komutiraju). Takođe, iz Leme 3 sledi da rešenja jednačine $X^T X = \mathbf{I}$ zadovoljavaju uslov $|A| = \ 1$ dok obrnuto ne važi pa je , , odakle sledi da je $(\quad ,\circ)$ netrivijalna podgrupa grupe $(\quad ,\circ)$.

Hijerarhija podgrupa afine grupe data je na sl. 15.



Slika 15. Hijerarhija grupe afinih transformacija u ravni.

5.1.2 Osobine podgrupa afinih transformacija u R^2

Lema 4. *Linearne ortogonalne transformacije održavaju skalarni proizvod sa tacnošću do multiplikativne konstante, tj. ako* $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, f *..,tada* $(f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})) = \rho^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Dokaz: $(f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})) = (\mathrm{A}\boldsymbol{u}, \mathrm{A}\boldsymbol{v}) = (\mathrm{A}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\rho^2\mathbf{I}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Ako je f ortonormalna, tada $(f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Lema 5. *Ako linearna transformacija* $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ *održava skalarni proizvod, ona je ortonormalna.*

Dokaz: Neka je $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Tada važi $f(e_1) = \mathrm{A}e_1 = \begin{pmatrix} a & c \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ i $f(e_2) = \mathrm{A}e_2 = \begin{pmatrix} b & d \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, kao i $\|f(e_1)\|^2 = (f(e_1), f(e_1)) = (e_1, e_1) = 1$, $\|f(e_2)\|^2 = (f(e_2), f(e_2)) = (e_2, e_2) = 1$, odakle sledi $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$. Takođe, $(\mathrm{A}e_1, \mathrm{A}e_2) = (e_1, e_2) = 0$, što daje $ab + cd = 0$. Tako, dobijamo

$$a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1,\ \ ab + cd = 0, \qquad (14)$$

odakle,

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dakle, $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \mathbf{I}$.

Primedba 2. Kako je $\mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \mathbf{I}$ (Primedba 1), sledi

$$\mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tj.,

$$a^2 + b^2 = 1,\ c^2 + d^2 = 1,\ \ ac + bd = 0, \qquad (15)$$

iz čega proizilazi da su sistemi (14) i (15) ekvivalentni.

Leme 4 i 5 daju sledeću teoremu.

Teorema 6. *Linerna transformacija održava skalarni proizvod ako i samo ako je ortonormalna (unitarna).*

Rastojanje je invarijanta ortonormalnih afinih transformacija, i zbog toga se ove transformacije nazivaju još *izometrije* (Amir-Moez, 1964). Važi opstiji stav

Teorema 7. *Ortogonalne afine transformacije linearno menjaju rastojanje, tj. ako je f ..,tada* $d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = \rho\, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Dokaz: Kako je $d^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$, *važi* $d^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d^2(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = d^2(\mathrm{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{b}, \mathrm{A}\boldsymbol{y} + \mathbf{b}) = (\mathrm{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{b} - \mathrm{A}\boldsymbol{y} - \mathbf{b})^T(\mathrm{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{b} - \mathrm{A}\boldsymbol{y} - \mathbf{b}) = (\mathrm{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}))^T(\mathrm{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^T\mathrm{A}^T\mathrm{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \rho^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \rho^2\, d^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Posledica 1. *Ortonormalne afine transformacije održavaju rastojanje.*

Dokaz: Ako f ..,tada je $\rho = 1$, i na osnovu Teoreme 7, $d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, tj. ortonormalne transformacije su izometrije.

Posledica 2. *Ortonormalne transformacije za invarijantu imaju rastojanje i ugao. Ortogonalne transformacije za invarijantu imaju samo ugao.*

Dokaz: Prvi deo tvrđenja sledi iz Teoreme 7 (Posledica 1) i činjenice da se ugao moze definisati odnosom dve dužine. Ako je f ortogonalna tada, na osnovu Leme 4 $(f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})) = \rho^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Ugao izmedju vektora $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ se određuje iz relacije

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}.$$

Neka je

$$\cos\psi = \frac{(f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v}))}{\|f(\boldsymbol{u})\|\|f(\boldsymbol{v})\|}.$$

Tada,

$$\cos\psi = \frac{(f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v}))}{\|f(\boldsymbol{u})\|\|f(\boldsymbol{v})\|} = \frac{\rho^2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{(f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{u}))^{\frac{1}{2}}(f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{v}))^{\frac{1}{2}}} = \frac{\rho^2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\rho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\rho(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})} = \frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|},$$

odakle sledi $\psi = \pm\varphi$.

Teorema 8. *Invarijanta unimodularne podgrupe je veličina površine.*

Dokaz: Neka je $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ unimodularna matrica, i $f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

odgovarajuće preslikavanje. Jacobian preslikavanja f je $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, i

prema tome $|J| = 1$. Neka se domen D iz (x, y)-ravni preslikava u $f(D) = D'$. Površina domena D' je

$$|D'| = \iint_{D'} dx'dy' = \iint_{D} |J|\,dxdy = \iint_{D} dxdy = |D|,$$

tj. ne menja se primenom unimodularne transformacije f.

Lema 6. *Afina transformacija održava kolinearnost tačaka.*

Dokaz: Neka su $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{z}$ tri međusobno različite kolinearne tačke i f afina transformacija. Ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da $\boldsymbol{y}$ leži izmedju $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{z}$. Tada postoji jedinstveno (0, 1) takvo da je $\boldsymbol{y} = (1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{z}$. S druge strane,

$f(\boldsymbol{y}) = \mathrm{A}\boldsymbol{y} + \mathbf{b} = \mathrm{A}[(1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{z}] + (1-\lambda + \lambda)\,\mathbf{b} = (1-\lambda)(\mathrm{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{b}) + \lambda(\mathrm{A}\boldsymbol{z} + \mathbf{b}) = f(\boldsymbol{x})$ $+ f(\boldsymbol{z})$.

Teorema 9. *Invarijanta afine grupe je razmera.*

Dokaz: Neka su $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{z}$ tri kolinearne tacke iz R^2. Razmera ovih tačaka je $r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \dfrac{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|}$. Na osnovu Leme 6 njihove slike $f(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{y})$ i $f(\boldsymbol{z})$ su takođe kolinearne tačke. Njihova razmera je

$$r(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{z})) = \frac{\|f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{z})\|}{\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{z})\|} = \frac{\|\mathrm{A}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\|}{\|\mathrm{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\|} = \frac{|\mathrm{A}|\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|}{|\mathrm{A}|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|} = r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}).$$

5.1.3 Prilog dekompoziciji afinih transformacija po glavnim podgrupama grupe afinih transformacija

Neka je $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ realna regularna matrica i neka su matricama $\mathrm{A}_s = s\mathbf{I}$ $\mathrm{A}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $A_u = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, i $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ respektivno definisane linearne transformacije homotetije, rotacije, iskošenja i razvlačenja.

Teorema 10. *Važe dekompozicije*

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_s\mathrm{A}_\theta\mathrm{A}_u\mathrm{A}_t = s\mathrm{A}_\theta\mathrm{A}_u\mathrm{A}_t, \tag{16}$$

pri čemu su s, θ, u, t *koeficijenti dekompozicije dati sa*

$$s = \operatorname{sgn} a\sqrt{a^2+c^2},\quad \theta = \tan^{-1}\frac{c}{a},\quad u = \frac{ab+cd}{|\mathrm{A}|},\quad t = \frac{|\mathrm{A}|}{a^2+c^2}, \tag{17}$$

kao i

$$\mathrm{A} \ = \ \mathrm{A}_s \mathrm{A}_\theta \mathrm{A}_t \mathrm{A}_u \ = s\mathrm{A}_\theta \mathrm{A}_t \mathrm{A}_u \, , \tag{18}$$

sa koeficijentima

$$s = \operatorname{sgn} a \sqrt{a^2 + c^2}\,, \quad \theta = \tan^{-1} \ \frac{c}{a} \ \ , \quad u = \frac{ab + cd}{a^2 + c^2}\,, \quad t = \frac{|\,\mathrm{A}\,|}{a^2 + c^2}\,. \tag{19}$$

Dokaz: Množenjem $\mathrm{A}_s \mathrm{A}_\theta \mathrm{A}_u \mathrm{A}_t$ i izjednačavanjem sa A, dobija se nelinearan sistem

$$\begin{aligned} s \cos\theta \ &= \ a \\ t(s\,u \cos\theta \ - s \sin\theta\,) \ &= \ b \\ s \sin\theta \ &= \ c \\ t(s \cos\theta \ - s\,u \sin\theta\,) \ &= \ d \end{aligned}$$

čija su rešenja data sa (17). U dekompoziciji (18), proizvod $\mathrm{A}_t \mathrm{A}_u$ se od $\mathrm{A}_u \mathrm{A}_t$ razlikuje po elementu na mestu (1, 2) koji je u prvom slučaju u a u drugom tu. Tako se (19) dobija iz (17) zamenom t $\quad tu$.

Slični rezultati se dobijaju za dekompozicije $\mathrm{A} = \ s\mathrm{A}_t \mathrm{A}_u \mathrm{A}_\theta$, sa rešenjima

$$s = \operatorname{sgn} d \ \frac{|\,A\,|}{\sqrt{c^2 + d^2}}\,, \quad t = \frac{c^2 + d^2}{|\,A\,|}\,, \quad u = \frac{ac + bd}{|\,A\,|}\,, \quad \theta = \tan^{-1} \ \frac{c}{d} \quad ,$$

koja su navedena u (Tricot,1995) ali je u izrazu za s izostavljen član sgn d.

Dalje, $\mathrm{A} = \ s\mathrm{A}_u \mathrm{A}_t \mathrm{A}_\theta$, sa rešenjima

$$s = \operatorname{sgn} d \ \frac{|\,A\,|}{\sqrt{c^2 + d^2}}\,, \quad u = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\,, \quad t = \frac{c^2 + d^2}{|\,A\,|}\,, \quad \theta = \tan^{-1} \ \frac{c}{d} \quad .$$

U slučaju dekompozicije $\mathrm{A} = \ s\mathrm{A}_t \mathrm{A}_\theta \mathrm{A}_u$, rešenja su složenija

$$s_{1,2} \ = \ \ \operatorname{sgn} D \ \frac{\sqrt{D^2 - |\,D\,| \sqrt{D^2 - 4a^2c^2}}}{\sqrt{2}c}\,, \quad t = \operatorname{sgn} D \ \frac{|\,D\,| + \sqrt{D^2 - 4a^2c^2}}{2a^2} \quad ,$$

$$u = \frac{b^2c^2 - a^2d^2 + |D|\sqrt{D^2 - 4a^2c^2}}{2acD}, \quad \theta_{1,2} = \cos^{-1} \quad \operatorname{sgn} D \frac{\sqrt{2}ac}{\sqrt{D^2 - |D|\sqrt{D^2 - 4a^2c^2}}} \quad ,$$

gde je stavljeno $D = |A|$. Slično je za poslednju dekompozicionu permutaciju $\mathrm{A} = s\mathrm{A}_u\mathrm{A}_\theta\mathrm{A}_t$ kod koje su parametri dati sa

$$s_{1,2} = \sqrt{2}c\sqrt{\frac{D}{D + \sqrt{D^2 - 4c^2d^2}}}, \quad u = \frac{ad + bc + \sqrt{D^2 - 4c^2d^2}}{2cd} \quad ,$$

$$\theta_{1,2} = \sec^{-1} \quad \frac{2\sqrt{2}cd\sqrt{|D|}}{|D^2 - 4c^2d^2| - D^2} \quad , \quad t = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4c^2d^2}}{2c^2} \quad .$$

Primer 1. Neka je $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 1/3 & 3/2 \end{pmatrix}$. Primenom formule (16) i Teoreme 10, dobija se

$\mathrm{A}_s = -\frac{5}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}_\theta = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}_u = \begin{pmatrix} 1 & -48/11 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i EMBED Equation.3 $\mathrm{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 22/25 \end{pmatrix}$.

Geometrijska interpretacija: Transformacija $x \quad Mx, x \in \mathbb{R}^2$ se može razložiti na sledeći niz od četiri transformacije

$$\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}_t\boldsymbol{x}, \; \boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}_u\boldsymbol{x}, \; \boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}_\theta\boldsymbol{x}, \; \boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}_s\boldsymbol{x}, \tag{20}$$

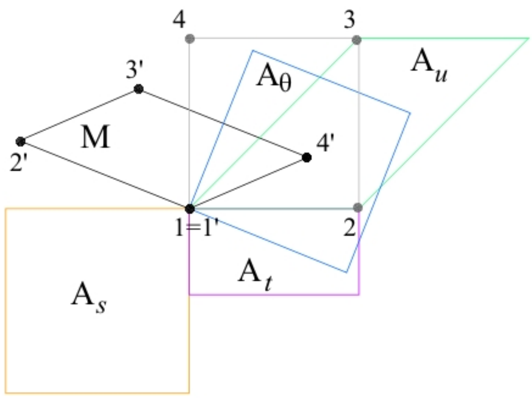
koje se primenjuju tačno ovim redom.

Primer 2. Neka je $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$. Dekompozicija (16) Teoreme 10 daje

$$\mathrm{A}_s = \begin{pmatrix} -1.07703 & 0 \\ 0 & -1.07703 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_\theta = \begin{pmatrix} 0.928477 & -0.371391 \\ 0.371391 & 0.928477 \end{pmatrix},$$

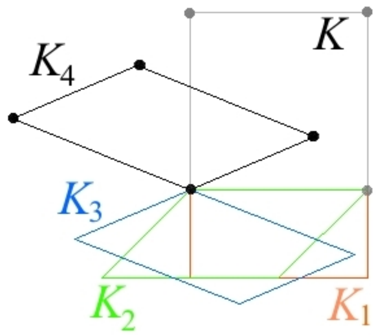
$$\mathrm{A}_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Primena ovih transformacija, svake posebno, na jedinični kvadrat K = 1234, data je na sl. 15. Tako, transformacija $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}_s\boldsymbol{x}$ preslikava K (preslikavanjem teme po teme) u kvadrat označen sa A_s koji je homotetičan kvadratu K sa faktorom -1.07703. Transformacija $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}_\theta\boldsymbol{x}$ rotira K za 21.8014 stepeni u negativnom smeru. Zatim, $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}_u\boldsymbol{x}$ definiše iskošenje sa faktorom u = 1, tj. preslikava kvadrat K u romb sa uglom od 45 . Najzad, $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}_t\boldsymbol{x}$ preslikava K u pravougaonik sa "negativnom" visinom koja je sažeta za faktor 0.5.



Slika 15. Dekompozicija afinog preslikavanja

S druge strane, primena ovih transformacija u poretku (20), najpre preslikava jedinični kvadrat K = 1234 na sl. 16 u pravougaonik K_1 (preslikavanjem teme po teme) čija visina je sažeta za negativan faktor –0.5. Zatim se K_1 preslikava u K_2 iskošenjem, dobija se romboid sa uglom 45 . Taj se romboid zatim rotira za ugao od -21.8014 što daje romboid K_3 na koji se najzad primenjuje homotetija sa faktorom -1.07703 i dobija završna figura K_4, takođe romboid.



Slika 16. Sukcesivna afina preslikavanja (niz (18))

Dekompozicija se, po Teoremi 10, može predstaviti kao proizvod jedne ortogonalne i jedne neortogonalne transformacije. Drugim rečima važi:

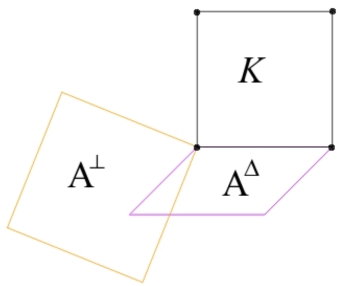
Teorema 11. *Linearna transformacija* $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}\boldsymbol{x}$ *može se razložiti na kompoziciju preslikavanja* $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}^{\Delta}\boldsymbol{x}$ *i* $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}^{\perp}\boldsymbol{x}$ *pri čemu je* A *ne-ortogonalna* i A *ortogonalna matrica.*

Dokaz: Stavimo A=A A , $\mathrm{A}^{\perp} = \mathrm{A}_s\mathrm{A}_\theta$ pri čemu matrica A_s definiše homotetiju a A_θ rotaciju. To znači da $\mathrm{A}^{\perp} = s\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$ što je ortogonalna matrica za svako s 0. S druge strane, na osnovu dekompozicije (18) iz Teoreme 10, mora biti $\mathrm{A}^{\Delta} = \mathrm{A}_t\mathrm{A}_u = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & t \end{pmatrix}$, pri čemu u, t 0, ili $u = 0$, t ± 1. Ova matrica ne može biti ortogonalna ni za jedan dozvoljeni izbor t, u, što je evidentno iz Leme 3. Zaista, da bi matrica 2 2 bila ortogonalna mora da bude oblika λX_i, gde je X_i matrica oblika (15) uz uslov $c^2 + s^2 = 1$, c, s R, koji se u slučaju matrice A svodi na nedozvoljeni uslov $u = 0$, t ±1.

Primer 3. Neka je M matrica iz Primera 2. Dekompozicija po Teoremi 11 daje

$$\mathrm{A}^{\perp} = \begin{pmatrix} -0.999962 & 0.399987 \\ 0.399987 & -0.999962 \end{pmatrix}, \mathrm{A}^{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Na sl. 17 ilustrovano je preslikavanje jediničnog kvadrata K transformacijama $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}^{\perp}\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}^{\Delta}\boldsymbol{x}$.



Slika 17. Binarna dekompozicija

5.1.4 Metričke osobine afinih transformacija

Metričke osobine afine transformacije $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ su vezane za normu matrice ||A||, za koju važe poznate aksiome:

1. ||A||=0 A=0;

2. || A||=| | ||A||,   R;

3. $\|A_1 + A_2\| \quad \|A_1\| + \|A_2\|$.

Definicija 9. Neka je $\|\boldsymbol{x}\|$ proizvoljna norma vektora. Tada se za normu matrice

$$\| A \| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \| A\boldsymbol{x} \| = \sup_{\boldsymbol{x} \quad 0} \frac{\| A\boldsymbol{x} \|}{\| \boldsymbol{x} \|}, \tag{21}$$

kaže da je *indukovana* datom normom vektora (ili *potčinjena* normi vektora).
Za normu matrice definisanu sa (21) važi

$$\|A\boldsymbol{x}\| \quad \|A\| \, \|\boldsymbol{x}\|, \ \|A_1A_2\| \quad \|A_1\| \, \|A_2\|. \tag{22}$$

Na osnovu Definicije 3. sledi da postoji bar jedan vektor $\boldsymbol{x}$ za koji u prvoj nejednakosti važi jednakost.

Definicija 10. Neka $\lambda_i(M)$ označava i-tu sopstvenu vrednost matrice M formata $n \quad n$. Niz pozitivnih realnih brojeva $\left(\sqrt{\lambda_i \, (AA^T)}\right)_{i=1}^{n}$ naziva se niz *singularnih vrednosti* matrice A. Maksimalna singularna vrednost,

$$\sigma(A) = \max\{\sqrt{\lambda_i \, (AA^T)}\}, \tag{23}$$

je *spektralna norma* matrice A.

Neka je $\rho(A) = \max \mid \lambda_i(A) \mid$, spektralni radijus matrice A. Formula (23) se može napisati u obliku

$$\sigma(A) = \sqrt{\rho \, (AA^T)}\,. \tag{24}$$

U obe formule, (23) i (24), proizvod AA^T može se zameniti sa A^TA, jer su sopstvene vrednosti matrice AA^T jednake sopstvenim vrednostima matrice A^TA.

Teorema 12. *Za svaku normu matrice indukovanu nekom vektorskom normom važi* $\|A\| \geq \rho(A)$. *Za slučaj simetričnih matrica*, $A^T = A$, važi $\sigma(A) = \rho(A)$.

Dokaz: Neka je $\boldsymbol{x}$ sopstveni vektor matrice A i λ jedna njena sopstvena vrednost. Tada je $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Rightarrow \|\lambda\boldsymbol{x}\| = \|A\boldsymbol{x}\| \Rightarrow |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\| = \|A\boldsymbol{x}\| \leq \|A\|\,\|\boldsymbol{x}\| \Rightarrow \|A\| \geq |\lambda|$. Kako poslednja nejednakost važi za svaku sopstvenu vrednost, sledi $\|A\| \geq \rho(A)$.

Ako je $A^T = A$, iz (21) sledi $\sigma(A) = \sqrt{\rho(AA^T)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{\rho^2(A)} = \rho(A)$.

Teorema 13. *Euklidska vektorska norma* $\|\boldsymbol{x}\| = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{1/2}$ *indukuje spektralnu normu matrice* $\sigma(A) = \sqrt{\rho(A^T A)}$.

Dokaz: Za svaku realnu kvadratnu matricu A, matrica $A^T A$ je simetrična, pa su njeni sopstveni vektori (koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima) ortogonalni. Dakle, ako su λ_i i λ_j različite sopstvene vrednosti matrice $A^T A$ i $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$ odgovarajući sopstveni vektori, važi $A^T A\,\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$, $A^T A\,\boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_j$, pri čemu je $\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_j = \delta_{ij}$ (δ_{ij} je Kronekerova delta), $1 \leq i, j \leq n$ (n je red matrice A). Ako je $\boldsymbol{x} = \sum_1^n c_i \boldsymbol{v}_i \neq 0$ tada

$$\left(\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)^2 = \frac{(A\boldsymbol{x})^T (A\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}^T A^T A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} = \frac{(\sum c_i \boldsymbol{v}_\mathrm{i}^T A^T)(\sum c_j A\boldsymbol{v}_j)}{(\sum c_i \boldsymbol{v}_\mathrm{i}^T)(\sum c_j \boldsymbol{v}_j)} = \frac{\sum c_i (A\boldsymbol{v}_i)^T \sum c_j A\boldsymbol{v}_j}{\sum_i \sum_j c_i c_j \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{v}_j}$$

$$= \frac{\sum c_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i^T \sum c_j \lambda_j \boldsymbol{v}_j}{\sum |c_i|^2} = \frac{\sum \lambda_i |c_i|^2}{\sum |c_i|^2} = \sum_{i=1}^n \left(|c_i|^2 / \sum |c_j|^2\right)\lambda_i,$$

što je konveksna kombinacija veličina $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tako da je $\lambda_1 \leq \left(\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)^2 \leq \lambda_n$.

Odatle sledi $\|A\|^2 = \sup_{\boldsymbol{x} \neq 0} \left(\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)^2 = \lambda_n = \rho(A^T A)$.

Spektralna norma realne kvadratne matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je data sa

$$\sigma(A)^2 = \| A \|^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 4\,| A |^2} \right). \qquad (25)$$

Definicija 11. Matrična norma || || je *unitarno invarijantna* ako za svaku kvadratnu matricu A i svaku unitarnu matricu U (obe reda *n*), važi ||A|| = ||UA|| = ||AU||.

Teorema 14. *Spektralna norma* (23) *je unitarno invarijantna.*

Dokaz: Neka je $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathrm{R}$. Formula (13) daje sve oblike unitarnih matrica (Lema 3), i stavićemo $q = \sqrt{1 - p^2}$ i U = X_1. Direktno izračunavanje daje $2\sigma(AU)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \sqrt{B}$, pri čemu je

$$\begin{aligned} B &= a^4 + b^4 + 8abcd - 2b^2(c^2 - d^2) + 2a^2(b^2 + c^2 - d^2) + (c^2 + d^2)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 4\,| A |^2, \end{aligned}$$

tako, da na osnovu (25) sledi $2\sigma(AU)^2 = 2\sigma(A)^2$ odakle $\sigma(AU) = \sigma(A)$. Za proizvod UA dobija se takodje $2\sigma(UA)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \sqrt{B}$, tako da je $\sigma(UA) = \sigma(A)$, čime je dokazana unitarna invarijantnost spektralne norme.

Teorema 15. (Normalizovana dekompozicja) Svaka realna regularna matrica A može se napisati u obliku A= $kA_\theta A_\Delta$, gde je

$$k = \sqrt{p}\,\mathrm{sgn}\,a\,\sqrt{a^2 + c^2}, \quad p = \frac{1}{2}\left(q(a^2 + c^2) + \sqrt{q^2(a^2 + c^2)^2 - 4\,| A |^2}\right), \qquad (26)$$

$$q = 1 + \frac{(ab+cd)^2}{|A|^2} + \frac{|A|^2}{\left(a^2+c^2\right)^2}, \quad A_\Delta = \frac{\sqrt{p}}{p\left(a^2+c^2\right)}\begin{pmatrix} a^2+c^2 & |A| \\ 0 & ab+cd \end{pmatrix},$$

a A_θ je matrica rotacije za ugao $\theta = \tan^{-1} \frac{c}{a}$. Pri tom je $||A|| = \sigma(A) = |\, k \,|$.

Dokaz: Na osnovu Teoreme 10, važi dekompozicija (18), pri čemu je $A^\Delta = A_t A_u = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & t \end{pmatrix}$. Na osnovu (25),

$$\|\, A^\Delta \,\|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + t^2 + u^2 + \sqrt{(1+t^2+u^2)^2 - 4t^2}\right),$$

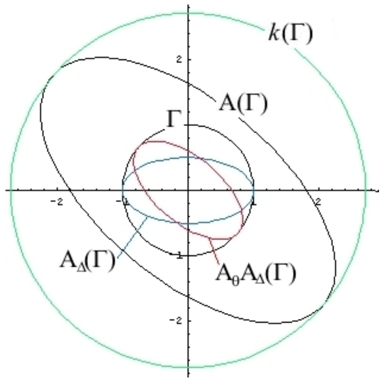
pri čemu su t i u dati sa (19), čijom zamenom dobijamo $\|\, A^\Delta \,\|^2 = p$, p je dato sa (26).

Definišimo normalizovanu matricu $A_\Delta = A^\Delta / \|\, A^\Delta \|$ $= \frac{\sqrt{p}}{p} \|\, A^\Delta \,\|$, koja posle smena dobija oblik kao u (26). Sada je $\|\, A_\Delta \| = 1$, a kako je na osnovu Teoreme 14, spektralna norma unitarno invarijantna, važi $\|A\| = |\, k \,|\, \|A_\theta\, A_\Delta\| = |\, k \,|\, \|\, A_\Delta \| = |\, k \,|$.

Primer 4. Neka je $A = \begin{pmatrix} 2.1 & 0.8 \\ -1.7 & 1.1 \end{pmatrix}$. Formule (26) daju $k = 2.70308$,

$$A_\Delta = \begin{pmatrix} 0.999547 & -0.0260156 \\ 0 & 0.502512 \end{pmatrix}$$ EMBED Equation.3

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 0.777245 & 0.629198 \\ -0.629198 & 0.777245 \end{pmatrix}.$$



Slika 18. Normalizovana dekompozicija

Neka je Γ jedinični krug u R^2 i elipsa $A(\Gamma)$ njegova slika usled linearne transformacije $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ (sl.18). Takođe, slika kruga Γ homotetijom $\boldsymbol{x} \mapsto k\mathbf{I}\boldsymbol{x}$ je krug čiji je poluprečnik jednak većoj poluosi. Naravno, $\boldsymbol{x} \mapsto A_\theta \boldsymbol{x}$ preslikava Γ u samog sebe, a $\boldsymbol{x} \mapsto A_\Delta \boldsymbol{x}$ daje elipsu, čija je veća poluosa paralena je x-osi i jednaka 1 isto kao i veća poluosa elipse $A_\theta A_\Delta(\Gamma)$, koja se dobija rotacijom prethodne za ugao θ u pozitivnom smeru. Iz ove slike se vidi da je $\|A\| = k$, dok je $\|A_\theta A_\Delta\| = \|A_\Delta\| = 1$.

5.2 Fraktalne interpolacione funkcije

Euklidska geometrija i elementarne funkcije, kao što su sinus, kosinus i polinomi predstavljaju osnovu tradicionalnih metoda za analiziranje eksperimentalnih podataka. Elementarne funkcije, kao što su trigonometrijske i racionalne funkcije imaju svoje korene u Euklidskoj geometriji. To znači da kada se poveća grafik prikazanih eksperimentalnih podataka lokalno izgleda kao prava linija. Drugim rečima, tangenta aproksimacione linije može biti efektivno korišćena u okolini većine tačaka. Štaviše, fraktalna dimenzija grafova ovih funkcija je uvek ista. Ove elementarne euklidske funkcije su korisne ne samo zbog njihovog geometrijskog sadržaja, već zato što mogu biti izražene jednostavnim formulama.

Specijalna klasa neprekidnih funkcija su fraktalne funkcije (Barsnley, 1988). Njihov grafik obično ima necelobrojnu dimenziju. Fraktalne funkcije mogu se koristiti za interpolaciju i aproksimaciju, analogno splajnovima.

U ovom poglavlju uvešćemo fraktalne interpolacione funkcije. Grafici ovih funkcija mogu biti korišćeni za aproksimaciju komponenata slika kao što su oblici planinskih lanaca, vrhova oblaka, stalaktita koji vise sa zidova pećina i horizonti iznad šuma. Takve komponente slike ne mogu se dobro opisati elementarnim funkcijama kao što su euklidske funkcije.

Fraktalne interpolacione funkcije daju novo značenje podešavanju eksperimentalnih podataka. Klasična geometrija nije dovoljno dobar alat za analizu, na primer, električnih potencijala u mozgu koji se očitavaju u elektroencefalogramu (EEG). Međutim, fraktalne interpolacione funkcije mogu biti korišćene za fitovanje takvih eksperimentalnih podataka, tj. graf fraktalne interpolacione funkcije može biti zatvoren, u Hausdorfovoj metrici, eksperimentalnim podacima. Šta više, ovo osigurava da fraktalna dimenzija grafa fraktalne interpolacione funkcije odgovara fraktalnoj dimeziji podataka, u odgovarajućem rangu skala.

Fraktalne interpolacione funkcije se mogu sagledati kao elementarne funkcije jer imaju geometrijski karakter, mogu biti kratko predstavljene formulama i mogu biti brzo izračunate. Suštinska, najvažnija razlika od elementarnih euklidskih funkcija je njihov fraktalni karakter tj. one mogu da imaju razlomljenu fraktalnu dimenziju.

Definicija 12. Skup *podataka* je skup tačaka u formi $\{(x_i, F_i) \in \mathrm{R}^2 : i = 0, 1, 2, \ldots, N\}$, gde je $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots < x_N$. *Interpolaciona funkcija* koja odgovara ovom skupu podataka je neprekidna funkcija $f: [x_0, x_N] \to \mathrm{R}$ takva da zadovoljava

$$f(x_i) = F_i \quad za\ i = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Tačke $(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2$ se nazivaju *interpolacione tačke*. Kažemo da funkcija f *interpolira* podatke i da (graf) f *prolazi kroz* interpolacione tačke.

Neka je dat skup podataka $\{(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 0, 1, 2, \ldots, N\}$. Objasnićemo kako se može konstruisati IFS u $\mathbb{R}^2$ tako da je njegov atraktor, koji ćemo označiti sa G, graf neprekidne funkcije f: $[x_0, x_N] \to \mathbb{R}$ koja interpolira podatke. Sada ćemo obratiti pažnju na afine transformacije. Razmatraćemo IFS u formi $\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$ gde su preslikavanja afine transformacije specijalne strukture

$$w_n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

Transformacije su ograničene podacima u skladu sa

$$w_n\begin{pmatrix} x_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad w_n\begin{pmatrix} x_N \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \end{pmatrix} \quad \text{za } n = 1, 2, \ldots, N.$$

Neka je n $1, 2, \ldots, N$. Transformacija w_n je zadata realnim brojeva a_n, c_n, d_n, e_n i f_n koji zadovoljavaju sistem linearnih jednačina

$$a_n x_0 + e_n = x_{n-1}$$

$$a_n x_N + e_n = x_n \qquad (27)$$

$$c_n x_0 + d_n F_0 + f_n = F_{n-1}$$

$$c_n x_N + d_n F_N + f_n = F_n$$

U svakoj transformaciji postoji jedan slobodan parametar. Biramo da to bude parametar d_n jer je transformacija w_n *iskošenje*: ona preslikava linije paralelne x-osi u linije paralelne y-osi. Sa L ćemo označiti segment linije paralelan y-osi. Onda je $w_n(L)$ segment takođe paralelan y-osi. Odnos dužine $w_n(L)$ i dužine L je d_n . Mi ćemo d_n zvati *vertikalan skalirajući faktor* u transformaciji w_n. Izborom d_n za slobodan parametar, u mogućnosti smo da izaberemo vertikalno skaliranje u datoj transformaciji. Za $d_n=0$, $n = 1, 2, \dots, N$ konstruiše se deo linearne interpolacione funkcije. Pokazaćemo da ovi parametri određuju fraktalnu dimenziju atraktora IFS.

Neka je d_n neki realan broj. Pokazaćemo da uvek možemo da rešimo sistem jednačina (27) po a_n, c_n, e_n i f_n u funkciji podataka i d_n. Nalazimo da je

$$a_n = (x_n - x_{n-1}) \quad (x_N - x_0)$$

$$e_n = (x_N x_{n-1} - x_0 x_n) \quad (x_N - x_0)$$

$$c_n = (F_n - F_{n-1}) \quad (x_N - x_0) - d_n(F_n - F_0) \quad (x_N - x_0)$$

$$f_n = (x_N F_{n-1} - x_0 F_n) \quad (x_N - x_0) - d_n(x_N F_0 - x_0 F_n) \quad (x_N - x_0)$$

Sada sa $\{R^2; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ označimo IFS definisanu gore. Neka je vertikalni skalirajući faktor d_n, $0 \quad d_n \quad 1$ za $n = 1,2,..,N$. Primenićemo randomni iteracioni algoritam na IFS.

Radi potpune jasnoće Teorema 16 i 17 navešćemo opštiju definiciju hiperboličkog IFS:

Definicija 13: Hiperbolički IFS sastoji se od kompletnog metričkog prostora (X, d) i konačnog skupa kontraktivnih preslikavanja w_n: $X \quad X$, u odnosu na faktor kontrakcije s_n, gde je $n=1, 2,\ldots, N$.

Često se pridev hiperbolički izostavlja i koristi se samo IFS. Štaviše, kada se kaže IFS misli se na konačan skup preslikavanja definisanih u metričkom prostoru (X, d).

Teorema 16. Neka je N pozitivan ceo broj veći od 1. Neka je $\{\mathrm{R}^2;\ w_n,\ n = 1, 2,\ldots, N\}$ IFS definisana ranije, pridružena skupu podataka $\{(x_n,\ F_n)\in \mathrm{R}^2\colon\ n=1,\ 2,\ldots,\ N\}$. Neka vertikalni skalirajuci faktor d_n ispunjava uslov da je $0 \quad d_n \quad 1$ za $n = 1, 2,.., N$. Onda postoji metrika d na R^2 ekvivalentna euklidskoj metrici tako da je IFS hiperbolička u odnosu na d. U stvari, postoji jedinstveni neprazni kompaktni skup G R^2 tako da važi

$$G = \quad {}_{n=1}^{\mathrm{N}}\, w_n\,(G)\ .$$

Dokaz: Dokaz dat u knjizi (Barnsley,1988) na str. 217.

Teorema 17. Neka je N pozitivan ceo broj veći od 1. Neka je $\{\mathrm{R}^2;\ w_n,\ n = 1, 2,\ldots, N\}$ IFS definisana ranije, pridružena skupu podataka $\{(x_n,\ F_n)\in \mathrm{R}^2\colon\ n=1,2,\ldots,N\}$. Neka vertikalni skalirajuci faktor d_n ispunjava uslov $0 \quad d_n \quad 1$ za $n = 1,2,..,N$ tako da je IFS hiperbolička. Označimo sa G atraktor IFS. Onda je G graf neprekidne funkcije $f\colon\ x_0,\, x_N \quad \mathrm{R}$ koji interpolira podatke $\{(x_i, F_i)\colon\ i=0,1,2,\ldots,N\}$. To jest,

$$\mathrm{G} = \{(x, f(x))\colon\ x \quad x_0,\, x_N \quad \},\ \text{gde}$$

$$f(x_{\mathrm{i}}) = F_{\mathrm{i}} \ \text{ za }\ i=0,1,2,\ldots,N.$$

Dokaz: Dokaz dat u knjizi (Barnsley,1988) na str. 218.

Definicija 14. Funkcija $f(x)$ naziva se *fraktalna interpolaciona funkcija* koja odgovara (pridružena je) skupu podataka $\{(x_i, F_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 1, 2, \ldots, N\}$ ako je njen graf G atraktor IFS takav da zadovoljava Teoreme 16 i 17.

5.2.1 Ortonormalna dekompozicija fraktalnih interpolacionih funkcija

Afini automorfizmi bi mogli biti elementarni dinamički elementi u prirodi. Iteracijom afinosti može se postići bilo kakva nelinearnost. Najjednostavniji primer je Hornerova šema kojom se grade polinomi ponavljanjem afinih funkcija. Naravno, ovaj proces zahteva jednu dimenziju više od dimenzije domena automorfizma, a to je vreme u kome se odvija iteracija. Mnogi živi procesi kao što su rast i umnožavanje ćelija, formiranje tkiva, neuronske veze, moždani signali itd. su proizvod iteriranih afinosti i mogu se modelirati i proučavati pomoću iterativnog sistema funkcija (Iterated Function systems - IFS) (Barnsley, 1988; Kocić, 2000).

U konstruktivnoj teoriji fraktalnih skupova važnu ulogu igra osobina kontrakcije afinih preslikavanja. Ali, veoma je važno razlikovati ortogonalni od neortogonalnog dela preslikavanja, zbog toga što ortogonalni deo čuva uglove, a neortogonalni definiše druge geometrijske parametre kao što su razvlačenje ili iskošenje. Ispitaćemo kontraktivne afine transformacije u realnoj ravni i njihovu primenu u analizi fraktalnih funkcija.

Koristeći definiciju afine transformacije realne ravni w: R^2 R^2, kažemo da ako je $\mathbf{b}$=0, onda je transformacija linearna.U odnosu na slaganje preslikavanja, skup svih afinih transformacija čini nekomutativnu grupu (,).

Linearna transformacija *w* je *ortogonalna* ako čuva ortogonalnost vektora, tj. ako iz $\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{y} = 0$ sledi $w(\boldsymbol{x})^{T}\ w\ (\boldsymbol{y}) = 0$. U tom slučaju matrica A je ortogonalna ako je zadovoljen uslov $A^{T}A = \ {}^{2}I$, R. Ako je =1, *w* kao i A su *ortonormalni.*

Teorema 18. (Ortogonalna dekompozicija) Linearna transformacija $w(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ gde je A neortogonalna matrica dimenzije 2x2 može se dekomponovati u

$$w(\boldsymbol{x}) = w\ (\ w\ (\boldsymbol{x})) = A\ \ A\ \boldsymbol{x},$$

gde je A ortogonalna, a A neortogonalna ili jedinična matrica.

Dokaz: Dokaz dat u radu (Kocić i Spasić, 2006).

Pomoću iterativnog sistema funkcija (IFS) može se konstruisati fraktalna interpolaciona funkcija za dati skup tačaka (podataka). Najjednostavniji takav sistem definiše IFS:$\{R^2;\ w_1,\ w_2,\ \dots\ ,\ w_i,\ \dots\ ,\ w_n\}$, sa koeficijentima a_i, c_i, e_i, i f_i koji su određeni iz skupa tačaka zadatih sa (t_i, x_i), $i = 0, 1, \dots, n$, i $d = (d_i)$. Takav IFS interpolira skup podataka u smislu da je pod određenim pretpostavkama o koeficijentima, atraktor IFS graf koji prolazi kroz zadati skup tačaka (podataka).

Teorema 19: (Normalizovana dekompozicija) Bilo koja realna matrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ može se dekomponovati u $A = kA_{\theta}A_{\Delta}$ gde je A_{θ} rotaciona matrica sa uglom $\theta = \mathrm{arctg}(c/a)$ i gde je

$$k = \operatorname{sgn} a\sqrt{p(a^2 + c^2)}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(q\left(a^2 + c^2\right) + \sqrt{q^2\left(a^2 + c^2\right)^2 - 4\left(\det A\right)^2} \right),$$

$$q = 1 + \frac{(ab+cd)^2}{\det^2 \mathrm{A}} + \frac{\det^2 \mathrm{A}}{(a^2+c^2)},$$

$$\mathrm{A}_\Delta = \frac{\sqrt{p}}{p(a^2+c^2)} \begin{pmatrix} a^2+c^2 & \det \mathrm{A} \\ 0 & ab+cd \end{pmatrix}$$

.

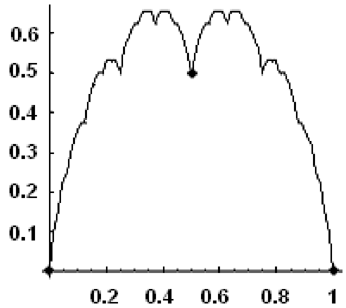
Dokaz: Dokaz dat u radu (Kocić i Spasić, 2006).

5.2.2 Primena ortonormalne dekompozicije fraktalnih interpolacionih funkcija - primeri

Navešćemo neke od primera primene ortonormalne dekompozicije fraktalnih interpolacionih funkcija (Spasić i Kocić, 2005).

Primer 1. Neka je {(0, 0), (1/2, 1/2), (1, 0)} zadati skup tačaka interpolacije i d = (1/2,1/2) vertikalni skalirajući faktor. Rezultat fraktalne inerpolacije je *Takagi -Knopp* funkcija (Takagi, 1903; Knopp, 1918, sl.19) data sa IFS

$$w_1(\boldsymbol{x}) = \begin{matrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{matrix}\ \boldsymbol{x}, \quad w_2(\boldsymbol{x}) = \begin{matrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{matrix}\ \boldsymbol{x} + \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix}\ .$$



Slika 19. Takagi-Knopp funkcija

Na osnovu Teoreme 19, poštujući notaciju k_i, $(A_\theta)_i$, $(A_\Delta)_i$ }dekompozicija je sledeća:

$$w_1 : \ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 : \ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Faktor kontrakcije je $k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}$, uglovi rotacije $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = -\pi/4$, faktor razvlačenja je dva puta veći po x-osi, a faktor iskošenja je jednak 1 u w_1 i –1 u w_2. Sve ovo nije se moglo zaključiti direktno iz IFS.

Primer 2. Sledeći primer predstavlja ortonormalnu dekompoziciju takozvane Kiesswetter-ove funkcije (Kiesswetter,1966; sl. 20). Graf Kiesswetter-ove krive prolazi kroz skup tačaka {(0, 0), (1/4, –1/2), (1/2, 0), (3/4, 1/2), (1, 1)}. Faktori vertikalnog skaliranja su $d = (-2/3, 2/3, 2/3, 2/3)$ i IFS je

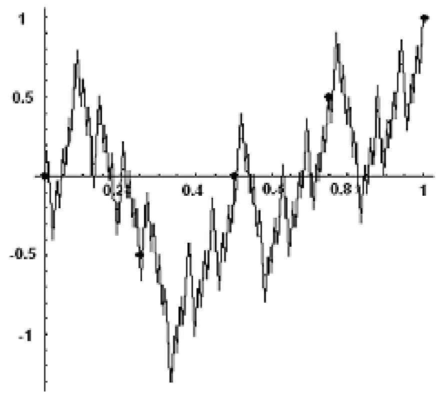
$$w_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/6 & -2/3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad w_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w_3(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad w_4(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ili na osnovu Teoreme 19 sledi:

$$w_1 : \left\{ 0.69,\ \begin{pmatrix} 0.83 & -0.55 \\ 0.55 & 0.83 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.43 & -0.53 \\ 0 & -0.80 \end{pmatrix} \right\}, \qquad w_2, w_3, w_4 : \left\{ 0.69,\ \begin{pmatrix} 0.83 & 0.55 \\ -0.55 & 0.83 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.43 & 0.53 \\ 0 & -0.80 \end{pmatrix} \right\}.$$

Parametar kontrakcije je $k = 0.69$ za sve w_1, w_2, w_3, w_4.



Slika 20. Kiesswetter-ova kriva

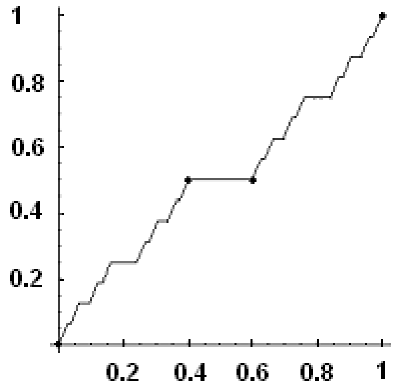
Primer 3. Kada skupu podataka za interpolaciju {(0, 0), (1/3, 1/2), (2/3, 1/2), (1, 1)} pridružimo faktore vertikalnog skaliranja $d = (1/2, 0, 1/2)$ dobićemo čuvenu funkciju *Đavolje stepenice* (Sl. 21). Ova funkcija je atraktor IFS definisanog sa tri kontrakcije. Odgovarajući IFS je

$$w_1(x) = \begin{matrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{matrix}\ x + \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}, \quad w_2(x) = \begin{matrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\ x + \begin{matrix} 1/3 \\ 1/2 \end{matrix}, \quad w_3(x) = \begin{matrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{matrix}\ x + \begin{matrix} 2/3 \\ 1/2 \end{matrix}$$

ili na osnovu Teoreme 19

$$w_1, w_3 : \ \frac{1}{2},\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix},\ \begin{matrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \qquad w_2 : \ \frac{1}{3},\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix},\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

sa vektorima translacije istim kao u IFS. Parametri kontrakcije k su 1/2 za w_1, w_3 i 1/3 za w_2.



Slika 21. Funkcija đavolje stepenice

Primer 4. Skup podataka za interpolaciju je{(–3/4, 1/3), (–1/4, 1/3), (0, 1), (1/4, 1/3), (3/4, 1/3)} a faktor vertikalnog skaliranja d = (1/3, 0, 0, 1/3) će dati funkciju na sl. 22 koja je atraktor IFS sa četiri kontrakcije

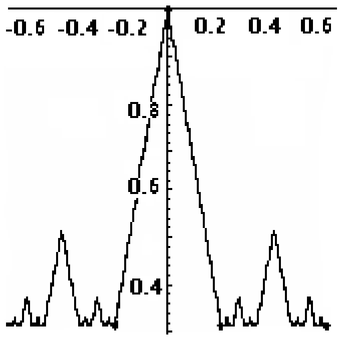
$$w_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 4/9 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3/8 \\ 2/9 \end{pmatrix},$$

$$w_3(x) = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ -4/9 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1/8 \\ 23/27 \end{pmatrix} w_4(x) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$

Teorema 19 daje sledeću deompoziciju

$$w_1, w_4 : \ \frac{1}{3}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 : \ 0.4, \begin{pmatrix} 0.3 & -0.9 \\ 0.9 & 0.3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$w_3 : \left\{ 0.47, \begin{pmatrix} 0.35 & 0.94 \\ -0.94 & 0.35 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$



Slika 22. Funkcija iz primera 4

Kao zaključak se može istaći da se afina transformacija w u ravni R^2 može dekomponovati u ortogonalnu i neortogonalnu transformaciju. Ortogonalna komponenta se dalje može podeliti u skaliranje definisano parametrom s i ortonormalnu transformaciju definisanu parametrom q. Neortogonalna komponenta sastoji se od nehomogenog skaliranja (parametar t) i skew transformacije (parametar u). Dekompozicioni parametri s, q, t, u su od koristi u analizi iterativnih sistema funkcija za konstruisanje fraktalnih skupova u smislu dominantnosti jednog ili dva parametra nad drugima, čime se ističu različite simetrije i druge osobine IFS. Interpolacione funkcije, takođe mogu biti korišćene u procesiranju signala, specijalno u resemplovanju i rekonstrukciji signala (Price i Hayes, 1998).

6. Vremenske serije i metode za izračunavanje fraktalne dimenzije biosignala

Analiza biosignala u neuronaukama i drugim oblastima obuhvata mnoštvo postupaka od akvizicije podataka do procesiranja podataka, od matematičke osnove analize do implementacije i primene algoritama za procesiranje signala (Van Drongelen, 2007). Generalni cilj analize vremenskih serija jeste dobijanje korisnih informacija iz signala u pogledu stanja sistema ili izvora koji generiše dati signal (Borg, 2005). Procesiranje signala danas odnosi se na procesiranje bazirano na digitalnoj tehnologiji što uključuje i vremensku i amplitudsku kvantizaciju, gde je glavni fokus u literaturi (Oppenheim i Schafer, 1989) najčešće bio na digitalnom procesiranju signala sa vremenskom kvantizacijom. Sa uvođenjem kompjuterizovanih sistema za akviziciju signala, biosignali se registruju numerički u formi vremenske serije. Signal se može definisati (Oppenheim i Schafer,1989), kao funkcija koja nosi informaciju, uopšteno o stanju ili ponašanju fizičkog sistema, a u slučaju biosignala - živog sistema. Matematički, signal se predstavlja kao funkcija jedne ili više nezavisno promenljivih.

6.1 Definicija, osobine i analiza vremenskih serija

Dinamički sistemi mogu se analizirati ili pomoću matematičkih modela ili merenjem i analizom vremenskih serija (Savi, 2005). Cilj izučavanja vremenske serije je najčešće prognoza njenih budućih vrednosti ili upoznavanje mehanizama koji je generiše (Mališić, 2002.)

Postoji više načina na koje se može definisati vremenska serija. Niz merenja određenih promenljivih uzetih u toku realnog vremena u nekom polju za koji je kvantifikacija značajna (fizika, ekonomija, biologija itd.) predstavlja vremensku seriju. Zapis merenja $x(t_0)$, $x(t_1)$, $x(t_2)$, ... gde su t_0 t_1 t_2 ... ekvidistantni vremenski trenuci, naziva se *vremenska serija* ili *diskretan vremenski signal*.

Matematički, vremensku seriju možemo definisati kao niz $y_k = x(t_k)$, gde je t_k $t_0, t_1, \ldots, t_N$, $t = t_k - t_{k-1}$, $k = 0,\ldots,N$, (k, N N). N označava broj odbiraka ili semplova u vremenskom intervalu $T = t_N - t_0$, a $f_s = N / T$ predstavlja *frekvenciju odabiranja* tj. *frekvenciju semplovanja* signala. Matematičari vremensku seriju često posmatraju kao element nekog prostora, ali, mi ćemo se držati ove definicije, koja je za potrebe ovog rada odgovarajuća.

Posmatrano u ovom kontekstu termin *analiza* ima različita značenja. Analiza jednostavno predstavlja bilo koji tip procesiranja koje pomaže interpretaciji serije, tj. izdvajanju njenih karakteristika. U smislu prostornog vektora, analiza znači proširenje serije u odnosu na skup bazisnih vektora, čija linearna kombinacija aproksimira datu seriju ili je na neki način predstavlja (Echauz, 1995). Analiza signala pomoću koeficijenata proširenja se vrši utvrđivanjem u kojoj meri je svaka komponenta prisutna u signalu. Suprotno, kombinacija ovih komponenti predstavljena kao signal je *sinteza*. U statističkom smislu, analiza vremenskih serija je potraga za modelima koji mogu da objasne ponašanje serije i koji se mogu koristiti za predviđanje budućih vrednosti. Ovo objašnjenje znači da postoji skup izračunljivih pravila koja mogu da proizvedu posmatranu dinamiku.

Uopšteno govoreći postoje dva metodološka pristupa u analizi vremenskih serija (Stepien, 2002). Prvi pristup koristi *linearne* metode kao što su Furijeova transformacija, wavelet transformacija, autoregresioni modeli, itd. i bazira na pretpostavci da je signal generisan linearnim stohastičkim procesom. Linearni stohastički procesi se modeliraju metodama teorije verovatnoće. Drugi pristup je baziran na nelinearnoj dinamici i koristi formalizme determinističkog haosa. Nelinearni dinamički procesi se modeliraju pomoću sistema *nelinearnih* ili kvazilinearnih diferencijalnih jednačina. Među karakterističnim osobinama dinamike haosa su: konačna korelaciona dimenzija, pozitivan najveći Ljapunovljev eksponent, dobra prediktabilnost u kratkom vremenskom intervalu.

Dobra prediktabilnost je u stvari osnovna ideja analize vremenskih serija: da signal sadrži informacije o neposmatranim (nemerenim) promenljivim veličinama koje mogu biti korišćene za predviđanje određenog stanja. Ovakav pristup je od interesa u biomedicinskim sistemima gde različiti signali mogu da budu registrovani i mereni u cilju posmatranja fiziološkog funkcionisanja sistema ili njegovog dela. Tipičan primer složenog fiziološkog signala je elektroencefalogram (EEG) (sl. 26, gore desno) koji odražava elektičnu aktivnost mozga. Po svojoj prirodi EEG signali su nestacionarni i predstavljaju kombinaciju nelinearnosti i slučajnih perturbacija (Diambra i sar. 2001). Danas mnogi autori (Esteller, 2000; Klonowski i sar., 2000; Spasić i sar., 2005) ukazuju da je normalan EEG signal kompleksniji od patološkog signala (npr. epileptičnog napada) koji pokazuje stanje haosa manje dimenzionalnosti. Takođe se, nasuprot pretpostavkama, pokazalo da je regularnost srčanog ritma povezana sa starenjem, a varijabilnost sa zdravljem (Vuksanović, 2006).

6.2 Spektralna analiza vremenskih serija

Dinamički sistem može biti analiziran u vremenskom ili u spektralnom domenu. Tehnike spektralne analize ili Furijeova transformacija utvrđuju vezu ova dva domena (Savi, 2005). Reč je o dekompoziciji signala u trigonometrijske serije. Furijeova transformacija za funkciju $s(t)$ se definiše kao

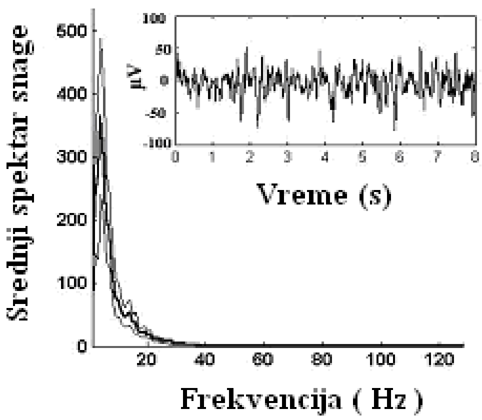
$$\hat{s}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{2\pi i f t} dt$$

a u diskretnom slučaju:

$$\hat{s}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} s_n e^{2\pi i k n / N}$$

gde je $f_k = k/N \quad t$, $k = -N/2, ...,N/2$ su frekvencije , dok je $\quad t$ interval semplovanja. Spektar snage signala je definisan kvadratom modula neprekidne Furijeove transformacije, $S(f) = |\widehat{s}(f)|^2$ ili u diskretnom slučaju, $S_k = |\widehat{s}_k|^2$.

Diskretna Furijeova transformacija je veoma dobar matematički alat za analizu signala, a algoritam za izračunavanje diskretne i inverzne Furijeove transformacije naziva se brza Furijeova transformacija ili skraćeno FFT od engleskog Fast Fourier transform. FFT algoritam je veoma efikasan u procesiranju signala, gde se koristi za filtriranje, frekventnu analizu signala, za izracunavanje spektra snage itd. Na sl.26 prikazan je srednji spektar snage dobijen Furijeovom transformacijom gde se može uočiti oblik spektra koji se povinuje stepenom zakonu, a u gornjem desnom uglu prikazan je biosignal u vremenskom domenu u trajanju od 8 s.



Slika 23. Biološki signal (gornji desni ugao, epoha od 8 s) i njegov srednji spektar snage (15 epoha od po 8 s).

Furijeova transformacija je posebno značajna u analizi eksperimentalnih signala, a može biti primenjivana i kod haotičnih sistema sa malom dimenzijom (Moon, 1992;

Savi, 2005). Međutim, kod sistema sa velikim stepenom slobode Furijeov spektar ne može biti od velike pomoći u razdvajanju šuma i fraktalnih osobina signala.

6.3 Modeliranje aktivnosti populacije neurona

Nedovoljno poznata struktura i funkcionalna kompleksnost nervnog sistema je i dalje problem u neuronaukama, te matematička modeliranja pojedinačnih neurona, populacije neurona predstavljaju načine rešavanja. Cilj jenog tipa modeliranja (Kalauzi, Spasić i sar, 2003.) bio je rasvetljavanje prirode i značenja pozadinske aktivnosti neurona koja se javlja između akcionih potencijala registrovanih u jednom sloju malog mozga pacova. Pošli smo od ideje o simulaciji pozadinske aktivnosti populacije neurona (RBA, recorded background activity) poređenjem Furijeovih amplitudskih spektara RBA, jednostavnih i složenih akcionih potencijala (šiljaka, eng. spikes) Purkinjeovih neurona, jer su neki preliminarni rezultati ukazivali na veliko učešće jednostavnih akcionih potencijala Purkinjeovih ćelija u RBA. Da bismo postigli postavljeni cilj, zadatak je bio simulacija RBA superponiranjem odgovarajućeg broja usrednjenih jednostavnih akcionih potencijala tako da signal simulirane pozadinske aktivnosti neurona (SBA, eng. simulated background activity) počinje da liči na originalno registrovan RBA. I najzad, ispitivanje veze između spektra RBA sa srednjom frekvencijom pražnjenja okolnih neurona u cilju modeliranja promena aktivnosti u neuronskoj populaciji.

6.3.1 Akvizicija signala i konstrukcija uzoraka jednostavnih talasnih oblika (SST)

Akvizicija neuronske aktivnosti je vršena na animalnom modelu. Aktivnost pojedinačnih neurona desne strane malog mozga je registrovana ekstracelularno (izvan ćelije) staklenim elektrodama. Određeni tip ćelija (Purkinjeove ćelije) je elektrofiziološki identifikovan na osnovu prisustva jednostavnih i složenih akcionih potencijala u neuronskoj aktivnosti malog mozga. Posle klasičnog pojačavanja i filtriranja, pojedinačni signali su dalje procesirani.

Napravljeno je 12 snimakaneuronske aktivnosti u trajanju od po 120 s i izvršena je A/D konverzija sa frekvencijom uzorkovanja od 30 kHz. Za detekciju i izdvajanje šiljaka korišćen je softver koji je razvijen u laboratoriji Centra za multidisciplinarne studije Beogradskog Univerziteta. Nad segmentima signala sa RBA između jednostavnih i složenih akcionih potencijala izvršena je A/D konverzija – a zatim su preneti i konkatenirani u nov fajl vremenskog ograničenja do 115 s.

Takođe, svi jednostavni i složeni šiljci koji se pojavljuju u svakoj od registrovanih Purkinjeovih ćelija su detektovani, izdvojeni i posebno usrednjeni tako da su formirani uzorci jednostavnih (SST - simple spike template) i složenih (CST – complex spike template) akcionih potencijala. Pre procedure usrednjavanja, akcioni potencijali su dovedeni na istu osu tako što je određen ekstremum (prvi maksimum ili minimum) iz svih pojedinačnih akcionih potencijala i oni pozicionirani jedan preko drugog, a zatim su usrednjeni tako što intenzitet sempla SST predstavlja srednju vrednost intenziteta uzoraka registrovanih akcionih potencijala.

6.3.2 Simulacija registrovane aktivnosti neurona (RBA) pomoću uniformne raspodele intenziteta SST

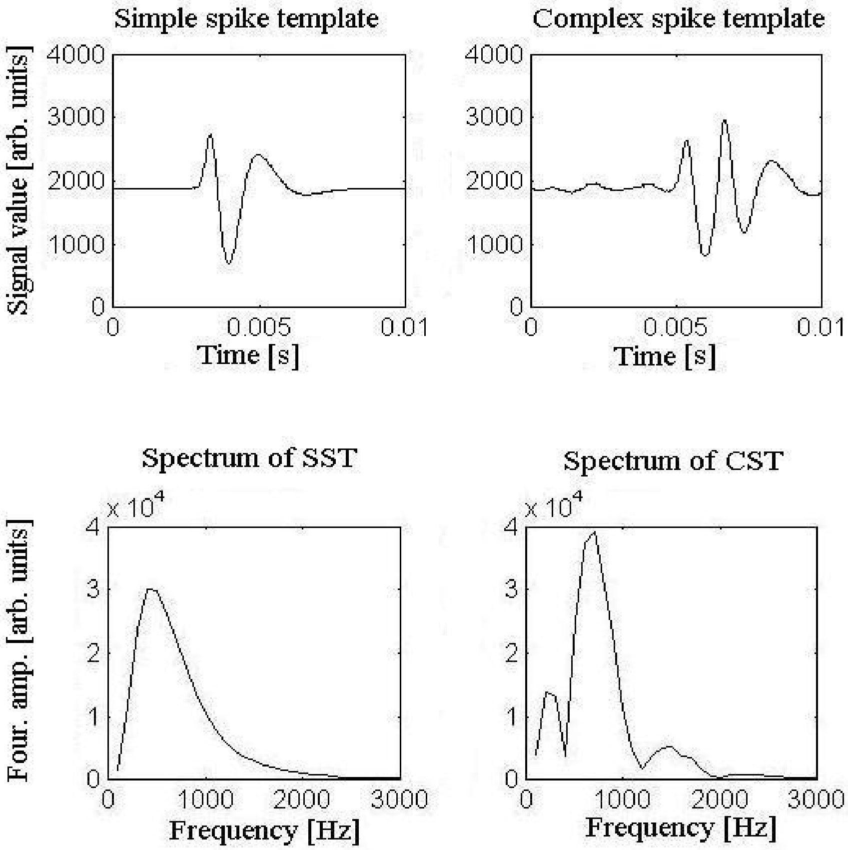
Posle formiranja SST, frekvencija semplovanja je redukovana na 6 kHz i prilikom formiranja simulirane pozadinske neuronske aktivnosti (SBA) i prilikom procesiranja registrovane pozadinske neuronske aktivnosti (RBA). Furijeove epohe u FFT analizi su bile duge 600 semplova (0.1 s), a frekventna rezolucijaje postavljena na 10 Hz.

Za svaki RBA, formiran je odgovarajući SBA superponiranjem SST talasnih oblika. Intenziteti i pozicije SST talasnih oblika su slučajne veličine u SBA signalu. Slučajne veličine intenzitet i pozicija šiljka imaju uniformnu raspodelu verovatnoće U(0,1).

Serija simulacija pozadinske neuronske aktivnosti je generisana u cilju istraživanja njihovih spektralnih karakteristika. Izračunati su srednji amplitudski spektri $\overline{\mathrm{Amp}}_{\mathrm{SBA}}(f)$ (frekventni opseg 10-3000 Hz) serija simulirane pozadinske aktivnosti. Dvanaest SBA je formirano superponiranjem SST talasnih oblika za svih 12 snimaka pojedinačne ćelijske aktivnosti. Dok su RBA i SBA izvedeni iz istog polaznog signala, za svaki snimak, u slučaju prikazanih SST i CST talasnih oblika, kao i u slučaju poređenja RBA i SBA spektra pre i posle stimulacije, Furijeove amplitude su predstavljene u proizvoljnim jedinicama.

Poređeni su Furijeovi amplitudski spektri simulirane (SBA) i snimljene (RBA) pozadinske aktivnosti i testirana je značajnost njihove linearne zavisnosti Studentovim t-testom.

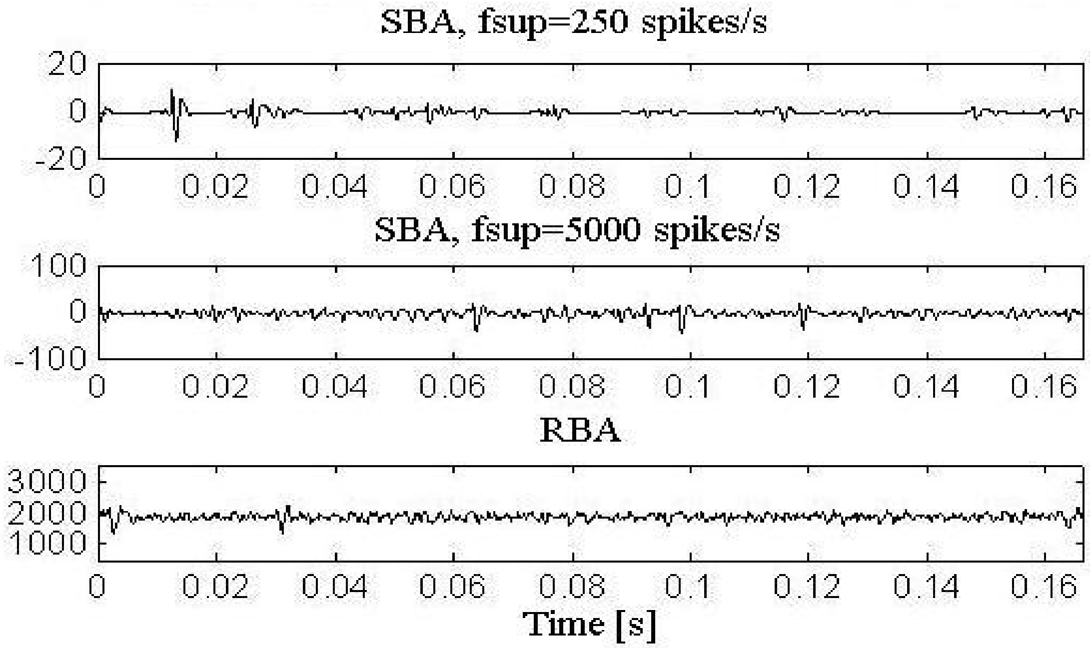
Izgled tipičnih jednostavnih i složenih akcionih potencijala Purkinjeovih neurona kao i njihovi amplitudski spektri su prikazani na sl.7. Aktivnost Purkinjeovog neurona je registrovana u uslovima kontrolisane anestezije sa srednjom frekvencijom pražnjenja od oko 30 jednostavnih akcionih potencijala/s i 0.14 složenih akcionih potencijala/s.



Slika 7. Primer jednostavnog (gore levo) i složenog akcionog potencijala (gore desno) Purkinjeove ćelije i njihovi odgovarajući Furijeovi amplitudski spektri (dole).

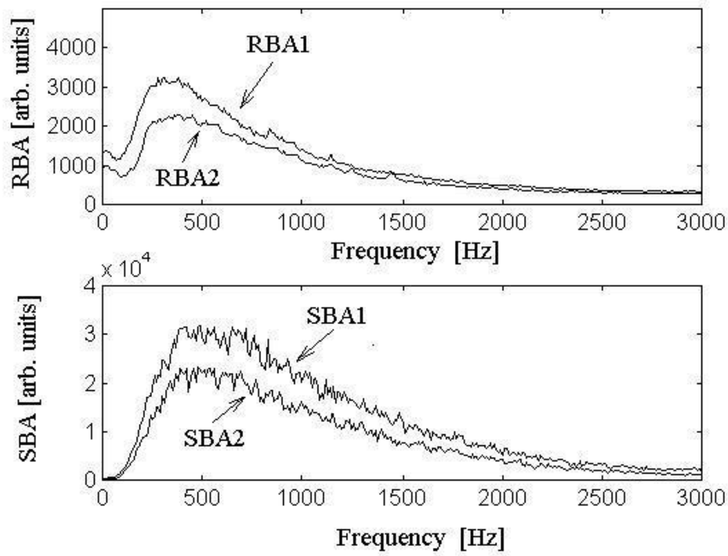
Spektar jednostavnog akcionog potencijala ima jedan šiljak koji je pozicioniran na oko 500 Hz, dok je spektar složenog potencijala karakterisan sa tri šiljka (na oko 200, 800 i 1500 Hz). Spektar sličnih karakteristika je dobijen za 11 snimaka 6 kortikalnih neurona (pre i posle moždane stimulacije).

Što je više superponiranih jednostavnih akcionih potencijala u vremenskom domenu, veća je sličnost simulirane pozadinske aktivnosti neurona sa registrovanom pozadinskom aktivnošću. Deo signala simulirane pozadinske aktivnosti i deo originalne registrovane pozadinske aktivnosti, gde je variran broj superponiranih jednostavnih akcionih potencijala (f_{sup}, frekvencija superponiranja) prikazan je na sl.8.



Slika 8. Simulirana pozadinska aktivnost neurona (SBA), gde je varirana frekvencija superponiranja (f_{sup}) menjana (2 gornje slike). Sličnost SBA sa odgovarajućom registrovanom pozadinskom aktivnošću (RBA – donja slika) je postignuta za f_{sup} > 4000 šiljkova/s.

Primer dva RBA spektra, pre i posle LC stimulacije, prikazan je na sl. 9 (gore). Prikazana promena u pomenutim RBA spektrima praćena je odgovarajućim istosmernim promenama frekvencije pražnjenja neurona najbližeg elektrodi. Analogna usaglašenost u smeru promene (simultani porast ili opadanje) je detektovana u slučaju 5 od 6 registrovanih ćelija. U cilju simuliranja promena u $\overline{\mathrm{Amp}}_{RBA}$, superponiranjem različitog broja SSTa formiran je SBA signal i na slici sl. 9 prikazan je $\overline{\mathrm{Amp}}_{RBA}$ i $\overline{\mathrm{Amp}}_{SBA}$. Smer promene $\overline{\mathrm{Amp}}_{RBA}$ i $\overline{\mathrm{Amp}}_{SBA}$ odgovara smeru promene f_{sup} u SBA. Mnogo veća sličnost profila može biti uočena između amplitudskog spektra SSTa (sl.7) i srednjeg spektra RBA (sl. 9), nego između spektra kompleksnog akcionog potencijala i srednjeg spektra RBA.



Slika 9. Srednji amplitudski spektar snimljene (RBA) i simulirane (SBA) pozadinske aktivnosti. Na gornjoj slici su prikazani RBA1 spektar pre stimulacije i RBA2 spektar posle stimulacije. Treba napomenuti da frekvencija pražnjenja registrovane ciljne ćelije opada sa 49.96 (pre stimulacije) na 24.2 šiljkova/s (posle stimulacije). Na donjoj slici su prikazana dva SBA signala: SBA1 je formiran superponiranjem f_{sup1} *= 10000 šiljkova/s, SBA2 superponiranjem* f_{sup2} *= 5000 šiljkova/s. Takle uspešno je simuliran inhibitorni efekat.*

Furijeove amplitude SST spektra iščezavaju za niske i visoke frekvencije, dok u slučaju srednjeg spektra RBA, ove granice nisu bile nula što ukazuje na to da je širokopojasni šum prisutan. Dakle, skaliranje spektra je različito. Linearna zavisnost može biti aproksimativno opisana relacijom:

$$\overline{\mathrm{Amp}}_{\mathrm{RBA}}(f) = Sc^* \ \overline{\mathrm{Amp}}_{\mathrm{SBA}}(f) + W_n,$$

gde je Sc skalirajući koeficijent, a W_n nivo širokopojasnog šuma. Vrednosti t-testa za 12 parova RBA, SBA spektra pokazali su statističku značajnost (na nivou 0.995) linearne korelacije između srednjih vrednosti Furijeovih amplituda RBA i odgovarajućih srednjih vrednosti Furijeovih amplituda SBA.

Srednja vrednost SBA Furijeovih amplituda, prikazana na sl. 10, odražava nivo simulirane aktivnosti neurona, formiranjem SBA, a empirijski dobijena zavisnost $\overline{\mathrm{Amp}}_{\mathrm{SBA}}$ od f_{sup} pokazuje za $f_{\mathrm{sup}} \geq 5000$ akcionih potencijala/s, rastuću funkciju.

Prvi dobijeni rezultat je rasvetljavanje porekla registrovane pozadinske neuronske aktivnosti. Šiljak na 500 Hz u RBA spektru mogao bi imati poreklo od jednostavnih šiljaka Purkinjeovih neurona iz okoline mesta registrovanja. Međutim, moguće je da jednostavni šiljkovi neurona iz okoline, a koji nisu Purkinjeovi, učestvuju takođe učestvuju u RBA. Pokušali da ispitamo da li može biti uspostavljena veza između srednjeg amplitudskog spektra RBA i usrednjene vrednosti aktivnosti okolnih neurona na dužoj vremenskoj skali od ~ 100 s.

Naš drugi rezultat se odnosi na utvrđivanje zavisnosti između srednjeg RBA spektra i srednje vrednosti aktivnosti neuronske populacije. Superponiranjem usrednjenih jednostavnih akcionih potencijala sa slučajnim veličinama: vremenom kašnjenja i amplitudom, pokušali smo da simuliramo situaciju u okolini mesta registrovanja. U skladu sa našim prvim rezultatom, RBA se uglavnom sastoji od šiljaka različitog intenziteta, generisanih od okolnih neurona. Cilj nam je bio da uspostavimo vezu između $\overline{\mathrm{Amp}}_{\mathrm{SBA}}$ i f_{sup} (sl. 11) radi ispitivanja da li neka od karakteristika ovih funkcija može biti korišćena kao alat za prikupljanje srednje aktivnosti populacije neurona. Rezultati su omogućili kvalitativnu detekciju pravca promene u srednjoj aktivnosti neuronske populacije. Ovo je omogućeno merenjem odgovarajućih promena $\overline{\mathrm{Amp}}_{\mathrm{RBA}}$, kao npr. pre i posle eksperimentalne intervencije. Kvantitativan aspekt ovog pristupa, koji se ogleda u izračunavanju procenta promene u aktivnosti populacije, baziran na snimljenim promenama u $\overline{\mathrm{Amp}}_{\mathrm{RBA}}$, zahteva preciznije modeliranje funkcije gustine verovatnoće intenziteta šiljaka u RBA.

U skladu sa prethodnim, SBA signali su formirani (u MATLAB 6.5) u skladu sa sledećom procedurom:

1) Srednja vrednost SST je oduzeta od svakog sempla SST (u opsegu 0 – 4095, prema A/D konvertoru) tako da je nova bazna linija SST pomerena na vrednost blisku nuli;

2) Generisan je početni vektor SBA, koji sadrži f_s*T nula (frekvencija semplovanja f_s=6000 semplova/s; trajanje SBA: T=4s);

3) Randomizacija intenziteta SST je izvršena generisanjem slučajnih veličina sa raspodelom gustine verovatnoće U(0,1) i množenjem svakog sempla SSTa nulte bazne linije sa generisanom slučajnom veličinom;

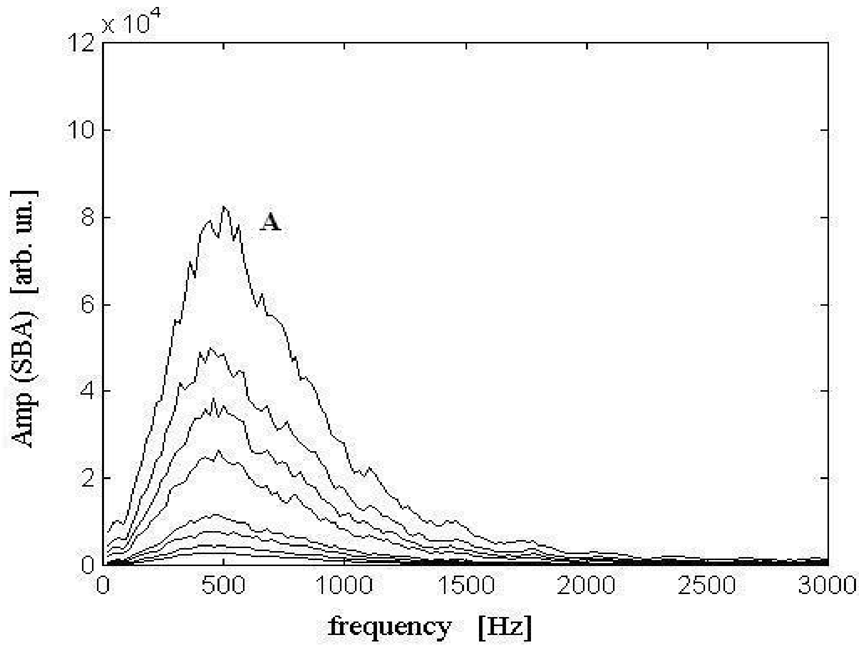
4) Slučajna pozicija talasnog oblika dobijenog u 3) je izračunata množenjem f_s*(T -T_s) semplova (trajanje SST :T_s= 0.01s) sa novim slučajnom veličinom;

5) Intermedijarni vektor SBA je formiran tako da sadrži oslabljen SST talasni oblik iz 3) na poziciji izračunatoj u 4) i nulama na ostalim pozicijama;

6) Tekući SBA vektor je formiran sabiranjem intermedijarnog SBA vektora i tekućeg iz prethodnog ciklusa;

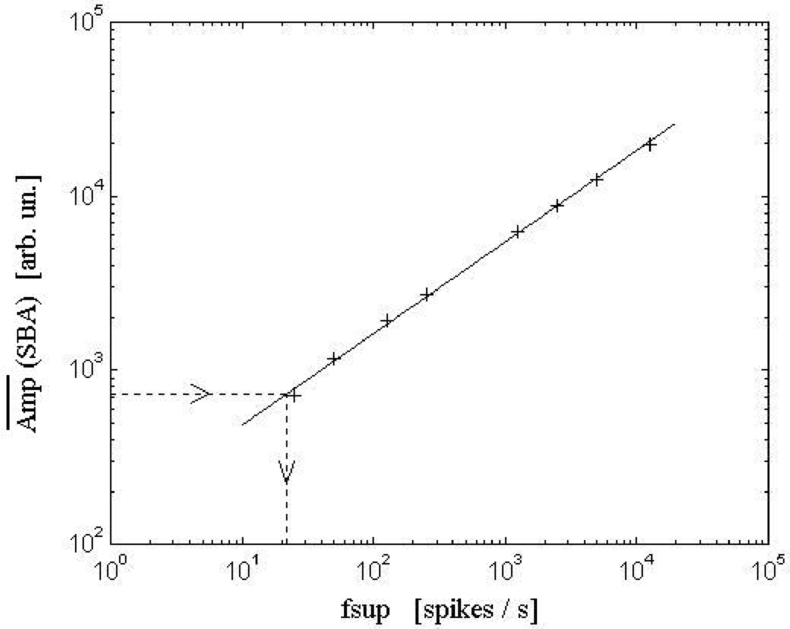
7) Procedura opisana u tačkama 3) do 6) ponavlja se f_{sup}*T puta.

Akvizicija signala, detekcija i izdvajanje akcionih potencijala su izvršeni na frekvenciji semplovanja od 30000 semplova/s. Kako Furijeovi amplitudski spektri SST i RBA pokazuju da nema značajnih komponenti preko 3000 Hz, SST, RBA i prosec simulacije su izvrešeni na redukovanoj frekvenciji semplovanja od 6000 semplova/s. Ovim korakom očuvana je značajnost simulacije u vremenu, istovremeno ne utičući na rezultat. Izvršene su serije simulacija sa različitim brojem superponiranih SST tj. menjana je frekvencija superponiranja f_{sup}. Zatim su zaredom izračunavani srednji Furijeovi amplitudski spektri ($\overline{\mathrm{Amp}}_{\mathrm{SBA}}$) (sl.10).



Slika 10. Osam amplitudskih spektara serija SBA signala (simulacija snimljene pozadinske neuronske aktivnosti - RBA). Svaki SBA signal je konstruisan superpozicijom različitog broja jednostavnih akcionih potencijala (SST), intenziteta koji su viđeni kao slučajna veličina sa uniformnom distribucijom, u trajanju od 4 s. Frekvencija superpozicije, je varirana u opsegu f_{sup}= [25 - 12500] *šiljaka/s* (*A – amplitudski spektar sa najvećom* f_{sup}).

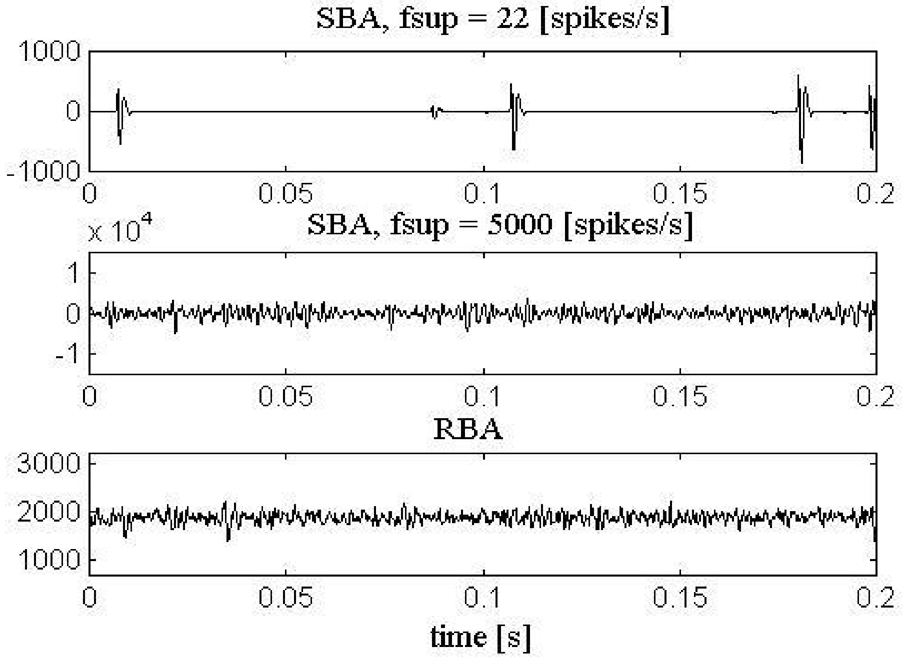
Tako dobijenu vezu $\overline{\mathrm{Amp}}_{\mathrm{SBA}} = f(f_{\mathrm{sup}})$, iskoristićemo kao kalibracionu liniju (sl.11): počev od prethodno merenih vrednosti srednjeg amplitudskog spektra RBA iste ćelije, sa namerom da očitamo odgovarajuću frekvenciju superponiranja koja karakteriše dato RBA.



Slika 11. Kalibraciona linija $\overline{\mathrm{Amp}}_{SBA} = f(f_{sup})$*, dobijena iz 8 spektara prikazanih na sl. 10. Prikazana na log-log grafiku ova zavisnost je visoko linearna. Međutim, ova linija nije sasvim odgovarajuća zbog uniformne distribucije intenziteta SST-a. Greška koja nastaje u očitavanju je prikazana isprekidanom linijom i strelicom: merena vrednost* $\overline{\mathrm{Amp}}_{RBA} = 730.06$ *[arb. jed.] vodi do* $f_{sup} = 22$ *šiljaka/s.*

Kako se RBA sasoji od pojedinačnih akcionih potencijala koje generišu neuroni oko vrha elektrode, očekujemo da tako dobijena f_{sup} služi kao mera nivoa aktivnosti te neuronske populacije. Kako je SST talasni oblik konstruisan usrednjavanjem akcionih potencijala iz istog registrovanja kao i RBA, nema potrebe za kalibracijom signala koji prolazi kroz pojačivački sistem – sve Furijeove amplitude su izražene u proizvoljnim jedinicama mere, a ne u μV.

Međutim, koristeći ovaj pristup, pojavljuje se sistematsko potcenjivanje frekvencije superponiranja. Primer sa sl.11 i 12 ilustruje ovu činjenicu. Za jedan od registrovanih 7 neurona merena vrednost $\overline{\mathrm{Amp}}_{\mathrm{RBA}} = 730.06$ [jed. mere], a pomoću kalibracione linije sa sl.11 očitavamo $f_{sup} = 22$ šiljaka/s (isprekidana linija). Deo odgovarajućeg SBA signala konstruisanog sa f_{sup} = 22 šiljaka/s je prikazan na sl.12 (gore).



Slika 12. Delovi dva signala simulirane pozadinske neuronske aktivnosti (SBA, gore i sredina) u poređenju sa registrovanom pozadinskom neuronskom aktivnošću (RBA, dole). Signal na gornjem grafiku je konstruisan pomoću potcenjene vrednosti frekvencije superponiranja, f_{sup} = 22 šiljaka/s, dobijene sa sl. 2. Da bi se postigla veća sličnost RBA i SBA, tj. bolja simulacija RBA signala neophodno je koristiti veću f_{sup} (kao što je prikazano na srednjem grafiku sa 5000 šiljkova/s).

Razlika između SBA sa malom vrednošću f_{sup} i RBA signala od iste ćelije je očigledna (sl. 12). Sličnost RBA i SBA u vremenskom domenu može se postići jedino za vrednosti f_{sup} > 4000 šiljaka/s. Glavni uzrok ove razlike jeste u izboru uniformne raspodele verovatnoće intenziteta SST-a u prosecu formiranja SBA. Uniformna distribucija koja je prethodno korišćena za kvalitativnu analizu u potpoglavlju 3.3.2 postaje neodgovarajuća za kvantitativnu analizu tj. za konstrukciju kalibracione linije. Dakle, treba pronaći adekvatnu funkciju raspodele verovatnoće pojavljivanja šiljka sa datim intenzitetom koji je generisao slučajno izabrani neuron u okolini elektrode. Izvođenje formule kojom bi bila modelirana ova slučajna veličina zahteva zakon opadanja intenziteta akcionog potencijala u zavisnosti od rastojanja neurona od elektrode. U ovom slučaju predlaže se stepena funkcija koja će biti kasnije eksplicitno data.

6.3.3 Modeliranje raspodele verovatnoće intenziteta akcionih potencijala

Da bismo izveli formulu za funkciju gustine raspodele verovatnoće da se neuron nalazi na rastojanju *r* od vrha elektrode u datom neuronskom sloju, posmatrajmo kružni prsten debljine *dr*, sa centrom u vrhu elektrode, gde je *r* rastojanje neurona od centra, $r_0 < r < r_m$ (r_0 – rastojanje od centra do najbližeg neurona, r_m – rastojanje od centra do najudaljenijeg neurona). Pretpostavimo zatim da su neuroni ravnomerno raspoređeni u neuronskom sloju oko vrha elektrode sa gustinom η. Tada je broj neurona u prstenu *dN* dat sa

$$dN = \eta\, dS = \eta\, 2\pi\, r\, dr,$$

gde je *dS* površina prstena. Ukupan broj neurona u posmatranom prstenu je

$$N_{\mathrm{tot}} = \int_{r_0}^{r_m} dN = \int_{r_0}^{r_m} \eta 2\pi r\, dr = \eta 2\pi \frac{r_m^2 - r_0^2}{2} = \mu\pi(r_m^2 - r_0^2).$$

Funkcija gustine verovatnoće da se neuron nađe na rastojanju *r* od vrha elektrode može biti izračunata kao

$$p_r = \frac{dN}{N_{tot}\, dr} = \frac{2\pi\eta\, r}{\pi\eta(r_m^2 - r_0^2)} = \frac{2r}{r_m^2 - r_0^2},$$

a odgovarajuća funkcija raspodele verovatnoće je

$$P_r = \int_{r_0}^{r} \frac{2r}{r_m^2 - r_0^2}\, dr = \frac{r^2 - r_0^2}{r_m^2 - r_0^2}. \tag{1}$$

Kako ćelije mogu imati različitu frekvenciju pražnjenja, označimo sa $N_f(f)$ gustinu raspodele broja ćelija po njihovim frekvencijama pražnjenja u čitavoj oblasti integracije. Kako $N_f(f)$ označava broj ćelija koje imaju frekvenciju pražnjenja u intervalu $(f, f{+}df)$, ukupan broj akcionih potencijala generisanih unutar konstantnog vremenskog intervala T može biti izračunat kao:

$$n_{tot} = T \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} N_f(f)\ d(f)\,.$$

Ako je N ukupan broj neurona u posmatranoj oblasti, srednja vrednost broja akcionih potencijala koje generiše jedna ćelija će biti

$$n_{av} = \frac{n_{tot}}{N_{tot}} = \frac{T}{N_{tot}} \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} N_f(f)\ d(f) \Rightarrow n_{tot} = n_{av} N_{tot}\,.$$

Možemo pretpostaviti da oblik gustine $N_f(f)$, a samim tim i n_{av}, može biti preveden iz polaznog skupa neurona u podskup prstena (r, dr) sa centrom u vrhu elektrode. Dakle, ukupan broj akcionih potencijala koje generišu neuroni iz prstena, u vremenskom intervalu T, treba da bude proporcionalan broju neurona u prstenu

$$d(n_{tot}) = n_{av}\, dN.$$

Funkcija gustine verovatnoće da je akcioni potencijal generisan sa rastojanja r od vrha elektrode će onda biti

$$p_{sr} = \frac{d(n_{tot})}{n_{tot}\ dr} = \frac{n_{av} dN}{n_{av} N_{tot}\ dr} = \frac{2\,r}{r_m^2 - r_0^2}\,,$$

što je isto kao i raspodela p_r koja je prethodno izvedena.

Da bismo odredili funkciju gustine raspodele verovatnoće da je elektrodom registrovan akcioni potencijal intenziteta i, koristićemo stepenu funkciju kao zakon opadanja intenziteta:

$$i(r) = \frac{C}{r^k}\,, \qquad (2)$$

gde su: i - intenzitet akcionog potencijala, r – rastojanje između neurona i elektrode, C i k su parametri modela. Parametar C može biti određen uvođenjem intenziteta akcionog potencijala najbližeg neurona, dok je k faktor opadanja intenziteta. Model je validan za $k>0$, k R, mada su konstruisane kalibracione linije samo za k = 1,2,3,4. Da bismo odredili C, pretpostavićemo da je akcioni potencijal, koji generiše najbliži neuron na rastojanju r_0 od centra prstena, intenziteta i_0. Iz (2) sledi

$$C = i_0 r_0^k .$$

Zamenom vrednosti C u (2):

$$i(r) = \frac{i_0 r_0^k}{r^k} \Rightarrow r = r_0 \; i_0^{1/k} \; i^{-1/k} . \tag{3}$$

Diferenciranjem (3) dobija se

$$dr = -\frac{1}{k} \; r_0 \; i_0^{1/k} \; i^{-1/k-1} \; di \tag{4}$$

Funkcija gustine raspodele verovatnoće da je registrovan akcioni potencijal intenziteta i, može biti izvedena zamenom (3) i (4) u (1):

$$p_i = \frac{2 i_0^{2/k} \; r_0^2}{(r_m^2 - r_0^2)k} \; i^{-2/k-1} .$$

Tada će odgovarajuća funkcija raspodele verovatnoće biti

$$P_i = \int_{i_m}^{i} \frac{2 i_0^{2/k} \; r_0^2}{(r_m^2 - r_0^2)k} i^{-2/k-1} \; di = \frac{i_0^{2/k} \; r_0^2}{(r_m^2 - r_0^2)} (i_m^{-2/k} - i^{-2/k}) \tag{5}$$

Kako iz (3) sledi

$$i_m = i_0 \left(\frac{r_0}{r_m} \right)^k , \tag{6}$$

zamenom (6) u (5), dobija se

$$P_i = \left(\frac{i_0}{i} \right)^{2/k} \frac{i^{2/k} - i_m^{2/k}}{i_0^{2/k} - i_m^{2/k}} .$$

Konačno, ako uvedemo relativne intenzitete:

$$i_r = \frac{i}{i_0} , \; i_{rm} = \frac{i_m}{i_0} ,$$

funkcija raspodele verovatnoće postaje

$$P_{ir} = \frac{1 - i_{rm}^{2/k}\; i_r^{-2/k}}{1 - i_{rm}^{2/k}}\,. \tag{7}$$

Potrebno je modelirati slučajnu veličinu koja ima funkciju raspodele verovatnoće definisanu u (7). Ako je u slučajna veličina sa uniformnom distribucijom U(0,1), sledi

$$P_{ir}(i_r) = u \quad \Rightarrow \quad i_r = P_{ir}^{-1}(u)$$

odakle je

$$i_r = \frac{i_{rm}}{\left[1-\left(1-i_{rm}^{2/k}\right)u\right]^{k/2}}\,.$$

Kada poredimo performanse modela za različite vrednosti parametra k, obratiti pažnju na analizu polja integracije koje sadrži jednak broj neurona. Dakle, granice integracije treba da budu $i_m \le i \le i_0$ za svako k. Na osnovu (6), možemo konačno da pišemo

$$i_r = \frac{r_{0m}^k}{\left[1-\left(1-r_{0m}^2\right)u\right]^{k/2}}, \qquad \text{gde je } r_{0m} = \frac{r_0}{r_m}\,.$$

U slučaju trodimenzione raspodele ćelija, umesto planarnog prstena, posmatrajmo sfernu ljusku sa centrom u vrhu elektrode i neka je prostorna gustina neurona ρ. Tada je broj neurona u sfernoj ljusci

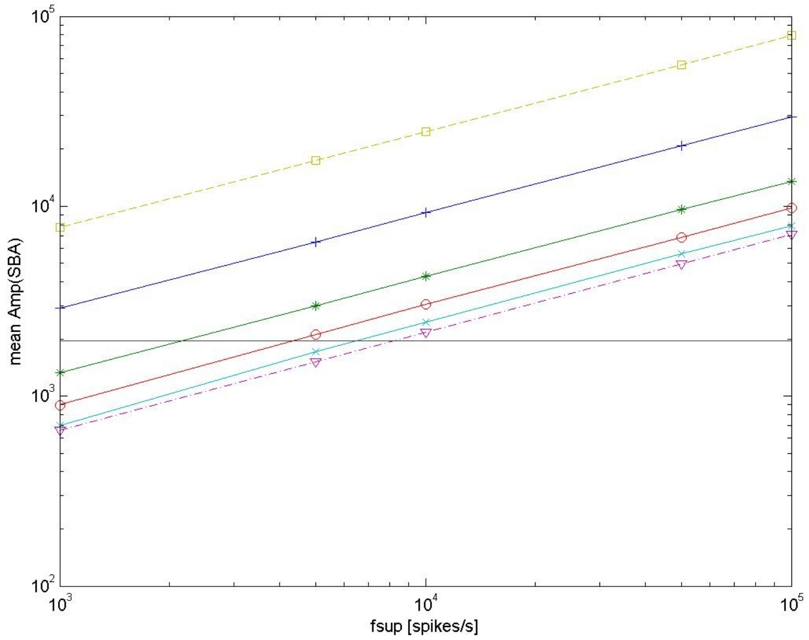
$$dN = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr.$$

Analogno izvođenju za slučaj u ravni, dobija se formula za modeliranje slučajne promenljive i_r :

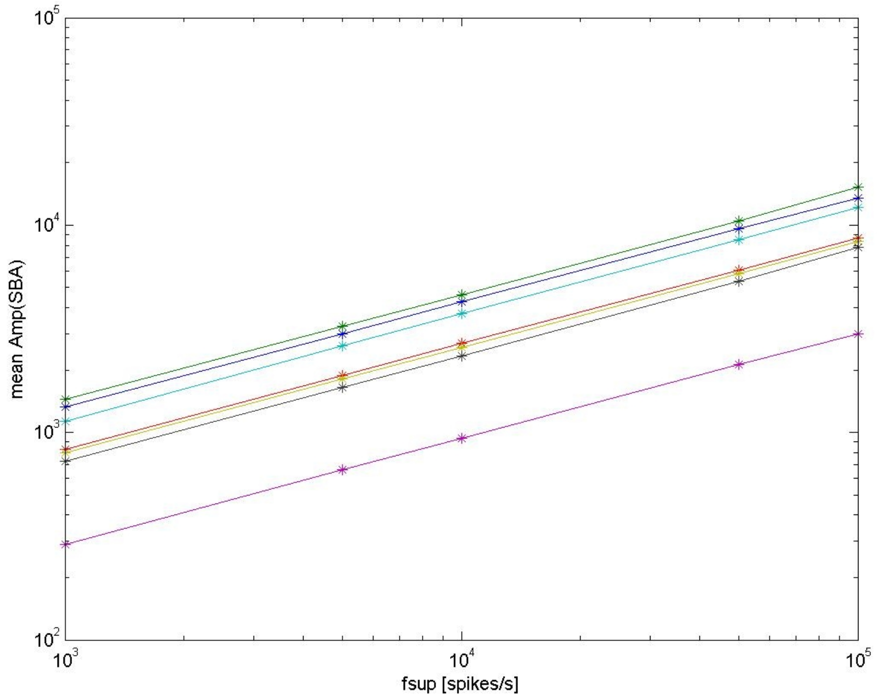
$$i_r = \frac{r_{0m}^k}{\left[1-\left(1-r_{0m}^3\right)u\right]^{k/3}}\,.$$

6.3.4 Konstrukcija novih kalibracionih linija

Raspodela verovatnoće, izvedena u prethodnom poglavlju, je praćena familijom kalibracionih linija (sl. 13). Postojanje familije linija sledi iz činjenice da model uključuje dva bitna parametra: k – stepen atenuacije tj. oslabljenja intenziteta, r_{0m} - količnik maksimalnog i minimalnog radijusa integracije. Za jednu od registrovanih ćelija, variran je stepen slabljenja intenziteta akcionog potencijala (k = 1,2,3,4), a parametar r_{0m} = 10 (razlozi su u biološkoj osnovi) u modelu 2-dimenzionalnog rasporeda ćelija. Odgovarajuće kalibracione linije su prikazane na sl. 13. Za snimak aktivnosti iste ćelije, kalibraciona linija za 3-dimenzionalni slučaj (r_{0m} = 10; k = 2) je izračunata i prikazana na istoj slici. Srednja vrednost nagiba ovih pravih, izračunata za 2-dimenzionalni stepeni model je 0.5133 ± 0.0096. U slučaju uniformne distribucije, koeficijent nagiba je 0.5050, za trodimenzionalni stepeni model je 0.5146 što se ne razlikuje značajno od slučaja 2-dimensionalnog stepenog modela. Linearnost dobijenih srednjih vrednosti amplitudskih spektara je veoma visoka: srednja vrednost koeficijenata linearne korelacije za 2-dim stepeni model je 0.9982 ± 0.0019. Svi stepeni modeli su pozicionirani ispod linije dobijene modeliranjem uniformnom raspodelom, što je potvrdilo naša očekivanja da ćemo preciznijim modeliranjem korigovati grešku u proceni vrednosti f_{sup}, prethodno dobijenu pomoću uniformne raspodele. Odgovarajući $\overline{\mathrm{Amp}}_{\mathrm{RBA}}$ za određenu registrovanu ćeliju je izračunat i prikazan kao horizontalna linija na čija je ordinata konstantna i jednaka $\overline{\mathrm{Amp}}_{\mathrm{RBA}}$.



*Slika 13. Familija kalibracionih linija, konstruisana za jednu od 7 registrovanih ćelijskih aktivnosti, u skladu sa raspodelom verovatnoće intenziteta akcionih potencijala (7) i stepenim zakonom (2). Za vrednosti parametara r_{0m} = 10 i faktora atenuacije k = 1 (plava, +), 2 (zelena, *), 3 (crvena, o), 4 (tirkizna, x), familija je prikazana punim linijama. Kao što je i očekivano, linije koje odgovaraju stepenom modelu su pozicionirane ispod linije koja odgovara modelu sa uniformnom distribucijom (žuta isprekidana linija, kvadratići), što potvrđuje veću tačnost stepenog modela. Kalibraciona linija za 3-dimenzionalni raspored ćelija (roze isprekidana linija, trouglovi) je prikazana za r_{0m}=10, k=2. Stabilnost koeficijenta nagiba vodi do formule (9), kao metoda za merenje promena aktivnosti populacije. Horizontalna linija predstavlja odgovarajuću vrednost $\overline{\mathrm{Amp}}_{RBA}$.*



Slika 14. Kalibracione linije, konstruisane za 7 registrovanih ćelija. Vrednosti parametara modela su: r_{0m} = 10; k=2; 2-dimenzionalni raspored ćelija. Koeficijenti nagiba ovih pravih ne razlikuju se značajno od onih koje su prikazane na sl. 13.

Najzad, izračunate su kalibracione linije za stepeni model za 7 snimaka ćelijske aktivnosti (r_{0m} = 10; k = 2; 2-dimenzionalni raspored ćelija) i rezultat je prikazan na sl.14. Srednja vrednost koeficijenata nagiba za ovih 7 kalibracionih linija je 0.5108 ± 0.0034, što se takođe ne razlikuje značajno od prethodnih vrednosti.

6.3.5 Izračunavanje promene aktivnosti neuronske populacije na osnovu stabilnosti koeficijenta nagiba kalibracionih krivih

Kako sve kalibracione linije mogu biti aproksimirane pravim linijama u log-log dijagramu, sa koeficijentima nagiba koji su gotovo nezavisno od vrednosti parametara, ova metoda je prihvaćena (Kalauzi i Spasić, 2004) kao odgovarajuća za merenje promena u aktivnosti populacije u jednom neuronskom sloju, čija je mera f_{sup}. Ona se bazira na izračunavanju vrednosti srednjeg Furijeovog amplitudskog spektra, $\overline{Amp}_{RBA}$ pre i posle eksperimetnalne intervencije. Neka je S srednja vrednost koeficijenata nagiba kalibracionih linija. Funkcionalna zavisnost koja je proistekla sa sl.14 je: $\overline{Amp}_{SBA} = f(f_{sup})$. Tada sledi:

$$\log(\overline{Amp}_{SBA}) = S^*\log(f_{sup}) + C, \tag{8}$$

gde je C=const. Dalje, ako označimo srednju vrednost amplitudskog spektra pre i posle eksperimentalne intervencije sa $\overline{Amp}_{RBA1}$ i $\overline{Amp}_{RBA2}$ respektivno, a odgovarajuće frekvencije superpozicije sa f_{sup1} i f_{sup2}, onda u skladu sa (8) sledi

$$\log(\overline{Amp}_{RBA2} / \overline{Amp}_{RBA1}) = S * \log(f_{sup2} / f_{sup1}),$$

odnosno

$$f_{sup2} / f_{sup1} = (\overline{Amp}_{RBA2} / \overline{Amp}_{RBA1})^{1/S}. \tag{9}$$

6.3.6 Primena metode u eksperimentu sa stimulacijom određenog moždanog centra

U ovom primeru, stimulacija je praćena opadanjem $\overline{Amp}_{RBA}$ i frekvencije pražnjenja posmatranog neurona. I zaista, takav fenomen je potvrđen i primenom formule (9), tako da ćemo moći da poredimo odnos inhibicije jedne ćelije i inhibicije neuronske populacije. Ciljni neuron pokazao je smanjenje u frekvenciji pražnjenja sa 2716 akcionih potencijala tokom 60s pre, na 979 akcionih potencijala, tokom prvih 60s posle stimulacije. Odgovarajući odnos frekvencije pražnjenja je 0.36, što predstavlja inhibiciju ciljnog neurona za 64%. Srednji RBA amplitudski spektri, izdvojeni iz epoha po 60s, su $\overline{Amp}_{RBA1}$ = 354.85 [jed. mere] i $\overline{Amp}_{RBA2}$ = 280.66 [jed. mere]. Najzad, primenom formule (9),odnos dve frekvencijesuperpozicije može biti izračunat kao:

$$f_{sup2} / f_{sup1} = (0.7909)^{1/0.5118} = 0.6323.$$

Dakle, detektovan je istovremeni pad aktivnosti neuronske populacije za ~ 37%.

6.4 Fraktalna analiza vremenskih serija

Znatni deo metoda za analizu vremenskih serija se zasniva na pretpostavci da se proučavana serija može opisati kao stohastički proces sa Gausovom funkcijom gustine verovatnoće. Šta više, izračunavanjem funkcije gustine spektra snage opštim FFT algoritmom, pretpostavlja se da je vremenska serija stacionarna. Ova pretpostavka je vrlo restriktivna i veoma retko se sreće u prirodi. Empirijske vremenske serije u prirodnim naukama su često nestacionarne i imaju mali odnos signala i šuma čineći teškim tačno definisanje i karakterizaciju njihove dinamičke strukture. Uobičajeni odgovor na visok šum je usrednjavanje, međutim usrednjavanje u vremenskom domenu nije odgovarajuće naročito kada je u pitanju nelinearna dinamika. U (Heathcote i Elliott, 2005) dat je prikaz alternativnih metoda baziranih na topologiji i kratkotrajnom predviđanju nelinearne dinamike i ilustrovana je njihova primena korišćenjem TISEAN (TIme SEries ANalysis) softvera. Metode fraktalne analize ne traže ovakve pretpostavke i mogu da obezbede rešenje koje prevazilazi ove probleme. U revijalnom prikazu metoda fraktalne analize Delignieres i saradnici (Delignieres i sar., 2005) navode da je glavni cilj fraktalne analize da ponudi inoviran pristup klasičnim problemima stabilnosti, varijabilnosti i fleksibilnosti u ponašanju kompleksnih sistema. Fraktalna analiza se primenjuje u različitim oblastima za karakterizaciju visoko iregularnih i nestacionarnih podataka (Kozma i sar.,1998). Kada je vremenska serija fraktalna, njena samosličnost se može opisati vrednošću fraktalne dimenzije. Izračunavanje vrednosti fraktalne dimenzije obično zahteva složenu rektifikacionu proceduru. Relativno jednostavan algoritam je Higučijev. Higučijeva metoda se zasniva na izračunavanju dužine fraktalne krive u slučaju samo-afine geometrije grafa vremenske serije.

Fraktalna analiza može da zameni druge metode za procesiranje signala sa ciljem da se izvrši karakterizacija sistema pri promeni spoljašnjih uslova. Korak koji prethodi analizi vremenskih serija jeste karakterizacija signala različitim statističkim i dinamičkim metodama evaluacije. Cilj ovog prvog koraka je da se rasvetle neke glavne karakteristike ispitivanog signala, kao što su stacionarnost ili nestacionanost, prisustvo ili odsustvo periodičnih komponenti i rasvetljavanje da li je signal slučajan ili sadrži nelinearne, determinističke, haotične komponente. Rezultati ove karakterizacije imaju važne implikacije na izbor metoda modeliranja u daljoj analizi. Ako je signal stacionaran sa mogućim periodičnim komponentama, konvencionalne metode korelacione analize u vremenskom i frekventnom domenu su obično odgovarajuće i dovoljne za analizu. Međutim, za nestacionarne signale sa nelinearnom dinamikom, analiza metodama teorije haosa može biti podesnija.

Kada se jednom identifikuju glavne osobine signala, odredi se nekoliko važnih kvantitativnih karakteristika, kao što je dominantna vremenska skala signala, moguće pojavljivanje samo-afinosti i fraktalne karakteristike signala i drugo. Sve ove osobine sadrže važne informacije za dizajn modela signala.

6.5 Veza između fraktalne dimenzije i spektralnog indeksa

U većini slučajeva, gustina spektra snage se povinuje stepenom zakonu, tj. niže frekvencije imaju više energije u poređenju sa višim frekvencijama sledeći jedinstvenu vezu

$$S(f) \quad f^{-\beta}$$

gde je $S(f)$ gustina spektralne snage, f je frekvencija, a β je indeks stepenog zakona ili spektralni indeks. Kriva sa jednim indeksom stepenog zakona za sve frekvencije je samoslična.

Postoji sledeća aproksimativna veza (Higuchi, 1988) između indeksa stepenog zakona β i fraktalne dimenzije D: u čitavom opsegu 1 D 2,

$$D = (5 - \beta) / 2.$$

Primetimo da je gornja jednakost samo aproksimacija. Ona važi za klase procesa zvanih fraktalno Braunovo kretanje sa $1 \quad \beta \quad 3$, ali ne važi za $\beta \quad 1$ i $\beta \quad 3$. U mnogim praktičnim situacijama, osim monofraktalnosti, signal često pokazuje bi- ili multifraktalne karakteristike, tj. nagib krive k vs. $L(k)$ zavisi od opsega brojeva k. Kod multifraktalnog signala, izračunavanje skupa vrednosti fraktalnih dimenzija se izvodi deljenjem čitavog k opsega u nekoliko segmenata i primenom linearnog fitovanja u svakom podsegmentu.

6.6 Metode za fraktalnu analizu biosignala

Mnogi algoritmi za izračunavanje FD zasnovani su na pretpostavci o samo-sličnosti signala i nezavisnosti od skaliranja. FD talasnog oblika predstavlja moćni alat za detekciju tranzijenata. Posebno se u analizi biosignala (elektroencefalograma, elektrokardiograma) ova osobina koristi za identifikaciju i razlikovanje specifičnih stanja fizioloških funkcija. Postoje različiti algoritmi za izračunavanje FD. Prema novijem mišljenju više autora (Delignieres i sar., 2005; Eke i sar., 2002), prvi korak u fraktalnoj analizi ima za cilj da identifikuje klasu kojoj analizirana serija pripada, tj. da li je ona fraktalno Braunovo kretanje (fBm) ili fraktalni Gausov šum (fGn) (definicije su date u Appendix-u 3). Tada se može izračunati skalirajući eksponent koristeći metodu koja je adekvatna za identifikovanu klasu. Od metoda koje se koriste u fraktalnoj (monofraktalnoj) analizi navešćemo neke:

- Analiza gustine spektralne snage (eng.Power Spectral Density Analysis - PSD),
- Analiza detrendovanih fluktuacija (eng. Detrended Fluctuation Analysis – DFA) (Peng i sar.,1993),
- Analiza reskaliranih rangova (eng. Rescaled Range Analysis – R/S) – Hurst-ov eksponent (Hurst, 1965),
- Disperziona analiza (Disp) (Bassingthwaighte,1988),

- Skaliranje varijansi prozora (eng. Scaled Windowed variance Method – SWV) (Cannon i sar., 1997),
- Higučijeva metoda (Higuchi, 1988),
- Kacova metoda (Katz, 1988),
- Petrosianova metoda (Petrosian, 1995) i
- Metoda uzastopnih razlika (Kalauzi, Spasić i sar. 2005).

Neke od ovih metoda se odnose na frekventni, a neke na vremenski domen. Izbor metode uslovljen je tipom (fBm ili fGn) eksperimentalnih podataka koji se analiziraju (detaljnije u Delignieres i sar., 2005; Esteller, 2000).

Nekoliko faktora mora biti uzeto u obzir kada se određuje dužina prozora serije za analizu. Među njima su stacionarnost podataka, dužina podataka koja je potrebna da bi se izračunala određena karakteristika signala, frekvencija semplovanja. Kompromis se postiže između zahteva da prozor bude dovoljno veliki da se mogu izračunati specifične karakteristike signala i da bude dovoljno kratak da se može pretpostaviti stacionarnost podataka. Izbor dužine prozora i prozora sa ili bez preklapanja takođe zavisi od tipa serije koja se analizira (detaljnije u poglavlju 7).

6.6.1 Hurst-ov eksponent - Analiza reskaliranih rangova (R/S)

Hurst-ov eksponent je definisan (Hurst, 1965) kao:

$$H = \frac{\log(R/S)}{\log T}$$

gde je T trajanje signala, a R/S odgovarajuće vrednosti reskaliranih rangova. Gornja jednačina je dobijena iz Hurst-ove opšte jednačine za vremenske serije koja takođe važi za fraktalno Braunovo kretanje. Hurst-ov eksponent je u sledećoj vezi sa fraktalnom dimenzijom D:

$$H = E + 1 - D$$

gde je E Euklidska dimenzija.

Metodu reskaliranih rangova, kojom se izračunava Hurst-ov eksponent vremenske serije, originalno je razvio Hurst (Hurst, 1965). Vremenska serija $x(t)$ je podeljena na nepreklapajuće intervale dužine n, gde n_{min} n n_{max}. Unutar svakog intervala, suma serije $X(s, n)$ je izračunata na sledeći način:

$$X(s,n) = \sum_{k=1}^{s} \{x_k(t) - \bar{x}_n\}$$

gde je $\bar{x}_n$ srednja vrednost serije za svaki interval, 1 s n, n_{min} n n_{max}. Rang R se izračunava za svaki interval kao razlika maksimuma i minimuma sume podataka $X(s, n)$ po s:

$$R = \max_{1 \le s \le n} X(s,n) - \min_{1 \le s \le n} X(s,n) \quad .$$

Rang R se zatim deli, zbog normalizacije, sa lokalnom standardnom devijacijom S polazne serije $x(t)$. Ova procedura se ponavlja za sve moguće dužine intervala n, a to praktično znači da je $n_{min} = 10$, a $n_{max} = (N - 1) / 2$, gde je N dužina vremenske serije. Na kraju, tzv. reskalirani rangovi R/S su usrednjeni za svaki interval dužine n, u oznaci $\overline{R/S}$. Važi sledeća relacija:

$$\overline{R/S} \propto n^H$$

Radi jednoznačnosti pravu vrednost Hurst-ovog eksponenta za datu seriju označavaćemo sa H, a izračunatu vrednost u analizi sa $\hat{H}$. Dakle, $\hat{H}$ je izražen kao nagib regresione prave dobijene za podatke $\log \overline{R/S}$ u zavisnosti od $\log n$.

Hurst-ov eksponent je mnogo korišćen kao mera samosličnosti i korelacionih osobina fraktalnog Braunovog kretanja (šuma). Hurst-ov eksponent se koristi za procenu prisustva ili odsustva dugotrajne zavisnosti (korelacije) i njenog stepena u vremenskoj seriji. Međutim, lokalni trendovi (nestacionarnosti) su često prisutni u fiziološkim serijama i mogu loše uticati na mogućnost merenja samosličnosti nekim metodama. Hurst-ov eksponent je mera glatkosti fraktalne vremenske serije bazirana na asimptotskom ponašanju reskaliranih rangova procesa. U analizi EEG serija, Hurst-ov eksponent je korišćen za karakterizaciju nestacionarnog ponašanja kod spavanja (Dangel i sar., 1999).

6.6.2 Analiza gustine spektralne snage (PSD)

Metoda analize gustine spektralne snage (Power Spectral Density Analysis - PSD) je široko rasprostranjen za izračunavanje fraktalnih osobina vremenske serije i zasnovan je na analizi spektara snage dobijenih FFT algoritmom. Prema Mandelbrou i Van Nesu (Mandelbrot i Van Ness, 1968) u frekventnom domenu važi sledeća relacija:

$$S(f) \propto 1/f^{\beta}$$

gde je f frekvencija, a $S(f)$ odgovarajući kvadrat amplitude odnosno odgovarajuća snaga. Eksponent β se dobija izračunavanjem koeficijenta pravca ($-\beta$) prave linearnim fitovanjem nad podacima log($S(f)$) vs. log(f). Dobri rezultati linearnog fitovanja ukazuju na postojanje dugotrajne korelacije originalne vremenske serije.

Prema nekim autorima (Eke i sar., 2000) metoda PSD omogućava klasifikaciju serija u fraktalni Gausov šum ili fraktalno Braunovo kretanje. Naime, ako je eksponent β: $-1<\beta<1$ serija je fraktalni Gausov šum, a za β: $1<\beta<3$ serija odgovara fraktalnom Braunovom kretanju. Veza između Hurst-ovog eksponenta i eksponenta β data je sledećim jednačinama:

$$H = \frac{\beta+1}{2}$$, za fraktalni Gausov šum i

$$H = \frac{\beta-1}{2}$$, za fraktalno Braunovo kretanje.

Bazirajući se na ovoj metodi uveli smo *Standardnu proceduru za analizu signala* koja se sastoji, u slučaju naših bioloških signala, iz sledećih koraka (Sl. 27):

.1 Digitalizacija registrovanog analognog signala (Sl. 27A),

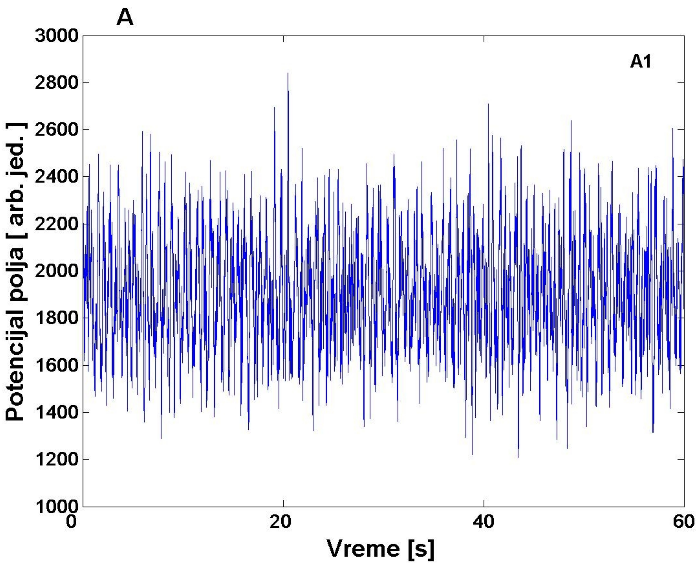
.2 Furijeova transformacija signala i dobijanje spektra snage (Sl. 27B),

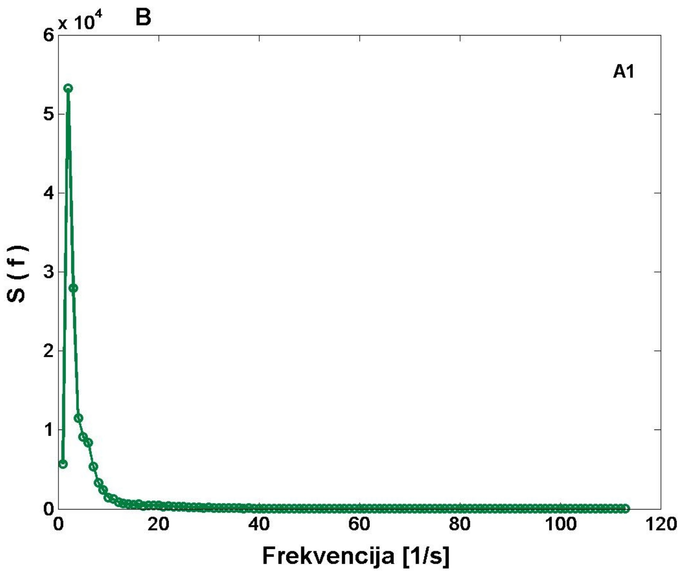
.3 Izračunavanje skalirajućeg eksponenta β i klasifikacija serije (Sl. 27C),

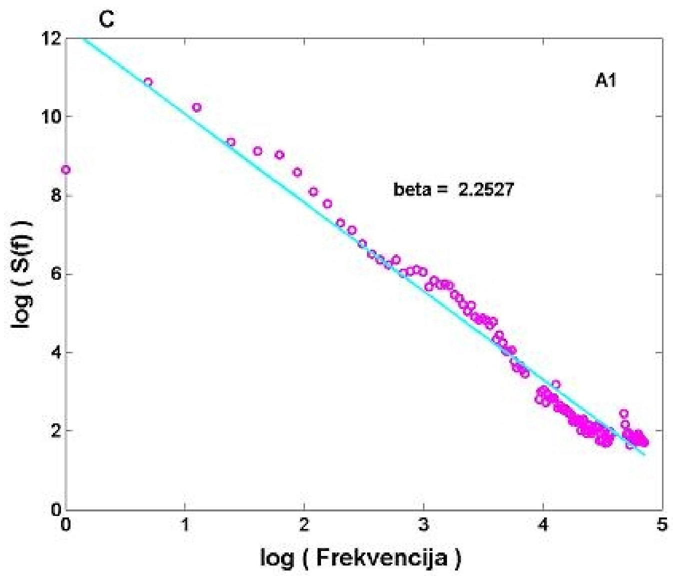
.4 Izračunavanje dimenzije D iz relacije spektralnog indeksa i fraktalne dimenzije,

.5 Izračunavanje Hurst-ovog eksponenta $\hat{H}$ (tab. 3),

.6 Poređenje srednjih vrednosti u slučaju monofraktalne analize.


A
A1
Potencijal polja [arb. jed.]
Vreme [s]
3000
2800
2600
2400
2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
0
20
40
60


B
A1
x 10^4
S (f)
Frekvencija [1/s]
6
5
4
3
2
1
0
0
20
40
60
80
100
120



Slika 24. Standardna procedura u analizi biosignala registrovanih u neurofiziološkoj laboratoriji Centra za multidisciplinarne studije:

A. Primer biološkog signala u vremenskom domenu (ECoG signal velikog mozga pacova A1(a1p08t0) *tretiranog aluminijumom u animalnom modelu Alchajmerove bolesti)*

B. Srednji spektar snage dobijen Furijeovom transformacijom (FFT algoritam)

C. Bi-logaritamska kriva spektra snage dobijena primenom PDS metode na signal sa slike A.

Tabela 3. Vrednosti parametara (spektralnog indeksa β, fraktalne dimenzije D, numerički izračunate fraktalne dimenzije Higučijevim algoritmom FD i takođe numerički izračunatog Hurstovog eksponenta $\mathcal{H}$) za signale iz eksperimenta sa pacovom A1(sl. 27).

biosignal	β	D	FD*	$\mathcal{H}$
a1p03t0	2.3731	1.3135	1.3121	0.6865
a1p08t0	2.2527	1.3737	1.3416	0.6263
a1p09t0	2.3025	1.3487	1.3238	0.6513

6.6.3 Higučijev algoritam

Hugučijeva metoda ne zahteva konstrukciju faznog prostora niti umetanje podataka (data embedding), već se primenjuje na podatke date u obliku vremenske serije. U radu Higuči (Higuchi,1988) navodi uslov za primenu Higučijevog algoritma i izračunavanje FD. Potrebno je izračunati spektar signala (FFT) i proveriti da li se on povinuje stepenom zakonu $P(f) \quad f^{-\beta}$, gde je $P(f)$ spektralna gustina snage, f frekvencija, a β const. Tada važi relacija

$$\mathrm{FD} = (5-\beta)/2.$$

Drugim rečima, odredi se logaritam spektra i ako je rezultat aproksimativno prava linija ispunjen je uslov za primenu Higučijevog metoda. Nagib dobijene krive predstavlja indeks stepenog zakona $-\beta$ ili spektralni indeks.

Posmatramo vremensku seriju $x(1), x(2),..., x(N)$. Konstruišemo k novih vremenskih serija x_m^k kao:

$$x_m^k : x(m), x(m+k), x(m+2k),...,x(m+\mathrm{int}[(N-m)/k]k)$$

za m=1,2,...,k gde je m početna vrednost za vreme, $k \quad N$: $k \quad k_{max}$, int[r] je celobrojni deo od realnog broja r.

Na primer, za k=4 i N=100 gore opisanim procesom dobiće se 4 vremenske serije:

$$x_1^4 \ : x(1), x(5), x(9),...,x(97)$$
$$x_2^4 \ : x(2), x(6), x(10),...,x(98)$$
$$x_3^4 \ : x(3), x(7), x(11),...,x(99)$$
$$x_4^4 \ : x(4), x(8), x(12),...,x(100).$$

Za svaku od k vremenskih serija ili krivih, 'dužina' $L_m(k)$ se izračunava pomoću formule:

$$L_m(k) = \frac{1}{k}\left[\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{int}\left[\frac{N-m}{k}\right]} \left|x(m+ik) - x(m+(i-1)k)\right|\right)\frac{N-1}{\mathrm{int}\left[\frac{N-m}{k}\right]k}\right]$$

gde je N ukupan broj odbiraka (tj. dužina) originalne serije x, a $(N\text{-}1)/(\mathrm{int}[(N\text{-}m)/k])\ k$ je normalizacioni faktor za 'dužinu' krivih formiranih od podskupova polazne vremenske serije. Naime, 'dužina' $L_m(k)$ nije dužina u euklidskom smislu, već predstavlja normalizovanu sumu apsolutnih vrednosti razlika ordinata parova tačaka na rastojanju k (gde je m početna tačka). Srednja dužina je izračunata kao srednja vrednost k dužina $L_m(k)$ za $m=1,...,k$:

$$L(k) = \frac{\sum_{m=1}^{k} L_m(k)}{k}$$

Ova procedura se ponavlja za svako k k_{max} i tako se dobijaju srednje vrednosti dužina za svako k.

Vrednost fraktalne dimenzije (FD) se izračunava lineranom regresijom nad log-log krivom $\ln(L(k))$ prema $\ln(1/k)$, pri čemu su koeficijenti linearne regresije dobijeni minimizacijom zbira kvadrata odstupanja:

$$\ln(L(k)) = FD \cdot \ln\left(\frac{1}{k}\right) + \left(\bar{b} + \ln(c)\right)$$

gde je

$$FD = \frac{n\sum_k (x_k y_k) - \sum_k x_k \sum_k y_k}{n\sum_k x_k^2 - \left(\sum_k x_k\right)^2}$$

gde je $x_k = \ln\frac{1}{k}$; $y_k = \ln L(k)$; $k = k_{1, \ldots,} k_{max}$; n je broj k vrednosti za koje je izračunata linearna regresija ($2 \le n \le k$); c je skalirajući faktor. Naime, Higučijeva fraktalna dimenzija pokazuje skalirajuće karakteristike, a to znači da se množenjem svih amplituda serije x_m^k konstantom c ne menja vrednost FD. Standardna devijacija FD se izračunava kao

$$S_{FD} = \sqrt{\frac{n\left[\sum_k y_k^2 - FD\sum_k x_k y_k - \bar{b}\sum_k y_k\right]}{(n-2)\left[n\sum_k x_k^2 - \left(\sum_k x_k\right)^2\right]}}$$

gde je

$$\bar{b} = \frac{1}{n}\left(\sum_k y_k - FD\sum_k x_k\right).$$

6.6.4 Petrosianov algoritam

Petrosian koristi brzo izračunavanje FD (Petrosian,1995). Međutim, ova ocena je u stvari FD digitalne sekvence koja je definisana po Kacu. Dok su talasni oblici analogni signali, digitalni signal je izveden oduzimanjem uzastopnih semplova iz zapisa talasnog oblika. Iz ove sekvence razlika, formirane su binarne sekvence označene sa +1 ili −1, ako je rezultat oduzimanja pozitivan ili negativan respektivno. FD se onda izračunava kao:

$$FD = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} n + \log_{10}\left(\frac{n}{n + 0.4 N_{\Delta}}\right)}$$

gde je n dužina sekvence (broj tačaka), i N_{Δ} je broj promena znaka (broj različitih parova) u generisanoj binarnoj sekvenci.

6.6.5 Kacov algoritam

Nasuprot Petrosianovoj metodi, izračunavanje Kacove FD (Katz, 1988) je nešto sporije, ali je direktno izvedeno iz talasnih oblika, eliminišući korak preprocesiranja. FD krive može se definisati kao:

$$D = \frac{\log_{10} L}{\log_{10} d}$$

gde je L ukupna dužina krive ili suma razlika između susednih tačaka, a d je dijametar izračunat kao razlika između prve tačke sekvence i tačke sekvence koja obezbeđuje najdalje rastojanje. Matematički gledano, d može biti izraženo kao:

$$d = max\ (\text{rastojanje}(1, i))\ .$$

Razmatrajući rastojanje između svake tačke sekvence i prve, tačka i je ona koja maksimizuje razliku u odnosu na prvu tačku. FD poredi pravi broj jedinica koje čine krivu sa minimalnim brojem jedinica koje su potrebne da se proizvede forma iste prostorne dimenzije. FD-je izračunate na ovaj način zavise od upotrebljenog broja jedinica. Kacov pristup rešava ovaj problem kreiranjem opšte jedinice ili »štapa«: srednji korak ili srednja razlika između susednih tačaka, $\underline{a}$. Normalizacija razlika u prethodnoj jednačini pomoću ovih srednjih vrednosti rezultuje jednačinom:

$$D = \frac{\log_{10}(L/\underline{a})}{\log_{10}(d/\underline{a})}$$

Definišimo n kao broj koraka u krivoj, onda je n=L/$\underline{a}$ i tada se prethodna formula može napisati kao

$$D = \frac{\log_{10}(n)}{\log_{10}\left(\frac{d}{L}\right) + \log_{10}(n)}$$

što sumira Kacov pristup izračunavanju fraktalne dimenzije talasnog oblika.

7. Originalna metoda merenja kompleksnosti signala i adaptacija postojećih metoda

Kao što smo već napomenuli, među metodama za fraktalnu analizu signala u vremenskom domenu, Higučijeva metoda je najčešće primenjivana. Međutim, za primenu Higučijevog algoritma je neophodno odrediti parametar k_{max} i odgovarajuću širinu prozora N. Neki od autora (Doyle i sar., 2004) koriste $k_{max} = 30$ ili $k_{max} = 60$, zatim (Ciszewski i sar., 1999) $k_{max} = 15$, dok neki autori (Virkala i sar., 2004) koriste vrednosti $k_{max} = 8$ i $k_{max} = 16$. Naša sugestija za optimalni opseg je $8 \leq k_{max} < 18$, što će biti naknadno obrazloženo. Pa ipak, možemo reći da se izbor parametara za fraktalnu analizu empirijskih podataka, kao i kod metoda nelinearne dinamike svodi na veštinu istraživača. U cilju prevazilaženja ovog problema, u radu (Kalauzi, Spasić i sar., 2005) predložili smo brzu i jednostavnu novu metodu za izračunavanje fraktalne dimenzije koristeći usrednjene apsolutne vrednosti prvih n izvoda (tj. konačnih razlika) signala u vremenskom domenu.

7.1 Originalna metoda uzastopnih razlika

Za fraktalnu analizu signala u vremenskom domenu predložili smo novu metodu (Kalauzi, Spasić i sar., 2005). Poznato je da je signal $y(t)$, registrovan u linearnom procesu, karakterisan prvim i drugim izvodom: $y^{(1)}(t) \neq 0$ i $y^{(2)}(t) = 0$. Odstupanje od linearnosti i porast kompleksnosti signala praćeni su promenama izvoda višeg reda, pa je $y^{(2)}(t) \neq 0$. Ako pokušamo da modeliramo kompleksniji proces polinomom višeg reda onda realni koeficijenti

$$m_y^{(n)} = \sum_t \left| y^{(n)}(t) \right|$$

mogu karakterisati kompleksnost signala. Posebno je značajno da koeficijente $m_y^{(n)}$ posmatramo u funkciji n-tog izvoda.

U cilju ispitivanja korelisanosti osobina funkcije

$$f(n) = m_y^{(n)}$$

sa fraktalnom dimenzijom signala, primenili smo prethodno definisan pristup na Vajerštrasove funkcije (Weierstrass, 1886.) Ove funkcije je zaista objavio Vajerštras 1886., ali je kako navode Kroneker i sam Vajerštras još 1861. Riman tvrdio da su ove funkcije neprekidne, ali da nisu diferencijabilne na gustom skupu na realnoj osi. Ove funkcije su pogodne za testiranje novih metoda fraktalne analize zbog njihove teoretski zadate vrednosti fraktalne dimenzije (Esteller, 2000; Pap, 1999; Hunt, 1998; Hu i Lau, 1993). Dakle, posmatrajmo familiju Vajerštrasovih kosinusnih funkcija u vremenu t, koja ima dva parametra γ i H:

$$W_H(t) = \sum \gamma^{-iH} \cos(2\pi \gamma^i t), \qquad 0 < H < 1, \text{ gde je } \gamma > 1. \tag{31}$$

Fraktalna dimenzija ovog signala je data sa

$$D = 2 - H,$$

dok Hausdorfova dimenzija još nije izračunata (Pap, 1999).

Pomoću gore definisane Vajerštrasove funkcije generisali smo familiju sa sledećim diskretnim vrednostima parametara:

$\gamma_i = 1.1, 1.2, \ldots, 5.0$; gde je $i = 1, \ldots, 40$, $N\gamma = 40$;

$H_j = 0.99, 0.98, \ldots, 0.01$; $j = 1, \ldots, 99$; $N_H = 99$.

Vrednosti parametra H_j su izabrane tako da bude pokriven čitav opseg vrednosti za fraktalnu dimenziju $(1 < D_j < 2)$. Naime, teoretski važi

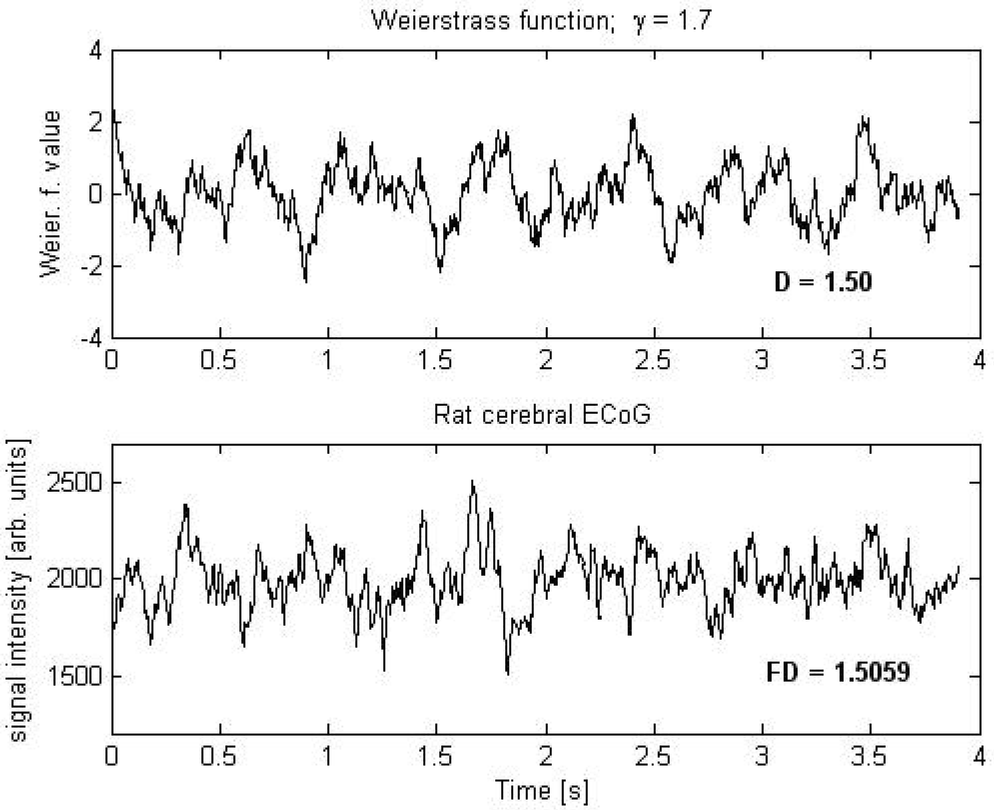
$$D_j = 2 - H_j = 1.01, 1.02, \ldots, 1.99.$$

Broj generisanih funkcija je $N\gamma N_H = 3960$.

Za frekvencu semplovanja i trajanje signala odabrali smo $f_s = 256$ samp/s i $T = 30$s, zbog sličnosti sa biološkim signalom. Sličnost ECoG signala pacova i

Vajerštrasove funkcije generisane sa navedenim vrednostima parametara T i f_s, koje imaju blisku vrednost fraktalne dimenzije, prikazana je na sl. 28.

Broj odbiraka za svakog člana familije (31) u vremenu je $N = f_s T = 7680$.



Slika 25. Vajerštrasova funkcija, karakterisana vrednošću fraktalne dimenzije D =1.50 (gore) i ECoG signal sa vrednošću FD =1.5059 izračunatom pomoću Higučijevog algoritma.

Kako razlike uzastopnih odbiraka zavise od amplitude signala, kao korak preprocesiranja signala, izvršena je normalizacija signala po amplitudi:

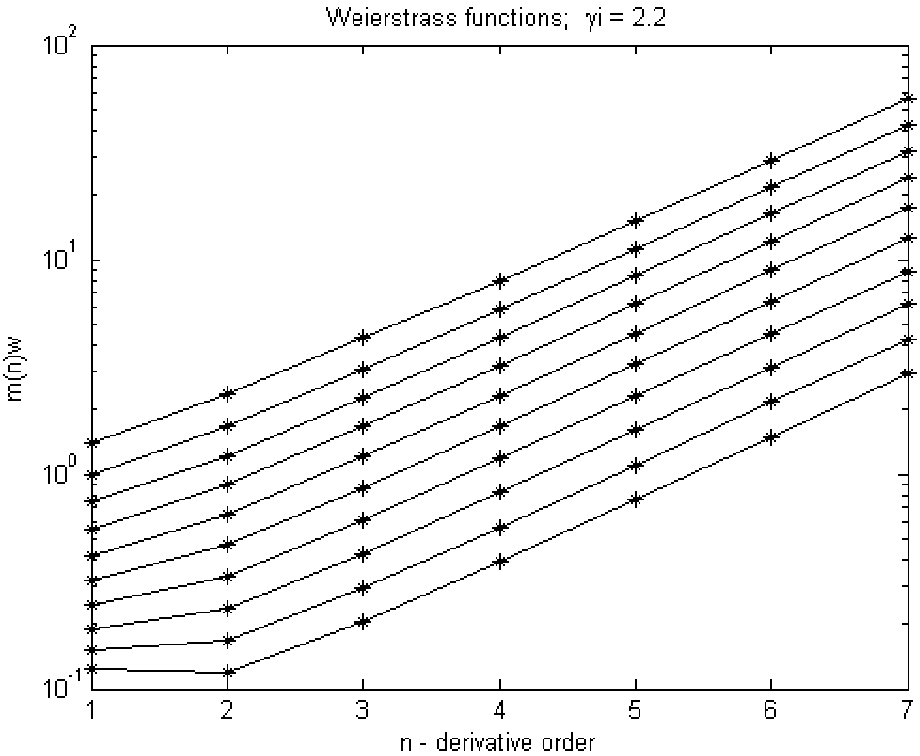
$$w_i^{\text{nor}} = \frac{w_i'}{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|w_j'\right|}, \quad \text{gde je} \quad w_i' = w_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w_j\,, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Posle izvršene normalizacije amplitude, za svaku od 3960 Vajerštrasovih funkcija, izračunati su koeficijenti $m_W^{(n)}$, za n = 1,2,...,7. Dobijeni rezultati prikazani su na semi-log grafiku zavisnosti koeficijenata $m_W^{(n)}$ od n. Utvrdili smo da $\log\left(m_W^{(n)}\right)$, za n = 2,3,...,7 linearno zavisi od n. Na sl. 29 su radi jasnoće dati podaci samo za vrednost γ_i = 2.2. Slični rezultati su dobijeni i za druge vrednosti γ_i. Posle izvršene linearne regresije linija $\log\left(m_W^{(n)}\right) = f(n)$, rezultat je pokazao da njihovi nagibi ne variraju značajno, dok je odsečak na y osi direktno proporcionalan vrednostima teoretske fraktalne dimenzije Vajerštrasovih funkcija, D_j.

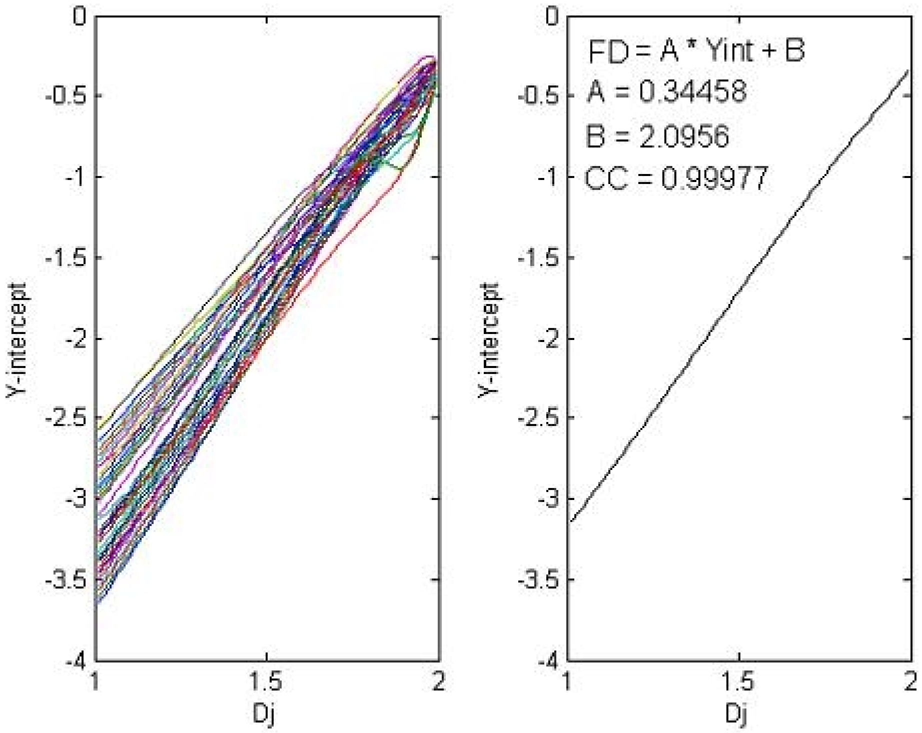
Relacija između vrednosti odsečka na y osi i D_j poslužila je kao kalibraciona linija za izračunavanja fraktalne dimenzije (FD) signala Higučijevim algoritmom. Za svaku vrednost γ_i broj mogućih kalibracionih linija zavisi od izbora maksimalnog reda izvoda n_{max} za linearnu regresiju. Obično je $n_{max} \geq 3$. Za $n_{max} = 3$ i $N_\gamma = 40$ kalibracione linije su prikazane na sl. 30.

S obzirom na to da prirodni biološki signali nisu karakterisani parametrom γ izvršili smo usrednjavanje ordinata $N_\gamma = 40$ linija po γ_i (γ_i = 1.1, 1.2, …, 5.0). Kao primer je data usrednjena linija za $n_{\max} = 3$ (sl. 30, desno). Za svaku vrednost $n_{\max}$ =3,4,5,6,7 konstruisali smo ove usrednjene linije i izračunali koeficijente linearne regresije $A(n_{\max})$ i $B(n_{\max})$, kao i odgovarajuće koeficijente linearne korelacije $CC(n_{\max})$:

$n_{\max}$	$A(n_{\max})$	$B(n_{\max})$	$CC(n_{\max})$
3	0.34458	2.0956	0.99977
4	0.33864	2.1008	0.99964
5	0.33554	2.1070	0.99955
6	0.33367	2.1133	0.99949
7	0.33247	2.1195	0.99945.



Slika 26. Semi log grafik $m^{(n)}{}_{W}$, srednje apsolutne vrednosti n-tog reda izvoda u odnosu na n. Prave su izračunate za familiju Vajereštrasovih funkcija za $\gamma_i = 2.2$ i $D_j = 1.01, 1.02,\ldots, 1.99$. Svaka linija u familiji pripada Vajerštrasovim funkcijama sa različitim vrednostima fraktalne dimenzije D_j. Od 99 linija prikazano je samo 10 radi jasnoće.



Slika 27. Grafički prikazi - Levo: odsečak na y-osi linija $\log(m^{(n)}_W) = f(n)$ *u odnosu na* D_j*, fraktalnu dimenziju Vajerštrasovih funkcija, za* $n_{\max} = 3$. *Svaka od* $N_\gamma = 40$ *linija, u okviru familije je dobijena iz Vajerštrasovih funkcija za vrednosti parametra* $\gamma_i = 1.1, 1.2, \ldots, 5.0$. *Desno: srednja vrednost odsečaka na y-osi (dobijena usrednjavanjem linija sa grafika levo), dobijena za* $n_{max} = 3$. *Naznačene su vrednosti parametara: CC (koeficijent linearne regresije), A iB (koeficijenti linearne korelacije).*

7.1.1 Procedura za izračunavanje fraktalne dimenzije pomoću uzastopnih razlika

Rezultati linearne regresije ($FD = A\ \ Y_{\text{int}} + B$) izračunate u prethodnom potpoglavlju su iskorišćeni u sledećoj formuli za izračunavanje FD signala normalizovane amplitude.

Za dati signal $y(t)$ procedura za izračunavanje njegove FD metodom uzastopnih razlika se sastoji iz sledećih koraka (32):

1. Normalizacija amplituda.
2. Izračunavanje koeficijenata

$$m^{(n)}{}_y = \text{mean}(\text{abs}(y^{(n)}(t))), \quad n = 1, \ldots, n_{\text{max}}. \tag{32}$$

3. Linearna regresija

$$\log(m^{(n)}{}_W) = (\text{slope}) \quad n + Y_{\text{int}}, \; n = 1, \ldots, n_{\text{max}}.$$

4. Primena formule FD= $A(n_{\text{max}}) \quad Y_{\text{int}} + B(n_{\text{max}})$.

Softverska implementacija prethodne procedure bazira se na izračunavanju uzastopnih konačnih razlika semplovanog biosignala. Za signal $y(t)$, sa N semplova i sa normalizovanim amplitudama, uzastopne konačne razlika n-tog reda i odgovarajući koeficijenti $m_y^{(n)}$ se izračunavanju na sledeći način:

$$y_i^{(n)} = y_{i+1}^{(n-1)} - y_i^{(n-1)}; \qquad i = 1, \ldots, N - n; \qquad n = 1, \ldots, n_{\max}; \; .$$

$$m_y^{(n)} = \frac{1}{N - n} \sum_{i=1}^{N-n} \left| y_i^{(n)} \right|$$

Kako su programi pisani u MATLAB 5.0 softveru može se videti da je pomenuti algoritam veoma jednostavan. Ako je signal smešten u vektoru **y**, procedura za izračunavanje FD, za $n_{\text{max}} = 3$, je sledeća:

```
mny(2)=mean(abs(diff(diff(y))));          (srednja vrednost uzastopnih razlika 2. reda)
mny(3)=mean(abs(diff(diff(diff(y)))));    (srednja vrednost uzast. razl. 3. reda)
lp=polyfit(2:3,log(mny(2:3)),1);          (linearna regresija)
fd = 0.34458*lp(2) + 2.0956;              (izračunavanje FD)
```

7.2 Poređenje postojećih algoritama za izračunavanje fraktalne dimenzije biosignala

U cilju ispitivanja koji algoritam daje najtačniju ocenu vrednosti fraktalne dimenzije signala korišćeni su podaci za testiranje performansi i efikasnosti algoritama dobijeni upotrebom determinističke kosinusne Vajerštrasove funkcije. Set od sto sekvenci, svaka sa različitim FD, je generisan pomoću date formule za Vajerštrasove funkcije (23). Fraktalna dimenzija sintetičkog signala rangirana je od 1.001 do 1.991. Primetimo da bi savršena reprodukcija poznate FD trebalo da da pravu liniju sa nagibom 1.

7.2.1 Poređenje Higučijevog, Petrosianovog i Kacovog algoritma

Prema nalazima (Esteller, 2000) Higučijev algoritam daje najtačniju ocenu FD. Sa porastom dužine prozora tačnija je ocena FD Higučijevom metodom, mada nema efekta dužine prozora kada se posmatra opseg 150-2000 tačaka, što je u saglasnosti sa našim nalazima u vezi uticaja dužine prozora na FD izračunatu ovim metodom. FD izračunate Kacovom metodom su eksponencijalna funkcija od teoretski poznatih FD. Petrosianova metoda je kvazilinearna, ali pravi veliku grešku. Rezultati FD dobijeni analizom eksperimentalno dobijenih elektroencefalograma (EEG), pokazuju da je Higučijeva metoda najtačniji od sva tri, Kacova metoda daje najkonzistentnije rezultate u pogledu razdvajanja stanja moždanih funkcija. Higučijeva i Petrosianova metoda su ozbiljno osetljive na nivo šuma od 10db. Na Kacovu metodu takođe je uticao šum, ali ne tako mnogo kao na druge metode. Sve tri metode su veoma brze. Najbrža je Petrosianova, a zatim Kacova i Higučijeva za prozor dužine 500 tačaka. Međutim, sve tri metode mogu biti korišćene u realnom vremenu. Ako dužina prozora raste do 8000 tačaka, onda se performanse Higučijeve metode znatno poboljšavaju.

Higučijeva metoda, međutim, daje mnogo tačniju ocenu FD signala, kada je testirana na sintetičkim podacima, ali je mnogo osetljivija na šum. Ovo pokazuje da se mora pažljivo vršiti izbor FD algoritama u zavisnosti od posebnosti namene. Faktori kao što su poznati opseg FD, nivo šuma i dužina prozora mogu biti razmatrani u cilju dobijanja najboljih razultata.

7.2.2 Poređenje Higučijeve i Metode uzastopnih razlika

U cilju ocene greške Metode uzastopnih razlika primenili smo proceduru (32) iz prethodnog odeljka na istu familiju Vajerštrasovih funkcija koja je služila za kalibraciju. Uvešćemo sledeće oznake:

$\boxed{W_j^i}$ - Vajerštrasova funkcija karakterisana fraktalnom dimenzijom D_j i parametrom γ_i,

$FD^{(W_j^i)}(n_{max})$ - fraktalna dimenzija Vajerštrasove funkcije $\boxed{W_j^i}$ izračunata procedurom (P), koristeći maksimalne razlike reda n_{max},

$LE[\gamma_i, D_j, n_{max}] = FD^{(W_j^i)}(n_{max}) - D_j$, linearna greška i

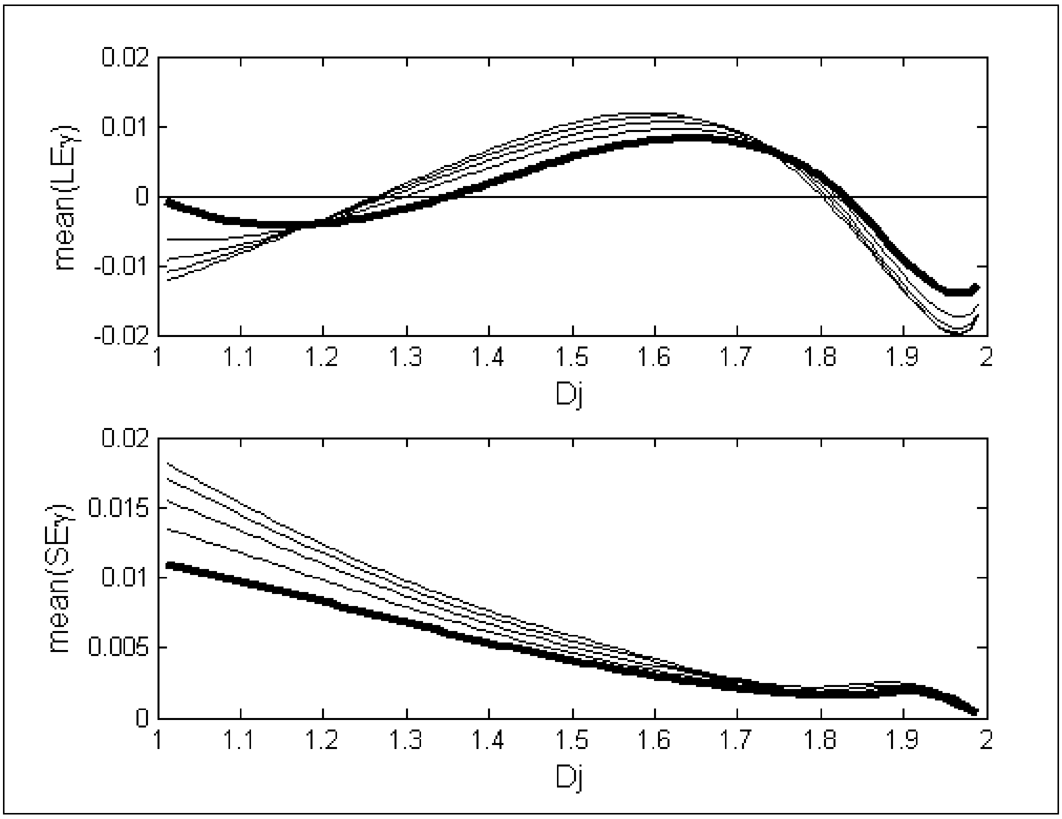
$SE[\gamma_i, D_j, n_{max}] = \left(FD^{(W_j^i)}(n_{max}) - D_j\right)^2$, kvadratna greška.

Kako linearna i kvadratna greška zavise od tri promenljive i kako biološki signal nije karakterisan parametrom γ, jednostavniji način, a bez gubljenja opštosti za predstavljanje ovih grešaka bio je prikaz njihovih usrednjenih vrednosti po γ_i:

$$\mathrm{mean}(LE_\gamma) = \overline{LE}_\gamma[D_j, n_{max}] = \frac{1}{N_\gamma}\sum_i \left(FD^{(W_j^i)}(n_{max}) - D_j\right) \qquad (33)$$

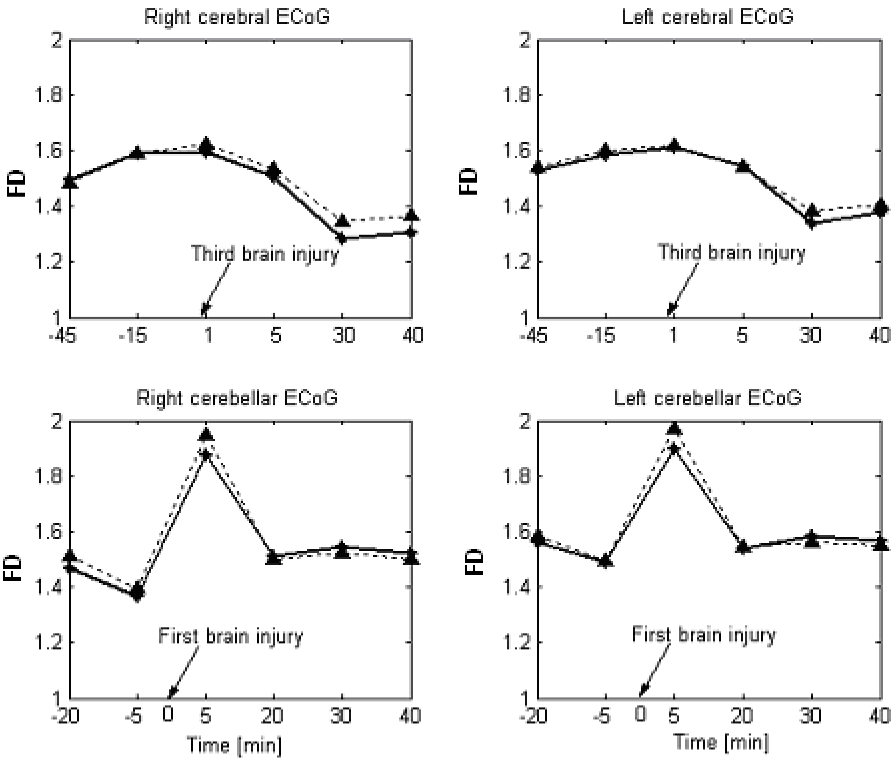
$$\mathrm{mean}(SE_\gamma) = \overline{SE}_\gamma[D_j, n_{max}] = \frac{1}{N_\gamma}\sum_i \left(FD^{(W_j^i)}(n_{max}) - D_j\right)^2 \qquad (34).$$

Rezultati ovih izračunavanja prikazani su na sl. 31. Rezultati su pokazali da se linearana i srednjekvadratna greška minimizuje za n_{max}=3.



Slika 28. Srednja linearna (gore) i srednje kvadratna greška (dole), dobijene primenom procedure (24) varirajući n_{max}, na skupu Vajerštrasovih funkcija, sa vrednostima parametara γ_i = 1.1, 1.2,..., 5.0 i vrednostima fraktalne dimenzije D_j = 1.01, 1.02,..., 1.99. Krive se razliku ju za različite vrednosti n_{max} = 3, ... , 7, i svaka predstavlja srednju vrednost za N_γ = 40 vrednosti za γ_i. Kriva greške za n_{max} = 3 prikazana je debelom linijom.

U cilju poređenja tačnosti i efikasnosti algoritama, primenili smo Higučijevu i Metodu uzastopnih razlika na istom skupu elektrokortikalnih signala (svi detalji u vezi tehnike dobijanja ECoG signala su dati u (Ćulić i sar., 2005)), pre i posle ponovljene ozlede mozga. ECoG biosignali su konvertovani pri frekvenciji semplovanja f_s = 256 Hz. U slučaju Higučijeve metode, svaki biosignal je podeljen u 154 epohe po 1.5625 s. FD vrednosti su izračunate za svaku epohu (što je ekvivalentno širini prozora od N = 400 tačaka), bez preklapanja, sa parametrom $k_{\max}$ = 8. Pojedinačne FD vrednosti iz svih epoha su usrednjene i tako dobijena srednja vrednost je FD određenog signala.



Slika 29. Poređenje vrednosti FD biosignala izračunatih različitim algoritmima: FD vrednosti ECoG signala velikog i malog mozga pacova izračunate metodom uzastopnoh razlika (-), za vrednost parametra n_{max} = 3 i Higučijevom metodom (- - Δ), za vrednosti parametara k_{max} = 8 i N=400, pre i posle povrede mozga. Vreme povrede mozga na slici je označeno kao 0 min.*

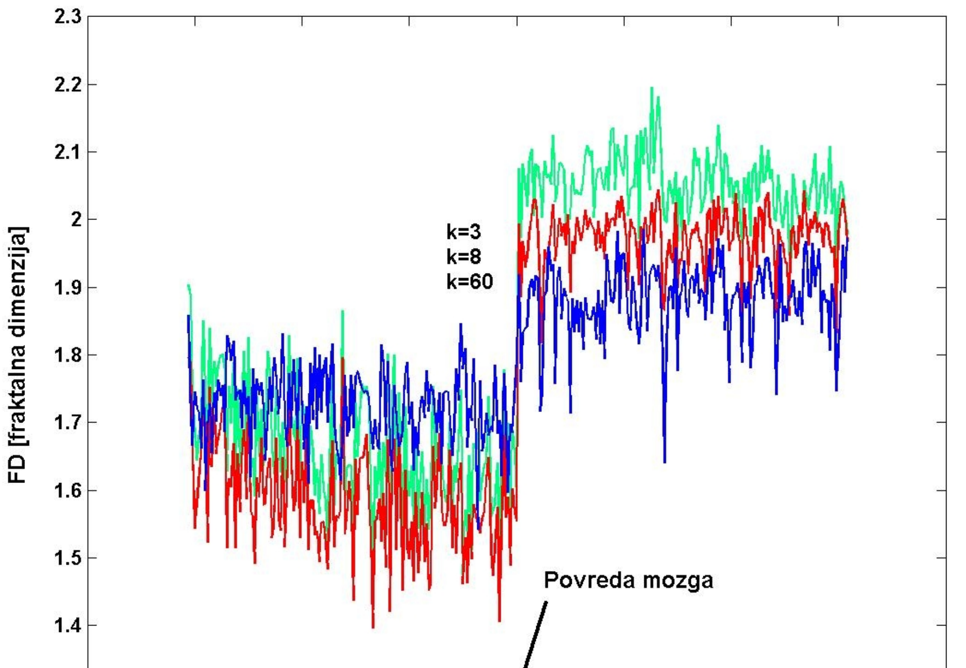
Za izračunavanje FD Metodom uzastopnih razlika, korišćena je vrednost parametra $n_{\max}$ = 3 za koju su linearna i kvadratna greška minimalne. Izračunate vrednosti FD za ECoG signal, pre i posle povrede mozga su prikazane na sl. 32. Rezultati dobijeni pomoću obe metode su u saglasnosti – srednja razlika izračunatih vrednosti, za 24 signala je 0.0176 ± 0.0300.

Ova metoda pretpostavlja monofraktalnost signala tj. karakterizaciju signala jednom vrednošću FD u okviru analiziranog intervala. Kako se u realnoj situaciji signal, a posebno biološki, ne može okarakterisati jednom vrednošću FD, razvijene su razne metode za analizu multifraktalnog signala. Momentalno, to nije bio predmet naše analize, ali važno je napomenuti da se naš metoda može lako adaptirati za analizu nestacionarnih podataka. Naime, umesto primene procedure (32) na čitavom signalu od N odbiraka, signal treba podeliti u skup M nepreklapajućih prozora. Procedura (32) zatim treba biti izvršena nad svakim prozorom. Dobijeni niz fraktalnih dimenzija za svaki prozor treba predstaviti u funkciji vremena ili statistički analizirati srednje vrednosti i standardne devijacije tokom kliznih vremenskih prozora.

7.3 Značaj modifikacije Higučijevog algoritma

Originalna modifikacija Higučijevog algoritma (Spasic i sar, 2005b) sastoji se posebno u odredjivanju optimalne vrednosti k_{max}. Procena vrednosti parametra k_{max} je važna jer nam je cilj da ispitamo da li promena fraktalne dimenzije može biti optimalna mera promene kompleksnosti biosignala u analiziranim eksperimentalnim uslovima.

Pošli smo od biosignala koji su A/D konvertovani na f_s od 256 semplova/s. Svaki biosignal je podeljen u 154 epohe u trajanju po 1.5625 s. Konstruisano je k_{max} novih samosličnih vremenskih serija, primenom Higučijevog algoritma. FD vrednosti su izračunate za svaku epohu (ekvivalentnu N=400 odbiraka), bez preklapanja, pojedinačne FD vrednosti iz svih epoha su usrednjene, da bi se dobila konačna FD čitavog signala. FD vrednosti ECoG signala pre i posle moždane povrede za različite vrednosti parametra k_{max} prikazane su na sl. 33.



Slika 30. Fraktalna dimenzija ECoG signala pacova pre i posle ozlede velikog mozga za različite vrednosti parametra maksimalnog razređenja k: k = 3, 8, 60.

Posle naše analize ECoG signala, dobijena je familija krivih $f\,(k_{max})$, gde je k_{max} nezavisno promenjlijiva, za k_{max} = 1,…,100 (sl. 34).

Mogu se uočiti tri oblasti koje se izdvajaju kod većine ovih krivih:

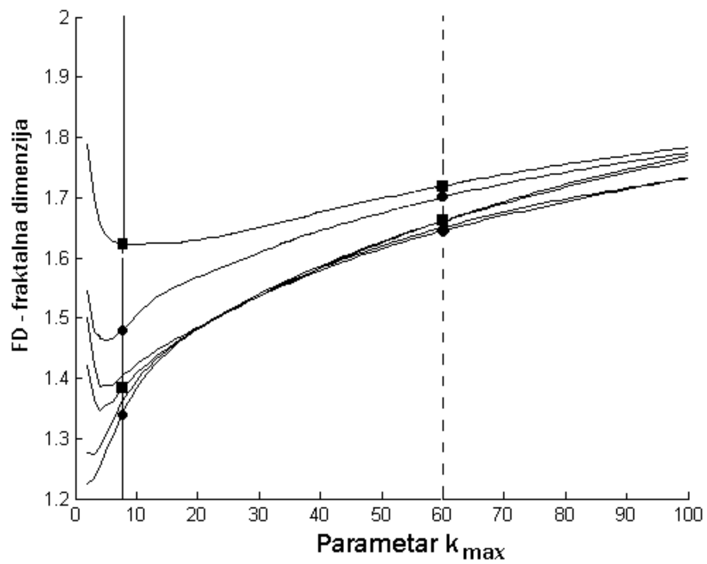
a) $2 \leq k_{max} < 8$, gde je funkcija konveksna;

b) $8 \leq k_{max} \leq 30$, gde je funkcija rastuća, približno linearna;

c) $k_{max} \geq 30$, funkcija je takođe rastuća, približno linearna sa manjim nagibom.

U regionu a) FD krive, gde je $2 \leq k_{max} \leq 5$, promene FD vrednosti su velike, ali nestabilne, tako da nisu pogodan pokazatelj promene kompleksnosti signala.

U oblasti promene b) FD vrednosti su stabilne sa pozitivnim trendom FD. U c) oblasti postoji saturacija FD krive. Relativne promene FD su male i teško vidljive. Primenom Higučijevog algoritma, izračunali smo FD vrednosti elektrokortikalne aktivnosti malog ivelikog mozga pacova, for k_{max} = 2, …,100. Primećuje se da promene FD nisu stabilne za $k_{max} < 8$. Međutim, promene vrednosti FD su skoro zanemarljive za $k_{max} > 18$. Naši rezultati ukazuju da je optimalan opseg za parametar k_{max}: $8 < k_{max} < 18$. U našoj studiji (Spasic i sar., 2005a) fraktalne analize ECoG signala koristili smo k_{max} = 8 kao minimalnu vrednost u opsegu.



Slika 31. Ispitivanje optimalne vrednosti parameta k_{max} u Higučijevom algoritmu za k_{max}=2,…,100. Za vrednost parametra k_{max}=8 promene FD vrednosti su veće nego za k_{max}=60 (pre povrede; posle povrede).

7.4 Optimizacija izbora frekvencije semplovanja signala fraktalnom analizom sintetičkih signala

U teoriji dinamičkih sistema utvrđen je nov idejni koncept (Borg, 2005) – algoritamsko modeliranje. U algoritamskom modeliranju polazna tačka je sama vremenska serija, a ne njen matematičko-fizički model. Dakle, vremenska serija se koristi kao primarni skup podataka i pokušava se konstrukcija algoritamskog modela za taj skup podataka koji je odgovarajući za te podatke, koristeći metode razvijene u teoriji dinamičkih sitema. Kako smo u radu (Kalauzi i Spasić, 2004), prikazanom u poglavlju 3.3, a koji se odnosi na modeliranje neuronske aktivnosti pokazali da je moguće modeliranje moždane aktivnosti pomoću sinusnih talasnih oblika, postavilo se pitanje u kojim granicama se nalaze vrednosti fraktalne dimenzije sintetičkih funkcija. Dakle, bilo je neophodno da se ispitaju granice u kojima se nalaze vrednosti FD sintetičkih signala na primeru familije sinusnih i Vajerštrasovih funkcija, primenom Higučijevog algoritma.

U radu (Spasić, 2006a) ispitali smo vrednosti FD sinusnih i Vajerštrasovih funkcija zadatih u cilju optimizacije izbora frekvencije semplovanja prilikom primene Higučijevog algoritma na biološkim signalima. Izračunali smo vrednosti fraktalne dimenzije nekih matematičkih funkcija zadatih u vidu vremenske serije na frekvencijama semplovanja: 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 i 4096 semplova/s. Nađene su promene vrednosti FD analiziranih funkcija u odnosu na frekvenciju semplovanja.

To je i predstavljalo osnovnu motivaciju za analizu promene FD u zavisnosti od frekvencije odabiranja (f_s) nekih od karakterističnih periodičnih funkcija, kao što je sinusna funkcija i funkcija čija je teoretska fraktalna dimenzija poznata, kao što su Vajerštrasove funkcije.

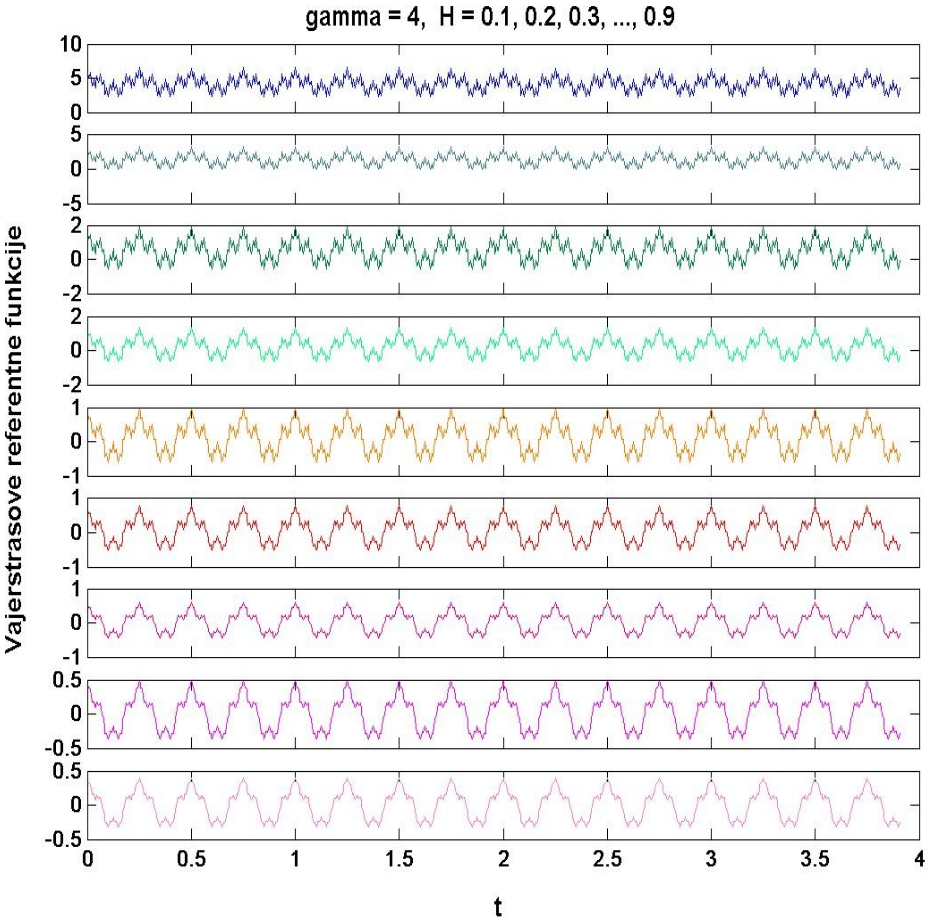
Sinusne funkcije

$$y = \sin (mx)$$

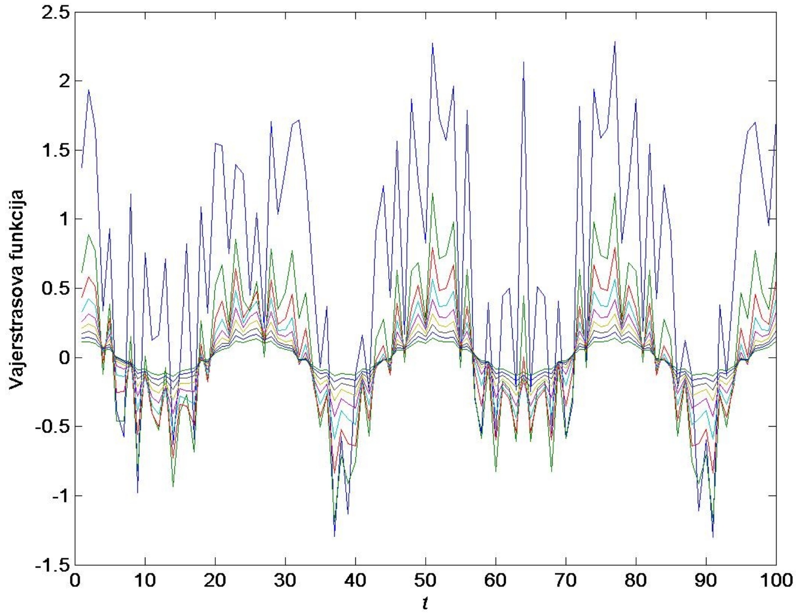
zadate su u obliku $y(1), y(2)\ldots, y(n)$, na intervalu [0,32] sa različitim brojem odbiraka počev od 64 do 4096.

U cilju ispitivanja osetljivosti metoda na promenu frekvence semplovanja signala, primenili smo Higučijev algoritam na Vajerštrasove funkcije definisane formulom (31). Kao što je već rečeno, njihova fraktalna dimenzija je data sa $D = 2 - H$.

Za potrebe ovog rada generisali smo ovu familiju za sledeće diskretne vrednosti parametara: $\gamma = 1.5$ i H sa korakom 0.1: $H = 0.9, 0.8,\ldots, 0.1$. Pri generisanju familije Vajerštrasovih funkcija kao granicu za vreme uzeli smo $t_1 = 0$s, $t_2 = 16$s. Dakle, FD bi trebalo da budu u opsegu ($1 < FD < 2$) i to: $FD = 1.1, 1.2,\ldots, 1.9$. Broj Vajerštrasovih funkcija u familiji koje smo generisali je 9. Grafici nekih od generisanih Vajerštrasovih funkcija prikazani su na sl. 35 i sl. 36. Za frekvencu semplovanja i trajanje signala izabrali smo $f_s = 64, 128, 256, 512, ..., 4096$ samp/s i $T = 16$s.



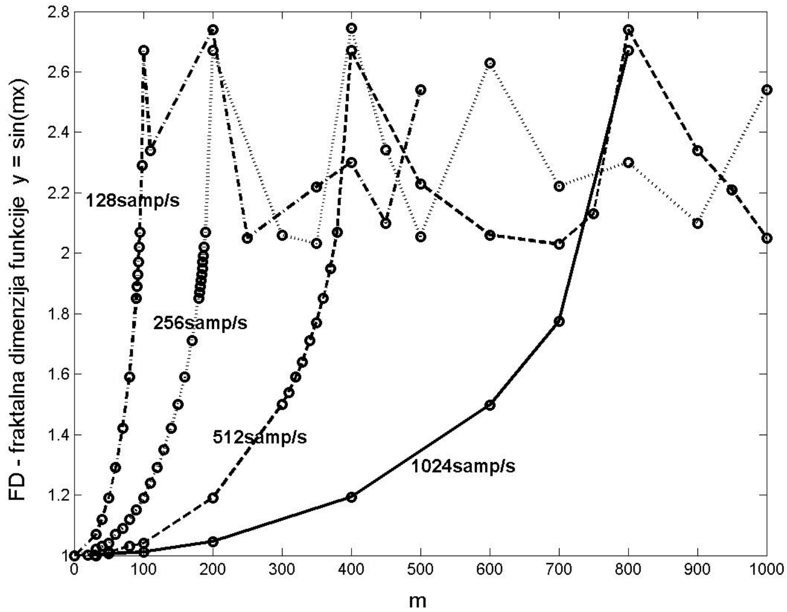
Slika 32. Grafici familije Vajerštrasovih funkcija



Slika 33. Grafik familije Vajerštrasovih funkcija

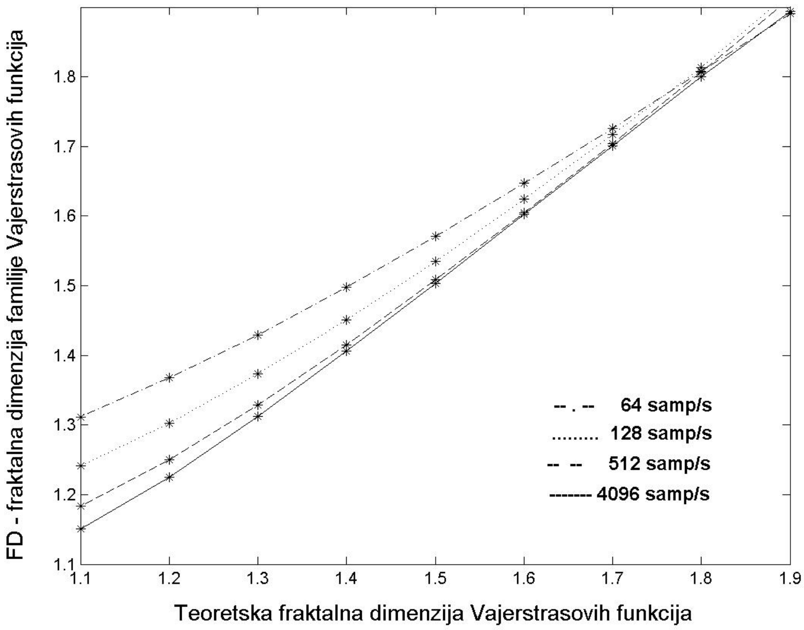
Fraktalnom analizom funkcije y = sin (32x) pri f_s: 1024, 2048 i 4096 sempla/s u vremenskom domenu Higučijevim algoritmom dobijaju se vrednosti FD 1; pri f_s= 256 i 512 sempla/s vrednosti FD su: 1 FD 2, a na f_s: 32, 64 i 128 sempla/s , vrednosti FD 2.

Fraktalna analiza Higučijevom metodom, familije funkcija y = sin (mx), gde je m prirodan broj pokazala je (videti sl. 37) da pri f_s=2^N, N=7,8,9,10,...vrednosti FD se nalaze u opsegu od 1 do 2.8. Naime, sa smanjenjem f_s vrednosti FD se povećavaju. Uočava se eksponencijalni rast FD do postizanja maksimuma , a zatim vrednosti FD osciluju. Takođe se može primetiti da sa povećanjem f_s=2^N tj. kada N , vrednosti FD 1, za sve vrednosti parametra m. Ovo nas navodi na zaključak da sa jako velikom frekvencijom semplovanja FD teži teoretskoj vrednosti fraktalne dimenzije za glatku krivu liniju, a to je FD=1. Dok, sa druge strane, redukcija frekvencije semplovanja bitno utiče na izračunavanje FD ovom metodom.



Slika 34. Fraktalna dimenzija familije sinusnih funkcija y=sin(mx) pri različitoj frekvenciji semplovanja

Fraktalna analiza familije Vajerštrasovih funkcija pokazala je znatno manje odstupanje od teoretske vrednosti fraktalne dimenzije nego kod sinusnih funkcija. Radi jasnoće prikaza (videti sl. 38) odabrali smo samo vrednosti FD na f_s=64, 128, 512 i 4096 sam/s. Na grafiku se može uočiti najveće odstupanje od teoretske vrednosti fraktalne dimenzije na nižim f_s (64 i 128 semplova/s), posebno za manje vrednosti fraktalne dimenzije, a na višim f_s (posebno na 4096 semplova/s), greška je minimizovana. Dakle, pri smanjivanju f_s dolazi do povećanja greške u izračunavanju FD. Osim toga, u slučaju sinusne funkcije dolazi do menjanja osobina same funkcije, što se drastično odražava na izračunate vrednosti FD. Kod Vajerštrasovih funkcija slučaj je nešto drugačiji, zbog njihove samosličnosti, redukovanjem f_s dolazi do greške, ali je ona znatno manja i vrednosti FD su manje od 2.



Slika 35. Fraktalna dimenzija familije Vajerštrasovih funkcija pri različitoj frekvenciji semplovanja

U prethodnoj analizi mi smo odabrali determinističke funkcije kao što su familije Vajerštrasovih i sinusnih funkcija u cilju ispitivanja osobina FD koja se izračunava Higučijevom metodom. Međutim, kompleksni biološki signali nisu deterministički. Dakle, da bismo proučavali probabislističku komponentu biosignala, neophodna su ispitivanja nedeterminističkih sintetičkih signala. Zato smo poredili (Spasić, 2006b) amplitudski spektar snage i FD nekih nedeterminističkih sintetičkih signala kao što je beli šum i njegove sume prvog, drugog i trećeg reda. Našli smo da su spektralne i fraktalne karakteristike sume prvog reda veoma slične odgovarajućim karakteristikama biološkog signala čije je poreklo moždana aktivnost.

8. Fraktalni analitički alati – analiza i originalni primeri

Procesiranje signala je zadatak koji se postavlja u mnogim oblastima, kao što su finansijske analize, meteorološke analize, analiza bioloških i medicinskih signala,... Metode fraktalne matematike koje omogućavaju kvantifikaciju strukture ili oblika na mnogim prostornim i vremenskim skalama mogu imati široku primenu, od metereologije do seizmologije, što je razmotreno u prethodnim poglavljima. Ove metode su od posebnog značaja u novijim biomedicinskim istraživanjima kao što su:

- analiza biosignala, (Klonowski, 2000, Klonowski, 2006; revijski prikaz - Savi, 2005; Spasić, 2005), specijalno analiza nervnog sistema (Natarajan i sar., 2004); kardiovaskularnog sistema (Vuksanović, 2006; Peng i sar., 1995, Peng i sar., 2000), pulmonarnog sistema, imunskog sistema, kontrola položaja tela (Doyle i sar., 2004) (u razviću, starenju, bolesti i oporavku);
- prepoznavanje oblika, analiza radioloških i ultrazvučnih slika,
- veštačke neuronske mreže, evolucioni modeli, morfogeneza, prostorno-vremenske strukture drveta,
- kompleksnost, samoorganizovanje i haos u metaboličkim i signalnim putevima, itd.

Biomedicinske signale generišu kompleksni samo-regulišući sistemi. Zato fiziološke vremenske serije mogu imati fraktalnu ili multifraktalnu strukturu u vremenu i istovremeno biti izrazito nehomogene i nestacionarne. Karakteristična osobina nelinearnih procesa je interakcija različitih modova koja vodi neslučajnoj faznoj strukturi signala. Takve zajedničke osobine ovih signala ne mogu biti otkrivene linearnim spektralnim metodama. Fraktalna dimenzija u vremenskom domenu je mera koja se pokazuje kao korisna za karakterizaciju bioloških (npr. elektrofizioloških) vremenskih serija.

Elektroencefalogram (EEG) ili elektrokortikogram (ECoG) koji je pridružen određenim patofiziološkim stanjima može biti okarakterisan svojom fraktalnom dimenzijom, koja je mera kompleksnosti signala. Nije potpuno usaglašen stav da je korišćenjem vremenskih serija različitih dužina, moguće pokazati da postoji monotona veza između fraktalne dimenzije i dužine serije (broja tačaka) kao što navodi Klonowski (Klonowski, 2000). Fraktalnu dimenziju je moguće koristiti kao alat za karakterizaciju kompleksnosti kratkih EEG vremenskih serija. Ali, za analizu kratkotrajnih događaja neophodno je računati FD u vremenskom domenu, koristeći Higučijev algoritam. Fraktalna analiza omogućava istraživanje događaja u EEG-u koji su kratkotrajniji od onih koji se mogu otkriti drugim linearnim i nelinearnim tehnikama (Accardo et al, 1997).

Još jedna karakteristika fraktalnih metoda je kompresija podataka. Naime, klasični EEG predstavljen je velikim brojem podataka o električnoj aktivnosti mozga. Fraktalna analiza omogućava zapis ovih podataka u terminu izračunate FD i tako kondenzuje podatke oko sto do nekoliko stotina puta. Naime za 100 podataka o vrednosti električnog potencijala, Higučijevom metodom dobija se jedna FD vrednost. Ovo nije kompresija podataka u smislu obostrano jednoznačnog preslikavanja, tako da je moguće odrediti inverznu funkciju tako da se podaci mogu dekomprimovati i dobiti originalni EEG signal, već se odnosi na redukciju podataka.

8.1 Akvizicija bioloških signala u neurofiziološkoj laboratoriji

Sistem za akviziciju eksperimentalnih bioloških signala je jedan od sistema koji smo razvili u multidisciplinarnom timu i baziran je na dizajnu sličnih sistema u Grupi za inteligentne sisteme Matematičkog fakulteta, Univerziteta u Beogradu, pod rukovodstvom A. Jovanovića i saradnika (detalji su dati u Jovanović, 2002, 2004, web).

Subjekt istraživanja su biološki signali koji predstavljaju električne potencijale polja centralnog nervnog sistema sisara, EEG/ECoG signali (Spasić i sar., 2005), signali pojedinačnih neurona i aktivnost između akcionih potencijala (Kalauzi i Spasić, 2004) pod različitim patofiziološkim uslovima. Eksperimentalni sistem se sastoji od sistema za višekanalnu akviziciju, sistema za posmatranje signala u realnom vremenu, sistema za snimanje i analizu krakteristika signala. Za registrovanje signala korišćen je poseban orginalni programski paket SIGVIEW (Jovanović et al, 2004). Aplikacija razvijena za rad sa signalima sadrži segmente za akviziciju, registrovanje, otklanjanje šuma, filtriranje, segmentaciju signala, editovanje signala, spektralnu i fraktalnu analizu.

Registrovanje električne aktivnosti kore velikog mozga pacova vršeno je elektrodama različitog prečnika i materijala. Elektrode su postavljene na površinu kore velikog mozga ili u neki od njenih slojeva. Signali velikog mozga su posmatrani na četvorokanalnom osciloskopu sa memorijom. Pojačavanje i filtriranje signala vršeno je sa parametrima: DC za visokopropusni filter i 150 Hz za niskopropusni filter. Registrovana aktivnost kore velikog mozga, u trajanju od t_1 = 121s, t_2 = 241s unosila se u računar preko ploče za analogno-digitalnu konverziju sa frekvencijom semplovanja u opsegu 256 Hz – 4096 Hz. Registrovanje je vršeno na svakih 5-15 min kako u kontrolnim uslovima tj. pre tretmana ili povrede, tako i posle u toku sledećih 2 sata.

8.2 Optimizovan programski paket za analizu biosignala

U zavisnosti od ciljeva analize i složenosti postavljenih zahteva mogu se projektovati razni sistemi za analizu signala zavisno od namene, složenosti, opštosti ili posebnosti, načina projektovanja i strukture. Neki od poznatih sistema za analizu signala su TISEAN, CB Predictor, SAS, itd.

Mi smo razvili originalan, kompoziciono složen paket koji objedinjuje komplementarne linearne i nelinearne metode za analizu signala sa ciljem pronalaženja matematičkih invarijanti u ispitivanju sistema koji bi korespondirali za nas značajnim fiziološkim stanjima i njihovim promenama. Kao prednost našeg optimizovanog sistema za analizu biosignala ističemo brzinu, efikasnost i jednostavnost u korisničkom pristupu.

U razvoju našeg originalnog softvera za analizu signala korišćen je programski alat MATLAB 5.6 i operativni sistem Microsoft Windows XP, Version 2002 u hardverskom okruženju: računar Pentium(R), CPU 1.8GHz, sa 480MB radne memorije. Sve rutine programirane u MATLAB-u su samostalno izvršive.

U izradi programskih modula korišćeni su standardne programerske metode, modifikovani Higučijev algoritam, algoritam za Metodu uzastopnih razlika, algoritam za izračunavanje Furijeovih koeficijenata i spektralne snage signala, statističke metode linearne regresije, metode za određivanje linearne i kvadratne greške, statistički testovi hipoteza.

Programski paket, prikazan i korišćen u ovom radu, sa implementiranim navedenim metodama predstavlja jedan od mogućih pristupa u analizi signala, a sa posebnim osvrtom na analizu bioloških signala. On se sastoji od više logičkih i funkcionalnih celina. U toku rada na programima izvršeno je projektovanje svih potrebnih elemenata ovakvog sistema za analizu signala. Programski paket (detaljan spisak dat je u Appendix-u 2) se sastoji iz sledećih funkcionalnih celina koje prate standardnu proceduru za analizu signala definisanu u potpoglavlju 6.5.3 :

1. Inicijalni modul SIGVIEW je inkorporiran zahvaljujući njegovom autoru (A. Jovanović, 2004). Ovaj softver je nama poslužio za akviziciju biosignala i digitalizaciju analognog signala. On sadrži široku lepezu mogućnosti za dalju softversku dogradnju u spektralnoj, wavelet i fraktalnoj analizi. Neke od mogućnosti SIGVIEW-a su: posmatranje signala u vremenskom domenu, izdvajanje epoha koje sadže smetnje nebiološke prirode, kao i softversko isključivanje određenih frekventnih područja u signalu i dr.

2. Modul za Furijeovu transformaciju digitalizovanog signala i izračunavanje spektra snage koji sadrži programe za Fourier-ovu analizu signala i numerički prikaz srednjeg

spektra snage signala po frekventnim područjima od po 4 Hz za dati broj epoha, filtriranje signala radi izbacivanja smetnji, grafički prikaz srednjeg spektra snage signala i standardne devijacije,

3. Modul za izračunavanje spektralnog indeksa β i klasifikaciju serije radi utvrđivanja ispunjenosti uslova za primenu fraktalne analize signala,

4. Modul za fraktalnu analizu signala koji sadrži programe sa adaptiranim i implementiranim Higučijevim algoritmom za izračunavanje fraktalne dimenzije signala sa zadatim parametrom širine prozora N sa ili bez preklapanja prozora, zadatom vrednošću parametra k_{max} i za zadati broja kanala, kao i verziju programa sa varijabilnim vrednostima parametra k_{max} u zadatom opsegu i za zadati broja kanala.

5. Modul za fraktalnu analizu signala koji sadrži programe u kojima je implementirana Metoda uzastopnih razlika za izračunavanje fraktalne dimenzije signala.

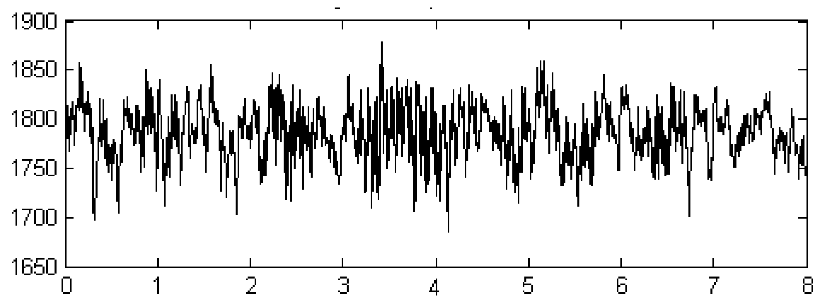
6. Modul za poređenje srednjih vrednosti u slučaju monofraktalne analize.

Svaki od pomenutih modula omogućava unošenje posebnih zahteva koji proizilaze iz eksperimentalnog cilja i dizajna. To znači da je varijabilna dužina sekvence signala odabrane za analizu, varijabilna dužina vremenske epohe, kao i varijabilna frekvencija semplovanja.

8.3 Karakteristike ekperimentalnih biosignala – ECoG animalnog modela

Promena električnog potencijala u mozgu sa vremenom prikazana je na tipičnom ECoG signalu na sl. 39. Bitno je reći da je vremenska osa u daljoj analizi signala promenjena. Naime, analogno-digitalnom konverzijom neprekidan biosignal diskretizovan je odabiranjem ekvidistantnih uzoraka i time pretvoren u niz diskretnih vrednosti sa frekvencom odabiranja f_s. Tradicionalni EEG pristup bazira se na spektralnoj analizi gde se pretpostavlja da je EEG signal generisan stacionarnim procesom. Međutim, EEG signal je nelinearan i nestacionaran, posebno u nekim patološkim uslovima. Različite vremenski i frekventno zavisne reprezentacije i vremenski zavisne mere se koriste za prepoznavanje i analizu iregularnih pojava i pojava prolaznog karaktera u EEG-u. U pogledu nelinearnosti koriste se različiti kvantifikatori haotičnosti (Thakor i Tong, 2004).

Iako ECoG signal na prvi pogled deluje neregularno i aperiodično, određuju se njegove spektralne osobine. Spektar je kontinualan i oblika $1/f$. Ovakav izgled spektra ukazuje na postojanje nelinearnih promena (Eckmann i Ruelle,1985). Spektar oblika $1/f$ ukazuje na to da su podaci u signalu korelisani odnosno da je signal vremenski invarijantan (Hausdorff i Peng, 1996). Vremenska invarijantnost signala dozvoljava njegovo testiranje metodama koji ispituju osobine signala na različitim skalama.



Slika 36. Tipičan biološki signal (ECoG signal velikog mozga pacova u našem eksperimentu).

Gustina spektra snage izračunata brzom Furijeovom transformacijom u različitim frekventnim opsezima je takođe analizirana. Moždana električna aktivnost je karakterisana moždanim ritmovima u različitim frekventnim opsezima. Tačnije, frekventni opseg podeljen je na četiri frekventna područja: delta (0,1-4,0 Hz), teta (4,1-15,0 Hz), beta (15,1-32,0 Hz) i gama (32,1-128,0 Hz).

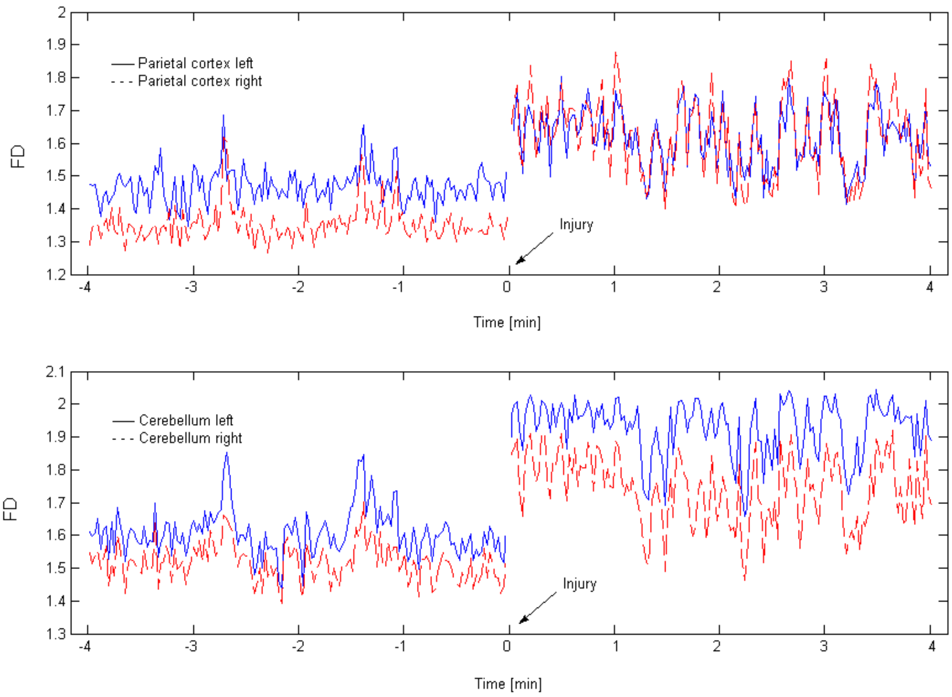
8.4 Aplikacija fraktalne analize i njena biomedicinska semantika

8.4.1 Fraktalna analiza ECoG signala u animalnim modelima: model moždane povrede i model neurotoksičnog efekta kamfora

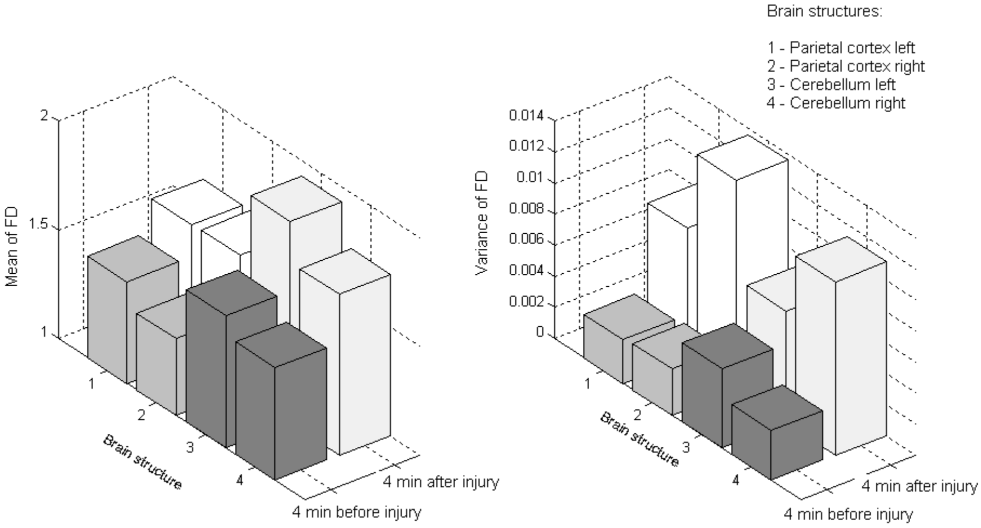
Mozak čoveka ili životinja može se razmatrati kao veoma kompleksan nelinearni sistem koji pokazuje haotičnu dinamiku (King, 1991). Jedna od aplikacija teorije haosa u analizi moždane aktivnosti je izračunavanje fraktalne dimenzije u vremenskom domenu kao mere kompleksnosti signala. To je alat za detekciju tranzijenata u analizi EEG-a u cilju shvatanja funkcionisanja CNS (Accardo i sar., 1997; Esteller i sar., 1999; Ciszewski i sar., 1999) i kod varijabilnosti srčanog ritma u određivanju funkcionisanja autonomnog nervnog sistema (Tapanainenn i sar., 2002; Hernandez Caceres i sar., 2004). Fraktalna analiza je jedan od obećavajućih pristupa u identifikovanju i razdvajanju specifičnih stanja patofizioloških funkcija bioloških sistema. Cilj ove studije je bio ispitivanje kvantitativnih karakteristika funkcionalnih posledica povreda mozga, fraktalnom analizom elektrokortikalne aktivnosti. Moždana aktivnost malog i velikog mozga, leve i desne hemisfere je analizirana pre i posle moždane povrede. Preliminarni kao i opsežni rezultati ove studije su već objavljeni (Spasić i sar., 2004, Spasić i sar., 2005).

Električni potencijali polja su pojačani i filtrirani višekanalnim procesorom (Multi Channel Processor Plus, Alpha-Omega Engineering, Israel) sa niskopropusnim filterima: DC - 1 kHz i 50 Hz. Analogno-digitalna konverzija snimljenih signala izvršena je na frekvenci semplovanja od 256 semplova/s i spremljena za off-line analizu. Svaka snimljena sekvenca u određenim eksperimentalnim uslovima (pre i posle mehaničke povrede mozga) trajala je 240 s sa pauzama od 4 do 10 min između akvizicije.

Primeri snimljenih ECoG signala u navedenim uslovima, kao i izračunate fraktalne dimenzije ovih signala, snimljene u periodu od 4 min pre i 4 min posle povrede mozga, prikazane su na sl. 40. Srednje vrednosti i varijanse vrednosti fraktalnih dimenzija su prikazane na sl. 41. Odmah nakon povrede dolazi do povećanja srednje vrednosti i varijanse FD kako u velikom tako i u malom mozgu.



Slika 37. Fraktalne dimenzije signala, snimljene u periodu od 4 min pre i 4 min posle povrede mozga.



Slika 38. Srednje vrednosti i varijanse FD aktivnosti malog i velikog mozga pacova (pre i posle povrede).

Može se uočiti da su srednje vrednosti i varijanse FD aktivnosti malog mozga veće od odgovarajućih vrednosti za veliki mozak u kontrolnom periodu tj. pre lezije. Neposredno posle akutne ozlede dolazi do povećanja srednjih verenosti i varijansi FD na nivou malog i velikog mozga. Srednja vrednost FD je značajno veća ($p<0.01$) kod malog mozga nego kod velikog mozga sa obe strane, kako pre povrede tako i 1-5 min posle povrede. Kod određene eksperimentalne životinje ispoljena je lateralna asimetrija (FD leve strane je veća), dok kod ostalih šest životinja to nije slučaj.

Srednje vrednosti i varijanse FD signala snimljenih na grupama eksperimentalnih životinja pod različitim eksperimentalnim uslovima (pre prve povrede, 1-30 min i 90-120 min posle prve povrede, pre poslednje (četvrte) povrede i 1-30 min posle poslednje povrede) su prikazani u tab.4. Pored porasta srednje vrednosti FD, koju smo uočili posle prve lezije, došlo je do nekih plastičnih tj. ireverzibilnih promena posle treće ponovljene povrede, koja je naznačena porastom srednje FD moždane aktivnosti obe strane velikog mozga.

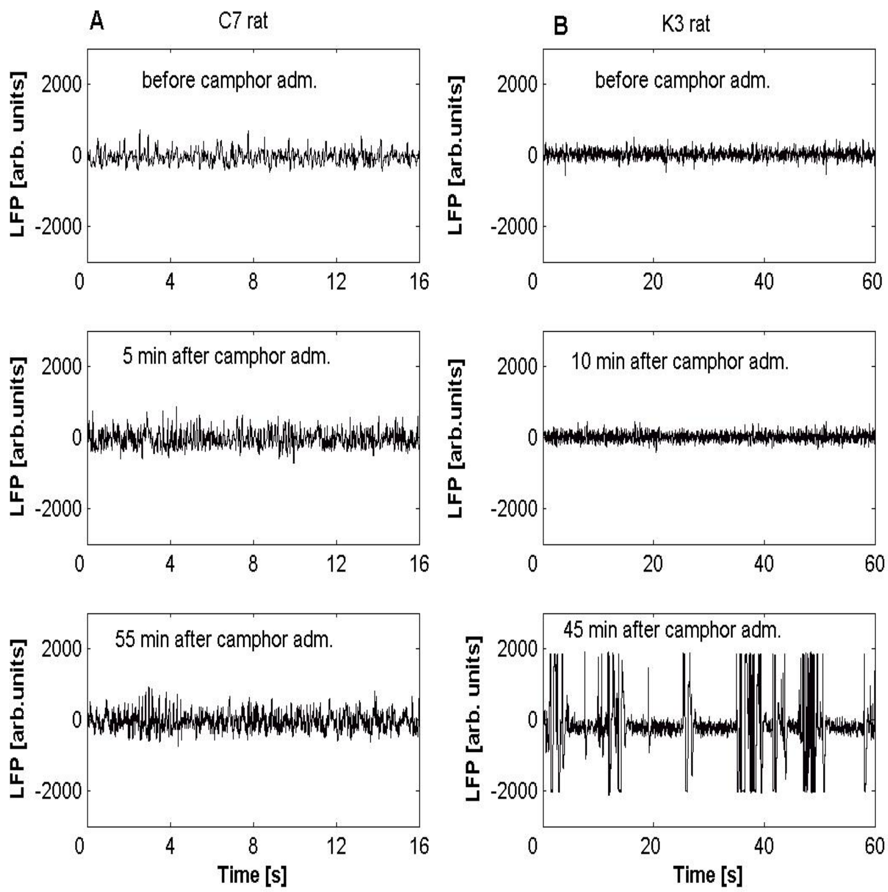
Tabela 4. Srednje vrednosti FD (±SD), dobijene na grupama do 6 životinja, pod različitim eksperimentalnim uslovima. Parovi sa značajnim razlikama srednjih vrednosti FD su označeni različitim simbolima (, +, $, #, !).*

Naši rezultati pokazuju da su značajne razlike kod sledećih signala: pre prve akutne povrede u odnosu na 1-30 min posle prve akutne povrede, u levoj hemisferi velikog mozga (p=0.0169, označeno sa * u tab. 4); pre prve akutne povrede uodnosu na 1-30 min posle prve akutne povrede, u levoj strani malog mozga (p=0.0253, označeno sa #). Srednje vrednosti FD signala leve strane malog mozga su veće od vrednosti iste strane velikog mozga pre povrede (p=0.0356, označeno sa !). Vraćanje srednje vrednosti FD na vrednost pre povrede su dobijene posle 90 -120 min posle prve akutne povrede. Ireverzibilne promene FD su nađene kod poređenja FD pre prve povrede i vrednosti FD pre poslednje ponovljene povrede.

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3" colspan="2">TABELA 4.
Eksperimentalni uslovi</td><td colspan="4">Hemisfera</td></tr>
<tr><td colspan="2">Leva</td><td colspan="2">Desna</td></tr>
<tr><td>Srednja vr.(DF) ± Std(DF)</td><td>Broj životinja</td><td>Srednja vr.(DF) ± Std(DF)</td><td>Broj životinja</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Veliki mozak</td><td rowspan="3">Prva ozleda</td><td>Pre ozlede</td><td>$1.38^{*+!} \pm 0.07$</td><td>6</td><td>$1.37^{\$} \pm 0.06$</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Posle ozlede (1-30 min)</td><td>$1.59^{*} \pm 0.18$</td><td>6</td><td>1.53 ± 0.19</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Posle ozlede (90-120 min)</td><td>1.44 ± 0.05</td><td>5</td><td>1.41 ± 0.07</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pono-vljena ozleda</td><td>Pre poslednje ozlede</td><td>$1.54^{+} \pm 0.15$</td><td>5</td><td>$1.48^{\$} \pm 0.09$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Posle poslednje ozlede (1-30 min)</td><td>1.61 ± 0.13</td><td>5</td><td>1.52 ± 0.14</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Mali mozak</td><td rowspan="3">Prva ozleda</td><td>Pre ozlede</td><td>$1.51^{\#!} \pm 0.06$</td><td>3</td><td>1.45 ± 0.07</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Posle ozlede (1-30 min)</td><td>$1.73^{\#} \pm 0.12$</td><td>3</td><td>1.58 ± 0.10</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Posle ozlede (90-120 min)</td><td>1.51 ± 0.01</td><td>3</td><td>1.46 ± 0.04</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pono-vljena ozleda</td><td>Pre poslednje ozlede</td><td>1.57 ± 0.05</td><td>3</td><td>1.40 ± 0.04</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Posle poslednje ozlede (1-30 min)</td><td>1.60 ± 0.05</td><td>3</td><td>1.53 ± 0.06</td><td>3</td></tr>
</table>

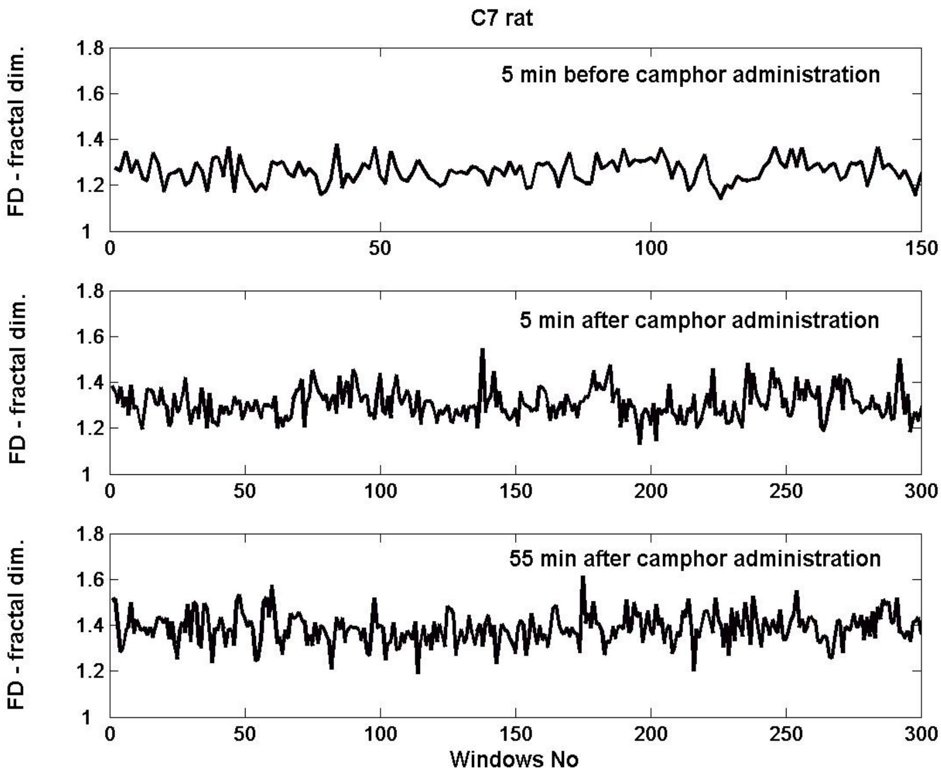
Poznato je (Esteller 1999, 2000; Klonowski 2000, 2003; King, 1991) da FD može biti korišćena kao indikator različitih stanja moždane aktivnosti. Naši rezultati (Spasić, 2005) upućuju na to da porast FD signala malog i velikog mozga može biti indikator diskretne akutne povrede mozga. Nije iznenađujuće da se FD signala iz malog mozga razlikuje od FD signala iz velikog mozga pod istim eksperimentalnim uslovima jer je poznato da se ove strukture razlikuju morfološki i funkcionalno. Fraktalna analiza se u humanim i animalnim studijama većinom koristi za predviđanje i tretiranje moždane aktivnosti prilikom epileptičnog napada. Epileptični napadi mogu biti karakterisani promenom kompleksnosti signala. Pri posmatranju promene FD od početka epileptičnog napada do kasnijih faza napada, zapaža se porast FD tokom početne faze perioda epileptičnog napada, a zatim opada obično do nivoa manje kompleksnosti u odnosu na period pre napada. Međutim, novija iskustva u primenama teorije haosa pokazuju da treba biti oprezan u primeni rezultata ove teorije u humanoj i animalnoj fiziologiji (Hernandez Caceres i sar, 2004).

Fraktalnom analizom moždane aktivnosti posle davanja kamfora mogu se otkriti zanimljive promene u elektrokortikalnom signalu. Na sl. 42. prikazana je elektrokortikalna aktivnost velikog mozga na primeru dva pacova C7 i K3, pre i posle davanja injekcije kamforovog ulja. Neurotoksični efekat kamfora može se prepoznati po velikim promenama u ECoG signalu obe hemisfere.



Slika 39. Elektokortikalna aktivnost velikog mozga na primeru dva pacova pre i posle davanja injekcije kamforovog ulja: A) pacov C7 (525 μl kamforovog ulja/kg), B) pacov K3(675 μl kamforovog ulja /kg).

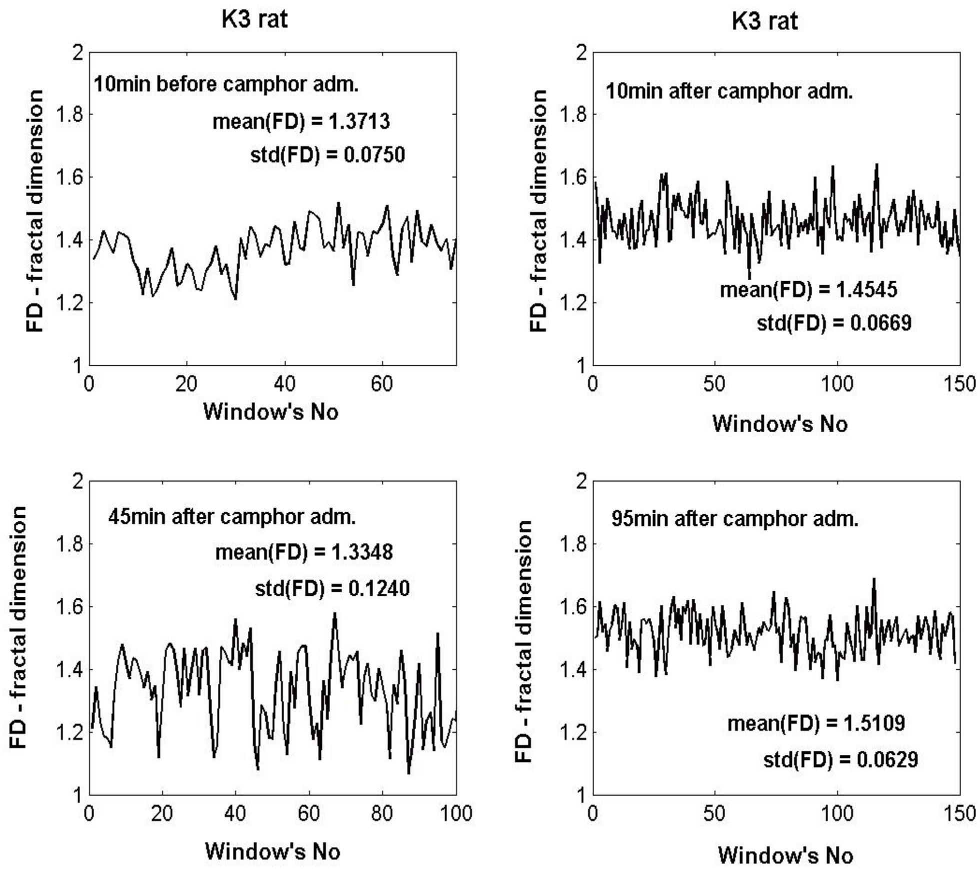
U tipičnom primeru, kod pacova C7 (sl. 43), našli smo porast srednje vrednosti FD u levoj hemisferi velikog mozga posle davanja injekcije 525 µl kamforovog ulja/ kg. Srednja vrednost FD elektrokortikalne aktivnosti velikog mozga raste od 1.26 (pre injekcije kamfora) do vrednosti 1.31 pred napad (preiktalna faza), neposredno posle davanja kamfora. U fazi napada (iktalnoj fazi), 55 min posle davanja injekcije kamforovog ulja dolazi do porasta srednje vrednosti FD na 1.38.



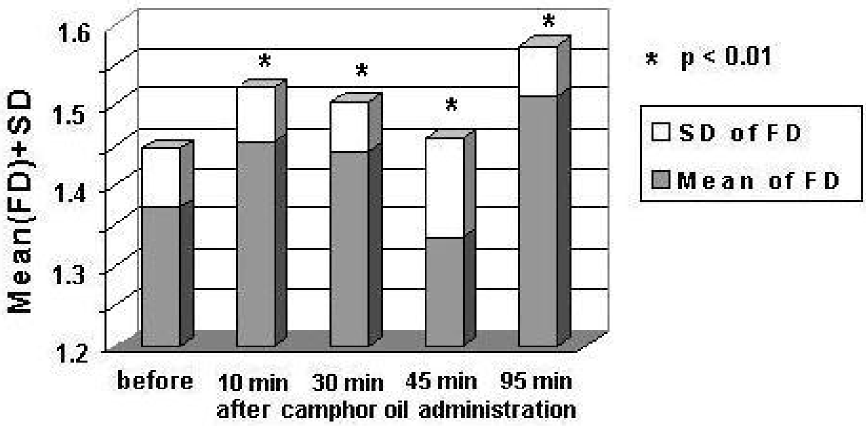
Slika 40. Promena fraktalne dimenzije ECoG signala velikog mozga pre i posle davanja kamforovog ulja (525µl/kg).

U slučaju pacova K3, promene FD pre davanja kamforovog ulja, u preiktalnoj, iktalnoj i fazi restitucije prikazane su na sl. 44 i sl. 45. Na sl. 44 možemo uočiti u iktalnoj fazi, 45 min posle kamfora, velike promene FD u opsegu od 1.06 do 1.58.

Srednja vrednost FD elektrokortikalne aktivnosti kod K3 pacova je bila 1.37 pre injekcije kamfora, dok je preiktalna srednja vrednost FD (10 min posle kamfora) bila 1.45, a u iktalnoj fazi (45 min posle kamfora) srednja vrednost FD je bila 1.33, dok je u fazi restitucije (95 min posle kamfora) srednja vrednost FD iznosila 1.51 (sl. 45). Postoji značajan porast srednje vrednosti FD u preiktalnoj fazi, opadanje u iktalnoj fazi i porast u fazi restitucije ($p<0.01$).

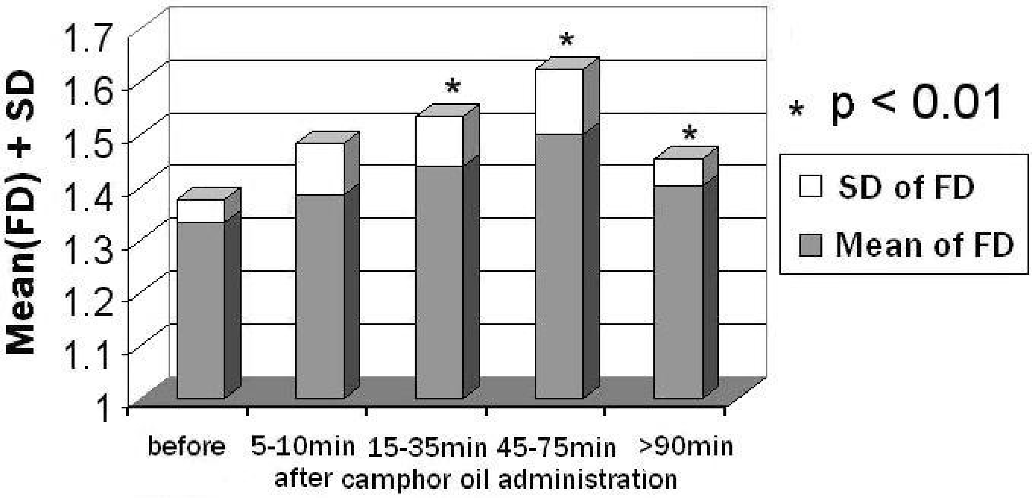


Slika 41. Promena fraktalne dimenzije elektrokortikalne aktivnosti velikog mozga pacova pre i posle davanja kamforovog ulja (675 μl/kg) (aritmetička sredina i standardna devijacija).



Slika 42. Aritmetička sredina i standardna devijacija FD elektrokortikalnih signala pre davanja kamforovog ulja (stubić 1) i tokom 3 perioda: 10min, 30 min, 45 min i 95 min, posle davanja kamforovog ulja.

Srednje vrednosti i standardne devijacije FD vrednosti elektrokortikalnih signala velikog mozga za 8 pacova u kontrolnoj i preiktalnoj fazi, dve iktalne faze i fazi restitucije, prikazane su na sl. 46. Postoji značajan porast srednje vrednosti FD u iktalnoj i fazi restitucije posle davanja kamforovog ulja u odnosu na kontrolne vrednosti ($p<0.01$).



Slika 43. Aritmetička sredina i standardna devijacija FD elektrokortikalnih signala od 8 pacova pre davanja kamforovog ulja (1) i tokom 4 perioda: 5-10 min, 15-35 min, 45-75 min i preko 90 min, posle davanja kamforovog ulja.

Epileptična aktivnost u kori velikog mozga razvija se u toku pola sata posle davanja kamfora i fraktalna dimenzija može da detektuje razvoj napada. Generalno, izgleda da je kompleksnost moždanih signala veća posle nego pre davanja kamfora, međutim tokom pražnjenja neurona sa prepoznatljivim akcionim potencijalima fraktalna dimenzija signala je bila veoma mala. Dakle, u ovim eksperimentima dobijene su velike varijacije fraktalne dimenzije. U ovom animalnom modelu najznačajniji aspekti su: relativno mala FD tokom preiktaknog perioda; porast FD tokom početne faze napada i održavanje nivoa porasta u toku epileptičnog napada i konačno održavanje povećane vrednosti FD u fazi restitucije. Međutim, poređenje linearnih i nelinearnih metoda za identifikaciju i predikciju epileptičnih napada (McSharry i sar., 2003) nalazi malo konkretnih dokaza da elektrokortikalni signali pokazuju deterministički haos.

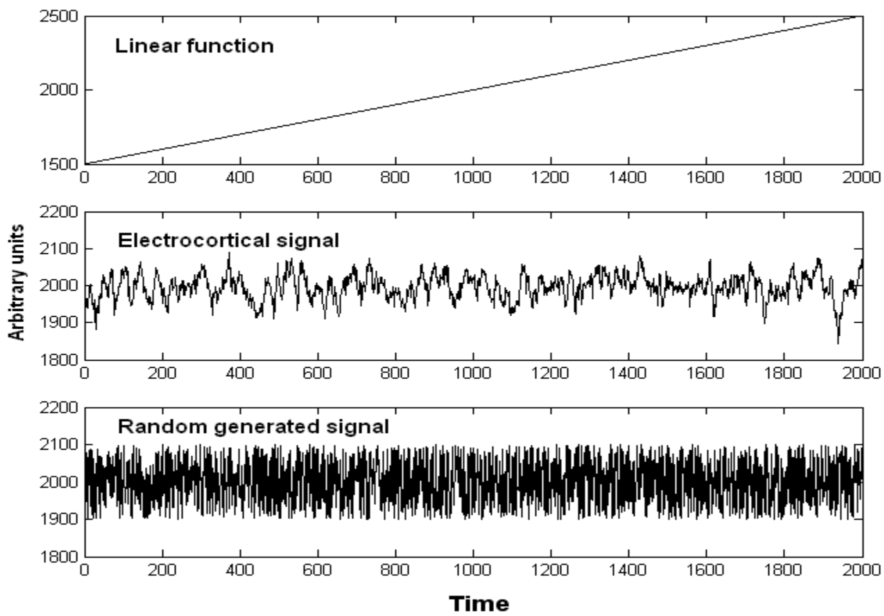
8.4.2 Fraktalna analiza sintetičkog i biološkog signala pri različitoj frekvenciji semplovanja: f_s (32 do 4096 Hz)

Za ispitivanje uticaja promene frekvencije semplovanja signala na promenu FD posmatrana je zavisnost f_s od FD za dve vrste signala: sintetički i biološki. Kao sintetički signal (Spasić i sar., 2005c) definisana je sinusna funkcija

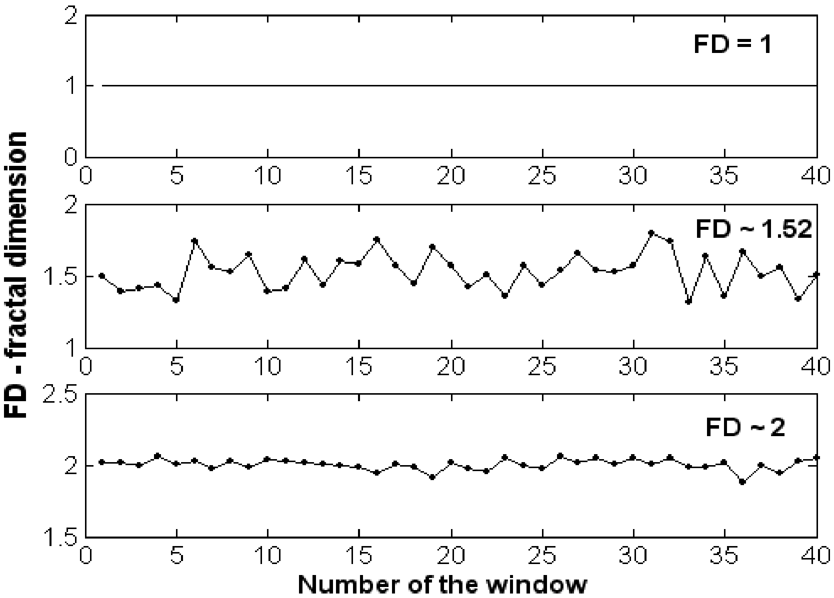
$$y = \sin(32x) \text{ za } x \;\; [0,120 \;\;]$$

je pridružena realnom vremenu od 30 s, sa frekvencijom semplovanja f_s = 4096Hz. Zatim je redukovana f_s sa 4096 Hz na 2048, 1024, 512, 256, 128, 64 i 32 Hz i izračunata FD za funkciju y sa redukovanim f_s.

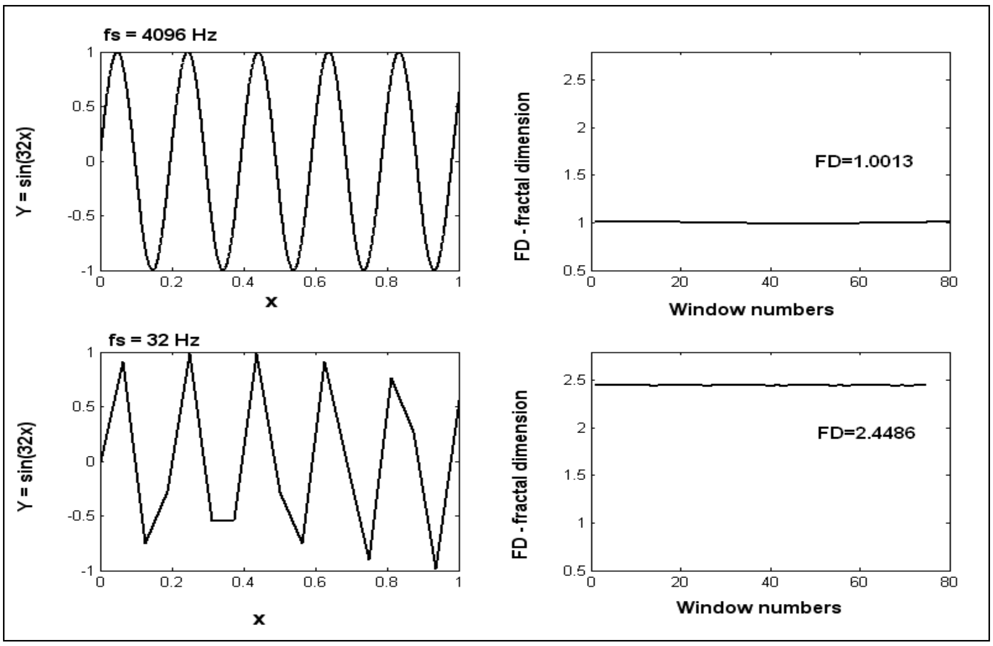
ECoG signali malog mozga pacova su pojačani, izvršena je analogno-digitalna konverzija na f_s = 2048 Hz i f_s = 4096 Hz. Zatim su formirani novi signali redukovanjem f_s na 64-512 Hz.



Slika 44. Primeri neki sintetičkih i bioloških signala: linearna funkcija, elektrokortikalni biološki signal i randomno generisan signal



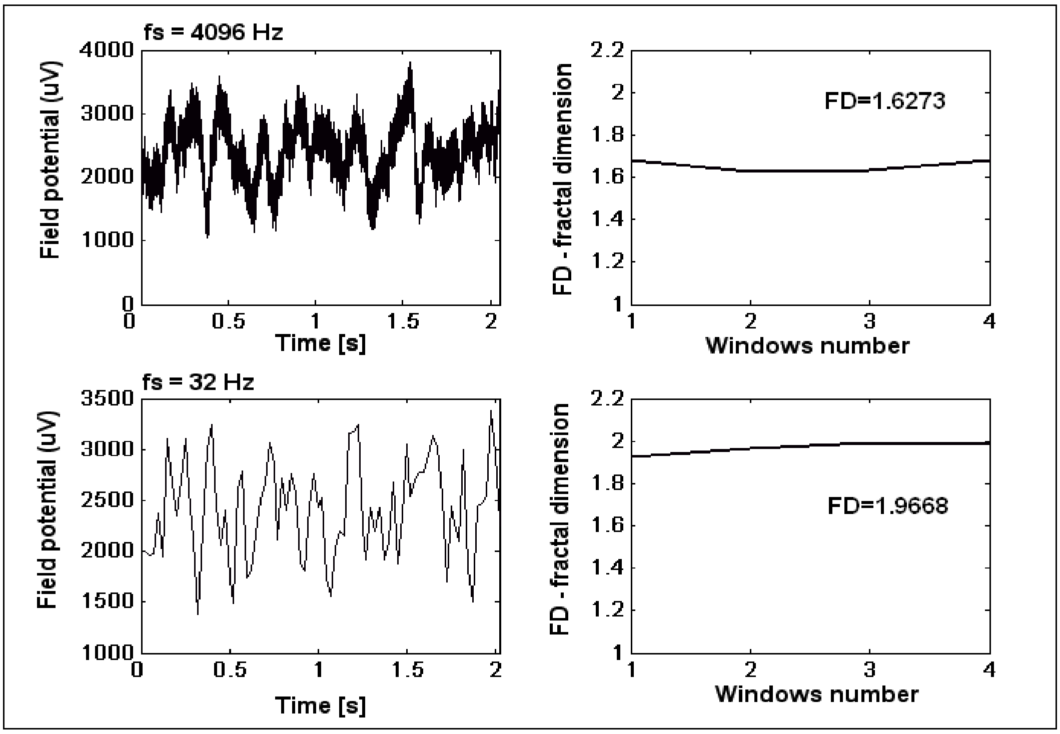
Slika 45. Fraktalne dimenzije signala sa slike 38, date respektivno.



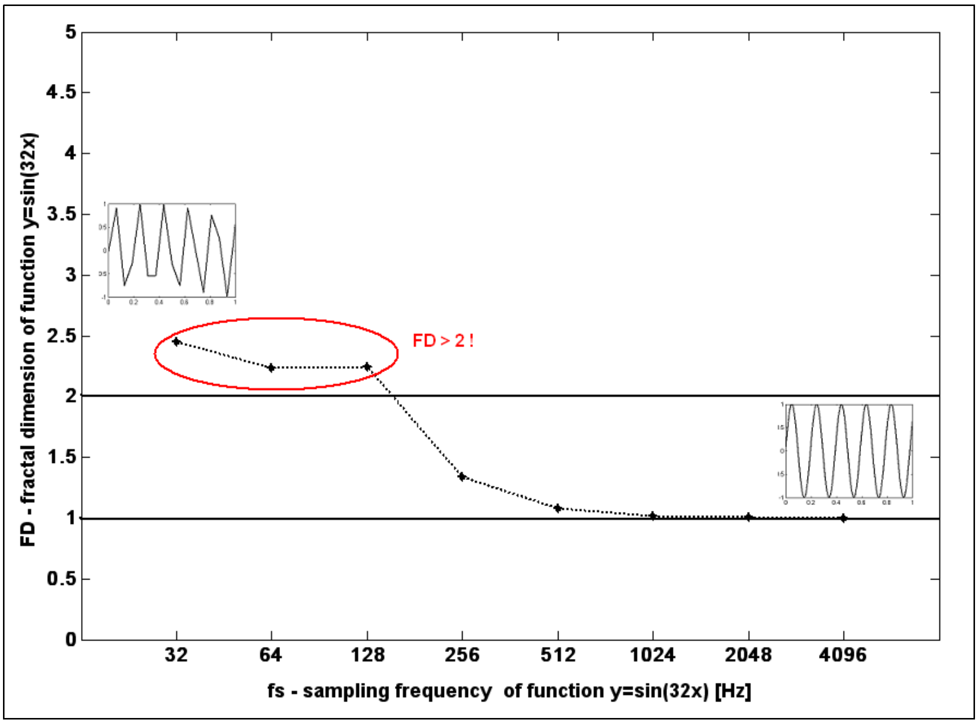
Slika 46. Funkcija y=sin(32x) na frekvenci semplovanja f_s=4096Hz i odgovarajuća fraktalna dimenzija FD=1.0013 i funkcija y=sin(32x) na frekvenci semplovanja f_s=32Hz i odgovarajuća fraktalna dimenzija FD=2.4486.

Na slici 49. prikazani su veštački signali dobijeni od polazne funkcije y=sin(32x) na frekvencijama semplovanja f_s=4096Hz i f_s=32Hz, kao i odgovarajuće fraktalne dimenzije. Dobijene izračunate vrednosti fraktalne dimenzije sinusne funkcije pri velikoj frekvenciji semplovanja su očekivane, tj. FD=1.0013 . Dok se sa smanjenjem frekvence semplovanja signal menja u odnosu na polazni i fraktalna dimenzija izračunata Higučijevom metodom izlazi iz definisanog opsega odnosno, FD=2.4486.

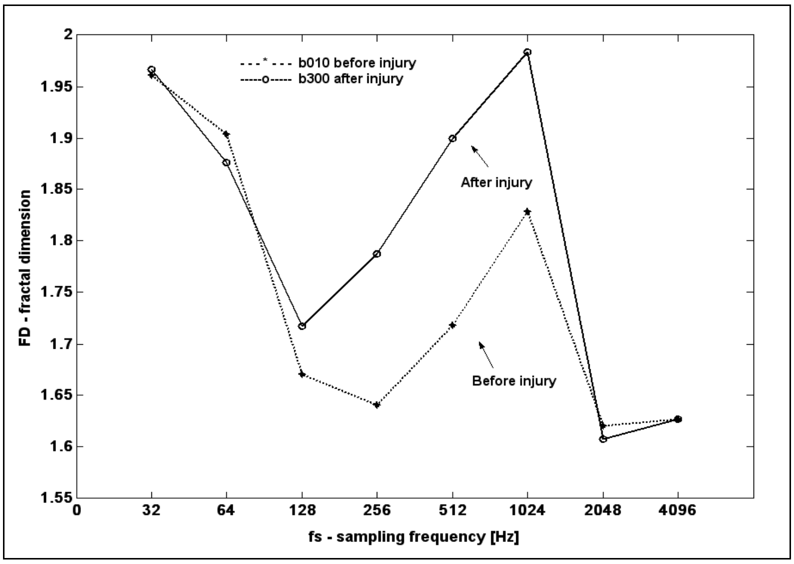
Biosignali koji predstavljaju elektrokortikalnu aktivnost malog mozga registrovani su pre i posle akutne moždane povrede. Signali su snimljeni na f_s = 4096 Hz i redukovani na niže f_s. Izračunate su vrednosti FD novodobijenih signala su prikazane na sl. 50 i 52.



Slika 47. Biosignal (ECoG malog mozga) snimljen na frekvenci semplovanja f_s=4096Hz i odgovarajuća fraktalna dimenzija FD=1.6273 i isti signal redukovan na frekvenciju semplovanja f_s=32Hz i njegova fraktalna dimenzija FD=1.9668.



Slika 48. Fraktalna dimenzija sinusne funkcije y = sin(32x) pri variranju frekvencije semplovanja.

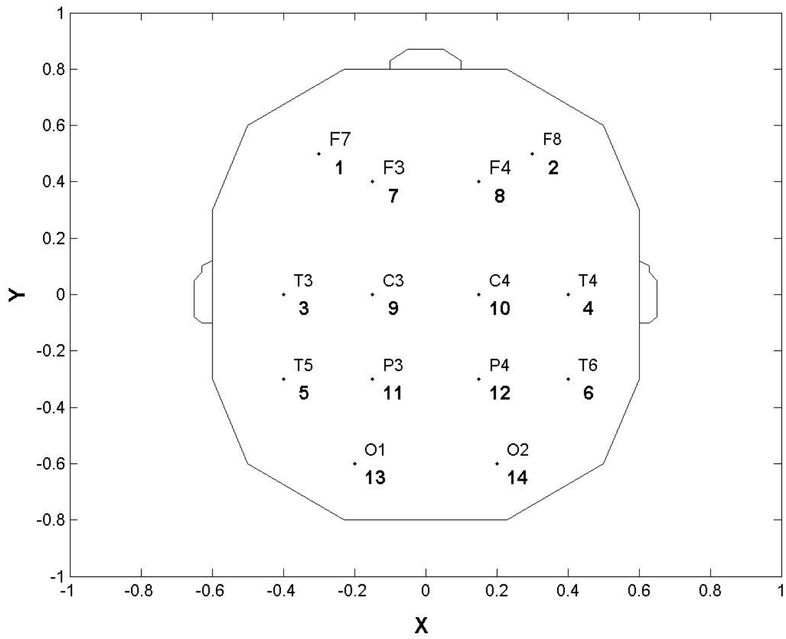


Slika 49. Zavisnost izračunate fraktalne dimenzije od frekvencije semplovanja malomoždanog signala pacova pre i posle prve akutne povrede velikog mozga.

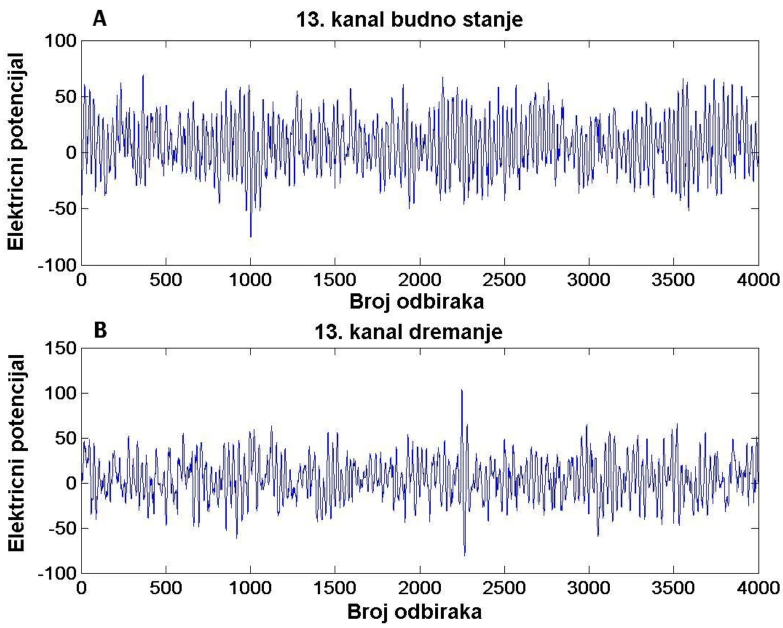
Posle akutne moždane lezije, našli smo porast vrednosti fraktalne dimenzije biološkog signala na frekvencijama semplovanja od 128, 256, 512 i 1024 Hz. Na pomenutim frekvencijama semplovanja FD može biti dobar indikator moždane povrede. Smanjivanje frekvencije semplovanja (<128 Hz) veštačkog (sl.51) i biološkog signala (sl.52) je kritično za vrednosti fraktalne dimenzije.

8.4.3 Fraktalna analiza humanih EEG signala

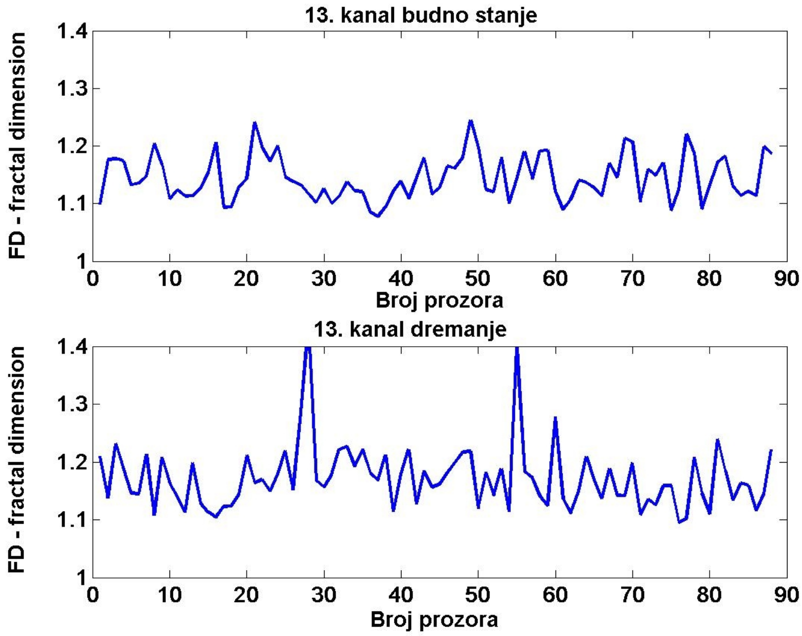
Mnogim eksperimentima utvrđeno je da neuronska aktivnost i EEG snimci pokazuju karakteristike haotičnog ponašanja (Das, 2002.) Neki rezultati (Virkkala i sar., 2002) upućuju na to da fraktalna dimenzija može biti upotrebljena kao pomoćni parametar u kompjuterski asistiranoj detekciji početka spavanja. U ovom poglavlju ćemo dati primere fraktalne analize elektroencefalograma (EEG) zdravih ljudi u budnom stanju i stanju dremeža. Detalji o eksperimentalnim uslovima pod kojima su biološki signali dobijeni definisani su u radu (Vučković, 2002). Naime, EEG signal je snimak električnih potencijala mozga registrovanih pomoću elektroda postavljenih na poglavinu. U ovom slučaju, vršili smo analizu signala registrovanih sa 14 elektroda postavljenih na poglavinu ispitanika sa rasporedom po utvrđenom standardu (10-20 sistem EEG montaže), što je prikazano na sl. 53. Podaci su prikupljeni od 8 odraslih zdravih ispitanika oba pola. Dužina EEG signala ispitanika u budnom stanju je 61 s (15616 odbiraka), a u dremežu je 65 s (16633 odbiraka) pri frekvenciji semplovanja od 256 Hz. Na sl. 54 prikazan je deo EEG signala sa kanala 13 u trajanju 16 s, u budnom stanju (A) i dremanju (B). Na sl. 55 prikazana je fraktalna dimenzija u vremenu EEG signala sa sl. 54 (kanal 13) sa klizećim prozorom N=200 i k_{max}=8, u budnom stanju (A) i dremanju (B).



Slika 50. Topološki raspored kanala na poglavini prilikom registrovanja EEG signala



Slika 51. Deo EEG signala ispitanika HH, kanal 13, u budnom stanju (A) i dremanju (B) u trajanju 16 s.

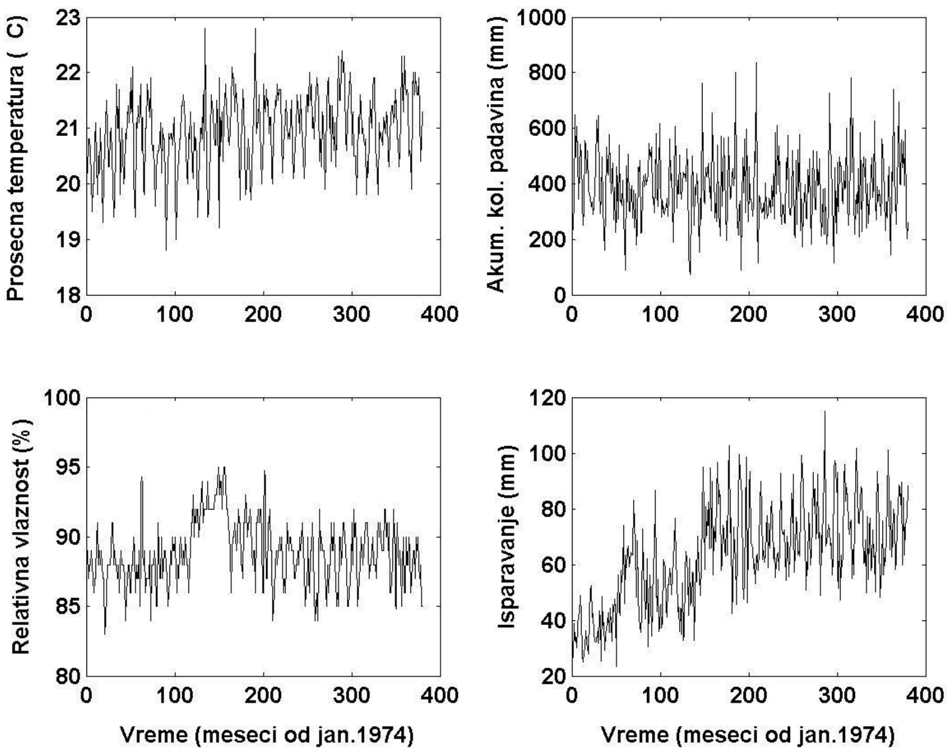


Slika 52. Promena fraktalne dimenzije u vremenu EEG signala sa slike 42 sa klizećim prozorom N=200 i k_{max} *=8.*

Koristeći navedene vrednosti parametara N i k_{max} izračunate su fraktalne dimenzije EEG signala registrovanih na 14 kanala svih 9 ispitanika, u budnom stanju i u stanju dremanja. Rezultati statističke analize (t-test) pokazali su da je kod četiri ispitanika (A, B, E, G) FD u budnom stanju značajno manja od FD u stanju dremanja na svih 14 kanala. Kod tri ispitanika (C, I, J) t-testom je pokazano da je FD u budnom stanju značajno manja od FD u stanju dremanja na svim kanalima osim na 3. kanalu gde je značajno veća u budnom stanju, a kod ispitanika J i na 4. kanalu. Kod ispitanika H utvrđeno je da je FD u budnom stanju značajno manja od FD u stanju dremanja na svim kanalima osim na 1. i 10. kanalu gde je FD značajno veća u budnom stanju.

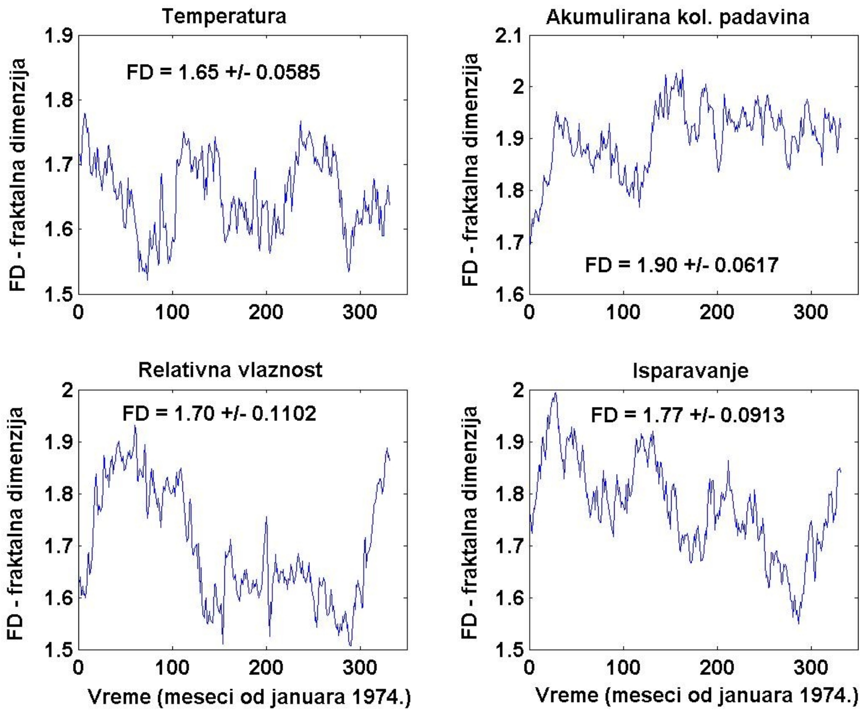
8.5 Primena fraktalne analize u drugim oblastima (meteorologija)

Interesantan pristup u primeni fraktalne analize nekih atmosferskih podataka i to metodom uzastopnih razlika (Kalauzi, Spasić i sar, 2005), nastao je kao rezultat saradnje naših i ekvadorskih stručnjaka (Vega, Kalauzi i sar, 2006). Atmosferski podaci su beleženi redovno, svakog meseca u periodu od preko 30 godina (januar 1974 - septembar 2005), u Ekvadoru, Pastaza. Četiri vremenske serije prikazane su na sl. 56.



Slika 53. Podaci za prosečnu temperaturu, akumuliranu količinu padavina, relativnu vlažnost i isparavanje dobijeni merenjem u relevantnim jedinicama u Pastazi, Ekvador od januara 1974 do septembra 2005.

Primenom adaptirane Higučijeve metode za izračunavanje FD na četiri vremenske serije atmosferskih podataka koji se odnose na četiri klimatske veličine (akumuliranu količinu padavina, relativnu vlažnost, srednju temperaturu i isparavanje) dobijaju se značajne promene u odnosu na rezultate pomenutih autora kada stavimo drukčiju širinu kliznog prozora ($N = 48$) i parametar $k_{max} = 4$. Moramo uzeti u obzir da se obim i tip ovih meteoroloških podataka (merenja jednom mesečno u dužini vremenske serije od preko 30 godina) bitno razlikuje od bioloških signala (preko 20000 vrednosti potencijala polja tokom 1-5 min). Zato je bilo potrebno da u analizi uvedemo izračunavanje vrednosti fraktalne dimenzije sa vremenski kliznim prozorom sa preklapanjem. Vrednosti FD u zavisnosti od vremenski kliznog prozora izračunate za podatke sa sl. 56 prikazane su na sl. 57.



Slika 54. Fraktalna dimenzija u vremenu u zavisnosti od kliznog prozora širine 48, sa korakom 1 i parametrom k_{max}=4, meteoroloških vremenskih serija prikazanih na sl.56.

Iako se dobijeni rezultati za vrednosti FD u vremenu razlikuju nominalno od rezultata dobijenih metodom uzastopnih razlika (Vega, Kalauzi i sar., 2006), analizom međusobne korelacije FD merenih veličina izračunate Higučijevom metodom dobijaju se rezultati u saglasnosti sa rezultatima (Vega, Kalauzi i sar., 2006).

Ne ulazeći u interpretaciju dobijenih vrednosti fraktalnih dimenzija meteoroloških vremenskih serija: akumulirane količine padavina, relativne vlažnosti, srednje temperature i isparavanja, nadamo se da bi ova analiza mogla da doprinese, uz dodatna razmatranja u oblasti atmosferske fizike, praktičnom preciziranju klimatskih promena u datom vremenskom razdoblju pomenutog regiona. Analogna nelinearna analiza meteoroloških podataka iz drugih krajeva sveta mogla bi da pomogne u formiranju globalne slike o fraktalnom ponašanju klimatskih faktora.

8.6 Prednosti i potencijalni problemi metoda fraktalne analize

Fraktalna analiza se već smatra široko raspostranjenom u primeni u oblasti neuronauka kao i u mnogim drugim oblastima. Postoji nekoliko metoda za merenje fraktalne dimenzije EEG vremenskih serija i obimna literatura o primeni fraktalnih mera od nelinearne dinamike do fizioloških signala. Kada se koriste linearne metode, kao što su Furijeovi spektri i »wavelet« analiza, često se zaboravlja da su ove metode odgovarajuće jedino za primenu na stacionarnim signalima dok su biosignali po prirodi nestacionarni. Slično, kada se koristi metoda vremenskog kašnjenja (time-delay method) za umetanje fizioloških vremenskih serija u višedimenzionalni fazni prostor i zatim izračunavanje nelinearnih karakteristika kao što je npr. korelaciona dimenzija, ne uzima se u obzir da je ovakva metoda odgovarajuća samo kada je signal generisan tačkastim odnosno jednim ili pretežno jednim izvorom, dok izvor biosignala kao što je EEG ima složenu vremensko-prostornu strukturu.

Metoda uzastopnih razlika koju smo mi predložili, kao i Higučijeva metoda, izračunavaju fraktalnu dimenziju direktno u vremenskom domenu bez neophodnosti umetanja podataka u fazni prostor. Algoritmi su veoma jednostavni i mogu biti primenjeni u realnom vremenu. Ove metode su primenljive na relativno kratke epohe, na nestacionarne signale i vrlo otporne na šum. Dakle, može se reći da fraktalna dimezija i drugi fraktalni deskriptori imaju važnu ulogu u karakterizaciji prirodnih objekata. Međutim, treba imati u vidu da je fraktalna dimenzija jedino deskriptivni parametar i ne mora nužno da implicira rasvetljavanje bilo kog fiziološkog, biološkog ili nekog drugog mehanizma (Fernandez i Jelinek, 2001). Osnovna kritika upućena na račun fraktalne dimezije je da nije adekvatan deskriptor određenog profila. U tom smislu, veoma je bitno ustanovljavanje novih invarijanti i njihovo povezivanje sa suštinom pato-fizioloških mehanizama.

Osim toga, struktura ili proces može biti mešavina različitih fraktala od kojih svaki može imati različite vrednosti fraktalne dimenzije. To znači da jedan određeni broj ne može biti karakteristika takvog preklapanja različitih fraktala. Neki istraživači počinju da koriste multifraktale u analizi kao napredniju metodologiju koja daje informaciju o distribuciji fraktalne dimenzije u strukturi. Dakle, treba imati u vidu da je izračunavanje fraktalne dimenzije samo jedna od alatki fraktalne geometrije, a da druga merenja kao što su spektri fraktalnih dimenzija mogu dati doprinos ovoj problematici (Smith i Lange, 1998.)

9. Zaključak

U ovoj disertaciji primenom matematičke teorije haosa, ali i razvojem same teorije, dat je doprinos u biomedicini kako bi se obezbedili bolji opisni, objašnjavajući i predikcioni modeli.

Rezultati ove disertacije obuhvaćeni su publikacijama (grupe I i II) koje sadrže:

I. Aplikativne nalaze fraktalne i spektralne analize bioloških signala koji dovode do komplementarnih saznanja u tumačenju elektroencefalografskih podataka kao i

II. Teorijske nalaze koji se odnose na ortonormalnu dekompoziciju afinih transformacija i primenu ortonormalne dekompozicije na fraktalne interpolacione funkcije.

Iz brojnih primera obrađenih u ovoj disertaciji može se zaključiti:

1. Analizom vremenskih serija, kompleksni fenomeni u biološkim signalima posmatrani su kao fraktalni stohastički procesi. Štaviše, fraktalna priroda ovih vremenskih serija nije uvek konstantna u vremenu već zavisi od interakcije sistema sa njegovom okolinom tako da su tada ovi fenomeni multifraktalni. Predložene su optimalne vrednosti parametara za analizu vremenske serije, tako da se mogu koristiti metode koje ne podrazumevaju multifraktalnost.
2. Pokazano je da fraktalna dimenzija ili indeks skaliranja označava odgovor sistema na određene uslove i može biti korišćen kao indikator zdravog odnosno bolesnog stanja sistema. Rezultati pokazuju da promena fraktalne dimenzije kao mere nivoa kompleksnosti bolest definiše kao smanjenje kompleksnosti.
3. Kao originalni doprinos disertacije posebno je istaknuta nova, brza i jednostavna metoda za izračunavanje fraktalne dimenzije koja koristi usrednjene apsolutne vrednosti prvih n izvoda (tj. konačnih razlika) signala u vremenskom domenu. Naznačene su

nove mogućnosti aplikacije predloženih fraktalnih alata gde je bitan izbor parametara fraktalne analize biosignala.

Ostvareni razultati otvaraju sledeće mogućnosti u fraktalnoj analizi biosignala:

1. Pronalaženje novih matematičkih metoda i algoritama za fraktalnu analizu 2D slika i njihova primena na slikama histoloških preparata.
2. Uvođenje novih kvantifikatora kompleksnosti bioloških signala i utvrđivanje novih invarijanti kao indikatora određenih patofizioloških stanja.
3. Matematičko modeliranje uanimalnim modelima epilepsije i Alchajmerove bolesti.
4. Formiranje novih programskih paketa za ispitivanje moždanih signala u određenim patofiziološkim stanjima.

10. Literatura

.1 **Accardo A., Affinito M., Carrozzi M., Bouquet F.** (1997), Use of the fractal dimension for the analysis of electroencephalographic time series. Biol. Cybernetics Vol.77, Issue 5, Pp. 339-350.

.2 **Amaral L.** (2004), A Brief Overview of Multifractal Time Series, (http://www.physionet.org/tutorials/multifractal/behavior.htm)

.3 **Amir-Moéz R.** (1964), *Matrix Techniques, Trigonometry and Analityc Geometry*, Edwards Bros, Ann Arbor

.4 **Babloyantz A., Destexhe A.** (1985), Low-dimensional chaos in an instance of epilepsy, Proc Natl Acad Aci USA Vol.83, Pp.3513-3517.

.5 **Barnsley M. F.** (1988), *Fractals everywhere*, Academic Press.

.6 **Bassingthwaighte J. B.** (1988), *Physiological heterogenity: fractals link determinism and randomness in structure and function.* News in Physiological Sciences, Vol.3, Pp.5-10.

.7 **Borg F. G.** (2005), *Review of Nonlinear Methods and Modelling I*, (oai:arXiv.org:physics/0503026)

.8 **Cannon M. J., Percival D. B., Caccia D. C., Raymond G. M., Bassingthwaighte J. B.** (1997), *Analyzing exact fractal time series: evaluating dispersional analysis and reskaled range methods,* Physica A. Vol. 241, Pp. 606-632.

.9 **Ciszewski J., Klonowski W., Stepien R., Jernajczyk W., Karlinski A., Niedzielska K.** (1999), *Application of Chaos Theory for EEG–signal Analysis in Patients with Seasonal Affective Disorder,* Med. Biol. Eng. Comput., Vol.37, Pp. 359-360.

.10 **Culic M., Martac-Blanusa Lj., Grbic G., Spasic S., Jankovic B., Kalauzi A.** (2005), *Spectral changes of cerebellar activity after acute brain injury in anesthetized rats,* Acta Neurobiologia Experimentalis, Vol.65, Pp. 11-14.

.11 **Dangel S., Meier P. F., Moser H. R., Plibersek S., Shen Y.** (1999), *Time series analysis of sleep EEG.* Computer assisted Physics, Vol. , Pp.93-95.

.12 **Das A., Das P., Roy A. B.** (2002), *Applicability of Lyapunov Exponent in EEG Data Analysis.* Complexity International. (http://www.csu.edu.au/ci/vol09/das01)

.13 **Delignières D., Torre K., Lemoine L.** (2005), *Methodological issues in the application of monofractal analyses in psychological and behavioral research*, Nonlinear Dynamics in Psychological and Life Sciences, Vol.9, Issue 4, Pp. 435-461.

.14 **Diambra L., Malta C. P., Capurro A., Fernandez J.** (2001), *Nonlinear structures in electroencephalogram signals*, Physica A, Vol. 300, Pp.505-520.

.15 **Doyle T. L. A., Dugan E., Humphries B., Newton R.** (2004), *Discriminating between elderly and young using a fractal dimension analysis of centre of pressure*, Int. J. Med. Sci. Vol.1, Pp. 11-20.

.16 **Echauz R. J.** (1995), *Wawelet Neural Networks for EEG* (PhD thesis), School of Electrical and Computer Engineering, Georgia Institute of Technology.

.17 **Eckmann J. P., Ruelle D.** (1985), *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Physical Rev A, Vol.33, Pp.1134-1140.

.18 **Efimov N. V.** (1971), *Vyshaya Geometriya*, Nauka, Moskva

.19 **Eke A., Hermann P., Bassingthwaighte J. B., Raymond G. M., Percival D. B., Cannon M. Balla I., Ikrenyi C.** (2000), *Physiological tome series: distinguishing fractal nioses from motions,* Pflugers Archives, Vol.439, 403-415.

.20 **Eke A., Hermann P., Kocsis L., Kozak L. R.** (2002), *Fractal characterization of complexity in temporal physiological signals.* Physiological measurement, Vol.23, R1-R38.

.21 **Esteller R.**, **Vachtsevanos G., Echauz J., Litt B.** (1999), *A comparison of fractal dimension algorithms using synthetic and experimental data.* Proc. IEEE International Symposium on Circuits and System, Adaptive Digital Signal Processing, Orlando, Fl, III, Pp. 199-202.

.22 **Esteller R.** (2000), *Detection and Prediction of seizures in epileptic EEG records, Ph Thesis,* Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA.

.23 **Falconer K.** (1990), *Fractal Geometry – Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, Chichester.

.24 **Fernandez E., Jelinek H. F.** (2001), *Use of Fractal Theory in Neuroscience: Methods, Advantages, and Potential Problems,* Methods, Vol.24, Pp. 309-321.

.25 **Fisher Y.** (1995), (Ed.), *Fractal Image Compression. Theory and Application*, Springer-Verlag, New York.

.26 **Glajk J.** (2001), *Haos*, Narodna knjiga, Beograd (prevod na srpski jezik, originalno izdanje je iz 1987.)

.27 **Goldberger A. L., Rigney D. R., West B. J.** (1990), *Chaos and fractals in human physiology,* Sci Am, Vol.262, Pp. 42-49.

.28 **Goldberger A. L., Amaral L. A. N., Hausdorff J. M., Ivanov P. Ch., Peng C.-K., Stanley H. E.** (2002), *Fractal dynamics in physiology: Alterations with disease and aging,* Proc Natl Acad Sci USA 99(Suppl 1): 2466-2472

.29 **Gregson R. A. M.** (1992), *N-dimensional nonlinear psychophysics.* Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

.30 **Guastello S. J.** (1995), *Chaos, catastrophe, and human affairs: Applications of nonlinear dynamics to work, organisations, and social evolutions.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

.31 **Heath R. A.** (2000), *Nonlinear Dynamics:Techniques and Applications in Psychology,* Earlbaum: Mahwah, NJ.

.32 **Heathcote A., David E.** (2005), *Nonlinear dynamical analysis of noisy time series*, Nonlinear Dynamics in Psychological and Life Sciences, Vol.9, Issue 4, Pp. 399-433.

.33 **Hegger R., Kantz H., Schreiber T.** (1999), *Practical implementation of nonlinear time series: The TISEAN package,* Chaos, Vol. 9, Pp. 413-435.

.34 **Hernandez Caceres, L. J., Sibat, F. S., Hong, R., Garcia, L., Sautie, M., Namugova, V.** (2004): *Towards the estimation of fractal dimension of heart rate variability data.* El. J. Biomed., Vol.2, Pp. 4-15.

.35 **Higuchi T.** (1988), *Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory,* Physics D, Vol.31, Pp.277-283.

.36 **Hilborn R. C.** (2004), *Chaos and Nonlinear Dynamics,* Second edition,Oxford University Press, New York

.37 **Hu T. Y., Lau K.-S.** (1993), *Fractal Dimensions and Singularities of the Weierstrass Type Functions,* Trans. Amer. Math. Soc.Vol. Vol. 335, Pp. 649-665.

.38 **Hunt B. R.** (1998), *The Hausdorff Dimension of Graphs of Weierstrass Functions*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 126, Pp.791-800.

.39 **Hurst H. E.** (1965), *Long-term storage: An experimental study.* London: Constable.

.40 **Hutchinson J. E.** (1981), *Fractals and self similarity*, Indiana University Mathematics Journal, Vol.30, Pp.713-747.

.41 **Jovanović A.** (2002), *Group for Intelligent Systems – Problems and Results,* Intelektualnie sistemy, Lomonossov University and RAN, 6

.42 **Jovanović A.** (2004), *Biomedical image and Signal processing*, CD-ROM, School of Mathematics, University of Belgrade.

.43 **Kalauzi A, Ćulić M, Martać Lj, Grbić G, Saponjić J, Jovanović A, Janković B, Spasić S.** (2003). New view on cerebellar cortical background activity in rat: Simulation. *Neurosci. Res. Commun.*, **Vol. 32**, Pp.211-217.

.44 **Kalauzi A., Spasić S.** (2004), *Estimation of neuronal population activity changes in rat cerebellum using one electrode,* Comparative Biochemistry and Physiology, Part A, Vol.138, Pp. 61-68.

.45 **Kalauzi A., Spasić S., Ćulić M., Grbić G., Martać Lj.** (2004), *Correlation between fractal dimension and power spectra after unilateral cerebral injury in rat*, 4th FENS Lisbon, July 10-14, Abstr. Vol 1, A199.9.

.46 **Kalauzi A., Spasić S., Ćulić M., Grbić G., Martać Lj.** (2005), *Consecutive differences as a method of signal fractal analysis,* Fractals, Vol.13, No.4, Pp. 283-292.

.47 **Katz M.** (1988), *Fractals and the analysis of waveforms,* Comput. Biol. Med., Vol.18, No.3, Pp. 145-156.

.48 **Kelso J. A. S.** (1995), *Dynamic pattern: The self-organization of brain and behaviour,* Cambridge, MA: MIT Press.

.49 **Kieβwetter K.** (1966), *Ein Einfaches Beispiel fur Eine Funktion Welche Uberall Stetig and Nicht Differenzierbar ist*. Math. Phys. Semesterber, Vol.13, Pp. 216-221.

.50 **King C.C.** (1991), *Fractal and chaotic dynamics in nervous systems,* Prog. Neurobiol., Vol.36, Pp. 279-308.

.51 **Klonowski W., Ciszewski J., Jernajczyk W., Niedzielska K.** (2000), *Application of Chaos Theory and Fractal Analysis for EEG-signal Processing in Patients with Seasonal Affective Disorder*, In: Proceedings of 1999 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'99), Waikoloa, HA, USA, Pp. 339-342.

.52 **Klonowski W., Stepien R., Olejaczyk E., Jernajczyk W., Niedzielska K., Karlinski A.** (2000), *Chaotic Quantifiers of EEG-signal for Assesing Photo and Chemo-Therapy.* Medical Biol. Engin. Comput., Vol.37, Suppl.2, Pp.436-437.

.53 **Klonowski W.** (2000), *Signal end image analysis using chaos theory and fractal geometry,* Machine Graphics & Vision, Vol.9(1/2), Pp.403-431.

.54 **Klonowski W., Olejaczyk E., Stepien R., Scelenberger W.** (2003), *New methods of nonlinear and symbolic dynamics in sleep EEG-signal analysis*, in: Modelling and Control in Biomedical Systems, D. D. Feng, E. R. Carson (Eds.), Proc. 5th IFAC Symposium, Melbourne, Australia, Elsevier, Pp. 241-244.

.55 **Klonowski W., Olejaczyk E., Stepien R., Jalowiecki P., Rudner R.** (2006), *Monitoring the Depth of Anaesthesia using Fractal Complexity Method*, in: Complexus Mundi, Emergent Patterns in Nature, M. M. Novak (Ed.), Pp.333-342.

.56 **Knopp K.** (1918), *Ein Einfaches Verfarhen zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen,* Math. Zeitschrift Vol.2, Pp.1-26.

.57 **Kocić M. Lj.** (1995), *Discrete methods for visualizing fractal sets*, FILOMAT (Niš) Vol.9, Pp. 753–764.

.58 **Kocić M. Lj**. (2000), *AIFS – a Tool for Biomorphic Fractal Modeling*, Nonlinear Dynam., Psychology Life Sci. 5 , No. 1, Pp. 45–63.

.59 **Kocić M. Lj., Simoncelli A. C.** (1997), *Fractal Generated by a Triangle*, Fractalia 21, str. 13-18.

.60 **Kocić M. Lj., Simoncelli A. C.** (1998), *Towards free-form fractal modelling*, in: Mathematical Methods for Curves and Surfaces II, M. Daehlen, T. Lyche and L. L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville (TN.), Pp. 287–294.

.61 **Kocić M. Lj., Spasić S.** (2006), *Orthonormal decomposition of fractal interpolating functions,* Facta Universitatis (Niš) Ser. Math. Inform. Vol.21, Pp.1-11.

.62 **Kocić M. Lj.** (2007a) *Fraktalna istorija haosa,* (rukopis).

.63 **Kocić M. Lj.** (2007b), CAGD I: *Planar curves modeling,* (rukopis).

.64 **Kolmogorov A. N.** (1958.), *A New Invariant for Transitive Dynamical Systems,* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol.119, Pp.861-864.

.65 **Kozma R., Kasabov N. K., Kim J. S., Cohen A.** (1998), *Integration of Connectionist Methods and Chaotic Time-Series Analysis for the Prediction of Process Data,* J. Intell. Systems, Vol.13, No.6, Pp.519 –538.

.66 **Mališić J.** (2002), *Vremenske serije*, Matematički fakultet, Beograd

.67 **Mandelbrot B., Van Ness J. W.** (1968), *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications,* SIAM Review, Vol.10, Pp.422-437.

.68 **Mandelbrot B.** (1983), *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., New York.

.69 **McSharry P. E., Smith L., Tarassenko L.** (2003), *Comparison of Predictability of Epileptic Seizures by a Linear and a Nonlinear Method,* IEEE Trans. Biomed. Engin., Vol. 50, No.5, Pp. 628-633.

.70 **Moon, F. C.** (1992), *Chaotic and Fractal Dynamic*, John Wiley & Sons, New York.

.71 **Natarajan K., Acharya R., Alias F., Tiboleng T., Puthusserypady S.** (2004), *Nonlinear analysis of EEG signals at different mental states,* BioMedical Engineering OnLine, Vol.3, Pp.1-7. (http://www.bimedical-engineering-online.com/content/3/1/7)

.72 **Oppenheim A. V., Schafer R. W.** (1989), *Discrete-Time Signal Processing,* Prentice Hall, New Jersey, USA.

.73 **Pap E.** (1999), *Fazi mere i njihova primena*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad.

.74 **Peng C.-K., Mietus J., Hausdorff J. M., Havlin S., Stanley H. E., Goldberger A. L.** (1993), *Long-range anti-correlations and non-Gaussian behavior of the heartbeat.* Physical Review Letter, Vol.70, Pp.1343-1346.

.75 **Peng C.-K., Havlin S., Stanley H. E., Goldberger A. L.** (1995), *Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heart beat time series.* Chaos, Vol.5, Pp.82-87.

.76 **Peng C.-K., Hausdorff J. M., Goldberger A. L.** (2000.) *Fractal mechanisms in neural control: Human heartbeat and gait dynamics in health and disease,* in: Walleczek J, ed. Self-Organized Biological Dynamics and Nonlinear Control. Cambridge: Cambridge University Press.

.77 **Petrosian A.** (1995), *Kolmogorov Complexity of Finite Sequences and Recognition of Different Preictal EEG Patterns,* Proc. IEEE Symposium on Computer-Based Medical System, Pp. 212-217.

.78 **Pettgen H. O., Jurgens H., Sampe D.** (1992), *Chaos and Fractals New Frontiers of Science*, Springer Verlag, 1992.

.79 **Price R. J., Hayes H. M.** (1998), Resampling and Reconstruction with Fractal Interpolation Function, Signal Processing Letters, IEEE, Vol. 5, Issue 9, Pp.228-230.

.80 **Rambihar V. S., Baum M. A.** (1999), *A new mathematical (chaos and complexity) theory of medicine, helth and disease,* in: A new chaos based medicine beyond 2000: a response to evidence. Ed. Rambihar V.S., Toronto: Vashna Publications

.81 **Robins V.** (2000), *Computational Topology at Multiple Resolutins: Foundations and Applications to Fractal and Dynamics,* (PhD thesis) Faculty of the Graduate School of the University of Colorado, Department of Applied Mathematics, Fort Collins, Colorado, USA, Pp.1-133.

.82 **Rosenstaine M. T., Collins J. J, De Luca C.** (1994), *Reconstruction expansion as geometry-based framework for choosing proper delay times*, Physica D, Vol.73, Pp.82-98.

.83 **Ruelle D.** (1989), *Chaotic evolution and strange attractors,* Cambridge University Press.

.84 **Savi M. A.** (2005), *Chaos and Order in Biomedical Rhythms*, J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci.& Eng., Vol. 27, No.2, Pp.157-169.

.85 **Schroeder M.** (1990), *Fractals, Chaos, Power Laws*, W. H. Freeman and Co., New York.

.86 **Smith T. G. Jr., Lange G. D.** (1998), Fractals in Biology and Medicine, (Nonnenmacher T.F., Losa G.A. and Weibel E.R., Eds.), Birkhauser, Basel.

.87 **Spasić S., Kalauzi A.**, **Ćulić M., Grbić G., Martać Lj.** (2004), *The effect of cerebral injury on fractal dimension of ECoG in rat.* 4th FENS Lisbon, July 10-14, Abstr. Vol. 1, A199.19.

.88 **Spasić S., Kalauzi A, Ćulić M., Grbić G., Martać Lj.** (2005a), *Fractal analysis of rat brain activity after injury,* Medical & Biological Engineering & Computing, Vol. 43, Issue 3, Pp. 345-348.

.89 **Spasić S., Kalauzi A., Ćulić M., Grbić G., Martać Lj.** (2005b), *Estimation of parameter k_{max} in fractal analysis of rat brain activity.* Ann. N.Y. Acad. Sci., Vol. 1048, Pp 427-429.

.90 **Spasić S., Ćulić M., Grbić G., Martać Lj., Jovanović A.** (2005), *Fractal Analysis of Artificial and Cerebellar Signals at Sampling Frequencies of 32-4096 Hz*, 3rd Serbian-Hungarian Joint Symposium on Intelligent Systems, August 31-September1, 2005, Subotica, Serbia and Montenegro, (ISBN: 963-7154-41-8) Pp.67-72.

.91 **Spasić S., Kocić M. Lj.** (2005). *Application of orthonormal decomposition on fractal interpolating functions,* Zbornik radova saopštenih na III Kongresu matematičara Makedonije, septembar 2005, Struga.

.92 **Spasić S., Ćulić M., Grbić G., Martać L, Kesić S., Soković. M.** (2006), *Fractal analysis of rat brain activity after camphor administration.* The 9th International Conference, Fractal 2006, Wien.

.93 **Spasić S.** (2006a), *Faktalna analiza veštačkih signala – sinusnih i Vajerštrasovih funkcija*, 50. Konferencija ETRAN-a, Beograd, 3. Knjiga, Pp.184-186.

.94 **Spasić S.** (2006b), Fractal analysis of synthetic and biological signals, The 4th Conference on Nonlinear Analysis and Applied Mathematics, Targoviste, Romania, Proceedings (u štampi).

.95 **Stepien R. A.** (2002), *Testing for non-linearity in EEG signal of healty subjects,* Acta Neurobiologia Experimentalis, Vol.62, Pp.277-281.

.96 **Takagi T. A.** (1903), *Simple example of continuous function without derivative,* Proc. Math. Soc. Japan Vol.1, Pp.176-177.

.97 **Tapanainen, J.M., Thomsen, P.E., Kober, L., Torp-Pedersen, C., Makikallio, T.H., Still, A.M., Lindgren, K.S., Huikuri, H.V.** (2002) *Fractal analysis of heart rate variability and mortality after an acute myocardial infarction,* Am. J. Cardiol., Vol. 90, pp. 347-352.

.98 **Thakor V., Tong S.** (2004), *Advances in quantitative electroencefalogram analysis methods*, Annual Review of Biomedical Engineering, Vol. 6, Pp.453-495.

.99 **Tricot C.** (1995), *Curves and Fractal Dimension*, Springer-Verlag, New York.

.100**Van Drongelen W.** (2007), *Signal Processing for Neuroscientists*, Elsevier, Amsterdam.

.101**Vega H. M., Kalauzi A., Cukic M., Perez R.A.** (2006) *Fractal analysis of some atmospheric data from Pastaza, Ecuador,* 50. Konferencija ETRAN-a, Beograd, 6-9.juna 2006. Sveska VI, Pp.

.102**Virkkala J., Himanen S.-L., Varri A., Hasan J.** (2002) *Fractal Dimension of EEG in Sleep Onset.* Proc. 3rd Eur. Interdiscip. School on Nonlinear Dynamics for System and Signal Analysis. Warsaw, June 18-27.

.103**Vuckovic A., Radivojevic V., Chen A. C., Popovic D. B.** (2002) *Automatic recognition of alertness and drowsiness from EEG by artificial neural networks.* Med Eng Phys, Vol.24, No.5, Pp. 349-360.

.104**Vuksanović V. M.** (2005), *Nelinearna dinamika srčanog ritma,* Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Beograd.

.105**Weisstein E. W.**, *Affine Transformation.* From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/AffineTransformation.html

.106**Weierstrass K.** (1886), *Abhandlungen aus der Functionenlehre.* Berlin: J. Springer, P. 97.

.107**Wrobel A.** (2005), *The need of neuroinformatic approach in functional neurophysiology,* Acta Neurobiologiae Experimentalis, Vol.65, Pp.421-423.

.108**Zhang L., Dean D., Liu J., Shagal V., Wang X., Yue G.** (2006), *Quantifying degeneration of white matter in normal aging using fractal dimension,* Neurobiology of Aging (In press)

.109http://www.inria.fr/rapportsactivite/RA2005/complex/complex.pdf

11. Appendix 1

Deterministički i randomni algoritam za konstrukciju fraktala pomoću IFS

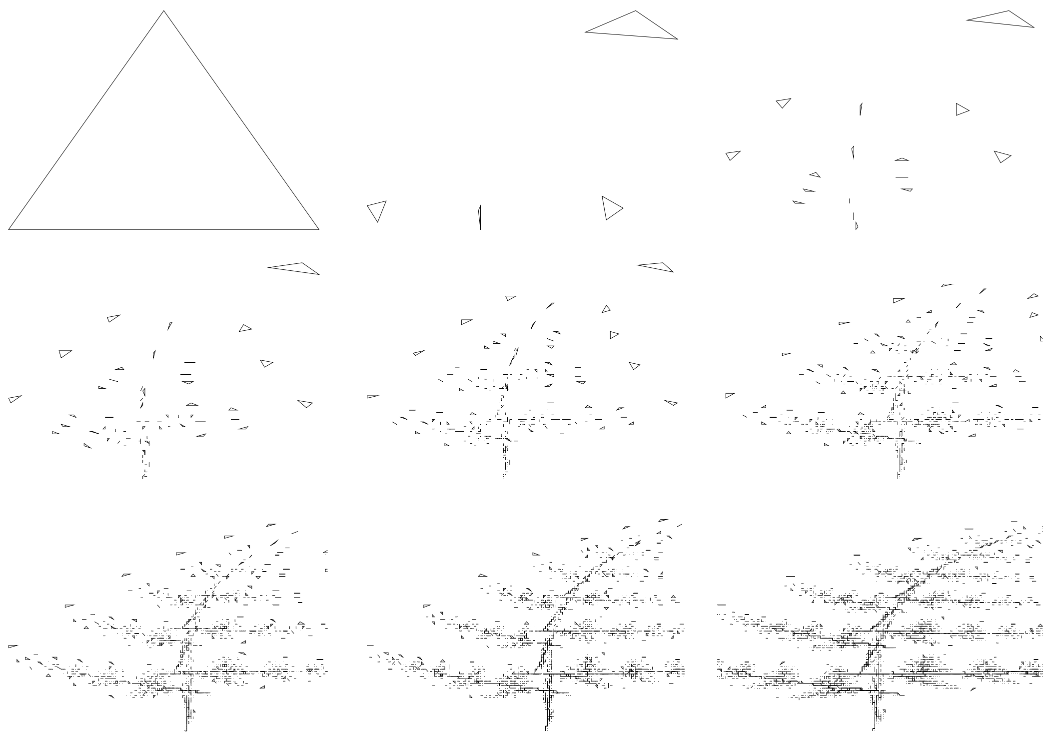
U dodatku su dati su primeri programa za konstrukciju fraktala pomoću IFS, na bazi determinističkog i randomnog algoritma (Barnsley, 1988). Programi su pisani u softveru Mathematica 5.0.

Primer A1. Barnslijeva paprat

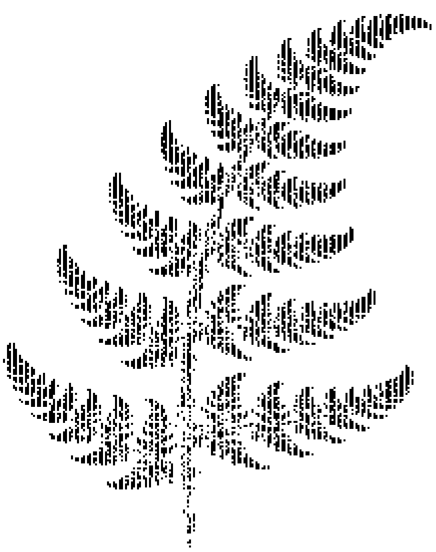
```
Clear["Global`*"]
nMax=20000;
T={{0.,0.},{0.5,0.5},{1.,0.}};
A1={{-0.03,0.31},{0.35,0.01}};
b1={0.24,-2.20};
A2={{-0.03,0.01},{0.31,0.40}};
b2={-0.83,-2.36};
A3={{0.78,0.08},{-0.10,0.78}};
b3={0.06,0.73};
A4={{0.08,-0.26},{0.34,0.15}};
b4={-1.72,-2.25};
w1=A1.# +b1&;
w2=A2.#+b2&;
w3=A3.#+b3&;
w4=A4.#+b4&;
(*  DETERMNINISTICKI algoritam *)
W=Join[w1/@#,w2/@#,w3/@#,w4/@#]&;
```

```
T=Append[T,First[T]];
hut=Partition[Nest[W,T,#],Length[T]]&;
fern=Graphics[Line[#]&/@hut[#]]&;
Show[GraphicsArray[{{fern[0],fern[1],fern[2]},{fern[3],fern[4],fern[5]},{fern[6],fern[7],fern[8]}}]];
```

```
 (*  RANDOM algoritam *)
r=Which[ #2>0.88,   w4[#1], #2>0.14,   w3[#1], #2>0.13,   w2[#1], #2>=0,w1[#1]]&;
rndLst=Table[Random[], {nMax}];
p=FoldList[r,{0.,0.},rndLst];
points=Table[Point[p[[i]]],{i,nMax}];
attr=Graphics[{RGBColor[0.6,0.9,0],PointSize[0.005],points}];
Show[attr,PlotRange  All,AspectRatio  Automatic];
```



Slika A1.1 Prvih osam iteracija Barnslijeve paprati dobijene determinističkim algoritmom.



Slika A1.2 Barnslijeva paprat generisana pomoću IFS (randomni algoritam).

12. Appendix 2

Spisak originalnih programa za analizu moždane aktivnosti

U dodatku je dat spisak korišćenih programa za analizu moždane aktivnosti. Analiza registrovanih signala elektrokortikograma vršena je programima u MATLAB 6.5 programu pod OS Windows XP. Korišćeni su sledeći programi:

- CB2A, CB2DN - programi vrše konverziju registrovanog signala iz bin u dat format, koji se koristi u programu za detaljno posmatranje signala i u programima za spektralnu analizu signala;

- PU1N - program služi za posmatranje registrovanog signala u vremenskom domenu i dozvoljava oznaku epoha koje treba eventualno izbaciti ukoliko se u signalu javlja smetnja nebiološke prirode tj. artefact;

- EEGS1 – program služi za Furijeovu analizu signala i daje numerički prikaz srednjeg spektra snage signala po frekventnim područjima od po 4 Hz za dati broj epoha;

- EEGS1F - program pored Furijeovu analize signala vrši i filtriranje signala radi izbacivanja smetnji koje imaju frekvencu od 50 Hz i 100 Hz.

- AXYAS1 - program omogućava grafički prikaz srednjeg spektra snage signala ±standardna devijacija SD.

- DFHIG - program sadrži prilagođen i implementiran Higučijev algoritam za izračunavanje fraktalne dimenzije signala sa zadatom širinom prozora bez preklapanja prozora, zadatom vrednošću parametra k_{max} i za zadati broja kanala.

- DFHIGPOK - program sadrži prilagođen i implementiran Higučijev algoritam za izračunavanje fraktalne dimenzije signala sa zadatom širinom prozora bez preklapanja prozora, za varijabilne vrednosti parametra k_{max} u zadatom opsegu i za zadati broja kanala.

- DFKONRAZ – programski paket sadrži implementiranu Metodu uzastopnih razlika za izračunavanje fraktalne dimenzije signala.

13. Appendix 3

Dodatne definicije

Definicija A3.1: Strogi beli šum je niz slučajnih promenljivih $\{\xi_t\}$ sa raspodelom verovatnoća za koji važi da je očekivanje $E\xi_t = 0$, disperzija $D\xi_t = \sigma^2$ i korelaciona funkcija $K_\xi(t,s) = E\xi(t)\xi(s) = 0$ za $t \neq s$.

Definicija A3.2: Strogi Gausov beli šum je niz slučajnih promenljivih $\{\xi_t\}$ sa Gausovom raspodelom verovatnoća za koji važi da je očekivanje $E\xi_t = 0$, disperzija $D\xi_t = \sigma^2$ i korelaciona funkcija $K_\xi(t,s) = E\xi(t)\xi(s) = 0$ za $t \neq s$.

Definicija A3.3: Fraktalni Gausov šum je stacionarni niz slučajnih promenljivih $\{x_t\}$ sa Gausovom raspodelom za koji važi $Ex_t = c = const.$ i $Dx_t = \sigma^2$.

Definicija A3.4: Fraktalno Braunovo kretanje (fBm) je karakterisano stepenim zakonom

$$\Delta x \propto \Delta t^H$$

gde je Δt vremenski interval, Δx promena zavisno promenljive, a *H* predstavlja skalirajući eksponent serije i može biti bilo koji realan broj 0<*H*<1.

Napomena: Obično Braunovo kretanje je specijalan slučaj fBm za vrednost eksponenta *H*=0.5 i predstavlja granicu između perzistentnog fBm (*H*>0.5) i neperzistentnog fBm (*H*<0.5).