Branka Alimpić

I Z O T O P I J A   J E D N E   K L A S E

K V A Z I G R U P A

(Doktorska disertacija)

Rukovodilac,

Dr. Slaviša Prešić

Vanr.prof. PMF

B E O G R A D   1 9 7 2.

S A D R Ž A J

I Z O T O P I J A   J E D N E   K L A S E
K V A Z I G R U P A

0. UVOD

Teorija kvazigrupa i lupa je jedna od srazmerno mladih oblasti savremene algebre. Počela se razvijati pre nekoliko decenija, tačnije, kvazigrupu kao algebarsku strukturu uvela je Ruth Moufang 1935. god. prilikom ispitivanja jedne klase nedezargovskih projektivnih ravni [40]. Termin lupa (engl. "loop" - petlja) uveo je A.A.Albert 1943. god. u [4].

Medjutim, za pravi početak razvitka teorije kvazigrupa može se uzeti jedan znatno stariji datum. To je godina 1779, kad je L.Euler, [25] razmatrajući jedan kombinatorni problem postavio hipotezu da ne postoji par ortogonalnih latinskih kvadrata (Eulerov kvadrat) za $n=4k+2$. Latinski kvadrat je, ustvari, Cayley-va tablica za konačnu kvazigrupu. Dva grupoida (S,A) i (S,B) su ortogonalna ako jednačine $A(x,y)=a$ i $B(x,y)=b$ imaju jedinstveno rešenje za svaki par $a,b\in S$. Tek 1901. god. Tarry [53] je dokazao da je za $n=6$ Eulerova hipoteza tačna. Od tada su se mnogi bavili ovim problemom, 1959. je Parker dokazao da hipoteza nije tačna [45]. Kasnije je dokazano da za svaki $k>2$ postoji par ortogonalnih kvazigrupa reda $n=4k+2$. A.Sade je dao jednostavnu konstrukciju ortogonalnih kvazigrupa [51].

Pitanje postojanja ortogonalnih kvazigrupa vezano je sa pitanjem postojanja konačnih projektivnih ravni, odnosno sa teorijom rešetaka (engl. "net", nem. "Gewebe"). Ovom problematikom bavili su se R.H.Bruck [18,19] , D.R.Hughes[33], i drugi, a rezultati su izloženi u monografijama G.Pickerta [41], R.H.Brucka [20], M.Hall-a [30,31], i V.D.Bjelousova [9,10].

Ispitivanja svojstava konačnih projektivnih ravni, kao i neki problemi teorije funkcionalnih jednačina doveli su do potrebe izučavanja univerzalnih algebri (S,Ω) čije su operacije vezane nekim zakonima. Prema V.D.Bjelousovu [12], posmatraju se tri tipa ovakvih veza. Prvi tip, to je zakon u običnom smislu, tj. operacijska slova zakona zamenjuju se fiksiranim operacijama. Drugi je tip kad se operacijska slova zakona zamenjuju proizvoljnim operacijama iz Ω. Treći tip je izmedju ova dva; neka operacijska slova zamenjuju se proizvoljnim operacijama iz Ω, a ostala se zamenjuju operacijama koje zavise od predhodnih. U trećem slučaju A.Sade zove posmatrani zakon "identité demosienne" [49].

Ovde treba pomenuti sledeće rezultate.

1958. god. V.D.Bjelousov u [8] dokazao je:

Ako su četiri kvazigrupe (S,A_i), $i=1,2,3,4$ vezane zakonom opšte asocijativnosti

(1) $A_1(A_2(x,y),z) = A_3(x,A_4(y,z))$

sve su izotopne istoj grupi $(S,\circ)$.

Zakon (1) ispitivali su i J.Aczél [1], J.Aczél, V.D. Bjelousov i M.Hosszú [2], M.Hosszú [27] i S.Prešić [42].

Kvazigrupa $(S,\circ)$ je medijalna ako zadovoljava zakon

(2) $(xy)(zu) = (xz)(yu)$.

R.H.Bruck [16] zove takvu kvazigrupu Abelova. A.Sade [47] zove zakon (2) entropijski. U teoriji funkcionalnih jednačina zakon (2) zove se bisimetrija (J.Aczél, [1]). S.K.Stein je uveo naziv medijalna kvazigrupa [52].

1960. god. u radu [2] dokazano je:

Ako je šest kvazigrupa A_i, $i=1,\ldots,6$ vezano zakonom opšte entropije

$$A_1(A_2(x,y),A_3(z,u)) = A_4(A_5(x,z),A_6(y,u)),$$

sve su izotopne istoj Abelovoj grupi.

Već 1935. R.Moufang [40] uvela je kvazigrupu sa jediničnim elementom koja zadovoljava zakon $(xy)(zx)=(x(yz))x$. Ova kvazigrupa, vrlo bliska grupi, kasnije je nazvana lupa Moufang, i vrlo detaljno je ispitivana. Osnovni rezultati izloženi su u monografiji R.H.Bruck-a [20].

Polazeći od zakona R.Moufang, 1971. V.D.Bjelousov u [15] ispituje kvaigrupe A_i vezane zakonom

$$A_1(A_2(x,y),A_3(z,x)) = A_4(A_5(x,A_6(y,z)),x).$$

Slično su ispitivane kvazigrupe vezane opštim zakonom distributivnosti, opštim zakonom tranzitivnosti, opštim zakonom Stein-a, itd |12|. A.Sade ispituje kvazigrupu koja zadovoljava neki uravnoteženi zakon (identité équilibrée)[47].

Značajan prilog ovome dao je V.D.Bjelousov u [14], gde se ispituje familija kvazigrupa vezanih opštim uravnoteženim zakonom.

Treba takodje pomenuti značajne radove koji se odnose na univerzalne algebre sa jednom n-arnom operacijom. Prvi rad iz ove oblasti je rad W.Dörnte-a [24], iz 1928. god. u kome se uvodi n-arna grupa. Teoriji n-arnih semigrupa i n-arnih grupa dali su priloge i G.Čupona i B.Trpenovski [21,22,23,54,55].

Teorija n-arnih kvazigrupa razvija se od 1964. god. radovima M.Hosszú i F.Radó [29], V.D.Bjelousov |11|, M.Hosszú |28|, V.D.Bjelousov i M.D.Sandik |13|.

V.D.Bjelousov je u |11| ispitivao n-arne kvazigrupe vezane vekim uravnoteženim zakonima.

Priloge teoriji n-arnih kvazigrupa dali su i S.Milić |38|, i J.Ušan |57|. S.Milić uvodi nove algebarske strukture, tzv. GD-grupoide, pomoću kojih se znatno pojednostavnjuje ispitivanje n-arnih kvazigrupa vezanih nekim zakonima.

Jedan od osnovnih problema u teoriji n-arnih kvazigrupa je pitanje predstavljanja n-kvazigrupa, vezanih nekim zakonom, pomoću kvazigrupa manje dužine. Takve vrste je, naprimer, poznata teorema Hosszú-Gluskina: Svaka n-arna grupa (S,A) može se prestaviti pomoću jedne binarne grupe (S,∘) i njenih automorfizama tj.

$$A(x_1^n) = x_1 \circ \phi x_2 \circ \ldots \circ \phi^{n-1} x_n \circ a ,$$

gde je $\phi^{n-1}x = a \circ x \circ a^{-1}$, $\phi a = a$, ϕ je automorfizam grupe (S,∘). Ovu teoremu je M.Hosszú dokazao 1963. u [28], a nezavisno od njega L.M.Gluskin 1964. u[26].

U ovom radu razmatraju se neki problemi teorije kvazigrupa i GD-grupoida.

Rad se sastoji iz četiri dela.

U prvom delu navedeni su poznati rezultati na koje se pozivamo u ostalim delovima. Uveden je n-arni GD-grupoid, odnosno G-kvazigrupa. Dokazano je nekoliko lema koje se odnose na homotopiju n-arnih GD-grupoida. Ove leme predstavljaju uopštenja nekih tvrdjenja za n-arne kvazigrupe iz [58] J.J.Vedelja.

U drugom delu ispituju se binarne kvazigrupe vezane proizvoljnim uravnoteženim zakonom $w_1=w_2$. U [14] V.D.Bjelousov je dokazao da sledeća teorema A.Sade-a [47] važi ako i samo ako se odnosi na zakon I vrste:

Skup kvazigrupa vezanih zakonom $w_1=w_2$ razlaže se na izvestan broj klasa $K_\sim^i$, tako da su sve operacije jedne klase $K_\sim^i$ izotopne istoj operaciji $\circ_i$, i operacije $\circ_i$ vezane su zakonom koji se dobija iz $w_1=w_2$ zamenom svih operacija iz $K_\sim^i$ sa $\circ_i$.

Uvodjenjem relacije ekvivalencije $\underset{\sim}{\sim}$, koja je finija od relacije $\sim$, dokazuje se analogna teorema (teorema 2.2.3) za makakve uravnotežene zakone. U slučaju zakona I vrste, ova teorema se svodi na citiranu teoremu A.Sade-a.

Zatim se ispituju binarni GD-grupoidi vezani proizvoljnim uravnoteženim zakonom i nalaze se uslovi pod kojima se predhodni rezultati mogu proširiti na GD-grupoide (teorema 2.3.3).

U trećem delu ispituje se familija 2k ($k \geq 2$) n-arnih kvazigrupa vezanih jednom posledicom Dickerovog zakona

(3) $$A_1(A_2(x_1^n), y_2^n) = B_1(x_1, B_2(x_2, y_2^n), \ldots, B_2(x_n, y_2^n)).$$

n-arne kvazigrupe vezane zakonom (3) ispitivali su V.D. Bjelousov i M.D.Sandik u [13].

Osim toga, razmatra se zakon

(4) $$A_1(A_2(x_1^n), y_2^n) = B_1(x_1, B_2(x_{i+1}, y_2^n), \ldots, B_2(x_n, y_2^n)),$$

$$1 \leq i \leq n-1$$

koji povezuje opšti Dickerov zakon (3) i opšti (1,n)-asocijativni zakon. Teoremom 3.3.1 povezani su rezultati V.D.Bjelousova [13] za opšti Dickerov zakon (i=1), i B.Trpenovskog [54] za opšti (1,n)-asocijativni zakon (i=n-1).

U četvrtom delu razmatra se vrlo široka klasa uravnoteženih zakona na kvazigrupama raznih dužina.

Ispituju se kvazigrupe A, B, A_i, B_i vezane zakonom

(5) $$A(A_1(x_1, \ldots, x_\alpha), \ldots, A_m(x_\beta, \ldots, x_p)) = B(B_1(y_1, \ldots, y_\gamma), \ldots, B_n(y_\delta, \ldots, y_p))$$

gde je $y_1, \ldots, y_p$ izvesna permutacija niza $x_1, \ldots, x_p$.

Daje se postupak kojim se od zakona (5) na kvazigrupama prelazi na zakon na GD-grupoidima, podesan za ispitivanje. Dobijeni zakon nazvan je uopšteni r-entropijski zakon. Ovde je centralna teorema 4.3.3, kojom se dokazuje da se GD-grupoidi, vezani uopštenim r-entropijskim zakonom, mogu izraziti pomoću izvesnih binarnih grupa $\circ_i$, i jedne lupe π, dužine r. Primenom dobijenih rezultata za GD-grupoide, opisuju se kvazigrupe vezane zakonom (5). Ove kvazigrupe izražavaju se pomoću grupa $\circ_i$, lupe π, i izvesnog broja kvazigrupa manje dužine.

Rezultati dobijeni ovim postupkom obuhvataju više poznatih rezultata o kvazigrupama vezanim raznim uravnoteženim zakonima. To su (i,j)-asocijativni [56], (i,j)-modularni [38], entropijski i slični zakoni.

Na kraju su data dva primera koji ilustruju navedeni postupak.

Većina reultata iz rada prikazani su u okviru Odseka za algebru, matematičku logiku i teoriju brojeva, kao i u okviru Odseka za matematiku Matematičkog instituta SRS u Beogradu.

I DEO

1. NEKI POZNATI REZULTATI IZ TEORIJE KVAZIGRUPA I GD-GRUPOIDA

Neka su $S_1,\dots,S_n,S$ $(n\geqslant 1)$, neprazni skupovi i A preslikavanje skupa $S_1\times\dots\times S_n$ u skup S, tj. neka za svaki $(x_1,\dots,x_n)\in S_1\times\dots\times S_n$ postoji $A(x_1,\dots,x_n)\in S$. Tada je niz $(S_1,\dots,S_n,S,A)$ n-arni generalisani grupoid, ili kraće, G-grupoid. Pojam G-grupoida uveo je S.Milić u [38]. G-grupoid često označavamo samo sa A.

Uvodimo neke uobičajene skraćenice. Niz $x_m,\dots,x_n$ označavamo x_m^n. Ako je $m>n$, x_m^n je prazan niz. Niz $\underbrace{x,\dots\dots,x}_{n\text{ puta}}$ označavamo $\overset{n}{x}$, a $\overset{0}{x}$ je oznaka za prazan niz.

Neka su $a_k\in S_k$, $k=1,\dots,n$ fiksirani elementi skupova S_k. Uvodimo preslikavanje $L_i^A(a_k):S_i\to S$ sledećom definicijom:

Za $x\in S_i$,
$$L_i^A(a_k)x \overset{\text{def}}{=\!=} A(a_1^{i-1},x,a_{i+1}^n).$$

Ako su, za svaki $i=1,\dots,n$, i za proizvoljan izbor elemenata $a_k\in S_k$, preslikavanja $L_i^A(a_k)$ sirjektivna, A je n-arni G-grupoid sa deljenjem, ili kraće, GD-grupoid.

Ako su, za svaki $i=1,\dots,n$ i za proizvoljan izbor elemenata $a_k\in S_k$, preslikavanja $L_i^A(a_k)$ bijektivna, A je n-arna G-kvazigrupa.

Drugim rečima, A je GD-grupoid ako svaka jednačina

(1) $$A(a_1^{i-1},x,a_{i+1}^n) = y, \quad 1\leqslant i\leqslant n\ ,\ a_k\in S_k,$$

ima bar jedno rešenje po x.

A je G-kvazigrupa, ako svaka jednačina (1) ima tačno jedno rešenje po x.

Ako je A n-arna G-kvazigrupa, tada je card S_i= card S, i=1,...,n, što neposredno sledi iz uslova da su $L_i^A(a_k)$ bijekcije.

Neka je $S_1=\dots=S_n=S$. Tada je preslikavanje $A:S^n\to S$ n-arna operacija skupa S, i uredjena dvojka (S,A) je n-arni grupoid. Grupoid takodje često označavamo samo sa A.

Neka su a_k, k=1,...,n-1, fiksirani elementi skupa S, i neka je $L_i^A(\tilde{a}):S\to S$ preslikavanje definisano sa

$$L_i^A(\tilde{a})x \overset{def}{=\!=} A(a_1^{i-1},x,a_i^{n-1}).$$

Ako su, za svaki $i\in\{1,\dots,n\}$ i proizvoljan izbor elemenata $a_k\in S$ preslikavanja $L_i^A(\tilde{a})$ sirjektivna, A je n-arni grupoid sa deljenjem, ili kraće, D-grupoid.

Ako su, za svaki $i\in\{1,\dots,n\}$ i proizvoljan izbor elemenata $a_k\in S$ $L_i^A(\tilde{a})$ bijekcije, A je n-arna kvazigrupa. U tom slučaju kažemo da je $L_i^A(\tilde{a})$ i-ta translacija skupa S pomoću kvazigrupe A.

Neka je A n-arni G-grupoid, $S_\alpha,\dots,S_\beta$ podniz niza $S_1,\dots,S_n$, dužine m, $1\leq m\leq n$. Uvodimo preslikavanje

$$L^A_{\alpha\dots\beta}(a_k):S_\alpha\times\dots\times S_\beta\to S$$

definisano sa

$$L^A_{\alpha\dots\beta}(x_\alpha,\dots,x_\beta) \overset{def}{=\!=} A(s_1^n),$$

gde je $s_i=x_i$, za $i\in\{\alpha,\dots,\beta\}$, $s_i=a_i\in S_i$, za $i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{\alpha,\dots,\beta\}$.

Za G-grupoid $(S_\alpha,\dots,S_\beta,S,A)$ kažemo da je izveden iz G-grupoida (S_1^n,S,A).

Ako je A GD-grupoid, odnosno G-kvazigrupa, tada je i $L^A_{\alpha\dots\beta}(a_k)$ GD-grupoid, odnosno G-kvazigrupa. Obrnuto očigledno ne važi.

Uvodimo pojam homotopije i izotopije.

Definicija. n-arni G-grupoid (S_1^n, S, A) homotopno se preslikava na n-arni G-grupoid (T_1^n, T, B) ako postoji niz $H=(\alpha_1^n, \alpha)$ sirjektivnih preslikavanja $\alpha_i : S_i \to T_i$, $\alpha : S \to T$ tako da je ispunjeno, za svaki $(x_1, \ldots, x_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n$,

$$\alpha A(x_1, \ldots, x_n) = B(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n).$$

Tada pišemo i $A^H = B$.

Niz H zovemo homotopija. Ako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha$ bijektivna preslikavanja, H je izotopija.

Lako se dokazuje da je izotopija relacija ekvivalenvije medju n-arnim G-grupoidima.

Lema 1. *Homotopna slika n-arnog GD-grupoida je n-arni GD-grupoid.*

Dokaz. Neka je (T_1^n, T, B) homotopna slika GD-grupoida (S_1^n, S, A) pri homotopiji $H=(\alpha_1^n, \alpha)$. Dokazujemo da je ma koje preslikavanje $L_i^B(b_k) : T_i \to T$ sirjektivno. Kako su preslikavanja α_k sirjektivna, postoje $a_k \in S_k$ takvi da je $\alpha_k a_k = b_k$. Iz definicije homotopije sledi da dijagram

$$\begin{array}{ccc} S_i & \xrightarrow{L_i^A(a_k)} & S \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \alpha \\ T_i & \xrightarrow[L_i^B(b_k)]{} & T \end{array}$$

komutira, tj.

$$\alpha L_i^A(a_k) = L_i^B(b_k)\alpha_i.$$

Neka je $y \in T$. Tada postoji $x \in S$, takav da je $\alpha x = y$, i postoji $x_i \varepsilon S_i$, takav da je $L_i^A(a_k)x_i = x$. Odavde je $y = \alpha L_i^A(a_k)x_i = L_i^B(b_k)\alpha_i x_i$, tj. postoji $y_i = \alpha_i x_i \varepsilon T_i$ takav da je $L_i^B(b_k)y_i = y$.

Posledica. Ako je $H=(\alpha_1^n,\alpha)$ homotopija G-kvazigrupe (S_1^n,S,A) na G-grupoid (T_1^n,T,B) i ako je α bijekcija, tada je H izotopija i (T_1^n,T,B) je G-kvazigrupa.

Neka je (S,A) n-arni grupoid, i $n>1$. Ako postoji niz $e_1,\dots,e_{n-1}\varepsilon S$, takav da je za neki $i\varepsilon\{1,\dots,n\}$ $L_i^A(\tilde{e})$ identično preslikavanje, kažemo da je niz (e_1^{n-1}) i-jedinični slog. Ako je $L_i^A(\tilde{e})$ identično preslikavanje za svaki $i\varepsilon\{1,\dots,n\}$, tada je niz (e_1^{n-1}) jednnični slog.

Neka je $e_1=\dots=e_{n-1}=e$. Ako je $\overset{n}{e}$ i-jedinični slog, e je i-ti jedinični element; ako je $\overset{n}{e}$ jedinični slog, e je jedinični element.

n-arna kvazigrupa, koja ima bar jedan jedinični element, zove se n-arna lupa.

Neka je $I:S\to S$ identično preslikavanje i $H(\alpha_1^n,I)$ izotopija G-grupoida (S_1^n,S,A) na G-grupoid (T_1^n,S,B). Tada sledeći dijagram komutira, za svaki i, i svaki izbor elemenata $a_k \varepsilon S_k$:

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "L_i^A(a_k)"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & S \\ T_i \arrow[ur, "L_i^B(\alpha_k a_k)"'] & \end{tikzcd}$$

U ovom slučaju kažemo da je H glavna izotopija i G-grupoidi A i B su glavno izotopni. Glavna izotopija je takodje relacija ekvivalencije medju G-grupoidima.

Lemma 1.2. *Ako je (S_1^n, S, A) n-arna G-kvazigrupa, postoji bar jedna lupa (S,B) njoj glavno izotopna.*

Dokaz. Neka su $a_k \varepsilon S_k$, $k=1,\ldots,n$ fiksirani elementi skupova S_k. Kako je A G-kvazigrupa, preslikavanja $L_i^A(a_k)$ su bijekcije. Neka je (S,B) n-arni grupoid definisan sa

(3) $\quad A(x_1,\ldots,x_n)=B(L_1^A(a_k)x_1,\ldots,L_n^A(a_k)x_n).$

(S,B) je glavni izotop od (S_1^n,S,A), dakle je prema posledici leme 1, n-arna kvazigrupa. Primetimo da je $L_j^A(a_k)a_j=A(a_1^n)$, $j=1,\ldots,n$. Iz (3) imamo, za svaki $i\varepsilon\{1,\ldots,n\}$:

(4) $\quad L_i^A(a_k)x_i=L_i^B(\widetilde{A(a_1^n)})L_i^A(a_k)x_i.$

Kako je $L_i^A(a_k)$ bijektivno preslikavanje, odavde zaključujemo da je $L_i^B(\widetilde{A(a_1^n)})$ identično preslikavanje, za svako $i=1,\ldots,n$ dakle je $e \stackrel{\text{def}}{=} A(a_1^n)$ jedinični element kvazigrupe (S,B).

Za (S,B) kažemo da je L-izotop G-kvazigrupe.

Za binarne kvazigrupe je već A.A.Albert 1943. god. [4] dokazao da je svaka kvazigrupa izotopna (i to glavno izotopna) nekoj lupi. Ovaj rezultat su V.D.Bjelousov i M.D.Sandik u [13] 1966.god. uopštili na n-arni slučaju. Preciznije, dokazali su da je L-izotop n-arne kvazigrupe n-arna lupa.

Lemma 1.3. *Neka je (S_1^n,S,A) GD-grupoid, i neka je (S,B) kvazigrupa takva da važi (3). Tada je i (S,B) lupa.*

Dokaz. Dokazujemo da je preslikavanje $L_i^B(\widetilde{A(a_1^n)})$ iz (4) identično. Neka je $y\varepsilon S$. Kako je $L_i^A(a_k)$ sirjektivno preslikavanje, postoji $x_i\varepsilon S_i$, takav da je $L_i^A(a_k)x_i=y$.

Tada je, zbog (4), $y=L_i^B(\widetilde{A(a_1^n)})L_i^A(a_k)x_i=L_i^B(A(a_1^n))y$, dakle je $L_i^B(A(a_1^n)):S\to S$ identično preslikavanje, za svaki $i=1,\dots,n$ tj. (S,B) je lupa, sa jediničnim elementom $e=A(a_1^n)$.

Neka je (S_1^{n+1},A) n-arna G-kvazigrupa. Označimo sa $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n\alpha_{n+1})$ neku permutaciju niza indeksa $(1,\dots,n,n+1)$ i uvedimo preslikavanja

$$A^\alpha: S_{\alpha_1}\mathbf{x}\dots\mathbf{x}S_{\alpha_n}\longrightarrow S_{\alpha_{n+1}},$$

definisana pomoću

$$A^\alpha(x_{\alpha_1}^{\alpha_n})=x_{\alpha_{n+1}} \quad \underline{\underline{\text{def}}} \quad A(x_1^n)=x_{n+1}.$$

Kako je (S_1^{n+1},A) G-kvazigrupa, preslikvanja A^α su dobro definisana, i $(S_{\alpha_1}^{\alpha_{n+1}},A)$ je takodje kvazigrupa za proizvoljnu permutaciju α.

Broj preslikavanja A^α je $(n+1)!$, dakle svaka n-arna G-kvazigrupa definiše još $(n+1)!-1$ n-arnih G-kvazigrupa, za koje kažemo da su konjugovane G-kvazigrupi (S_1^{n+1},A).

Naziv konjugovane operacije potiče od S.K.Stein-a, [52], gde se odnosi na binarni slučaj kvazigrupa. Ako je (S,A) binarna kvazigrupa, postoji pet konjigovanih kvazigrupa, A.Sade ih zove parastrofičke kvazigrupe [50].

Za n-arni grupoid kažemo da je (i,j)-asocijativan [56], ako je ispunjeno

$$A(x_1^{i-1},A(x_i^{n+i-1}),x_{n+i}^{2n-1})=A(x_1^{j-1},A(x_j^{n+j-1}),x_{n+j}^{2n-1}),$$

za svako $x_1,\dots,x_{2n-1}\in S$.

Ako je (S,A) (1,j)-asocijativan n-arni grupoid za svako j, $1<j\leqslant n$, kažemo da je (S,A) n-arna semigrupa. Tada je očigledno, n-arni grupoid (S,A) (i,j)-asocijativan za svaki i,j, $1\leqslant i<j\leqslant n$.

n-arna kvazigrupa koja je i n-arna semigrupa zove se n-arna grupa. n-arna grupa ne mora imati jedinični element, a može ih imati i više. U [46] je dokazano da svaka n-arna grupa ima 1-jedinični i n-jedinični slog, pri čemu je i svaka njegova ciklična permutacija takodje 1- i n- jedinični slog. Ovaj rezultat je uopštenje rezultata o jedinici u binarnoj grupi.

U teoriji binarnih grupa poznat je Albertov stav [4] koji glasi: ako je lupa (S,A) izotopna nekoj grupi $(S,\circ)$, tada je (S,A) izomorfna sa $(S,\circ)$. Ovaj rezultat su V.D.Bjelousov i M.D.Sandik [13] uopštili na n-arni slučaj: Ako je n-arna lupa (S,A) izotopna n-arnoj grupi (S,B) sa jedinicom, tada je (S,A) n-arna grupa sa jedinicom, izomorfna sa (S,B). Odavde sledi da se izotopija u teoriji grupa svodi na izomorfizam.

II DEO

2. URAVNOTEŽENI ZAKONI NA BINARNIM KVAZIGRUPAMA I NA GD-GRUPOIDIMA

2.1. Uvod. U ovom delu ispitujemo uravnotežene zakone čija su sva operacijska slova dužine 2, i medjusobno različita.

Uvodimo oznake i definicije koje ćemo koristiti. Ako je w term, skup promenljivih koje ulaze u term w označavamo $[w]$, a skup operacija koje ulaze u w označavamo $\Phi(w)$.

Term w je pravilan ako svaka promenjiva iz $[w]$ ulazi u w tačno jedanput. Zakon $w_1 = w_2$ je uravnotežen, ako su w_1 i w_2 pravilni termi, i ako $[w_1] = [w_2]$. Uravnoteženi zakon je prve vrste, ako promenljive ulaze u terme w_1 i w_2 istim redom, inače je druge vrste.

U tački 2.2. opisujemo familiju binarnih kvazigrupnih operacija, definisanih na istom skupu, vezanih proizvoljnim uravnoteženim zakonom.

U tački 2.3. rešavamo analogan problem za GD-grupoide.

2.2. Uravnoteženi zakoni na kvazigrupama.

Neka je $w_1=w_2$ uravnoteženi zakon čija su sva operacijska slova dužine dva, i medjusobom različita. Označimo sa W skup $[w_1] = [w_2] = \{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$. Neka je $\Phi = \{A_i, B_i\}$, $i=1,\ldots,n$, familija binarnih kvazigrupnih operacija definisanih na nepraznom skupu M koje zadovoljavaju zakon $w_1=w_2$, tj. neka je $\Phi(w_1) = \{A_i\}$, $\Phi(w_2) = \{B_i\}$, $i=1,\ldots,n$. Označimo ove skupove redom sa Φ_1 i Φ_2.

Skup $\Phi_1 \vee W$ parcijalno je uredjen sledećom relacijom: Za s, t $\in \Phi_1 \vee W$, $s \leqslant t$ ako i samo ako je s prvo slovo podterma od w_1 koji sadrži t. Slično je uredjen i skup $\Phi_2 \vee W$.

Naprimer za term $A(B(x,y),z)$ je $A\leqslant B$, $A\leqslant z$, $A\leqslant x$, $B\leqslant x$, itd.

Za svaki neprazan podskup $S\subset\Phi_i\cup W$ postoji $\inf_{w_i}S\subset\Phi_i\cup W$, $i=1,2$.

Ako je za neke $x,y\in W$ $\inf_{w_1}(x,y)=A_i$, $\inf_{w_2}(x,y)=B_j$, kažemo da su operacije A_i i B_j povezane, u oznaci $A_i \overset{(x,y)}{\longleftrightarrow} B_j$, ili kraće, $A_i\leftrightarrow B_j$.

Neka je $\sim$ sledeća relacija ekvivalencije skupa Φ :

Za A, $B\in\Phi$ je $A\sim B$ ako i samo ako postoje $C_1,\dots,C_n\in\Phi$ tako da je

(1) $A=C_1$, $C_1\leftrightarrow C_2,\dots,C_{n-1}\leftrightarrow C_n$, $C_n=B$.

Za svaki $A\in\Phi$ je $A\sim A$.

Relaciju $\sim$ uveo je V.D. Bjelousov u [14].

Neka su $a_1,\dots,a_{n+1}\in M$ fiksirani elementi skupa M. Ako je v podterm od w_1 ili w_2, i $P\subset[v]$, obeležimo sa $v\Big|_{a_i}^{x_i\in P}$ term dobijen iz v zamenom svih $x_i\in P$ redom sa $a_i\in M$. Neka je $A(u,v)$ podterm od w(w je w_1 ili w_2). Uvodimo preslikavanja $L_1^A:M\to M$, definisana sa $L_1^A u \overset{def}{=\!=} A(u,v)\Big|_{a_i}^{x_i\in[v]}$, odnosno $L_2^A v \overset{def}{=\!=} A(u,v)\Big|_{a_i}^{x_i\in[u]}$.

Naprimer, neka je $w = A(x_1, B(C(x_2,x_3),x_4))$. Tada je recimo, $L_1^A u = A(u,B(C(a_2,a_3),a_4))$, $L_1^B u = B(u,a_4)$, $L_2^B v = B(C(a_2,a_3),v)$, itd. Ova preslikavanja zavise od izbora elemenata $a_i\in M$ i od oblika terma w. Kako su operacije iz Φ kvazigrupe, uvedena preslikavanja su bijekcije.

Sem toga, neka je $\sigma_A A(u,v)=w\Big|_{a_i}^{x_i\in W\setminus[A(u,v)]}$. σ_A je proizvod nekih preslikavanja L_i^P, $P\in\Phi$, $i=1,2$, dakle je takodje bijekcija. U gornjem primeru je, recimo, $\sigma_C C(u,v)=A(a_1,B(C(u,v),a_4))=L_2^A L_1^B C(u,v)$ Neka su A, $B\in\Phi$, i neka je $A \overset{(x,y)}{\longleftrightarrow} B$. Ako u $w_1=w_2$ zamenimo sve promenljive x_i, sem x i y, redom sa $a_i\in M$, imamo

$$\sigma_A A(\alpha x,\beta y)=\sigma_B B^O(\gamma x,\delta y),$$

gde su $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ proizvodi nekih translacija skupa M,

B° je B ili B^* ($B^*(x,y) \overset{\text{def}}{=\!=\!=} B(y,x)$).

Dakle A i B su izotopne, ili obrnuto izotopne, prema tome da li promenljive x i y ulaze u terme w_1 i w_2 istim redom, ili ulaze u w_2 obrnutim redom od onoga u w_1. U drugom slučaju kažemo da su operacije A i B obrnuto povezane, kraće, kažemo da je $A \leftrightarrow B$ inverzija

Neka je $A \varepsilon \Phi$ proizvoljna kvazigrupa. Uvodimo operaciju skupa M:

(2) $$\sigma_A A(u,v) = \sigma_A L_1^A u \circ \sigma_A L_2^A v$$

Kako su L_1^A, L_2^A i σ_A bijekcije, $\circ$ je kvazigrupa, izotopna sa A. Ako je w term u koji ulazi slovo A, e $\overset{\text{def}}{=\!=\!=}$ $w\Big|_{a_i}^{x_i \varepsilon W}$ je jedinični element operacije $\circ$, dakle je $\circ$ lupa.

Dokazujemo nekoliko pomoćnih tvrdjenja.

<u>Lema 2.2.1.</u> *Neka su* $A, B \varepsilon \Phi$ *takve da je* $A \sim B$. *Ako je*

$$\sigma_A A(u,v) = \sigma_A L_1^A u \circ \sigma_A L_2^A v \ ,$$

tada je i

$$\sigma_B B^{\circ}(u,v) = \sigma_B L_1^{B^{\circ}} u \circ \sigma_B L_2^{B^{\circ}} v.$$

<u>Dokaz.</u> Dovoljno je dokazati tvrdjenje za slučaj kada su operacije A i B povezane, tj. kada je $A \leftrightarrow B$. Tada je

(3) $$\sigma_A A(\alpha x_i, \beta x_j) = \sigma_B B^{\circ}(\gamma x_i, \delta x_j).$$

Zamenom promenljive x_i sa a_i, odnosno promenljive x_j sa a_j, imamo:

(4) $$\sigma_A L_1^A \alpha x_i = \sigma_B L_1^{B^{\circ}} \gamma x_i,$$
$$\sigma_A L_2^A \beta x_j = \sigma_B L_2^{B^{\circ}} \delta x_j.$$

Iz (3) i (4) imamo

$$\sigma_B B^o(\gamma x_i,\delta x_j) = \sigma_B L_1^{B^o}\gamma x_i \circ \sigma_B L_2^{B^o}\delta x_j.$$

Uvodimo nove promenljive $u=\gamma x_i$, i $v=\delta x_j$, i imamo

$$\sigma_B B^o(u,v) = \sigma_B L_1^{B^o} u\circ\sigma_B L_2^{B^o} v.$$

Neka je $\approx$ sledeća relacija ekvivalencije skupa Φ:

Za $A,B\varepsilon\Phi$ je $A\approx B$ ako i samo ako je $A\sim B$ i postoji bar jedan niz (1), koji definiše $A\sim B$, sa parnim brojem inverzija.

Dakle, kvazigrupe iz iste klase $K_\approx$ su izotopne. Relacija $\approx$ sadržana je u relaciji $\sim$, preciznije, svaka klasa $K_\sim$ je unija najviše dve klase $K_\approx^1$ i $K_\approx^2$, i ako je $A\varepsilon K_\approx^1$, $B\varepsilon K_\approx^2$, A i B su obrnuto izotopne.

Neka je $w_1=w_2$ uravnoteženi zakon čije su sve operacije u istoj klasi $K_\sim$, tj. za koji se $\Phi=K_\sim$. Tada razlikujemo dva slučaja.

(1^o) Bar za jednu operaciju $A\varepsilon K_\sim$ postoji niz (1), koji definiše $A\sim A$, sa neparnim brojem inverzija.

(2^o) Za svaku operaciju $A\varepsilon K_\sim$, svaki niz (1) koji definiše $A\sim A$, ima paran broj inverzija.

U slučaju (1^o), $K_\sim=K_\approx$. Zaista, ako neki niz $A\sim B$ sadrži neparan broj inverzija, niz $A\sim A\sim B$ ima paran broj inverzija, dakle je $A\approx B$. Osim toga, postoji i niz $B\sim B$ sa neparnim brojem inverzija, takav je naprimer niz $B\sim A\sim A\sim B$. Dakle za svaku operaciju $B\varepsilon K_\sim$ postoji niz (1) koji definiše $B\sim B$ sa neparnim brojem inverzija.

U slučaju (2^o), imamo dve mogućnosti:

(i) $\qquad K_\sim=K_\approx$,

(ii) $\qquad K_\sim=K_\approx^1\cup K_\approx^2$.

Zakon je prve vrste ako i samo ako je (i). Zaista, ako u $w_1=w_2$ postoje promenljive x i y takve da je $A\leftrightarrow B$ inverzija, tada niz $A\leftrightarrow B\leftrightarrow A$ ima neparan broj inverzija, pa nije slučaj (2^{o}). Obrnuto je očigledno.

Neka je (ii). Zamenimo u zakonu $w_1=w_2$ sve terme $A(u,v)$ gde A pripada jednoj od klasa, recimo $K^2_{\sim}$, termima $A^*(v,u)$. Dobijeni zakon je prve vrste.

Dakle, umesto zakona za koje je $\Phi=K_{\sim}$, dovoljno je ispitati zakone za koje je $\Phi=K_{\approx}$.

Primer 1. Zakon $A(B(y,x),z) = C(x,D(y,z))$ je druge vrste, $K^1_{\approx}=\{A,C,D\}$, $K^2_{\approx}=\{B\}$, $K^1_{\approx}\cup K^2_{\approx} = K_{\sim}$. Zamenom terma $B(y,x)$ termom $B^*(x,y)$ dobijamo zakon prve vrste $A(B^*(x,y),z)=C(x,D(y,z))$.

Primer 2. Zakon $A(B(x,y),C(z,u))=D(E(x,z),F(y,u))$ je druge vrste, $K_{\sim}=K_{\approx}=\{A,B,C,D,E,F\}$.

Neka je $A_1=\inf_{w_1}\Phi_1$, $B_1=\inf_{w_2}\Phi_2$

Lema 2.2.2. *U svakom uravnoteženom zakonu postoje promenljive $x,y\in W$ takve da je $A_1\leftrightarrow B_1$.*

Dokaz. Neka je $A_1\overset{(x,y)}{\longleftrightarrow}B_i$. Ako je i=1, lema je dokazana. Ako je $i\neq 1$, postoji $t\in W$ takva da je $B_1=\inf_{w_2}(t,B_i)$. pa je $B_1\overset{(t,y)}{\longleftrightarrow}A_1$ ili $B_1\overset{(t,x)}{\longleftrightarrow}A_1$ prema tome da li je $A_1=\inf_{w_1}(t,y)$ ili je $A_1=\inf_{w_1}(t,x)$.

Lema 2.2.3. *Neka je $w_1=w_2$ uravnoteženi zakon za koji je $\Phi=K_{\sim}$. Ako je [illegible] dva, postoje $A_i\in\Phi_1$ i $B_j\in\Phi_2$ i promenljive $x,y,z\in W$ takve da se zamenom svih promenljivih x_i, sem x,y,z elementima $a_i\in M$ dobija jednakost*

(5) $A_1^{\circ}(\alpha_1 A_i^{\circ}(\alpha_2 x,\alpha_3 y),\alpha_4 z) = B_1^{\circ}(\beta_1 x,\beta_2 B_j^{\circ}(\beta_3 y,\beta_4 z))$,

gde su α_k, β_k, $k=1,2,3,4$, proizvodi nekih translacija skupa M.

Dokaz. Neka je $w_1=A_1(u_1,v_1)$, $w_2=B_1^{\circ}(u_2,v_2)$. Po lemi 2.2.2, postoje promenljive $x,y\varepsilon W$ takve da je $A_1 \leftrightarrow B_1$. Neka je $x\varepsilon [u_1]\cap[u_2]$ tada je $y\varepsilon[v_1]\cap[v_2]$. Kako je $\Phi = K_{\sim}$, imamo $[u_1] \neq [u_2]$.

Ako je $[u_1]\setminus[u_2] \neq \emptyset$, postoji $z\in[u_1]\setminus[u_2]$, dakle je $z\varepsilon[v_2]$ Neka je $A_k = \inf_{w_1}(x,z)$, $B_j = \inf_{w_2}(z,y)$. Zamenom svih promenljivih x_i, sem x,y,z, elementima $a_i\varepsilon M$, dobijamo:

$$A_1(\alpha_1 A_k^{\circ}(\alpha_2 x,\alpha_3 z),\alpha_4 y) = B_1^{\circ}(\beta_1 x,\beta_2 B_j^{\circ}(\beta_3 z,\beta_4 y))$$

Slično, ako je $[u_2]\setminus[u_1] \neq \emptyset$ imamo

$$A_1(\alpha_1 x,\alpha_2 A_k^{\circ}(\alpha_3 z,\alpha_4 y)) = B_1^{\circ}(\beta_1 B_j^{\circ}(\beta_2 x,\beta_3 z),\beta_4 y),$$

dakle važi (3).

Teorema 2.2.1. *Neka je $w_1 = w_2$ uravnoteženi zakon za koji je $\Phi=K_{\approx}$. Tada su sve kvazigrupe iz Φ izotopne jednoj lupi $\circ$, i pri tome lupa $\circ$ zadovoljava zakon $w_1(\circ) = w_2(\circ)$ koji se dobija iz $w_1=w_2$ zamenom svih operacija sa $\circ$. Ako Φ sadrži više od dve operacije, $\circ$ je grupa.*

Dokaz. Neka je $A\varepsilon\Phi$, i $\circ$ lupa definisana pomoću (2). Kako je $\Phi=K_{\approx}$, zbog leme 2.2.1, za svaki $B\varepsilon\Phi$ je

$$\sigma_B B(u,v) = \sigma_B L_1^B u \circ \sigma_B L_2^B v.$$

Dakle sve operacije iz K izotopne su operaciji $\circ$, i izotopija ima oblik (2).

Neka je $x_k \in W$ proizvoljna promenljiva. Zamenom svih promenljivih x_i, sem x_k, elementima $a_i \in M$, dobijamo jednakosti

$$\tau_k x_k = \rho_k x_k, \quad k=1,\dots,n+1.$$

Označimo sa $\overline{w}_1$ term dobijen iz w_1 zamenom operacija iz Φ sa $\circ$, i promenljivih x_k sa $\tau_k x_k$. Tada je $w_1=\overline{w}_1$.

Zaista, ako je $w_1=A(x_1,x_2)$, imamo $A(x_1,x_2)=L_1^A x_1 \circ L_2^A x_2 = \tau_1 x_1 \circ \tau_2 x_2$ $=\overline{w}_1$. Neka w_1 ima $n+1$ promenljivih. U w_1 postoji bar jedan podterm oblika $A(x_i,x_j)$, gde su x_i i x_j promenljive. Zamenimo u w_1 taj podterm novom promenljivom x_α. Predpostavimo da je za ovako dobijeni term w_1' ispunjen uslov $w_1'=\overline{w}_1'$. S druge strane je $\tau_\alpha x_\alpha = \sigma_A A(x_i,x_j) = \sigma_A L_1^A x_i \circ \sigma_A L_2^A x_j = \tau_i x_i \circ \tau_j x_j$, odakle sledi $w_1=\overline{w}_1$

Kako je $\tau_k=\rho_k$, $k=1,\dots,n+1$, možemo uvesti nove promenljive $u_k = \tau_k x_k = \rho_k x_k$, odakle sledi $w_1(\circ)=w_2(\circ)$.

Kako je $\Phi=K_a$, razlikujemo dva slučaja: ili je zakon prve vrste, ili za svaki $A\in\Phi$ postoji niz koji definiše $A\sim A$, sa neparnim brojem inverzija. U poslednjem slučaju, lupa $\circ$ je komutativna. Zaista, tada za $A_1\in\Phi$ važi

$$A_1(u,v) = L_1^{A_1} u \circ L_2^{A_1} v,$$

$$A_1(u,v) = A_1^*(v,u) = L_1^{A_1^*} v \circ L_2^{A_1^*} u = L_2^{A_1} v \circ L_1^{A_1} u,$$

odakle je

$$x\circ y = y\circ x.$$

Neka Φ ima više od dve operacije. Ako u $w_1(\circ)=w_2(\circ)$ zamenimo sve promenljive x_i, sem promenljivih x,y,z koje učestvuju u (3) leme 2.2.3 jediničnim elementom e lupe $\circ$, imamo

$$(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z).$$

Posledice teoreme 2.2.1 su, naprimer, sledeće poznate teoreme [12]:

1. Kvazigrupe vezane zakonom $A(B(x,y),z)=C(x,D(y,z))$ izotopne su istoj grupi.

2. Kvazigrupe vezane zakonom $A(B(x,y),C(z,u))=D(E(x,z),F(y,u))$ izotopne su istoj Abelovoj grupi.

Iz teoreme 2.2.1 izlazi

<u>Teorema 2.2.2.</u> *Neka je* $w_1=w_2$ *uravnoteženi zakon takav da je* $\Phi=K_\sim=K^1_\sim \cup K^2_\sim$ *. Sve kvazigrupe klase* $K^1_\sim$ *izotopne su jednoj lupi* $\circ$*, a sve kvazigrupe klase* $K^2_\sim$ *lupi* $*$ *, lupe* $\circ$ *i* $*$ *zadovoljavaju zakon* $u\circ v=v*u$ *i zakon koji se dobija iz* $w_1=w_2$ *zamenom svih operacija iz* $K^1_\sim$ *sa* $\circ$*, a iz* $K^2_\sim$ *sa* $*$ *. Ako je broj operacija u* $K_\sim$ *veći od dva,* $\circ$ *i* $*$ *su grupe.*

U [14] V.D.Bjelousov dokazao je da sledeća teorema A.Sade-a važi ako i samo ako se odnosi na zakone prve vrste:

Sve kvazigrupe jedne klase $K^i_\sim (i=1,\dots,s)$ uravnoteženog zakona $w_1=w_2$ izotopne su jednoj operaciji $\circ_i$, pri čemu operacije $\circ_i$ zadovoljavaju zakon koji se dobija iz $w_1=w_2$ zamenom svih operacija iz $K^i_\sim$ sa $\circ_i$.

Mi dokazujemo analognu teoremu za makakav uravnoteženi zakon. Ako je zakon prve vrste, ova teorema svodi se na citiranu teoremu A.Sade-a.

<u>Teorema 2.2.3.</u> *Neka je* $w_1=w_2$ *proizvoljan uravnoteženi zakon. Sve kvazigrupe jedne klase* $K^i_\sim$ $(i=1,\dots,s)$ *izotopne su jednoj lupi* $\circ_i$*, izotopija je oblika*

$$\sigma_A A(u,v) = \sigma_A L^A_1 u \circ_i \sigma_A L^A_2 v,$$

i lupe $\circ_i$ *zadovoljavaju zakon koji se dobija iz* $w_1=w_2$ *zamenom svih operacija iz* $K^i_\sim$ *operacijom* $\circ_i$*,* $i=1,\dots,s$*.*

<u>Dokaz</u>. Teorema dokazujemo indukcijom po broju klasa $K_\sim$. Za $s=1$, tvrdjenje sledi iz teoreme 2.2.2. Neka je tvrdjenje tačno za zakone sa $1,2,\dots,s-1$ klasa, i dokažimo da važi za zakon sa s klasa $K_\sim$.

Dokazujemo pomoćno tvrdjenje.

Ako je $A<B<C$, i $A\sim C$, tada je $B\sim C$.

<u>Dokaz pomoćnog tvrdjenja</u>. Ako je $u=P(u_1,u_2)$, umesto $[u]$ pišemo i $[P]$. Neka je $C\in\Phi_1$, $D=\inf_{w_2}[C]$. Zbog $A\sim C$ je $[D]\neq[C]$. Sem toga je i $C\sim D$, što se lako dokazuje.

Neka je $C_1=\inf_{w_1}[D]$, i neka je $C_1>B$. Tada je, analogno, $[C_1]\neq[D]$, $D\sim C_1$.

Produžavajući ovaj postupak, dobijamo niz

$C\sim D\sim C_1\sim D_1\sim\dots,$

i pri tome je

$[C]\subset[D]\subset[C_1]\subset[D_1]\subset\dots;$

$C>C_1>\dots$ u termu w_1, i

$D>D_1>\dots$ u termu w_2.

Kako je $C>B$, mora biti ili

(i) za neki $k\in N$, $C_k=B$, ili

(ii) za neki $k\in N$, $C_{k-1}>B>C_k$.

U slučaju (i), imamo $B\sim C$, u slučaju (ii) postoje dve mogućnosti:

1^{o}. Postoji $y\in[D_{k-1}]\setminus[D_{k-2}]$ takav da je $y\in[B]\setminus[C_{k-1}]$. Neka je $x\in[D_{k-2}]$, tada je $x\in[C_{k-1}]$, pa je $D=\inf_{w_1}(x,y)$, i

$D_{k-1}=\inf_{w_2}(x,y)$, odakle je $B\sim C_{k-1}$, pa je $B\sim C$.

2. Za svaki $y\in[D_{k-1}]\setminus[D_{k-2}]$ je $y\notin[B]\setminus[C_{k-2}]$.

Tada, zbog (ii), postoji $z\in[B]\setminus[C_{k-1}]$, tako da je $z\in[w_2]\setminus[D_{k-1}]$. Neka je $t\in[C_{k-1}]$, tada je i $t\in[D_{k-1}]$. Neka je $H=\inf_{w_2}(t,z)$. Kako je $B=\inf_{w_1}(t,z)$, imamo

(6) $$B\xleftarrow{(t,z)}H.$$

Kako je $C_k<B$, postoji $y\in[D_{k-1}]$, tako da je $y\in[C_k]\setminus[B]$. Tada je $C_k=\inf_{w_1}(y,z)$, i $H=\inf_{w_2}(y,z)$, dakle je

(7) $$C_k\xleftarrow{(y,z)}H.$$

Iz (6) i (7) sledi $B\sim C_k$, pa je i $B\sim C$.

Prelazimo na dokaz teoreme.

Označimo sa K_ν^1 klasu koja sadrži A_1 i B_1. Broj operacija u svakoj klasi je paran, polovina ih je u w_1, polovina u w_2 [14]. Neka je $U=\{u_1,\ldots,u_r\}$ skup svih podterma terma w_1 koji ne sadrže operacije iz K_ν^1, i pri tome je, za svaka dva u_i i u_j, $[u_i]\cap[u_j]=\emptyset$. Slično je $U'=\{u'_1,\ldots,u'_s\}$ skup podterma terma w_2. Lako se dokazuje da je $r=s=\frac{1}{2}n+1$, gde je n broj operacija u K_ν^1. Sem toga postoji bijekcija φ skupa U na U' takva da je $\varphi u_i \overset{def}{=} u'_j$, ako i samo ako je $[u_i]=[u'_j]$, $i=1,\ldots,r$ [14]. Fiksiranjem svih promenljivih iz $w_1=w_2$, sem onih koje ulaze u term u_i $(i=1,\ldots,r)$, dobija se uravnotežni zakon

(8) $$\lambda_i u_i=\mu_i\varphi u_i$$

gde su λ_i i μ_i izvesne funkcije skupa H. Sve operacije iz

$\Phi(\lambda_i u_i)$ su u Φ_1, sem $ind_{\lambda_i}(\lambda_i u_i)$, a ove operacije iz $\Phi(\mu_i \varphi u_i)$ su u Φ_2, sem $ind_{\mu_2}(\mu_i \varphi u_i)$, a te dve operacije zamenjene su izotopnim operacijama. Očigledno su sve klase $\underset{\sim}{K}$ ovog zakona istovremeno klase zakona $w_1=w_2$, i njihov broj manji je od s.

Uočimo zakon $w_1=w_2$ i zamenimo terme u_i i φu_i istom promenljivom y_i. Prema dokazanoj lemi, imamo tada uravnoteženi zakon $w_1'=w_2'$, takav da je $[w_1']=[w_2']=\{y_1,\dots,y_r\}$, čiji je skup operacija $\underset{\sim}{K}^1$. Primenom indukcijske hipoteze na zakone (8), i teoreme 2.2.2 na ovaj zakon $w_1'=w_2'$, dokazujemo teoremu.

Navodimo jedan primer.

Odredjujemo kvazigrupe A_i, B_i, $i=1,\dots,6$, vezane zakonom

$$A_1(A_2(A_4(x,z),A_5(y,u)),A_3(v,A_6(w,t)))$$
$$=B_1(B_2(w,B_4(v,t)),B_3(B_5(x,y),B_6(u,z))).$$

U ovom slučaju je $\Phi=\underset{\sim}{K}^1\cup\underset{\sim}{K}^2\cup\underset{\sim}{K}^3$,

$\underset{\sim}{K}^1=\underset{\approx}{K}^1\cup\underset{\approx}{K}^2$, $\underset{\sim}{K}^2=\underset{\approx}{K}^3$, $\underset{\sim}{K}^3=\underset{\approx}{K}^4\cup\underset{\approx}{K}^5$, gde je

$\underset{\approx}{K}^1=\{A_1\}$, $\underset{\approx}{K}^2=\{B_1\}$, $\underset{\approx}{K}^3=\{A_2,A_4,A_5,B_3,B_3,B_5,B_6\}$, $\underset{\approx}{K}^4=\{B_2,A_6\}$, $\underset{\approx}{K}^5=\{A_3,B_4\}$

Prema teoremi 2.2.3, postoje lupe $\circ_i$, $i=1,2,3,4,5$ takve da je $u\circ_1 v=v\circ_2 u$, $u\circ_4 v=v\circ_5 u$. Operacija $\circ_3$ je Abelova grupa, operacije $\circ_4$ i $\circ_5$ su grupe, i važi jednakost

$$((x\circ_3 z)\circ_3 u))\circ_1(v\circ_5(w\circ_4 t))=(w\circ_4(v\circ_5 t))\circ_2((x\circ_3 y)\circ_3(u\circ_3 z)).$$

Ma koja operacija iz $\underset{\sim}{K}^i$ može se izraziti pomoću $\circ_i$, naprimer, za $A_4\in\underset{\sim}{K}^3$, važi jednakost

$$L_1^{A_1} L_1^{A_2} A_4(u,v) = L_1^{A_1} L_1^{A_2} L_1^{A_4} u \, a_3 \, L_1^{A_1} L_1^{A_2} L_2^{A_4} v.$$

Slično važi i za ostale kvazigrupe.

2.3. Uravnoteženi zakoni na GD-grupoidima.

Posmatramo familiju GD-grupoida vezanih proizvoljnim uravnoteženim zakonom, čija su sva operacijska slova dužine dva.

Neka je $w_1 = w_2$ uravnoteženi zakon, $\Phi_1 = \Phi(w_1) = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $\Phi_2 = \Phi(w_2) = \{B_1, \ldots, B_n\}$, $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi$, $W = [w_1] = [w_2] = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. Neka je sem toga $A_1 = \inf_{w_1} \Phi_1$, $B_1 = \inf_{w_2} \Phi_2$.

Dalje, neka su X_i, $i=1,\ldots,n+1$, Q_i, P_i, $i=1,\ldots,n$, neprazni skupovi.

Definišemo GD-grupoide A_i, B_i, $i=1,\ldots,n$ vezane zakonom $w_1 = w_2$ na sledeći način:

1. $x_i \in X_i$, $i=1,\ldots,n+1$.

2. Ako je $A_k(u,v)$ podterm terma w_1, $u \in U$, $v \in V$, A_k je preslikavanje skupa $U \times V$ u Q_k, tj. $A_k : U \times V \to Q_k$.

3. Ako je $B_k(u,v)$ podterm terma w_2, $u \in U$, $v \in V$, B_k je preslikavanje skupa $U \times V$ u P_k, tj. $B_k : U \times V \to P_k$.

4. $P_1 = Q_1 = M$.

Neka su $a_i \in X_i$, $i=1,\ldots,n+1$, fiksirani elementi skupova X_i.

Prvo posmatramo uravnoteženi zakon za koji je $\Phi = K_{\sim}$.

Neka su promenljive $x, y \in W$ takve da je $A_1 \xleftrightarrow{(x,y)} B_1$.

Tada, zamenom svih promenljivih $x_i \in W$, izuzev x i y, elementima $a_i \in X_i$, dobijamo

(11) $\qquad A_1(\alpha x, \beta y) = B_1^{\circ}(\gamma x, \delta y)$,

gde su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ izvesna sirjektivna preslikavanja, B_1° označava B_1 ili B_1^{*}.

Predpostavimo da je ispunjen sledeći uslov:

Preslikavanja: (i) $L_1^{A_1}$ i $L_2^{A_1}$, ili (ii) $L_1^{B_1}$ i $L_2^{B_1}$, ili

(12) (iii) $L_1^{A_1}$ i $L_2^{B_1^{\circ}}$, ili (iv) $L_1^{B_1^{\circ}}$ i $L_2^{A_1}$ su bijekcije.

Dokazujemo sledeće tvrdjenje.

<u>Teorema 2.3.1.</u> *Neka je* $w_1=w_2$ *uravnoteženi zakon na GD-grupoidima i neka je* $\Phi = K_{\approx}$. *Ako važi uslov (12), postoji lupa* $\circ$, *definisana na skupu* M, *koja je homotopna slika svih GD-grupoida vezanih zakonom* $w_1=w_2$. *Lupa* $\circ$ *zadovoljava zakon* $w_1(\circ)=w_2(\circ)$ *koji se dobija iz* $w_1=w_2$ *zamenom svih operacijskih slova skupa* Φ *simbolom* $\circ$. *Za svaki GD-grupoid* $A\in\Phi$, *homotopija je oblika*

$$\sigma_A A(u,v) = \sigma_A L_1^A u \circ \sigma_A L_2^A v$$

Ako Φ *sadrži više od dva operacijska slova, lupa* $\circ$ *je grupa.*

<u>Dokaz.</u> Definišimo operaciju $\circ$ skupa M na sledeći način:

U slučaju (i), (iii), (iv):

(13) $$A_1(u,v)=L_1^{A_1}u\circ L_2^{A_1}v.$$

U slučaju (ii):

(14) $$B_1(u,v)=L_1^{B_1}u\circ L_2^{B_1}v.$$

Dokazujemo da je operacija $\circ$ dobro definisana. U slučaju (i) i (ii), to je očigledno. Predpostavimo da važi (iii). Neka su x i y dva proizvoljna elementa skupa M. Kako je $L_1^{A_1}$ bijekcija, postoji tačno jedan u takav da je $x=L_1^{A_1}u$. Preslikavanje $L_2^{A_1}$ je sirjektivno, dakle postoji bar jedan v takav da je $L_2^A v=y$. Dokazujemo da proizvod $x\circ y$ ne zavisi od izbora elementa v, tj. dokazujemo:

Ako je $L_2^{A_1}v' = L_2^{A_1}v''$, tada je, za svaki u, $A_1(u,v') = A_1(u,v'')$.

Iz (11) imamo

$$L_1^{A_1}\alpha = L_1^{B_1}\gamma \tag{15}$$

i

$$L_2^{A_1}\beta = L_2^{B_1}\delta. \tag{16}$$

Kako je preslikavanje β sirjektivno, postoji s' takav da je $v' = \beta s'$ i postoji s'' takav da je $v'' = \beta s''$.

Dakle imamo

$$L_2^{A_1}\beta s' = L_2^{A_1}\beta s'',$$

i zbog (16),

$$L_2^{B_1^{\circ}}\delta s' = L_2^{B_1^{\circ}}\delta s''.$$

Kako je $L_2^{B_1^{\circ}}$ bijekcija, imamo $\delta s' = \delta s''$.

Kako je preslikavanje α sirjektivno, postoji t takav da je $\alpha t = u$. Kako je $\delta s' = \delta s''$, imamo

$$B_1(\gamma t, \delta s') = B_1(\gamma t, \delta s'').$$

Odavde, zbog (11), dobijamo

$$A_1(\alpha t, \beta s') = A_1(\alpha t, \beta s''),$$

ili

$$A_1(u,v) = A_1(u,v'').$$

U slučaju (ii), dokaz je analogan.

Lako je dokazati da je $\circ$ lupa.

Kako je $\phi = K_{\tilde{\tau}}$, iz (13), odnosno (14), imamo:

Za svaki $A \varepsilon K_{\tilde{\tau}}$,

$$\sigma_A A(u,v) = \sigma_A L_1^A u \circ \sigma_A L_2^A v,$$

i indukcijom po broju promenljivih u W, dokazujemo

$w_1(\circ)=w_2(\circ)$.

Ako Φ sadrži više od dva operacijska slova, postoje promenljive $x,y,z\in W$ takve da zamenom svih promenljivih x_i, sem x,y,z fiksiranim elementima $a_i\in X_i$, imamo

(17) $A_1^{\circ}(\alpha_1 A_K^{\circ}(\alpha_2 x,\alpha_3 y),\alpha_4 z)=B_1^{\circ}(\beta_1 x,\beta_2 B_j^{\circ}(\beta_3 y,\beta_4 z))$,

gde su α_i, β_i, $i=1,2,3,4$ izvesna sirjektivna preslikavanja.

Postoje dve mogućnosti. Ili je zakon $w_1=w_2$ prve vrste, ili je lupa $\circ$ komutativna. U oba slučaja, zamenom u $w_1(\circ)=w_2(\circ)$ svih promenljivih, sem x,y,z iz (17), jediničnim elementom lupe $\circ$, dobijamo

$$(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z).$$

Teorema je dokazana.

Iz predhodne teoreme neposredno izlazi

Teorema 2.3.2. *Neka je $w_1=w_2$ uravnoteženi zakon na GD-grupoidima i neka je $\Phi=K_{\sim}=K_{\sim}^1\cup K_{\sim}^2$. Ako uslov (12) važi, postoje lupe $\circ$ i $*$, definisane na skupu M, takve da je $\circ$ homotopna slika svih GD-grupoida skupa $K_{\approx}^1$, i $*$ homotopna slika svih GD-grupoida skupa $K_{\approx}^2$. Lupe $\circ$ i $*$ vezane su zakonom $u\circ v=v*u$, i zakonom koji se dobija iz $w_1=w_2$ zamenom svih operacijskih slova skupa $K_{\approx}^1$ sa $\circ$, i zamenom svih operacija slova skupa $K_{\sim}^2$ sa $*$.*

Ako Φ sadrži više od dva operacijska slova, lupe $\circ$ i $*$ su grupe.

Neka je $w_1=w_2$ proizvoljan uravnoteženi zakon na GD-grupoidima. Predpostavimo da se skup Φ razlaže na s klasa $K_{\sim}^j$. Za svaku klasu $K_{\sim}^j$, $j=1,\dots,s$, imamo $K_{\sim}^j=K_1^j\cup K_2^j$, gde je $K_1^j\subset\Phi_1$, $K_2^j\subset\Phi_2$. Ako su A_j i B_j operacijska slova definisana sa $A_j=\inf_{w_1}K_1^j$ i $B_j=\inf_{w_2}K_2^j$,

za svako $j=1,\ldots,s$ postoje dve promenljive $x_j \varepsilon W$ i $y_j \varepsilon W$ takve da je
$\sigma_{A_j} A_j(\alpha_1^j x_j, \alpha_2^j y_j) = \sigma_{B_j} B_j^o(\beta_1^j x_j, \beta_2^j y_j)$.

Ako skup $K_\sim^j$ sadrži više od dva operacijska slova, postoje tri promenljive x_j, y_j, z_j εW takve da je

$$\sigma_{A_j} A_j^o(\gamma_1^j A_{K_j}^o(\gamma_2^j x_j, \gamma_3^j y_j), \gamma_4^j z_j) = \sigma_{B_j} B_j^o(\delta_1^j x_j, \delta_2^j B_{K_j}^o(\delta_3^j y_j, \delta_4^j z_j)).$$

Neka važe sledeći uslovi:

Preslikavanja: (i) $\sigma_{A_j} L_1^{A_j}$ i $\sigma_{A_j} L_2^{A_j}$, ili (ii) $\sigma_{B_j} L_1^{B_j^o}$ i
(18) $\sigma_{B_j} L_2^{B_j}$, ili (iii) $\sigma_{A_j} L_1^{A_j}$ i $\sigma_{B_j} L_2^{B_j}$, ili (iv) $\sigma_{B_j} L_1^{B_j}$ i
$\sigma_{A_j} L_2^{A_j}$ su bijekcije. $(j=1,\ldots,s)$.

<u>Teorema 2.3.3.</u> *Neka je $w_1=w_2$ proizvoljan uravnoteženi zakon na GD-grupoidima. Ako uslovi (18) važe, postoje lupe $\circ_i$ $(i=1,\ldots,t)$ definisane na skupu M, koje su homotopne slike svih GD-grupoida klasa $K_\sim^i$ $i=1,\ldots,t$, respektivno. Lupe $\circ_i$ vezane su zakonom koji se dobija iz $w_1=w_2$ zamenom svih operacijskih slova klase $K_\sim^i$ sa $\circ_i$, $i=1,\ldots,t$. Za svaki A K^i, hotopija je oblika*

$$\sigma_A A(u,v) = \sigma_A L_1^A u \circ_i \sigma_A L_2^A v.$$

Ako klasa $K_\sim$, koja sadrži $K_\sim^i$, ima više od dva operacijska slova, lupa $\circ_i$ je grupa.

Dokaz. Teorema se dokazuje indukcijom po broju klasa $K^j_\sim$, $j=1,\ldots,s$, analogno dokazu teoreme 2.2.3.

Predhodna teorema može se primeniti i na neke zakone na kvazigrupama raznih dužina, koji se, uvodjenjem novih operacija, mogu svesti na zakone na GD-grupoidima, koji zadovoljavaju uslove teoreme.

Navodimo jedan primer.

Posmatramo zakon

$$(19)\; A_1(A_2(x_1^m,A_3(x_{m+1}^n)),A_4(y_1^p,A_5(y_{p+1}^q)))=B_1(B_2(B_3(y_1^r),B_4(B_5(x_1^k),\,x_{k+1}^n)),y_{r+1}^q)$$

na kvazigrupama, pri čemu je $m<k$ i $p<r$. Dužine kvazigrupa A_i, $i=1,\ldots,5$ su redom 2, m+1, n-m, p+1, q-p. Dužine kvazigrupa B_i $i=1,\ldots,5$ su redom q-r+1, 2, r, n-k+1, k.

Uvodjenjem GD-grupoida:

$$\tilde{A}_2((x_1^m),x_{m+1}) \;\underline{\underline{\mathrm{def}}}\; A_2(x_1^{m+1}),$$

$$\tilde{A}_3((x_{m+1}^k),(x_{k+1}^n)) \;\underline{\underline{\mathrm{def}}}\; A_3(x_{m+1}^n),$$

$$\tilde{A}_4((y_1^p),y_{p+1}) \;\underline{\underline{\mathrm{def}}}\; A_4(y_1^{p+1}),$$

$$\tilde{A}_5((y_{p+1}^r),(y_{r+1}^q)) \;\underline{\underline{\mathrm{def}}}\; A_5(y_{p+1}^q),$$

$$\tilde{B}_1(y_r,(y_{r+1}^q)) \;\underline{\underline{\mathrm{def}}}\; B_1(y_r^q),$$

$$\tilde{B}_3((y_1^p),(y_{p+1}^r)) \;\underline{\underline{\mathrm{def}}}\; B_3(y_1^r),$$

$$\tilde{B}_4(x_k,(x_{k+1}^n)) \;\underline{\underline{\mathrm{def}}}\; B_4(x_k^n),$$

$$\tilde{B}_5((x_1^m),(x_{m+1}^k)) \;\underline{\underline{\mathrm{def}}}\; B_5(x_1^k)$$

dobijamo zakon

$$A_1(\tilde{A}_2(x,\tilde{A}_3(y,z)),\tilde{A}_4(u,\tilde{A}_5(v,t)))=\tilde{B}_1(B_2(\tilde{B}_3(u,v),\tilde{B}_4(\tilde{B}_5(x,y),z)),t)$$

koji zadovoljava uslove teoreme.

U ovom slučaju je $\Phi=\underset{\sim}{K}^1\cup\underset{\sim}{K}^2$, $\underset{\sim}{K}^1=\underset{\sim}{K}^1\cup\underset{\sim}{K}^2$, $\underset{\sim}{K}^2=\underset{\sim}{K}^3$,
$\underset{\sim}{K}^1=\{A_1,A_4,A_5,B_1,B_3\}$, $\underset{\sim}{K}^2=\{B_2\}$, $\underset{\sim}{K}^3=\{A_2,A_3,B_4,B_5\}$.

Postoje grupe $\circ_1$, $\circ_2$, $\circ_3$ takve da je $u\circ_1 v=v\circ_2 u$ i grupa $\circ_i$ je homotopna slika svih GD-grupoida klase $\underset{\sim}{K}^i$, $i=1,2,3$.

Vračanjem na polazne kvazigrupe dobijamo sledeći rezultat:

Ako kvazigrupe A_i,B_i $(i=1,\ldots,5)$ zadovoljavaju zakon (19), postoje grupe $\circ_1$, $\circ_2$, $\circ_3$ i kvazigrupe K,L,M,P,Q,R, dužina redom $p,r-p,q-r,m,k-m,n-k$, takve da je

$$A_1(x,y)=L_1^{A_1}x\circ_1 L_2^{A_1}y,$$
$$L_1^{A_1}A_2(x_1^m)=P(x_1^m)\circ_3 L_1^{A_1}L_2^{A_2}x_{m+1}$$
$$L_1^{A_1}L_2^{A_2}A_3(x_{m+1}^n)=Q(x_{m+1}^k)\circ_3 R(x_{k+1}^n),$$
$$L_2^{A_1}A_4(y_1^{p+1})=K(y_1^p)\circ_1 L_2^{A_1}L_2^{A_4}y_{p+1},$$
$$L_2^{A_1}L_2^{A_4}A_5(y_{p+1}^q)=L(y_{p+1}^r)\circ_1 M(y_{r+1}^q),$$
$$B_1(y_r^q)=L_1^{B_1}y_r\circ_1 M(y_{r+1}^q),$$
$$L_1^{B_1}B_2(u,v)=L_1^{B_1}L_1^{B_2}u\circ_2 L_1^{B_1}L_2^{B_2}v,$$
$$L_1^{B_1}L_1^{B_2}B_3(y_1^r)=K(y_1^p)\circ_1 L(y_{p+1}^r),$$
$$L_2^{B_1}B_4(x_k^n)=L_2^{B_1}L_1^{B_4}x_k\circ_3 R(x_{k+1}^n),$$
$$L_2^{B_1}L_1^{B_4}B_5(x_1^k)=P(x_1^m)\circ_3 Q(x_{m+1}^k).$$

III D E O

3. NEKA UOPŠTENJA DIKEROVOG ZAKONA NA KVAZIGRUPAMA

3.1. Uvod.

Polazeći od Dikerovog zakona

(1) $A(A(x_1^n), y_1^n) = A(x_1, A(x_2, y_2^n), \ldots, A(x_n, y_2^n))$

imamo naprimer ovu posledicu

$$A(A(A(x_1^n) y_2^n), z_2^n) = A(x_1, A(x_2, A(y_2, z_2^n), \ldots, A(y_n, z_2^n)), \ldots, A(x_n, A(y_2, z_2^n), \ldots, A(y_n, z_2^n))),$$

što možemo kraće napisati u obliku

(2) $A(A(A(x_1^n), y_2^n), z_2^n) = A(x_1, A(x_i, A(y_i, z_2^n)\big]_{i=2}^n)\big]_{i=2}^n)$,

gde $u_i\big]_{i=2}^n$ označava niz terma $u_2, \ldots, u_n$.

Nazovimo k-Dikerov zakon sledeću posledicu zakona (1):

(3) $A(A(\ldots A(x_{11}^{1n}), \ldots, x_{k-1,2}^{k-1,n}), x_{k2}^{kn}) =$
$= A(x_{11}, A(x_{1i}, \ldots, A(x_{k-1,j}, x_{k2}^{kn})\big]_{j=2}^n \ldots)\big]_{i=2}^n)$

koji, za k=3, postaje (2), i za k=2, Dikerov zakon (1).

U tački 3.2 posmatramo uopšteni k-Dikerov zakon

(4) $A_1(A_2(\ldots A_k(x_{11}^{1n}), \ldots, x_{k-1,2}^{k-1,n}) x_{k2}^{kn}) =$
$= B_1(x_{11}, B_2(x_{1i}, \ldots, B_k(x_{k-1,j}, x_{k2}^{kn})\big]_{j=2}^n \ldots)\big]_{i=2}^n)$

na kvazigrupama.

U tački 3.3 posmatramo kvazigrupe vezane zakonom

(5) $A(B(x_1^n), y_2^n) = C(x_1^i, D(x_{i+1}, y_2^n), \ldots, D(x_n, y_2^n))$,

gde je $1 \leq i \leq n-1$.

Za i=1, (5) postaje uopšteni Dikerov zakon, a za i=n-1 postaje uopšteni (1,n)-asocijativni zakon.

3.2. Uopšteni k-Dikerov zakon na n-kvazigrupama.

Neka su A_i, B_i, $i=1,\dots,k$, n-arne kvazigrupe definisane na nepraznom skupu M, koje zadovoljavaju uopšteni k-Dikerov zakon (4).

Neka je a neki fiksirani element skupa M.

Ako je $P(u,v_i\big]_{i=2}^{n})$ neki podterm terma w_1 ili w_2 zakona (4), zamenimo sve promenljive terme u fiksiranim elementom $a\in M$, i sve terme v_i istim termom v. Tako dobijamo term

$P(u\big|_{a\in M}^{x\in[u]},v,\dots,v)$.

Za ma koju kvazigrupu $P\in\{A_i,B_i\}$uvodimo preslikavanje $\theta_p:M\to M$ definisano sa :

Za makoji $v\in M$,

$$\theta_p v \overset{\text{def}}{=\!=} p(u\big|_{a\in M}^{x\in[u]},v,\dots,v).$$

Naprimer,

$$\theta_{A_{k-1}} v = A_{k-1}(A_k(a,\dots,a),v,\dots,v),$$
$$\theta_{B_1} v = B_1(a,v,\dots,v).$$

Lema 3.2.1. *Preslikavanja* $\theta_{B_1},\dots,\theta_{B_{k-1}},\theta_{A_2},\dots,\theta_{A_k}$ *su bijekcije.*

Dokaz. Zamenimo u zakonu (1) sve promenljive $x_{12},\dots,x_{1n}$ novom promenljivom x_1, i zamenimo sve ostale promenljive, sem $x_{22},\dots,x_{2n}$ fiksiranim elementom $a\in M$. Tada dobijamo

$$(2') \quad L_1^{A_1}\dots L_1^{A_{k-1}}A_{k-1}(\theta_{A_k} x_1,x_{22}^{2n}) = \theta_{B_1}B_2(x_1,L_1^{B_3}x_{22},\dots,L_1^{B_3}x_{2n}).$$

Ako u ovoj jednakosti zamenimo sa $a\in M$ sve promenljive, sem jedne od x_{2i}, recimo x_{2n}, dobijamo

$$L_1^{A_1}\dots L_1^{A_{k-2}}L_n^{A_{k-1}}x_{2n} = \theta_{B_1}L_n^{B_2}L_1^{B_3}x_{2n}$$

odakle zaključujemo da je θ_{B_1} bijekcija.

Zamenom svih promenljivih u (2´), sem x_1, sa $a\in M$, imamo

$$L_1^{A_1}\dots L_1^{A_{k-1}}\theta_{A_k}x_1=\theta_{B_1}L_1^{B_2}x_1,$$

odakle sledi da je i θ_{A_k} bijekcija.

Slično iz jednakosti

$$(3´)\quad L_1^{A_1}\dots L_1^{A_{k-3}}A_{k-2}(\theta_{A_{k-1}}x_2,x_{32}^{3n})=\theta_{B_1}\theta_{B_2}B_3(x_2,L_1^{B_4}x_{32},\dots,L_1^{B_4}x_{3n})$$

imamo

$$L_1^{A_1}\dots L_1^{A_{k-3}}L_n^{A_{k-2}}x_{3n}=\theta_{B_1}\theta_{B_2}L_n^{B_3}L_1^{B_4}x_{3n}$$

i

$$L_1^{A_1}\dots L_1^{A_{k-2}}\theta_{A_{k-1}}x_2=\theta_{B_1}\theta_{B_2}L_1^{B_3}x_2$$

odakle zaključujemo da su preslikavanja θ_{B_2} i $\theta_{A_{k-1}}$ bijekcije.

Produžavajući ovaj postupak,na kraju dobijamo jednakost

$$(k´)\qquad A_1(\theta_{A_2}x_{k-1},x_{k2}^{kn})=\theta_{B_1}\dots\theta_{B_{k-1}}B_k(x_{k-1},x_{k2}^{kn}),$$

odakle zaključujemo da su preslikavanja $\theta_{B_{k-1}}$ i θ_{A_2} bijekcije.

Posledica 1. Binarne operacije $\overline{B}_i$ $(i=1,\dots,k-1)$ i $\overline{A}_i$ $(i=2,\dots,k)$ definisane sa

$$\overline{B}_i(u,v)\overset{\text{def}}{=\!=}B_i(u,v,\dots,v)\qquad \text{i}$$

$$\overline{A}_i(u,v)\overset{\text{def}}{=\!=}A_i(u,v,\dots,v)$$

su kvazigrupe.

Posledica 2. Sledeći parovi kvazigrupa su medjusobno izotopni: A_k i B_1, A_{k-1} i $B_2,\dots,$ A_1 i B_k.

Dokaz. Ovo tvrdjenje sledi iz jednakosti

$$L_1^{A_1}\dots L_1^{A_{k-1}}A_k(x_{11},L_1^{B_2}x_{12},\dots,L_1^{B_2}x_{1n}),$$

i jednakosti $(2'),\dots,(k')$.

Uvodimo sledeće oznake. Neka su

$$\sigma_{A_i} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} L_1^{A_1}\dots L_1^{A_{i-1}},$$

$$\sigma_{B_i} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \theta_{B_1}\dots\theta_{B_{i-1}}, \quad i=2,\dots,k.$$

Teorema 3.2.1. *Neka su* A_i, B_i, $i=1,\dots,k$, *n- arne kvazigrupe na skupu M vezane uopštenim k-Dikerovim zakonom (4). Tada postoji grupa na skupu M, i (n-1)-arne kvazigrupe* $D_1,\dots, D_{k-1},C_2,\dots,C_k$, *i P na skupu M, takve da je*

(a_1) $$A_1(x_1^n)=L_1^{A_1}x_1\circ D_1(x_2^n),$$

(a_i) $$\sigma_{A_i}A_i(x_1^n)=\sigma_{A_i}L_1^{A_i}x_1\circ\sigma_{A_i}D_i(x_2^n),\quad i=2,\dots,k-1;$$

(b_i) $$\sigma_{B_i}B_i(x_1^n)=\sigma_{B_i}L_1^{B_i}x_1\circ\sigma_{B_i}C_i(x_2^n),\quad i=2,\dots,k;$$

(a_k) $$\sigma_{A_k}A_k(x_1^n)=P(x_1,\sigma_{B_2}L_1^{B_2}x_2\circ(\sigma_{B_2}L_1^{B_2}x_n)^{-1},\dots,$$
$$\sigma_{B_2}L_1^{B_2}x_{n-1}\circ(\sigma_{B_2}L_1^{B_2}x_n)^{-1})\circ\sigma_{B_2}L_1^{B_2}x_n;$$

(b_1) $$B_1(x_1^n)=P(x_1,\sigma_{B_2}x_2\circ(\sigma_{B_2}x_n)^{-1},\dots,\sigma_{B_2}x_{n-1}\circ(\sigma_{B_2}x_n)^{-1})\circ\sigma_{B_2}x_n.$$

<u>Dokaz</u>. Iz zakona (4) sledi

$$L_1^{A_1} \dots L_1^{A_k} = L_1^{B_1}. \tag{6}$$

Neka je

$$C_i(u_2^n) \overset{\text{def}}{=\!=} B_i(a, u_2^n), \qquad i=2,\dots,k,$$

$$D_i(u_2^n) \overset{\text{def}}{=\!=} A_i(u \Big|_{a \in M}^{x \in [u]}, u_2^n), \qquad i=1,\dots,k-1.$$

C_i i D_i su $(n-1)$-arne kvazigrupe.

Iz zakona (4) dobijaju se sledeće jednakosti:

$$(2^o) \quad \sigma_{A_{k-1}} A_{k-1}(L_1^{A_k} x_{11}, x_{22}^{2n}) = \overline{B}_1(x_{11}, C_2(L_1^{B_3} x_{22} \dots L_1^{B_3} x_{2n})),$$

$$(3^o) \quad \sigma_{A_{k-2}} A_{k-2}(L_1^{A_{k-1}} L_1^{A_k} x_{11}, x_{32}^{3n}) = \overline{B}_1(x_{11}, \theta_{B_2} C_3(L_1^{B_4} x_{32}, \dots, L_1^{B_4} x_{3n})),$$

....

$$(k^o) \quad a_1(L_1^{A_2} \dots L_1^{A_k} x_{11}, x_{k2}^{kn}) = \overline{B}_1(x_{11}, \theta_{B_2} \dots \theta_{B_{k-1}} C_k(x_{k2}, \dots, x_{kn})).$$

Iz ovih jednakosti , za $x_{11} = a$, sledi:

$$(2") \quad \sigma_{A_{k-1}} D_{k-1}(x_{22}^{2n}) = \sigma_{B_2} C_2(L_1^{B_3} x_{22}, \dots, L_1^{B_3} x_{2n}),$$

$$(3") \quad \sigma_{A_{k-2}} D_{k-2}(x_{32}^{3n}) = \sigma_{B_3} C_3(L_1^{B_4} x_{32}, \dots, L_1^{B_4} x_{3n}),$$

....

$$(k") \qquad D_1(x_{k2}^{kn}) = \sigma_{B_k} C_k(x_{k2}^{kn}).$$

Ako u zakonu (4) stavimo $x_{i2} = \dots = x_{in} = x_i$, $i=1,\dots,k-1$, dobijamo zakon

$$A_1(\overline{A}_2(\dots \overline{A}_k(x_{11}, x_1), x_2), \dots, x_{k2}^{kn}) = \overline{B}_1(x_{11}, \overline{B}_2(x_1, \dots, B_k(x_{k-1}, x_{k2}^{kn}) \dots)).$$

Neka su $\tilde{A}_1 : M \times M^{n-1} \to M$ i $\tilde{B}_k : M \times M^{n-1} \to M$

GD-grupoidi definisani sa

$$\tilde{A}_1(u,(v_2^n)) \stackrel{def}{=\!=} A_1(u,v_2^n),$$
$$\hat{B}_k(u,(v_2^n)) \stackrel{def}{=\!=} B_k(u,v_2^n).$$

Iz prethodnog zakona imamo

$$\tilde{A}_1(\bar{A}_2(\ldots\bar{A}_k(x_{11},x_1),x_2),\ldots,x)=\bar{B}_1(x_{11},\bar{B}_2(x_1,\ldots,\tilde{B}_k(x_{k-1},x)\ldots)).$$

Odavde prema teoremi 2.3.1, deo II, imamo

(7) $$\bar{B}_1(u,v) = L_1^{\bar{B}_1}u \circ L_2^{\bar{B}_1}v = L_1^{B_1}u \circ \theta_{B_1}v.$$

gde je $\circ$ grupa definisana na skupu M.

Dokazujemo da se operacije $A_1,\ldots,A_{k-1}$ mogu izraziti preko grupe $\circ$ i $(n-1)$-arnih kvazigrupa $D_1,\ldots,D_{k-1}$.

Iz (2^o) i (7) imamo

$$\sigma_{A_{k-1}}A_{k-1}(L_1^{A_k}x_{11},x_{22}^{2n})=L_1^{B_1}x_{11}\circ\theta_{B_1}C_2(L_1^{B_3}x_{22},\ldots,L_1^{B_3}x_{2n}).$$

odakle, zbog (6) i (2") je

$$\sigma_{A_{k-1}}A_{k-1}(x_1^n)=\sigma_{A_{k-1}}L_1^{A_{k-1}}x_1\circ\sigma_{A_{k-1}}D_{k-1}(x_2^n).$$

Slično iz $(3^o),\ldots,(k^o),(3''),\ldots,(k'')$, zbog (6) i (7) imamo

$$\sigma_{A_i}A_i(x_1^n)=\sigma_{A_i}L_1^{A_i}x_1\circ\sigma_{A_i}D_i(x_2^n), \quad i=2,\ldots,k-1,$$

i
$$A_1(x_1^n)=L_1^{A_1}x_1\circ D_1(x_2^n).$$

Dokazujemo sada da se operacije $B_2,\ldots,B_k$ mogu izraziti preko grupe $\circ$ i $(n-1)$-arnih kvazigrupa $C_2,\ldots,C_k$.

Zaista, iz jednakosti $(2),\ldots,(k)$ dobija se

(b_i) $$\sigma_{B_i}B_i(x_1^n)=\sigma_{B_i}L_1^{B_i}x_1\circ\sigma_{B_i}C_i(x_2^n), \quad i=2,\ldots,k.$$

Ostaje na kraju da odredimo A_k i B_1

Iz (a_i) neposredno sledi

(8) $$w_1 = \sigma_{A_k} A_k(x_{11}, x_{12}^{1n}) \circ \sigma_{A_{k-1}} D_{k-1}(x_{22}^{2n}) \circ \dots \circ \sigma_{A_2} D_2(x_{k-1,2}^{k-1,n}) \circ D_1(x_{k2}^{kn}).$$

Iz (b_2) imamo

$$w_2 = B_1(x_{11}, \sigma_{B_2}^{-1}(\sigma_{B_2} L_1^{B_2} x_{12} \circ \sigma_{B_2} C_2(B_3(x_{22}, \dots), \dots)), \dots,$$
$$\sigma_{B_2}^{-1}(\sigma_{B_2} L_1^{B_2} x_{1n} \circ \sigma_{B_2} C_2(\dots))).$$

Iz (b_3) imamo

$$C_2(\dots) = C_2(\sigma_{B_3}^{-1}(\sigma_{B_3} L_1^{B_3} x_{22} \circ \sigma_{B_3} C_3(\dots)), \dots,$$
$$\sigma_{B_3}^{-1}(\sigma_{B_3} L_1^{B_3} x_{2n} \circ \sigma_{B_3} C_3(\dots))).$$

Nastavljajući ovaj postupak, iz (b_k) imamo najzad:

$$C_{k-1}(B_k(x_{k-1,2}, x_{k2}^{kn}), \dots, B_k(x_{k-1,n}, x_{k2}^{kn})) =$$
$$= C_{k-1}(\sigma_{B_k}^{-1}(\sigma_{B_k} L_1^{B_k} x_{k-1,2} \circ \sigma_{B_k} C_k(x_{k2}^{kn})), \dots,$$
$$\sigma_{B_k}^{-1}(\sigma_{B_k} L1^{B_k} x_{k-1,n} \circ \sigma_{B_k} C(x_{k2}^{kn}))).$$

Stavimo u predhodnu jednakost

$$\sigma_{B_k} C_k(x_{k2}^{kn}) = e,$$

gde je e jedinica grupe $\mathcal{G}$.

Tada imamo

$$C_{k-1}(\dots)\Big|_{\sigma_{B_k} C_k(x_{k2}^{kn}) = e} = C_{k-1}(L_1^{B_k} x_{k-1,2}, \dots, L_1^{B_k} x_{k-1,n}).$$

Stavimo sada

$$\sigma_{B_{k-1}} C_{k-1}(L_1^{B_k} x_{k-1,2}, \dots, L_1^{B_k} x_{k-1,n}) = e,$$

pa imamo

$$C_{k-2}(\dots)\Big|_{\sigma_{B_{k-1}} C_{k-1}(\dots) = e} = C_{k-2}(L_1^{B_{k-1}} x_{k-2,2}, \dots, L_1^{B_{k-1}} x_{k-2,n}).$$

Najzad imamo

$$C_2(\ldots)\Big|\sigma_{B_3} C_3(\ldots)=e : C_2(L_1^{B_3} x_{22}, \ldots, L_1^{B_3} x_{2n}).$$

Iz jednakosti (8), zbog (2"), [illegible] dobijamo

$$\sigma_{A_k}(x_{11}, x_{12}^{1n}) \circ \sigma_{A_{k-1}} D_{k-1}(x_{22}^{2n})$$

$$= B_1(x_{11}, \sigma_{B_2}^{-1}(\sigma_{B_2} L_1^{B_2} x_{12} \circ \sigma_{A_{k-1}} D_{k-1}(x_{22}^{2n})), \ldots,$$

$$\sigma_{B_2}^{-1}(\sigma_{B_2} L_1^{B_2} x_{1n} \circ \sigma_{A_{k-1}} D_{k-1}(x_{22}^{2n}))).$$

Kako je $\sigma_{A_{k-1}}$ bijekcija, a D_{k-1} kvazigrupa, postoje $x_{22}, \ldots, x_{2n}$ takvi da je

$$\sigma_{A_{k-1}} D_{k-1}(x_{22}^{2n}) = (\sigma_{B_2} L_1^{B_2} x_{1n})^{-1}$$

(u^{-1} označava inverzni element od elementa u, u odnosu na grupnu operaciju $\circ$).

Tada imamo

$$\sigma_{A_k} A_k(x_1^n) = P(x_1, \sigma_{B_2} L_1^{B_2} x_2 \circ (\sigma_{B_2} L_1^{B_2} x_n)^{-1}, \ldots,$$

$$\sigma_{B_2} L_1^{B_2} x_{n-1} \circ (\sigma_{B_2} L_1^{B_2} x_n)^{-1}) \circ \sigma_{B_2} L_1^{B_2} x_n,$$

gde je

$$P(x_1^{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} B_1(x_1, \sigma_{B_2}^{-1} x_2, \ldots, \sigma_{B_2}^{-1} x_{n-1}, e)$$

kvazigrupa dužine n-1.

Kako je

$$\sigma_{A_k} A_k(x_1^n) = B_1(x_1, L_1^{B_2} x_2, \ldots, L_1^{B_2} x_n),$$

imamo na kraju

$$B_1(x_1^n) = P(x_1, \sigma_{B_2} x_2 \circ (\sigma_{B_2} x_n)^{-1}, \ldots, \sigma_{B_2} x_{n-1} \circ (\sigma_{B_2} x_n)^{-1}) \circ \sigma_{B_2} x_n.$$

Ovim je teorema dokazana.

3.3 Veza izmedju Dikerovog i (1,n)-asocijativnog zakona.

Neka su A,B,C,D četiri n-arne kvazigrupe definisane na nepraznom skupu M, koje zadovoljavaju zakon (5).

Neka je $a\in M$ neki fiksirani element.

Uvodimo preslikavanja $\theta_B:M\rightarrow M$ i $\theta_C:M\rightarrow M$ sa

$$\theta_B x \overset{def}{=\!=} B(\overset{i}{a},\overset{n-1}{x}),$$

$$\theta_C x \overset{def}{=\!=} C(\overset{i}{a},\overset{n-1}{x}).$$

Iz zakona (5) imamo

(9) $A(\theta_B x, y_2^n) = \theta_C D(x, y_2^n)$.

Stavljajući $x=y_2=\ldots=y_{n-1}=a$ iz (9) dobijamo

$$L_n^A y_n = \theta_C L_n^D y_n,$$

odakle sledi da je θ_C permutacija.

Stavljajući u (9) $y_2=\ldots=y_n=a$, dobijamo

(10) $$L_1^A \theta_B x = \theta_C L_1^D x$$

odakle sledi da je θ_B permutacija.

Prema tome, iz (9) sledi da su kvazigrupe A i D izotopne.

Iz zakona (5) imamo takodje

(11) $$L_1^A B(x_1^n) = C(x_1^i, L_1^D x_{i+1}, \ldots, L_1^D x_n)$$

odakle zaključujemo da su kvazigrupe B i C izotopne.

Kako su θ_B i θ_C permutacije, operacije B i C definisane sa

$$\bar{C}(x_1^{i+1}) \overset{def}{=\!=} C(x_1^i, \overset{n-i}{x_{i+1}})$$

i $$\bar{B}(x_1^{i+1}) \overset{def}{=\!=} B(x_1^i, \overset{n-i}{x_{i+1}})$$

su kvazigrupe dužine i+1.

Teorema 3.3.1. *Ako su A,B,C,D n-arne kvazigrupe na skupu M vezane zakonom (5), postoji grupa $\circ$ i (n-1)-arne kvazigrupe P i Q na skupu M takve da je*

$$A(x_1^n) = L_1^A x_1 \circ Q(x_2^n),$$

$$\theta_C D(x_1^n) = \theta_C L_1^D x_1 \circ Q(x_2^n),$$

$$L_1^A B(x_1^n) = P(x_1^i, \theta_C L_1^D x_{i+1} \circ (\theta_C L_1^D x_n)^{-1}, \ldots,$$

$$\theta_C L_1^D x_{n-1} \circ (\theta_C L_1^D x_n)^{-1}) \circ \theta_C L_1^D x_n,$$

$$C(x_1^n) = P(x_1^i, \theta_C x_{i+1} \circ (\theta_C x_n)^{-1}, \ldots,$$

$$\theta_C x_{n-1} \circ (\theta_C x_n)^{-1}) \circ \theta_C x_n.$$

Dokaz. Uvodimo GD-grupoide $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ pomoću

$$\tilde{A}(x_1, (x_2^n)) \overset{def}{=} A(x_1^n),$$
$$\tilde{B}((x_1^i), x_{i+1}) \overset{def}{=} B(x_1^{i+1})$$
$$\tilde{C}((x_1^i), x_{i+1}) \overset{def}{=} C(x_1^{i+1}),$$
$$\tilde{D}(x_1, (x_2^n)) \overset{def}{=} D(x_1^n).$$

Tada iz (5) dobijamo

$$\tilde{A}(\tilde{B}x, y)z) = \tilde{C}(x, \tilde{D}(y, z)),$$ Odavde je

(12) $$\tilde{A}(x,y) = L_1^{\tilde{A}} x \circ L_2^{\tilde{A}} y$$

odnosno $$A(x_1^n) = L_1^A x_1 \circ Q(x_2^n)$$

gde je $$Q(x_2^n) \overset{def}{=} A(a, x_2^n)$$

Iz (9) i (lo) imamo

(13) $$\theta_C D(x_1^n) = \theta_C L_1^D x_1 \circ Q(x_2^n).$$

Uzimajući u obzir (12) i (13), (5) postaje

$$L_1^A B(x_1^n) \circ Q(y_2^n) = C(x_1^i, \theta_C^{-1}(\theta_C L_1^D x_{i+1} \circ Q(y_2^n)), \ldots, \theta_C^{-1}(\theta_C L_1^D x_n \circ Q(y_2^n)))$$

Ako stavimo $Q(y_2^n) = (\theta_C L_1^D x_n)^{-1}$, iz prethodne jednakosti dobijamo

$$L_1^A B(x_1^n) = P(x_1^i, \theta_C L_1^P x_{i+1} \circ (\theta_C L_1^D x_n)^{-1},$$

$$\ldots, \theta_C L_1^D x_{n-1} \circ (\theta_C L_1^D x_n)^{-1}) \circ \theta_C L_1^D x_n$$

gde je

$$P(x_1^{n-1}) \overset{def}{=\!=} C(x_1^i, \theta_C^{-1} x_{i+1}, \ldots, \theta_C^{-1} x_{n-1}, e)$$

kvazigrupa dužine n-1, e jedinica grupe $\circ$.

Iz (11) imamo najzad

$$C(x_1^n) = P(x_1^i, \theta_C x_{i+1} \circ (\theta_C x_n)^{-1}, \ldots, \theta_C x_{n-1} \circ (\theta_C x_n)^{-1}) \circ \theta_C x_n,$$

čime je teorema dokazana.

Iz teoreme 3.3.1 dobijaju se poznati rezultati [13] , [56] za i=1 i za i=n-1.

IV DEO

4. JEDNA KLASA URAVNOTEŽENIH ZAKONA NA KVAZIGRUPAMA RAZNIH DUŽINA

4.1. Uvod

Uočimo uravnoteženi zakon $w_1=w_2$ oblika

(1) $A(u_1,\ldots,u_m)=B(v_1,\ldots,v_n)$,

gde je

$$u_i = A_i(x_{i1}^{im_i}), \qquad i=1,\ldots,m,$$
$$v_i = B_i(y_{i1}^{in_i}), \qquad i=1,\ldots,n.$$

A,B,A_i,B_i su operacijska slova, dužina redom m,n,m_i,n_i.

Pri tome je $\sum_{i=1}^{m} m_i = \sum_{i=1}^{m} n_i$, i niz $y_{11},\ldots,y_{nn_n}$ je neka permutacija niza $x_{11},\ldots,x_{mm_m}$.

U ovom delu ispitujemo kvazigrupe A,B,A_i,B_i, definisane na nepraznom skupu M, vezane zakonom (1). Opisujemo postupak, kojim se od zakona (1) na kvazigrupama prelazi na zakon, podesan za ispitivanje, na GD-grupoidima, koji su vezani sa polaznim kvazigrupama. Ovakav zakon zovemo uopšteni r-entropijski zakon. Opisujemo zatim ove GD-grupoide, pomoću izvesnih lupa definisanih na skupu M. Koristeći dobijene rezultate, opisujemo polazne kvazigrupe.

4.2. Svodjenje zakona (1) na uopšteni r-entropijski zakon.

Postupak ćemo podeliti na nekoliko koraka.

1. korak. Promenljive u termima u_i $(i=1,\ldots,m)$ preuredimo po redu pojavljivanja u w_2, i uvodimo kvazigrupe $\bar{A}_i$, konjugovane sa A_i:

$$\bar{A}_i(z_{i1},\ldots,z_{im_i}) \stackrel{\text{def}}{=} A_i(x_{i1},\ldots,x_{im_i}),$$

gde su $(z_{i1},\ldots,z_{im_i})$ m_i-torke dobijene iz $(x_{i1},\ldots,x_{im_i})$ tim preuredjivanjem. Na ovaj način dobijamo od terma w_1 term $\bar{w}_1 = A(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m)$ i važi $\bar{w}_1 = w_1$. Preuredimo sada promenljive u termima v_i $(i=1,\ldots,n)$ po redu pojavljivanja u $\bar{w}_1$, i uvodimo, analogno, kvazigrupe $\bar{B}_i$, konjugovane sa B_i:

$$\bar{B}_i(t_{i1},\ldots,t_{in_i}) \overset{\text{def}}{=\!=} B(y_{i1},\ldots,y_{in_i})$$

gde su $(t_{i1},\ldots,t_{in_i})$ n_i-torke dobijene iz $(y_{i1},\ldots,y_{in_i})$ navedenim postupkom. Na ovaj način dobijamo term $\bar{w}_2 = B(\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n)$ i imamo $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$.

<u>Primer</u>. Zakon $A(A_1(x,y),A_2(z,u,v)) = B(B_1(v,y,z),B_2(u,x))$ postaje $A(\bar{A}_1(y,x),\bar{A}_2(v,z,u)) = B(\bar{B}_1(y,v,z),\bar{B}_2(x,u))$.

<u>2.korak.</u> Uočimo podterme $\bar{u}_1 = \bar{A}_1(z_{11},\ldots,z_{1m_1})$ i $\bar{v}_j = \bar{B}_j(t_{j1},\ldots,t_{jn})$ $j=1,\ldots,n$. Nazovimo α_{1j} zajednički podniz nizova $(z_{11},\ldots,z_{1m_1})$ i $(t_{j1},\ldots,t_{jn_j})$. Tada niz $(z_{11},\ldots,z_{1m_1})$postaje niz $(\alpha_{11},\ldots\ \alpha_{1n})$, pri čemu neki od podnizova α_{1j} može i nedostajati, ako u_1 i v_j nemaju zajedničkih promenljivih. Na ovaj način razlažemo sve nizove $(z_{i1},\ldots,z_{im_i})$, $i=1,\ldots,m$, i analogno sve nizove $(t_{j1},\ldots,t_{jn_j})$, $j=1,\ldots,n$. Zatim uvodimo GD-grupoide

$$\tilde{A}_i : M^{|\alpha_{i1}|}\times\ldots\times M^{|\alpha_{in}|} \longrightarrow M$$

$(|\alpha_{ij}|$ je dužina niza $\alpha_{ij})$, dužine najviše n, sledećom definicijom:

$$\tilde{A}_i(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in}) \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{A}_i(z_{i1},\ldots,z_{im_i}).$$

Analogno uvodimo GD-grupoide

$$\tilde{B}_j : M^{|\alpha_{1j}|}\times\ldots\times M^{|\alpha_{mj}|} \longrightarrow M$$

pomoću

$$\tilde{B}_j(\alpha_{1j},\ldots,\alpha_{mj}) \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{B}_j(t_{j1},\ldots,t_{jn_j}).$$

Na ovaj način, sa zakona $\bar{w}_1=\bar{w}_2$ na kvazigrupama, prelazimo na zakon $\hat{\tilde{w}}_1=\hat{\tilde{w}}_2$ na GD-grupoidima, koji je takodje uravnotežen i ima sledeća svojstva.

1° Red ulaženja promenljivih u makoji term $\hat{\tilde{u}}_i$ ($\hat{\tilde{v}}_i$) jednak je redu ulaženja tih promenljivih u $\hat{\tilde{w}}_2$ ($\hat{\tilde{w}}_1$).

2° Dve promenljive istog terma $\hat{\tilde{u}}_i$($\hat{\tilde{v}}_i$) pripadaju raznim termima $\hat{\tilde{v}}_j$ i $\hat{\tilde{v}}_k$ ($\hat{\tilde{u}}_j$ i $\hat{\tilde{u}}_k$).

<u>Primer</u>. Zakon $A(A_1(x,y),A_2(z,u,v))=B(B_1(z,u),B_2(x,y,v))$ postaje $A(\hat{\tilde{A}}_1(X),\hat{\tilde{A}}_2(Z,v))=B(\hat{\tilde{B}}_1(Z),\hat{\tilde{B}}_2(X,v))$.

<u>3. korak.</u> Predpostavimo da term $\hat{\tilde{w}}_2$ sadrži neki podterm $\hat{\tilde{v}}_j = \hat{\tilde{B}}_j(\alpha_{j1},\dots\alpha_{jm})$, dužine veće od 1, i da neke promenljive $\alpha_{j\mu},\dots,\alpha_{j\nu}$ toga terma ulaze redom u terme dužine 1 $\hat{\tilde{u}}_{j\mu},\dots,\hat{\tilde{u}}_{j\nu}$ terma $\hat{\tilde{w}}_1$. Označimo sa α_j niz $(\alpha_{j\mu},\dots,\alpha_{j\nu})$. Uočimo sve podterme $\hat{\tilde{v}}_j$, $j\in J\subset\{1,\dots,n\}$ koji imaju navedeno svojstvo, i definišimo GD-grupoide $\tilde{\hat{B}}_j$ pomoću terma koji se dobija iz $\hat{\tilde{v}}_j$ ako se umesto promenljive $\alpha_{j\mu}$ stavi α_j, a ostale promenljive niza α_j brišu. Definišimo zatim GD-grupoid $\tilde{\hat{A}}$ dužine $m'\leq m$, pomoću terma koji se dobija iz $A(\hat{\tilde{u}}_1,\dots,\hat{\tilde{u}}_m)$ ako se za svako $j\in J$ umesto podterma $\hat{\tilde{u}}_{j\mu}$ stavi α_j a podtermi koji sadrže ostale promenljive iz α_j brišu.

Na analogan način uvodimo GD-grupoide $\tilde{\hat{A}}_i$ i $\tilde{\hat{B}}$

<u>Primer</u>. Zakon $A(A_1(x),A_2(y,z,v),A_3(w),A_4(u))=B(B_1(x,y,u),B_2(z),B_3(v,w))$, postaje $\tilde{\hat{A}}(X,A_2(y,z,v),w)=\tilde{\hat{B}}(\tilde{\hat{B}}_1(X,y),z,B_3(v,w))$.

Ovim korakom prelazimo na zakon $\tilde{\hat{A}}(\tilde{\hat{u}}_1,\dots,\tilde{\hat{u}}_{m'})=\tilde{\hat{B}}(\tilde{\hat{v}}_1,\dots,\tilde{\hat{v}}_{n'})$ koji pored navedenih svojstava 1° i 2° ima i sledeća svojstva.

3° Ako je $\tilde{\hat{u}}_i=\tilde{\hat{A}}_i(x_1,\dots,x_s)$ makoji podterm terma $\tilde{\hat{w}}_1$ i $s>1$, najviše jedna promenljiva x_k terma $\tilde{\hat{u}}_i$ ulazi u term $\overset{\approx}{v}_j$ dužine 1 i tada je $\overset{\approx}{v}_j=x_k$. Slično važi i za terme $\overset{\approx}{v}_i$. Ako neka promenljiva x ulazi sa obe strane zakona u podterm dužine 1, najviše [illegible] od njih je promenljiva.

(ii) Ako term $\tilde{\tilde{u}}_i$ ($\tilde{\tilde{v}}_i$) nije promenljiva, preslikavanje $L_i^{\tilde{A}}(L_i^{\tilde{B}})$ je bijekcija.

Dokaz. Uočimo skup terma $S=\{\tilde{\tilde{u}}_1,\dots,\tilde{\tilde{u}}_{m'},\tilde{\tilde{v}}_1,\dots,\tilde{\tilde{v}}_{n'}\}$ i razložimo ga na minimalne neprazne podskupove $S_j=\{\tilde{\tilde{u}}_\alpha,\dots,\tilde{\tilde{u}}_\beta,\tilde{\tilde{v}}_\gamma,\dots,\tilde{\tilde{v}}_\delta\}$, takve da je

$$\bigcup_{i\in\{\alpha,\dots,\beta\}}[\tilde{\tilde{u}}_i] = \bigcup_{i\in\{\gamma,\dots,\delta\}}[\tilde{\tilde{v}}_i] .$$

Na ovaj način skup S razlaže se na disjunktne skupove $S_1,\dots,S_r$. Preuredimo niz $(\tilde{\tilde{u}}_1,\dots,\tilde{\tilde{u}}_{m'})$ na sledeći način. Uočimo prvo terme $\tilde{\tilde{u}}_i$ skupa S_1, zatim terme skupa S_2, itd, najzad uočimo terme skupa S_r i to svaki put onim redom kojim se ti termi javljaju u termu $\tilde{\tilde{w}}_1$. Neka je $(u'_1,\dots,u'_{m'})$ tako dobijeni niz. Analogno definišemo niz $(v'_1,\dots,v'_{n'})$. Ovi nizovi odredjeni su do na poredak skupova S_j u nizu $S_1,\dots,S_r$. Uvodimo sada GD-grupoide A′ i B′, konjugovane redom sa A i B, pomoću

$$A'(u'_1,\dots,u'_{m'}) \overset{def}{=} \tilde{A}(\tilde{\tilde{u}}_1,\dots,\tilde{\tilde{u}}_{m'}),\ \text{i}$$
$$B'(v'_1,\dots,v'_{n'}) \overset{def}{=} \tilde{B}(\tilde{\tilde{v}}_1,\dots,\tilde{\tilde{v}}_{n'}).$$

Dobijeni zakon

$$A'(u'_1,\dots,u'_{m'}) = B'(v'_1,\dots,v'_{n'})$$

postaje uopšteni r-entropijski zakon.

Primer. Zakon $A(A_1(y,x),v,z)=B(B_1(v),B_2(y,z),x)$ postaje

$$A'(A_1(y,x),z,v)=B'(B_2(y,z),x,B_1(v)).$$

U sledećoj [illegible] zadržaćemo se na ispitivanju GD-grupoida koji zadovoljavaju uopšteni r-entropijski zakon.

4.3. Uopšteni r-entropijski zakon na GD-grupoidima.

[illegible] uopšteni zakon

$$(1) \qquad C(u_1^p)=D(v_1^q)$$

gde je

$$u_i = C_i(x_{i\alpha}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{i\beta}),\ i=1,\ldots,p,\ 1\leqslant\alpha<\ldots<j<\ldots<\beta\leqslant q,$$
$$v_j = D_j(x_{\alpha j}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{\beta j}),\ j=1,\ldots,q,\ 1\leqslant\alpha<\ldots<i<\ldots<\beta\leqslant p$$

na GD-grupoidima C,D,C_i,D_j

definisanim sa

1. $x_{ij}\in X_{ij}$, $1\leqslant i\leqslant p$, $1\leqslant j\leqslant q$.
2. $C_i: X_{i\alpha}\times\ldots\times X_{i\beta}\to P_i$,
   $D_j: X_{\alpha j}\times\ldots\times X_{\beta j}\to Q_j$.
3. $C: P_1\times\ldots\times P_p\to M$,
   $D: Q_1\times\ldots\times Q_q\to M$.

(Ako je $u_i=x_{i\alpha}$, C_i je identično preslikavanje $X_{i\alpha}\to X_{i\alpha}=P_i$, i slično, ako je $v_j=x_{\alpha j}$, D_j je identično preslikavanje $X_{\alpha j}\to X_{\alpha j}=Q_j$.)
X_{ij},P_i,Q_j,M su proizvoljni neprazni skupovi.

Zakon (2) ima svojstva 1° i 2°, predpostavimo da ima i svojstva $3^\circ,4^\circ$ i sledeće svojstvo:

5° Nizovi $(u_1,\ldots,u_p)$ i$(v_1,\ldots,v_q)$ su oblika
$(u_{11},\ldots,u_{1p_1},\ldots,u_{r1},\ldots u_{rp_r})$, odnosno
$(v_{11},\ldots,v_{1q_1},\ldots,v_{r1},\ldots,v_{rq_r})$,
pri čemu je

$$\bigcup_{i=1}^{p_1}[u_{1i}] = \bigcup_{i=1}^{q_1}[v_{1i}],\ldots,\bigcup_{i=1}^{p_r}[u_{ri}] = \bigcup_{i=1}^{q_r}[v_{ri}].$$

Ovaj zakon zovemo uopšteni r-entropijski zakon tipa p**x**q.

Promenljive zakone (2) možemo predstaviti u vidu matrice $|m_{ij}|$ tipa p**x**q, definisane sa $m_{ij}=x_{ij}$, ako se u zakonu (2) javlja promenljiva x_{ij}, inače $m_{ij}=0$. Dakle, promenljive terma u_i pripadaju i-toj vrsti, a promenljive terma v_j j-toj koloni.

Na osnovu osobine 5°, ova matrica je blokovski dijagonalna, sa r blokova $B_1,\ldots,B_r$ na dijagonali, koji odgovaraju redom skupovima $S_1,\ldots,S_r$. Blok B_i je formata $p_i\times q_i$.

Neka su $a_{ij}\in X_{ij}$ fiksirani elementi skupova X_{ij}.

Uvodimo GD-grupoide izvedene iz zakona (2).

Neka je $(u_\mu,\dots,u_\nu)$ makoji neprazan podniz niza $(u_1,\dots,u_p)$ i $(v_\mu,\dots,v_\nu)$ makoji neprazan podniz niza $(v_1,\dots,v_q)$. Definišemo izvedene GD-grupoide

$$L^C_{\mu\dots\nu}(u_\mu,\dots,u_\nu) \overset{def}{=} C(u_1,\dots,u_p)\Big|^{x_{ij}\varepsilon W\setminus([u_\mu]\cup\dots\cup[u_\nu])}_{a_{ij}\varepsilon X_{ij}} ,$$

$$L^D_{\mu\dots\nu}(v_\mu,\dots,v_\nu) \overset{def}{=} C(v_1,\dots,v_q)\Big|^{x_{ij}\varepsilon W\setminus([v_\mu]\cup\dots\cup[v_\nu])}_{a_{ij}\varepsilon X_{ij}} .$$

Dalje, za makoje GD-grupoide C_i i D_j definišimo izvedene GD-grupoide

$$L^{C_i}_{\mu\dots\nu}(x_\mu,\dots,x_\nu) \overset{def}{=} C_i(x_{i\alpha},\dots,x_{i\beta})\Big|^{x_{ij}\varepsilon[u_i]\setminus\{x_\mu,\dots,x_\nu\}}_{a_{ij}\varepsilon X_{ij}}$$

$$L^{D_j}_{\mu\dots\nu}(x_\mu,\dots,x_\nu) \overset{def}{=} D_j(x_{\alpha j},\dots,x_{\beta j})\Big|^{x_{ij}\varepsilon[v_j]\setminus\{x_\mu,\dots,x_\nu\}}_{a_{ij}\varepsilon X_{ij}}$$

Uvodimo sada u skup izvedenih GD-grupida neke pomoćne relacije.

Uočimo skup svih GD-grupoida izvedenih iz C i D, tj. sve GD-grupoide oblika $L^C_{\alpha\dots\beta}$ i $L^D_{\mu\dots\nu}$. U ovaj skup uvodimo relaciju $\longrightarrow$ na sledeći način. Za GD-grupoide $L^P_{\alpha\dots\beta}$ i $L^Q_{\mu\dots\nu}$ $(P,Q\varepsilon\{C,D\})$ kažemo da je $L^P_{\alpha\dots\beta}\longrightarrow L^Q_{\mu\dots\nu}$ ako i samo ako postoje promenljive $x_\alpha,\dots,x_\beta$ u zakonu (2) takve da fiksiranjem ostalih promenljivih x_{ij} sa $a_{ij}\varepsilon X_{ij}$, dobijamo jednakost

$$L^P_{\alpha\dots\beta}(\phi_\alpha x_\alpha,\dots,\phi_\beta x_\beta)=L^Q_{\mu\dots\nu}(\psi_{\mu_1\dots\mu_k}(x_{\mu_1},\dots,x_{\mu_k}),$$
$$\dots,\psi_{\nu_1\dots\nu_h}(x_{\nu_1},\dots,x_{\nu_h})),$$

gde su $\phi_\alpha,\dots,\phi_\beta$ neki GD-grupoidi dužine 1, $\psi_{\mu_1\dots\mu_k},\dots,$ $\psi_{\nu_1\dots\nu_h}$ GD-grupoidi dužine veće ili jednake 1. Pri tome je GD-grupoid $L^Q_{\mu\dots\nu}$ dužine manje ili jednake dužini GD-grupoida $L^P_{\alpha\dots\beta}$.

Neka je $\Longrightarrow$ minimalna tranzitivna i refleksivna relacija koja sadrži $\longrightarrow$. U vezi sa ovom relacijom dokazujemo nekoliko pomoćnih tvrdjenja.

Neka je $w_1=w_2$ zakon (2) za koji je $r=1$, tj. svi termi u_i, v_j su u istom skupu S_1. Tada važe sledeće leme.

Lema 4.3.1 *Svaka dva GD-grupoida* L_α^P *i* L_μ^Q $(P,Q\varepsilon\{C,D\})$ *izvedena iz uopštenog 1-entropijskog zakona su u relaciji* $\Longrightarrow$.

Dokaz. Lema sledi neposredno iz definicije relacije $\Longrightarrow$ i definicije skupa S_1.

Lema 4.3.2 *Svaka dva binarna GD-grupoida* $L_{\alpha\beta}^P$ *i* $L_{\mu\nu}^Q (P,Q\varepsilon\{C,D\})$ *izvedena iz uopštenog 1-entropijskog zakona su u relaciji* $\Longrightarrow$.

Dokaz. Dokazujemo, prvo, sledeće. Ako $L_\alpha^C\longrightarrow L_\mu^D$, $\beta\neq\alpha$, postoji $\lambda\neq\mu$ tako da $L_{\alpha\beta}^C\longrightarrow L_{\mu\lambda}^D$.

Neka $L_\alpha^C\xrightarrow{x} L_\mu^D$, tada x ulazi u terme u_α i v_μ. Term u_β ili sadrži promenljivu y koja ulazi u neki v_ν, $\nu\neq\mu$, ili sadrži samo jednu promenljivu y koja ulazi u term v_μ. U prvom slučaju, $L_{\alpha\beta}^C\xrightarrow{x,y} L_{\mu\nu}^D$. U drugom, zbog osobine 3° (str.45) u_α sadrži promenljivu z koja ulazi u neki v_ν, $\nu\neq\mu$, pa je $L_{\alpha\beta}^C\xrightarrow{y,z} L_{\mu\nu}^D$.

Odavde neposredno sledi: Ako $L_\alpha^P\Longrightarrow L_\mu^Q$, $(P,Q\varepsilon\{C,D\})$ i $\beta\neq\alpha$, postoji $\lambda\neq\mu$ tako da $L_{\alpha\beta}^P\Longrightarrow L_{\mu\lambda}^Q$,

Dalje, ako $L_\alpha^P\Longrightarrow L_\mu^P$ i $\beta\neq\alpha$, $\beta\neq\mu$, tada $L_{\alpha\beta}^P\Longrightarrow L_{\mu\beta}^P$.

Iz $L_\alpha^P\Longrightarrow L_\mu^P$ sledi da postoji niz

$L_\alpha^P\longrightarrow L_\rho^Q\longrightarrow L_\sigma^P\longrightarrow \ldots\longrightarrow L_\tau^Q\longrightarrow L_\mu^P$.

Na osnovu predhodnog, postoji ν, takav da je $L_{\alpha\beta}^P\longrightarrow L_{\rho\nu}^Q$.

Ako je $\sigma\neq\beta$, tada je $L_{\rho\nu}^Q\longrightarrow L_{\sigma\beta}^P$, ako je $\sigma=\beta$, tada je $L_{\rho\nu}^Q\longrightarrow L_{\sigma\alpha}^P=L_{\beta\alpha}^P$. Nastavljajući postupak, dobijamo niz

$L_{\alpha\beta}^P\longrightarrow L_{\rho\nu}^Q\longrightarrow L_{\sigma\beta}^P(L_{\sigma\alpha}^P)\longrightarrow\ldots\longrightarrow L_{\tau\lambda}^Q\longrightarrow L_{\mu\beta}^P$, jer je $\mu\neq\beta$.

Neka su $L_{\alpha\beta}^P$ i $L_{\mu\nu}^Q$ proizvoljna dva binarna GD-grupoida.

Na osnovu predhodnog, postoji λ, takav da je $L_{\alpha\beta}^P\Longrightarrow L_{\mu\lambda}^Q$

i $L^Q_{\mu\lambda} \Rightarrow L^Q_{\mu\nu}$. Odavde sledi $L^P_{\alpha\beta} \Rightarrow L^Q_{\mu\nu}$, čime je lema dokazana.

Uvodimo sada u skup svih izvedenih binarnih GD-grupoida $L^P_{\alpha\beta}, P\varepsilon\{C,D,C_i,D_i\}$, relaciju $\sim$ iz II dela. Relacije $\Rightarrow$ i $\sim$ poklapaju se na skupu svih $L^P_{\alpha\beta}, P\varepsilon\{C,D\}$. Tada imamo sledeću posledicu predhodne leme.

Posledica 1. Svaka dva GD-grupoida izvedena iz uopštenaog 1-entropijskog zakona su u relaciji $\sim$.

Lema 4.3.3 *Za svaki GD-grupoid $L^P_{\alpha\ldots\beta}$ izveden iz uopštenog 1-entropijskog zakona postoji GD-grupoid $L^Q_{\mu\ldots\nu}$ manje dužine takav da je $L^P_{\alpha\ldots\beta} \Rightarrow L^Q_{\mu\ldots\nu}$* $(P,Q\varepsilon\{C,D\})$.

Dokaz. Dokazujemo prvo da za svaki binarni GD-grupoid $L^P_{\alpha\beta}$ postoji GD-grupoid L^Q_μ dužine 1, takav da je $L^P_{\alpha\beta} \Rightarrow L^Q_\mu$. Kako su svi termi u istom skupu S_1, postoji term u_i sa bar dve promenljive, x_j i x_k, koje pripadaju redom termima v_j i v_k. Tada je $L^D_{jk} \rightarrow L^C_i$. Na osnovu predhodne leme, za svaki binarni GD-grupoid $L^P_{\alpha\beta}$ je $L^P_{\alpha\beta} \Rightarrow L^D_{jk}$, što sa $L^D_{jk} \Rightarrow L^C_i$ daje $L^P_{\alpha\beta} \Rightarrow L^C_i$. Dakle za svaki $L^P_{\alpha\beta}$ postoji L^Q_μ takav da je $L^P_{\alpha\beta} \Rightarrow L^Q_\mu$, tj. postoji niz

$$L^P_{\alpha\beta} \xrightarrow{x_1,y_1} L^{P_2}_{\alpha_2\beta_2} \xrightarrow{x_2,y_2} \ldots \xrightarrow{x_{k-1},y_{k-1}} L^Q_\mu .$$

Neka je $L^P_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ GD-grupoid proizvoljne dužine $(P,Q\varepsilon\{C,D\})$.
Tada imamo iz predhodnog niza

$$L^P_{\alpha\beta\ldots\gamma} \xrightarrow{x_1,y_1,\ldots,z} L^{P_2}_{\alpha_2\beta_2\ldots\gamma_2} \xrightarrow{x_2,y_2,\ldots,z} \ldots \xrightarrow{x_{k-1},y_{k-1},\ldots,z} L^Q_{\mu\ldots\nu}$$

gde je dužina GD-grupoida $L^Q_{\mu\ldots\nu}$ bar za jedan manja od dužine GD-grupoida $L^P_{\alpha\beta\ldots\gamma}$.

Posledica 2. Za svaki GD-grupoid $L^P_{\alpha\beta\ldots\gamma}(P,Q\in\{C,D\})$ izveden iz uopštenog 1-entropijskog zakona postoji binarni GD-grupoid $L^Q_{\mu\nu}$ takav da je $L^P_{\alpha\beta\ldots\gamma}\Rightarrow L^Q_{\mu\nu}$.

Posledica 3. Za svaki GD-grupoid $L^P_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ $(P,Q\in\{C,D\})$ izveden iz uopštenog 1-entropijskog zakona postoji GD-grupoid L^Q_{μ} dužine 1 takav da je $L^P_{\alpha\beta\ldots\gamma}\Rightarrow L^Q_{\mu}$.

Uvodimo sada u skup binarnih GD-grupoida izvedenih iz zakona (2) relaciju ekvivalencije $\underset{\sim}{\sim}$. Sledeće rezonovanje analogno je onom u II delu.

Neka je za zakon (2) $r=1$. Na osnovu posledice 1, svi binarni izvedeni GD-grupoidi su u istom skupu $K_{\sim}$. Razlikujemo dva slučaja.

1° Za neki $L^P_{\alpha\beta}$ $(P,Q\in\{C,D,C_i,D_i\})$ postoji niz $L^P_{\alpha\beta}\sim L^P_{\alpha\beta}$ sa neparnim brojem inverzija.

2° Za svaki $L^P_{\alpha\beta}$, svaki niz $L^P_{\alpha\beta}\sim L^P_{\alpha\beta}$ ima paran broj inverzija.

U slučaju 1°, $K_{\sim}=K_{\underset{\sim}{\sim}}$.

U slučaju 2°, postoje dve mogućnosti,

2' $K_{\sim}=K_{\underset{\sim}{\sim}}$, ili

2'' $K_{\sim}=K^1_{\underset{\sim}{\sim}}\cup K^2_{\underset{\sim}{\sim}}$.

Ako je 2', zakon (2) je prve vrste. Očigledno, važi i obrnuto, za svaki zakon (2) prve vrste za koji je $r=1$ važi 2'. Slučaj 2'' svodi se na zakon prve vrste zamenom svih GD-grupoida $L^P_{\alpha\beta}$ iz jedne od klasa, recimo $K^2_{\underset{\sim}{\sim}}$, sa njima konjugovanim $L^{P*}_{\alpha\beta}$.

Primeri.

1. Zakon $A(A_1(x,y),A_2(z,u),A_3(v,w))=B(B_1(z,v),B_2(x,w),B_3(y,u))$ nije prve vrste, i $K_{\sim}=K_{\underset{\sim}{\sim}}$. Dakle je slučaj 1°.

2. Zakon $A(z,A_2(x,y),A_3(u,v))=B(x,B_2(z,y,u),v)$ nije prve vrste ali je $K_{\sim}=K^1_{\underset{\sim}{\sim}}\cup K^2_{\underset{\sim}{\sim}}$, pa se svodi na zakon prve vrste:

$\bar{A}(A_2(x,y),z,A_3(u,v))=B(x,\tilde{B}_2(y,z,u),v)$
zamenom GD-grupoida L_{12}^{A} sa $L_{12}^{A^*}$ i $L_{12}^{B_2}$ sa $L_{12}^{B_2^*}$.
Odavde zaključujemo da je dovoljno ispitivati zakone (2) za koje je $K_{\sim}=K_{\approx}$.

<u>Teorema 4.3.1</u> *Neka su svi binarni GD-grupoidi, izvedeni iz uopštenog 1-entropijskog zakona, u istoj klasi $K_{\approx}$. Tada postoji grupa $\circ$, definisana na skupu M, koja je homotopna slika svih izvedenih binarnih GD-grupoida. Za svaki GD-grupoid $L^{P}_{\alpha\ldots\beta}$ izveden iz ovog zakona važi*

$$\sigma_P L^{P}_{\alpha\ldots\beta}(x_\alpha,\ldots,x_\beta)=\sigma_P L^{P}_{\alpha}x_\alpha\circ\ldots\circ\sigma_P L^{P}_{\beta}x_\beta.$$

<u>Dokaz.</u> Neka je zakon tipa $p\times q$.

Ako je $p=q=2$, teorema sledi iz teoreme 2.2.1, II deo.

Neka je $q>2$. Ako postoji najviše jedan term v_j dužine 1, postoje bar dva terma v_ν i v_μ dužine veće od 1. Ako postoje dva terma v_ν i v_μ dužine 1, tj. $v_\nu=x_{i\nu}$ i $v_\mu=x_{j\mu}$, $j\neq i$, tada su termi u_i i u_j dužine veće od 1, inače ne bi bilo $r=1$.

Postoje dakle za $q>2$ dva terma, v_i i v_j ili u_i i u_j dužine veće od 1. Slično je i za $p>2$.

Ako su termi u_i i u_j dužine veće od 1, uvodimo binarnu operaciju $\circ$ skupa M sledećom definicijom:

$$L^{C}_{ij}(x,y)=L^{C}_{i}x\circ L^{C}_{j}y.$$

Na osnovu osobine 4°, L^{C}_{i} i L^{C}_{j} su bijekcije, dakle je operacija $\circ$ lupa.

Ako su termi v_i i v_j dužine veće od 1, uvodimo operaciju $\circ$ sa:

$$L^{D}_{ij}(x,y)=L^{D}_{i}x\circ L^{C}_{j}y.$$

Kako su L^{D}_{i} i L^{D}_{j} bijekcije, $\circ$ je lupa.

Kako su svi izvedeni binarni GD-grupoidi u istoj klasi $K_{\approx}$

za svaki grupoid $L^P_{\alpha\beta}$ važi

(3) $$\sigma_P L^P_{\alpha\beta}(x,y) = \sigma_P L^P_\alpha x \circ \sigma_P L^P_\beta y,$$

pri čemu je ili zakon I vrste, ili je operacija $\circ$ komutativna.

Dokazujemo da je $\circ$ grupa.

Neka je u_i term dužine veće od 1, $u_i = C_i(\ldots, x, \ldots, y, \ldots)$. Bar jedan od terma v_j i v_k koji sadrže x odnosno y je dužine veće od 1, neka je to naprimer $v_k = D_k(\ldots, y, \ldots, z, \ldots)$. Ako fiksiramo u zakonu sve promenljive sem x, y, z, imamo

$$L^{C\circ}_{ij}(L^{C_i\circ}_{\alpha\beta}(x,y), L^{C_j}_{\gamma} z) = L^{D\circ}_{hk}(L^{D_h}_{\mu} x, L^{D_k\circ}_{\nu\lambda}(y,z)).$$

Kako je ili zakon I vrste ili operacija $\circ$ komutativna, odavde sledi

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

dakle je operacija $\circ$ grupa.

Dokažimo da za svaki GD-grupoid $L^P_{\alpha\ldots\beta}$ $(P, Q \in \{C, D, C_i, D_i\})$

$$\sigma_P L^P_{\alpha\ldots\beta}(x_\alpha, \ldots, x_\beta) = \sigma_P L^P_\alpha x_\alpha \circ \ldots \circ \sigma_P L^P_\beta x_\beta.$$

Primetimo prvo, sledeće. Ako se GD-grupoidi izvedeni iz C i D mogu izraziti preko operacije $\circ$, tada je to moguće i za GD-grupoide izvedene iz C_i i D_i. Zaista, za makoji $L^{C_i}_{\alpha\ldots\beta}$ važi jednakost

$$\begin{aligned} L^C_i L^{C_i}_{\alpha\ldots\beta}(x_\alpha, \ldots, x_\beta) &= L^D_{\alpha\ldots\beta}(L^{D_\alpha}_i x_\alpha, \ldots, L^{D_\beta}_i x_\beta) \\ &= L^D_\alpha L^{D_\alpha}_i x_\alpha \circ \ldots \circ L^D_\beta L^{D_\beta}_i x_\beta \end{aligned}$$

Koristeći jednakosti

$$L^D_\alpha L^{D_\alpha}_i = L^C_i L^{C_i}_\alpha, \ldots, L^D_\beta L^{D_\beta}_i = L^C_i L^{C_i}_\beta,$$

imamo

$$L_i^C L^{C_i}_{\alpha\ldots\beta}(x_\alpha,\ldots,x_\beta) = L_i^C L^{C_i}_\alpha x_\alpha \circ\ldots\circ L_i^C L^{C_i}_\beta x_\beta.$$

Slično važi i za GD-grupoide $L^{D_i}_{\alpha\ldots\beta}$.

Izvedeni GD-grupoidi dužine 2 mogu se izraziti preko grupe $\circ$; indukcijom dokažimo da je to moguće za izvedeni GD-grupoid makoje dužine.

Neka su $L^C_{\alpha\ldots\beta}$ i $L^D_{\mu\ldots\nu}$ GD-grupoidi takvi da je $L^C_{\alpha\ldots\beta} \longrightarrow L^D_{\mu\ldots\nu}$, i neka je $L^D_{\mu\ldots\nu}$ manje dužine. Tada važi jednakost

$$L^C_{\alpha\ldots\beta}(L_i^{C_\alpha}x_i,\ldots,L_j^{C_\beta}x_j) = L^D_{\mu\ldots\nu}(L^{D_\mu}_{k\ldots h}(x_k,\ldots,x_h),\ldots,$$
$$L^{D_\nu}_{m\ldots n}(x_m,\ldots,x_n)).$$

Po indukcijskoj hipotezi, operacije $L^D_{\mu\ldots\nu}, L^{D_\mu}_{k\ldots h}, L^{D_\nu}_{m\ldots n}$ mogu se izraziti pomoću $\circ$, tj.

$$L^C_{\alpha\ldots\beta}(L_i^{C_\alpha}x_i,\ldots,L_j^{C_\beta}x_j) = L^D_\mu L^{D_\mu}_{k\ldots h}(x_k,\ldots,x_h)\circ\ldots\circ L^D_\nu L^{D_\nu}_{m\ldots n}(x_m,\ldots,x_n)$$

$$= L^D_\mu L_k^{D_\mu}x_k \circ\ldots\circ L^D_\mu L_h^{D_\mu}x_h \circ\ldots\circ L^D_\nu L_m^{D_\nu}x_m \circ\ldots\circ L^D_\nu L_n^{D_\nu}x_n.$$

Pri tome, zakon je ili prve vrste, ili je operacija $\circ$ komutativna, pa se promenljive javljaju istim redom sa obe strane predhodne jednakosti.

Koristeći jednakosti oblika

$$L^C_\alpha L_i^{C_\alpha} = L^D_\mu L_k^{D_\mu},$$

dobijamo najzad

$$L^C_{\alpha\ldots\beta}(x_\alpha,\ldots,x_\beta) = L^C_\alpha x_\alpha \circ\ldots\circ L^C_\beta x_\beta.$$

Prema lemi 4.3.3, zaključujemo da ova jednakost važi za svaki izvedeni GD-grupoid $L^P_{\alpha\ldots\beta}$, $P\varepsilon\{C,D\}$.

Dakle, za svaki GD-grupoid $L^P_{\alpha\ldots\beta}$ $P\varepsilon\{C,D,C_i,D_i\}$ važi

$$\sigma_p L^P_{\alpha\ldots\beta}(x_\alpha,\ldots,x_\beta) = \sigma_p L^P_\alpha x_\alpha \circ \ldots \circ \sigma_p L^P_\beta x_\beta .$$

Ovim je teorema dokazana.

Neposredna posledica teoreme 4.3.1 je

Teorema 4.3.2 *Neka je (2) 1-entropijski zakon za koji je $K_\sim = K_{\tilde{\sim}}$. Tada važe jednakosti:*

$$C(x_1,\ldots,x_p) = L^C_1 x_1 \circ \ldots \circ L^C_p x_p ,$$

$$D(x_1,\ldots,x_q) = L^D_1 x_1 \circ \ldots \circ L^D_q x_q ,$$

$$L^C_i C_i(x_1,\ldots,x_{p_1}) = L^C_i L^{C_i}_1 x_1 \circ \ldots \circ L^C_i L^{C_i}_{p_i} x_{p_i}, \quad i=1,\ldots,p,$$

$$L^D_i D_i(x_1,\ldots,x_{q_1}) = L^D_i L^{D_i}_1 x_1 \circ \ldots \circ L^D_i L^{D_i}_{q_i} x_{q_i}, \quad i=1,\ldots,q.$$

Posmatramo sada uopšteni r-entropijski zakon na GD-grupoidima ($r>1$). Ovaj zakon možemo napisati u obliku

(4) $C(u_{11},\ldots,u_{1p_1},\ldots,u_{r1},\ldots,u_{rp_r}) = D(v_{11},\ldots,v_{1r_1},\ldots,v_{r1},\ldots,v_{rq_r})$,

gde je $S_i = \{u_{i1},\ldots,u_{ip_i},\ldots,v_{i1},\ldots,v_{iq_i}\}$. Pri tome predpostavimo da su termi svakog od skupova D_i takvi da fiksiranjem svih promenljivih u zakonu (4) sem onih iz S_i, dobijamo uopšteni 1-entropijski zakon za koji je $K_\sim = K_{\tilde{\sim}}$. Na osnovu primedbe na str. 52, svaki zakon (4) moguće je svesti na zakon za koji je taj uslov ispunjen.

Uvodimo sada jednu operaciju π skupa M dužine r pomoću koje ćemo opisati GD-grupoide vezane zakonom (4).

U svakom skupu S_k ($k=1,\ldots,r$) postoji bar jedan term koji nije promenljiva. Zaista, ako je $p_k>1$, tada je i $q_k>1$, i u skupu S_k postoje termi u_{ki_k} i v_{kj_k} koji nisu promenljive.

Ako je $p_k=q_k=1$, tada je $S_k=\{u_k, v_k$ [illegible]
terma nije promenljiva.

Po definiciji GD-grupoida C i D, [illegible] nije promenljiva, L_i^C je bijekcija, i ako v_j nije promenljiva, [illegible] je bijekcija.

Ako u svakoj klasi S_k $(k=1,\ldots$ [illegible] jedan [illegible] koji nije promenljiva, definišemo oper[illegible] pomoću

(5) $L^C_{1i_1\ldots ri_r}(x_1,\ldots,x_r)=\pi(L^C_{1i_1}x_1,\ldots,$ [illegible]

Slično, ako u svakoj klasi S_k postoji jedan v_{ki_k} [illegible] promenljiva, definišemo π pomoću

$L^D_{1i_1\ldots ri_r}(x_1,\ldots,x_r)=\pi(L^D_{1i_1}$ [illegible]

U oba slučaja preslikavanja [illegible] su bijekcije, pa je π dobro definisana operacija sk[illegible]

U ostalim slučajevima, definiš[illegible] π pomoću (5), pri čemu nisu sva preslikavanja L^C [illegible] bijekcije. Dokažimo [illegible] je i u tom slučaju π dobro defini[illegible] skupa [illegible]

Predpostavimo da su prvih s pr[illegible] $L^C_{1i_1},\ldots,L^C_{si_s}$ bijekcije, a preostalih r-s presl[illegible] Tada je, prema ranije rečenom, $L^C_{ki_k}=L^C_{k1}$, $k=s+1,\ldots$ [illegible] $S_1,\ldots,S_r$ možemo uvek tako preurediti da to bude ispun[illegible]

Neka su $z_1,\ldots,z_r$ proizvoljn[illegible] elementi skupa [illegible] Dokažimo da je $\pi(z_1,\ldots,z_r)$ dobr[illegible]

Kako su $L^C_{1i_1},\ldots,L^C_{si_s}$ bijekcij[illegible] jednoznačno su određeni elementi $x_1,\ldots,x_s$ takvi da je $L^C_{1i_1}$ [illegible]

*) Ovde dvostruki indeks označava [illegible]

Preslikavanja L^C_{k1}, $k=s+1,\dots,r$ su sirjekcije, pa postoje (ali ne jednoznačno) $x_{s+1},\dots,x_r$ takvi da je $L^C_{k1}x_k=z_k$, $k=s+1,\dots,r$.

Dokazujemo da iz jednakosti

(6) $$L^C_{k1}x'_k=L^C_{k1}x''_k \quad , \ k=s+1,\dots r$$

sledi jednakost

(7) $$L^C_{1i_1\dots r1}(x^s_1,x'_{s+1},\dots,x'_r)=L^C_{1i_1\dots r1}(x^s_1,x''_{s+1},\dots,x''_i,\dots,x''_r).$$

Dovoljno je dokazati jednakost

(8) $$L^C_{1i_1\dots r1}(x^s_1,x'_{s+1},\dots,x'_i,\dots,x'_r)=L^C_{1i_1\dots r1}(x^s_1,x'_{s+1},\dots,x''_i,\dots,x'_r)$$

Iz zakona (4) sledi

(9) $$L^C_{k1}x_k=L^D_{k1}D_{k1}(x_k), \text{ za } k=s+1,\dots,r.$$

Iz (6) i (9) imamo

$$L^D_{k1}D_{k1}(x'_k)=L^D_{k1}D_{k1}(x''_k), \text{ za } k=s+1,\dots,r.$$

Kako su preslikavanja L^D_{k1} bijekcije, odavde imamo

(10) $$D_{k1}(x'_k)=D_{k1}(x''_k).$$

Iz zakona (4) sledi da u svakom skupu S_k možemo izabrati po jednu promenljivu y_k, tako da fiksiranjem ostalih promenljivih sem y_k, dobijamo jednakost

(11) $$L^C_{1i_1\dots si_s,(s+1)1,\dots,r1}(\phi_1 y_1,\dots,\phi_s y_s,y_{s+1},\dots,y_r)$$

$$=L^D_{1j_1\dots sj_s,(s+1)1,\dots r1}(\psi_1 y_1,\dots,\psi_s y_s,D_{(s+1)1}(y_{s+1}),\dots,D_{r1}(y_r))$$

Kako su preslikavanja ϕ_i sirjekcije, možemo izabrati elemente $t_1,\dots,t_s$ takve da je $\phi_i t_i=x_i$, $i=1,\dots,s$, pa imamo, zbog (10)

$$L^D_{1j_1\ldots r1}(\psi_1 t_1,\ldots,\psi_s t_s, D_{(s+1)1}(x'_{s+1}),\ldots,D_{k1}(x'_k),\ldots,D_{r1}(x'_r))$$

$$=L^D_{1j_1\ldots r1}(\psi_1 t_1,\ldots,\psi_s t_s, D_{(s+1)1}(x'_{s+1}),\ldots,D_{k1}(x''_k),\ldots,D_{r1}(x'_r)),$$

odakle, zbog (11) i prema izboru elemenata $t_1,\ldots,t_s$, sledi (8), što je trebalo dokazati.

Dakle operacija π skupa M je dobro definisana, a lako se dokazuje i da je lupa, čija jedinica je $w_1\Big|^{x_{ij}}_{a_{ij}\in X_{ij}}$

Uočimo izvedene GD-grupoide $L^P_{1\alpha,2\beta,\ldots,r\gamma}$, $P\in\{C,D\}$, dužine r. Za njih važe sledeća tvrdjenja.

<u>Lema 4.3.4.</u> *Makoja dva GD-grupoida* $L^P_{1\alpha,2\beta,\ldots,r\gamma}$ *i* $L^Q_{1\mu,2\nu,\ldots,r\lambda}$ *izvedena iz uopštenog r-entropijskog zakona su u relaciji* $\Rightarrow$ $(P,Q\in\{C,D\})$.

<u>Dokaz.</u> Zamenom svih promenljivih x_{ij}, sem onih koje pripadaju termima skupa S_k $(k\in\{1,\ldots r\})$ fiksiranim elementima $a_{ij}\in X_{ij}$ dobijamo zakon čiji su svi termi u istom skupu S_k, pa na osnovu leme 4.3.1 sledi $L^P_{k\alpha}\Rightarrow L^Q_{k\beta}$, za makoja dva GD-grupoida dužine 1.

Odredjenosti radi, dokazujemo $L^C_{1\alpha\ldots r\gamma}\Rightarrow L^D_{1\mu\ldots r_\lambda}$.

Ovo dokazujemo indukcijom po broju klasa S_k.

Predpostavimo da je $L^C_{2\beta\ldots r\gamma}\Rightarrow L^D_{2\nu\ldots r\lambda}$, tj. postoji niz

$$L^C_{2\beta\ldots r\gamma}\xrightarrow{y_1,\ldots,z_1} L^D_{2\beta_2\ldots r\gamma_2}\xrightarrow{y_2,\ldots,z_2}\ldots\xrightarrow{y_{k-1},\ldots,z_{k-1}} L^D_{2\nu\ldots r\lambda}.$$

Neka je x promenljiva iz terma u_1. Tada imamo niz

$$L^C_{1\alpha 2\beta\ldots r\gamma}\xrightarrow{x,y_1,\ldots,z_1} L^D_{1\alpha_2 2\beta_2\ldots r\gamma_2}\xrightarrow{x,y_2,\ldots,z_2}\ldots\xrightarrow{x,y_{k-1},\ldots,z_{k-1}} L^D_{1\tilde{\alpha}2\nu\ldots r\lambda},$$

gde su svi GD-grupoidi iste dužine, jer promenljive pripadaju raznim skupovima S_k. Dakle je

(12) $$L^D_{1\alpha 2\beta\ldots r\gamma} \Rightarrow L^D_{1\bar{\alpha}2\nu\ldots r\lambda}.$$

S druge strane je $L^D_{1\bar{\alpha}} \Rightarrow L^D_{1\mu}$, pa postoji niz

$$L^D_{1\bar{\alpha}} \xrightarrow{x_1} L^C_{1\alpha_2} \xrightarrow{x_2} \ldots \xrightarrow{x_{k-1}} L^D_{1\mu}.$$

Izaberimo po jednu promenljivu $y,\ldots,z$ redom iz terma $v_{2\nu}$, $\ldots,v_{r\lambda}$. Tada imamo

$$L^D_{1\bar{\alpha}2\nu\ldots r\lambda} \xrightarrow{x_1,y,\ldots,z} L^C_{1\alpha_2 2\nu_2\ldots r\lambda_2} \xrightarrow{x_2,y,\ldots,z} \ldots$$

$$\xrightarrow{x_{k-1},y,\ldots,z} L^D_{1\bar{\alpha}2\nu\ldots r\lambda}, \quad \text{tj.}$$

(13) $$L^D_{1\bar{\alpha}2\nu\ldots r\lambda} \Rightarrow L^D_{1\mu 2\nu\ldots r\lambda}.$$

Iz (12) i (13) imamo

$$L^C_{1\alpha\ldots r\gamma} \Rightarrow L^D_{1\mu\ldots r\lambda}.$$

Odavde neposredno sledi

$L^P_{1\alpha\ldots r\gamma} \Rightarrow L^Q_{1\mu\ldots r\lambda}$, za $P,Q \in \{C,D\}$.

<u>Lema 4.3.5.</u> *Za makoji GD-grupoid* $L^P_{\alpha\ldots r\gamma}$ *izveden iz uopštenog r-entropijskog zakona je* $C \Rightarrow L^P_{1\alpha\ldots r\gamma}$ i $D \Rightarrow L^P_{1\alpha\ldots r\gamma}$ $(P,Q \in \{C,D\})$

<u>Dokaz.</u> Ova lema je posledica lema 4.3.3 i 4.3.4. Indukcijom po broju skupova S_k dokazuje se da postoji GD-grupoid $L^P_{1\alpha\ldots r\gamma}$ takav da $Q \Rightarrow L^P_{1\alpha\ldots r\gamma}$, $P,Q \in \{C,D\}$, a na osnovu predhodne leme to važi za svaki GD-grupoid dužine r. Lema je dokazana.

Dokazujemo sada glavni rezultat ove glave. Sledećom teoremom opisuju se GD-grupoidi C,D,C_i,D_i vezani zakonom (4). Zamenom svih promenljivih x_{ij}, sem onih koje pripadaju termima skupa S_k, za neki $k\varepsilon\{1,\ldots,r\}$, elementima $a_{ij}\varepsilon X_{ij}$, iz zakona (4) dobija se zakon

(14) $L^C_{k1\ldots kp_k}(u_{k1},\ldots,u_{kp_k})=L^D_{k1\ldots kq_k}(v_{k1},\ldots,{}_{kq_k})$.

Za ovaj zakon su svi termi u_i i v_j u istom skupu S_k, dakle su svi binarni GD-grupoidi izvedeni iz ovog zakona u istoj klasi $K_{\sim}$. Kao što smo videli, uvodjenjem konjugovanih GD-grupoida moguće je postići da je $K_{\approx}=K_{\sim}$. Posmatramo zakone (4) za koje je taj uslov ispunjen za svaki $k=1,\ldots,r$.

<u>Teorema 4.3.3.</u> *Neka je (4) uopšteni r-entropijski zakon na GD-grupoidima koji zadovoljavaju uslov : za svaki $k\varepsilon\{1,\ldots,r\}$, za koji je $p_k>1$ i $q_k>1$, svi binarni GD-grupoidi izvedeni iz zakona (14) pripadaju istom skupu $K^k_{\approx}$.*

Tada postoji lupa π dužine r, definisana na skupu M, i za svaki $k\varepsilon\{1,\ldots,r\}$ za koji je $p_k>1$ i $q_k>1$ postoji grupa $\circ_k$ na skupu M tako da je:

$$(15)\begin{cases} C(x_{11},\ldots,x_{1p_1},\ldots,x_{r1},\ldots,x_{rp_r}) = \\ =\pi(L^C_{11}x_{11}\circ_1\ldots\circ_1 L^C_{1p_1}x_{1p_1},\ldots,L^C_{r1}x_{r1}\circ_r\ldots\circ_r L^C_{rp_r}x_{rp_r}), \\ D(x_{11},\ldots,x_{1q_1},\ldots,x_{r1},\ldots,x_{rq_r}) = \\ =\pi(L^D_{11}x_{11}\circ_1\ldots\circ_1 L^D_{1p_1},\ldots,L^D_{r1}x_{r1}\circ_r\ldots\circ_r L^D_{rq_r}x_{rq_r}). \end{cases}$$

Osim toga je

$$
(16)\begin{cases} L^C_{ki}C_{ki}(x_{i\alpha},\ldots,x_{i\beta})=L^C_{ki}L_\alpha^{C_{ki}}x_{i\alpha}\circ_k\ldots\circ_k L^C_{ki}L_\beta^{C_{ki}}x_{i\beta}, \\ L^D_{kj}D_{kj}(x_{\alpha j},\ldots,x_{\beta j})=L^D_{kj}L_\alpha^{D_{kj}}x_{\alpha j}\circ_k\ldots\circ_k L^D_{kj}L_\beta^{D_{kj}}x_{\beta j}, \end{cases}
$$

i

$$
(17) \qquad L^C_{ki}L_j^{C_{ki}} = L^D_{kj}L_i^{D_{kj}} ,
$$

gde je $1\leqslant i\leqslant p_k$, $1\leqslant j\leqslant q_k$, $k=1,\ldots,r$.

Dokaz. Na osnovu teoreme 4.3.1, neposredno se dokazuje da postoje grupe $\circ_k$, za svaki k, za koji je $p_k>1$, $1\leqslant k\leqslant r$, i da važe jednakosti (16) i slične jednakosti za GD-grupoide izvedene iz GD-grupoida C_{ki} i D_{kj}.

Neka je π operacija skupa M definisana pomoću (5).

Na osnovu leme 4.3.5 je

$$
(18) \qquad \begin{cases} C \Rightarrow L^C_{1i_1\ldots ri_r} \qquad \text{i} \\ D \Rightarrow L^D_{1i_1\ldots ri_r}. \end{cases}
$$

Dokazujemo pomoćno tvrdjenje.

Ako je

$$
(19) \quad L^P_{1\alpha\ldots1\beta\ldots r\gamma\ldots r\delta} \rightarrow L^Q_{1\mu\ldots1\nu\ldots r\lambda\ldots r\rho} \quad (P,Q\in\{C,D\}),
$$

i ako je

$$
L^Q_{1\mu\ldots1\nu\ldots r\lambda\ldots r\rho}(x_\mu,\ldots,x_\nu,\ldots,x_\lambda,\ldots,x_\rho)
$$
$$
=\pi(L^Q_{1\mu}x_\mu\circ_1\ldots\circ_1L^Q_{1\nu}x_\nu,\ldots,L^Q_{r\lambda}x_\lambda\circ_r\ldots\circ_rL^Q_{r\rho}x_\rho)
$$

tada je i

$$
L^P_{1\alpha\ldots1\beta\ldots r\gamma\ldots r\delta}(x_\alpha,\ldots,x_\beta,\ldots,x_\gamma,\ldots,x_\delta)
$$
$$
=\pi(L^P_{1\alpha}x_\alpha\circ_1\ldots\circ_1L^P_{1\beta}x_\beta,\ldots,L^P_{r\gamma}x_\gamma\circ_r\ldots\circ_rL^P_{r\delta}x_\delta).
$$

Zaista, zbog (19) iz zakona (4) imamo:

$$L^{P}_{1\alpha\ldots1\beta\ldots r\gamma\ldots r\delta}(L^{P_1\alpha}_{\alpha_1}x_\alpha,\ldots,L^{P_1\beta}_{\beta_1}x_\beta,\ldots,L^{P_r\gamma}_{\gamma_1}x_\gamma,\ldots,L^{P_r\delta}_{\delta_1}x_\delta).$$

$$=L^{Q}_{1\mu\ldots1\nu\ldots r\lambda\ldots r\rho}(L^{Q_1\mu}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x_{\mu_1},\ldots,x_{\mu_k}),\ldots,L^{Q_1\nu}_{\nu_1\ldots\nu_h}(x_{\nu_1},\ldots,x_{\nu_h})$$

$$\ldots,L^{Q_r\lambda}_{\lambda_1\ldots\lambda_m}(x_{\lambda_1},\ldots,x_{\lambda_m}),\ldots,L^{Q_r\rho}_{\rho_1\ldots\rho_n}(x_{\rho_1},\ldots,x_{\rho_n}))$$

$$=\pi(L^Q_{1\mu}L^{Q_1\mu}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x_{\mu_1},\ldots,x_{\mu_k})\circ_1\ldots\circ_1 L^Q_{1\nu}L^{Q_1\nu}_{\nu1\ldots\nu n}(x_{\nu_1},\ldots,x_{\nu_h}),$$

$$\ldots,L^Q_{r\lambda}L^{Q_r\lambda}_{\lambda_1\ldots\lambda_m}(x_{\lambda_1},\ldots,x_{\lambda_m})\circ_r\ldots\circ_r L^Q_{r\rho}L^{Q_r\rho}_{\rho_1\ldots\rho_n}(x_{\rho_1},\ldots,x_{\rho_n}))$$

$$=\pi(L^Q_{1\mu}L^{Q_1\mu}_{\mu_1}x_{\mu_1}\circ_1\ldots\circ_1 L^Q_{1\mu}L^{Q_1\mu}_{\mu_k}x_{\mu_k}\circ_1\ldots\circ_1 L^Q_{1\nu}L^{Q_1\nu}_{\nu_1}x_{\nu_1}\circ_1\ldots\circ_1 L^Q_{1\nu}L^{Q_1\nu}_{\nu_h}x_{\nu_h},$$

$$\ldots,L^Q_{r\lambda}L^{Q_r\lambda}_{\lambda_1}x_{\lambda_1}\circ_r\ldots\circ_r L^Q_{r\lambda}L^{Q_r\lambda}_{\lambda_m}x_{\lambda_m}\circ_r\ldots\circ_r L^Q_{r\lambda}L^{Q_r\lambda}_{\lambda_1}x_{\lambda_1}\circ_r\ldots\circ_r L^Q_{r\lambda}L^{Q_r\lambda}_{\lambda_n}x_{\lambda_n}).$$

Primetimo sledeće. Prvo, za svaku promenljivu zakona (4) važi jednakost oblika $L^C_{ki}L^{C_{ki}}_{kj} = L^D_{kj}L^{D_{kj}}_{ki}$. Drugo, za neki $k\in\{1,\ldots,r\}$ ili je operacija $\circ_k$ komutativna, ili je zakon (14) I vrste.
To sledi iz teoreme 4.3.1. Treće, preslikavanja $L^{P_{kj}}_i$ su sirjektivna. Na osnovu toga, uvodjenjem novih promenljivih, iz predhodnog dobijamo (20).

Dakle, dokazali smo pomoćno tvrdjenje.

Na osnovu (18), definije operacije π, i predhodnog tvrdjenja, neposredno slede jednakosti (15).

Ovim je teorema dokazana.

Iz teoreme 4.3.3 neposredno sledi da se GD-grupoidi C,D,C_i,D_i vezani makakvim uopštenim r-entropijskim zakonom mogu takodje izraziti preko operacija π, $\circ_k$, $k=1,\ldots,r$.

4.4 Odredjivanje kvazigrupa vezanih zakonom (1).

Teorema 4.3.3 cmogućava nam da opišemo kvazigrupe A, B, A_i, B_i vezane zakonom (1).

Naime, postupkom opisanim u 4.2 prelazimo sa zakona na kvazigrupama, na zakon (4) na GD-grupoidima. Pri tome, na svakom koraku imamo jednakosti koje vezuju stare i nove operacije.

Primenom teoreme 4.3.3 opisujemo GD-grupoide vezane zakonom (4). Svaki GD-grupoid zakona (4) vezan je s nekom kvazigrupom zakona (1), pa se ove kvazigrupe, pomoću (15) i (16) mogu takodje izraziti preko π i $\circ_k$. Neke od kvazigrupa zakona (1) ostaju neodredjene do na jednakost koja se dobija iz (17) prelaskom sa GD-grupoida na kvazigrupe.

Navedeni postupak ilustrovaćemo sa nekoliko primera.

4.5. Primeri.

1. Odredjujemo kvazigrupe vezane zakonom

$$A(A_1(y,x),A_2(z,u),A_3(v,t,w))=B(B_1(z),B_2(u),B_3(x,v,w,t),B_4(y)).$$

1. korak.

$$\bar{A}_1(x,y) \overset{\text{def}}{=\!=} A_1(y,x),$$

$$\bar{A}_3(v,w,t) \overset{\text{def}}{=\!=} A_3(v,t,w),$$

$$A(\bar{A}_1(x,y),A_2(z,u),\bar{A}_3(v,w,t))=B(B_1(z),B_2(u),B_3(x,v,w,t),B_4(y)).$$

2. korak.

$$\tilde{A}_3(V) \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{A}_3(v,w,t),$$

$$\tilde{B}_3(x,V) \overset{\text{def}}{=\!=} B_3(x,v,w,t),$$

$$A(\bar{A}_1(x,y),A_2(z,u),\tilde{A}_3(V))=B(B_1(z),B_2(u),\tilde{B}_3(x,V),B_4(y)).$$

3. korak.

$\tilde{A}_2(Z) \stackrel{def}{\equiv} A_2(z,u),$

$\tilde{A}(x,y,V) \stackrel{def}{\equiv} A(x,y,\tilde{A}_3(V)),$

$\tilde{B}(Z,x,y) \stackrel{def}{\equiv} B(B_1(z),B_2(u),x,B_4(y)),$

$\tilde{A}(A_1(x,y),\tilde{A}_2(Z),V)=\tilde{B}(Z,\tilde{B}_3(x,V),y).$

4. korak.

$A'(x,y,z) \stackrel{def}{\equiv} \tilde{A}(x,z,y),$

$B'(x,y,z) \stackrel{def}{\equiv} \tilde{B}(z,x,y),$

$A'(\bar{A}_1(x,y),V,\tilde{A}_2(Z))=B'(\tilde{B}_3(x,V),y,Z).$

Dobili smo uopšteni r-entropijski zakon, r=2.

Uvodjenjem konjugovanih operacija

$A''(x,y,z) = A'(y,x,z)$ i

$B_3'(x,y) = \tilde{B}_3(y,x),$

dobijamo zakon

$$A''(V,A_1(x,y),\tilde{A}_2(Z)) = B'(\tilde{B}_3'(V,x),y,Z)$$

koji zadovoljava uslove teoreme 4.3.3.

Dakle je

$$A''(V,x,y) = \pi(L_1^{A''}V \circ L_2^{A''}x, L_3^{A''}y),$$

$$B'(x,y,Z) = \pi(L_1^{B'}x \circ L_2^{B'}y, L_3^{B'}Z),$$

$$L_2^{A''}\bar{A}_1(x,y) = L_2^{A''}L_1^{\bar{A}_1}x \circ L_2^{A''}L_2^{\bar{A}_1}y,$$

$$L_1^{B'}\tilde{B}_3'(V,x) = L_1^{B'}L_1^{\tilde{B}_3'}V \circ L_1^{B'}L_2^{\tilde{B}_3'}x .$$

Osim toga, važe jednakosti

$$L_1^{A''}V = L_1^{B'}L_1^{\tilde{B}'_3}V,$$

$$L_2^{A''}L_1^{\bar{A}_1}x = L_1^{B'}L_2^{\tilde{B}'_3}x,$$

$$L_2^{A''}L_2^{\bar{A}_1}y = L_2^{B'}y,$$

$$L_3^{A''}\tilde{A}_2(Z) = L_3^{B'}Z.$$

Odavde imamo

$$A(x,y,v) = \pi(L_3^A v \circ L_1^A x, L_2^A y),$$

$$B(z,u,x,y) = \pi(L_3^B x \circ L_4^B y, L_{12}^B(z,u)),$$

$$L_1^{A_1}A_1(x,y) = L_1^A L_2^{A_1} y \circ L_1^A L_1^{A_1} x,$$

$$L_3^B B_3(x,v,w,t) = L_3^B L_{234}^{B_3}(v,w,t) \circ L_3^B L_1^{B_3} x,$$

odnosno

$$L_2^A A_2(z,u) = L_{12}^B(B_1(z),B_2(u)),$$

$$L_3^A A_3(v,t,w) = L_3^B L_{234}^{B_3}(v,w,t),$$

$$L_1^A L_1^{A_1} y = L_4^B B_4 y,$$

$$L_1^A L_2^{A_1} x = L_3^B L_1^{B_3} x.$$

2. Odredjujemo kvazigrupe vezane zakonom

$$A(A_1(x,y,z),A_2(u,v,t)) = B(B_1(v,x,z),B_2(t,y,u)).$$

<u>1. korak.</u>

$$\bar{A}_1(x,z,y) \overset{def}{=\!=} A_1(x,y,z),$$

$$\bar{A}_2(v,t,u) \overset{def}{=\!=} A_2(u,v,t),$$

$$\bar{B}_1(x,z,v) \overset{def}{=\!=} B_1(v,x,z),$$

$$\bar{B}_2(y,t,u) \overset{def}{=\!=} B_2(t,y,u),$$

$$A(\bar{A}_1(x,z,y),\bar{A}_2(v,t,u)) = B(\bar{B}_1(x,z,v),\bar{B}_2(y,t,u)).$$

2. korak.

$\tilde{A}_1(X,y) \stackrel{def}{=\!=} \bar{A}_1(x,z,y),$

$\tilde{A}_2(v,Y) \stackrel{def}{=\!=} \bar{A}_2(v,t,u),$

$\tilde{B}_1(X,v) \stackrel{def}{=\!=} \bar{B}_1(x,z,v),$

$\tilde{B}_2(y,Y) \stackrel{def}{=\!=} \bar{B}_2(y,t,u),$

$A(\tilde{A}_1(X,y),\tilde{A}_2(v,Y)) = B(\tilde{B}_1(X,v),\tilde{B}_2(y,Y)).$

Dobili smo r-entropijski zakon, r=1, $K_{\sim}=K_{\sim}$ pa je, prema teoremi 4.3.2 :

$A(x,y)=L_1^A x \circ L_2^A y, \qquad B(x,y)=L_1^B x \circ L_2^B y,$

$L^A\tilde{A}_1(X,y)=L_1^A L_1^{\tilde{A}_1} X \circ L_1^A L_2^{\tilde{A}_1} y, \qquad L_2^A\tilde{A}_2(v,Y)=L_2^A L_1^{\tilde{A}_2} v \circ L_2^A L_2^{\tilde{A}_2} Y,$

$L_1^B\tilde{B}_1(X,v)=L_1^B L_1^{\tilde{B}_1} X \circ L_1^B L_2^{\tilde{B}_1} v, \qquad L_2^B\tilde{B}_2(y,Y)=L_2^B L_1^{\tilde{B}_2} y \circ L_2^B L_2^{\tilde{B}_2} Y,$

i

$L_1^A L_1^{\tilde{A}_1} X=L_1^B L_1^{\tilde{B}_1} X, \qquad L_1^A L_2^{\tilde{A}_1} y=L_2^B L_1^{\tilde{B}_2} y,$

$L_2^A L_1^{\tilde{A}_2} v=L_1^B L_2^{\tilde{B}_1} v, \qquad L_2^A L_2^{\tilde{A}_2} Y=L_2^B L_2^{\tilde{B}_2} Y.$

Odavde je

$L_1^A A_1(x,y,z)=L_1^A L_{13}^{A_1}(x,z) \circ L_1^A L_2^{A_1} y,$

$L_2^A A_2(u,v,t)=L_2^A L_2^{A_2} v \circ L_2^A L_{13}^{A_2}(u,t),$

$L_1^B B_1(v,x,z)=L_1^B L_{23}^{B_1}(x,z) \circ L_1^B L_1^{B_1} v,$

$L_2^B B_2(t,y,u)=L_2^B L_2^{B_2} y \circ L_2^B L_{13}^{B_2}(t,u),$

i

$L_1^A L_{13}^{A_1}(x,z)=L_1^B L_{23}^{B_1}(x,z), \qquad L_1^A L_2^{A_1} y=L_2^B L_2^{B_2} y,$

$L_2^A L_{13}^{A_2}(u,t)=L_2^B L_{13}^{B_2}(t,u), \qquad L_2^A L_2^{A} v=L_1^B L_1^{B_1} v.$

L I T E R A T U R A

[1] Aczél J., Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, Berlin, VEB Deutsch. Verl. Wiss. 1961.

[2] Aczél J., Belousov V.D., Hosszú M., Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups, Acta Math.Sci.Hung. 11, No. 1-2, (1960), 127-136.

[3] Aczél J., Pickert G., Radó F., Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen, Mathematica, 2(25) (1960), 5-24.

[4] Albert A.A., Quasigroups I, Trans.Amer.Math.Soc.No.54(1943), 507-509.

[5] Albert A.A., Quasigroups II, Trans.Amer.Math.Soc.No.55 (1944), 401-419.

[6] Alimpić B., O uravnoteženim zakonima na kvazigrupama, Mat. Vesnik, 9(24),3 (1972)

[7] Alimpić B., Balanced laws on GD-grupoids, Publ.Inst.Math.

[8] Белоусов В.Д., Ассоциативные системы квазигрупп, УМН, 13, вып. 3(1958) 243

[9] Белоусов В.Д., Алгебраические сети и квазигруппи,Кишинев,1971.

[10] Белоусов В.Д., Основы теории квазигрупп и луп, Наука,М. 1967.

[11] Belousov V.D., Balanced identities in algebras of quasigroups, Fac.Mat.Univ.Waterloo, Canada, 1971.

[12] Белоусов В.Д., Систeмы квазгрупп с обобщенным тождествами, УМН XX, вып 1(121)(1965), 75-146.

[13] Белоусов В.Д., Сандик М.Д., n-арне квазигуппы и луппы, Сиб. матем. ж. VII, No.1 (1966) 31-54.

[14] Белоусов В.Д., Уравновешенные тождества в квазигрупах,Матем. сб. 70(112),(1966), 55-97.

[15] Белоусов В.Д.,К функциональному уравнению Муфанг,"Вопросы теории квазигрупп и луп" Кишинев 1971, 11-19.

[16] Bruck R.H., Some results in the theory of quasigroups, Trans.Amer.Math.Soc.,No.55, (1944), 19-52.

[17] Bruck R.H., Contributions to the theory of loops, Trans. Amer.Math.Soc.,No.60, (1946), 245-354.

[18] Bruck R.H., Ryser H.J., The nonexistence of certain finite projective planes, Canad.Journ.Math.1, No.1 (1949) 88-93.

[19] Bruck R.H., Finite nets I, Numerical invariants, Canad. Journ.Math.3, No.1 (1951), 94-107.

[20] Bruck R.H., A survey of binary systems, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York 1971.

[21] Чупона Г., За финитарните операции, Год.Зб. ПМФ Унив. Скопје, КН. 12 No.11 (1959), 7-49.

[22] Чупона Г., За n-арните подполугрупи,Билтен на ДМФ од СРМ КН. 12(1961) 5-13.

[23] Čupona G. Finitarne asocijativne operacije, Mat.bibl. Sv.39 (1969), Beograd, 135-149.

[24] Dörnte W., Untersuchungen über einen verallgemenerten Gruppenbegriff, Math.Zeits., 29 (1928) 1-19.

[25] Euler L., Commentationes Arithmeticae, Peterburg, 1779,302-3

[26] Глускин Л.М., О позиционных оперативах, Докл.Акад.Наук. СССР 182,No.5 (1968), 1000-1003.

[27] Hosszú M., On a theorem of Belousov and some of its applications, Magyar Tud.Akad.Matem.es Fiz.,Oszt.Kozl.9,(1959),51-5(

[28] Hosszú M., On the explicit form of n-groups operations, Publ math.10, No.1-4 (1963), 88-92.

[29] Hosszú M., Radó F., Uber eine Klasse von ternaren Quasigruppen, Acta Math.Hung. 15, No.1-2 (1964) 20-36.

[30] Холл М., Теория групп,ИЛ1962

[31] Холл М., Комбинаторика, Москва 1970

[32] Kurepa Dj. Viša algebra I i II, ŠK. Zagreb, 1965.

[33] Hughes D.R., Planar division neo-rings, Trans.Amer.Math.Soc. 80 (1955) 502-527.

[34] Курош А.Г., Лекции по общей алгебре,ФМ Москва 1962.

[35] Крамарева Р.Ф., О гомотопии n-квазигрупп, Вопросы теории квз групп и луп, Кишинев, 1971, 11-19.

[36] Milić S., O jednoj klasi kvazigrupnih operacija asocijativnog tipa, Mat.Vesnik, 8(23) (1971) 281-285.

[37] Milić S., A new proof of Belousov's theorem for a special law of quasigroup operations, Publ.Inst.Math.t.11 (25)(1971) 89-91.

[38] Milić S., Prilog teoriji kvazigrupa, Disertacija, Beograd 197:

[39] Milić S., On GD-proupoids with applications to n-ary quasigroups, Publ. Inst. Math. tom 13(27) 1972

[40] Moufang R., Zur Struktur von Alternativkörpern, Math.Ann. 110, 416-438, (1935) 416-430.

[41] Pickert G., Projektive Ebenen, Springer Verlag, Berlin-Göthingen-Heidelberg, 1955.

[42] Prešić S., Zbirka zadataka iz algebre, PMF Beograd 1962.

[43] Prešić S., Elementi matematičke logike, Matem.bibl. 34, Beograd, 1968.

[44] Продан Н.И., Некоторые вопросы теории группоидов с делением Вопросы теории квазигрупп и луп , Кишенев(1971) 104-109

[45] Parker E.T., Orthogonal latin squares, Proc.Nat.Acad.Sci. USA 45, No.1, (1959) 859-862.

[46] Post E.L., Polyadic groups. Trans.Amer.Math,Soc. 48 (1940) 208-305.

[47] Sade A., Entropie demo~~n~~sienne de multigroupoides et de quasigroupes, Ann.Soc.scient.Bruxelles, 73, No.3 (1959),302-309

[48] Sade A., Demosian systems of quasigroups, Amer.Math.Monthly 68 No.4, (1961) 329-337.

[49] Sade A., Quasigroupes obéissant a certains lois, Rev.Fac.Sci Univ.Istambul 22(1957) 151-184.

[50] Sade A., Produit direct singulier de quasigroupes orthogonau et antiabéliens, Ann.Soc.Sci.,Bruxelles, ser.1,74,No.2,(1960 81-99.

[51] Sade A., Teorija kvazigrupa, Mat.Bibl.sv.42 (1969) 11-16.

[52] Stein S.K., On th foundation of quasigroups, Trans.Amer.Math Soc. 85 No.1 (1957) 228-256.

[53] Tarry., Le probleme des 36 officiers, C.R.Ass.Franc.Av.Sci. Nat. 1(1900), 122-123, 2(1901), 170-203.

[54] Трпеновски Б.Л., За еден вид системи од операции, Билтен на ДМФ од СРМ кн XIX (1968), 17-24

[55] Трпеновски Б.Л., полугрупи што может да се пополнао со неутрални елементи, Билтен на ДМФ од СРМ кн XV (1964) 24-26

[56] Трпеновски Б.Л., Чупона Г., Финитарни асоцијативни операций со неутрални елементи, Билтен на ДМФ од СРМ кн. 12(1961) 15-24

[57] Ušan J. O jednoj klasi kvazigrupa, Disertacija, Bgd. 1971.

[58] Ведель Я.Я. Гсмотопия квазигрупп, Мат.весник 7(22)св 4(1970) 493-506