UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Mr MILENKO R. MOSUROVIĆ

SLOŽENOST OPISNIH LOGIKA S MODALNIM OPERATORIMA

— DOKTORSKA DISERTACIJA

BEOGRAD, 2000. GODINE

Mentori:

Prof. dr Žarko Mijajlović
Matematički fakultet
Univerziteta u Beogradu, Beograd

Prof. dr Michael Zakharyaschev
Department of Computer Science
King's College London, London

Članovi komisije:

Prof. dr Kosta Došen — predsednik Komisije
Matematički institut SANU, Beograd

Prof. dr Žarko Mijajlović
Matematički fakultet
Univerziteta u Beogradu, Beograd

Prof. dr Slobodan Vujošević
Prirodno matematički fakultet
Univerziteta Crne Gore, Podgorica

DATUM ODBRANE: 06.06.2001.

Pitanja:
1. U kojem smislu dobijene granice računske složenosti daju okvir i limit modalnih opisnih logika u primenama.
2. programi = ? (modalni operatori)
3. Problem De Giacoma
4. Da li postoje principijalne razlike u određivanju gornje i donje granice složenosti.
5. Kvantni kompjuteri.

Predgovor

Tradicionalna predikatska logika prvog reda je stvorena za zapisivanje i rad sa statičkim znanjem (tj. matematičkom teorijom). Takve su i mnoge njene primene. Sistemi za prikazivanje znanja baziranih na opisnim logikama nisu izuzetak. Naime, sistemi bazirani na opisnim logikama obezbeđuju korisniku formalni jezik koji mu, između ostalog, omogućava da polazeći od niza atomarnih pojmova, definiše složene pojmove, opiše hijerarhiju među pojmovima u terminima obuhvatanja i prikaže pojedine informacije o konkretnim objektima iz domena primene. Izražajna moć opisnih logika zavisi od konstruktora koji se koriste za formiranje složenih pojmova i svojstava. Postoji veliki broj različitih konstruktora (npr. brojna restrikcija, refleksivno-tranzitivno zatvorenje svojstava, konstruktor inverzije, itd.) koji mogu značajno povećati izražajnu moć logike ali i njenu računsku složenost. Otuda, u zavisnosti od primene, pravi se odgovarajući kompromis između izražajne moći i računske složenosti logike izborom podesnog skupa konstruktora. Tako dobijamo širok spektar opisnih logika, od relativno slabih, kao što je $\mathcal{ALER}$, u kojoj je problem zadovoljivosti za pojmove NP-kompletan, nešto složenijih kao što je $\mathcal{ALC}$ koja je PSPACE-kompletna [9], do vrlo izražajnih kao što je $\mathcal{CIQ}$ [11, 12]. Intezivno se proučavaju računska složenost, primene i mnoga druga pitanja ovih logika. Detalji o problemima (pitanjima) opisnih logika mogu se naći u *Jurnal of Logic and Computation* (9), 1999, a pregled najnovijih istraživanja može se naći na veb sajtovima opisnih logika.[1]

U modernim informacionim sistemima i sistemima za formalnu reprezentaciju znanja statički domen primene nije više dovoljan. Veoma je važno prikazivanje vremena i raznih dinamičkih promena, kao i rasuđivanje o njima. Javlja se i potreba za raznim vrstama modalnosti kada je reč o znanju, verovanju, obavezama itd. Otuda su razvijeni mnogi formalni jezici koji uzimaju u obzir dinamički aspekt domena primene uvođenjem odgovarajućih modalnosti. S gledišta sintakse, uvođenje modalnosti u "statički" formalni jezik L bi trebalo da omogući primenu modalnih, vremenskih, epistemičkih i drugih operatora na odgovarajuće (sintaksne) terme jezika L; a sa gledišta semantike, dodavanje vremenske dimenzije ili dimenzije mogućih svetova modelima jezika L. Kada ne bi vodili računa o računskoj složenosti dobijenog formalizma uvođenje modalnosti ne bi bio komplikovan zadatak. Međutim, sistemi za formalnu reprezentaciju znanja zahtevaju dobru izražajnu moć for-

[1]Npr. http://www.ida.liu.se/labs/iislab/people/patla/DL/

malizma da omogući uvođenje odgovarajuće modalnosti, a istovremeno efektivne procedure rasuđivanja sa *toliko malom složenosti koliko je to moguće*. Otuda je realna teškoća uvođenja modalnih sistema konstrukcija izražajnog i odlučivog formalizma sa razumnom složenosti.

Uvođenje modalnosti u opisne logike počelo je sa konstrukcijom *vremenskih opisnih logika* [25] i *epistemičkih opisnih logika* [16]. U oba slučaja izražajna moć dobijenog sistema je prilično ograničena a uvođenje modalnosti ne vodi značajnom povećanju računske složenosti. S druge strane, konstruisana je više-dimenzionalna modalna opisna logika koja je veoma izražajna ali neodlučiva [4]. Svakako, postoji i niz drugih kombinacija, ali jedan optimalan kompromis između izražajne moći i odlučivosti je uveden u [3] a usavršen u seriji radova [29, 30, 31, 32] u kojima su konstruisane veoma izražajne ali odlučive opisne logike s raznim vrstama modalnih operatora. Međutim, složenost tako kombinovanih logika (koja je za praktične primene ovih logika veoma bitna) je bila nejasna, što je poslužilo kao osnovna motivacija za ovo istraživanje. Naglasimo da su u disertaciji *izloženi rezultati* koji predstavljaju prve korake u tom pravcu. To je deo rezultata koje smo dobili, a koji se mogu delimično naći i u [18, 19, 20].

Rad je podeljen u sedam glava:

1. Uvod
2. Funkcionalna restrikcija
3. Ograničena brojna restrikcija
4. Jednostavni kvazisvet
5. Modalne opisne logike — odlučivost
6. Modalne opisne logike — donje ocene
7. Modalne opisne logike — gornje ocene

U uvodu se navode, uglavnom, poznati pojmovi i tvrđenja koje koristimo pri našim daljim izlaganjima. U drugoj glavi proučavamo fragment logike $\mathcal{DIF}$ koji nazvamo $\mathcal{D}_1\mathcal{IF}$. U okviru ove glave je naveden i primer koji pokazuje da dokazi i konstrukcije u [11] za logiku $\mathcal{DIF}$ nisu korektni. Kako su ove konstrukcije bitne za naša dalja razmatranja, a direktna popravka dokaza iz [11] se pokazala isuviše teška, mi smo pristupili stvaranju novih konstrukcija i dokaza, ali za logiku $\mathcal{D}_1\mathcal{IF}$.[2] U okviru treće glave proučavamo fragment logike $\mathcal{DIQ}$ koji smo nazvali $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$. U četvrtoj glavi, koristeći rezultate druge i treće glave, konstruisan je NEXPTIME algoritam koji proverava da li je data struktura jednostavni kvazisvet ili ne. Ovaj algoritam igra važnu ulogu u dobijanju nekih gornjih ocena u sedmoj glavi. U petoj glavi navodimo neke pojmove i poznate rezultate koje koristimo u šestoj i sedmoj glavi. Glavni rezultati teze se nalaze u šestoj i sedmoj glavi, u kojima je obezbeđena donja, odnosno, gornja ocena za problem zadovoljivosti u nekim od opisnih logika s modalnim operatorima. Donje ocene su obezbeđene korišćenjem tehnike redukcije na odgovarajući problem popločavanja, a gornje opisivanjem odgovarajućih algoritama za konstrukciju kvazimodela oslanjajući se na rezultate F. Woltera i M. Zaharjaševa.

Mada svaka, sem prve i pete glave, delimično ili u potpunosti, sadrži orginalne rezultate, kao glavni rezultati teze mogu se izdvojiti oni sadržani u Teoremi 80 - da je problem zadovoljivosti za $\mathcal{ALC}_\mathcal{M}$, $\mathcal{CI}_\mathcal{M}$ i $\mathcal{C}_1\mathcal{IQ}_\mathcal{M}$ formule u klasi modela K NEXPTIME-kompletan; Teoremi 85 - da je problem zadovoljivosti za iste logike, ali u klasi modela $S5$ i $KD45$ takođe NEXPTIME-kompletan i Teoremi 87 - da je problem zadovoljivosti za $\mathcal{ALC}_\mathcal{U}$, $\mathcal{CI}_\mathcal{U}$ i $\mathcal{C}_1\mathcal{IQ}_\mathcal{U}$ formule u klasi modela N EXPSPACE-kompletan.

Koristim priliku da se zahvalim profesoru dr Žarku Mijajloviću, koji me je upoznao sa teorijom složenosti algoritama i sa kojim sam započeo prve istraživačke korake, profesoru dr Vladimiru Zaharovu koji me je zainteresovao za modalne logike i članovima komisije za pregled i ocenu doktorske disertacije u sastavu profesor dr Kosta Došen, profesor dr Žarko Mijajlović i profesor dr Slobodan Vujošević, koji su korisnim primedbama i savetima uticali da poboljšam završni tekst disertacije. Najveću zahvalnost dugujem profesoru dr Mihailu Zaharjaševu, koji mi je u toku izrade teze svojim savetima pomogao da prevaziđem, manje ili veće, poteškoće.

Blagodarim i svima koji su mi na razne načine pomogli da započnem i okončam ovaj rad.

U Beogradu, 2000. Mr Milenko Mosurović

[2]Autor teze [11] (privatna komunikacija) se slaže da je naš kontraprimer dobar, ali on takođe veruje da su njegova tvrđenja tačna i da se dokazi mogu popraviti.

1 Uvod

1.1 Opisne i modalne logike

U ovom odeljku mi ćemo prikazati osnovne pojmove o Opisnim i Modalnim logikama, koji su neophodni za razumevanje naših daljih razmatranja. Detaljniji pristup ovoj problematici može se naći u mnogobrojnoj literaturi, na primer [21, 15, 10, 8].

1.1.1 Opisne logike

Opisne logike gradimo koristeći odgovarajuće konstruktore i simbole iz sledeća tri skupa:

- imena pojmova: $A_1, A_2, ...$;
- imena svojstava: $P_1, P_2, ...$;
- imena objekata: $\alpha_1, \alpha_2, ...$.

Konstruktori nam pomažu da polazeći od imena pojmova i imena svojstava izgradimo složene pojmove i složena svojstva. Intuitivno, pojmovi nam služe za opisivanje (predstavljanje) klasa (skupova) objekata u domenu koji nas interesuje, a svojstva nam služe za opisivanje odnosa (veza) tj. binarnih relacija između objekata. Opisne logike se razlikuju jedna od druge (u smislu sintakse ovih logika) samo po skupu konstruktora koje koriste. Drugim rečima, opisna logika $\mathcal{L}$ je jednoznačno određena skupom konstruktora koje koristi. Pojmove (respektivno svojstva) koje dobijamo koristeći konstruktore logike $\mathcal{L}$ nazivamo $\mathcal{L}$-pojmovima (respektivno $\mathcal{L}$-svojstvima).

Jedna od osnovnih opisnih logika, koju ovde razmatramo, je logika koja je nazvana $\mathcal{ALC}$. Ostale opisne logike, koje razmatramo ovde, su dobijene iz $\mathcal{ALC}$ dodavanjem novih konstruktora. Pravila za formiranje $\mathcal{ALC}$-pojmova i $\mathcal{ALC}$-svojstava su data sledećom sintaksom:

$$C ::= \top | \bot | A | C_1 \wedge C_2 | C_1 \vee C_2 | C_1 \Rightarrow C_2 | \neg C | \exists R.C | \forall R.C$$

$$R ::= P$$

gde je A atomarni pojam tj. ime pojma, C (moguće sa indeksom) označava pojam, P, R označavaju svojstva, koja su ovde samo atomarna tj. imena svojstava.

Pojmovi se interpretiraju kao podskupovi od domena, svojstva kao binarne relacije nad domenom, a objekti kao elementi domena. Formalno, *interpretacija* $I = \langle \Delta^I, \cdot^I \rangle$ se sastoji od *domena interpretacije* Δ^I i *funkcije interpretacije* $\cdot^I$ koja svakom atomarnom pojmu A pridružuje podskup A^I od Δ^I, svakom atomarnom svojstvu P pridružuje podskup P^I od $\Delta^I \times \Delta^I$ i svakom imenu objekta α pridružuje jedan element (objekt) α^I iz Δ^I. Obično se pretpostavlja (zbog primene u bazama podataka i drugim oblastima) da različitim imenima objekata odgovaraju različiti elementi u Δ^I, pa se otuda ne pravi razlika između α i α^I, tj. mi ćemo često pisati α umesto α^I. Funkcija interpretacije se proširuje na složene pojmove saglasno sledećim pravilima semantike:

$$
\begin{aligned}
&\top^I = \Delta^I \\
&\bot^I = \emptyset \\
&(\neg C)^I = \Delta^I - C^I \\
&(C_1 \wedge C_2)^I = C_1^I \cap C_2^I \\
&(C_1 \vee C_2)^I = C_1^I \cup C_2^I \\
&(C_1 \Rightarrow C_2)^I = (\neg C_1)^I \cup C_2^I \\
&(\exists R.C)^I = \{d \in \Delta^I \mid \exists d'.(d, d') \in R^I \text{ i } d' \in C^I\} \\
&(\forall R.C)^I = \{d \in \Delta^I \mid \forall d'.(d, d') \in R^I \text{ sledi } d' \in C^I\}
\end{aligned}
$$

U logici $\mathcal{ALC}$ je dozvoljeno formiranje složenih pojmova ali ne i složenih svojstava. Da bi se prevazišao ovaj nedostatak uvode se razna proširenja logike $\mathcal{ALC}$; jedno od proširenja je logika koja se označava sa $\mathcal{C}$. Pravila za formiranje $\mathcal{C}$-pojmova i $\mathcal{C}$-svojstava su data sledećom sintaksom:

$$C ::= \top | \bot | A | C_1 \wedge C_2 | C_1 \vee C_2 | C_1 \Rightarrow C_2 | \neg C | \exists R.C | \forall R.C$$

$$R ::= P | R_1 \vee R_2 | R_1 \circ R_2 | R^* | id(C)$$

gde A označava atomarni pojam tj. ime pojma, C (moguće sa indeksom) označava pojam, P označava atomarno svojstvo tj. ime svojstva i R (moguće sa indeksom) označava svojstvo.

Napomenimo da je $\mathcal{C}$ veoma izražajan jezik, koji sadrži uobičajne konstruktore za formiranje složenih pojmova [3] i veoma bogat skup konstruktora za formiranje složenih svojstava, koje nazivamo: unija svojstava $R_1 \vee R_2$, kompozicija svojstava $R_1 \circ R_2$, refleksivno tranzitivno-zatvorenje svojstava R^* i svojstvo indentiteta $id(C)$ projektovano na C.

[3] Konstruktori su isti kao za logiku $\mathcal{ALC}$.

Funkcija interpretacije se proširuje na složena svojstva saglasno sledećim semantičkim pravilima:[4]

$$\begin{aligned}
&(R_1 \vee R_2)^I = R_1^I \cup R_2^I \\
&(R_1 \circ R_2)^I = R_1^I \circ R_2^I \\
&(R^*)^I = (R^I)^* = \cup_{i \geq 0} (R^I)^i \\
&id(C) = \{(d, d) \in \Delta^I \times \Delta^I \mid d \in C^I\}.
\end{aligned}$$

Ako prethodnom skupu konstruktora dodamo konstruktor za inverziju svojstava R^-, dobijamo opisnu logiku koja se označava sa $\mathcal{CI}$. Formalno, pravila za formiranje $\mathcal{CI}$-pojmova i $\mathcal{CI}$-svojstava su data sledećom sintaksom:

$$C ::= \top | \bot | A | C_1 \wedge C_2 | C_1 \vee C_2 | C_1 \Rightarrow C_2 | \neg C | \exists R.C | \forall R.C$$

$$R ::= P | R_1 \vee R_2 | R_1 \circ R_2 | R^* | R^- | id(C)$$

gde A označava atomarni pojam tj. ime pojma, C (moguće sa indeksom) označava pojam, P označava atomarno svojstvo tj. ime svojstva i R (moguće sa indeksom) označava svojstvo.

Funkcija interpretacije, za novi konstruktor, se proširuje saglasno sledećem semantičkom pravilu:

$$(R^-)^I = \{(a, b) \in \Delta^I \times \Delta^I \mid (b, a) \in R^I\}.$$

Za nas će od posebnog interesa biti opisna logika $\mathcal{CIQ}$ odnosno fragment ove logike $\mathcal{C}_1\mathcal{IQ}$. Logika $\mathcal{CIQ}$ se dobija iz logike $\mathcal{CI}$ dodavanjem konstruktora ograničene brojne restrikcije $(\leq nQ.C)$ i $(\geq nQ.C)$ za $n \geq 1$. Ograničene brojne restrikcije $(\leq nQ.C)$ i $(\geq nQ.C)$ označavaju skupove objekata koji imaju Q-veze sa najviše, respektivno sa najmanje, n objekata iz C, gde je Q atomarno svojstvo ili inverzija atomarnog svojstva, tj. $Q = P | P^-$. Formalno, pravila za formiranje $\mathcal{CIQ}$-pojmova i $\mathcal{CIQ}$-svojstava su data sledećom sintaksom:

$$C ::= \top | \bot | A | C_1 \wedge C_2 | C_1 \vee C_2 | C_1 \Rightarrow C_2 | \neg C | \exists R.C | \forall R.C | (\leq nQ.C) | (\geq nQ.C)$$

$$Q ::= P | P^-$$

$$R ::= P | R_1 \vee R_2 | R_1 \circ R_2 | R^* | R^- | id(C)$$

[4]Oznaka $(R^I)^i$ znači da se R^I u kompoziciji ponavlja i puta, tj. $(R^I)^1 = R^I$ i $(R^I)^{i+1} = R^I \circ (R^I)^i$, specijalno $(R^I)^0 = \{(d, d) \mid d \in \Delta^I\}$.

gde A označava atomarni pojam, C (moguće sa indeksom) označava pojam, P označava atomarno svojstvo, Q označava prosto svojstvo tj. atomarno svojstvo ili inverzija atomarnog svojstva i R (moguće sa indeksom) označava svojstvo.

Semantika za $\mathcal{CIQ}$ je ista kao za $\mathcal{CI}$, osim što je značenje novih konstruktora u datoj interpretaciji I sledeće:

$$(\leq nQ.C)^I = \{d \in \Delta^I \mid \text{postoji } \textit{najviše } n \text{ objekata } d' \text{ takvih da je } (d,d') \in Q^I \text{ i } d' \in C^I\}$$

$$(\geq nQ.C)^I = \{d \in \Delta^I \mid \text{postoji } \textit{najmanje } n \text{ objekata } d' \text{ takvih da je } (d,d') \in Q^I \text{ i } d' \in C^I\}$$

Logika $\mathcal{C}_1\mathcal{IQ}$ je fragment logike $\mathcal{CIQ}$. U logici $\mathcal{C}_1\mathcal{IQ}$ mi možemo konstruisati svojstvo R^* akko ne postoji prosto svojstvo Q tako da se Q i Q^- istovremeno javljaju u zapisu svojstva R.

Pojam C je *zadovoljiv* ako postoji interpretacija I takva da je $C^I \neq \emptyset$ i u tom slučaju interpretaciju I nazivamo *modelom* za C. Kazaćemo da je pojam C *obuhvaćen sa* D ako je $C^I \subseteq D^I$ za svaku interpretaciju I.

Za fiksiranu opisnu logiku $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$-*baza znanja* $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ se obrazuje iz dve komponente: TBox $\mathcal{T}$ i ABox $\mathcal{A}$. TBox je konačan skup izraza oblika (tvrđenja o obuhvatanju) $C_1 \subseteq C_2$, gde su C_1, C_2 pojmovi. ABox je konačan skup izraza oblika (tvrđenja o posebnim slučajevima) $\alpha : C$ ili $(\alpha_i P \alpha_j)$, gde je C pojam, P ime svojstva, a α_i, α_j i α imena objekata.

Interpretacija I je model za TBox $\mathcal{T}$ ako za svako $(C_1 \subseteq C_2) \in \mathcal{T}$ važi $C_1^I \subseteq C_2^I$ (tj. I je model za $C_1 \subseteq C_2$). Interpretacija I je model za ABox $\mathcal{A}$ ako za svako $(\alpha : C) \in \mathcal{A}$ važi $\alpha^I \in C^I$ (tj. I je model za $\alpha : C$) i svako $(\alpha_i P \alpha_j) \in \mathcal{A}$ važi $(\alpha_i^I, \alpha_j^I) \in P^I$ (tj. I je model za $(\alpha_i P \alpha_j)$). Ako je interpretacija I model za TBox $\mathcal{T}$ i ABox $\mathcal{A}$ onda kažemo da je I *model za bazu znanja* $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$. Baza znanja je zadovoljiva ako ima model. Kazaćemo da je pojam C *zadovoljiv u bazi znanja* $\mathcal{K}$ ako postoji model I za $\mathcal{K}$ takav da je $C^I \neq \emptyset$. Takođe, govorimo da *iz baze znanja* $\mathcal{K}$ *logički sledi tvrđenje* (obuhvatanja ili o posebnom slučaju) σ, i zapisujemo $\mathcal{K} \models \sigma$, ako je svaki model za $\mathcal{K}$ istovremeno model i za σ.

Postoji niz usluga (upita, zadataka, problema) koji se razmatraju u opisnim logikama. Neki od njih su:

- Da li je pojam C zadovoljiv?

- Da li je pojam C obuhvaćen sa D?
- Da li je pojam C zadovoljiv u bazi znanja $\mathcal{K}$?
- Da li je $\mathcal{K} \models \sigma$?

Mi se ovde nećemo baviti ovakvim servisima već će naše formule u opisnim logikama s modalnim operatorima biti tako konstruisane da "obuhvataju" ovakve servise.

1.1.2 Iskazna dinamička logika

Opisne logike su tesno povezane sa multi modalnim logikama. Tako, opisnoj logici $\mathcal{CI}$ "odgovara" iskazna dinamička logika $\mathcal{DI}$ (Inverzna PDL [13]). Logika $\mathcal{DI}$ je multi modalna logika u kojoj modalne operatore možemo posmatrati kao programe, koje gradimo polazeći od atomarnih programa. Formalno, formule i programe u logici $\mathcal{DI}$ gradimo koristeći sledeća sintaktička pravila:

$$\phi ::= \top | \bot | A | \phi_1 \wedge \phi_2 | \phi_1 \vee \phi_2 | \phi_1 \Rightarrow \phi_2 | \neg\phi | < r > \phi | [r] \phi$$

$$r ::= P | r_1 \cup r_2 | r_1 ; r_2 | r^* | r^- | \phi ?$$

gde je A iskazni simbol, ϕ (moguće sa indeksom) formula, P atomarni program i r (moguće sa indeksom) program.

Sintaksu iskazne dinamičke logike $\mathcal{D}$ (PDL [13]), koja odgovara opisnoj logici $\mathcal{C}$, dobijamo izostavljanjem inverznog programa r^-, dok logiku K_m koja odgovara $\mathcal{ALC}$ dobijamo dozvoljavanjem samo atomarnih programa. Logike $\mathcal{DIQ}$ i $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$, koje odgovaraju opisnim logikama $\mathcal{CIQ}$ i $\mathcal{C}_1\mathcal{IQ}$ respektivno, ćemo razmatrati kasnije.

Semantika modalnih logika, pa time i iskazne dinamičke logike, se zasniva na pojmu (Kripke) strukture, koja se definiše kao trojka $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$, gde S označava neprazan skup stanja,[5] $\{R_P\}$ je familija binarnih relacija na S tako da relacija R_P odgovara atomarnom programu P i ona opisuje njegovo značenje, a Π je preslikavanje iz S u skupove iskaznih simbola, tako da $\Pi(s)$ određuje (sadrži) simbole koji su istiniti u stanju s.

Istinitosna relacija, koja se označava sa $M, s \models \phi$ i obično čita: "Formula ϕ važi u stanju s strukture M", se definiše induktivno po konstrukciji formule

[5] Umesto skup stanja često se govori i skup tačaka, skup mogućih svetova; pa tako umesto stanje govori se tačka ili svet i slično

ϕ na sledeći način:

$$\begin{array}{lll}
M, s \models A & \text{akko} & A \in \Pi(s) \\
M, s \models \top & \text{uvek} & \\
M, s \models \bot & \text{nikad} & \\
M, s \models \phi_1 \wedge \phi_2 & \text{akko} & M, s \models \phi_1 \text{ i } M, s \models \phi_2 \\
M, s \models \phi_1 \vee \phi_2 & \text{akko} & M, s \models \phi_1 \text{ ili } M, s \models \phi_2 \\
M, s \models \phi_1 \Rightarrow \phi_2 & \text{akko} & M, s \models \phi_1 \text{ povlači } M, s \models \phi_2 \\
M, s \models \neg\phi & \text{akko} & M, s \not\models \phi \\
M, s \models < r > \phi & \text{akko} & \exists s'.(s, s') \in R_r \text{ i } M, s' \models \phi \\
M, s \models [r]\phi & \text{akko} & \forall s'.(s, s') \in R_r \text{ povlači } M, s' \models \phi
\end{array}$$

dok se familija $\{R_P\}$ proširuje da obuhvati, za svaki program r, odgovarajuću binarnu relaciju R_r definisanu induktivno po konstrukciji programa r:

$$\begin{array}{l}
R_{r_1 \cup r_2} = R_{r_1} \cup R_{r_2} \\
R_{r_1 ; r_2} = R_{r_1} \circ R_{r_2} \\
R_{r^*} = (R_r)^* \\
R_{r^-} = \{(s_1, s_2) \in S \times S \mid (s_2, s_1) \in R_r\} \\
R_{\phi ?} = \{(s, s) \in S \times S \mid M, s \models \phi\}.
\end{array}$$

Struktura $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ se naziva *modelom za formulu* ϕ ako postoji stanje $s \in S$ tako da je $M, s \models \phi$. Formula ϕ je *zadovoljiva* ako postoji model za ϕ. Napomenimo da nezavisno od formule mi ćemo samu strukturu M nazivati modelom. Formula ϕ je *valjana u strukturi* M (u oznaci $M \models \phi$) ako za svako $s \in S$ važi $M, s \models \phi$. Formula je *valjana* ako je valjana u svim strukturama.

Da su opisne logike, ustvari, samo drugačiji zapisi multi modalnih logika, prvi je ukazao Schild [24]. Naime, postoji obostrano jednoznačno preslikavanje δ između $\mathcal{CI}$-pojmova i $\mathcal{DI}$-formula kao i između $\mathcal{CI}$-svojstava i $\mathcal{DI}$-programa. Preslikavanje δ je definisano induktivno na sledeći način:

$$\begin{array}{ll}
\delta(A) = A & \delta(P) = P \\
\delta(\neg C) = \neg\delta(C) & \delta(R_1 \circ R_2) = \delta(R_1); \delta(R_2) \\
\delta(C_1 \wedge C_2) = \delta(C_1) \wedge \delta(C_2) & \delta(R_1 \vee R_2) = \delta(R_1) \cup \delta(R_2) \\
\delta(\exists R.C) = < \delta(R) > \delta(C) & \delta(R^*) = \delta(R)^* \\
\delta(id(C)) = \delta(C)? & \delta(R^-) = \delta(R)^-
\end{array}$$

Osim toga svakoj interpretaciji $I = \langle \Delta^I, \cdot^I \rangle$ jednoznačno odgovara struktura (i obrnuto) $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ određena sa: $S = \Delta^I$, $R_P = P^I$ i $\Pi(s) = \{A : s \in A^I\}$.

Otuda se, između ostalog, izvodi zaključak da je $\mathcal{CI}$ pojam C zadovoljiv ako i samo ako je $\mathcal{DI}$ formula $\delta(C)$ zadovoljiva.

U tom smislu smo govorili da logika $\mathcal{CI}$ *odgovara* logici $\mathcal{DI}$.

1.2 Uvodne napomene o složenosti

Da bi smo mogli da razumemo rezultate o složenosti, koje prikazujemo u tezi, potrebno je da znamo šta je složenost nekog zadatka (problema) kao i niz drugih pojmova vezanih za ovu problematiku. Zato ovde dajemo kratak, više intuitivan, pregled ovih pojmova. Naglasimo da se ovde nećemo baviti formalnim izlaganjem ovih pojmova, jer smatramo da su čitaocu poznati. Za detaljniji pristup teoriji složenosti mi čitaoca upućujemo na [1, 17, 26, 28, 5].

1.2.1 Vremenska i prostorna složenost

Nas će pre svega interesovati rešavanje problema (zadataka) koji se mogu formulisati na sledeći način: Dat je skup L i element x, da li x pripada L?

Odgovori na postavljeno pitanje su "da" ili "ne", otuda se ovako formulisan problem naziva da/ne problem. Sam da/ne problem možemo poistovetiti sa datim skupom L, pa kažemo dat je problem L tj. dat je skup L. Ono što mi treba da odredimo je pripadnost nekog elementa datom skupu.

Primer 1. *Data je klasa modela C i formula ϕ neke logike. Da li je ϕ zadovoljiva u C?*

Mada ovde nije direktno zadat skup L, ovo je takođe da/ne problem. L je, ustvari, skup svih formula ϕ koje su zadovoljive u C.

Ako možemo konstruisati algoritam-"efektivnu proceduru" (na primer, program na savremenom računaru) koji će dati odgovor na postavljeni da/ne problem, onda kažemo da je problem (tj. skup L) *odlučiv*. Za odlučive probleme postavlja se pitanje "efikasnosti" konstruisane procedure (algoritma). Najčešće nas interesuje koliko je potrebno vremena i (memorijskog) prostora da bi dati algoritam dao odgovor na postavljeni da/ne problem. Tako se vrše razne procene potrebnog vremena i prostora konstruisanih algoritama, kako bi mogli izabrati efikasniji (bolji) algoritam. Vrednosti ovih procena nazivamo *vremenskom* i *prostornom složenošću algoritma* i obično ih izražavamo u zavisnosti od veličine ulaza. Na primer, kao vremensku složenost algoritma možemo uzeti broj elementarnih koraka koje algoritam treba da izvrši u zavisnosti od veličine ulaza.[6] Pri tome možemo zanemariti sve konstantne faktore, kao i sabirke "nižeg reda", tj. koristiti notaciju $O(\cdot)$. Tako govorimo da je vremenska složenost školskog algoritma sortiranja $O(n^2)$, a brzog algoritma sortiranja $O(n \log n)$ itd.

1.2.2 Nedeterminizam

Savremeni računar je deterministička mašina. Programi napisani za njega su deterministički. Naime u svakoj tački izračunavanja sledeći korak izračunavanja je jedinstveno određen. Od teorijskog značaja je da se u pojedinim tačkama programa ponudi više različitih koraka od kojih jedan treba da bude izabran kao sledeći. Ako ničim nije određeno koji korak treba izabrati kao sledeći onda se program naziva nedeterministički i ne može se izvršavati na savremenom računaru. Zato se uvodi pojam nedeterminističke mašine. Nedeterministička mašina je, na primer, savremeni računar kome je dodat uređaj za izvršavanje tzv. nedeterminističke naredbe, tj. nedeterminističko biranje koji od ponuđenih koraka će biti izvršen. Između ostalog, možemo pretpostaviti da nedeterministička mašina nedeterministički pogađa (bira) neku vrednost na osnovu koje deterministički može odrediti koji od ponuđenih koraka treba izvršiti. Pod nedeterminističkim algoritmom, mi ćemo ustvari podrazumevati nedeterministički program, namenjen za izvršavanje na nedeterminističkoj mašini tj. spoj mašine i programa.

Postavlja se pitanje kako funkcioniše nedeterministička naredba?

Ako bi nedeterministički izbor vrednosti (tj. sledećeg koraka) zamenili sa slučajnim izborom, onda bi isti algoritam za iste ulazne vrednosti mogao da daje različite odgovore ako ga izvršavamo više puta. Međutim odgovor nedeterminističkog algoritma mora biti jednoznačan. Zato je najvažnije shvatiti kako se definiše ovaj odgovor.

Odgovor nedeterminističkog algoritma je "da" ako i samo ako nedeterministička naredba može izabrati takve vrednosti koje vode odgovoru "da". Drugim rečima, odgovor nedeterminističkog algoritma je "da" ako i samo ako možemo zameniti nedeterminističke naredbe (izbore) determinističkim koje vode odgovoru "da".

Dakle, možemo smatrati da nedeterministička mašina ima sposobnost da izabere, bez razmišljanja (tj. bez trošenja dodatnog vremena), takvu

[6] Pretpostavljamo da je za izvršavanje jednog elementarnog koraka potrebno konstantno vreme i da se algoritam sastoji od elementarnih koraka. Na primer, elementaran korak može biti operacija sabiranja ili operacija poređenja dva cela broja itd.

vrednost koja će voditi odgovoru "da" i to uvek kada je takav izbor moguć. Ova njena sposobnost je danas osnovna prepreka za praktičnu realizaciju nedeterminističke mašine.

Napomenimo da se vremenska i prostorna složenost nedeterminističkog algoritma definišu na isti način kao kod determinističkog algoritma. Takođe, zanimljivo je spomenuti činjenicu da je deterministički algoritam samo specijalni oblik nedeterminističkog algoritma, dok se svaki nedeterministički algoritam može zameniti determinističkim algoritmom tako što se nedeterminističke naredbe zamene sa uzastopnim (determinističkim) izborima različitih vrednosti,[7] od mogućih, sve dok se ne dobije odgovor "da" ili dok se ne iscrpe sve mogućnosti. Otuda se ponekad prvo konstruiše nedeterministički algoritam, što je jednostavnije za naše razmišljanje jer ne brinemo o redosledu izvršavanja pojedinih koraka, a zatim ovaj algoritam zamenimo determinističkim algoritmom. Međutim, zamena nedeterminističkog algoritma determinističkim, kako je to gore opisano, može značajno povećati složenost algoritma.

Na kraju ukažimo da se nedeterministički algoritam, uobičajeno, pravi tako što se sve nedeterminističke naredbe izdvoje na početak. Ove naredbe nam omogućuju da formiramo tj. pogodimo pomoćnu reč, a zatim u drugom delu algoritma deterministički proverimo da li je tako formirana reč ona koju želimo tj. ona koja ispunjava potrebne uslove.

Primer 2. *Nedeterministički algoritam za problem iz Primera 1, pod pretpostavkom da je klasa C konačna i da su strukture u njoj konačne, obično ima sledeći oblik:*

1. *Nedeterministički pogađamo strukturu M iz C i stanje s u M.*
2. *Proveravamo (deterministički) da li je $M, s \models \phi$.*

Ovakav algoritam možemo zameniti determinističkim, tako što ćemo uzimati jednu po jednu strukturu M iz C i proveravati da li je $M, s \models \phi$, sve dok ne dobijemo odgovor "da" ili dok ne iscrpimo sve strukture iz C.

1.2.3 Klase složenosti

U okviru ove teze mi ćemo se prvenstveno interesovati za klase složenosti kao što su P, NP, PSPACE, EXPTIME, NEXPTIME, EXPSPACE, ...

[7] Drugim rečima mi izvršavamo algoritam za jednu od mogućih vrednosti, pa ako dobijemo odgovor "ne" onda uzimamo drugu vrednost i izvršavamo algoritam za nju itd.

P je klasa svih problema (skupova) L, za koje odgovor na pitanje da li dati element x pripada L, možemo dobiti za deterministički polinomijalno vreme u zavisnosti od veličine ulaza x (tj. za koje postoji deterministički algoritam, koji daje odgovor na postavljeno pitanje, a čija je vremenska složenost $O(p(|x|))$, gde je $p(\cdot)$ polinom a $|x|$ je veličina ulaza x).

Slično, NP, PSPACE, EXPTIME, NEXPTIME i EXPSPACE su klase svih problema L, za koje odgovor na pitanje da li dati element x pripada L, možemo dobiti za nedeterministički polinomijalno vreme, deterministički polinomijalan prostor, deterministički eksponencijalno vreme, nedeterministički eksponencijalno vreme i deterministički eksponencijalni prostor respektivno u zavisnosti od veličine ulaza x.

Nije teško pokazati da je

$$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME} \subseteq \mathrm{NEXPTIME} \subseteq \mathrm{EXPSPACE}.$$

Takođe poznato je da je P $\neq$ EXPTIME. Mnogi specijalisti pretpostavljaju da su sve inkluzije stroge, ali dokazivanje ove pretpostavke za sada ostaje nedostižno. Napomenimo da pitanje da li je P $=$ NP? se trenutno smatra najvažnijim otvorenim problemom u teoriji složenosti algoritama. Vredi spomenuti da je PSPACE $=$ NPSPACE (vidi [23]), što znači da nedeterminizam ne menja ništa na nivou polinomijalnog prostora.

Govorićemo da problem B *možemo polinomijalno svesti (redukovati)* na problem A ako postoji funkcija (algoritam) f polinomijalne vremenske složenosti koja dati B-ulaz x transformiše u A-ulaz $f(x)$ tako da važi: $x \in B$ ako i samo ako $f(x) \in A$; tj. algoritam koji proverava pripadnost skupu B možemo "lako" dobiti pomoću algoritma koji proverava pripadnost skupu A. Za problem A kažemo da je *težak* u odnosu na klasu složenosti C (na primer NP-težak, PSPACE-težak, itd.) ako svaki problem iz C možemo polinomijalno svesti (redukovati) na A. Ako je problem C-težak i pripada C onda kažemo da je on *C-kompletan.*

Ako dokažemo da je neki problem C-težak onda kažemo da smo dobili donju ocenu, a ako dokažemo da je u C kažemo da smo dobili gornju ocenu.

1.2.4 Problemi popločavanja

Kako je to pokazano u [27], problemi popločavanja predstavljaju elegantan metod za dobijanje donjih ocena za mnoge probleme, pa ćemo i mi koristiti takav metod ovde.

Tip ploče t je 1×1 kvadrat fiksirane orijentacije, a čije su ivice obojene bojama $right(t)$, $left(t)$, $up(t)$ i $down(t)$ uzetih iz nekog konačnog skupa boja. Napomenimo da je svaki tip ploče jedinstveno određen uređenom četvorkom $(right(t), left(t), up(t), down(t))$. Problem popločavanja se formuliše u sledećem obliku: dat je konačan skup $\mathcal{T}$ tipova ploča, da li mi možemo pokriti (popločati) određen deo od $Z \times Z$, koristeći samo tipove ploča iz $\mathcal{T}$ ali na takav način da se boje na zajedničkoj ivici susednih tipova ploča poklapaju? Mi ovde navodimo samo probleme koje ćemo koristiti. Više o problemima popločavanja može se naći u literaturi ([27, 22]).

> $n \times n$ popločavanje: Dat je konačan skup $\mathcal{T}$ tipova ploča, može li $\mathcal{T}$ popločati torus dimenzije $n \times n$?
>
> Drugim rečima, da li postoji funkcija g iz $n \times n$ u $\mathcal{T}$ tako da je: [8]
>
> $$right(g(i,j)) = left(g(i \oplus 1, j)), \text{ i } up(g(i,j)) = down(g(i, j \oplus 1))?$$
>
> n-KORIDOR popločavanje: Dat je konačan skup $\mathcal{T}$ tipova ploča, da li postoji prirodan broj m takav da $\mathcal{T}$ popločava pravougaonik $n \times m$ s belim ivicama? (Bela boja je fiksirana u skupu boja.)
>
> Drugim rečima, da li postoji prirodan broj m i funkcija g iz $n \times m$ u $\mathcal{T}$ tako da je:
>
> $$right(g(i,j)) = left(g(i+1, j)), \ up(g(i,j)) = down(g(i, j+1)) \text{ i}$$
>
> $$right(g(n,j)) = left(g(1,j)) = up(g(i,m)) = down(g(i,1)) = bela?$$

Teorema 3. *i) $n \times n$ problem popločavanja, kada je n zadato u unarnom brojnom sistemu je NP-kompletan.*

ii) $n \times n$ problem popločavanja, kada je n zadato u binarnom brojnom sistemu je NEXPTIME-kompletan.

iii) n-KORIDOR problem popločavanja, kada je n zadato u unarnom brojnom sistemu je PSPACE-kompletan.

iv) n-KORIDOR problem popločavanja, kada je n zadato u binarnom brojnom sistemu je EXPSPACE-kompletan.

[8] $\oplus$ je operacija sabiranja po modulu n, tj. $p \oplus q \equiv (p+q) \mod n$.

1.3 Ostale uvodne napomene

1.3.1 Fišer-Ladnerovo zatvorenje

Fišer-Ladnerovo zatvorenje ([13]) za $\mathcal{DI}$ formulu ϕ, u oznaci $CL(\phi)$, je najmanji skup F takav da je $\phi \in F$ i za koji važi:

$$
\begin{array}{ll}
\phi_1 \wedge \phi_2 \in F & \Rightarrow \phi_1, \phi_2 \in F \\
\neg\phi_1 \in F & \Rightarrow \phi_1 \in F \\
\phi_1 \in F & \Rightarrow \neg\phi_1 \in F \text{ (ako } \phi_1 \text{ nije oblika } \neg\phi') \\
< r > \phi_1 \in F & \Rightarrow \phi_1 \in F \\
< r_1; r_2 > \phi_1 \in F & \Rightarrow < r_1 >< r_2 > \phi_1 \in F \\
< r_1 \cup r_2 > \phi_1 \in F & \Rightarrow < r_1 > \phi_1, < r_2 > \phi_1 \in F \\
< r^* > \phi_1 \in F & \Rightarrow < r >< r^* > \phi_1 \in F \\
< \phi'? > \phi_1 \in F & \Rightarrow \phi' \in F.
\end{array}
$$

Fišer-Ladnerovo zatvorenje se na neki način javlja uopštenjem pojma skupa potformula kod prostijih modalnih logika. Intuitivno, za datu formulu ϕ, $CL(\phi)$ sadrži sve formule koje igraju neku ulogu u obezbeđivanju istinitnosne vrednosti za ϕ. Broj formula i veličina formula u $CL(\phi)$ su linearno ograničeni sa veličinom formule ϕ (vidi [13]). Napomenimo da iz definicije sledi da ako je $\phi' \in CL(\phi)$ tada je $CL(\phi') \subseteq CL(\phi)$. Takođe, pojam Fišer-Ladnerovog zatvorenja može se lako proširiti na ostale iskazne dinamičke logike. Osim toga, možemo definisati Fišer-Ladnerovo zatvorenje za opisne logike. Tako, na primer, Fišer-Ladnerovo zatvorenje za $\mathcal{CIQ}$ pojam C, u oznaci $CL(C)$, je najmanji skup F takav da je $C \in F$ i za koji važi:

$$
\begin{array}{ll}
C_1 \wedge C_2 \in F & \Rightarrow C_1, C_2 \in F \\
\neg C_1 \in F & \Rightarrow C_1 \in F \\
C_1 \in F & \Rightarrow \neg C_1 \in F \text{ (ako } C_1 \text{ nije oblika } \neg C') \\
\leq nQ.C_1 \in F & \Rightarrow C_1 \in F \\
\exists R.C_1 \in F & \Rightarrow C_1 \in F \\
\exists(R_1 \circ R_2).C_1 \in F & \Rightarrow \exists R_1.\exists R_2.C_1 \in F \\
\exists(R_1 \vee R_2).C_1 \in F & \Rightarrow \exists R_1.C_1, \exists R_2.C_1 \in F \\
\exists(R^*).C_1 \in F & \Rightarrow \exists R.\exists(R^*).C_1 \in F \\
\exists id(C').C_1 \in F & \Rightarrow C' \in F.
\end{array}
$$

Sa ϵ ćemo označavati *prazan niz programa*, i neka je po definiciji: $< \epsilon > \phi \doteq \phi$ i $[\epsilon]\phi \doteq \phi$.

Nazivaćemo $Post(r)$ skup programa koji je definisan induktivno po strukturi programa r kako sledi ($a = P|P^-$)

$$\begin{array}{lcl} Post(a) & = & \{\epsilon, a\} \\ Post(r_1; r_2) & = & \{r_1'; r_2 \mid r_1' \in Post(r_1)\} \cup Post(r_2) \\ Post(r_1 \cup r_2) & = & Post(r_1) \cup Post(r_2) \\ Post(r_1^*) & = & \{r_1'; r_1^* \mid r_1' \in Post(r_1)\} \\ Post(\phi?) & = & \{\epsilon, \phi?\}. \end{array}$$

Slično, nazivaćemo $Pre(r)$ skup programa koji je definisan induktivno po strukturi programa r kako sledi

$$\begin{array}{lcl} Pre(a) & = & \{\epsilon, a\} \\ Pre(r_1; r_2) & = & \{r_1; r_2' \mid r_2' \in Pre(r_2)\} \cup Pre(r_1) \\ Pre(r_1 \cup r_2) & = & Pre(r_1) \cup Pre(r_2) \\ Pre(r_1^*) & = & \{r_1^*; r_1' \mid r_1' \in Pre(r_1)\} \\ Pre(\phi?) & = & \{\epsilon, \phi?\}. \end{array}$$

Grubo govoreći, $Post(r)$ je skup programa koji su "postfiksi" programa r, dok $Pre(r)$ je skup programa koji su "prefiksi" programa r. Veličina od $Post(r)$ i $Pre(r)$ je polinomijalna u odnosu na veličinu programa r. Osim toga programi iz $Post(r)$ imaju sledeće dve osobine (vidi [11]):

Stav 4. *Neka je* $< r > \phi$ *formula. Za svako* $r' \in Post(r)$ *važi* $< r' > \phi \in CL(< r > \phi)$.

Stav 5. *Neka je* $< r_1 > \cdots < r_l > \phi$ *formula. Za svako* $r' \in Post(r_1; ...; r_l)$ *postoji formula* $\psi \in CL(< r_1 > \cdots < r_l > \phi)$ *takva da je* ψ *ekvivalentna formuli* $< r' > \phi$ *(tj. formula* $\psi \Leftrightarrow < r' > \phi$ *je valjana).*

1.3.2 Putevi

Sada ćemo definisati pojam puta, koji intuitivno predstavlja niz stanja kroz koja prolazi jedno izvršavanje programa.
Put u strukturi M je niz $(s_0, ..., s_q)$ stanja iz M ($q \geq 0$), takav da je za svako $i = 1, ..., q$, $(s_{i-1}, s_i) \in R_a$ za neko $a = P|P^-$. Dužina puta $(s_0, ..., s_q)$ je q.

Mi induktivno definišemo skup puteva $Paths_M(r)$ programa r u strukturi M, kako sledi[9]:

$$\begin{array}{lcl} Paths_M(a) & = & R_a \\ Paths_M(r_1 \cup r_2) & = & Paths_M(r_1) \cup Paths_M(r_2) \end{array}$$

[9] $r^1 = r$ i $r^{i+1} = r; r^i$.

$$
\begin{array}{lcl}
Paths_M(r_1;r_2) & = & \{(s_0,\dots,s_u,\dots,s_q) \mid (s_0,\dots,s_u) \in Paths_M(r_1) \\
 & & \text{ i } (s_u,\dots,s_q) \in Paths_M(r_2)\} \\
Paths_M(r^*) & = & \{(s) \mid s \in S\} \cup (\bigcup_{i>0} Paths_M(r^i)) \\
Paths_M(\phi?) & = & \{(s) \mid M, s \models \phi\}.
\end{array}
$$

Govorićemo da put (s_0) u M *zadovoljava* formulu ϕ koja nije oblika $< r > \phi'$ ako je $M, s_0 \models \phi$. Kazaćemo da put $(s_0, \dots, s_q)$ u M *zadovoljava* formulu ϕ oblika $< r_1 > \dots < r_l > \phi'$, gde ϕ' nije oblika $< r' > \phi''$, ako je $(s_0, \dots, s_q) \in Paths_M(r_1'; \dots; r_l)$ i $M, s_q \models \phi$.

Osnovna svojstva puta su iskazana u sledeća dva stava (vidi [11]), koja se odnose na put dužine 0 i put dužine veće od 0, respektivno.

Stav 6. *Neka je M struktura, a $< r > \phi$ formula takva da je: $M, s \models < r > \phi$, $(s) \in Paths_M(r)$ i $M, s \models \phi$. Tada postoji formula $< \phi_1?; \dots; \phi_g? > \phi$ sa $g \geq 0$, takva da važi:*

- *svi testovi $\phi_i?$ se javljaju u r;*
- *$M, s \models < \phi_1?; \dots; \phi_g? > \phi$;*
- *sledeća formula je valjana:*
  $< \phi_1?; \dots; \phi_g? > \phi \Rightarrow < r > \phi$.

Stav 7. *Neka je M struktura, a $< r > \phi$ formula takva da je: $M, s \models < r > \phi$, $(s = s_0, \dots, s_q) \in Paths_M(r)$, gde je $q > 0$ i $M, s_q \models \phi$. Tada postoji formula $< \phi_1?; \dots; \phi_g?; a >< r' > \phi$ sa $g \geq 0$, takva da važi:*

- *svi testovi $\phi_i?$ se javljaju u r_2';*
- *$r' \in Post(r)$, pa prema tome formula $< r' > \phi$ je ekvivalentna formuli ψ za neko $\psi \in CL(< r > \phi)$;*
- *$(s_0, s_1) \in R_a$;*
- *$M, s_1 \models < r' > \phi$;*
- *$(s_1, \dots, s_q) \in Paths_M(r')$;*
- *sledeća formula je valjana:*
  $< \phi_1?; \dots; \phi_g?; a >< r' > \phi \Rightarrow < r > \phi$.

2 Funkcionalna restrikcija

U glavi 3, svoje doktorske disertacije [11], De Giacomo razmatra logiku $\mathcal{DIF}$, koja se dobija iz logike $\mathcal{DI}$ dodavanjem konstruktora funkcionalne restrikcije $(\leq 1a)$. Osnovni rezultat, njegovih razmatranja u glavi 3, je tvrđenje da je problem zadovoljivosti $\mathcal{DIF}$ formule EXPTIME-kompletan. Ovaj rezultat je dobijen prikazivanjem jednog kodiranja (prevoda, transformacije) $\mathcal{DIF}$ formule u $\mathcal{DI}$. Preciznije, pokazuje se da za svaku $\mathcal{DIF}$ formulu ϕ postoji $\mathcal{DI}$ formula, koja se označava sa $\gamma(\phi)$, čija je veličina polinomijalna u odnosu na veličinu formule ϕ i takva da važi: ϕ je zadovoljiva ako i samo ako je $\gamma(\phi)$ zadovoljiva. Pa kako je problem zadovoljivosti za $\mathcal{DI}$ formulu EXPTIME-kompletan ovj prevod obezbeđuje da je problem zadovoljivosti za $\mathcal{DIF}$ formulu EXPTIME-kompletan. Međutim, mi smo uočili da pojedini koraci u njegovim dokazima nisu tačni pa je pitanje tačnosti njegovog tvrđenja otvoren problem.

U ovoj glavi mi ćemo konstruisati i razmatrati fragmente logike $\mathcal{DIF}$ za koje De Giacomov prevod (vidi [11]) važi. Napomenimo da iako je osnovna ideja preuzeta od De Giacoma, postoji suštinska razlika u pojedinim koracima kao i dokazima. Osnovne konstrukcije i dokazi iz ove glave biće iskorišćeni za izvođenje pojedinih tvrđenja u glavama 3 i 4.

Sintaksu logike $\mathcal{DIF}$ možemo opisati kako sledi:

$$\phi ::= \top|\bot|A|\phi_1 \wedge \phi_2|\phi_1 \vee \phi_2|\phi_1 \Rightarrow \phi_2|\neg\phi| < r > \phi|[r]\phi|(\leq 1a)$$

$$a ::= P|P^-$$

$$r ::= P|r_1 \cup r_2|r_1; r_2|r^*|r^-|\phi?$$

gde je A iskazni simbol, ϕ (moguće sa indeksom) formula, P atomarni program, a *prost program*, tj. atomarni program ili inverzija atomarnog programa i r (moguće sa indeksom) opšti program.

Semantika za $\mathcal{DIF}$ je ista kao za $\mathcal{DI}$, osim za funkcionalnu restrikciju. Naime, nova konstrukcija se interpretira kako sledi: za datu strukturu $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ i stanje $s \in S$,

$$M, s \models (\leq 1a) \text{ akko postoji } \textit{najviše jedno } t \text{ tako da je } (s,t) \in R_a.$$

U tekstu koji sledi, mi možemo pretpostavljati, bez gubljenja opštosti, da operator inverzije primenjujemo samo na atomarne programe. Lako je proveriti da ove transformacije mogu biti izvedene za linearno vreme u odnosu na veličinu formule.

Logika $\mathcal{D}_1\mathcal{IF}$ je fragment logike $\mathcal{DIF}$. U logici $\mathcal{D}_1\mathcal{IF}$ mi možemo konstruisati program r^* akko ne postoji prost program a takav da se a i a^- istovremeno javljaju u zapisu programa r.

Dalje u ovoj glavi fiksirajmo $\mathcal{DIF}$ formulu ϕ oblika

$$\phi = \psi_1 \wedge [\mathbf{u}]\psi_2, \tag{1}$$

gde su ψ_1, ψ_2 $\mathcal{D}_1\mathcal{IF}$ formule, $P_1, ..., P_m$ su svi atomarni programi u ψ_1, ψ_2, a u je skraćenica za $(P_1 \cup \cdots \cup P_m \cup P_1^- \cup \cdots \cup P_m^-)^*$.

Definicija 8. Mi ćemo definisati $\mathcal{DI}-$*prepis* $\gamma(\phi)$ od ϕ kao konjunkciju dve formule, $\gamma(\phi) = \gamma_1(\phi) \wedge \gamma_2(\phi)$, gde je:

- $\gamma_1(\phi)$ dobijeno iz orginalne formule ϕ zamenom svakog $(\leq 1a)$ sa novim iskaznim simbolom $A_{(\leq 1a)}$, tj.
  - $\gamma_1((\leq 1a)) = A_{(\leq 1a)}$
  - $\gamma_1(A) = A$
  - $\gamma_1(\phi_1 \wedge \phi_2) = \gamma_1(\phi_1) \wedge \gamma_1(\phi_2)$
  - $\gamma_1(\neg\phi_1) = \neg\gamma_1(\phi_1)$
  - $\gamma_1(< r > \phi_1) =< \gamma_1(r) > \gamma_1(\phi_1)$
  - $\gamma_1(a) = a$
  - $\gamma_1(r_1 \cup r_2) = \gamma_1(r_1) \cup \gamma_1(r_2)$
  - $\gamma_1(r_1; r_2) = \gamma_1(r_1); \gamma_1(r_2)$
  - $\gamma_1(r^*) = (\gamma_1(r))^*$
  - $\gamma_1(\phi_1?) = \gamma_1(\phi_1)?$
- $\gamma_2(\phi) = [\mathbf{u}]\gamma_2^1 \wedge ... \wedge \gamma_2^g \wedge \overline{\gamma}_2^1 \wedge ... \wedge \overline{\gamma}_2^e$, sa konjunktima γ_2^i oblika

  $$(A_{(\leq 1a)} \wedge < a > \phi') \Rightarrow [a]\phi'$$

  za svako $A_{(\leq 1a)}, \phi' \in CL_1(\phi)$, i sa konjunktima $\overline{\gamma}_2^i$ oblika

  $$\neg A_{(\leq 1a)} \Leftrightarrow (< a > H_{(\leq 1a)}) \wedge (< a > \neg H_{(\leq 1a)})$$

  za svako $A_{(\leq 1a)} \in CL_1(\phi)$; ovde su $H_{(\leq 1a)}$ novi iskazni simboli, a $CL_1(\phi) = CL(\gamma_1(\psi_1)) \cup CL(\gamma_1(\psi_2))$.

Naglasimo da je $\gamma_1(\phi) = \gamma_1(\psi_1) \wedge [\mathbf{u}]\gamma_1(\psi_2)$.

Lema 9. *Neka $\gamma(\phi)$ bude $\mathcal{DI}$-prepis od ϕ. Tada je $\gamma(\phi)$ $\mathcal{DI}$ formula, i njena veličina je polinomijalna u odnosu na veličinu od ϕ.*

Dokaz Dokaz je direktan. $\square$

Svrha prevoda $\gamma_1(\phi)$ je da uvede nove iskazne simbole $A_{(\leq 1a)}$ umesto konstrukcija $(\leq 1a)$, tako da $A_{(\leq 1a)}$ važi tačno u onim stanjima u kojima važi $(\leq 1a)$. Međutim, lako je konstruisati primer formule ϕ tako da je njen prevod $\gamma_1(\phi)$ zadovoljiv a sama formula ϕ nije zadovoljiva. Ovo je posledica činjenica da ako $A_{(\leq 1a)}$ važi (ne važi) u nekom stanju s, ništa nam ne garantuje da stanje s ima najviše jednog (najmanje dva respektivno) a-naslednika. Iz tih razloga konstruišemo formulu $\gamma_2(\phi)$. Intuitivno, $\gamma_2(\phi)$ nam obezbeđuje da ako u nekom stanju s važi $\neg A_{(\leq 1a)}$ onda u njemu važi $(< a > H_{(\leq 1a)}) \wedge (< a > \neg H_{(\leq 1a)})$, pa s mora imati najmanje dva a-naslednika. S druge strane, ako u stanju s važi $A_{(\leq 1a)}$, a t_1, t_2 su dva a-naslednika od s, tada su t_1 i t_2 ekvivalentni u odnosu na formule iz $CL_1(\phi)$. Mi ćemo pokazati da nam ovo dozvoljava da "odrežemo" jedno od stanja t_1 ili t_2, a da se pri tome istinitost formula iz $CL_1(\phi)$ u ostalim stanjima ne promeni.

Neka $\gamma(\phi)$ bude $\mathcal{DI}$-prepis od ϕ. U tekstu ove glave, koji sledi mi ćemo pokazati da je $\mathcal{DIF}$ formula ϕ oblika (1) zadovoljiva ako i samo ako je njen $\mathcal{DI}$-prepis $\gamma(\phi)$ zadovoljiv. Prvo ćemo pokazati da ovo ne važi ako umesto $\mathcal{DIF}$ formule ϕ oblika (1) uzmemo proizvoljnu $\mathcal{DIF}$ formulu ϕ', a umesto $CL_1(\phi)$ uzmemo $CL(\gamma_1(\phi'))$, tj. De Giacomov dokaz (vidi [11]) nije tačan.

Primer 10. *Posmatrajmo $\mathcal{DIF}$ formulu ϕ' datu sa*

$$\phi' = \Big(< P; P > \big((< (P^-; P^-; P; P)^* > B) \wedge (< (P^-; P^-; P; P)^* > \neg B)\big)\Big)$$
$$\wedge \Big([(P \vee P^-)^*]\big((\leq 1P) \wedge (\leq 1P^-)\big)\Big)$$

i njen $\mathcal{DI}$-prepis $\gamma(\phi')$.

Definišimo model $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ kako sledi:

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}, \quad R_P = \{(s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_3), (s_2, s_4)\},$$
$$\Pi(s_0) = \Pi(s_1) = \Pi(s_2) = \Pi(s_3) = \{B, A_{(\leq 1P)}, A_{(\leq 1P^-)}\},$$
$$\Pi(s_4) = \{A_{(\leq 1P)}, A_{(\leq 1P^-)}\}.$$

Očigledno, $\mathcal{DIF}$ formula ϕ' nije zadovoljiva dok je $M, s_0 \models \gamma(\phi')$.

Dokažimo da ako je formula $\gamma(\phi)$ zadovoljiva tada je formula ϕ zadovoljiva. Osnovni koraci su sledeći:

I) Za dati model M od $\gamma(\phi)$, mi ćemo izgraditi model nalik na drvo M^t takav da je $M^t, root \models \gamma(\phi)$ ($root$ je koren od dobijene strukture drveta).

II) Zatim, sa odgovarajućom modifikacijom strukture M^t, mi ćemo konstruisati model M^f, takav da u njemu važe svi zahtjevi funkcionalnih ograničenja, tj. svako stanje s u kome važi $A_{(\leq 1a)}$ ima najviše jednog a-naslednika.

III) Na kraju, eliminacijom novih iskaznih simbola $A_{(\leq 1a)}$ i $H_{(\leq 1a)}$, dobićemo model $M^{\mathcal{F}}$ od ϕ.

2.1 Konstrukcija modela M^t

Mi ćemo konstruisati model nalik na drvo $M^t = (S^t, \{R^t_P\}, \Pi^t)$ iz datog modela $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ jednostavnim razvijanjem modela M kako sledi: Stavimo s, gde je $M, s \models \gamma(\phi)$, da bude koren drveta; svaki a-naslednik ($a = P|P^-$) od s dodajmo u drvo da bude a-sin od ovog čvora; ovaj proces nastavljamo rekurzivno posmatrajući sada sinove od s itd. Primetimo da ovako konstruisan model koji je nalik na drvo može biti beskonačan iako je polazni model konačan. Za $x \in S^t$ označimo sa $h_t(x)$ stanje u M koje odgovara čvoru x.

Lema 11. *Neka je $M^t = (S^t, \{R^t_P\}, \Pi^t)$ struktura definisana kao gore. Tada,*
a) za svaku formulu $\phi' \in CL_1(\phi)$ i svako stanje $x \in S^t$ važi:

$$M^t, x \models \phi' \ \text{ akko } \ M, h_t(x) \models \phi';$$

b) $M^t = (S^t, \{R^t_P\}, \Pi^t)$ je model za $\gamma(\phi)$.

Dokaz Dokaz se dobija direktnom proverom. □

Mi ćemo dalje, ne gubeći opštost, posmatrati samo modele oblika drveta.

2.2 Konstrukcija modela M^f

Pre početka konstrukcije modela M^f izvršićemo neke tehničke pripreme. Naime, izvešćemo dokaze nekih pomoćnih tvrđenja koja nam olakšavaju dalja razmatranja i pojednostavljuju neke dokaze.
U okviru ovih priprema pretpostavimo da je $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ model nalik na drvo za formulu $\gamma(\phi)$, takav da je $x_0, x_1, x_2 \in S'$, $(x_0, x_1), (x_0, x_2) \in R'_a$, $x_2 = child(x_0)$ i $M', x_0 \models A_{(\leq 1a)}$.[10]

[10] $x_2 = child(x_0)$ tj. x_2 je sin od x_0.

Definicija 12. Pretpostavimo da je $x, s_0, ..., s_q \in S'$. Sa $d(x)$ označavaćemo dužinu minimalnog puta od x do *root*, tj. $d(x)$ je nivo (dubina) stanja x u drvetu. Sada po definiciji stavimo $d(s_0, ..., s_q) = max\{d(s_i)|0 \leq i \leq q\}$.

Jedina osobina logike $\mathcal{D}_1\mathcal{IF}$ koju ovde koristimo a koju nema logika $\mathcal{DIF}$ je iskazana u sledećoj primedbi.

Primedba 13. Na osnovu konstrukcije programa r^* u logici $\mathcal{D}_1\mathcal{IF}$ i osobine, da je nalik na drvo, modela M', za svako $r' \in Post(r^*)$ i svako $(s_0, ..., s_q) \in Paths_{M'}(r')$ važi: ako je $x_1 \in \{s_0, ..., s_q\}$ tada $x_2 \notin \{s_0, ..., s_q\}$.

Naglasimo da naša tvrđenja i dokazi važe i ako umesto logike $\mathcal{D}_1\mathcal{IF}$ uzmemo bilo koji fragment $\mathcal{L}$ logike $\mathcal{DIF}$ za koji važi Primedba 13.

Lema 14. *Neka je* $< r_1 > \phi' \in CL_1(\phi)$. *Tada, za svako* r, $r = r_1$ *ili* $r \in Post(r_1)$,*važi: ako je* $M', x_1 \models < r > \phi'$ *tada postoji put* $(x_1 = s_0, ..., s_q) \in Paths_{M'}(r)$ *takav da je* $M', s_q \models \phi'$ *i* $x_2 \notin \{s_0, ..., s_q\}$.

Dokaz Dokaz izvodimo indukcijom po r_1.

1. $r_1 = b$ ili $r_1 = \phi_1?$.
   Dokaz je jednostavan.

2. $r_1 = r_2^*$.
   $M', x_1 \models < r > \phi'$ znači da, postoji put $(x_1 = s_0, ..., s_q) \in Paths_{M'}(r)$ takav da je $M', s_q \models \phi'$. Na osnovu Primedbe 13, $x_2 \notin \{s_0, ..., s_q\}$.

3. $r_1 = r_1' \cup r_2'$.
   - Ako je $r = r_1$ tada $M', x_1 \models < r > \phi'$ znači da, ili za $i = 1$ ili za $i = 2$, $M', x_1 \models < r_i' > \phi'$. Na osnovu indukcijske hipoteze, možemo pretpostaviti da postoji put $(x_1 = s_0, ..., s_q) \in Paths_{M'}(r_i') \subseteq Paths_{M'}(r)$ takav da je $M', s_q \models \phi'$ i $x_2 \notin \{s_0, ..., s_q\}$. Prema tome dobijamo tvrđenje.
   - Ako je $r \in Post(r_1)$ tada, ili za $i = 1$ ili za $i = 2$, $r \in Post(r_i')$. Otuda, na osnovu indukcijske pretpostavke dobijamo tvrđenje.

4. $r_1 = r_1'; r_2'$ i $r_1 \notin Post(r_2')$.
   - Za $r \in Post(r_2') \subset Post(r_1)$ tvrđenje važi na osnovu indukcijske pretpostavke.
   - Ako je $r = r'; r_2'$, gde je $r' = r_1'$ ili $r' \in Post(r_1')$, tada iz $M', x_1 \models < r > \phi'$ sledi da je $M', x_1 \models < r' > \phi_1$, gde je $\phi_1 = < r_2' > \phi'$. Na osnovu

indukcijske pretpostavke, postoji put $(x_1 = s_0, ..., s_p) \in Paths_{M'}(r')$ takav da je $M', s_p \models \phi_1$ i $x_2 \notin \{s_0, ..., s_p\}$. Sada, iz $M', s_p \models \phi_1$, tj. $M', s_p \models < r_2' > \phi'$ sledi da postoji put $(s_p = t_0, ..., t_m) \in Paths_{M'}(r_2')$ takav da je $M', t_m \models \phi'$. Ako $x_2 \notin \{t_1, ..., t_m\}$ tada mi imamo put $(x_1 = s_0, ..., s_p, t_1, ..., t_m) \in Paths_{M'}(r)$ takav da je $M', t_m \models \phi'$ i $x_2 \notin \{s_0, ..., s_p, t_1, ..., t_m\}$. Ako je $x_2 \in \{t_1, ..., t_m\}$ tada izaberimo u kao najmanji indeks i za koji je $t_i = x_2$, tj. $u = \min\{i : t_i = x_2\}$. Primenom Stava 7 u puta, možemo zaključiti da postoji formula

$$\chi =< (\phi_{0,1}?; \dots; \phi_{0,g_0}?); a_1; \dots; (\phi_{u-1,1}?; \dots; \phi_{u-1,g_{u-1}}?); a_u >< r_2'' > \phi'$$

sa $g_i \geq 0$, takva da važi:

- svi testovi $\phi_{i,j}?$ se javljaju u r_2', pa prema tome
$$\phi_{i,j} \in CL(< r_2' > \phi') \subseteq CL_1(\phi);$$
- $r_2'' \in Post(r_2')$, pa prema tome formula $< r_2'' > \phi'$ je ekvivalentna formuli ψ za neko $\psi \in CL(< r_2' > \phi') \subseteq CL_1(\phi)$;
- $(t_{i-1}, t_i) \in R'_{a_i}$, za $i = 1, ..., u$;
- $M', t_u \models < r_2'' > \phi'$, tj. $M', x_2 \models < r_2'' > \phi'$;
- $(t_u, ..., t_m) \in Paths_{M'}(r_2'')$;
- sledeća formula je valjana:
$\chi \Rightarrow < r_2' > \phi'$.

Na osnovu $\gamma_2(\phi)$, iz $M', x_2 \models < r_2'' > \phi'$ sledi $M', x_1 \models < r_2'' > \phi'$. Pa na osnovu indukcijske pretpostavke imamo da postoji put $(x_1 = s_{p+u}, ..., s_q) \in Paths_{M'}(r_2'')$ takav da je $M', s_q \models \phi'$ i $x_2 \notin \{s_{p+u}, ..., s_q\}$. Sada je jednostavno dokazati da je $(s_0, ..., s_p, t_1, ..., t_{u-1}, s_{p+u}, ..., s_q) \in Paths_{M'}(r)$ traženi put, tj. važi

$$M', s_q \models \phi' \text{ i } x_2 \notin \{s_0, ..., s_p, t_1, ..., t_{u-1}, s_{p+u}, ..., s_q\}.$$

□

Posledica 15. *Neka S'' bude S' bez podrveta čiji je koren x_2. Neka je dalje $R''_{a_i} = R'_{a_i} \bigcap (S'' \times S'')$, $\Pi''(x) = \Pi'(x)$ za $x \in S''$ i $M'' = (S'', \{R''_P\}, \Pi'')$. Tada,*

a) za svako $x \in S''$ i svako $< r > \phi' \in CL_1(\phi)$ važi: ako je $M', x \models < r > \phi'$

tada postoji put $(x = s_0, ..., s_q) \in Paths_{M'}(r)$ *takav da je* $M', s_q \models \phi'$ *i* $\{s_0, ..., s_q\} \subseteq S''$;
b) za svaku formulu $\phi' \in CL_1(\phi)$ *i svako* $x \in S''$, *važi:*

$$M', x \models \phi' \text{ akko } M'', x \models \phi';$$

c) $M'' = (S'', \{R''_P\}, \Pi'')$ *je model za* $\gamma(\phi)$.

Govorićemo da smo konstruisali model M'' iz modela M', čuvanjem stanja x_1 i odrezivanjem (rezanjem) stanja x_2.

Dokaz a) $M', x \models < r > \phi'$ znači da postoji put $(x = t_0, ..., t_p) \in Paths_{M'}(r)$ takav da je $M', t_p \models \phi'$. Ako $x_2 \notin \{t_0, ..., t_p\}$ tada mi imamo tvrđenje.

Ako je $x_2 \in \{t_0, ..., t_p\}$ tada neka je $u = min\{i \ : \ t_i = x_2\}$. Primenom Stava 7 u puta, možemo zaključiti da postoji formula

$$\chi = < (\phi_{0,1}?; \ldots ; \phi_{0,g_0}?); a_1; \ldots ; (\phi_{u-1,1}?; \ldots ; \phi_{u-1,g_{u-1}}?); a_u >< r' > \phi'$$

sa $g_i \geq 0$, takva da važi:

- svi testovi $\phi_{i,j}?$ se javljaju u r, pa prema tome
$$\phi_{i,j} \in CL(< r > \phi') \subseteq CL_1(\phi);$$
- $r' \in Post(r)$, pa prema tome formula $< r' > \phi'$ je ekvivalentna formuli ψ za neko $\psi \in CL(< r > \phi') \subseteq CL_1(\phi)$;
- $(t_{i-1}, t_i) \in R'_{a_i}$, za $i = 1, ..., u$;
- $M', t_u \models < r' > \phi'$, tj. $M', x_2 \models < r' > \phi'$;
- $(t_u, ..., t_m) \in Paths_{M'}(r')$;
- sledeća formula je valjana:
$\chi \Rightarrow < r > \phi'$.

Dalje, na osnovu $\gamma_2(\phi)$, iz $M', x_2 \models < r' > \phi'$ sledi $M', x_1 \models < r' > \phi'$. Na osnovu Leme 14 imamo da postoji put $(x_1 = s_u, ..., s_q) \in Paths_{M'}(r')$ takav da je $M', s_q \models \phi'$ i $x_2 \notin \{s_u, ..., s_q\}$. Sada je jednostavno dokazati da je $(x = t_0, ..., t_{u-1}, s_u, ..., s_q) \in Paths_{M'}(r)$ traženi put, tj. važi $M', s_q \models \phi'$ i $x_2 \notin \{t_0, ..., t_{u-1}, s_u, ..., s_q\}$.

b) Dokaz izvodimo indukcijom po ϕ'.

1. $\phi' = A$
   $M', x \models A$ akko $A \in \Pi'(x)$ akko $A \in \Pi''(x)$ akko $M'', x \models A$;

2. $\phi' = \phi_1 \wedge \phi_2$
   $M', x \models \phi_1 \wedge \phi_2$ akko $M', x \models \phi_1$ i $M', x \models \phi_2$ akko (po indukcijskoj pretpostavci) $M'', x \models \phi_1$ i $M'', x \models \phi_2$ akko $M'', x \models \phi_1 \wedge \phi_2$;

3. $\phi' = \neg\phi_1$
   $M', x \models \neg\phi_1$ akko $M', x \not\models \phi_1$ akko (po indukcijskoj pretpostavci) $M'', x \not\models \phi_1$ akko $M'', x \models \neg\phi_1$;

4. $\phi' =< r > \phi_1$
   $M', x \models< r > \phi_1$ akko (na osnovu a)) postoji put $(x = s_0, ..., s_q) \in Paths_{M'}(r)$ takav da je $M', s_q \models \phi_1$ i $\{s_0, ..., s_q\} \subseteq S''$ akko (po indukcijskoj pretpostavci) postoji put $(x = s_0, ..., s_q) \in Paths_{M''}(r)$ takav da je $M'', s_q \models \phi_1$ akko $M'', x \models< r > \phi_1$.

c) Sada, M'' je model za $\gamma(\phi)$, jer je, s jedne strane, na osnovu b), $M'', root \models \gamma_1(\psi_1)$ i za svako $t \in S''$ $M'', t \models \gamma_1(\psi_2)$, prema tome, $M'', root \models \gamma_1(\psi_1) \wedge [u]\gamma_1(\psi_2)$, tj. $M'', root \models \gamma_1(\phi)$, a s druge strane jasno je da je $M'', root \models \gamma_2(\phi)$. □

Posle izvršenih tehničkih priprema pređimo na konstrukciju model M^f, u kome će da važe sva funkcionalna ograničenja, tj. svako stanje s u kome važi $A_{(\leq 1a)}$ ima najviše jednog a-naslednika. Konstrukcija će biti ostvarena u dva koraka.

Korak 1 Numerišimo redom nivo po nivo stanja $x \in S^t$ takva da je $M^t, x \models A_{(\leq 1a)}$ za neki prost program a. Na ovaj način stanja na nivou (dubini) i su sva numerisana prije stanja na nivou $i+1$.

Korak 2 Na osnovu ove numeracije, mi ćemo prvo opisati konstrukciju niza struktura $M^t = M^0, M^1, M^2, ...$, pri čemu se svako M^k dobija iz $M^{(k-1)}$, razmatrajući k-to stanje $x^k \in S^t$ takvo da je $M^t, x^k \models A_{(\leq 1a)}$ za neki prost program a, na sledeći način:

- Ako $x^k \notin S^{(k-1)}$, tada $M^k = M^{(k-1)}$.
- Ako je $x^k \in S^{(k-1)}$, tada za svaki prost program a takav da je $M^t, x^k \models A_{(\leq 1a)}$: [11]

[11] $father(x)$ je otac od x, tj prethodnik od x u drvetu.

– ako $(x^k, father(x^k)) \notin R_a^{(k-1)}$, mi definišemo

$$R_a^{k'} = R_a^{(k-1)} - \{(x^k, child(x^k)) \in R_a^{(k-1)} \text{ osim jednog}\};$$

(tj. u ovom slučaju mi čuvamo jedno stanje $child(x^k)$ za koje je $(x^k, child(x^k)) \in R_a^{(k-1)}$, ostala takva stanja mi odrezujemo, izbor odgovarajućeg stanja koje čuvamo biće opisan kasnije)

– ako $(x^k, father(x^k)) \in R_a^{(k-1)}$, mi definišemo

$$R_a^{k'} = R_a^{(k-1)} - \{(x^k, child(x^k)) \in R_a^{(k-1)}\}.$$

(tj. u ovom slučaju mi čuvamo $father(x^k)$.)

Mi definišemo strukturu $M^k = (S^k, \{R_P^k\}, \Pi^k)$ kako sledi:

$$S^k = \{x \in S^t \mid (root, x) \in (\bigcup_P (R_P^{k'} \cup (R_P^{k'})^-))^*\}$$

$$R_P^k = R_P^{k'} \bigcap (S^k \times S^k)$$

$$\Pi^k(x) = \Pi^t(x) \text{ za svako } x \in S^k.$$

Uočimo da u M^k važe sva funkcionalna ograničenja za prvih k numerisanih stanja. Takođe, uočimo da različitim izborom stanja koje čuvamo dobijamo različite nizove modela. Međutim, sledeća Lema važi za proizvoljan izbor stanja koja čuvamo.

Lema 16. *Za svako $k \geq 0$, neka je $M^k = (S^k, \{R_P^k\}, \Pi^k)$ struktura definisana kao gore. Tada,*
a) za svako $x \in S^k$ i svako $<r> \phi' \in CL_1(\phi)$ važi: ako je $M^t, x \models <r> \phi'$ tada postoji put $(x = s_0, \dots, s_q) \in Paths_{M^t}(r)$ takav da je $M^t, s_q \models \phi'$ i $\{s_0, \dots, s_q\} \subseteq S^k$;
b) za svaku formulu $\phi' \in CL_1(\phi)$ i svako $x \in S^k$, važi:

$$M^t, x \models \phi' \text{ akko } M^k, x \models \phi';$$

c) $M^k = (S^k, \{R_P^k\}, \Pi^k)$ je model za $\gamma(\phi)$.

Dokaz Sledi iz Posledice 15. ❑

Neka su $< r_i > \phi_i \in CL_1(\phi)$, $i = 1, ..., h$ sve formule oblika $< r' > \phi'$ takve da je $r' = r^*$ ili $r' \in Post(r^*)$ i $< r^* > \phi' \in CL_1(\phi)$.

1. **SET** $l = 0, p = 0$;
2. **IF** $x^1 = root$ **SET** $n = 1$ **ELSE SET** $n = 0$;
3. **SET** $l_p = l, k_p = n, \{x_{p1}, ..., x_{pm_p}\} = \{x \in S^n | d(x) = l_p\}$;
4. **FOR** $i = 1$ **TO** m_p **DO**

BEGIN

FOR $j = 1$ **TO** h **DO**

BEGIN

IF $M^n, x_{pi} \models < r_j > \phi_j$ **THEN**

BEGIN

A) Izaberimo put, recimo $(x_{pi} = s_0, ..., s_q) \in Paths_{M^n}(r_j)$, takav da je $M^n, s_q \models \phi_j$;

B) **SET** $k = min\{v | d(x^{v+1}) > d(s_0, ..., s_q)\}$;

C) **IF** $k > n$ **THEN**

BEGIN

C1) Polazeći od M^n, mi konstruišemo niz struktura $M^n, ..., M^k$ čuvajuci stanja $\{s_0, ..., s_q\}$;[12]

C2) **SET** $n = k, l = d(s_0, ..., s_q)$;

END;

END;

END;

END;

5. **IF** $l = l_p$ **THEN**

BEGIN

A) **SET** $l = l + 1, k = min\{v | d(x^{v+1}) > l\}$;

B) **IF** $k > n$ **THEN**

BEGIN

B1) Polazeći od M^n, mi konstruišemo niz struktura $M^n, ..., M^k$;

B2) **SET** $n = k$;

END;

END;

6. **SET** $p = p + 1$;
7. **GOTO** 3.

Slika 1: Algoritam izbora stanja koja čuvamo

Lema 16 nam kaže da u slučaju kada odrežemo konačno mnogo stanja ne moramo voditi računa koja stanja čuvamo. Dakle, ako postoji n tako da $(\forall k > n)(x^k \notin S^n)$, tada mi za M^f možemo uzeti M^n (tj. $M^f = M^n$). Inače, ako takvo n ne postoji mi biramo stanja koja čuvamo kako je to opisano u Algoritmu na Slici 1.

Primetimo da za svako stanje $x \in S^{k_p}$ ako je $d(x) \leq l_p$ tada za stanje x važe sva funkcionalna ograničenja i $x \in S^k$ za svako $k > k_p$. Primetimo takođe da je *root* $\in S^k$ za svako k i da je

$$S^t = S^0 \supseteq S^1 \supseteq S^2 \supseteq S^3 \supseteq \cdots$$

Mi definišemo strukturu $M^f = (S^f, \{R_P^f\}, \Pi^f)$ kako sledi:

$$S^f = \bigcap_{p \geq 0} S^{k_p}$$

$$R_P^f = R_P^t \bigcap (S^f \times S^f)$$

$$\Pi^f(x) = \Pi^t(x) \text{ za svako } x \in S^f.$$

Prethodni algoritam nam omogućava pravilan izbor stanja koja čuvamo. Da je ovaj izbor bitan pokazuje sledeći primer.

Primer 17. *Neka su dati $C_1\mathcal{IF}$-formula $\phi = < P^* > B \wedge [P^*](\leq 1P)$ i model nalik na drvo $M^0 = (S^0, \{R_P^0\}, \Pi^0)$ za $\gamma(\phi)$, gde je:*

- $S^0 = \{x_i : i = 0, 1, 2, ...\} \cup \{y_i : i = 1, 2, ...\} \cup \{z_i : i = 2, 3, ...\}$;
- $(x_i, x_{i+1}) \in R_P^0$, $(x_i, y_{i+1}) \in R_P^0$, $(y_{i+1}, z_{i+2}) \in R_P^0$, $i = 0, 1, 2, ...$;
- $B \notin \Pi^0(x_i)$, $B \notin \Pi^0(y_{i+1})$, $B \in \Pi^0(z_{i+2})$, $i = 0, 1, 2, ...$

Pokušajmo da konstruišemo strukturu M^f, u kojoj važe sva funkcionalna ograničenja. Prvo, definišemo niz struktura $M^0, M^1, M^2, ...$, pri čemu svako $M^{k+1} = (S^{k+1}, \{R_P^{k+1}\}, \Pi^{k+1})$ dobijamo iz M^k kako sledi:

- $S^{k+1} = S^k - \{y_{k+1}, z_{k+2}\}$,
- $R_P^{k+1} = R_P^k \cap (S^{k+1} \times S^{k+1})$,
- $\Pi^{k+1}(s) = \Pi^k(s)$ *za svako* $s \in S^{k+1}$.

[12]Na osnovu Primedbe 13 mi možemo čuvati $\{s_0, ..., s_q\}$

Na kraju, definišimo $M^f = (S^f, \{R_P^f\}, \Pi^f)$ *kako sledi:*

$$S^f = \bigcap_{k \geq 0} S^k$$

$$R_P^f = R_P^0 \bigcap (S^f \times S^f)$$

$$\Pi^f(x) = \Pi^0(x) \ \ za\ svako\ \ x \in S^f.$$

Jasno je da je, $S^f = \{x_i : i = 0, 1, 2, ...\}$; $(x_i, x_{i+1}) \in R_P^f$, $i = 0, 1, 2, ...$; $B \notin \Pi^0(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ...$.

Sada vidimo da je $M^k, x_0 \models \gamma(\phi)$ *za svako* $k = 0, 1, 2, ...$, *ali* $M^f \not\models < P^* > B$ *i tako* $M^f \not\models \gamma(\phi)$. Gde je greška?

Ovde čuvamo jednog sina od x_i, *ali nam izbor nije dobar. Zato moramo postupati kao u prethodno izloženom algoritmu, tj. prvo izaberemo put koji zadovoljava* $< P^* > B$, *na primer* $(x_0, x_1, x_2, y_3, z_4)$, *a zatim čuvamo njegova stanja.*

Lema 18. *Neka je* $M^f = (S^f, \{R_P^f\}, \Pi^f)$ *struktura definisana kao gore. Tada,*
a) za svako $x \in S^f$ *i svako* $< r > \phi' \in CL_1(\phi)$ *važi: ako je* $M^t, x \models < r > \phi'$ *tada postoji put* $(x = s_0, ..., s_q) \in Paths_{M^t}(r)$ *takav da je* $M^t, s_q \models \phi'$ *i* $\{s_0, ..., s_q\} \subseteq S^f$;
b) za svaku formulu $\phi' \in CL_1(\phi)$ *i svako* $x \in S^f$, *važi:*

$$M^t, x \models \phi' \ \ akko\ \ M^f, x \models \phi';$$

c) $M^f = (S^f, \{R_P^f\}, \Pi^f)$ *je model za* $\gamma(\phi)$.

Dokaz a) Dokaz izvodimo indukcijom po r.

1. $r = a$ ili $r = \phi_1?$.
   Dokaz je jednostavan.

2. $r = r_1 \cup r_2$.
   $M^t, x \models < r > \phi'$ povlači da ili za $i = 1$ ili za $i = 2$, $M^t, x \models < r_i > \phi'$. Na osnovu indukcijske hipoteze, postoji put $(x = s_0, ..., s_q) \in Paths_{M^t}(r_i) \subseteq Paths_{M^t}(r)$ takav da je $M^t, s_q \models \phi'$ i $\{s_0, ..., s_q\} \subseteq S^f$. Prema tome dobijamo tvrđenje.

3. $r = r_1; r_2$
$M^t, x \models < r > \phi'$ znači da $M^t, x \models < r_1 > \phi_1$, gde je $\phi_1 = < r_2 > \phi'$. Na osnovu indukcijske hipoteze, postoji put $(x = s_0, ..., s_p) \in Paths_{M^t}(r_1)$ takav da je $M^t, s_p \models \phi_1$ i $\{s_0, ..., s_p\} \subseteq S^f$. Sada, na osnovu indukcijske hipoteze iz $M^t, s_p \models \phi_1$, tj. $M^t, s_p \models < r_2 > \phi'$ sledi da postoji put $(s_p, ..., s_q) \in Paths_{M^t}(r_2)$ takav da je $M^t, s_q \models \phi'$ i $\{s_p, ..., s_q\} \subseteq S^f$. Otuda, možemo izvesti zaključak da za put $(s_0, ..., s_q) \in Paths_{M^t}(r)$ važi $M^t, s_q \models \phi'$ i $\{s_0, ..., s_q\} \subseteq S^f$, pa je to traženi put.

4. $r = r_1^*$.
Neka je p minimalni broj za koji važi $l_{p-1} > d(x)$. Na osnovu Leme 16 iz $M^t, x \models < r > \phi'$ sledi da je $M^{k_p}, x \models < r > \phi'$ i da postoji put $(x = s_0, ..., s_q) \in Paths_{M^t}(r)$ takav da je $M^t, s_q \models \phi'$ i $\{s_0, ..., s_q\} \subseteq S^{k_p}$.

   Ako je $d(s_0, ..., s_q) \leq l_p$ tada je $\{s_0, ..., s_q\} \subseteq S^f$ i mi imamo tvrđenje.

   Ako je $d(s_0, ..., s_q) > l_p$ tada neka je $u = min\{i \ : \ d(s_i) = l_{p-1}\}$. Primenom Stava 7 u puta, možemo zaključiti da postoji formula

$$\chi = < (\phi_{0,1}?; \ldots ; \phi_{0,g_0}?); a_1; \ldots ; (\phi_{u-1,1}?; \ldots ; \phi_{u-1,g_{u-1}}?); a_u >< r' > \phi'$$

   sa $g_i \geq 0$, takva da važi:

   - svi testovi $\phi_{i,j}?$ se javljaju u r, pa prema tome
   $$\phi_{i,j} \in CL(< r > \phi') \subseteq CL_1(\phi);$$
   - $r' \in Post(r)$, pa prema tome formula $< r' > \phi'$ je ekvivalentna formuli ψ za neko $\psi \in CL(< r > \phi') \subseteq CL_1(\phi)$;
   - $(s_{i-1}, s_i) \in R_{a_i}$, za $i = 1, ..., u$;
   - $M^t, s_u \models < r' > \phi'$, tj. $M^{k_p}, s_u \models < r' > \phi'$;
   - $(s_u, ..., s_m) \in Paths_{M^t}(r')$;
   - sledeća formula je valjana:
   $\chi \Rightarrow < r > \phi'$.

   Na osnovu konstrukcije modela M^{k_p}, iz $M^{k_p}, s_u \models < r' > \phi'$ sledi da postoji put $(s_u = t_0, ..., t_m) \in Paths_{M^{k_p}}(r')$ takav da je $M^{k_p}, t_m \models \phi'$ i $d(t_0, ..., t_m) \leq l_p$, tj. $\{t_0, ..., t_m\} \subseteq S^f$.
   Otuda, možemo izvesti zaključak da imamo put $(s_0, ..., s_u, t_1, ..., t_m) \in Paths_{M^t}(r)$ takav da je $M^t, t_m \models \phi'$ i $\{s_0, ..., s_u, t_1, ..., t_m\} \subseteq S^f$.

b) Dokaz izvodimo indukcijom po ϕ'.

1. $\phi' = A$
   $M^t, x \models A$ akko $A \in \Pi^t(x)$ akko $A \in \Pi^f(x)$ akko $M^f, x \models A$;

2. $\phi' = \phi_1 \wedge \phi_2$
   $M^t, x \models \phi_1 \wedge \phi_2$ akko $M^t, x \models \phi_1$ i $M^t, x \models \phi_2$ akko (po indukcijskoj pretpostavci) $M^f, x \models \phi_1$ i $M^f, x \models \phi_2$ akko $M^f, x \models \phi_1 \wedge \phi_2$;

3. $\phi' = \neg\phi_1$
   $M^t, x \models \neg\phi_1$ akko $M^t, x \not\models \phi_1$ akko (po indukcijskoj pretpostavci) $M^f, x \not\models \phi_1$ akko $M^f, x \models \neg\phi_1$;

4. $\phi' = < r > \phi_1$
   $M^t, x \models < r > \phi_1$ akko (na osnovu a)) postoji put $(x = s_0, ..., s_q) \in Paths_{M^t}(r)$ takav da je $M^t, s_q \models \phi_1$ i $\{s_0, ..., s_q\} \subseteq S^f$ akko (po indukcijskoj pretpostavci) postoji put $(x = s_0, ..., s_q) \in Paths_{M^f}(r)$ takav da je $M^f, s_q \models \phi_1$ akko $M^f, x \models < r > \phi_1$.

c) Sada, M^f je model za $\gamma(\phi)$, jer je, s jedne strane, na osnovu b), $M^f, root \models \gamma_1(\phi)$, a s druge strane jasno je da je $M^f, root \models \gamma_2(\phi)$. □

2.3 Konstrukcija modela $M^{\mathcal{F}}$

Na kraju mi definišemo strukturu $M^{\mathcal{F}} = (S^{\mathcal{F}}, \{R_P^{\mathcal{F}}\}, \Pi^{\mathcal{F}})$ kako sledi:

$$S^{\mathcal{F}} = S^f, \quad R_P^{\mathcal{F}} = R_P^f,$$

$\Pi^{\mathcal{F}}(x) = \Pi^f(x) - \{A_{(\leq 1a)}, H_{(\leq 1a)} \mid A_{(\leq 1a)}, H_{(\leq 1a)} \in \Pi^f(x)\}$ za svako $x \in S^{\mathcal{F}}$.

Lema 19. *Neka je $M^{\mathcal{F}} = (S^{\mathcal{F}}, \{R_P^{\mathcal{F}}\}, \Pi^{\mathcal{F}})$ struktura definisana kao gore. Tada,*
a) za svaku formulu $\phi' \in CL(\psi_1) \cup CL(\psi_2)$ i svako $x \in S^{\mathcal{F}}$, važi:

$$M^f, x \models \gamma_1(\phi') \text{ akko } M^{\mathcal{F}}, x \models \phi';$$

b) $M^{\mathcal{F}} = (S^{\mathcal{F}}, \{R_P^{\mathcal{F}}\}, \Pi^{\mathcal{F}})$ je model za ϕ.

Dokaz a) Uočimo da ako je $M^f, x \models A_{(\leq 1a)}$ tada na osnovu konstrukcije strukture M^f, postoji najviše jedno stanje $x' \in S^f$ tako da je $(x, x') \in R_a^f$, iz čega sledi da je $M^{\mathcal{F}}, x \models (\leq 1a)$. S druge strane, ako je $M^f, x \models \neg A_{(\leq 1a)}$, tj. $M^f, x \models (< a > H_{(\leq 1a)} \wedge < a > \neg H_{(\leq 1a)})$, tada postoje najmanje dva stanja $x_1, x_2 \in S^f$ za koja je $(x, x_1) \in R^f_a$ i $(x, x_2) \in R^f_a$, iz čega sledi da je $M^{\mathcal{F}}, x \models \neg(\leq 1a)$. Dokaz je lako završiti indukcijom po ϕ'.

b) Sada, $M^{\mathcal{F}}$ je model za ϕ, jer na osnovu a), is $M^f, root \models \gamma_1(\phi)$ sledi $M^{\mathcal{F}}, root \models \phi$. □

Na osnovu Leme 11, Leme 18 i Leme 19, dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 20. *$\mathcal{DIF}$ formula ϕ oblika (1) je zadovoljiva samo ako je njen $\mathcal{DI}$-prepis $\gamma(\phi)$ zadovoljiv.*

Na osnovu De Giacomove Teoreme 12 iz [11], mi dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 21. *$\mathcal{DIF}$ formula ϕ oblika (1) je zadovoljiva ako je njen $\mathcal{DI}$-prepis $\gamma(\phi)$ zadovoljiv.*

Napomenimo da mi nećemo ovde ponavljati De Giacomov dokaz iz [11], jer potpunu konstrukciju iz ovog dokaza nećemo koristiti u glavi 4, već samo jednostavnu varijantu koja je očigledna.

Sada možemo formulisati glavni rezultat ove glave.

Teorema 22. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{DIF}$ formulu ϕ oblika (1) je* EXPTIME-*kompletan.*

Dokaz Sledi iz Teorema 20 i 21, jer problem zadovoljivosti za $\mathcal{DI}$ formulu $\gamma(\phi)$ je EXPTIME-kompletan, a na osnovu Leme 9 veličina od $\mathcal{DI}$-prepisa $\gamma(\phi)$ formule ϕ je polinomialna u odnosu na veličinu formule ϕ. □

Posledica 23. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{D}_1\mathcal{IF}$ formulu je* EXPTIME-*kompletan.*

Dokaz Dokaz je direktan. □

3 Ograničena brojna restrikcija

U ovoj glavi mi ćemo proučavati logiku $\mathcal{DIQ}$ koja se dobija iz logike $\mathcal{DI}$ dodavanjem konstrukcija ograničene brojne restrikcije $(\leq na.\phi)$ i $(\geq na.\phi)$ za $n \geq 1$. Ovu logiku je razmatrao De Giacomo u 4 glavi svoje doktorske disertacije [11]. Pokazao je da se problem zadovoljivosti $\mathcal{DIQ}$ formule može polinomijalno svesti na problem zadovoljivosti $\mathcal{DIF}$ formule.[13] Mi ćemo u neznatno izmenjenom obliku ponoviti ove dokaze jer su nam konstrukcije iz ovih dokaza bitne za naša dalja razmatranja. Osim toga konstruisaćemo fragmente logike $\mathcal{DIQ}$ koji su EXPTIME-kompletni.

Sintaksu logike $\mathcal{DIQ}$ možemo opisati kako sledi:

$$\phi ::= \top|\bot|A|\phi_1 \wedge \phi_2|\phi_1 \vee \phi_2|\phi_1 \Rightarrow \phi_2|\neg\phi| < r > \phi|[r]\phi|(\leq na.\phi)|(\geq na.\phi)$$

$$a ::= P|P^-$$

$$r ::= P|r_1 \cup r_2|r_1; r_2|r^*|r^-|\phi?$$

gde je A *iskazni simbol*, ϕ (moguće sa indeksom) formula, P *atomarni program*, a *prost program*, tj. atomarni program ili inverzija atomarnog programa i r (moguće sa indeksom) opšti program.

Ovde se novi konstruktor interpretira kako sledi: za datu strukturu $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ i stanje $s \in S$,

$M, s \models (\leq na.\phi)$ akko postoji *najviše* n stanja t takvih da je $(s,t) \in R_a$ i $M, t \models \phi$

$M, s \models (\geq na.\phi)$ akko postoji *najmanje* n stanja t takvih da je $(s,t) \in R_a$ i $M, t \models \phi$.

Ostali konstruktori se interpretiraju kao u $\mathcal{DI}$.

Logika $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$ je fragment logike $\mathcal{DIQ}$. U logici $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$ mi možemo konstruisati program r^* akko ne postoji prost program a takav da se a i a^- istovremeno javljaju u zapisu programa r.

[13] Međutim, kako je već spomenuto složenost problema zadovoljivosti za $\mathcal{DIF}$ formulu je otvoren problem pa se na ovaj način ne može oceniti složenost problema zadovoljivosti za $\mathcal{DIQ}$ formulu. Dakle, složenost problema zadovoljivosti za $\mathcal{DIQ}$ formulu, prema našim saznanjima, je otvoren problem.

3.1 $\mathcal{DIQ}$ formula i v_1-prepis

Sada želimo da dokažemo da je problem zadovoljivosti $\mathcal{DIQ}$ formule polinomijalno svodljiv na problem zadovoljivosti $\mathcal{DIF}$ formule. Ovo ćemo ostvariti u dva osnovna koraka. Naime, prvo ćemo na osnovu date $\mathcal{DIQ}$ formule ϕ konstruisati $\mathcal{DIQ}$ formulu specijalnog oblika $v_1(\phi)$, a zatim $\mathcal{DIF}$ formulu $v_2(\phi)$. Formula $v_1(\phi)$ nam služi samo kao pomoćni korak u izvođenju dokaza. Ona nam omogućava da u model uvedemo nova stanja, koja odgovaraju atomarnim programima i koja ćemo nazivati pseudo stanjima, neophodna pri konstrukciji modela za $v_2(\phi)$. Intuitivno, mi ćemo svaki atomarni program P_i zameniti sa programom $f_1^-; A_{P_i}?; f_2$, gde je A_{P_i} novi iskazni simbol koji označava stanja pridružena programu P_i, a f_1 i f_2 su funkcije koje za dato stanje u kome važi A_{P_i} daju odgovarajuću početnu i završnu komponentu programa P_i. Drugim rečima, dati atomarni program P_i, koji počinje u stanju s a završava u stanju t, mi zamenjujemo sa dodavanjem jednog među stanja z i dva deterministička atomarna programa f_1 i f_2, koja počinju u z a završavaju se u s i t respektivno. Detaljnije motivacije mogu se naći u [11]. Formalno mi radimo kako sledi.

Definicija 24. Neka je data $\mathcal{DIQ}$ formula ϕ. Mi ćemo definisati v_1-*prepis* $v_1(\phi)$ od ϕ kao konjunkciju tri formule, $v_1(\phi) = v_0(\phi) \wedge \Theta_0 \wedge \Theta_1$, gde je:

- $v_0(\phi)$ dobijeno iz formule ϕ zamenom svakog atomarnog programa P_i, $i = 1, \ldots, m$, sa složenim programom $f_1^-; A_{P_i}?; f_2$, gde su f_1, f_2 novi atomarni programi (jedino oni prisutni posle transformacije), a A_{P_i} je novo ime iskaznog simbola; tj. formula definisana induktivno kako sledi:

  - $v_0(A) = A$
  - $v_0(\phi_1 \wedge \phi_2) = v_0(\phi_1) \wedge v_0(\phi_2)$
  - $v_0(\neg\phi_1) = \neg v_0(\phi_1)$
  - $v_0(< r > \phi_1) =< v_0(r) > v_0(\phi_1)$
  - $v_0(P_i) = f_1^-; A_{P_i}?; f_2$
  - $v_0(r^-) = (v_0(r))^-$
  - $v_0(r_1 \cup r_2) = v_0(r_1) \cup v_0(r_2)$
  - $v_0(r_1; r_2) = v_0(r_1); v_0(r_2)$
  - $v_0(r^*) = (v_0(r))^*$

- $v_0(\phi_1?) = v_0(\phi_1)?$
- $v_0((\leq nP_i.\phi_1)) = (\leq n\ f_1^-.(< A_{P_i}?; f_2 > v_0(\phi_1)))$
- $v_0((\geq nP_i.\phi_1)) = (\geq n\ f_1^-.(< A_{P_i}?; f_2 > v_0(\phi_1)))$
- $v_0((\leq n(P_i)^-.\phi_1)) = (\leq n\ f_2^-.(< A_{P_i}?; f_1 > v_0(\phi_1)))$
- $v_0((\geq n(P_i)^-.\phi_1)) = (\geq n\ f_2^-.(< A_{P_i}?; f_1 > v_0(\phi_1)))$,

- $\Theta_0 = [(f_1 \cup f_1^- \cup f_2 \cup f_2^-)^*] \bigwedge_{1 \leq l \neq k \leq m} \neg(A_{P_l} \wedge A_{P_k})$,
- $\Theta_1 = [(f_1 \cup f_1^- \cup f_2 \cup f_2^-)^*]((\leq 1\ f_1) \wedge (\leq 1\ f_2))$.

Lema 25. *Neka je data $\mathcal{DIQ}$ formula ϕ i njen v_1-prepis $v_1(\phi)$. Tada je $v_1(\phi)$ $\mathcal{DIQ}$ formula, i njena veličina je polinomijalna u odnosu na veličinu od ϕ.*

Dokaz Dokaz je direktan. □

Lema 26. *Ako formula $v_1(\phi)$ ima model $M = (S, \{R_{f_1}, R_{f_2}\}, \Pi)$ tada ona ima model $M' = (S', \{R'_{f_1}, R'_{f_2}\}, \Pi')$ takav da za svako $(x, y) \in R'_{f_1^-; A_{P_i}?; f_2}$ postoji tačno jedno z za koje je $(z, x) \in R'_{f_1}$ i $(z, y) \in R'_{f_2}$. Odnosno, za svaka četiri stanja $z_1, z_2, x, y \in S'$ takva da je $z_1 \neq z_2$ i $x \neq y$, važi sledeći uslov:*

$$(A_{P_i} \in \Pi'(z_1) \wedge A_{P_i} \in \Pi'(z_2)) \Rightarrow$$
$$\neg((z_1, x) \in R'_{f_1} \wedge (z_2, x) \in R'_{f_1} \wedge (z_1, y) \in R'_{f_2} \wedge (z_2, y) \in R'_{f_2}).$$

Dokaz sledi na osnovu dokaza De Giacomove Leme 18 iz [11]. Međutim, mi ga ovde nećemo ponavljati, jer ga ne koristimo u konstrukcijama koje izvodimo pri dokazu Leme 34, jer je tamo u pitanju model nalik na drvo pa ovo svojstvo direktno važi.

Lema 27. *Neka je data $\mathcal{DIQ}$ formula ϕ i njen v_1-prepis $v_1(\phi)$. Tada, je formula ϕ zadovoljiva ako i samo ako je formula $v_1(\phi)$ zadovoljiva.*

Dokaz $\Rightarrow$ Neka je $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ model za ϕ. Definišimo model $M' = (S', \{R'_{f_1}, R'_{f_2}\}, \Pi')$ za $v_1(\phi)$ na sledeći način:

$$S' = S \cup \{z_{xyi} \mid (x, y) \in R_{P_i} \text{ za neko } R_{P_i}\},$$

$$R'_{f_1} = \{(z_{xyi}, x) \mid (x, y) \in R_{P_i}\}, R'_{f_2} = \{(z_{xyi}, y) \mid (x, y) \in R_{P_i}\},$$

$$\Pi'(t) = \begin{cases} \Pi(t), & \text{za } t \in S, \\ \{A_{P_i} \mid (x,y) \in R_{P_i}\}, & \text{za } t = z_{xyi}. \end{cases}$$

Očigledno, Θ_0 je zadovoljivo svuda u M'.
Iz prethodne konstrukcije dobijamo: $(x,y) \in R_{P_i}$, akko $(x,y) \in R'_{f_1^-;A_{P_i}?;f_2}$.

Pošto su R'_{f_1}, R'_{f_2} parcialne funkcije, dobijamo da je Θ_1 zadovoljivo svuda u M', a za svako $\phi' \in CL(\phi)$ i svako $t \in S$, lako je proveriti, indukcijom po ϕ', da važi: $M', t \models v_0(\phi')$ ako i samo ako $M, t \models \phi'$.

$\Leftarrow$ Neka je $M' = (S', \{R'_{f_1}, R'_{f_2}\}, \Pi')$ model za $v_1(\phi)$. Na osnovu Leme 26 možemo pretpostaviti da za svako $(x,y) \in R'_{f_1^-;A_{P_i}?;f_2}$ postoji tačno jedno z_{xyi} takvo da je $(z_{xyi}, x) \in R'_{f_1}$ i $(z_{xyi}, y) \in R'_{f_2}$. Ovo garantuje da ograničena brojna restrikcija koja važi u stanjima x i y daje odgovarajući broj $(f_1^-; A_{P_i}?; f_2)$-naslednika i $(f_2^-; A_{P_i}?; f_1)$-naslednika, respektivno.

Definišimo model $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ za ϕ kako sledi. Prvo definišimo $\overline{R}_{P_i} = R'_{f_1^-;A_{P_i}?;f_2}$. Zatim, neka je $s \in S'$ stanje za koje je $M', s \models v_1(\phi)$, mi definišemo

$$S = \{t \in S' \mid (s,t) \in (\bigcup_i (\overline{R}_{P_i} \cup (\overline{R}_{P_i})^-))^*\},$$

$$R_{P_i} = \overline{R}_{P_i} \bigcap (S \times S),$$

$$\Pi(t) = \Pi'(t) - \{A_{P_i} \text{ za svako } P_i\}, \quad \text{za svako } t \in S.$$

Na kraju, za svako $\phi' \in CL(\phi)$ i svako $t \in S$, lako je proveriti, indukcijom po ϕ', da važi: $M', t \models v_0(\phi')$ ako i samo ako $M, t \models \phi'$. ☐

3.2 $\mathcal{DIQ}$ formula i $\mathcal{DIF}$-prepis

Kako je spomenuto ranije, u drugom osnovnom koraku, koji započinjemo sada, mi ćemo konstruisati $\mathcal{DIF}$ formulu $v_2(\phi)$. Intuitivno, ovu formulu dobijamo zamenom svakog atomarnog programa P_i u formuli ϕ, tj. programa $(f_1^-; A_{P_i}?; f_2)$ u formuli $v_1(\phi)$, sa programom

$$F_{i1}; A_{P_i}?; (F'_{i1}; A_{P_i}?)^*; (F_{i2}; A_{P_i}?; (F'_{i2}; A_{P_i}?)^*)^-,$$

gde su F_{ij}, F'_{ij} novi deterministički atomarni programi. Na ovaj način program $f_j^-; A_{P_i}?$ $(j = 1,2)$, koji nije deterministički u opštem slučaju zamenjujemo sa kompozicijom $F_{ij}; A_{P_i}?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^*$ determinističkih programa, a ograničenu brojnu restrikciju mi možemo kodirati pomoću odgovarajućih ograničenja na takvoj kompoziciji.

Definicija 28. Neka je data $\mathcal{DIQ}$ formula ϕ. Mi ćemo definisati $\mathcal{DIF}$ – *prepis* $v_2(\phi)$ od ϕ kao konjunkciju tri formule, $v_2(\phi) = v_0'(\phi) \wedge \Theta_0' \wedge \Theta_2$, gde je:

- $v_0'(\phi)$ dobijeno iz formule ϕ zamenom svakog atomarnog programa P_i, $i = 1, ..., m$, sa složenim programom

$$F_{i1}; A_{P_i}?; (F_{i1}'; A_{P_i}?)^*; (F_{i2}; A_{P_i}?; (F_{i2}'; A_{P_i}?)^*)^-,$$

gde su F_{ij}, F_{ij}' novi atomarni programi, a A_{P_i} je novi iskazni simbol; tj. formula definisana induktivno kako sledi:

- $v_0'(A) = A$
- $v_0'(\phi_1 \wedge \phi_2) = v_0'(\phi_1) \wedge v_0'(\phi_2)$
- $v_0'(\neg\phi_1) = \neg v_0'(\phi_1)$
- $v_0'(< r > \phi_1) =< v_0'(r) > v_0'(\phi_1)$
- $v_0'(P_i) = F_{i1}; A_{P_i}?; (F_{i1}'; A_{P_i}?)^*; (F_{i2}; A_{P_i}?; (F_{i2}'; A_{P_i}?)^*)^-$
- $v_0'(r^-) = (v_0'(r))^-$
- $v_0'(r_1 \cup r_2) = v_0'(r_1) \cup v_0'(r_2)$
- $v_0'(r_1; r_2) = v_0'(r_1); v_0'(r_2)$
- $v_0'(r^*) = (v_0'(r))^*$
- $v_0'(\phi_1?) = v_0'(\phi_1)?$
- $v_0'((\leq nP_i.\phi_1)) =$
  $[F_{i1}; A_{P_i}?; (F_{i1}'; A_{P_i}?)^*; (\phi'?; (F_{i1}'; A_{P_i}?)^+)^n]\neg\phi'$
- $v_0'((\geq nP_i.\phi_1)) =$
  $< F_{i1}; A_{P_i}?; (F_{i1}'; A_{P_i}?)^*; (\phi'?; (F_{i1}'; A_{P_i}?)^+)^{n-1} > \phi'$
- $v_0'((\leq n(P_i)^-.\phi_1)) =$
  $[F_{i2}; A_{P_i}?; (F_{i2}'; A_{P_i}?)^*; (\phi''?; (F_{i2}'; A_{P_i}?)^+)^n]\neg\phi''$
- $v_0'((\geq n(P_i)^-.\phi_1)) =$
  $< F_{i2}; A_{P_i}?; (F_{i2}'; A_{P_i}?)^*; (\phi''?; (F_{i2}'; A_{P_i}?)^+)^{n-1} > \phi''$

ovde je
$\phi' =< (F_{i2}; A_{P_i}?; (F_{i2}'; A_{P_i}?)^*)^- > v_0'(\phi_1)$
$\phi'' =< (F_{i1}; A_{P_i}?; (F_{i1}'; A_{P_i}?)^*)^- > v_0'(\phi_1)$,

- $\Theta_0' = [(\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^2 (F_{ij} \cup F_{ij}^- \cup F'_{ij} \cup F'^-_{ij}))^*] \bigwedge_{l \neq k} \neg(A_{P_l} \wedge A_{P_k})$,
- $\Theta_2 = [(\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^2 (F_{ij} \cup F_{ij}^- \cup F'_{ij} \cup F'^-_{ij}))^*] \bigwedge_{i=1}^m (\theta_{i1} \wedge \theta_{i2})$ pri čemu su sve konjunkcije θ_{ij} oblika: $(\leq 1F_{ij}) \wedge (\leq 1F'_{ij}) \wedge (\leq 1F_{ij}^-) \wedge (\leq 1F'^-_{ij}) \wedge \neg(< F_{ij}^- > \top \wedge < (F'_{ij})^- > \top)$.

Lema 29. *Neka je data $\mathcal{DIQ}$ formula ϕ i njen $\mathcal{DIF}$-prepis $v_2(\phi)$. Tada je $v_2(\phi)$ $\mathcal{DIF}$ formula, i njena veličina je polinomijalna u odnosu na veličinu od ϕ. Specijalno, ako formula ϕ pripada $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$, tada $v_2(\phi)$ je $\mathcal{DIF}$ formula oblika (1).*

Dokaz Dokaz je direktan. □

Lema 30. *Neka je data $\mathcal{DIQ}$ formula ϕ i njen v_1-prepis $v_1(\phi)$. Tada, formula $v_1(\phi)$ je zadovoljiva ako i samo ako je formula $v_2(\phi)$ zadovoljiva.*

Dokaz $\Rightarrow$ Neka je $M = (S, \{R_{f_1}, R_{f_2}\}, \Pi)$ model za $v_1(\phi)$. Tada mi gradimo model $M' = (S', \{R'_F\}, \Pi')$ za $v_2(\phi)$ kako sledi. Prvo, mi definišemo $\{\overline{R}'_F\}$. Za svako stanje $x \in S$ za koje je $M, x \models < f_1^-; A_{P_i}?; f_2 > \top$, neka su $z_1, z_2, \ldots$ sva stanja takva da je $(x, z_k) \in R_{f_1^-}$ i $M, z_k \models < A_{P_i}?; f_2 > \top$. Stavimo $(x, z_1) \in \overline{R}'_{F_{i1}}$, a za $k = 1, 2, \ldots$ stavimo $(z_k, z_{k+1}) \in \overline{R}'_{F'_{i1}}$. Slično, za svako $x \in S$ za koje je $M, x \models < f_2^-; A_{P_i}?; f_1 > \top$, neka su $z_1, z_2, \ldots$ sva stanja takva da je $(x, z_k) \in R_{f_2^-}$ i $M, z_k \models < A_{P_i}?; f_1 > \top$. Stavimo $(x, z_1) \in \overline{R}'_{F_{i2}}$, a za $k = 1, 2, \ldots$ stavimo $(z_k, z_{k+1}) \in \overline{R}'_{F'_{i2}}$. Zatim, neka je $s \in S$ stanje za koje je $M, s \models v_1(\phi)$, mi definišemo

$$S' = \{t \in S \mid (s, t) \in (\bigcup_{ij} (\overline{R}'_{F_{ij}} \cup \overline{R}'^-_{F_{ij}} \cup \overline{R}'_{F'_{ij}} \cup \overline{R}'^-_{F'_{ij}}))^*\},$$

$$R_F = \overline{R}'_F \bigcap (S' \times S'),$$

$$\Pi'(t) = \Pi(t) \text{ za svako } t \in S'.$$

Na osnovu Θ_0, dobijamo da je Θ_0' zadovoljivo svuda u M'. Napomenimo, da pošto su R_{f_j} parcialne funkcije, to su i $R'_{(F_{ij}; A_{P_i}?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^*)^-}$ parcialne funkcije.

Na osnovu ove konstrukcije imamo da je:

$$(x, y) \in R_{f_1^-; A_{P_i}?; f_2} \text{ akko } (x, y) \in R'_{F_{i1}; A_{P_i}?; (F'_{i1}; A_{P_i}?)^*; (F_{i2}; A_{P_i}?; (F'_{i2}; A_{P_i}?)^*)^-}.$$

Osim toga, Θ_2 je zadovoljivo svuda u M'.

Uzimajući u obzir da je $R'_{(F_{ij};A_{P_i}?;(F'_{ij};A_{P_i}?)^*)^-}$ parcialna funkcija i da

$$[F_{ij}; A_{P_i}?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^*; (\phi?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^+)^n]\neg\phi$$

$$< F_{ij}; A_{P_i}?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^*; (\phi?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^+)^{n-1} > \phi$$

opisuje da postoji najviše, najmanje respektivno, n stanja koja zadovoljavaju ϕ, duž "lanca" $F_{ij}; A_{P_i}?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^*$, lako je proveriti, (indukcijom po složenosti formule) da za svako $\phi' \in CL(\phi)$ i svako $t \in S'$, važi: $M, t \models v_0(\phi')$ ako i samo ako $M', t \models v'_0(\phi')$.

$\Leftarrow$ Neka je $M' = (S', \{R'_F\}, \Pi')$ model za $v_2(\phi)$. Mi možemo izgraditi model $M = (S, \{R_{f_1}, R_{f_2}\}, \Pi)$ za $v_1(\phi)$ kako sledi. Prvo, definišimo $\overline{R}_{f_j} = \bigcup_{i=1}^{m} R'_{(F_{ij};A_{P_i}?;(F'_{ij};A_{P_i}?)^*)^-}$ $(j = 1, 2)$. Zatim, neka je $s \in S'$ stanje za koje je $M', s \models v_2(\phi)$, mi definišemo

$$S = \{t \in S' \mid (s,t) \in (\overline{R}_{f_1} \cup \overline{R}_{f_1}^- \cup \overline{R}_{f_2} \cup \overline{R}_{f_2}^-)^*\},$$

$$R_{f_j} = \overline{R}_{f_j} \bigcap (S \times S),$$

$$\Pi(t) = \Pi'(t) \text{ za svako } t \in S.$$

Napomenimo da na osnovu $\Theta'_0 \wedge \Theta_2$, imamo da je $\bigcup_{i=1}^{m} R'_{(F_{ij};A_{P_i}?;(F'_{ij};A_{P_i}?)^*)^-}$ parcialna funkcija, pa prema tome R_{f_j} je takođe parcialna funkcija, tako Θ_1 je zadovoljivo svuda u M. Na osnovu Θ'_0, Θ_0 je zadovoljivo svuda u M.

Uzimajući ponovo u obzir značenje od

$$[F_{ij}; A_{P_i}?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^*; (\phi?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^+)^n]\neg\phi$$

$$< F_{ij}; A_{P_i}?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^*; (\phi?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^+)^{n-1} > \phi$$

lako je proveriti, (indukcijom po složenosti formule) da za svaku formulu $\phi' \in CL(\phi)$ i svako stanje $t \in S$, važi: $M, t \models v_0(\phi')$ ako i samo ako $M', t \models v'_0(\phi')$.

□

Sada smo spremni da formulišemo glavni rezultat prethodnih razmatranja.

Teorema 31. *$\mathcal{DIQ}$ formula ϕ je zadovoljiva ako i samo ako je $\mathcal{DIF}$ formula $v_2(\phi)$ zadovoljiva.*

Dokaz Sledi iz Leme 27 i Leme 30. □

3.3 Fragmenti logike $\mathcal{DIQ}$

Na kraju ove glave razmatraćemo fragmente logike $\mathcal{DIQ}$ za koje ćemo pokazati da su EXPTIME-kompletni.

Posmatrajmo $\mathcal{DIQ}$ formulu ϕ oblika

$$\phi = \psi_1 \wedge [\mathbf{u}]\psi_2, \tag{2}$$

gde su ψ_1, ψ_2 $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$ formule, $P_1, ..., P_m$ su svi atomarni programi u ψ_1, ψ_2, a u je skraćenica za $(P_1 \cup \cdots \cup P_m \cup P_1^- \cup \cdots \cup P_m^-)^*$.

Definicija 32. Neka $\mathcal{DIQ}$ formula ϕ ima oblik (2). Definišimo $\mathcal{DI}$ *– prepis* $\nu(\phi)$ od ϕ kao konjunkciju dve formule, $\nu(\phi) = \nu_1(\phi) \wedge \nu_2(\phi)$, gde je:

- $\nu_1(\phi) = \nu_1(\psi_1) \wedge [\mathbf{u_1}]\nu_1(\psi_2)$, dok za $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$ formulu ψ, $\nu_1(\psi) = v_0'(\psi)$,
- $\nu_2(\phi) = [\mathbf{u_1}]A_{P_0} \wedge$
  $[\mathbf{u_2}]\Big(\bigwedge_i \nu_2^i \wedge \bigwedge_{l \neq k} \neg(A_{P_l} \wedge A_{P_k}) \wedge \bigwedge_{i,j} \neg(< F_{ij}^- > \top \wedge < (F'_{ij})^- > \top)\Big)$,
  sa po jednom konjunkcijom ν_2^i oblika $(< a > \phi' \Rightarrow [a]\phi')$ za svaki prost program $a \in \{F_{ij}, F_{ij}^-, F'_{ij}, F'^-_{ij} \ : \ j = 1, 2; i = 1, 2, ..., m\}$ i svako $\phi' \in CL(\nu_1(\psi_1)) \cup CL(\nu_1(\psi_2))$,

ovde je A_{P_0} novi iskazni simbol, koji nam služi da razlikujemo stanja od pseudo stanja, a koji iz tehničkih razloga označavamo sa A_{P_0}, dok su $\mathbf{u_1}$ i $\mathbf{u_2}$ redom skraćenice za

$$(\overline{P_1} \cup \cdots \cup \overline{P_m} \cup \overline{P_1}^- \cup \cdots \cup \overline{P_m}^-)^* \ \text{ i } \ (\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{2}(F_{ij} \cup F_{ij}^- \cup F'_{ij} \cup F'^-_{ij}))^*,$$

a $\overline{P_i} = F_{i1}; A_{P_i}?; (F'_{i1}; A_{P_i}?)^*; (F_{i2}; A_{P_i}?; (F'_{i2}; A_{P_i}?)^*)^-$.

Lema 33. *Neka je data $\mathcal{DIQ}$ formula ϕ oblika (2) i njen $\mathcal{DI}$-prepis $\nu(\phi)$. Tada je $\nu(\phi)$ $\mathcal{DI}$ formula i njena veličina je polinomijalna u odnosu na veličinu od ϕ.*

Dokaz Dokaz je direktan. □

Teorema 34. *$\mathcal{DIQ}$ formula ϕ oblika (2) je zadovoljiva ako i samo ako je $\mathcal{DI}$ formula $\nu(\phi)$ zadovoljiva.*

Dokaz Uočimo prvo da je $\gamma_1(v_0'(\psi_i)) = v_0'(\psi_i)$ za $i = 1, 2$.

$\Leftarrow$ Neka je formula $\nu(\phi)$ zadovoljiva. Tada, model za ϕ dobijamo kako sledi. Model $M = (S, \{R_F\}, \Pi)$ za $\nu(\phi)$ transformišemo u novi model $M^f = (S^f, \{R_F^f\}, \Pi^f)$ za $\nu(\phi)$, koji zadovoljava sva funkcionalna ograničenja, kako je to urađeno u glavi 2, a onda ovaj model u model $M' = (S', \{R'_{P_i}\}, \Pi')$ za ϕ na sledeći način. Prvo, definišimo $\overline{R}_{P_i} = R^f_{F_{i1};A_{P_i}?;(F'_{i1};A_{P_i}?)^*;(F_{i2};A_{P_i}?;(F'_{i2};A_{P_i}?)^*)^-}$. Zatim, neka je $s \in S^f$ stanje za koje je $M^f, s \models \nu(\phi)$, mi definišemo

$$S' = \{t \in S^f \mid (s,t) \in (\bigcup_i (\overline{R}_{P_i} \cup \overline{R}_{P_i}^-))^*\},$$

$$R'_{P_i} = \overline{R}_{P_i} \bigcap (S' \times S'),$$

$$\Pi'(t) = \Pi^f(t) - \{A_{P_0}\} \text{ za svako } t \in S'.$$

Na osnovu ove konstrukcije imamo da za $x, y \in S'$ važi:

$$(x,y) \in R'_{P_i} \text{ akko } (x,y) \in R^f_{F_{i1};A_{P_i}?;(F'_{i1};A_{P_i}?)^*;(F_{i2};A_{P_i}?;(F'_{i2};A_{P_i}?)^*)^-}.$$

Sada uzimajući u obzir značenje od

$$[F_{ij}; A_{P_i}?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^*; (\phi?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^+)^n]\neg\phi$$

$$< F_{ij}; A_{P_i}?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^*; (\phi?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^+)^{n-1} > \phi$$

za svaku formulu $\phi' \in CL(\psi_1) \cup CL(\psi_2)$ i svako stanje $t \in S'$, lako je proveriti, (indukcijom po složenosti formule) da važi: $M, t \models \nu_1(\phi')$ ako i samo ako $M', t \models \phi'$. Pa prema tome $M', s \models \phi$.

$\Rightarrow$ Neka je $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ model za ϕ. Neka je po definiciji: $Z = \{z_{xyi} \mid (x,y) \in R'_{P_i} \text{ za neko } R'_{P_i}\}$, $Z \cap S' = \emptyset$. Takođe, za svako stanje $x \in S'$ i svaki atomarni program P_i u ϕ, po definiciji stavimo $succ^+(x, P_i) = \{z \in Z \mid z = z_{xyi} \text{ za neko } y \in S'\}$, i $succ^-(x, P_i) = \{z \in Z \mid z = z_{yxi} \text{ za neko } y \in S'\}$. Sada mi možemo izgraditi model $M^1 = (S^1, \{R^1_F\}, \Pi^1)$ za $\nu(\phi)$ kako sledi. Prvo, definišimo $S^1 = S' \cup Z$. Zatim, mi definišemo $\{R^1_F\}$. Za svako stanje $x \in S'$ i atomarni program P_i u ϕ, neka je $z_1, z_2, \ldots$ poredak stanja u $succ^+(x, P_i)$ i $y_1, y_2, \ldots$ poredak stanja u $succ^-(x, P_i)$. Stavimo $(x, z_1) \in R^1_{F_{i1}}$, $(x, y_1) \in R^1_{F_{i2}}$, i za svako $k = 1, 2, \ldots$ stavimo $(z_k, z_{k+1}) \in R^1_{F'_{i1}}$, $(y_k, y_{k+1}) \in R^1_{F'_{i2}}$. Na kraju stavimo

$$\Pi^1(t) = \begin{cases} \Pi'(t) \cup \{A_{P_0}\}, & \text{za } t \in S', \\ \{A_{P_i}\}, & \text{za } t = z_{xyi}. \end{cases}$$

Na osnovu ove konstrukcije imamo da je $M^1, s \models \nu_2(\phi)$ i

$$(x,y) \in R'_{P_i} \text{ akko } (x,y) \in R^f_{F_{i1};A_{P_i}?;(F'_{i1};A_{P_i}?)^*;(F_{i2};A_{P_i}?;(F'_{i2};A_{P_i}?)^*)^-}.$$

Sada uzimajući u obzir značenje od

$$[F_{ij}; A_{P_i}?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^*; (\phi?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^+)^n]\neg\phi$$

$$< F_{ij}; A_{P_i}?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^*; (\phi?; (F'_{ij}; A_{P_i}?)^+)^{n-1} > \phi$$

za svaku formulu $\phi' \in CL(\psi_1) \cup CL(\psi_2)$ i svako stanje $t \in S'$, lako je proveriti, (indukcijom po složenosti formule) da važi: $M, t \models \nu_1(\phi')$ ako i samo ako $M', t \models \phi'$. Pa prema tome $M^1, s \models \nu_1(\phi)$.

Dakle, M^1 je model za $\nu(\phi)$. □

Teorema 35. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{DIQ}$ formulu ϕ oblika (2) je* EXPTIME-*kompletan.*

Dokaz Sledi iz Teoreme 34, jer problem zadovoljivosti za $\mathcal{DI}$ formulu $\nu(\phi)$ je EXPTIME-kompletan, a na osnovu Leme 33 veličina od $\mathcal{DI}$-prepisa $\nu(\phi)$ formule ϕ je polinomialna u odnosu na veličinu formule ϕ. □

Posledica 36. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$ formulu je* EXPTIME-*kompletan.*

Dokaz Dokaz je direktan. □

4 Jednostavni kvazisvet

Cilj ove glave je da izvrši pripremu za dokazivanje Leme 77, koja je ključna za izvođenje mnogih gornjih ocena. Zato će pojmovi koje uvodimo u ovoj glavi za logiku $\mathcal{DIQ}$ biti slični pojmovima koje ćemo uvesti u odeljku 5.2 za logiku $\mathcal{CIQ}_{\mathcal{M}}$. Mada je svrha uvođenja pojedinih pojmova mnogo jasnija ako radimo sa logikom $\mathcal{CIQ}_{\mathcal{M}}$, mi smo se ovde opredelili da prvo radimo sa logikom $\mathcal{DIQ}$ koja je "jednostavnija", pa su i razmatranja jednostavnija. Da ne bi došlo do zabune o kojoj logici je reč mi, na primer, koristimo pojam s-kvazisvet (jednostavni kvazisvet) u logici $\mathcal{DIQ}$, dok u logici $\mathcal{CIQ}_{\mathcal{M}}$ koristimo pojam kvazisvet i slično. Sada počnimo sa definisanjem osnovnih pojmova koje koristimo u ovoj glavi.

Neka je data trojka $\Upsilon = (\Gamma, OB, FP)$, gde je Γ konačan zatvoren (u smislu Fišer Ladnerovog zatvorenja) skup $\mathcal{DIQ}$ formula, OB konačan skup individua i FP konačan skup izraza sledećeg oblika $(\alpha P \beta)$, pri čemu je P atomarni program a α, β pripadaju skupu OB.

Definicija 37 (f-tip). *f-tip* t za Υ je podskup skupa Γ takav da važi

- $\phi_1 \wedge \phi_2 \in t$ akko $\phi_1,\ \phi_2 \in t$, za svako $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \Gamma$;
- $\neg\phi_1 \in t$ akko $\phi_1 \notin t$, za svako $\phi_1 \in \Gamma$;

Pod *imenovanim f-tipom* za Υ mi podrazumevamo par $\langle \alpha, t\rangle$ u kome je $\alpha \in OB$, a t je f-tip za Υ.

Definicija 38 (kandidat za s-kvazisvet). Neka je T^f skup f-tipova za Υ, T^o skup koji sadrži po jedan imenovani f-tip $\langle \alpha, t\rangle$ za svako $\alpha \in OB$ i neka je T^p podskup skupa FP. Trojka $\langle T^f, T^o, T^p\rangle$ se naziva *kandidat za s-kvazisvet* za Υ ako važi sledeće: $t \in T^f$ za svako $\langle \alpha, t\rangle \in T^o$.

Očigledno da za svakog kandidata za s-kvazisvet $\langle T^f, T^o, T^p\rangle$ za Υ važi

$$|T^f| \leq 2^{|\Gamma|},\ |T^o| = |OB|,\ |T^p| \leq |FP|.$$

Takođe, nije teško uočiti da za datu trojku $\langle T^f, T^o, T^p\rangle$ postoji EXPTIME algoritam (u odnosu na veličinu od Υ) koji proverava da li je ona kandidat za s-kvazisvet za Υ ili ne.

Definicija 39. Neka je $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ model i $s \in S$. Po definiciji stavimo

$$t^M(s) = \{\phi' \in \Gamma\ :\ M, s \models \phi'\}.$$

Mi ćemo skup $\{t^M(s)\ :\ s \in S\}$ označavati sa $T(M, \Gamma)$.

Jasno je da je $t^M(s)$ f-tip za Υ.

Definicija 40 (s-kvazisvet). Kazaćemo da model $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ *realizuje* kandidata za s-kvazisvet $\varpi = \langle T^f, T^o, T^p \rangle$ za Υ ako postoji funkcija $h : OB \to S$ tako da važe sledeći uslovi:

- $T^f = T(M, \Gamma)$,
- $\langle \alpha, t^M(h(\alpha)) \rangle \in T^o$ sa svako $\alpha \in OB$,
- $(h(\alpha), h(\beta)) \in R_P$ akko $(\alpha P \beta) \in T^p$, za svako $(\alpha P \beta) \in FP$.

Kandidat za s-kvazisvet ϖ za Υ se naziva *s-kvazisvet* za Υ, ako postoji model koji ga realizuje.

4.1 Tehničke pripreme

Napomenimo, da naš osnovni cilj u ovoj glavi je da pokažemo da postoji NEXPTIME procedura koja može proveriti da li je data trojka s-kvazisvet. Kako nam tačna složenost logike $\mathcal{DIQ}$ nije poznata, mi ćemo se ograničiti na odgovarajuće fragmente ove logike. Takođe, da bi smo uprostili proveru da li je data trojka s-kvazisvet, mi uvodimo formulu $\varphi(\varpi, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$. Naime ona treba da nam obezbedi proveru drugog i trećeg uslova Definicije 40 (vidi Teoremu 49).

Definicija 41. Neka je $\varpi = \langle T^f, T^o, T^p \rangle$ kandidat za s-kvazisvet za Υ i $t \in T^f$; tada sa ϕ_t mi označavamo sledeću konjunkciju formula $\phi_t = \bigwedge_{\phi' \in t} \phi'$. Ako je $\langle \alpha, t \rangle \in T^o$ tada ćemo ϕ_t označavati sa ϕ_α.

Očigledno, $\Gamma \subseteq CL(\phi_t)$ i ako je t' f-tip za $(CL(\phi_t), \emptyset, \emptyset)$ tada je $t' \cap \Gamma$ f-tip za Υ.

Za svako $\alpha_i \in OB$ uvedimo novi iskazni simbol A_i. Sa $\overline{r}$ ćemo označavati program dobijen iz r nadovezivanjem (ulančavanjem) testa $(\wedge_i \neg A_i)?$ iza svakog prostog programa koji se javlja u r, tj. program definisan induktivno kako sledi:

$$\begin{array}{lll} \overline{a} = a; (\wedge_i \neg A_i)?, & \overline{\phi?} = \phi?, & \overline{r_1; r_2} = \overline{r_1}; \overline{r_2}, \\ \overline{r_1 \cup r_2} = \overline{r_1} \cup \overline{r_2}, & \overline{r^*} = (\overline{r})^*. & \end{array}$$

Napomenimo da je veličina od oba $Post(r)$ i $Pre(r)$ polinomijalna u odnosu na veličinu od r.

Definicija 42. Neka je $\mathfrak{w} = \langle T^f, T^o, T^p \rangle$ kandidat za s-kvazisvet za $\Upsilon = (\Gamma, OB, FP)$ i A_i novi iskazni simbol za svako $\alpha_i \in OB$. *Prošireni-tip* t'_{α_i} za $\langle \alpha_i, t \rangle \in T^o$ je podskup skupa Γ_1 takav da važi:

- t'_{α_i} je f-tip za $(\Gamma_1, \emptyset, \emptyset)$,
- $t \subseteq t'_{\alpha_i}$,
- $A_i \in t'_{\alpha_i}$,
- za svako $j \neq i$: $\neg A_j \in t'_{\alpha_i}$,
- za svako $(\alpha_i P \alpha_j) \in T^p$: $< P > A_j \in t'_{\alpha_i}$ i $(\leq 1P.A_j) \in t'_{\alpha_i}$,
- za svako $(\alpha_j P \alpha_i) \in T^p$: $< P^- > A_j \in t'_{\alpha_i}$ i $(\leq 1P^-.A_j) \in t'_{\alpha_i}$,
- za svako $(\alpha_i P \alpha_j) \in FP - T^p$: $\neg < P > A_j \in t'_{\alpha_i}$,
- za svako $(\alpha_j P \alpha_i) \in FP - T^p$: $\neg < P^- > A_j \in t'_{\alpha_i}$;

gde je Γ_1 minimalni zatvorei skup takav da je:

- $\Gamma \subseteq \Gamma_1$,
- svaka formula ϕ' spomenuta gore pripada Γ_1,
- za svako $< r > \phi' \in \Gamma$: $< \overline{r} > \phi' \in \Gamma_1$,
- za svako A_i, za svaki program $r_1 \in Pre(r)$ i za svako a (gde je $a = P$ ili $a = P^-$) pri čemu se r i P javljaju u Γ: $< \overline{r_1}; a > A_i \in \Gamma_1$.

Definicija 43. Neka je $\mathfrak{w} = \langle T^f, T^o, T^p \rangle$ kandidat za s-kvazisvet za Υ, t'_{α_i} prošireni-tip za $\langle \alpha_i, t \rangle \in T^o$, $i = 1, \ldots, n = |OB|$, P_0 novi atomarni program i **u** skraćenica za $(P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_m \cup P_0^- \cup P_1^- \cup \cdots \cup P_m^-)^*$, pri čemu su $P_1, \ldots, P_m$ svi atomarni programi koji se javljaju u Υ. Mi ćemo definisati $\mathcal{DIQ}$ *– prepis* $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ od $\mathfrak{w}$ kao konjunkciju sledećih formula:

- $A_1 \wedge < P_0 > A_2 \wedge \ldots \wedge < P_0 > A_n \wedge (\leq 1P_0.A_2) \wedge \ldots \wedge (\leq 1P_0.A_n)$,
- $[\mathbf{u}] \bigwedge_{i=1}^{n} (A_i \Rightarrow \phi_{t'_{\alpha_i}})$.

Lema 44. *Neka je* $\mathfrak{w} = \langle T^f, T^o, T^p \rangle$ *kandidat za s-kvazisvet za* Υ, t'_{α_i} *prošireni-tip za* $\langle \alpha_i, t \rangle \in T^o$, $i = 1, ..., n = |OB|$ *i* $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ $\mathcal{DIQ}$*-prepis za* $\mathfrak{w}$. *Tada je* $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ $\mathcal{DIQ}$ *formula, i njena veličina je polinomijalna u odnosu na veličinu od* Υ. *Specijalno, ako je* Γ *konačan zatvoren skup od* $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$ *formula, tada je* $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ $\mathcal{DIQ}$ *formula oblika 2.*

Dokaz Dokaz je direktan. $\square$

Neka je M model za $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$. Stanje s modela M nazivamo *aliasom* za $\alpha_i \in OB$ akko $M, s \models A_i$.

Lema 45. *Neka je* M *model za* $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$, *neka je dalje stanje* s *alias za* α_i *i neka je* $< r > \phi \in \Gamma$. *Ako postoji put iz* s *koji zadovoljava* $< r > \phi$ *i sadrži* N *aliasa* $s = s_1, ..., s_N$ *za* $\alpha_i = \alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_N}$ *respektivno, tada iz svakog aliasa* s' *za* α_i *u* M, *postoji put koji zadovoljava* $< r > \phi$ *i sadrži* N *aliasa* $s' = s'_1, ..., s'_N$ *za* $\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_N}$, *u istom redu kao* $s_1, ..., s_N$.

Dokaz Dokaz izvodimo indukcijom po broju N aliasa u putu.

Slučaj: $N = 1$, tj. iz s postoji put koji zadovoljava $< r > \phi$ i u kome je jedini alias s. Neka je to put $(s = x_0, ..., x_q) \in Paths_M(r)$, gde je $M, x_q \models \phi$, i nijedan alias se ne javlja u $(x_1, ..., x_q)$. Iz ovoga sledi da $(s = x_0, ..., x_q) \in Paths_M(\overline{r})$ i $M, x_q \models \phi$, tj. $M, s \models < \overline{r} > \phi$. Tada po konstrukciji $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ i t'_{α_i}, imamo da je $< \overline{r} > \phi \in t'_{\alpha_i}$ i tako za svaki alias s' za α_i $M, s' \models < \overline{r} > \phi$.

Otuda, iz svakog aliasa s' za α_i postoji put koji zadovoljava $< r > \phi$ i u kome se ne javljaju drugi aliasi osim s'.

Slučaj: $N > 1$. Pretpostavimo da iz s postoji put koji zadovoljava formulu $< r > \phi$ i u kom se javlja $k + 1$ aliasa za $\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_{k+1}}$. Neka je to put $(s = x_0, ..., x_w, ..., x_q)$, pri čemu je $M, x_0 \models A_{i_1}$, $M, x_w \models A_{i_2}$, i nijedan alias se ne javlja u $(x_1, ..., x_{w-1})$. Iz ovoga sledi da postoji program $r_1; a \in Pre(r)$ i program $r_2 \in Post(r)$ tako da je $(x_0, ..., x_w) \in Paths_M(r_1; a)$, $M, s \models < \overline{r_1}; a > A_{i_2}$, $(x_w, ..., x_q) \in Paths_M(r_2)$ i formula $< r_1; a >< r_2 > \phi \Rightarrow < r > \phi$ je valjana.

Napomenimo da je $< r_2 > \phi \in CL(< r > \phi) \subseteq \Gamma$ tako, pošto put $(x_w, ..., x_q)$, zadovoljava $< r_2 > \phi$ i sadrži k aliasa za $\alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_{k+1}}$, na osnovu indukcijske hipoteze možemo zaključiti da iz svakog aliasa za α_{i_2}, postoji put koji zadovoljava $< r_2 > \phi$ i koji prolazi kroz aliase za $\alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_{k+1}}$, u istom redu kao u $(x_w, ..., x_q)$.

S druge strane, iz $M, s \models < \overline{r_1}; a > A_{i_2}$ (na osnovu konstrukcije t'_{α_i} i $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i))$, dobijamo $< \overline{r_1}; a > A_{i_2} \in t'_{\alpha_i}$ i tako za svaki alias s' za α_i $M, s' \models < \overline{r_1}; a > A_{i_2}$.

Prema tome, za svaki alias s' za α_{i_1}, postoji put koji zadovoljava $< r_1; a > A_{i_2}$ i u kome se ne javlaju drugi aliasi između prvog i poslednjeg. Otuda kombinujući ove dve činjenice dobijamo tvrđenje. $\square$

Sada, za dati model M od $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$, mi ćemo izgraditi model nalik na drvo M' takav da je $M', root \models \varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ (*root* je koren od dobijene strukture drveta).

Mi ćemo konstruisati model nalik na drvo $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ iz datog modela $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ jednostavnim razvijanjem modela M kako sledi: Stavimo s, gde je $M, s \models \varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$, da bude koren drveta; svaki a-naslednik ($a = P|P^-$) od s dodajmo u drvo da bude a-sin od ovog čvora; ovaj proces nastavljamo rekurzivno posmatrajući sada sinove od s itd. Za $x \in S'$ označimo sa $h_t(x)$ stanje u M koje odgovara čvoru x.

Lema 46. *Neka je $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ struktura definisana kao gore. Tada,*
a) za svaku formulu $\phi' \in CL(\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i))$ i svako stanje $x \in S'$ važi:

$$M', x \models \phi' \;\; akko \;\; M, h_t(x) \models \phi';$$

b) $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ je model za $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$;
c) $T(M', \Gamma) \subseteq T(M, \Gamma)$.

Dokaz Dokaz se dobija direktnom proverom. $\square$

Posledica 47. *Ako formula $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ ima model $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ tada ona ima povezan nalik na drvo model $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ takav da je $T(M', \Gamma) \subseteq T(M, \Gamma)$.*

Mi ćemo dalje, ne gubeći opštost, posmatrati modele oblika drveta.

Neka je dat nalik na drvo model $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ za $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$, mi ćemo definisati novi model $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ kako sledi. Označimo sa s_{α_1} stanje u S za koje je $M, s_{\alpha_1} \models \varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ a sa s_{α_i} ($i = 2, ..., n$) jedinstveno stanje u S za koje je $M, s_{\alpha_i} \models A_i$ i $(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_i}) \in R_{P_0}$. Definišimo relaciju R''_P, za svaki atomarni program P u $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$, kako sledi: $R''_P = (R_P \cup \{(s_{\alpha_i}, s_{\alpha_j}) : (\alpha_i P \alpha_j) \in T^p\}) - (\{(s_{\alpha_i}, s) \in R_P : M, s \models A_j \text{ i } (\alpha_i P \alpha_j) \in T^p\} \cup \{(s_{\alpha_j}, s') \in R_P^- : M, s' \models A_i \text{ i } (\alpha_i P \alpha_j) \in T^p\})$.
Sada, M' definišemo kao:

- $S' = \{x \in S \; : \; (s_{\alpha_1}, x) \in R''_{\mathfrak{u}}\}$
- $R'_P = R''_P \cap (S' \times S')$
- $\Pi'(x) = \Pi(x)$, za svako stanje $x \in S'$.

Očigledno je da je za svaki prost program a, broj a-naslednika za svako stanje u M', isti kao u M.

Lema 48. *Neka je M model nalik na drvo za $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$, i neka je M' struktura definisana kao gore. Tada,*
a) za svaku formulu $\phi' \in \Gamma$ i svako stanje x iz M' važi:

$$M, x \models \phi' \;\; akko \;\; M', x \models \phi';$$

b) za svaku formulu $\phi' \in \Gamma_1$ i svako stanje x iz M' važi:

$$M, x \models \phi' \;\; akko \;\; M', x \models \phi';$$

c) $M', s_{\alpha_1} \models \varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$.

Dokaz a) Izvođenje dokaza započinjemo indukcijom po strukturi formule ϕ' (ovu indukciju nazivamo indukcija po formuli).

1. $\phi' = A$
   $M, x \models A$ akko $A \in \Pi(x)$ akko $A \in \Pi'(x)$ akko $M', x \models A$;

2. $\phi' = \phi_1 \wedge \phi_2$
   $M, x \models \phi_1 \wedge \phi_2$ akko $M, x \models \phi_1$ i $M, x \models \phi_2$ akko (na osnovu hipoteze indukcije po formuli) $M', x \models \phi_1$ i $M', x \models \phi_2$ akko $M', x \models \phi_1 \wedge \phi_2$;

3. $\phi' = \neg\phi_1$
   $M, x \models \neg\phi_1$ akko $M, x \not\models \phi_1$ akko (na osnovu hipoteze indukcije po formuli) $M', x \not\models \phi_1$ akko $M', x \models \neg\phi_1$;

4. $\phi' = \; (\geq na.\phi_1)$
   $\Rightarrow$ Neka je $M, x \models (\geq na.\phi_1)$ tada postoji najmanje n stanja $x_1, ..., x_n$ takvih da je $M, x_i \models \phi_1$ i $(x, x_i) \in R_a$. Razlikujemo dva slučaja.

   - $(x, x_i) \in R''_a$. Tada je $(x, x_i) \in R'_a$, pa na osnovu hipoteze indukcije po formuli $M', x_i \models \phi_1$.

- $(x, x_i) \notin R''_a$. Tada, na osnovu konstrukcije R''_a, imamo da je $x = s_{\alpha_j}$, $M, x_i \models A_l$ i $(x, s_{\alpha_l}) \in R''_a$. Dalje, iz $(x, s_{\alpha_l}) \in R''_a$ sledi $(x, s_{\alpha_l}) \in R'_a$. Sada, na osnovu konstrukcije formule $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$, iz $M, x_i \models A_l \wedge \phi_1$ sledi $M, s_{\alpha_l} \models \phi_1$, i tako, na osnovu hipoteze indukcije po formuli $M', s_{\alpha_l} \models \phi_1$.

Prema tome možemo izvesti zaključak da je $M', x \models (\geq na.\phi_1)$.
$\Leftarrow$ Neka je $M', x \models (\geq na.\phi_1)$ tada postoji najmanje n stanja $x_1, ..., x_n$ takvih da je $M', x_i \models \phi_1$ i $(x, x_i) \in R'_a$. Razlikujemo dva slučaja.

- $(x, x_i) \neq (s_{\alpha_j}, s_{\alpha_l})$. Tada je $(x, x_i) \in R_a$, pa na osnovu hipoteze indukcije po formuli $M, x_i \models \phi_1$.
- $(x, x_i) = (s_{\alpha_j}, s_{\alpha_l})$. Tada, na osnovu konstrukcije modela M' (tj. relacije R''_a) i formule $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$, iz $(x, x_i) = (s_{\alpha_j}, s_{\alpha_l}) \in R'_a$ sledi da postoji (tačno) jedno stanje s' u M za koje je $(x, s') \in R_a$ i $M, s' \models A_l$. Sada, iz $M', x_i \models \phi_1$ sledi $M, x_i \models \phi_1$ na osnovu hipoteze indukcije po formuli, otuda, na osnovu konstrukcije formule $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$, dobijamo da je $M, s' \models \phi_1$.

Prema tome možemo izvesti zaključak da je $M, x \models (\geq na.\phi_1)$.

5. $\phi' = < r > \phi''$
$\Rightarrow$ Neka je $M, x \models < r > \phi''$ tada postoji put $(x = x_0, ..., x_q) \in Paths_M(r)$ takav da je $M, x_q \models \phi''$. Dokazaćemo da je $M', x \models < r > \phi''$, indukcijom po broju k aliasa koji se javljaju duž puta $(x_0, ..., x_q)$, pri tome brojanje započinjemo od prvog aliasa x_u različitog od s_{α_j} za svako j i takvog da je $x_{u-1} = s_{\alpha_i}$ za neko i (ovu indukciju nazivamo indukcija po putu). Napomenimo da pošto je $x \in S'$ tada je $x_w \in S'$ za svako $w < u$, i ako je za neko $w < u$ stanje x_w alias tada je x_{w+1} različito od s_{α_j} za svako j.

   Slučaj $k = 0$. U ovom slučaju, za svako stanje x_i duž puta, $x_i \in S'$. Primenom Stava 7 q puta i Stava 6 jedan puta, možemo zaključiti da postoji formula
   $\chi = < (\phi_{0,1}?; \ldots; \phi_{0,g_0}?); a_1; (\phi_{1,1}?; \ldots); \ldots; a_q; (\phi_{q,1}?; \ldots; \phi_{q,g_q}?) > \phi''$
   sa $g_i \geq 0$, takva da važi:

   - svi testovi $\phi_{i,j}?$ se javljaju u r, pa tako $\phi_{i,j} \in CL(< r > \phi'') \subseteq \Gamma$;
   - $(x_{i-1}, x_i) \in R_{a_i}$, za $i = 1, ..., q$;

- sledeća formula je valjana:
$\chi \Rightarrow < r > \phi''$.

Na osnovu hipoteze indukcije po formuli zaključujemo da za svako $\phi_{i,j}$ važi: $M, x_l \models \phi_{i,j}$ akko $M', x_l \models \phi_{i,j}$ i $M, x_q \models \phi''$ akko $M', x_q \models \phi''$. Dok na osnovu konstrukcije modela M', iz $(x_{i-1}, x_i) \in R_{a_i}$ sledi $(x_{i-1}, x_i) \in R'_{a_i}$. Dakle, $M', x \models < r > \phi''$.

Slučaj $k > 0$. Neka je $(x_0, ..., x_q) = (x_0, ..., x_u, ..., x_q)$ gde je x_u alias od koga počinjemo brojanje, odnosno x_u je prvi alias za neko α_j (tj. $M, x_u \models A_j$) različit od s_{α_j}, duž puta $(x_0, ..., x_q)$ i takav da je $x_{u-1} = s_{\alpha_i}$ za neko i. Primenom Stava 7 u puta, dobijamo da postoji formula $\chi = < (\phi_{0,1}?; \ldots; \phi_{0,g_0}?); a_1; \ldots; (\phi_{u-1,1}?; \ldots; \phi_{u-1,g_{u-1}}?); a_u >< r' > \phi''$ sa $g_i \geq 0$, takva da važi:

- svi testovi $\phi_{i,j}$? se javljaju u r, pa je $\phi_{i,j} \in CL(< r > \phi'') \subseteq \Gamma$;
- $r' \in Post(r)$, pa prema tome formula $< r' > \phi''$ je ekvivalentna formuli ψ za neko $\psi \in CL(< r > \phi'') \subseteq \Gamma$;
- $(x_{i-1}, x_i) \in R_{a_i}$, za $i = 1, ..., u$;
- $M, x_u \models < r' > \phi''$;
- $(x_u, ..., x_q) \in Paths_M(r')$;
- sledeća formula je valjana:
$\chi \Rightarrow < r > \phi''$.

Put $(x_u, ..., x_q)$ sadrži k aliasa, tako, na osnovu Leme 45, iz svakog aliasa za α_j postoji put koji zadovoljava $< r' > \phi''$ i koji prolazi tačno kroz k "istih" aliasa u istom redu. Neka je $(s_{\alpha_j} = x'_u, ..., x'_{q'})$ takav put iz s_{α_j}. Ovaj put sadrži manje od k aliasa, isključujući x'_u. Tako, na osnovu hipoteze indukcije po putu dobijamo $M', s_{\alpha_j} \models < r' > \phi''$.

Sada, po konstrukciji modela M', iz $(x_{u-1}, x_u) \in R_{a_u}$ sledi $(x_{u-1}, x'_u) \in R'_{a_u}$, pa je $M', x_{u-1} \models < a_u >< r' > \phi''$. Dok, na osnovu hipoteze indukcije po formuli zaključujemo da za svako $\phi_{i,j}$ važi: $M, x_l \models \phi_{i,j}$ akko $M', x_l \models \phi_{i,j}$. Prema tome, uzimajući u obzir da za $i = 1, ..., u-1$, iz $(x_{i-1}, x_i) \in R_{a_i}$ sledi $(x_{i-1}, x_i) \in R'_{a_i}$, možemo zaključiti da važi $M', x \models < r > \phi''$.

$\Leftarrow$ Neka je $M', x \models < r > \phi''$ tada postoji put $(x = y_0, ..., y_q) \in Paths_{M'}(r)$ takav da je $M', y_q \models \phi''$. Mi ćemo dokazati da je tada

$M, x \models < r > \phi''$. Dokaz izvodimo indukcijom po broju k aliasa koji se javljaju duž puta $(y_0, ..., y_q)$, pri tome brojanje započinjemo od prvog aliasa $y_u = s_{\alpha_j}$ za neko j i takvog da je $y_{u-1} = s_{\alpha_i}$ za neko i (ovu indukciju nazivamo indukcija po putu).

Slučaj $k = 0$. U ovom slučaju, za svako stanje y_i duž puta, $y_i \in S$. Primenom Stava 7 q puta i Stava 6 jedan puta, dobijamo da postoji formula $\chi =< (\phi_{0,1}?; \ldots ; \phi_{0,g_0}?); a_1; \ldots ; a_q; (\phi_{q,1}?; \ldots ; \phi_{q,g_q}?) > \phi''$ sa $g_i \geq 0$, takva da važi:

- svi testovi $\phi_{i,j}?$ se javljaju u r, pa je $\phi_{i,j} \in CL(< r > \phi'') \subseteq \Gamma$;
- $(y_{i-1}, y_i) \in R'_{a_i}$, za $i = 1, ..., q$;
- sledeća formula je valjana:
  $\chi \Rightarrow < r > \phi''$.

Na osnovu hipoteze indukcije po formuli zaključujemo da za svako $\phi_{i,j}$ važi: $M', y_l \models \phi_{i,j}$ akko $M, y_l \models \phi_{i,j}$ i $M', y_q \models \phi''$ akko $M, y_q \models \phi''$. Dok na osnovu konstrukcije modela M', iz $(y_{i-1}, y_i) \in R'_{a_i}$ sledi $(y_{i-1}, y_i) \in R_{a_i}$. Dakle, $M, x \models < r > \phi''$.

Slučaj $k > 0$. Neka je $(y_0, ..., y_q) = (y_0, ..., y_u, ..., y_q)$ gde je y_u alias od koga počinjemo brojanje, odnosno y_u je prvi alias duž puta $(y_0, ..., y_q)$ takav da je $y_u = s_{\alpha_j}$, za neko j i $y_{u-1} = s_{\alpha_i}$ za neko i. Primenom Stava 7 u puta, možemo zaključiti da postoji formula
$\chi =< (\phi_{0,1}?; \ldots ; \phi_{0,g_0}?); a_1; \ldots ; (\phi_{u-1,1}?; \ldots ; \phi_{u-1,g_{u-1}}?); a_u >< r' > \phi''$ sa $g_i \geq 0$, takva da važi:

- svi testovi $\phi_{i,j}?$ se javljaju u r, pa je $\phi_{i,j} \in CL(< r > \phi'') \subseteq \Gamma$;
- $r' \in Post(r)$, pa prema tome formula $< r' > \phi''$ je ekvivalentna formuli ψ za neko $\psi \in CL(< r > \phi'') \subseteq \Gamma$;
- $(y_{i-1}, y_i) \in R'_{a_i}$, za $i = 1, ..., u$;
- $M', y_u \models < r' > \phi''$;
- $(y_u, ..., y_q) \in Paths_{M'}(r')$;
- sledeća formula je valjana:
  $\chi \Rightarrow < r > \phi''$.

Napomenimo da je $M', s_{\alpha_j} \models < r' > \phi''$ i da put $(y_u, ..., y_q)$ sadrži manje od k aliasa, isključujući y_u. Tako, na osnovu hipoteze indukcije po putu dobijamo $M, s_{\alpha_j} \models < r' > \phi''$, a na osnovu Leme 45 formula $< r' > \phi''$ je zadovoljiva u svakom aliasu za α_j koji se javlja u modelu M.

Sada, po konstrukciji modela M', iz $(y_{u-1}, y_u) \in R'_{a_u}$ sledi da postoji alias t za α_j takav da je $(y_{u-1}, t) \in R_{a_u}$. Otuda dobijamo da je $M, y_{u-1} \models < a_u >< r' > \phi''$. Dok, na osnovu hipoteze indukcije po formuli zaključujemo da za svako $\phi_{i,j}$ važi: $M', y_l \models \phi_{i,j}$ akko $M, y_l \models \phi_{i,j}$. Prema tome, uzimajući u obzir da za $i = 1, ..., u-1$, iz $(y_{i-1}, y_i) \in R'_{a_i}$ sledi $(y_{i-1}, y_i) \in R_{a_i}$, zaključujemo da je $M, x \models < r > \phi''$.

b) Razlikujemo tri slučaja.

- Formula $\phi' \in \Gamma$. Tada na osnovu a), za svako stanje x iz M' važi: $M, x \models \phi'$ akko $M', x \models \phi'$.

- Formula $\phi' \in \Gamma_1$ je jednog od sledećih oblika A_i, $< a > A_i$, $(\leq 1 a.A_i)$ ili njihovih negacija. Tada je jednostavno dokazati da za svako stanje x iz M' važi: $M, x \models \phi'$ akko $M', x \models \phi'$.

- Formula $\phi' \in \Gamma_1$ je ekvivalentna nekoj formuli oblika $< \bar{r} > \phi''$ ili njenoj negaciji, gde je $\phi'' \in \Gamma$ ili $\phi'' = < a > A_i$.

  Prvo uočimo da, na osnovu prethodna dva slučaja i definicije formule ϕ'', za svako stanje y iz M' važi: $M, y \models \phi''$ akko $M', y \models \phi''$.

  $\Leftarrow$. Neka je $M, x \models < \bar{r} > \phi''$ tada postoji put koji zadovoljava $< \bar{r} > \phi''$. Neka je to put $(x = x_0, ..., x_q) \in Paths_M(\bar{r})$, pri čemu je $M, x_q \models \phi''$. Jasno je da, na osnovu definicije od $\bar{r}$, u putu $(x_1, ..., x_q)$ nema aliasa. Ovo znači da je $(x = x_0, ..., x_q) \in Paths_{M'}(\bar{r})$ i $M', x_q \models \phi''$, tj. $M', x \models < \bar{r} > \phi''$.

  $\Rightarrow$. Neka je $M', x \models < \bar{r} > \phi''$ tada postoji put koji zadovoljava $< \bar{r} > \phi''$. Neka je to put $(x = x_0, ..., x_q) \in Paths_{M'}(\bar{r})$, pri čemu je $M', x_q \models \phi''$. Jasno je da, na osnovu definicije od $\bar{r}$, u putu $(x_1, ..., x_q)$ nema aliasa. Ovo znači da je $(x = x_0, ..., x_q) \in Paths_M(\bar{r})$ i $M, x_q \models \phi''$, tj. $M, x \models < \bar{r} > \phi''$.

c) Sledi iz b). ❑

Teorema 49. *Pretpostavimo da je $\mathfrak{w} = \langle T^f, T^o, T^p \rangle$ kandidat za s-kvazisvet za $\Upsilon = (\Gamma, OB, FP)$; tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. *$\mathfrak{w}$ je s-kvazisvet za Υ;*

2. • *postoji model* $M^1 = (S^1, \{R^1_P\}, \Pi^1)$ *takav da je* $T(M^1, \Gamma) = T^f$ *i*

   • *za svako* i $(i = 1, ..., n = |OB|)$ *postoji* t'_{α_i}, *prošireni-tip za* $\langle \alpha_i, t \rangle \in T^o$, *i postoji model* $M^2 = (S^2, \{R^2_P\}, \Pi^2)$ *za* $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ *takav da je* $T(M^2, \Gamma) \subseteq T^f$.

Dokaz $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je $\mathfrak{w}$ s-kvazisvet za Υ i $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ model koji ga realizuje. Tada postoji funkcija $h : OB \rightarrow S'$ i važe sledeći uslovi: $T^f = T(M', \Gamma)$ (tj. prvi uslov u 2. važi za $M^1 = M'$); $\langle \alpha_i, t^{M'}(h(\alpha_i)) \rangle \in T^o$ za svako $\alpha_i \in OB$; $(h(\alpha_i), h(\alpha_j)) \in R'_P$ akko $(\alpha_i P \alpha_j) \in T^p$, za svako $(\alpha_i P \alpha_j) \in FP$.

Definišimo novi model $M^2 = (S^2, \{R^2_P\}, \Pi^2)$ kako sledi:

$$S^2 = S',$$

$$R^2_{P_i} = R'_{P_i}, \text{ za } i = 1, ..., m, \text{ i } R^2_{P_0} = \{(h(\alpha_1), h(\alpha_j)) \ : \ j = 2, ..., n\},$$

$$\Pi^2(x) = \Pi'(x) \text{ za } x \neq h(\alpha_i), \text{ i } \Pi^2(h(\alpha_i)) = \Pi'(h(\alpha_i)) \cup \{A_i\}.$$

Jasno je da je,
$M^2, h(\alpha_1) \models A_1 \wedge < P_0 > A_2 \wedge ... \wedge < P_0 > A_n \wedge (\leq 1 P_0.A_2) \wedge ... \wedge (\leq 1 P_0.A_n)$.

Takođe, za svako $\phi' \in \Gamma$ i svako $x \in S^2$, lako je proveriti, indukcijom po ϕ', da važi: $M', x \models \phi'$ ako i samo ako $M^2, x \models \phi'$, tj. $T(M^2, \Gamma) = T(M', \Gamma) = T^f$.

Sada, za svako $\alpha_i \in OB$ po definiciji, stavimo

$$t'_{\alpha_i} = \{\phi' \in \Gamma_1 \ : \ M^2, h(\alpha_i) \models \phi'\}.$$

Po konstrukciji, t'_{α_i} je f-tip za $(\Gamma_1, \emptyset, \emptyset)$ i svi uslovi Definicije 42 važe, tj. t'_{α_i} je prošireni-tip za $\langle \alpha_i, t \rangle \in T^o$. Takođe po konstrukciji t'_{α_i}, imamo da je $M^2, h(\alpha_i) \models \phi_{t'_{\alpha_i}}$.

Dakle, $M^2, h(\alpha_1) \models \varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$.

$\Leftarrow$ Sada pretpostavimo da

- postoji model $M^1 = (S^1, \{R^1_P\}, \Pi^1)$ takav da je $T(M^1, \Gamma) = T^f$ i
- za svako i $(i = 1, ..., n = |OB|)$ postoji t'_{α_i}, prošireni-tip za $\langle \alpha_i, t \rangle \in T^o$, i postoji model $M^2 = (S^2, \{R^2_P\}, \Pi^2)$ za $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ takav da je $T(M^2, \Gamma) \subseteq T^f$.

Na osnovu Posledice 47, bez gubljenja opštosti, možemo pretpostaviti da je model M^2 za $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ povezan i nalik na drvo. Prvo ćemo definisati novi model $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ kako je to opisano ispred Leme 48. Na osnovu Leme 48, $M', s_{\alpha_1} \models \varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$, pa je $M', s_{\alpha_i} \models \phi_{t'_{\alpha_i}}$, tj. $\langle \alpha_i, t^{M'}(s_{\alpha_i}) \rangle \in T^o$. Na osnovu konstrukcije modela M' imamo da važi: $T(M', \Gamma) \subseteq T(M^2, \Gamma)$ i $(s_{\alpha_i}, s_{\alpha_j}) \in R'_P$ akko $(\alpha_i P \alpha_j) \in T^p$ za svako $(\alpha_i P \alpha_j) \in FP$.

Zatim mi definišemo novi model $M'' = (S'', \{R''_P\}, \Pi'')$ kako sledi: $S'' = S'$; $R''_{P_i} = R'_{P_i}$ za $i = 1, ..., m$; i $\Pi''(x) = \Pi'(x) - \{A_i \,:\, i = 1, ..., n\}$, za svako stanje $x \in S''$.

Jasno je da,

a) za svaku formulu $\phi' \in \Gamma$ i svako stanje x iz M'' važi:
   $M', x \models \phi'$ akko $M'', x \models \phi'$,

b) $\langle \alpha_i, t^{M''}(s_{\alpha_i}) \rangle \in T^o$,

c) $T(M'', \Gamma) = T(M', \Gamma)$ i

d) $(s_{\alpha_i}, s_{\alpha_j}) \in R''_P$ akko $(\alpha_i P \alpha_j) \in T^p$ za svako $(\alpha_i P \alpha_j) \in FP$.

Na kraju definišemo model $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ kao disjunktnu uniju modela M'' i M^1. Mi tvrdimo da model M realizuje kandidata za s-kvazisvet $\mathfrak{w}$ za Υ. Zaista, moguće je pokazati na standardan način da za funkciju $h \,:\, OB \to S$, zadatu sa $h(\alpha_i) = s_{\alpha_i}$, važe sledeći uslovi:

- $T(M, \Gamma) = T(M'', \Gamma) \cup T(M^1, \Gamma) = T^f$;
- $\langle \alpha_i, t^M(h(\alpha_i)) \rangle = \langle \alpha_i, t^{M''}(s_{\alpha_i}) \rangle \in T^o$ za svako $\alpha_i \in OB$;
- $(h(\alpha_i), h(\alpha_j)) \in R_P$ akko $(s_{\alpha_i}, s_{\alpha_j}) \in R''_P$ akko $(\alpha_i P \alpha_j) \in T^p$ za svako $(\alpha_i P \alpha_j) \in FP$.

Dakle, $\mathfrak{w}$ je s-kvazisvet za Υ. □

4.2 NEXPTIME algoritam

Sada smo spremni da otpočnemo sa formulisanjem i dokazivanjem tvrđenja koja nam direktno pomažu da konstruišemo željeni NEXPTIME algoritam.

Definicija 50. Neka je data $\mathcal{DIQ}$ formula $\phi = \psi_1 \wedge [\mathrm{u}]\psi_2$ oblika (2), neka je dalje $\nu(\phi)$ njen $\mathcal{DI}$-prepis, $\Gamma \subseteq CL(\psi_1) \cup CL(\psi_2)$ konačan zatvoren skup $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$ formula i $M = (S, \{R_F\}, \Pi)$ model za $\nu(\phi)$. Po definiciji, stavimo

$$\tilde{T}(M, \Gamma) = \{t_1^M(s_1) \mid s_1 \in S \text{ tako da je } M, s_1 \models A_{P_0}\},$$

gde je $t_1^M(s_1) = \{\phi' \in \Gamma \ : \ M, s_1 \models \nu_1(\phi')\}$. [14]

Napomenimo da ako je model M konačan tada mi možemo konstruisati skup $\tilde{T}(M,\Gamma)$ za $O(p(\max\{|\phi|, |M|\}))$ vremena, gde je $p(\cdot)$ polinom.

Lema 51. *Neka je data $\mathcal{DIQ}$ formula $\phi = \psi_1 \wedge [\mathbf{u}]\psi_2$ oblika (2), neka je dalje $\nu(\phi)$ njen $\mathcal{DI}$-prepis i $\Gamma \subseteq CL(\psi_1) \cup CL(\psi_2)$ konačan zatvoren skup $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$ formula. Tada, ako postoji ϕ-povezan model $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ koji zadovoljava ϕ onda postoji konačan model $M = (S, \{R_F\}, \Pi)$ koji zadovoljava $\nu(\phi)$ takav da je $|S| \leq 2^{|CL(\nu(\phi))|}$ i $\tilde{T}(M,\Gamma) = T(M',\Gamma)$.*

Dokaz Definišimo model $M = (S, \{R_F\}, \Pi)$ za $\nu(\phi)$ kako sledi. Povezan model M' za ϕ transformišemo, na isti način kako je to urađeno u dokazu Theorem 34, u povezan model $M^1 = (S^1, \{R^1_F\}, \Pi^1)$ za $\nu(\phi)$. Na osnovu konstrukcije modela M^1, za svako stanje $x \in S$ važi: $x \in S'$ akko $M^1, s' \models A_{P_0}$. Osim toga za svako stanje $s' \in S'$ i svaku formulu $\phi' \in CL(\psi_1) \cup CL(\psi_2)$, na osnovu konstrukcije modela M^1, važi: $M^1, s' \models \nu_1(\phi')$ akko $M', s' \models \phi'$, tj. $\tilde{T}(M^1,\Gamma) = T(M',\Gamma)$. Sada, model M^1 za $\nu(\phi)$ transformišemo u konačan model $M = (S, \{R_F\}, \Pi)$ za $\nu(\phi)$ upotrebom tehnike filtracije.

Očigledno, $|S| \leq 2^{|CL(\nu(\phi))|}$ i $\tilde{T}(M^1,\Gamma) = \tilde{T}(M,\Gamma)$.

Dakle, $\tilde{T}(M,\Gamma) = T(M',\Gamma)$. □

Lema 52. *Neka je data $\mathcal{DIQ}$ formula $\phi = \psi_1 \wedge [\mathbf{u}]\psi_2$ oblika (2), neka je dalje $\nu(\phi)$ njen $\mathcal{DI}$-prepis i $\Gamma \subseteq CL(\psi_1) \cup CL(\psi_2)$ konačan zatvoren skup $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$ formula. Tada, ako postoji konačan model $M = (S, \{R_F\}, \Pi)$ koji zadovoljava $\nu(\phi)$ onda postoji ϕ-povezan model $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ koji zadovoljava ϕ i takav da je $T(M',\Gamma) \subseteq \tilde{T}(M,\Gamma)$.*

Dokaz Definišimo model $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ za ϕ kako sledi. Model M za $\nu(\phi)$ transformišemo (u dva koraka) u povezan model $M' = (S', \{R'_P\}, \Pi')$ za ϕ kako je to urađeno u dokazu Teoreme 34, tj. prvo konstruišemo model M^f a zatim M'. Za konstrukciju modela M^f, kao međukorak, konstruišemo model M^t (vidi 2.1).

Na osnovu konstrukcije modela M^f, M^t i M', imamo da je $S' \subseteq S^f \subseteq S^t$ i $\tilde{T}(M^t,\Gamma) \subseteq \tilde{T}(M,\Gamma)$. Osim toga za svako stanje $s' \in S'$ i svaku formulu $\phi' \in CL(\psi_1) \cup CL(\psi_2)$, važi: $M, s' \models A_{P_0}$ i $M^t, s' \models \nu_1(\phi')$ akko $M', s' \models \phi'$.

Dakle, $T(M',\Gamma) \subseteq \tilde{T}(M,\Gamma)$. □

[14] Očigledno, $t_1^M(s_1)$ je f-tip za (Γ, OB, FP).

Lema 53. *Pretpostavimo da je* $\mathfrak{w} = \langle T^f, T^o, T^p \rangle$ *kandidat za s-kvazisvet za* $\Upsilon = (\Gamma, OB, FP)$, *gde je* Γ *konačan zatvoren skup* $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$ *formula; tada postoji NEXPTIME-algoritam (u odnosu na veličinu trojke* Υ*) koji odlučuje da li postoji model* M *takav da je* $T(M, \Gamma) = T^f$.

Dokaz Da bi smo proverili da li postoji model M takav da je $T(M, \Gamma) = T^f$ mi za svako $t \in T^f$ radimo sledeće:

1. konstruišemo formulu $\nu(\phi_t)$, na osnovu Leme 33 ovo možemo uraditi deterministički za PTIME;

2. pogađamo model $M_t = (S_t, \{R_{tF}\}, \Pi_t)$ za formulu $\nu(\phi_t)$ (takav da je $|S_t| \leq 2^{|CL(\nu(\phi_t))|}$) i stanje $s \in S_t$, jasno je da ovo možemo uraditi nedeterministički za EXPTIME;

3. konstruišimo skup $\tilde{T}(M_t, \Gamma)$,[15] pošto je, $|S_t| \leq 2^{|CL(\nu(\phi_t))|}$ i veličina formule ϕ_t je polinomialna u odnosu na veličinu od Υ, ovo možemo uraditi deterministički za EXPTIME;

4. proverimo da je $M_t, s \models \nu(\phi_t)$ i $\tilde{T}(M_t, \Gamma) \subseteq T^f$, jasno je da ovo možemo uraditi deterministički za EXPTIME.

Ako za svako $t \in T^f$ važe svi uslovi, tada postoji model M takav da je $T(M, \Gamma) = T^f$.

Na osnovu Leme 51, ako postoji model M takav da je $T(M, \Gamma) = T^f$, onda postoji ispravno pogađanje. Obrnuto, ako važe svi uslovi tada na osnovu Leme 52 za svako $t \in T^f$ postoji model M'_t koji zadovoljava ϕ_t (prema tome $t \in T(M'_t, \Gamma)$) takav da je $T(M'_t, \Gamma) \subseteq T^f$. Mi završavamo naš dokaz, sa definisanjem modela M kao disjunktne unije modela M'_t za ϕ_t, za svako $t \in T^f$. Lako je pokazati da za ovako definisan model važi $T(M, \Gamma) = T^f$.

Dakle, mi imamo NEXPTIME algoritam koji odlučuje da li postoji model M takav da je $T(M, \Gamma) = T^f$. □

Sada možemo formulisati glavni rezultat ove glave.

Teorema 54. *Neka je* $\mathfrak{w} = \langle T^f, T^o, T^p \rangle$ *kandidat za s-kvazisvet za* $\Upsilon = (\Gamma, OB, FP)$, *gde je* Γ *konačan zatvoren skup* $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$ *formula; tada postoji NEXPTIME-algoritam (u odnosu na veličinu trojke* Υ*) koji odlučuje da li je* $\mathfrak{w}$ *s-kvazisvet za* Υ.

[15] Očigledno, $\Gamma \subseteq CL(\phi_t)$

Dokaz Da bi smo proverili da li je dato $\mathfrak{w}$ s-kvazisvet za Υ, mi ćemo se prvo uveriti da postoji model $M^1 = (S^1, \{R_P^1\}, \Pi^1)$ takav da je $T(M^1, \Gamma) = T^f$. Na osnovu Leme 53 ovo možemo uraditi za NEXPTIME. Zatim,

- za svako $i = 1, \ldots, n$ pogađamo t'_{α_i} pa onda proverimo da li je to prošireni-tip za $\langle \alpha_i, t \rangle \in T^o$, ovo možemo uraditi nedeterministički za PTIME;
- konstruišemo formulu $\nu(\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i))$, ovo možemo uraditi deterministički za PTIME;
- pogađamo model $M = (S, \{R_F\}, \Pi)$ ($|S| \leq 2^{|CL(\nu(\varphi(\mathfrak{w},\{t'_{\alpha_i}\}_i)))|}$) i stanje $s \in S$, jasno je da ovo možemo uraditi nedeterministički za EXPTIME;
- konstruišemo skup $\tilde{T}(M, \Gamma)$, pošto je, $|S| \leq 2^{|CL(\nu(\varphi(\mathfrak{w},\{t'_{\alpha_i}\}_i)))|}$ i veličina formule $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ je polinomialna u odnosu na veličinu od Υ, ovo možemo uraditi deterministički za EXPTIME;
- proverimo da je $M, s \models \nu(\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i))$ i $\tilde{T}(M, \Gamma) \subseteq T^f$, jasno je da ovo možemo uraditi deterministički za EXPTIME.

Ako važe svi uslovi, onda je trojka $\mathfrak{w}$ s-kvazisvet za Υ.

Na osnovu Teoreme 49 i Leme 51, ako je data trojka $\mathfrak{w}$ s-kvazisvet za Υ, onda postoji ispravno pogađanje. Obrnuto, ako svi uslovi važe onda na osnovu Leme 52 postoji model M^2 koji zadovoljava $\varphi(\mathfrak{w}, \{t'_{\alpha_i}\}_i)$ takav da je $T(M^2, \Gamma) \subseteq \tilde{T}(M, \Gamma) \subseteq T^f$. Prema tome, na osnovu Teoreme 49 trojka $\mathfrak{w}$ je s-kvazisvet za Υ.

Dakle, mi imamo NEXPTIME algoritam koji odlučuje da li je trojka $\mathfrak{w}$ s-kvazisvet za Υ. $\square$

Na kraju podsetimo da su opisne logike $\mathcal{CI}$, $\mathcal{C}_1\mathcal{IF}$, $\mathcal{CIF}$, $\mathcal{C}_1\mathcal{IQ}$, i $\mathcal{CIQ}$ sintaksne varijante logika (odgovaraju logikama) $\mathcal{DI}$, $\mathcal{D}_1\mathcal{IF}$, $\mathcal{DIF}$, $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$, i $\mathcal{DIQ}$ respektivno; pa svi dobijeni rezultati važe za njih.

5 Modalne opisne logike — odlučivost

U ovoj glavi, podsećamo na neke osnovne pojmove, leme, teoreme i notaciju koji su neophodni za naša dalja razmatranja. Cela glava, možda uz male modifikacije, je preuzeta iz serije radova [29, 30, 31, 32]. Upućujemo čitaoca na radove iz ove serije, kao detaljniji uvod u ovu problematiku i dokaze tvrđenja koje ovde navodimo.

5.1 Sintaksa i Semantika

Ovde ćemo razmatrati nekoliko opisnih logika s modalnim operatorima. Koristićemo pristup po kome modalni operatori učestvuju i u konstrukciji pojmova i u konstrukciji formula a ne učestvuju u konstrukciji svojstava. Ako opisnoj logici $\mathcal{ALC}$ dodamo modalne operatore dobijamo logiku $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$. Pravila za formiranje $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-pojmova i $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-formula su data sledećom sintaksom:

$$
\begin{array}{lcl}
C & ::= & \top|\bot|A|C_1 \wedge C_2|C_1 \vee C_2|C_1 \Rightarrow C_2|\neg C|\exists P.C|\forall P.C|\Diamond C|\Box C \\
\varphi & ::= & \top|\bot|C_1 = C_2|\alpha : C|\alpha_1 P \alpha_2|\varphi_1 \wedge \varphi_2|\varphi_1 \vee \varphi_2|\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2|\neg\varphi|\Diamond\varphi|\Box\varphi
\end{array}
$$

gde A označava atomarni pojam tj. ime pojma, C (moguće sa indeksom) označava pojam, P označava svojstvo, koje je ovde samo atomarno tj. ime svojstva, φ (moguće sa indeksom) označava formulu i α (moguće sa indeksom) označava ime objekta; dok su $\Diamond$ i $\Box$ modalni operatori.

Ako umesto opisne logike $\mathcal{ALC}$ uzmemo logiku $\mathcal{L}$ koja se javlja njenim proširenjem dobićemo logiku $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$. Tako dobijamo logike $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{CI}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{CIQ}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{C}_1\mathcal{IQ}_{\mathcal{M}}$ itd. Mada je iz prethodno opisanog jasno kako se formiraju pojmovi, svojstva i formule u ovim logikama, mi ćemo ipak, kao primer, dati formalne definicije za logiku $\mathcal{CIQ}_{\mathcal{M}}$. Formalno, pravila za formiranje $\mathcal{CIQ}_{\mathcal{M}}$-pojmova, $\mathcal{CIQ}_{\mathcal{M}}$-svojstava i $\mathcal{CIQ}_{\mathcal{M}}$-formula su data sledećom sintaksom:

$$
\begin{array}{lcl}
C & ::= & \top|\bot|A|C_1 \wedge C_2|C_1 \vee C_2|C_1 \Rightarrow C_2|\neg C|\exists R.C \\
 & & |\forall R.C|(\leq nQ.C)|(\geq nQ.C)|\Diamond C|\Box C \\
Q & ::= & P|P^- \\
R & ::= & P|R_1 \vee R_2|R_1 \circ R_2|R^*|R^-|id(C) \\
\varphi & ::= & \top|\bot|C_1 = C_2|\alpha : C|\alpha_1 P \alpha_2|\varphi_1 \wedge \varphi_2|\varphi_1 \vee \varphi_2|\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2|\neg\varphi|\Diamond\varphi|\Box\varphi
\end{array}
$$

gde A označava atomarni pojam, C (moguće sa indeksom) označava pojam, P označava atomarno svojstvo, Q označava prosto svojstvo tj. atomarno svojstvo ili inverzija atomarnog svojstva, R (moguće sa indeksom) označava svojstvo, φ (moguće sa indeksom) označava formulu i α (moguće sa indeksom) označava ime objekta; dok su $\Diamond$ i $\Box$ modalni operatori.

U slučaju kada radimo sa vremenskom opisnom logikom mi možemo proširiti skup konstruktora za pojmove i formule sa "dok"[16] operatorom $\mathcal{U}$ tako da je $C_1 \mathcal{U} C_2$ ($\varphi_1 \mathcal{U} \varphi_2$) pojam (formula) kad god su C_1, C_2 (φ_1, φ_2) pojmovi (formule). Vremensku verziju opisne logike $\mathcal{L}$ označavaćemo sa $\mathcal{L}_\mathcal{U}$. Tako dobijamo logike $\mathcal{ALC}_\mathcal{U}$, $\mathcal{C}_\mathcal{U}$, $\mathcal{CI}_\mathcal{U}$, $\mathcal{CIQ}_\mathcal{U}$, $C_1\mathcal{IQ}_\mathcal{U}$ itd.

Sve ove logike se interpretiraju u strukturi oblika (koju ćemo nazivati *modelom*) $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, I \rangle$, gde je $\mathfrak{F} = \langle W, \lhd \rangle$ Kripke okvir, a I funkcija koja svakom svetu $w \in W$ pridružuje strukturu

$$I(w) = \left\langle \Delta^{I,w}, P_0^{I,w}, \ldots, A_0^{I,w}, \ldots, \alpha_0^{I,w}, \ldots \right\rangle,$$

gde je $\Delta^{I,w}$ neprazan skup objekata tj. *domen* za w, $P_i^{I,w}$ su binarne relacije na $\Delta^{I,w}$, $A_i^{I,w}$ su podskupovi od $\Delta^{I,w}$ i $\alpha_i^{I,w}$ su objekti iz $\Delta^{I,w}$ takvi da važi $\alpha_i^{I,w} = \alpha_i^{I,v}$, za svako $v, w \in W$.

Razlikujemo dvije vrste modela: one sa *konstantnim domenom* i one *kod kojih se domen širi*. U modelu sa konstantnim domenom imamo $\Delta^{I,w} = \Delta^{I,v}$, za svako $v, w \in W$. Dok kod modela kod kojih se domen širi imamo da je $\Delta^{I,v} \subseteq \Delta^{I,w}$, kad god je $v \lhd w$.

Za dati model i svet w u njemu, mi definišemo *vrednosti* $C^{I,w}$ i $R^{I,w}$ pojma C i svojstva R u w, i *istinitosnu relaciju* $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ (ili prosto $w \models \varphi$, ako se $\mathfrak{M}$ podrazumeva) kako sledi:

$$\begin{aligned}
&\top^{I,w} = \Delta^{I,w}\\
&\bot^{I,w} = \emptyset\\
&C^{I,w} = A_i^{I,w}, \text{ za } C = A_i\\
&(\neg C)^{I,w} = \Delta^{I,w} - C^{I,w}\\
&(C_1 \wedge C_2)^{I,w} = C_1^{I,w} \cap C_2^{I,w}\\
&(C_1 \vee C_2)^{I,w} = C_1^{I,w} \cup C_2^{I,w}\\
&(C_1 \Rightarrow C_2)^{I,w} = (\neg C_1)^{I,w} \cup C_2^{I,w}\\
&(\exists R.C)^{I,w} = \{d \in \Delta^{I,w} \mid \exists d'.(d,d') \in R^{I,w} \text{ i } d' \in C^{I,w}\}\\
&(\forall R.C)^{I,w} = \{d \in \Delta^{I,w} \mid \forall d'.(d,d') \in R^{I,w} \text{ sledi } d' \in C^{I,w}\}\\
&(\Diamond C)^{I,w} = \{d \in \Delta^{I,w} \mid \exists v \rhd w\ d \in C^{I,v}\}\\
&(\Box C)^{I,w} = \{d \in \Delta^{I,w} \mid \forall v.v \rhd w \text{ sledi } d \in C^{I,v}\}
\end{aligned}$$

[16]Until - na engleskom jeziku

$$(\leq nQ.C)^{I,w} = \{d \in \Delta^{I,w} \mid \text{postoji } \textit{najviše } n \text{ objekata } d' \text{ takvih da je } (d,d') \in Q^{I,w} \text{ i } d' \in C^{I,w}\}$$

$$(\geq nQ.C)^{I,w} = \{d \in \Delta^{I,w} \mid \text{postoji } \textit{najmanje } n \text{ objekata } d' \text{ takvih da je } (d,d') \in Q^{I,w} \text{ i } d' \in C^{I,w}\}$$

$$\begin{array}{l}
(R_1 \vee R_2)^{I,w} = R_1^{I,w} \cup R_2^{I,w} \\
(R_1 \circ R_2)^{I,w} = R_1^{I,w} \circ R_2^{I,w} \\
(R^*)^{I,w} = (R^{I,w})^* = \cup_{i \geq 0}(R^{I,w})^i \\
id(C) = \{(d,d) \in \Delta^{I,w} \times \Delta^{I,w} \mid d \in C^{I,w}\} \\
(R^-)^{I,w} = \{(a,b) \in \Delta^{I,w} \times \Delta^{I,w} \mid (b,a) \in R^{I,w}\}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
w \models C_1 = C_2 & \text{akko} & C_1^{I,w} = C_2^{I,w} \\
w \models \alpha : C & \text{akko} & \alpha^{I,w} \in C^{I,w} \\
w \models \alpha_1 P \alpha_2 & \text{akko} & \alpha_1^{I,w} P^{I,w} \alpha_2^{I,w} \\
w \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 & \text{akko} & w \models \varphi_1 \text{ i } w \models \varphi_2 \\
w \models \varphi_1 \vee \varphi_2 & \text{akko} & w \models \varphi_1 \text{ ili } w \models \varphi_2 \\
w \models \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 & \text{akko} & w \models \varphi_1 \text{ povlači } w \models \varphi_2 \\
w \models \neg\varphi & \text{akko} & w \not\models \varphi \\
w \models \Diamond\varphi & \text{akko} & \exists v \rhd w \ v \models \varphi \\
w \models \Box\varphi & \text{akko} & \forall v \rhd w \ v \models \varphi.
\end{array}$$

U slučaju vremenske opisne logike pretpostavljamo da je $\mathfrak{F} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ (gde je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva sa standardnom relacijom poredka $<$) i tada je:[17]

$$\begin{array}{l}
(C_1 \mathcal{U} C_2)^{I,w} = \{d \in \Delta^{I,w} \mid \exists u > w \ d \in C_2^{I,u} \text{ i } d \in C_1^{I,v} \text{ za svako } v \in (w,u)\} \\
w \models \psi \mathcal{U} \chi \text{ akko } \exists u > w \ u \models \chi \text{ i } v \models \psi \text{ za svako } v \in (w,u)
\end{array}$$

U zavisnosti od primene mogu se formulisati različiti zadaci (problemi), koji se pak odnose na različite klase modela. Međutim, mi ćemo se ovde pre svega interesovati problemom zadovoljivosti u nekim važnim klasama modela, jer se ostali standardni zadaci mogu svesti na problem zadovoljivosti.

Formula φ je *zadovoljiva* u klasi modela $\mathcal{M}$ ako postoji model $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$ i svet w u $\mathfrak{M}$ takav da je $w \models \varphi$.

Kao i u čisto modalnim logikama mi ćemo ovde koristiti specijalna imena za određene klase modela. Naime,

[17] $(w,u) = \{v : w < v < u\}$.

- $\mathcal{K}$, klasa svih modela,
- $\mathcal{GL}$, klasa svih modela baziranih na okvirima s relacijom koja je tranzitivna ali koja nema beskonačan lanac.
- $\mathcal{K}4$, klasa svih modela baziranih na okvirima s relacijom koja je tranzitivna,
- $\mathcal{S}5$, klasa svih modela baziranih na okvirima s univerzalnom relacijom, tj. $u \lhd v$ za svako u i v; ova klasa se smatra pogodnom za modeliranje znanja,
- $\mathcal{S}4$, klasa svih modela baziranih na okvirima s relacijom koja je tranzitivna i refleksivna,
- $\mathcal{KD}45$, klasa svih modela baziranih na okvirima s relacijom koja je tranzitivna, serijalna ($\forall u \exists v\; u \lhd v$) i Euklidska ($u \lhd v \wedge u \lhd w \to v \lhd w$); ova klasa se smatra pogodnom za modeliranje verovanja,
- $\mathcal{N}$, klasa svih modela baziranih na Kripke okviru $\langle \mathbb{N}, < \rangle$, gde je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva sa standardnom relacijom poredka $<$; ova klasa se smatra pogodnom za modeliranje vremena.

Za svaku od prethodno spomenutih klasa mi pretpostavljamo da sadrže samo modele s konstantnim domenom. Da bi smo ukazali da neka od spomenutih klasa $\mathcal{C}$ dopušta modele sa domenom koji se širi mi koristimo oznaku $\mathcal{C}^e$.[18] Tako, na primer, imamo $\mathcal{K}^e$, $\mathcal{N}^e$, itd.

5.2 Kvazimodel

Fiksirajmo $\mathcal{CIQ}_{\mathcal{M}}$-formulu φ. Neka je $ob\varphi$ skup svih imena objekata u φ. Neka su, dalje, $con\varphi$ i $sub\varphi$ minimalni zatvoreni skupovi, koji sadrže redom, sve pojmove u φ i sve potformule u φ. Uočimo da je veličina skupova $con\varphi$ i $sub\varphi$, kao i pojmova odnosno formula koje ovi skupovi sadrže linearna u odnosu na veličinu formule φ.

Definicija 55 (tip). *Tip pojma* t za φ je podskup skupa $con\varphi$ takav da važi

- $C \wedge D \in t$ akko $C, D \in t$, za svako $C \wedge D \in con\varphi$;

[18] Očigledno $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^e$

- $\neg C \in t$ akko $C \notin t$, za svako $C \in con\varphi$.

Pod *imenovanim tipom pojma* za φ mi podrazumevamo par $\langle a, t\rangle$, gde je $a \in ob\varphi$, a t je tip pojma za φ. Mi ćemo označavati $\langle a, t\rangle$ sa t_a i pisati $C \in t_a$ umesto $C \in t$, za t u $\langle a, t\rangle$. *Tip formule* Φ za φ je podskup od $sub\varphi$ takav da

- $\psi \wedge \chi \in \Phi$ akko $\psi, \chi \in \Phi$, za svako $\psi \wedge \chi \in sub\varphi$;

- $\neg\psi \in \Phi$ akko $\psi \notin \Phi$, za svako $\psi \in sub\varphi$.

Definicija 56 (kandidat za kvazisvet). Neka je T skup tipova pojmova za φ, T^o skup koji sadrži jedan imenovani tip pojma t_a za svako $a \in ob\varphi$, i neka je Φ tip formule za φ. Trojka $\langle T, T^o, \Phi\rangle$ se naziva *kandidat za kvazisvet* za φ ako važi sledeće:

- $t \in T$ za svako $\langle a, t\rangle \in T^o$;

- $(a : C) \in \Phi$ akko $C \in t_a$, za svako $(a : C) \in sub\varphi$ i svako $t_a \in T^o$;

- $(C = D) \in \Phi$ akko svako $t \in T$ istovremeno sadrži ili istovremeno ne sadrži oba pojma C i D, za svako $(C = D) \in sub\varphi$.

Primedba 57. Očigledno da za svaki kandidat za kvazisvet $\langle T, T^o, \Phi\rangle$ za φ važi

$$|T| \leq 2^{|con\varphi|},\ |T^o| = |ob\varphi|,\ |\Phi| \leq |sub\varphi|,$$

pa je za pamćenje ovakve trojke dovoljan eksponencijalan prostor u odnosu na veličinu formule φ. Takođe, nije teško uočiti, da se za EXPTIME, u odnosu na veličinu formule φ, može proveriti da li je data trojka $\langle T, T^o, \Phi\rangle$ kandidat za kvazisvet za φ.

Definicija 58 (prošireni $\mathcal{CIQ}$-model). *Proširenim $\mathcal{CIQ}$-modelom* za φ mi nazivamo $\mathcal{CIQ}$-model

$$I = \langle \Delta, R_0^I, \ldots, C_0^I, \ldots, (\mathcal{O}(D_0, \ldots))^I, \ldots, (\mathcal{O}'(D_0', \ldots))^I, \ldots, a_0^I, \ldots\rangle \quad (3)$$

u kome svi pojmovi oblika $\mathcal{O}(D_0, \ldots)$[19] koji se javljaju u φ se smatraju kao imena pojmova. Za svako $x \in \Delta$ stavimo

$$t^I(x) = \{C \in con\varphi : x \in C^I\},\ [x]^I = \{y \in \Delta : t^I(x) = t^I(y)\}.$$

Jasno je da je $t^I(x)$ tip pojma.

[19] $\mathcal{O}$ je modalni operator, npr. $\Diamond D_0$, $D_0 \mathcal{U} D_1$,...

Definicija 59 (kvazisvet). Kazaćemo da prošireni $\mathcal{CIQ}$-model I za φ oblika (3) *realizuje* kandidata za kvazisvet $\mathfrak{w} = \langle T, T^o, \Phi\rangle$ za φ ako važe sledeći uslovi: $T = \{t^I(x) : x \in \Delta\}$; $t_a = \langle a, t^I(a)\rangle \in T^o$ za svako $a \in ob\varphi$; $a^I R^I b^I$ akko $aRb \in \Phi$, za svako $aRb \in sub\varphi$.

Kandidat za kvazisvet $\mathfrak{w}$ za φ se naziva *kvazisvet* za φ, ako postoji prošireni $\mathcal{CIQ}$-model koji ga realizuje.

Lema 60. *Kada je dat kandidat za kvazisvet za $\mathcal{C}_1\mathcal{IQ}_\mathcal{M}$ formulu φ, može se efektivno prepoznati da li je, ili nije, on kvazisvet za φ.*

Dokaz Lako je uočiti da kandidat za kvazisvet $\langle T, T^o, \Phi\rangle$ za φ može da se realizuje ako i samo ako je konjunkcija formula $\bigvee\{\bigwedge t : t \in T\} = \top$, $\bigwedge t \neq \bot$ za $t \in T$, $a : \bigwedge t_a$ za $t_a \in T^o$, aRb za $aRb \in \Phi$ i $\neg(aRb)$ za $\neg(aRb) \in \Phi$ ($\bigwedge t$ je konjunkcija svih pojmova u t) zadovoljiva u proširenom $\mathcal{CIQ}$-modelu za φ. Ostaje samo da se napomene da je problem zadovoljivosti za $\mathcal{C}_1\mathcal{IQ}$ formule odlučiv. $\square$

Primetimo da broj različitih kvazisvetova za φ ne prelazi

$$\sharp(\varphi) = 2^{2^{|con\varphi|}} \cdot |ob\varphi| \cdot 2^{|con\varphi|} \cdot 2^{|sub\varphi|}.$$

Mi smo sada u poziciji da definišemo centralni pojam ovog odeljka, to je kvazimodel. Posmatrajmo okvir $\mathfrak{F} = \langle W, \lhd\rangle$ i preslikavanje σ koje svakom svetu $w \in W$ pridružuje kvazisvet $\sigma(w) = \langle T_w, T_w^o, \Phi_w\rangle$ za φ.

Definicija 61 (prolaz). Funkciju r iz W u skup svih tipova pojmova za φ nazivamo *prolaz* u $\langle \mathfrak{F}, \sigma\rangle$, ako zadovoljava uslove

(a) $r(w) \in T_w$, za svako $w \in W$ i

(b) za svako $\Box C \in con\varphi$ i svako $w \in W$, mi imamo $\Box C \in r(w)$ akko $C \in r(v)$ za svako $v \in W$ tako da je $w \lhd v$.

Ako je $\mathfrak{F} = \langle \mathbb{N}, <\rangle$ tada imamo

(b) za svaki pojam $C\mathcal{U}D \in con\varphi$ i svaki svet w, $C\mathcal{U}D \in r(w)$ akko postoji $u > w$ tako da važi $D \in r(u)$ i $C \in r(v)$ za svako $v \in (w, u)$.

Definicija 62 (kvazimodel). Par $\langle \mathfrak{F}, \sigma\rangle$ se naziva *kvazimodel* za φ (baziran na $\mathfrak{F}$) ako važe sledeći uslovi:

(c) za svako $a \in ob\varphi$, funkcija r_a definisana sa $r_a(w) = t$, za $\langle t, a\rangle \in T_w^o$, $w \in W$, je *prolaz* u $\langle \mathfrak{F}, \sigma\rangle$;

(d) za svaki par $w \in W$ i $t \in T_w$, postoji *prolaz* r u $\langle \mathfrak{F}, \sigma\rangle$ takav da je $r(w) = t$;

(e) za svako $w \in W$ i $\Box\psi \in sub\varphi$, imamo $\Box\psi \in \Phi_w$ akko $\psi \in \Phi_v$ za svako $v \in W$ takvo da je $w \lhd v$.

Ako je $\mathfrak{F} = \langle \mathbb{N}, <\rangle$ tada imamo

(e) za svaki svet w i svako $\psi\mathcal{U}\chi \in sub\varphi$, važi $\psi\mathcal{U}\chi \in \Phi_w$ akko postoji $u > w$ tako da je $\chi \in \Phi_u$ i $\psi \in \Phi_v$ za svako $v \in (w, u)$.

Kažemo da je formula φ *zadovoljiva* u kvazimodelu $\langle \mathfrak{F}, \sigma\rangle$ ako postoji $w \in W$ tako da je $\varphi \in \Phi_w$. Umesto $\psi \in \Phi_w$ ili $\psi \notin \Phi_w$, za $\psi \in sub\varphi$, mi ćemo često pisati $w \models \psi$ ili $w \not\models \psi$ respektivno.

Teorema 63. *Formula φ je zadovoljiva u modelu baziranom na okviru $\mathfrak{F}$ ako i samo ako je zadovoljiva u kvazimodelu za φ baziranom na $\mathfrak{F}$.*

5.3 Kvazimodel i zadovoljivost u $\mathcal{K}$ i $\mathcal{N}$

Teorema 64. *$\mathcal{CIQ}_{\mathcal{M}}$-formula φ je zadovoljiva u klasi modela $\mathcal{K}$ ako i samo ako je zadovoljiva u kvazimodelu $\langle\langle W, \lhd\rangle, \sigma\rangle$ za φ za koji je*

$$|W| \leq \sum_{n=0}^{md(\varphi)} (2 \cdot |con\varphi| \cdot b(\varphi) + |sub\varphi|)^n < 4^{|\varphi|^2},$$

gde je $b(\varphi) = 2^{|con\varphi|} + ob\varphi$.

Napomenimo da, sa malo više napora, prethodna ocena može da se popravi. Naime, možemo dobiti da je $|W| \leq 2^{|\varphi|}$.

Teorema 65. *$\mathcal{CIQ}_{\mathcal{U}}$-formula φ je zadovoljiva u klasi modela $\mathcal{N}$ ako i samo ako je zadovoljiva u kvazimodelu $\langle\langle \mathbb{N}, <\rangle, \sigma\rangle$ za φ za koji važi:*

$$\sigma(l_1 + k \cdot l_2 + j) = \sigma(l_1 + j),\ j = 1, 2, ..., l_2,\ k = 0, 1, 2, ...$$

gde su $l_1 \leq \natural(\varphi)$ i $l_2 \leq \flat^2(\varphi) \cdot |con\varphi| \cdot \natural(\varphi) + |sub(\varphi)| \cdot \natural(\varphi) + \natural(\varphi)$ fiksirani brojevi.

Definicija 66. Za tipove pojmova za φ, t i t' kažemo *mogu se povezati u prolaz* ili *mogu se r-nadovezati* ako za svako $C\mathcal{U}D \in con\varphi$ važi:

$$C\mathcal{U}D \in t \quad \text{ako i samo ako} \quad D \in t' \ \text{ ili } \ C \in t' \text{ i } C\mathcal{U}D \in t'.$$

Definicija 67 (par podesan za povezivanje). Uređeni par $\langle T_1, T_1^o, \Phi_1\rangle$, $\langle T_2, T_2^o, \Phi_2\rangle$, kvazisvetova za φ je *podesan za povezivanje* ako

- za svako $t' \in T_2$, postoji $t \in T_1$ tako da se t i t' mogu r-nadovezati;
- za svako $t \in T_1$, postoji $t' \in T_2$ tako da se t i t' mogu r-nadovezati;
- za svako $\langle t, \alpha\rangle \in T_1^o$ i svako $\langle t', \alpha\rangle \in T_2^o$, t i t' se mogu r-nadovezati;
- za svako $\psi\mathcal{U}\chi \in sub\varphi$ važi:
  $\psi\mathcal{U}\chi \in \Phi_1$ ako i samo ako $\chi \in \Phi_2$ ili $\psi \in \Phi_2$ i $\psi\mathcal{U}\chi \in \Phi_2$.

Lema 68. *Neka je $\sigma(i) = \langle T_i, T_i^o, \Phi_i\rangle$, $i = 1, ..., l_1 + l_2$ konačan niz kvazisvetova za φ, gde su $l_1 \leq \natural(\varphi)$ i $l_2 \leq \flat^2(\varphi) \cdot |con\varphi| \cdot \natural(\varphi) + |sub(\varphi)| \cdot \natural(\varphi) + \natural(\varphi)$ fiksirani brojevi. Tada je struktura $\langle\langle \mathbb{N}, <\rangle, \sigma\rangle$, gde je*

$$\sigma(l_1 + k \cdot l_2 + j) = \sigma(l_1 + j),\ j = 1, 2, ..., l_2,\ k = 0, 1, 2, ...,$$

kvazimodel za φ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

1. *$\varphi \in \Phi_1$;*
2. *za svako $i \leq l_1 + l_2$ par kvazisvetova $\sigma(i), \sigma(i+1)$ je podesan za povezivanje;*
3. *za svako $t \in T_{l_1+1}$ postoji broj $k \leq l_1 + l_2$ i niz $t = t_{l_1+1}, t_{l_1+2}, \ldots, t_k$ takav da je*
   - *$t_i \in T_i$ za svako $i = l_1 + 1, l_1 + 2, \ldots, k$, specijalno, ako je $\langle t, \alpha\rangle \in T_{l_1+1}^o$ tada je $\langle t_i, \alpha\rangle \in T_i^o$ za svako $i = l_1 + 1, l_1 + 2, \ldots, k$;*
   - *t_i i t_{i+1}, $i = l_1 + 1, l_1 + 2, \ldots, k - 1$ se mogu r-nadovezati;*
   - *za svako $C\mathcal{U}D \in t$ postoji m, $l_1 + 1 < m \leq k$, tako da je $D \in t_m$;*
4. *za svako $\psi\mathcal{U}\chi \in \Phi_{l_1+1}$ postoji m, $l_1 + 1 < m \leq k$, tako da je $\chi \in \Phi_m$.*

6 Modalne opisne logike — donje ocene

U ovoj glavi, biće izloženo nekoliko lema, sa dokazima, koje obezbeđuju donje ocene problema zadovoljivosti za neke od opisnih logika s modalnim operatorima.

Pošto je $\mathcal{ALC}$ logika obuhvaćena svim logikama koje ćemo mi razmatrati, problem zadovoljivosti za svaku od njih je EXPTIME-težak.

Lema 69. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-formule bez modalnih operatora, tj., nezavisno od vrste okvira, je* EXPTIME-*težak.*

6.1 Zadovoljivost u $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}4$ i $\mathcal{K}4$

Lema 70. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-formule bez imena svojstava u klasi $\mathcal{K}$ je* NEXPTIME-*težak.*

Dokaz Da bi smo dobili donju ocenu za problem zadovoljivosti u klasi $\mathcal{K}$, mi ćemo na ovaj problem *izvršiti redukciju* $n \times n$ problema popločavanja, kada je n zadato u binarnom brojnom sistemu. Na osnovu Teoreme 3, znamo da je $n \times n$ problem popločavanja, kada je n zadato u binarnom brojnom sistemu, NEXPTIME-kompletan, pa će problem zadovoljivosti u klasi $\mathcal{K}$ biti NEXPTIME-težak. Preciznije, za skup $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_s\}$ tipova ploča i $n < \omega$, mi ćemo konstruisati $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-formulu φ^K dužine $O(n^2 + s^2)$ tako da φ^K je zadovoljiva u nekom $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-modelu iz $\mathcal{K}$ ako i samo ako $\mathcal{T}$ popločava torus dimenzije $2^n \times 2^n$.

Mi ćemo prvo opisati binarno drvo dubine $2n$, korišćenjem $2n$ imena pojmova $Q_0, \dots, Q_{2n-1}$. Ovo će nam obezbediti 2^{2n} listova koji će kodirati 2^{2n} svetova w_{ij}, $0 \leq i, j < 2^n$. Neka ψ_1 bude konjunkcija sledećih formula (one su slične formulama iz [14], s. 354):

$$\bigwedge_{i=0}^{2n-1} \Box^i \Big(\Diamond(Q_i = \top) \wedge \Diamond(Q_i = \bot) \wedge \Box(Q_i = \top \vee Q_i = \bot) \Big)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{2n-1} \Box^i \bigwedge_{j=0}^{i-1} \Big((Q_j = \Box Q_j) \wedge (Q_j = \Diamond Q_j) \Big)$$

Ma koji model koji zadovoljava ψ_1 u svetu w će sadržati binarno drvo dubine $2n$ koje počinje iz w.

Da bi smo kodirali torus $2^n \times 2^n$, mi definišemo 2^{2n} pojmova B_{ij}, $0 \leq i,j < 2^n$, korišćenjem $2n$ imena pojmova $C_0, \ldots, C_{2n-1}$. Neka su B, B^r, B^u još tri imena pojmova. B se poklapa sa B_{ij} u svetu (listu) w_{ij} koji je određen uslovom $w_{ij} \models Q_0^{d_0} \wedge \cdots \wedge Q_{2n-1}^{d_{2n-1}} = \top$, gde su $(d_{2n-1}, \ldots, d_n)$ i $(d_{n-1}, \ldots, d_0)$ binarni zapisi brojeva i i j, respektivno. Ovo obezbeđujemo *pomoću formule* ψ_2:

$$\Box^{2n}\Bigg(\neg(B = \bot) \wedge \Bigg(B = \bigwedge_{i=0}^{2n-1}\Big((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)\Big)\Bigg)\Bigg).$$

Za svaki par brojeva $i, j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, koji se u binarnom brojnom sistemu zapisuju kao $(d_{2n-1}, \ldots, d_n)$ i $(d_{n-1}, \ldots, d_0)$, respektivno, mi ćemo (radi lakšeg praćenja dokaza) smatrati da je $B_{ij} = C_0^{d_0} \wedge \cdots \wedge C_{2n-1}^{d_{2n-1}}$, gde sa C^d označavamo C ako je $d = 1$, a $\neg C$ ako je $d = 0$.

Za svaki tip ploče $t_i \in \mathcal{T}$ uvedimo po jedno ime pojma T_i. Ova imena pojmova se uvode sa ciljem da imaju sledeće značenje: mi ćemo reći da *tip* ploče t_k pokriva polje (i, j) torusa ako i samo ako $B_{ij} \subseteq T_k$ (tj., $B_{ij} \rightarrow T_k = \top$). Sada je problem da se obezbedi da je svako polje torusa pokriveno tačno sa jednim tipom ploče i da se boje od susednih tipova ploča poklapaju *bez korišćenja isuviše mnogo formula.* Formula

$$\psi_3 = \bigwedge_{i=0}^{2n-1}(\Diamond^{2n} C_i = \Box^{2n} C_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{s}(\Diamond^{2n} T_i = \Box^{2n} T_i)$$

označava da svako ime pojma C_i (T_j) sadrži iste objekte u svakom svetu (listu) w_{ij}. A konjunkcija ψ_4 formula

$$\Box^{2n}(\bigvee_{i=1}^{s} T_i = \top), \;\; \Box^{2n}\bigwedge_{i \neq j}(T_i \wedge T_j = \bot), \;\; \Box^{2n}\bigwedge_{i=1}^{s}\Big((B \wedge T_i = \bot) \vee (B \wedge T_i = B)\Big)$$

kaže da je svako polje torusa pokriveno tačno sa jednim tipom ploče.

Ako je $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$ zadovoljiva u nekom $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-modelu tada skupovi B_{ij} u ovom modelu su neprazni, međusobno disjunktni i pokrivaju domen modela.

Da bi smo mogli upoređivati boje susednih ploča, potrebno je da u svakom svetu w_{ij} imamo informaciju o vrednostima pojma B u njegovim *susednim* svetovima. Za to nam sluze imena pojmova B^r i B^u. Naime, ako je u nekom svet $B = B_{ij}$, mi želimo da je tada $B^r = B_{i,j\oplus 1}$, $B^u = B_{i\oplus 1,j}$ u tom svetu.[20]

[20] $\oplus$ je operacija sabiranja po modulu 2^n, tj. $p \oplus q \equiv (p + q) \mod 2^n$.

Ovo omogućavamo pomoću formula:

$$\psi_5 = \Box^{2n} \bigwedge_{k=0}^{n-1} \Big(\big((\neg Q_k \wedge \bigwedge_{j=0}^{k-1} Q_j) = \top \big) \rightarrow$$
$$\big(B^r = \bigwedge_{i=0}^{k-1} \neg C_i \wedge C_k \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{2n-1} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)) \big) \Big),$$

$$\psi_6 = \Box^{2n} \Big(\big((\bigwedge_{j=0}^{n-1} Q_j) = \top \big) \rightarrow$$
$$\big(B^r = \bigwedge_{i<n} \neg C_i \wedge \bigwedge_{i=n}^{2n-1} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)) \big) \Big),$$

$$\psi_7 = \Box^{2n} \bigwedge_{k=n}^{2n-1} \Big(\big((\neg Q_k \wedge \bigwedge_{j=n}^{k-1} Q_j) = \top \big) \rightarrow$$
$$\big(B^u = \bigwedge_{i=n}^{k-1} \neg C_i \wedge C_k \wedge \bigwedge_{i \notin \{n,\ldots,k\}} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)) \big) \Big).$$

$$\psi_8 = \Box^{2n} \Big(\big((\bigwedge_{j=n}^{2n-1} Q_j) = \top \big) \rightarrow$$
$$\big(B^u = \bigwedge_{i=n}^{2n-1} \neg C_i \wedge \bigwedge_{i<n} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)) \big) \Big),$$

Sada smo u mogućnosti da napišemo formule koje kažu da se boje od susednih tipova ploča poklapaju:

$$\psi_9 = \Box^{2n} \bigwedge_{j=1}^{s} \Big((B \subseteq T_j) \rightarrow (B^r \subseteq \bigvee_{\mathrm{right}(j)=\mathrm{left}(l)} T_l) \Big),$$

$$\psi_{10} = \Box^{2n} \bigwedge_{j=1}^{s} \Big((B \subseteq T_j) \rightarrow (B^u \subseteq \bigvee_{\mathrm{up}(j)=\mathrm{down}(l)} T_l) \Big).$$

Iz prethodno izloženog lako se vidi da je $\varphi^K = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_{10}$ tražena formula. $\Box$

Lema 71. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-formule bez imena svojstava u svakoj od klasa $\mathcal{S}4$ i $\mathcal{K}4$ je* NEXPTIME-*težak.*

Dokaz Slično dokazu Leme 70 mi ćemo ovde obezbediti donju ocenu za problem zadovoljivosti u klasi $\mathcal{S}4$ ($\mathcal{K}4$) sa redukcijom na njega $n \times n$ problema popločavanja, kada je n zadato u binarnom brojnom sistemu, za koji znamo da je NEXPTIME-*kompletan. Naime, za skup* $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_s\}$ tipova ploča i $n < \omega$, mi ćemo konstruisati $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-formulu φ^{S4} (φ^{K4}) dužine $O(n^2 + s^2)$ tako da φ^{S4} (φ^{K4}) je zadovoljiva u nekom $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-modelu iz $\mathcal{S}4$ ($\mathcal{K}4$) ako i samo ako $\mathcal{T}$ popločava torus dimenzije $2^n \times 2^n$.

Pošto su konstrukcije formula φ^{S4} i φ^{K4} slične, mi ćemo prvo konstruisati formulu φ^{S4}, a zatim ukazati potrebne modifikacije ove formule za konstrukciju formule φ^{K4}. Konstrukcija je slična prethodnoj, tj. zahteva konstrukciju binarnog drveta. Međutim, kada je relacija pristupa (koja odgovara modalnom operatoru) refleksivna ili tranzitivna potrebno je izvršiti odgovarajuće popravke formule φ^K. Slične modifikacije, za čisto modalne logike, mogu se naći u [14]. Ideja je da se iskoriste dodatna imena pojmova (*dubinski pojmovi*), koja će nam omogućiti za određivanje dubine u drvetu. Korišćenjem ovih dodatnih imena pojmova mi moramo izvršiti popravke svih ostalih formula konstruisanih za φ^K.

Prvo ćemo opisati binarno drvo dubine $2n$, korišćenjem $2n$ imena pojmova $Q_0, \ldots, Q_{2n-1}$. Ovo će nam obezbediti 2^{2n} listova koji će kodirati 2^{2n} svetova w_{ij}, $0 \le i, j < 2^n$. Pored tog, mi koristimo imena pojmova $D_0, \ldots, D_{2n+1}$. Intuitivno, $D_i = \top$ tačno tada ako se nalazimo na dubini $\le i$ u drvetu. Neka je *depth* sledeća formula, koja očigledno iskazuje željene odnose između pojmova D_i:

$$\bigwedge_{i=1}^{2n+1} (D_i = \top \rightarrow D_{i-1} = \top).$$

Neka dalje *determined* bude formula koja intuitivno znači da istinitosna vrednost imena pojma Q_i se određuje na dubini i u drvetu, tako ako je $Q_i = \top$ (respektivno $Q_i = \bot$) u datom čvoru v na dubini j, gde je $j \ge i$, tada $Q_i = \top$ (respektivno $Q_i = \bot$) u svim naslednicima od v koji se nalaze na dubini najmanje i. Koristićemo *determined* kao skraćenicu za:

$$\bigwedge_{i=1}^{2n} \left(D_i = \top \rightarrow \left(\left(Q_i = \top \rightarrow \Box(Q_i = \top) \right) \wedge \left(Q_i = \bot \rightarrow \Box(Q_i = \bot) \right) \right) \right).$$

Uzećemo da *branching* bude formula koja intuitivno znači da za svaki čvor na dubini i, je *moguće naći dva naslednika* na dubini $i+1$ tako da je $Q_{i+1} = \top$ u jednom od njih a $Q_{i+1} = \bot$ u drugom. Tačnije, *branching* će biti skraćenica za:

$$\bigwedge_{i=0}^{2n-1} \Big(D_i \wedge \neg D_{i+1} = \top \rightarrow \Big(\Diamond(D_{i+1} \wedge \neg D_{i+2} \wedge Q_{i+1} = \top) \wedge$$

$$\wedge \Diamond(D_{i+1} \wedge \neg D_{i+2} \wedge \neg Q_{i+1} = \top) \Big) \Big)$$

Neka ψ_1 bude konjunkcija sledećih formula:

$$D_0 \wedge \neg D_1 = \top, \quad \Box(depth \wedge determined \wedge branching)$$

$$\bigwedge_{i=0}^{2n+1} \Box(D_i = \top \vee D_i = \bot), \quad \bigwedge_{i=0}^{2n} \Box(Q_i = \top \vee Q_i = \bot)$$

Ma koji model koji zadovoljava ψ_1 u svetu w će sadržati binarno drvo dubine $2n$ koje počinje iz w.

Da bi smo kodirali torus $2^n \times 2^n$, mi definišemo 2^{2n} pojmova B_{ij}, $0 \leq i, j < 2^n$, *korišćenjem* $2n$ *imena pojmova* $C_0, \dots, C_{2n-1}$. Neka su B, B^r, B^u još tri imena pojmova. B se poklapa sa B_{ij} u svetu (listu) w_{ij} koji je određen uslovom $w_{ij} \models D_{2n} \wedge \neg D_{2n+1} \wedge Q_0^{d_0} \wedge \cdots \wedge Q_{2n-1}^{d_{2n-1}} = \top$, gde su $(d_{2n-1}, \dots, d_n)$ i $(d_{n-1}, \dots, d_0)$ binarni zapisi brojeva i i j, respektivno. Ovo obezbeđujemo pomoću formule ψ_2:

$$\Box\Bigg((D_{2n} \wedge \neg D_{2n+1} = \top) \rightarrow \Big(\neg(B = \bot) \wedge \Big(B = \bigwedge_{i=0}^{2n-1} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)) \Big) \Big) \Bigg).$$

Za svaki par brojeva $i, j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, koji se u binarnom brojnom sistemu zapisuju kao $(d_{2n-1}, \dots, d_n)$ i $(d_{n-1}, \dots, d_0)$, respektivno, mi ćemo (radi lakšeg praćenja dokaza) smatrati da je $B_{ij} = C_0^{d_0} \wedge \cdots \wedge C_{2n-1}^{d_{2n-1}}$, gde sa C^d označavamo C ako je $d = 1$, a $\neg C$ ako je $d = 0$.

Za svaki tip ploče $t_i \in \mathcal{T}$ uvedimo po jedno ime pojma T_i. Ova imena pojmova se uvode sa ciljem da imaju sledeće značenje: *mi ćemo reći da tip ploče* t_k *pokriva polje* (i, j) torusa ako i samo ako $B_{ij} \subseteq T_k$. Sada je problem da se obezbedi da je svako polje torusa pokriveno tačno sa jednim tipom ploče i da se boje od susednih tipova ploča poklapaju *bez korišćenja isuviše mnogo formula.* Formula

$$\psi_3 = \bigwedge_{i=0}^{2n-1} (\Diamond C_i = \Box C_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{s} (\Diamond T_i = \Box T_i)$$

označava da svako ime pojma C_i (T_j) sadrži iste objekte u svakom svetu. A konjunkcija ψ_4 formula

$$\Box(\bigvee_{i=1}^{s} T_i = \top), \qquad \Box \bigwedge_{i \neq j} (T_i \wedge T_j = \bot),$$

$$\Box\Big(\big(D_{2n} \wedge \neg D_{2n+1} = \top\big) \to \bigwedge_{i=1}^{s} \big((B \wedge T_i = \bot) \vee (B \wedge T_i = B)\big)\Big)$$

kaže da je svako polje torusa pokriveno tačno sa jednim tipom ploče.

Ako je $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$ zadovoljiva u nekom $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-modelu, baziranom na $S4$ okviru, tada skupovi B_{ij} u ovom modelu su neprazni, međusobno disjunktni i pokrivaju domen modela.

Mi želimo da važi: ako je $B = B_{ij}$ u nekom svetu, tada je $B^r = B_{i,j\oplus 1}$, $B^u = B_{i\oplus 1,j}$ u tom svetu. Ovo omogućavamo pomoću formula:

$$\psi_5 = \Box \bigwedge_{k=0}^{n-1} \Big(\big((D_{2n} \wedge \neg D_{2n+1} \wedge \neg Q_k \wedge \bigwedge_{j=0}^{k-1} Q_j) = \top\big) \to$$
$$\Big(B^r = \bigwedge_{i=0}^{k-1} \neg C_i \wedge C_k \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{2n-1} \big((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)\big)\Big)\Big),$$

$$\psi_6 = \Box \Big(\big((D_{2n} \wedge \neg D_{2n+1} \wedge \bigwedge_{j=0}^{n-1} Q_j) = \top\big) \to$$
$$\Big(B^r = \bigwedge_{i=0}^{n-1} \neg C_i \wedge \bigwedge_{i=n}^{2n-1} \big((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)\big)\Big)\Big),$$

$$\psi_7 = \Box \bigwedge_{k=n}^{2n-1} \left(\left((D_{2n} \wedge \neg D_{2n+1} \wedge \neg Q_k \wedge \bigwedge_{j=n}^{k-1} Q_j) = \top \right) \rightarrow \right.$$

$$\left. \left(B^u = \bigwedge_{i=n}^{k-1} \neg C_i \wedge C_k \wedge \bigwedge_{i \notin \{n,\ldots,k\}} \left((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i) \right) \right) \right).$$

$$\psi_8 = \Box \left(\left((D_{2n} \wedge \neg D_{2n+1} \wedge \bigwedge_{j=n}^{2n-1} Q_j) = \top \right) \rightarrow \right.$$

$$\left. \left(B^u = \bigwedge_{i=n}^{2n-1} \neg C_i \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} \left((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i) \right) \right) \right).$$

Sada smo u mogućnosti da napišemo formule koje kažu da se boje od susednih tipova ploča poklapaju:

$$\psi_9 = \Box \left((D_{2n} \wedge \neg D_{2n+1} = \top) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{s} \left(B \subseteq T_j \rightarrow B^r \subseteq \bigvee_{right(j)=left(l)} T_l \right) \right),$$

$$\psi_{10} = \Box \left((D_{2n} \wedge \neg D_{2n+1} = \top) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{s} \left(B \subseteq T_j \rightarrow B^u \subseteq \bigvee_{up(j)=down(l)} T_l \right) \right).$$

Iz prethodno izloženog lako se vidi da je $\varphi^{S4} = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_{10}$ tražena formula.

Da bi smo izveli dokaz, u slučaju modela iz klase $\mathcal{K}4$, treba izvršiti sledeće modifikacije prethodnog dokaza.

Za formulu ψ, neka je $\Box^+\psi = \psi \wedge \Box\psi$, $\Diamond^+\psi = \psi \vee \Diamond\psi$; a za pojam C, neka je $\Box^+ C = C \wedge \Box C$, $\Diamond^+ C = C \vee \Diamond C$. Ako svako pojavljivanje $\Box$ u φ^{S4} zamenimo sa $\Box^+$ i svako pojavljivanje $\Diamond$ zamenimo sa $\Diamond^+$, dobićemo formulu φ^{K4} koja je zadovoljiva u nekom $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-modelu iz klase $\mathcal{K}4$ ako i samo ako $\mathcal{T}$ popločava torus dimenzije $2^n \times 2^n$. Ovo obezbeđuje NEXPTIME donju ocenu za problem zadovoljivosti u klasi $\mathcal{K}4$. $\Box$

6.2 Zadovoljivost u $\mathcal{S}5$ i $\mathcal{KD}45$

Lema 72. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-formule u svakoj od klasa $\mathcal{S}5$ i $\mathcal{KD}45$ je* NEXPTIME*-težak.*

Dokaz Slično dokazu Leme 70 mi ćemo ovde obezbediti donju ocenu za problem zadovoljivosti u klasi $\mathcal{S}5$ ($\mathcal{KD}45$) sa redukcijom na njega $n \times n$ problema popločavanja, kada je n zadato u binarnom brojnom sistemu, za koji znamo da je NEXPTIME-kompletan. Naime, za skup $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_s\}$ tipova ploča i $n < \omega$, mi ćemo konstruisati $\mathcal{ALC_M}$-formulu φ^{S5} (φ^{KD45}) dužine $O(n^2+s^2)$ tako da φ^{S5} (φ^{KD45}) je zadovoljiva u nekom $\mathcal{ALC_M}$-modelu iz $\mathcal{S}5$ ($\mathcal{KD}45$) ako i samo ako $\mathcal{T}$ popločava torus dimenzije $2^n \times 2^n$.

Pošto su konstrukcije formula φ^{S5} i φ^{KD45} slične, mi ćemo prvo konstruisati formulu φ^{S5}, a zatim ukazati potrebne modifikacije ove formule za konstrukciju formule φ^{KD45}.

Osnovna ideja u prethodnim dokazima, za klasu modela $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}4$ i $\mathcal{S}4$, je bila konstrukcija binarnog drveta s 2^{2n} listova (koju je moguće ostvariti i u čisto modalnim logikama). Koristeći ovih 2^{2n} listova mi možemo konstruisati 2^{2n} različitih vrednosti pojmova koji kodiraju polja torusa. Međutim, kada je u pitanju čisto modalna logika $S5$, ne možemo konstruisati 2^{2n} različitih svetova, jer je problem zadovoljivosti u $S5$ NP-kompletan (tj. ako formula ξ ima model tada ona ima model sa najviše $|\xi|$ svetova). Imajući ovo u vidu, mi ćemo u ovom dokazu prvo konstruisati 2^{2n} različitih vrednosti pojmova, a zatim koristeći njih mi ćemo konstruisati 2^{2n} različitih svetova. Napomenimo, da iako je konstrukcija 2^{2n} različitih vrednosti pojmova dovoljna za kodiranje polja torusa, ona nije dovoljna za "pristup" susednim poljima tj. ne može obezbediti da se boje susednih tipova ploča poklapaju. Iz tih razloga nam je potrebna konstrukcija 2^{2n} različitih svetova.

Da bi smo kodirali torus $2^n \times 2^n$, mi definišemo 2^{2n} pojmova B_{ij}, $0 \leq i, j < 2^n$, korišćenjem $2n$ imena pojmova $C_0, \ldots, C_{2n-1}$ i jednog imena svojstva R. Neka ψ_1 bude konjunkcija sledećih formula:

$$\exists R.\top = \top, \quad \neg((\neg C_0 \wedge \cdots \wedge \neg C_{2n-1}) = \bot),$$

$$\bigwedge_{i=0}^{2n-1} \left((\bigwedge_{j=0}^{i-1} C_j) \to (C_i \to \forall R.\neg C_i) \wedge (\neg C_i \to \forall R.C_i) = \top \right),$$

$$\bigwedge_{i=0}^{2n-1} \left((\bigvee_{j=0}^{i-1} \neg C_j) \to (C_i \to \forall R.C_i) \wedge (\neg C_i \to \forall R.\neg C_i) = \top \right).$$

Za svaki par brojeva $i, j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, koji se u binarnom brojnom sistemu zapisuju kao $(d_{2n-1}, \ldots, d_n)$ i $(d_{n-1}, \ldots, d_0)$, respektivno, mi ćemo smatrati da je $B_{ij} = C_0^{d_0} \wedge \cdots \wedge C_{2n-1}^{d_{2n-1}}$, gde sa C^d označavamo C ako je

$d = 1$, a $\neg C$ ako je $d = 0$. Ako je formula ψ_1 zadovoljiva u nekom $\mathcal{ALC}$-modelu tada su skupovi B_{ij} u ovom modelu neprazni, međusobno disjunktni i pokrivaju domen modela.

Za svaki tip ploče $t_i \in \mathcal{T}$ uvedimo po jedno ime pojma T_i. Ova imena pojmova se uvode sa ciljem da imaju sledeće značenje: mi ćemo reći da tip ploče t_k pokriva polje (i, j) torusa ako i samo ako $B_{ij} \subseteq T_k$. Sada je problem da se obezbedi da je svako polje torusa pokriveno tačno sa jednim tipom ploče i da se boje od susednih tipova ploča poklapaju *bez korišćenja isuviše mnogo formula*. Da bi smo ovo ostvarili nama je potrebno $2n$ novih imena pojmova $Q_0, \ldots, Q_{2n-1}$; ona će kodirati 2^{2n} svetova w_{ij}, $0 \leq i, j < 2^n$. Formula

$$\psi_2 = \bigwedge_{i=0}^{2n-1} (\Diamond C_i = \Box C_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{s} (\Diamond T_i = \Box T_i)$$

označava da svako ime pojma C_i (T_j) sadrži iste objekte u svakom svetu.

Neka su B, B^r, B^u još tri imena pojmova. B se poklapa sa B_{ij} u svetu w_{ij} koji je određen uslovom $w_{ij} \models Q_0^{d_0} \wedge \cdots \wedge Q_{2n-1}^{d_{2n-1}} = \top$, gde su $(d_{2n-1}, \ldots, d_n)$ i $(d_{n-1}, \ldots, d_0)$ binarni zapisi brojeva i i j, respektivno. Ovo obezbeđujemo pomoću formule ψ_3:

$$(\Diamond B = \top) \wedge \Box \left(\bigwedge_{i=0}^{2n-1} ((Q_i = \top) \vee (Q_i = \bot)) \wedge \left(B = \bigwedge_{i=0}^{2n-1} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i))\right)\right).$$

A konjunkcija ψ_4 formula

$$\bigvee_{i=1}^{s} T_i = \top, \quad \bigwedge_{i \neq j} (T_i \wedge T_j = \bot), \quad \Box \bigwedge_{i=1}^{s} \Big((B \wedge T_i = \bot) \vee (B \wedge T_i = B) \Big)$$

kaže da je svako polje torusa pokriveno tačno sa jednim tipom ploče.

Mi želimo da važi: ako je $B = B_{ij}$ u nekom svetu, tada je $B^r = B_{i,j\oplus 1}$, $B^u = B_{i\oplus 1,j}$ u tom svetu. Ovo omogućavamo pomoću formula:

$$\psi_5 = \Box \bigwedge_{k=0}^{n-1} \Bigg(\Big((\neg Q_k \wedge \bigwedge_{j=0}^{k-1} Q_j) = \top \Big) \to$$
$$\Big(B^r = \bigwedge_{i=0}^{k-1} \neg C_i \wedge C_k \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{2n-1} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)) \Big) \Bigg),$$

$$\psi_6 = \Box\Big(\big((\bigwedge_{j=0}^{n-1} Q_j) = \top\big) \rightarrow$$

$$\big(B^r = \bigwedge_{i<n} \neg C_i \wedge \bigwedge_{i=n}^{2n-1} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i))\big)\Big),$$

$$\psi_7 = \Box \bigwedge_{k=n}^{2n-1} \Big(\big((\neg Q_k \wedge \bigwedge_{j=n}^{k-1} Q_j) = \top\big) \rightarrow$$

$$\big(B^u = \bigwedge_{i=n}^{k-1} \neg C_i \wedge C_k \wedge \bigwedge_{i \notin \{n,\dots,k\}} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i))\big)\Big).$$

$$\psi_8 = \Box\Big(\big((\bigwedge_{j=n}^{2n-1} Q_j) = \top\big) \rightarrow$$

$$\big(B^u = \bigwedge_{i=n}^{2n-1} \neg C_i \wedge \bigwedge_{i<n} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i))\big)\Big),$$

Sada smo u mogućnosti da napišemo formule koje kažu da se boje od susednih tipova ploča poklapaju:

$$\psi_9 = \Box \bigwedge_{j=1}^{s} \Big((B \subseteq T_j) \rightarrow (B^r \subseteq \bigvee_{\text{right}(j)=\text{left}(l)} T_l)\Big),$$

$$\psi_{10} = \Box \bigwedge_{j=1}^{s} \Big((B \subseteq T_j) \rightarrow (B^u \subseteq \bigvee_{\text{up}(j)=\text{down}(l)} T_l)\Big).$$

Iz prethodno izloženog lako se vidi da je $\varphi^{S5} = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_{10}$ tražena formula.

Iz istih razloga lako je proveriti da je u slučaju modela iz klase $\mathcal{KD}45$, formula $\varphi^{KD45} = \Diamond \varphi^{S5}$ ona koju želimo. $\Box$

Primedba 73. Sada uz male modifikacije dokaza Leme 72 možemo izvesti dokaz da je problem zadovoljivosti za $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-formule u klasi $\mathcal{N}$ NEXPTIME-težak. Ove modifikacije su jednostavne i prepuštamo ih čitaocu, a ovde ćemo dokazati lemu 74 koja daje tačnu donju ocenu.

6.3 Zadovoljivost u $\mathcal{N}$

Lema 74. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-formule u klasi modela $\mathcal{N}$ je* EXPSPACE*-težak.*

Dokaz Sada ćemo iskoristiti n-KORIDOR problema popločavanja, kada je n zadato u binarnom brojnom sistemu, za koji na osnovu Teoreme 3, znamo da je EXPSPACE-kompletan. Naime, izvršićemo redukciju ovog problema na problem zadovoljivosti u klasi $\mathcal{N}$, i tako dobiti željenu donju ocenu. Tačnije, za skup $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_s\}$ tipova ploča i $n < \omega$, mi ćemo konstruisati $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-formulu φ^N dužine $O(n^2 + s^2)$ tako da φ^N je zadovoljiva u nekom $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-modelu iz $\mathcal{N}$ ako i samo ako postoji $m < \omega$ takav da $\mathcal{T}$ popločava pravougaonik $2^n \times m$ sa belim ivicama.

Za formulu ψ, neka je $\Box^+\psi = \psi \land \Box\psi$, $\Diamond^+\psi = \psi \lor \Diamond\psi$; a za pojam C, neka je $\Box^+C = C \land \Box C$, $\Diamond^+C = C \lor \Diamond C$.

Da bi smo kodirali 2^n kolona, mi definišemo 2^n pojmova B_j, $0 \le j < 2^n$, pomoću n imena pojmova $C_0, \dots, C_{n-1}$ i jednog imena svojstva R. Neka ψ_1 bude konjunkcija sledećih formula:

$$\exists R.\top = \top, \quad \neg((\neg C_0 \land \dots \land \neg C_{n-1}) = \bot),$$

$$\bigwedge_{i=0}^{n-1}\Big((\bigwedge_{j=0}^{i-1} C_j) \to (C_i \to \forall R.\neg C_i) \land (\neg C_i \to \forall R.C_i) = \top\Big),$$

$$\bigwedge_{i=0}^{n-1}\Big((\bigvee_{j=0}^{i-1} \neg C_j) \to (C_i \to \forall R.C_i) \land (\neg C_i \to \forall R.\neg C_i) = \top\Big).$$

Za svaki broj $j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, koji se u binarnom brojnom sistemu zapisuje kao $(d_{n-1}, \dots, d_0)$, mi ćemo smatrati da je $B_j = C_0^{d_0} \land \dots \land C_{n-1}^{d_{n-1}}$, gde sa C^d označavamo C ako je $d = 1$, a $\neg C$ ako je $d = 0$. Ako je formula ψ_1 zadovoljiva u nekom $\mathcal{ALC}$-modelu tada su skupovi B_j u ovom modelu neprazni, međusobno disjunktni i pokrivaju domen modela.

Neka $B, Q_0, \dots, Q_{n-1}$ bude $(n+1)$ novo ime pojma. Ovi pojmovi će kodirati 2^n *klasa svetova* $[j]$, $0 \le j < 2^n$. Preciznije, na osnovu vrednosti ovih pojmova možemo svrstati sve svetove modela u 2^n međusobno različitih klasa, tako da u svetovima iz iste klase ovi pojmovi imaju istu vrednost. Pojam B će se poklapati sa B_j u svetu $w \in [j] = \{w' : w' \models Q_0^{d_0} \land \dots \land Q_{n-1}^{d_{n-1}} = \top\}$, gde je $(d_{n-1}, \dots, d_0)$ binarni zapis broja j. Ovo obezbeđujemo pomoću formule

ψ_2 koja je konjunkcija sledećih formula:

$$\bigwedge_{i=0}^{n-1}(\Diamond^+ C_i = \Box^+ C_i),\ (Z = \top),\ \Box^+(\Diamond^+ B = \top),\ \Box^+\bigwedge_{i=0}^{n-1}\Big((Q_i = \top) \vee (Q_i = \bot)\Big),$$

$$\Box^+(Z = \neg Q_0 \wedge \cdots \wedge \neg Q_{n-1}),\ \Box^+\Big(B = \bigwedge_{i=0}^{n-1}((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i))\Big).$$

Uočimo da je za $j \in \{0, ..., 2^n - 1\}$, u svakom modelu iz klase $\mathcal{N}$ koji zadovoljava formulu $\psi_1 \wedge \psi_2$, klasa $[j]$ beskonačna.

Neka je $w_0^0 < w_0^1 < w_0^2 < \cdots$ poredak u klasi $[0]$. Svet $w \in [j], 0 < j < 2^n$, takav da je $w_0^i < w < w_0^{i+1}$ označimo sa w_j^i. Tako na primer možemo imati:

$$\mathbf{w_0^0} < w_3^0 < w_3^0 < w_1^0 < w_2^0 < w_1^0 < \mathbf{w_0^1} < w_2^1 < w_3^1 < \mathbf{w_0^2} < \mathbf{w_0^3} < \cdots$$

U model koji zadovoljava formulu $\psi_1 \wedge \psi_2$ za svaki svet $w \in W$ (gde je W skup svih svetova modela) postoji jedinstveni par (i, j), $i \in \{0, 1, 2, ...\}$, $j \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ koji ga označava na način kako je to opisano ranije. Po definiciji stavimo $J_i = \{j \ :\ w_j^i \in W\}$ i $\hat{J}_i = \{u \in W \ :\ u = w_j^i,$ za neko $j \in J_i\}$. Lako je uočiti da je $\{0\} \subseteq J_i \subseteq \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ i $\hat{J}_i \neq \emptyset$.

Pomoću pojmova B_j smo kodirali 2^n kolona. Da bi smo kodirali m vrsta odnosno pravougaonik $2^n \times m$, mi ćemo konstruisati međusobno disjunktne vrednosti pojmova koje ćemo označavati sa F_i odnosno $A_{ij} = F_i \bigcap B_j$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \leq j < 2^n$, koristeći pri tome nova imena pojmova D, F, F^u, A i A^u. Preciznije, vrednost pojma F u svetu w_j^i označavaćemo sa F_i, tj. $F_i = F^{I,w_j^i}$; a vrednost pojma A u tom svetu označavaćemo sa A_{ij}. Vrednosti $D^{I,u}$ (tj. pojam D) su samo pomoćne za konstrukciju vrednosti F_i koje ne zavise od j. Imena pojmova F^u i A^u uvodimo sa ciljem da njihove vrednosti u svetu označenom sa w_j^i budu jednake F_{i+1} i $A_{i+1,j}$ respektivno. Ovo ostvarujemo pomoću formule ψ_3 koja je ustvari konjunkcija sledećih formula

$$\Box^+\Big(\neg(D = \bot) \wedge (D \wedge \Diamond D = \bot)\Big) \tag{4}$$

$$\Box^+\Big(F = \Diamond(Z \wedge \Diamond^+ D) \wedge \neg\Diamond(Z \wedge \Diamond(Z \wedge \Diamond^+ D))\Big) \tag{5}$$

$$\Box^+\Big(F^u = \Diamond(Z \wedge \Diamond^+ F) \wedge \neg\Diamond(Z \wedge \Diamond(Z \wedge \Diamond^+ F))\Big) \tag{6}$$

$$\Box^+\Big((A = B \wedge F) \wedge (A^u = B \wedge F^u) \wedge \neg(A = \bot)\Big) \tag{7}$$

$$\Box^+(Z \wedge F^u \subseteq \Diamond^+ A^u). \tag{8}$$

Svaki model iz klase $\mathcal{N}$ koji zadovoljava formulu 4 ima beskonačan domen, jer svetova ima beskonačno a vrednosti pojma D u različitim svetovima su različite. Naime, za svaka dva sveta u i v $(u \neq v)$ imamo da je $D^{I,u} \neq \emptyset$, $D^{I,v} \neq \emptyset$ i $D^{I,u} \cap D^{I,v} = \emptyset$.

Formula 5 u modelima iz klase $\mathcal{N}$ koji zadovoljavaju konjunkciju formula ψ_1, ψ_2, 4 i 5 nam obezbeđuje beskonačno mnogo međusobno disjunktnih vrednosti koje uzima pojam F, a koje u svetu označenom sa w_j^i zavise samo od i. Kako je rečeno ranije ovu vrednost označavamo sa F_i. Ovo sledi iz očiglednih jednakosti

$$(\diamond(Z \wedge \diamond^+ D))^{I,w_j^i} = \bigcup_{k=i+1}^{\infty} \bigcup_{u \in \hat{J}_k} D^{I,u} \quad \text{i} \quad F^{I,w_j^i} = \bigcup_{u \in \hat{J}_{i+1}} D^{I,u}.$$

Slično, formule 6 i 7 obezbeđuju da pojmovi F^u, A i A^u uzimaju željene vrednosti, kako je prethodno opisano.

Videli smo da za model iz klase $\mathcal{N}$ koji zadovoljava formulu $\psi_1 \wedge \psi_2$ važi $\{0\} \subseteq J_i \subseteq \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$, pri tome može biti $J_i \neq \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$. Mi tvrdimo da u svakom modelu iz klase $\mathcal{N}$ koji zadovoljava formulu $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$ važi $J_i = \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$. Zaista, ako pretpostavimo da $j_0 \notin J_i$ za neko $j_0 \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$, tada imamo da je

$$w_0^i \models (Z \wedge F^u \subseteq \diamond^+ A^u) \Rightarrow (Z \wedge F^u)^{I,w_0^i} \subseteq (\diamond^+ A^u)^{I,w_0^i} \Rightarrow$$
$$F_i^u \subseteq \bigcup_{k=i, j \in J_k}^{\infty} (F_k^u \cap B_j) \Rightarrow F_i^u = F_i^u \cap (\bigcup_{j \in J_i} B_j) \Rightarrow$$
$$A_{i+1,j_0} = F_i^u \cap B_{j_0} = \emptyset \Rightarrow j_0 \notin J_{i+1}.$$

Pa iz istih razloga $j_0 \notin J_l$ za svako $l \geq i$, što je u suprotnosti s činjenicom da je $[j_0]$ beskonačan skup.

Neka je ψ_4 konjunkcija sledećih formula

$$\Box^+((P = \top) \vee (P = \bot)) \wedge \diamond(Z \wedge P = \top) \wedge \Box^+((P = \top) \rightarrow \Box(P = \bot)),$$
$$\Box^+(S = \diamond P) \wedge (\diamond(Z \wedge \diamond P) = \bot),$$
$$\Box^+((K = \top) \vee (K = \bot)) \wedge \diamond(Z \wedge K = \top) \wedge \Box^+((K = \top) \rightarrow \Box(K = \bot)),$$
$$\Box^+\Big(E = \diamond(Z \wedge K) \wedge \neg\diamond(Z \wedge \diamond(Z \wedge K))\Big),$$
$$\Box^+(W = \diamond K).$$

Imena pojmova S, E, W služe za određivanje početne (*Start*), poslednje (End) i radnih (Work) vrsta, dok su pojmovi P, K pomoćni.

Zbog $\Box^+((P = \top) \vee (P = \bot)) \wedge \Box^+((P = \top) \to \Box(P = \bot))$, imamo da je $P = \top$ u najviše jednom svetu. Dalje zbog $\Diamond(Z \wedge P = \top)$ dobijamo da je $P = \top$ u tačno jednom *svetu i taj svet je* iz klase $[0]$. Neka je to svet označen sa w_0^i. Očigledno $i \neq 0$, a kako je $(\Diamond(Z \wedge \Diamond P) = \bot)$, dobijamo da je $i < 2$, pa je $i = 1$. Dakle, $P = \top$ u svetu označenom sa w_0^1, a u svetu $u \neq w_0^1$ imamo da je $P = \bot$. Imajući ovo u vidu i $\Box^+(S = \Diamond P)$, zaključujemo da važi $S = \top$ *u svetovima* w_j^0, $j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ (tj. svetovima ispred w_0^1) i $S = \bot$ u ostalim svetovima tj. w_j^i, $i > 0$, $j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$. Tako nam vrednost pojma S omogućava da razlikujemo svetove polazne vrste (to su svetovi označeni sa w_j^0, $j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$) *od ostalih svetova*.

Provodeći sličnu analizu možemo zaključiti da vrednost pojma E nam omogućava da razlikujemo svetove poslednje vrste (to su svetovi označeni sa w_j^{m-1}, $j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ za neko fiksirano $m > 1$), u kojima je $E = \top$, od ostalih svetova, *u kojima je* $E = \bot$.

Kako svaki model iz klase $\mathcal{N}$ ima beskonačno mnogo svetova, a nama treba samo konačno mnogo svetova za kodiranje pravougaonika $2^n \times m$, potrebno je da stvorimo mogućnost *za razlikovanje svetova sa* kojim radimo od ostalih svetova. To nam omogućava pojam W. Naime, ako je $E = \top$ u svetovima w_j^{m-1}, onda je $W = \top$ u svetovima označenim sa sa w_j^i, $i < m$, $j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ (to su *radni* svetovi, tj. svetovi koji nas interesuju), dok je u *ostalim svetovima* $W = \bot$.

Za svaki tip ploče $t_i \in \mathcal{T}$ uvedimo po jedno ime pojma T_i. Ova imena pojmova se uvode sa ciljem da imaju sledeće značenje: mi ćemo reći da tip ploče t_k pokriva polje (i, j) pravougaonika *ako i samo ako* $A_{ij} \subseteq T_k$. Sada je ostalo još da se obezbedi da je svako polje rešetke pokriveno tačno sa jednim tipom ploče i da se boje od susednih tipova ploča poklapaju.

Konjunkcija ψ_5 formula

$$\bigwedge_{i=1}^{s}(\Diamond^+ T_i = \Box^+ T_i), \quad \bigvee_{i=1}^{s} T_i = \top,$$

$$\bigwedge_{i \neq j}(T_i \wedge T_j = \bot), \quad \Box^+ \bigwedge_{i=1}^{s}\Big((A \wedge T_i = \bot) \vee (A \wedge T_i = A)\Big)$$

kaže da je svako polje od pravougaonika pokriveno tačno sa jednim tipom ploče.

Uvedimo još jedno ime pojma A^r, tako da važi $(A^r)^{I,w_j^i} = A_{i,j+1}$. Ovo postižemo pomoću formule

$$\psi_6 = \Box^+ \bigwedge_{k=0}^{n-1}\Big(\Big((\neg Q_k \wedge \bigwedge_{j=0}^{k-1} Q_j) = \top\Big) \rightarrow$$
$$\Big(A^r = F \wedge \bigwedge_{i=0}^{k-1} \neg C_i \wedge C_k \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{n-1} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i))\Big)\Big),$$

Na kraju napišimo formule koje kažu da se boje od susednih tipova ploča poklapaju i da je boja ivica tipova ploča koje formiraju ivice pravougaonika bela:

$$\psi_7 = \Box^+\Big(Z \wedge A \subseteq \bigvee_{\mathrm{left}(l)=white} T_l\Big) \wedge \Box^+\Big((\bigwedge_{i=0}^{n-1} Q_i) \wedge A \subseteq \bigvee_{\mathrm{right}(l)=white} T_l\Big),$$

$$\psi_8 = \Box^+\Big(S \wedge A \subseteq \bigvee_{\mathrm{down}(l)=white} T_l\Big) \wedge \Box^+\Big(E \wedge A \subseteq \bigvee_{\mathrm{up}(l)=white} T_l\Big),$$

$$\psi_9 = \Box^+\Big(\neg(\bigwedge_{i=0}^{n-1} Q_i = \top) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{s}\Big((W \wedge A \subseteq T_j) \rightarrow (W \wedge A^r \subseteq \bigvee_{\mathrm{right}(j)=\mathrm{left}(l)} T_l)\Big)\Big),$$

$$\psi_{10} = \Box^+ \bigwedge_{j=1}^{s}\Big((\neg E \wedge W \wedge A \subseteq T_j) \rightarrow (\neg E \wedge W \wedge A^u \subseteq \bigvee_{\mathrm{up}(j)=\mathrm{down}(l)} T_l)\Big).$$

Iz prethodno izloženog lako se vidi da je $\varphi^N = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_{10}$ tražena formula. □

6.4 Zadovoljivost u slučaju modela koji se širi

Lema 75. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-formule u svakoj od klasa $\mathcal{K}^e$, $\mathcal{N}^e$, $\mathcal{GL}^e$, $\mathcal{S}4^e$ i $\mathcal{K}4^e$ je* NEXPTIME*-težak.*

Dokaz Mi ćemo ovde izvesti samo donju ocenu za problem zadovoljivosti u klasi $\mathcal{K}^e$ sa redukcijom na njega $n \times n$ problema popločavanja, kada je n zadato u binarnom brojnom sistemu, za koji znamo da je NEXPTIME-kompletan. Na isti način može se dobiti donja ocena za druge navedene klase. Naime, potrebno je izvršiti odgovarajuće modifikacije ovog dokaza, slične modifikacijama koje smo vršili u prethodnim lemama. Kako suštinski nema novih ideja, mi ove dokaze prepuštamo čitaocu.

Preciznije, ovde ćemo, za skup $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_s\}$ tipova ploča i $n < \omega$, konstruisati $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-formulu φ dužine $O(n^2 + s^2)$ tako da je φ zadovoljiva u nekom $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-modelu iz klase $\mathcal{K}^c$, ako i samo ako $\mathcal{T}$ popločava torus dimenzije $2^n \times 2^n$.

Intuitivno kao u slučaju modela s konstantnim domenom i ovaj dokaz zasnivamo na konstrukciji binarnog drveta s 2^{2n} listova. Međutim, sada konstrukcija novog objekta u listu nam ne obezbeđuje da se taj objekat javlja u korenu drveta. Zato, osnovna ideja ovog dokaza je da se prvo u korenu konstruiše 2^{2n} međusobno disjunktnih pojmova, a zatim objekti iz ovih pojmova *prenesu* u listove. Za razliku od dokaza Leme 70 koji ne koristi imena svojstava, za konstrukciju ovakvih pojmova potrebno nam je jedno ime svojstva. Eventualna pojava novih objekata pri *prelazu* od korena do lista nam neće smetati, jer ako jedan pojam *pokriva* drugi pojam u listu on će ga *pokrivati* i u korenu.

Počnimo sada sa samom konstrukcijom formule φ.

Da bi smo kodirali torus $2^n \times 2^n$, mi definišemo 2^{2n} pojmova B_{ij}, $0 \leq i, j < 2^n$, korišćenjem $2n$ imena pojmova $C_0, \ldots, C_{2n-1}$ i jednog imena svojstva R. Neka ψ_0 bude konjunkcija sledećih formula:

$$\exists R.\top = \top, \quad \neg((\neg C_0 \wedge \cdots \wedge \neg C_{2n-1}) = \bot),$$

$$\bigwedge_{i=0}^{2n-1} \Big((\bigwedge_{j=0}^{i-1} C_j) \to (C_i \to \forall R.\neg C_i) \wedge (\neg C_i \to \forall R.C_i) = \top \Big),$$

$$\bigwedge_{i=0}^{2n-1} \Big((\bigvee_{j=0}^{i-1} \neg C_j) \to (C_i \to \forall R.C_i) \wedge (\neg C_i \to \forall R.\neg C_i) = \top \Big).$$

Za svaki par brojeva $i, j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, koji se u binarnom brojnom sistemu zapisuju kao $(d_{2n-1}, \ldots, d_n)$ i $(d_{n-1}, \ldots, d_0)$, respektivno, mi ćemo smatrati da je $B_{ij} = C_0^{d_0} \wedge \cdots \wedge C_{2n-1}^{d_{2n-1}}$, gde sa C^d označavamo C ako je $d = 1$, a $\neg C$ ako je $d = 0$. Ako je formula ψ_0 zadovoljiva u svetu w nekog $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$-modelu tada su skupovi B_{ij} u ovom modelu neprazni, međusobno disjunktni i pokrivaju domen $\Delta^{I,w}$ sveta w ovog modela.

Za svaki tip ploče $t_i \in \mathcal{T}$ uvedimo po jedno ime pojma T_i. Ova imena pojmova se uvode sa ciljem da imaju sledeće značenje: mi ćemo reći da tip ploče t_k pokriva polje (i, j) torusa ako i samo ako $B_{ij} \subseteq T_k$. Sada je problem da se obezbedi da je svako polje torusa pokriveno tačno sa jednim tipom ploče i da se boje od susednih tipova ploča poklapaju *bez korišćenja isuviše mnogo formula.* Da bi smo ovo ostvarili nama je potrebno $2n$ novih imena pojmova $Q_0, \ldots, Q_{2n-1}$; ona će kodirati 2^{2n} svetova w_{ij}, $0 \le i, j < 2^n$.

Tačnije, mi ćemo opisati binarno drvo dubine $2n$, korišćenjem $2n$ imena pojmova $Q_0, \ldots, Q_{2n-1}$. Ovo će nam obezbediti 2^{2n} listova koji će kodirati 2^{2n} svetova w_{ij}, $0 \le i, j < 2^n$. Neka ψ_1 bude konjunkcija sledećih formula:

$$\bigwedge_{i=0}^{2n-1} \Box^i \Big(\Diamond(Q_i = \top) \wedge \Diamond(Q_i = \bot) \wedge \Box(Q_i = \top \vee Q_i = \bot) \Big)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{2n-1} \Box^i \bigwedge_{j=0}^{i-1} \Big(\big((Q_j = \top) \to \Box(Q_j = \top) \big) \wedge \big((Q_j = \bot) \to \Box(Q_j = \bot) \big) \Big).$$

Ma koji model koji zadovoljava ψ_1 u svetu w će sadržati binarno drvo dubine $2n$ koje počinje iz w.

Neka su B, B^r, B^u još tri imena pojmova. B se poklapa sa B_{ij} u svetu w_{ij} koji je određen uslovom $w_{ij} \models Q_0^{d_0} \wedge \cdots \wedge Q_{2n-1}^{d_{2n-1}} = \top$, gde su $(d_{2n-1}, \ldots, d_n)$ i $(d_{n-1}, \ldots, d_0)$ binarni zapisi brojeva i i j, respektivno. Ovo obezbeđujemo pomoću formule ψ_2:

$$\Box^{2n} \Big(B = \bigwedge_{i=0}^{2n-1} \big((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i) \big) \Big).$$

Formula

$$\psi_3 = \bigwedge_{i=0}^{2n-1} \Big((C_i = \Box^{2n} C_i) \wedge (\Diamond^{2n} C_i = \Box^{2n} C_i) \Big) \wedge \bigwedge_{i=1}^{s} \Big((T_i = \Box^{2n} T_i) \wedge (\Diamond^{2n} T_i = \Box^{2n} T_i) \Big)$$

označava da svako ime pojma C_i (T_j) sadrži iste objekte domena $\Delta^{I,w}$ (w je koren drveta) u svakom svetu (listu) w_{ij} (tj. $C_k^{I,w} \subseteq C_k^{I,w_{ij}}$). A konjunkcija ψ_4 formula

$$\Box^{2n}(\bigvee_{i=1}^{s} T_i = \top), \quad \Box^{2n} \bigwedge_{i \neq j} (T_i \wedge T_j = \bot), \quad \Box^{2n} \bigwedge_{i=1}^{s} \Big((B \wedge T_i = \bot) \vee (B \wedge T_i = B) \Big)$$

kaže da je svako polje torusa pokriveno tačno sa jednim tipom ploče.

Ako je $B = B_{ij}$ u nekom svetu tada je $B^r = B_{i,j\oplus 1}$, $B^u = B_{i\oplus 1,j}$ u tom svetu; ovo postižemo pomoću formula

$$\psi_5 = \Box^{2n} \bigwedge_{k=0}^{n-1} \Big(\big((\neg Q_k \wedge \bigwedge_{j=0}^{k-1} Q_j) = \top \big) \rightarrow$$

$$\big(B^r = \bigwedge_{i=0}^{k-1} \neg C_i \wedge C_k \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{2n-1} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)) \big) \Big),$$

$$\psi_6 = \Box^{2n} \Big(\big((\bigwedge_{j=0}^{n-1} Q_j) = \top \big) \rightarrow$$

$$\big(B^r = \bigwedge_{i<n} \neg C_i \wedge \bigwedge_{i=n}^{2n-1} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)) \big) \Big),$$

$$\psi_7 = \Box^{2n} \bigwedge_{k=n}^{2n-1} \Big(\big((\neg Q_k \wedge \bigwedge_{j=n}^{k-1} Q_j) = \top \big) \rightarrow$$

$$\big(B^u = \bigwedge_{i=n}^{k-1} \neg C_i \wedge C_k \wedge \bigwedge_{i \notin \{n,\ldots,k\}} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)) \big) \Big).$$

$$\psi_8 = \Box^{2n} \Big(\big((\bigwedge_{j=n}^{2n-1} Q_j) = \top \big) \rightarrow$$

$$\big(B^u = \bigwedge_{i=n}^{2n-1} \neg C_i \wedge \bigwedge_{i<n} ((C_i \wedge Q_i) \vee (\neg C_i \wedge \neg Q_i)) \big) \Big),$$

Na kraju napišimo formule koje kažu da se boje od susednih tipova ploča poklapaju:

$$\psi_9 = \Box^{2n} \bigwedge_{j=1}^{s} \Big((B \subseteq T_j) \rightarrow (B^r \subseteq \bigvee_{\mathrm{right}(j)=\mathrm{left}(l)} T_l) \Big),$$

$$\psi_{10} = \Box^{2n} \bigwedge_{j=1}^{s} \Big((B \subseteq T_j) \rightarrow (B^u \subseteq \bigvee_{\mathrm{up}(j)=\mathrm{down}(l)} T_l) \Big).$$

Iz prethodno izloženog lako se vidi da je $\varphi = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_{10}$ tražena formula. $\square$

7 Modalne opisne logike — gornje ocene

7.1 Leme o kvazisvetu

Napomenimo da Lema 60 obezbeđuje D(ouble)EXPTIME algoritam (u odnosu na dužinu φ) za efektivno prepoznavanje da li dati kandidat za kvazisvet za φ je kvazisvet za φ, gde je φ $C_1\mathcal{IQ}_\mathcal{M}$ formula. Ali mi možemo napraviti bolji algoritam.

Preslikavanje δ iz odeljka 1.1.2 možemo proširiti na jedan-jedan preslikavanje δ_1 iz $\mathcal{CIQ}_\mathcal{M}$ pojmova (skupova $\mathcal{CIQ}_\mathcal{M}$ pojmova) u $\mathcal{DIQ}$ formule (skupove $\mathcal{DIQ}$ formula, respektivno).

Naime,

$$\delta_1(\Diamond C) = A_{\Diamond C} \quad \delta_1(\geq n\ a.C) = \geq n\ a.\delta_1(C),$$

gde je $A_{\Diamond C}$ novi iskazni simbol; a ako je L skup $\mathcal{CIQ}_\mathcal{M}$ pojmova tada je

$$\delta_1(L) = \{\delta_1(C)\ :\ C \in L\}.$$

Očigledno, ako je C $C_1\mathcal{IQ}_\mathcal{M}$ pojam tada je $\delta_1(C)$ $\mathcal{D}_1\mathcal{IQ}$ formula.

Lema 76. *Neka je trojka $\langle T, T^o, \Phi\rangle$ kandidat za kvazisvet za φ i neka je dalje $\Gamma = \delta_1(con\varphi)$, $OB = ob\varphi$, $FP = \{(\alpha P\beta)\ :\ (\alpha P\beta) \in sub\varphi\}$. Tada,*
a) Γ je konačan zatvoren skup $\mathcal{DIQ}$ formula,
b) ako je t tip pojma za φ tada je $\delta_1(t)$ f-tip za $\Upsilon = (\Gamma, OB, FP)$,
c) trojka $\langle T^f, T^o_s, T^p\rangle$ je kandidat za s-kvazisvet za $\Upsilon = (\Gamma, OB, FP)$, gde je $T^f = \{\delta_1(t)\ :\ t \in T\}$, $T^o_s = \{\langle \alpha, \delta_1(t)\rangle\ :\ \langle \alpha, t\rangle \in T^o\}$ i $T^p = \{(\alpha P\beta)\ :\ (\alpha P\beta) \in \Phi\}$,
d) trojka $\langle T, T^o, \Phi\rangle$ je kvazisvet za φ ako i samo ako je trojka $\langle T^f, T^o_s, T^p\rangle$ s-kvazisvet za $\Upsilon = (\Gamma, OB, FP)$.

Dokaz a) $con\varphi$ je konačan pa je i Γ konačan. Kako je $con\varphi$ zatvoren to je i Γ zatvoren. Na primer, za $C \in con\varphi$ imamo:

- Ako je $C = \exists R_1 \circ R_2.C_1$ tada je $\exists R_1.\exists R_2.C_1 \in con\varphi$. Prema tome $\delta_1(C) = \delta_1(\exists R_1 \circ R_2.C_1) =< \delta_1(R_1); \delta_1(R_2) > \delta_1(C_1) \in \Gamma$ i $\delta_1(\exists R_1.\exists R_2.C_1) =< \delta_1(R_1) >< \delta_1(R_2) > \delta_1(C_1) \in \Gamma$.
- Ako je $C = C_1 \wedge C_2$ tada je $C_1, C_2 \in con\varphi$. Prema tome $\delta_1(C) = \delta_1(C_1 \wedge C_2) = \delta_1(C_1) \wedge \delta_1(C_2) \in \Gamma$ i $\delta_1(C_1), \delta_1(C_2) \in \Gamma$.

b) Iz $t \subset con\varphi$ sledi $\delta_1(t) \subset \delta_1(con\varphi) = \Gamma$. Dok,

- iz $C \wedge D \in t$ akko $C, D \in t$, za svako $C \wedge D \in con\varphi$ sledi $\delta_1(C) \wedge \delta_1(D) \in \delta_1(t)$ akko $\delta_1(C), \delta_1(D) \in \delta_1(t)$, za svako $\delta_1(C) \wedge \delta_1(D) \in \Gamma$;
- iz $\neg C \in t$ akko $C \notin t$, za svako $C \in con\varphi$ sledi $\neg\delta_1(C) \in \delta_1(t)$ akko $\delta_1(C) \notin \delta_1(t)$, za svako $\delta_1(C) \in \Gamma$.

Prema tome $\delta_1(t)$ je f-tip za $\Upsilon = (\Gamma, OB, FP)$.
c) Iz $t \in T$ za svako $\langle \alpha, t \rangle \in T^o$ sledi $\delta_1(t) \in T^f$ za svako $\langle \alpha, \delta_1(t) \rangle \in T^o_s$. Prema tome trojka $\langle T^f, T^o_s, T^p \rangle$ je kandidat za s-kvazisvet za $\Upsilon = (\Gamma, OB, FP)$.
d) $\Leftarrow$ Pretpostavimo da je $\langle T^f, T^o_s, T^p \rangle$ s-kvazisvet za Υ i neka je $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ model koji ga realizuje. Tada postoji funkcija $h : OB \to S$ takva da važe sledeći uslovi: $T^f = T(M, \Gamma)$; $\langle \alpha_i, t^M(h(\alpha_i)) \rangle \in T^o_s$ za svako $\alpha_i \in OB$; $(h(\alpha_i), h(\alpha_j)) \in R_P$ akko $(\alpha_i P \alpha_j) \in T^p$, za svako $(\alpha_i P \alpha_j) \in FP$.

Definišimo prošireni $\mathcal{CIQ}$-model za φ

$$I = \langle \Delta, P_0^I, \ldots, C_0^I, \ldots, (\Diamond C)^I, \ldots, \alpha_0^I, \ldots \rangle$$

na sledeći način:

$$\Delta = S, \quad P_i^I = R_{P_i}, \quad \alpha_i^I = h(\alpha_i), \quad C^I = \{s \in S \ : \ M, s \models \delta_1(C)\},$$

gde je C ime pojma ili pojam oblika $\Diamond C_1$.

Indukcijom po konstrukciji pojma, lako je proveriti da za svako $C \in con\varphi$ važi

$$C^I = \{s \in S \ : \ M, s \models \delta_1(C)\}.$$

Tako, za svako $x \in \Delta$ imamo $\delta_1(t^I(x)) = t^M(x)$.

Sada imamo:

1. $t \in T$ akko $\delta_1(t) \in T^f$ akko $\delta_1(t) \in T(M, \Gamma)$ akko $\delta_1(t) \in \{t^M(s) \ : \ s \in S\}$ akko $t \in \{t^I(x) : x \in \Delta\}$, tj. $T = \{t^I(x) : x \in \Delta\}$.
2. Za svako $\alpha_i \in ob\varphi$, $\langle \alpha_i, t^I(\alpha_i) \rangle \in T^o$ akko $\langle \alpha_i, t^M(h(\alpha_i)) \rangle \in T^o_s$. Otuda, za svako $\alpha_i \in ob\varphi$, $\langle \alpha_i, t^I(\alpha_i) \rangle \in T^o$.
3. Za svako $(\alpha_i P \alpha_j) \in sub\varphi$, $\alpha_i^I P^I \alpha_j^I$ akko $(h(\alpha_i), h(\alpha_j)) \in R_P$ akko $(\alpha_i P \alpha_j) \in T^p$ akko $(\alpha_i P \alpha_j) \in \Phi$, tj. za svako $(\alpha_i P \alpha_j) \in sub\varphi$, $\alpha_i^I P^I \alpha_j^I$ akko $(\alpha_i P \alpha_j) \in \Phi$.

Dakle, trojka $\langle T, T^o, \Phi \rangle$ je kvazisvet za φ.
$\Rightarrow$ Pretpostavimo sada da je $\langle T, T^o, \Phi \rangle$ kvazisvet za φ i da je

$$I = \langle \Delta, P_0^I, \ldots, C_0^I, \ldots, (\Diamond C)^I, \ldots, \alpha_0^I, \ldots \rangle$$

prošireni $\mathcal{CIQ}$-model za φ koji ga realizuje. Tada važe sledeći uslovi: $T = \{t^I(x) : x \in \Delta\}$; za svako $\alpha_i \in ob\varphi$, $\langle \alpha_i, t^I(\alpha_i) \rangle \in T^o$; za svako $(\alpha_i P \alpha_j) \in sub\varphi$, $\alpha_i^I P^I \alpha_j^I$ akko $(\alpha_i P \alpha_j) \in \Phi$.

Definišimo model $M = (S, \{R_P\}, \Pi)$ kako sledi:

$$S = \Delta, \quad R_{P_i} = P_i^I, \quad \Pi(s) = \{\delta_1(C) \ : \ s \in C^I\}, \ \text{za} \ s \in S,$$

gde je C ime pojma ili pojam oblika $\Diamond C_1$.

Indukcijom po konstrukciji pojma, lako je proveriti da za svako $C \in con\varphi$ važi

$$C^I = \{s \in S \ : \ M, s \models \delta_1(C)\}.$$

Tako, za svako $x \in \Delta$ imamo $\delta_1(t^I(x)) = t^M(x)$.

Mi tvrdimo da model M realizuje kandidata za s-kvazisvet $\langle T^f, T^o_s, T^p \rangle$ za Υ. Zaista, uočimo da za funkciju $h : OB \to S$ definisanu sa $h(\alpha_i) = \alpha_i^I$, važe sledeći uslovi:

- $T^f = T(M, \Gamma)$;
- za svako $\alpha_i \in OB$, $\langle \alpha_i, t^M(h(\alpha_i)) \rangle \in T^o_s$;
- za svako $(\alpha_i P \alpha_j) \in FP$, $(h(\alpha_i), h(\alpha_j)) \in R_P$ akko $(\alpha_i P \alpha_j) \in T^p$.

Dakle, trojka $\langle T^f, T^o_s, T^p \rangle$ je s-kvazisvet za Υ. ☐

Lema 77. *Neka je data $C_1\mathcal{IQ}_\mathcal{M}$ formula φ. Tada postoji NEXPTIME-algoritam (u odnosu na veličinu formule φ) koji odlučuje da li je kandidat za kvazisvet za φ kvazisvet.*

Dokaz Sledi iz Teoreme 54 i Leme 76, budući da je, veličina od $\Upsilon = (\Gamma, OB, FP)$ (gde je $\Gamma = \delta_1(con\varphi)$, $OB = ob\varphi$ i $FP = \{(\alpha P \beta) \ : \ (\alpha P \beta) \in sub\varphi\}$) polinomialna u odnosu na veličinu formule φ. ☐

Kako za logiku $\mathcal{CI}$ možemo primeniti metod filtracije, to očigledno važi sledeća Lema.

Lema 78. *Neka je data $\mathcal{CI}_\mathcal{M}$ formula φ. Tada postoji NEXPTIME-algoritam (u odnosu na veličinu formule φ) koji odlučuje da li je kandidat za kvazisvet za φ kvazisvet.*

7.2 Zadovoljivost u $\mathcal{K}$

Lema 79. *Neka je $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ fragment logike $\mathcal{CIQ}_{\mathcal{M}}$ sa osobinom da postoji* NEXPTIME *algoritam za proveru da li je data trojka $\langle T, T^{\circ}, \Phi\rangle$ kvazisvet za $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$-formulu φ. Tada, problem zadovoljivosti za $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$-formulu u klasi modela $\mathcal{K}$ je u* NEXPTIME.

Ova Lema pokazuje da problem zadovoljivosti u klasi modela $\mathcal{K}$ za $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$-formule je u NEXPTIME, što se poklapa sa donjom ocenom za logike koje obuhvataju logiku $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$.

Dokaz Uočimo da Teorema 64 kaže da je formula φ zadovoljiva ako i samo ako je ona zadovoliva u kvazimodelu sa $\leq \sum_{n=0}^{md(\varphi)} (2 \cdot |con\varphi| \cdot b(\varphi) + |sub\varphi|)^n < 4^{|\varphi|^2}$ svetova, a znamo da svaki domen sadrži najviše $2^{|con\varphi|} + ob(\varphi)$ objekata. Tako, da bi smo proverili da li je formula φ zadovoljiva dovoljno je da izvršimo sledeće korake:

1. Nedeterministički pogađamo strukturu $\langle\langle W, \lhd\rangle, \sigma\rangle$, čije dimenzije ne prelaze prethodno navedene veličine. Ovo pogađanje zahteva NEXPTIME.

2. Za svako $w \in W$ proverimo da li je $\sigma(w)$ kvazisvet, što, na osnovu pretpostavke zahteva NEXPTIME.

3. Proverimo da li je ovakva struktura kvazimodel koji zadovoljava φ, što zahteva EXPTIME.

Ako su svi uslovi u koracima 2 i 3 ispunjeni onda je formula φ zadovoljiva.

Ukupno dobijamo NEXPTIME algoritam za proveru da li je data formula zadovoljiva ili ne. □

Teorema 80. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{ALC}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{CI}_{\mathcal{M}}$ i $C_1\mathcal{IQ}_{\mathcal{M}}$-formulu u klasi modela $\mathcal{K}$ je NEXPTIME-kompletan.*

7.3 Zadovoljivost u $\mathcal{S}5$ i $\mathcal{KD}45$

Pretpostavimo da je formula φ zadovoljiva u kvazimodelu $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, f\rangle$, $\mathfrak{F} = \langle W, W \times W\rangle$, i $|\{\Box C : \Box C \in con\varphi\}| = m$. Rećićemo da su svetovi $w_1, w_2 \in W$ *f-ekvivalentni* u $\langle \mathfrak{F}, f\rangle$ i pisati $w_1 \sim_f w_2$ ako

$$(T_f^{\circ}(w_1), \Phi_f(w_1)) = (T_f^{\circ}(w_2), \Phi_f(w_2)).$$

Jasno je da je $\sim_f$ relacija ekvivalencije na W. Sa $[w]_f$ označavaćemo klasu ekvivalencije generisanu sa w, tj. $[w]_f = \{w' \in W \ : \ w \sim_f w'\}$. Radi jednostavnosti mi ćemo izostavljati simbol f i pisati samo $[w]$ i $w \sim w'$ ako ovo ne dovodi do zabune.

f-transformacijom kvazimodela $\langle \mathfrak{F}, f \rangle$ za φ nazivamo par $\langle \mathfrak{F}_1, g \rangle$ baziran na okviru $\mathfrak{F}_1 = \langle V, V \times V \rangle$ tako da važi

(i) $V = \{v = ([w], j) \ : \ w \in W, j = 0, 1, ..., m\}$,

(ii) $g(v) = (T_g(v), T_g^o(v), \Phi_g(v))$, gde je $v = ([w], j)$, $T_g(v) = \bigcup_{w' \in [w]} T_f(w')$, $T_g^o(v) = T_f^o(w)$, i $\Phi_g(v) = \Phi_f(w)$.

Lema 81. *Ako je $g(v) = \langle T_g(v), T_g^o(v), \Phi_g(v) \rangle$ trojka, definisana kao gore tada je $g(v)$ kvazisvet za φ.*

Dokaz Pretpostavimo da je $v = ([w], j)$. Za svako $w' \in [w]$, fiksirajmo jedan prošireni $\mathcal{CIQ}$-model $I_{w'}$ koji realizuje kvazisvet $f(w')$ za φ. Lako se vidi da je $I_v = \bigcup_{w' \in [w]} I_{w'}$ (disjunktna unija modela $I_{w'}$) prošireni $\mathcal{CIQ}$-model koji realizuje $g(v)$. □

Lema 82. *Neka $\langle \mathfrak{F}_1, g \rangle$ bude par kako je to prethodno opisano; tada je $\langle \mathfrak{F}_1, g \rangle$ kvazimodel koji zadovoljava φ.*

Dokaz Prvo ćemo pokazati da za svaki par $v \in V$ $(v = ([w], k))$ i $t \in T_g(v)$, postoji *prolaz* r u $\langle \mathfrak{F}_1, g \rangle$ takav da je $r(v) = t$. Zaista, postoji svet $w' \in [w]$ i *prolaz* r' u $\langle \mathfrak{F}, f \rangle$ tako da je $r'(w') = t \in T_f(w') \subseteq T_g(v)$. Napomenimo da ako je $t = t_\alpha$, $\alpha \in ob\varphi$, tada mi uzimamo $r' = r'_\alpha$. Za svaki pojam $\Box C \in con\varphi$ takav da je $\Box C \notin t = r'(w')$, izaberimo po jedan svet $u \in W$ za koji $C \notin r'(u)$, i stavimo ga u pomoćni skup $U_{r'}$. Broj izabranih svetova ne prelazi m, zato mi pretpostavljamo da je $U_{r'} = \{u_1, ..., u_s\}, (s \leq m)$. Po definiciji, stavimo $l_0 = k, l_i = (l_{j_i} + 1) \mathrm{mod}(m+1)$, gde je $j_i = \max(\{0\} \cup \{j < i : [u_i] = [u_j]\})$ za $i = 1, ..., s$.

Sada, na standardan način može se pokazati da funkcija r definisana sa

$$r(v') = \begin{cases} r'(w'), & \text{ako } v' = v = ([w'], k); \\ r'(u_i), & \text{ako } v' = v_i = ([u_i], l_i), i = 1, ..., s; \\ r'(u'), & \text{ako } v' = ([u'], j) \in V - \{v, v_1, ..., v_s\} \end{cases}$$

je *prolaz* u $\langle \mathfrak{F}_1, g \rangle$ i $r(v) = t$. Ovo obezbeđuje uslove (c) i (d). A uslov (e), (tj. za svako $v \in V$ i $\Box\psi \in sub\varphi$, mi imamo $\Box\psi \in \Phi_v$ akko $\psi \in \Phi'_v$ za svako $v' \in V$) sledi iz jednakosti $\{\Phi_g(v) : v \in V\} = \{\Phi_f(w) : w \in W\}$. □

Lema 83. *Formula φ je zadovoljiva u modelu baziranom na S5-okviru akko je ona zadovoljiva u kvazimodelu za φ baziranom na S5-okviru sa najviše $2^{|\varphi|^2}$ svetova.*

Dokaz Iz Teoreme 63, Leme 82 i nejednakosti

$$|V| \leq 2^{|con\varphi|\cdot|ob\varphi|} \cdot 2^{|sub\varphi|} \cdot |con\varphi| < 2^{|\varphi|^2}$$

dobijamo direktno dokaz. □

Napomenimo da, sa malo više napora, prethodna ocena može da se popravi. Osnovne korake za dobijanje bolje ocene formulišemo u okviru zadatka.

Zadatak. Pretpostavimo da je formula φ zadovoljiva u kvazimodelu $\langle \mathfrak{F}, f\rangle$, $\mathfrak{F} = \langle W, W \times W\rangle$, i $|\{\Box C \ : \ \Box C \in con\varphi\}| = m$.
Po definiciji, stavimo

- $w_1 \sim_\Phi w_2$ ako $\Phi_f(w_1) = \Phi_f(w_2)$;
- $[w]_\Phi = \{w' \in W \ : \ w \sim_\Phi w'\}$;
- $U = \bigcup_{\alpha \in ob\varphi} U_{r'_\alpha}$, gde $U_{r'_\alpha}$ definišemo isto kao u Lemi 82 za *prolaz* r'_α;
- $V = \{v = ([w]_\Phi, j) \ : \ w \in W, j = 0, 1, ..., m\} \cup U$;
- $g(v) = \begin{cases} (\bigcup_{w' \in [w]_\Phi} T_f(w'), T^o_f(w), \Phi_f(w)), & \text{za } v = ([w]_\Phi, j) \\ f(v), & \text{za } v \in U \end{cases}$;
- $\mathfrak{F}_1 = \langle V, V \times V\rangle$.

Dokazati da je par $\langle \mathfrak{F}_1, g\rangle$ kvazimodel koji zadovoljava φ sa najviše

$$2^{|sub\varphi|} \cdot |con\varphi| + |ob\varphi| \cdot |con\varphi| < 2^{|\varphi|} \quad \text{svetova.}$$

Lema 84. *Neka je $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ fragment logike $\mathcal{CIQ}_\mathcal{M}$ sa osobinom da postoji* NEXPTIME *algoritam za proveru da li je data trojka $\langle T, T^o, \Phi\rangle$ kvazisvet za $\mathcal{L}_\mathcal{M}$-formulu φ. Tada, problem zadovoljivosti za $\mathcal{L}_\mathcal{M}$-formulu u klasi modela $S5$ i $\mathcal{KD}45$ je u* NEXPTIME.

Dokaz Za datu formulu φ, gde je $|\varphi| = n$, mi nedeterministički pogađamo okvir $\mathfrak{F} = \langle W, W \times W\rangle$, gde je W skup od $k \leq 2^{n^2}$ svetova. Tada mi nedeterministički pogađamo preslikavanje f koje svakom svetu $w \in W$ pridružuje trojku $f(w) = \langle T_w, T_w^o, \Phi_w \rangle$, tj. mi pogađamo skup T_w od $\leq 2^{|con\varphi|}$ tipova pojmova, skup T_w^o koji sadrži po jedan imenovani tip pojma t_α za svako $\alpha \in ob\varphi$ ($|T_w^o| = |ob\varphi|$) i podskup $\Phi_w \subseteq sub(\varphi)$ ($|\Phi_w| \leq |sub\varphi|$). Tako, mi nedeterministički pogađamo strukturu $\langle \mathfrak{F}, f \rangle$. Pogađanje takve strukture može biti izvršeno za NEXPTIME. Zatim, za svako $w \in W$ mi proveravamo da li je $f(w)$ kvazisvet za φ. Saglasno pretpostavci, ova provera za jedno $w \in W$ može biti ostvarena za NEXPTIME, a kako je $|W| \leq 2^{n^2}$ to čitava provera može biti ostvarena za NEXPTIME. Na kraju, mi proveravamo da li je struktura $\langle \mathfrak{F}, f \rangle$ kvazimodel koji zadovoljava φ. Ovo može biti provereno deterministički za EXPTIME. Na osnovu Leme 83 i definicije nedeterminizma, ako je formula φ zadovoljiva, naše pogađanje će biti ispravno tj. možemo pogoditi kvazimodel koji zadovoljava φ. Naravno, ako formula φ nije zadovoljiva, nikakvo pogađanje ne može biti ispravno. Tako, mi imamo NEXPTIME algoritam za odlučivanje da li je data formula φ zadovoljiva. $\square$

Teorema 85. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{ALC}_\mathcal{M}$, $\mathcal{CI}_\mathcal{M}$ i $\mathcal{C}_1\mathcal{IQ}_\mathcal{M}$-formulu u svakoj od klasa modela $\mathcal{S}5$ i $\mathcal{KD}45$ je NEXPTIME-kompletan.*

7.4 Zadovoljivost u $\mathcal{N}$

Lema 86. *Neka je $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ fragment logike $\mathcal{CIQ}_\mathcal{U}$ sa osobinom da postoji* EXPSPACE *algoritam za proveru da li je data trojka $\langle T, T^o, \Phi \rangle$ kvazisvet za $\mathcal{L}_\mathcal{U}$-formulu φ. Tada, problem zadovoljivosti za $\mathcal{L}_\mathcal{U}$-formulu u klasi modela $\mathcal{N}$ je u* EXPSPACE.

Dokaz Naš dokaz se bazira na Teoremi 65 i Lemi 68 koje nam omogućavaju da napravimo NEXPSPACE algoritam za provjeru da li je data $\mathcal{L}_\mathcal{U}$-formula, zadovoljiva u klasi modela $\mathcal{N}$.

Prvo, mi nedeterministički pogađamo brojeve $l_1 \leq \sharp(\varphi)$ i $l_2 \leq \flat^2(\varphi) \cdot |con\varphi| \cdot \sharp(\varphi) + |sub(\varphi)| \cdot \sharp(\varphi) + \sharp(\varphi)$. Za zapis ovih brojeva u binarnom brojnom sistemu treba nam najviše eksponencijalni prostor u odnosu na $\ell(\varphi)$. Tada mi nedeterministički pogađamo skup T_0 od $\leq 2^{|con\varphi|}$ tipova pojmova, skup T_0^o koji sadrži jedan imenovani tip pojma $\langle t, \alpha \rangle$ za svaki objekat $\alpha \in ob\varphi$ ($|T_0^o| = |ob\varphi|$) i podskup $\Phi_0 \subseteq sub(\varphi)$ koji sadrži φ ($|\Phi_0| \leq |sub\varphi|$), i proveravamo da li je trojka $\langle T_0, T_0^o, \Phi_0 \rangle$ kvazisvet za φ. Uočimo da nam za kodiranje trojke $\langle T_0, T_0^o, \Phi_0 \rangle$ treba najviše eksponencijalni prostor u odnosu na $\ell(\varphi)$, a po pretpostavci za datu trojku $\langle T_0, T_0^o, \Phi_0 \rangle$ kako je prethodno opisano, možemo za EXPSPACE proveriti da li je ona kvazisvet za φ ili ne. Dakle, za nedeterminističko pogađanje kvazisveta treba nam EXPSPACE. Na isti način mi pogađamo kvazisvet $\langle T_1, T_1^o, \Phi_1\rangle$ (stim što sada kao i u daljim koracima ne zahtevamo da važi uslov $\varphi \in \Phi_1$) za EXPSPACE i kontrolišemo da li je par $\langle T_0, T_0^o, \Phi_0\rangle$, $\langle T_1, T_1^o, \Phi_1\rangle$ podesan za povezivanje što možemo uraditi za EXPTIME. Posle toga trojka $\langle T_0, T_0^o, \Phi_0\rangle$ nam više netreba, zato mi pogađamo kvazisvet $\langle T_2, T_2^o, \Phi_2\rangle$, koristeći prostor na kome je bila smeštena trojka $\langle T_0, T_0^o, \Phi_0\rangle$, proveravamo da li je par $\langle T_1, T_1^o, \Phi_1\rangle$, $\langle T_2, T_2^o, \Phi_2\rangle$, podesan za povezivanje i tako dalje sve dok ne dostignemo $\langle T_{l_1+1}, T_{l_1+1}^o, \Phi_{l_1+1}\rangle$—ovaj kvazisvet se smešta u memoriju zajedno sa skupovima

$$\Sigma_{\Phi_{l_1+1}} = \{\chi\mathcal{U}\psi \in sub\varphi \ : \ \chi\mathcal{U}\psi \in \Phi_{l_1+1}\} \quad \text{i}$$

$$\Sigma_{T_{l_1+1}} = \{(t, \Sigma_t) \ : \ t \in T_{l_1+1}\}, \ \text{ gde je } \Sigma_t = \{C\mathcal{U}D \in con\varphi \ : \ C\mathcal{U}D \in t\}.$$

Sada mi nastavljamo dalje na isti način kao i ranije (pogađajući nove kvazisvetove smeštajući ih na mesta starih kvazisvetova i proveravajući da li su odgovarajući parovi podesni za povezivanje) stim što sada za svaki par $(t, \Sigma_t) \in \Sigma_{T_i}$ nedeterministički pogađamo $t' \in T_{i+1}$ tako da se t i t' mogu r-nadovezati (ako je $\langle t, \alpha\rangle \in T_i^o$ tada mi biramo t' tako da je $\langle t', \alpha\rangle \in T_{i+1}^o$), zatim formiramo $\Sigma_{t'} = \{C\mathcal{U}D \in \Sigma_t \ : \ D \notin t'\}$ i smeštamo u memoriju na mesto skupa Σ_{T_i} skup $\Sigma_{T_{i+1}} = \{(t', \Sigma_{t'}) \ : \ \Sigma_{t'} \neq \emptyset\}$, a na mesto skupa Σ_{Φ_i} u memoriji smeštamo skup $\Sigma_{\Phi_{i+1}} = \{\chi\mathcal{U}\psi \in \Sigma_{\Phi_i} \ : \ \psi \notin \Phi_{i+1}\}$.

Na kraju, tj. kada dostignemo kvazisvet $\langle T_{l_1+l_2}, T_{l_1+l_2}^o, \Phi_{l_1+l_2}\rangle$, proveravamo da li je par $\langle T_{l_1+l_2}, T_{l_1+l_2}^o, \Phi_{l_1+l_2}\rangle$, $\langle T_{l_1+1}, T_{l_1+1}^o, \Phi_{l_1+1}\rangle$ podesan za povezivanje i da li su skupovi $\Sigma_{\Phi_{l_1+l_2}}$ i $\Sigma_{T_{l_1+l_2}}$ prazni i ako jesu tada je data formula φ zadovoljiva. Naravno, da ako na nekom od koraka pri proveri odgovarajućih uslova (da li je pogođena trojka kvazisvet, da li je posmatrani par kvazisvetova podesan za povezivanje, da li su skupovi $\Sigma_{\Phi_{l_1+l_2}}$ i $\Sigma_{T_{l_1+l_2}}$ prazni), vidimo da neki od njih nisu ispunjeni algoritam se zaustavlja i daje odgovor da data formula φ nije zadovoljiva.

Na svakom od koraka mi pamtimo najviše tri kvazisveta, brojeve l_1, l_2 i skupove Σ_{Φ_i} i Σ_{T_i}, za to nam je dovoljan eksponencijalni prostor u odnosu na $\ell(\varphi)$, tj. konstruisani algoritam pripada klasi složenosti NEXPSPACE. Na osnovu Savićeve teoreme [23], sledi da postoji EXPSPACE algoritam koji proverava zadovoljivost formule φ, što je tvrdila lema 86. $\square$

Teorema 87. *Problem zadovoljivosti za $\mathcal{ALC}_\mathcal{U}$, $\mathcal{CI}_\mathcal{U}$ i $\mathcal{C}_1\mathcal{IQ}_\mathcal{U}$-formulu u klasi modela $\mathcal{N}$ je EXPSPACE-kompletan.*

Literatura

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, and J. D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

[2] F. Baader and B. Hollunder. A terminological knowledge representation system with complete inference algorithms. In *Proceedings of the workshop on Processing Declarative Knowledge, PDK-91*, pages 67–86. Lecture Notes in Artificial Intelligence, No. 567. Springer Verlag, 1991.

[3] F. Baader and A. Laux. Terminological logics with modal operators. In *Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 808–814, Montreal, Canada, 1995. Morgan Kaufman.

[4] F. Baader and H. Ohlbach. A multi-dimensional terminological knowledge representation language. In *Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 690–695, 1993.

[5] J. Balcá zar, J. Dí az, and J. Gabarró . *Structural Complexity* I. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science 11, Springer Verlag,1988.

[6] A. Borgida, R.J. Brachman, D.L McGuiness, and L. Alperin Resnick. CLASSIC: A structural data model for objects. In *Proceedings of the ACM SIGMOD International Conference on Management of Data*, pages 59–67. Portland, Oreg., 1989.

[7] R.J. Brachman and J.G. Schmolze. An overview of the KL-ONE knowledge representation system. *Cognitive Science*, 9:171–216, 1985.

[8] A. V. Chagrov and M. V. Zakharyaschev. *Modal Logic*. Clarendon Press, Oxford, 1997.

[9] F. Donini, M. Lenzerini, D. Nardi, and W. Nutt. The complexity of concept languages. Technical Report RR-95-07, Deutsches Forchungszentrum für Künstliche Intelligenz (DFKI), 1995.

[10] F. Donini, M. Lenzerini, D. Nardi, and A. Schaerf. Reasoning in description logics. In G. Brewka, editor, *Principles of Knowledge Representation*, pages 191–236. CSLI Publications, 1996.

[11] G. De Giacomo. *Decidability of Class-Based Knowledge Representation Formalisms*. PhD thesis, Univ. di Roma, 1995.

[12] G. De Giacomo and M. Lenzerini. TBox and ABox reasoning in expressive description logics. In *Proceedings of the fifth Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, Montreal, Canada, 1996. Morgan Kaufman.

[13] N. J. Fisher and R. E. Ladner. Propositional dynamic logic of regular programs. *Journal of Computer and System Sciences*, 18:194–211, 1979.

[14] J. Halpern and Yo. Moses. A guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief. *Artificial Intelligence*, 54:319–379, 1992.

[15] D. Kozen and J. Tiuryn. Logics of programs. In J. Van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, pages 790–840. Elsever Science Publisher, 1990.

[16] A. Laux. Beliefs in multi-agent worlds: a terminological approach. In *Proceedings of the 11th European Conference on Artificial Intelligence*, pages 299–303, Amsterdam, 1994.

[17] U. Manber. *Introduction to Algorithms A Creative Approach*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

[18] M. Mosurović and M. Zakharyaschev. On the complexity of description logics with modal operators. In P. Kolaitos and G. Koletos, editors, *Proceedings of the 2nd Panhellenic Logic Symposium*, pages 166–171, Delphi, 1999.

[19] M. Mosurović, F. Wolter, M. Zakharyaschev. Complexity of temporalized ALC. In *Proceedings of the 4th International Conference on Discrete Mathematics in Control system Theory*, Krasnovidovo, (June 19-25, 2000), Moscow:MAX Press, 2000, p.141-144.

[20] M. Mosurović, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. Modalized description logics — how much? *Technical report, Computer Science Department, University of Leipzig*, Germany, 2000. To appear.

[21] B. Nebel. *Reasoning and Revision in Hybrid Representation Systems*. Lecture Notes In Artificial Intelligence. Springer-Verlag, 1990.

[22] C. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1989.

[23] W.J. Savitch. Relationships between nondeterministic and deterministic tape complexities. *J. Comput. Syst. Sci. 4,2(1970)*, pages 177-192.

[24] K. Schild. A correspondence theory for terminological logics: preliminary report. In *Proceedings of the 12th Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-91)*, pages 466–471, 1991.

[25] K. Schild. Combining terminological logics with tense logic. In *Proceedings of the 6th Portuguese Conference on Artificial Intelligence*, pages 105–120, Porto, 1993.

[26] R. Sedgewick. *Algorithms*, Second edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1988.

[27] van E. Boas. The convenience of tilings. Tehnical Report CT-96-01, Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam.

[28] H. S. Wilf. *Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall International, cop.1986.

[29] F. Wolter and M. Zakharyaschev. Dynamic description logic. In *Proceedings of AiML'98*, Uppsala, 1998. To appear in "Advances in Modal Logic. Volume II", CSLI Publications, Stanford, 1999.

[30] F. Wolter and M. Zakharyaschev. Satisfiability problem in description logics with modal operators. In *Proceedings of the sixth Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 512–523, Montreal, Canada, 1998. Morgan Kaufman.

[31] F. Wolter and M. Zakharyaschev. Temporalizing description logics. In *Proceedings of FroCoS'98*, Amsterdam, 1998. In "Frontiers of Combining Systems", vol. II, pp. 379-401. Kluwer, 1999.

[32] F. Wolter and M. Zakharyaschev. Multi-dimensional description logics. In *Proceedings of IJCAI'99*, Stockholm, 1999.

Sadržaj

Izveštaj o doktorskoj disertaciji Milenka Mosurovića

Na sednici Nastavno-naučnog veća Matematičkog fakulteta od izabrani smo u komisiju za pregled i ocenu doktorske disertacije *Složenost opisnih logika s modalnim operatorima* Milenka Mosurovića. Pošto smo taj rad proučili podnosimo Veću sledeći izveštaj.

Predloženi rad sadrži V+93 stranica kucanog teksta i sastoji se iz sledećih delova: *Uvod* (1-14), *Funkcionalna restrikcija* (15-29), *Ograničena brojna restrikcija* (30-39), *Jednostavni kvazisvet* (40-54), *Modalne opisne logike - odlučivost* (55-62), *Modalne opisne logike - donje ocene* (63-80), *Modalne opisne logike gornje ocene* (81-88). Literatura se sastoji iz 32 bibliografske jedinice.

Osnovna tema doktorske disertacije kandidata odnosi se na računsku složenost opisnih logika sa raznim vrstama modalnih operatora. Naime, razvojem računarske tehnologije, a naročito u polsednjoj deceniji, uvedeni su mnogobrojni formalni sistemi za reprezentaciju znanja i rezonovanje o bazama znanja. Sistemi bazirani na opisnim logikama daju formalni jezik koji izmedju ostalog omogućuje da se polazeći od atomarnih pojmova izgrade složeni pojmovi, opiše hijerarhija izmedju ovih složenih pojmova i predstave informacije o konkretnim pojmovima iz domena primene. S druge strane, formalizam ovih, pa i veoma izražajnih opisnih logika, nije sasvim podesan ako domen primene nije statičan. Na primer, ako je reč o bazi znanja u kojoj pojmovi i svojstva mogu imati različite vrednosti u različitim vremenskim momentima ili usled odredjenih dejstava. Otuda su razvijeni mnogobrojni logički formalizmi koji uzimaju u obzir i ovaj aspekt formalne reprezentacije znanja i rezonovanja o bazama znanja: epistemološke logike za prestavljanje običnog i distribuiranog znanja, deskriptivni jezici sa vremenskim dejstvom i epistemološkim operatorima, spacio-temporalne logike. Jedno od ključnih pitanja za ove sisteme je problem računske složenosti. U mnogim vrstama navedenih logika ovaj problem je razrešen i razvijene su i implementirane efektivne procedure rezonovanja. U poslednje vreme konstruisani su i drugi logički sistemi za koje je problem računske složenosti ostao potpuno otvoren.

Mosurović se u svojoj tezi odlučio da sa ovog stanovišta istraži opisne logike kombinovane sa modalnim operatorima, uglavnom nastavljajući se na radove F. Woltera, M. Zaharjaševa i G. De Giacoma. U ovom pristupu modalni operatori odgovaraju programima, koji se, opet, u semantičkoj interpretaciji preko Kripkeovih modela (okvira) grade od atomarnih programa.

Navedimo ukratko opis teze po poglavljima. U uvodu se navode uglavnom poznati pojmovi i rezultati koje kandidat koristi u daljem izlaganju. Predstavljene su opisne logike (ALC, CIQ), zatim se navodi opis klasa složenosti i računska složenost problema popločavanja torusa i koridora. Drugo poglavlje odnosi se na fragment D_1IF logike DIF. U okviru istog poglavlja konstruiše kontraprimer koji pokazuje da dokazi i konstrukcije za logiku DIF koje daje De Giacomo u svojoj disertaciji nisu korektni, ali da važe za fragment D_1IF. U ukviru treće glave autor izučava fragment D_1IQ logike DIQ. U odredjenom smislu i ovo poglavlje je pripremno za analizu drugih sistema u sledećim poglavljima. Ovde izmedju ostalog dokazuje da je fragment D_1IQ EXPTIME–kompletan. U četvrtom poglavlju konstruiše NEXPTIME algoritam kojim se proverava da li je data struktura jednostavni kvazisvet (Kripkeov tablo za logiku DIQ) ili to nije. Ovaj algoritam imaće važnu ulogu u odredjivanju gornjih ocena u sedmom poglavlju. Peto poglavlje odnosi se u potpunosti na sintaksu i semantiku modalnih opisnih logika ALC_M, CIQ_M, gde je M jedan od modalnih operatora K, N, K4, KD45, S4, S5. Pored toga daju se gornje ocene odlučivosti zadovoljenja formula (paragraf 5.3) za opisne logike sa modalnim operatorima K i N. Ovde se uglavnom izlažu rezultati F. Woltera i M. Zaharjaševa (1998,1999). U šestoj i sedmoj glavi izloženi su glavni rezultati kandidata. Naime ovde su izvedene donje (poglavlje 6) i gornje (poglavlje 7) ocene složenosti za problem zadovoljivosti u opisnim logikama sa ostalim modalnim operatorima iz gore navedenog spiska (K4, KD4, S4 i S5). Posebno izdvajamo rezultate sadržane u Teoremi 80, da je problem zadovoljivosti za ALC_M, CI_M i $\mathrm{C_1IQ}_M$ u klasi modela K NEXPTIME–kompletan, Teoremi 85, da je problem zadovoljivosti za iste opisne logike, ali za modalne operatore S5 i KD45 takodje NEXPTIME–kompletan i Teoremi 87, da je problem zadovoljivosti za ALC_U, CI_U i $\mathrm{C_1IQ}_U$ u klasi modela N EXPSPACE–kompletan.

Istaknimo da je deo istražavanja iz svoje teze kandidat ostvario u saradnji sa dr. Mihailom Zaharjaševim, profesorom Departmana za računarske nauke *King's College* u Londonu.

Ocena rezultata

Kandidat je u tezi uspešno rešio nekoliko teških otvorenih problema koji se odnose na računsku složenost ovih logika. Glavni doprinosi u tezi su sledeći rezultati.

Autor je odredio donje i gornje granice računske složenosti za problem zadovoljivosti za široku klasu deskriptivnih logika sa modalnim operatorima. Ovi rezultati, naročito oni koji se odnose na donje granice su potpuno originalni i novi. U ovim dokazima kandidat je vispreno koristio tehniku prekrivanja koja pripada sasvim drugoj oblasti, kombinatronoj geometriji. Spomenimo da se kao posledica ovih rezultata može dobiti donja granica za Dekartov proizvod raznih modalnih logika baziranih na Luisovom (Lewis) sistemu S5. Od posebnog interesa je EXPSPACE donja granica proizvoda sistema S5 sa logikom za prirodne brojeve.

Autor je takodje dao rešenje otvorenog problema F. Baadera i A. Lauxa (1995) postavljajući NEXPTIME donju granicu za svoju kombinaciju opisne logike ALC sa polimodalom K uz pretpostavku da se domen širi.

Veoma su zanimljive i važne gornje granice za modalne opisne logike bazirane na fragmentu CIQ. Kao štoje Mosurović pronašao, originalni dokaz

De Giacoma da je CIQ EXPTIME kompletna sadrži nepopravljivu grešku. Nedavno pronadjeni ispravan dokaz istog tvrdjenja ne može se korisiti za odredjivanje ocena gornjih granica za druge modalne sisteme. S druge strane, kandidat u tezi iscrpno izučava ovaj problem i nalazi značajne fragmente sistema CIQ za koji neophodna konstrukcija za postavljanje NEXPTIME gornje granice prolazi u potpunosti.

Zaključak i predlog

Na osnovu detaljne analize doktorske teze Milenka Mosurovića smatramo da ovaj rad sadrži veći broj naučnih doprinosa matematičkoj logici i teorijskom računarstvu, posebno oblasti veštačke inteligencije. Rezultati do kojih je kandidat došao odnose se na ocenu računske složenosti zadovoljivosti deskriptivnih logika sa modalnim operatorima. Predložena teza pored novih i originalnih rezultata ima značajan teorijski aspekt od interesa za primene matematičke logike u reprezentaciji, izgradnji i implementaciji baza znanja i rezonovanju o bazama znanja. Granice računske složenosti do kojih je kandidat došao daju okvir i limit modalnih opisnih logika u realnim primenama. Kandidat je u disertaciji pokazao duboko poznavanje ove oblasti i odlikuje ga dobar i potpun stil izlaganja. Otuda navedene činjenice ovu disertaciju čine vrlo zanimljivom i aktuelnom sa naučnog stanovišta. Stoga predložemo Naučnom veću da se rad

Složenost opisnih logika s modalnim operatorima

Milenka Mosurovića prihvati kao doktorska disertacija i odredi komisija za odbranu.

Komisija

dr Žarko Mijajlović, red. prof.

dr Kosta Došen, naučni savetnik

dr Slobodan Vujošević, red. prof.