ЗАСНИВАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

МАСТЕР РАД

Игор Бањац

БЕОГРАД, 2010.

Циљ овог мастер рада је да покажемо како се уводе тригонометријске функције коришћењем апарата Математичке анализе. У првој глави користиће се редови и, специјално, експоненцијална функција. Дефинисаћемо експоненцијалну функцију комплексног аргумента и видети $\cos$ и $\sin$ као њен реални и имагинарни део.

У другој глави биће приказан још један могући начин увођења тригонометријских функција, помоћу одговарајућих функционалних једначина.

Поменимо да постоје и други начини увођења ових функција – начин помоћу диференцијалних једначина је укратко поменут, а елементарни начин који се стандардно користи у школама овде не обрађујемо.

Наравно, сваки од тих начина има своје предности и слабости. Елементарни начин је свакако погоднији за излагање млађим слушаоцима, али зато садржи доста детаља који се морају прихватити «на поверење». Функционалне једначине би се такође могле користити у настави, али, како ће се видети, строго доказивање коректности са свим детаљима је неприхватљиво дугачко и сложено. С друге стране, начини који користе анализу су ефектнији и краћи али, наравно, неприхватљиви за средњошколску наставу.

ГЛАВА I

ДЕФИНИСАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА

Дефиниција. *Ред реалних бројева* (краће *ред*) је збир бесконачно (пребројиво много) сабирака који се налазе у датом поретку. Користимо ознаке

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad \sum a_n , \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Број a_n је n*-ти члан реда*. Број $s_k = \sum_{n=1}^{k} an$ је k*-та парцијална сума реда*, а низ (s_k) је *низ парцијалних сума*.

Дефиниција. Ред *конвергира* ако конвергира низ парцијалних сума. Ако је ред конвергентан, сума реда је једнака лимесу низа парцијалних сума

$$s = \lim_{k \to \infty} s_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Геометријски ред је ред

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots, \text{ где је } a \neq 0,\ q \neq 0 .$$

Хармонијски ред је ред

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} .$$

Алтернирајући ред је ред код кога узастопни чланови имају супротне знаке, нпр.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Функционални ред је збир бесконачно (пребројиво много) функција, при чему је $f_n : D \to R$, $D \subset R$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n + \ldots$$

Степени ред је посебан ред функција $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ за који је $f_n(x)=a_n(x-x_0)^n$, односно

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

Радијус конвергенције степеног реда је број

$$\rho=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Показује се да степени ред конвергира у интервалу $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ и, евентуално, у некој од тачака његовог руба.

Теорема 1. (*Тејлорова* формула) Нека функција f има на интервалу (a,b) све изводе до степена $n+1$ закључно. Тада за произвољну тачку $x_0 \in (a,b)$ и за $\forall x \in (a,b)$ важи

$$f(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

где је

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$$

за неко θ, $0<\theta<1$.

Теорема 2. (*Тејлоров ред*) Нека функција f има на интервалу (a,b) изводе произвољног реда. Тада за произвољну тачку $x_0 \in (a,b)$ важи

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

за оне $x \in (a,b)$ за које низ остатака $\{R_n(x)\}$тежи нули.

Много више о конвергенцији, о равномерној и апсолутној конвергенцији, као и о радијусу конвергенције рећи ћемо када уведемо комплексну раван и када дефинишемо редове у комплексној равни.

КОМПЛЕКСНА РАВАН

Полазећи од претпоставке да смо већ упознати са комплексним бројевима, навешћемо укратко основне појмове у вези са системом комплексних бројева и операцијама у њему.

Поље комплексних бројева **C** дефинишемо као скуп уређених парова реалних бројева у којем су дефинисани збир и производ на следећи начин:

(1) $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

(2) $$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

У том случају је $(0,0)$ *неутрални*, а $(1,0)$ *јединични елемент* које означавамо са 0, односно са 1. С друге стране, потпоље

$$\{(x,0) : (x \in R)\}$$

поља **C** је изоморфно пољу реалних бројева **R**, па комплексан број $(x,0)$ можемо идентификовати са реалним бројем x. Ако пар $(0,1)$ обележимо са *i*, онда сваки елемент *z* поља **C** има облик

$$z = (x, y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = x + iy .$$

С обзиром на кореспонденцију скупа **C** и Декартове равни добијамо *комплексну раван* (коју такође означавамо са **C**), при чему за тачке Декартове равни важи (1) и (2).

Степени редови у комплексној равни

Ред $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ комплексних бројева је конвергентан ако његов низ парцијалних сума $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ има коначну граничну вредност s; та гранична вредност зове се сума реда. При томе се конвергенција низова у **C** уводи на сличан начин као у **R**.

Нека је $z_n = x_n + i \cdot y_n$ и нека је дат ред $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$.

Лема 1. Ред $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ конвергира *акко* конвергирају редови $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ и $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k$. Штавише, ако је $\sigma = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ и $\tau = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$, тада је $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k = \sigma + i \cdot \tau$.

Ред $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ апсолутно конвергира ако ред $\sum_{k=0}^{+\infty} |z_k|$ конвергира.

Из неједнакости $|x_n|$, $|y_n| \le |z_n| \le |x_n| + |y_n|$, следи да ред $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ апсолутно конвергира *акко* конвергирају редови $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$ и $\sum_{k=0}^{+\infty} |y_k|$, тј. ако апсолутно конвергирају и редови $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ и $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k$.

Лема 2. Ако конвергирају редови $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k = a$ и $\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k = b$, тада конвергира и ред $\sum_{k=0}^{+\infty} (z_k \pm \omega_k) = a \pm b$. При додатном услову апсолутне конвергенције ових редова конвергира и ред $\sum_{k=0}^{+\infty} c_n$, где је $c_n = \sum_{k=0}^{n} z_k \omega_{n-k}$ и сума овог реда је $a \cdot b$.

Доказ. Прво тврђење је једноставно. За доказ другог означимо

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = a_n^{'} \quad (n \in N), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^{'} = a,$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = b_n^{'} \; (n \in N) \qquad \lim_{n\to\infty} b_n^{'} = b,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \tilde{a}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\omega_n| = \tilde{b}.$$

Произвољан ред облика

$$\sum_{p=1}^{\infty} z_{i_p} \omega_{j_p} = z_{i_1} \omega_{j_1} + z_{i_2} \omega_{j_2} + \ldots + z_{i_n} \omega_{j_n} + \ldots$$

апсолутно конвергира. Наиме, нека је

$$\left| z_{i_1} \omega_{j_1} \right| + \left| z_{i_2} \omega_{j_2} \right| + \ldots + \left| z_{i_p} \omega_{j_p} \right| = s_p^*$$

p -та парцијална сума реда $\sum_{p=1}^{\infty} \left| z_{i_p} \omega_{j_p} \right|$. Са n_0 означимо

$$n_0 = \max\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p\}.$$

Тада је

$$s_p^* \leq \left(|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_{n_0}|\right)\left(|\omega_1| + |\omega_2| + \ldots + |\omega_{n_0}|\right) \leq \tilde{a} \cdot \tilde{b}.$$

Парцијалне суме реда $\sum_{p=1}^{\infty}\left|z_{i_p}\omega_{j_p}\right|$ су ограничене, па он конвергира. Одавде следи да ред $\sum_{p=1}^{\infty} z_{i_p}\omega_{j_p}$ апсолутно конвергира. Према томе, редослед сабирања не утиче на збир добијеног реда. Да бисмо одредили тај збир, можемо га написати у облику

$$z_1\omega_1 + (z_1\omega_2 + z_2\omega_2 + z_2\omega_1) + (z_1\omega_3 + z_2\omega_3 + z_3\omega_3 + z_3\omega_2 + z_3\omega_1)$$

$$+\ldots+(z_1\omega_n + z_2\omega_n + \ldots + z_n\omega_n + z_n\omega_{n-1} + \ldots + z_n\omega_1) + \ldots.$$

Парцијалне суме овог реда (рачунајући сваки израз у загради као један члан) можемо записати у облику:

$$a'_1 b'_1,\ a'_2 b'_2,\ a'_3 b'_3, \ldots, \qquad a'_n b'_n, \ldots$$

Како је $\lim_{n\to\infty} a'_n b'_n = ab$, то је $\sum_{p=1}^{\infty} z_{i_p}\omega_{j_p} = ab$.

Функционални ред $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$, где су функције f_k дефинисане на неком скупу M комплексне равни, називамо *равномерно конвергентним* на M, ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 = n_0(\varepsilon)$ тако да

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(z)\right| < \varepsilon$$

за свако $n > n_0$ и свако $z \in M$. Једноставно се проверава да из равномерне конвергенције реда на скупу M следи да ред конвергира за свако $z \in M$ и у обичном смислу.

Вајерштрасов тест

Нека је M_n низ ненегативних бројева, функције f_k дефинисане на неком скупу E, и нека су испуњени следећи услови:

(a) $\quad |f_n(z)| \le M_n$ за свако $z \in E$,

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ конвергира.

Тада ред $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ равномерно конвергира на E.

Лема 3. (непрекидност суме реда) Нека је M подскуп скупа $\overline{C}$ и нека су испуњени следећи услови:

(a) f_k су непрекидне на M,

(b) $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ равномерно конвергира на M.

Тада је функција f дефинисана са $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ непрекидна на M.

Ред облика $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-a)^k$ зове се *степени ред око тачке* a.

Теорема 3. (Абелова теорема) Ако степени ред $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-a)^k$ конвергира у некој тачки z_0, тада он конвергира и на кругу $B=\{z:|z-a|<|z_0-a|\}$, и на сваком компактном подскупу B тог круга конвергира апсолутно и равномерно.

Доказ. Нека $z \in B$ и нека је $q=\dfrac{z-a}{z_0-a}$; тада је $|q|<1$ и $a_k(z-a)^k = a_k(z_0-a)^k q^k$, $k \geq 0$. Како ред конвергира у тачки z_0, низ $\{a_k(z_0-a)^k\}$ је ограничен и може се применити Вајерштрасов тест.

Последица. Ако је функција f задата степеним редом $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$ у $B'(a;r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$, за неко $r > 0$, тада се функција f може додефинисати у тачки a, тако да је нова функција непрекидна у тачки a.

Теорема 4. (Коши-Адамара) Нека је

$$\Lambda = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ и } R = \frac{1}{\Lambda}.$$

Тада

(a) ако је $\Lambda = +\infty$ (тј. $R = 0$), ред $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$ конвергира само у тачки a.

(b) ако је $\Lambda = 0$ (тј. $R = +\infty$), ред $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$ конвергира за свако $z \in C$.

(a) ако је $0 < \Lambda < \infty$, ред $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$ апсолутно конвергира на $B(a;R)$; а ако је $|z-a| > R$, дивергира.

Број R се зове *радијус конвергенције* степеног реда.

Лема 4. Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ има позитиван радијус конвергенције R, онда се он унутар свог круга конвергенције може диференцирати произвољно много пута члан-по-члан. Добијени редови имају исти радијус конвергенције као и полазни.

У реалној анализи важну улогу има *експоненцијална* функција, која се означава са $\exp(x)$ или e^x. На пример, експоненцијална функција може да се дефинише као решење диференцијалне једначине $f'(x) = f(x)$ са почетним условом $f(0) = 1$.Отуда, из Тејлорове формуле следи

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Напоменимо да је $\exp$ монотоно растућа функција на R и да изгледа потпуно различито од тригонометријских функција $\cos$ и $\sin$. Замењујући реалну променљиву x комплексном променљивом z у претходној формули долазимо до дефиниције експоненцијалне функције са комплексним аргументом.

Дефиниција. За комплексно z дефинише се

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Непосредно се добија да је радијус конвергенције овог реда $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}} = \infty$, па ред униформно и апсолутно конвергира на сваком компакту унутар круга конвергенције, тј. на сваком компакту комплексне равни. По леми 2 следи да за произвољне комплексне бројеве a и b важи

$$e^a \cdot e^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a^i b^{n-i}}{i! \cdot (n-i)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b}.$$

Доказали смо важно својство експоненцијалне функције које ћемо назвати *адиционом теоремом.*

Теорема 5. За произвољне комплексне бројеве a и b важи

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}.$$

Теорема 6. За експоненцијалну функцију важе следећа својства:

(a) $$e^z \neq 0,$$

(b) $\qquad (e^z)' = e^z$,

(c) рестрикција $\exp$ на реалну осу је растућа функција, $e^x \to +\infty$, $x \to +\infty$;

$e^x \to 0$, $x \to -\infty$.

(d) $\qquad e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$,

(e) $\qquad \exp(\bar{z}) = \overline{\exp z}$,

(f) за реално t $\qquad \left|e^{it}\right| = 1$,

(g) за $z = x + iy$ $\qquad \left|e^z\right| = e^x$.

Доказ. Како је $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ следе својства (a) и (d). Диференцирањем степеног реда (користећи лему 4) закључујемо да важи (b). Користећи $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, закључујемо да је $\exp$ монотоно растућа на позитивном делу реалне осе и да $e^x \to +\infty$, $x \to +\infty$. Други део тврђења (c) је последица једнакости $e^x e^{-x} = 1$.

Нека је $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. Из дефиниције експоненцијалне функције следи $S_n(z) \to e^z$ и $S_n(\bar{z}) \to e^{\bar{z}}$, када $n \to +\infty$. Отуда $\overline{S_n(z)} \to \overline{e^z}$ и како је $\overline{S_n(z)} = S_n(\bar{z})$, добија се (e). На основу (e) добија се

$$\left|e^{it}\right|^2 = e^{it}\overline{e^{it}} = e^{it}e^{-it} = e^0 = 1 .$$

Да бисмо доказали (g) можемо применити адиционе формуле, тј. $e^z = e^x e^{iy}$.

У формули $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ ставимо $z = ix$. Добија се

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} .$$

Како је $(ix)^{2k} = i^{2k} x^{2k} = (-1)^k x^{2k}$ и $(ix)^{2k+1} = i^{2k+1} x^{2k+1} = i(-1)^k x^{2k+1}$, налази се

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Реални и имагинарни део последњег израза представљају одређене функције реалне промењљиве које ћемо назвати косинусом и синусом, респективно. Дакле, уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција За $x \in R$, функције $\cos x$ и $\sin x$ дефинишемо, респективно, као реални и имагинарни дао комплексног броја e^{ix}, тј. помоћу формуле

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \; x \in R.$$

Последња формула назива се *Ојлерова формула*.

Дакле, по дефиницији је $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ и $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Из Ојлерове формуле следи

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

По аналогији се могу дефинисати функције косинус и синус комплексног аргумента

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{и} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

односно

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{и} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Наводимо још нека својства уведених тригонометријских функција.

(1) (изводи тригонометријских функција) Ако диференцирамо обе стране формуле која је еквивалентна Ојлеровом идентитету, коришћењем правила о диференцирању степених редова добијамо

$$(\cos t)' + i\cdot(\sin t)' = ie^{it} = -\sin t + i\cos t,$$

Отуда, издвајајући реални и имагинарни део следи

$$(\cos t)' = -\sin t, \quad (\sin t)' = \cos t.$$

(2) (дефиниција броја π) Из $e^{it} = \cos t + i\sin t$ следи

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos 2 = 1 - 2 + \frac{2}{3} + \sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!} = -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2^{2(2k+1)}}{(2(2k+1))!} - \frac{2^{2(2k+2)}}{(2(2k+2))!}\right] =$$

$$= -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2^{4k+2}}{(4k+2)!} - \frac{2^{4k+4}}{(4k+4)!}\right] = -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{4k+2}}{(4k+4)!}\cdot[(4k+3)(4k+4) - 4] =$$

$$= -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{4k+2}}{(4k+4)!}\cdot\left[16k^2 + 28k + 8\right] \le -\frac{1}{3},$$

отуда $\cos 2 < -\frac{1}{3}$. Како је $\cos 0 = 1$ и како је функција $f(t) = \cos t$ непрекидна на R, то постоји најмањи позитиван број t_0 такав да је $\cos t_0 = 0$.

Дефинишимо

$$\pi = 2t_0.$$

Користећи ову дефиницију броја π, лако се доказује и

(3) (a) $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = i^2 = -1$, $e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1$,

(b) $e^{2\pi in} = 1$, за сваки цео број n.

Из (a) и адиционе теореме за функцију $\exp$ следи

(4) $\quad e^{z+2\pi i}=e^{z}e^{2\pi i}=e^{z}$. Дакле, експоненцијална функција је периодична са основним периодом $2\pi i$.

Хиперболичке функције (хиперболички синус и косинус) дефинишу се помоћу

$$\text{sh}\ z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \qquad \text{и} \qquad \text{ch}\ z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

односно

$$\text{ch}\, z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{и} \qquad \text{sh}\, z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Лако је уверити се у следеће везе између тригонометријских и хиперболичких функција:

$$\sin z=\sin x\cdot \text{ch}y+i\cos x\cdot \text{sh}y \qquad \cos z=\cos x\cdot \text{ch}y-i\sin\cdot \text{sh}y$$

$$\sin(iy)=i\cdot \text{sh}\ y \qquad \cos(iy)=\text{ch}\ y$$

Специјално, једна од последица формуле

$$e^{a+b}=e^{a}e^{b}$$

су следеће две формуле које се такође називају *адиционе формуле*.

па изједначавањем реалних и имагинарних делова добијамо

ГЛАВА II

ДЕФИНИСАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ ФУНКЦИОНАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Да бисмо показали како се тригонометријске функције могу увести коришћењем функционалних једначина, докажимо следећу теорему.

Теорема 7. Постоји јединствен пар функција и дефинисаних на целој реалној правој који задовољава следеће услове:

За произвољне реалне бројеве , и су задовољени следећи услови:

(1)

,

,

(2)

За важи неједнакост .

(3)

Доказ овог тврђења ћемо поделити на два дела. Прво ћемо доказати јединственост, а затим постојање функција и које задовољавају услове (1), (2) и (3).

(1) Доказ јединствености.

Да бисмо доказали јединственост, довољно је доказати следећа два тврђења:

(а) Функције и које задовољавају горе наведена својства су непрекидне на реалној правој

(б) Вредности функција и одређене су на јединствен начин на неком густом скупу тачака на реалној правој

(а)

Ако у (1) заменимо и и користећи и добијамо

(4)

Ако ове једначине помножимо редом са $S(x)$ и $C(x)$ и саберемо их, користећи да је $S^2(x)+C^2(x)=1$ добијамо $C(-x)=C(x)$. Аналогно, ако помножимо једначине редом са $C(x)$ и $-S(x)$ и саберемо их, добијамо $S(-x)=-S(x)$. На тај начин добијамо да је функција $C(x)$ парна, а функција $S(x)$ непарна.

Из (1) добијамо

$$S(x'')=S\left(\frac{x'+x''}{2}+\frac{x''-x'}{2}\right)=S\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\cdot C\left(\frac{x''-x'}{2}\right)+C\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\cdot S\left(\frac{x''-x'}{2}\right)$$

и аналогно

$$S(x')=S\left(\frac{x'+x''}{2}+\frac{x'-x''}{2}\right)=S\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\cdot C\left(\frac{x'-x''}{2}\right)-C\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\cdot S\left(\frac{x''-x'}{2}\right).$$

Ако одузмемо ове две једначине добијамо

$$S(x'')-S(x')=2\cdot C\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\cdot S\left(\frac{x''-x'}{2}\right) \tag{5}$$

Непрекидност функције $S(x)$ следи директно из (3) и из једнакости $S(0)=0$. Специјално, ако је (x_n) произвољан низ аргумената који тежи нули здесна, то из односа $0<S(x_n)<x_n$ следи да и одговарајући низ вредности функције $(S(x_n))$ конвергира ка нули тј. специјално ка вредности $S(0)$. Из непарности функције $S(x)$ следи непрекидност слева у нули, па следи да је функција $S(x)$ непрекидна у тачки $x=0$.

Непрекидност функције $S(x)$ у произвољној тачки следи из (5). Нека је x произвољна тачка реалне праве и (x_n) низ који конвергира ка x. Ако означимо $x'=x$ и $x''=x_n$ и заменимо у (5)

$$S(x_n)-S(x)=2\cdot C\left(\frac{x+x_n}{2}\right)\cdot S\left(\frac{x_n-x}{2}\right) \tag{6}$$

Како је $S(x)$ непрекидна у нули и $S(0)=0$, следи да је $\lim_{n\to\infty} S\left(\frac{x_n-x}{2}\right)=0$. Како је низ $\left(C\left(\frac{x+x_n}{2}\right)\right)$ ограничен, десна (а самим тим и лева) страна израза (6) има за граничну вредност 0. То значи да је $\lim_{n\to\infty} S(x_n)=S(x)$, тј. функција $S(x)$ је непрекидна у тачки x.

Аналогно се доказује непрекидност функције $C(x)$ и из (5) следи

$$C(x'')-C(x')=-2\cdot S\left(\frac{x''+x'}{2}\right)\cdot S\left(\frac{x''-x'}{2}\right).$$

(б)

Ако у једнакост (5) заменимо $x''=x+2\pi$ и $x'=x$ добијамо

$$S(x+2\pi)-S(x)=2\cdot C(x+\pi)\cdot S(\pi).$$

Како је $S(\pi)=S\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot S\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot C\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, следи да је $S(x+2\pi)=S(x)$ за свако x одакле следи периодичност функције $S(x)$ са периодом 2π. Одатле следи да је $S(2\pi)=0$.

Ако у другу једнакост из (1) заменимо $x'=x$ и $x''=2\pi$ и користећи да је $S(2\pi)=0$, следи $C(x+2\pi)=C(x)\cdot C(2\pi)$ па следи да је $C(2\pi)=1$. Заменом у (1) $x'=\frac{\pi}{2}$ и $x''=\frac{\pi}{2}$, а затим и $x'=\pi$ и $x''=\pi$ следи $C(x+2\pi)=C(x)$, па је самим тим и функција $C(x)$ периодична са периодом 2π.

Својство периодичности нам дозвољава да се у нашим разматрањима ограничимо на сегмент $[0,2\pi]$. Из (2), (3) и непрекидности функције $S(x)$, следи да су вредности функције $S(x)$ на сегменту $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ненегативне при чему је $S(x)=0$ само у тачки $x=0$.

Из (1) и непарности функције $S(x)$ добијамо $S(\pi - x) = S(\pi)\cdot C(-x) - C(\pi)\cdot S(x)$, па уз $S(\pi)=0$ и $C(\pi)=-1$ следи $S(\pi - x) = S(x)$ за $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. То значи да су и на сегменту $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ вредности функције $S(x)$ ненегативне и при томе је на том сегменту $S(x)=0$ само за $x=\pi$.

Из једнакости $S(2\pi - x) = -S(x)$, која се добија аналогно једнакости $S(\pi - x) = S(x)$, следи да су на сегменту $[\pi, 2\pi]$ вредности функције $S(x)$ негативне или нула и при томе је $S(x)=0$ само на крајевима сегмента. Аналогно, утврђујемо да је функција $C(x)$ ненегативна на сегменту $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, а негативна или нула на сегменту $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ и једнака је нули само у тачкама $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

Приметимо да из (1) следи

$$S^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - C(x)}{2} \qquad \text{и} \qquad C^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + C(x)}{2} \tag{7}$$

Замењујући $x = x' + x''$ у (7) и применивши (1) још једном, добијамо

$$S^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{1 - C(x')\cdot C(x'') + S(x')\cdot S(x'')}{2}$$

$$C^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{1 + C(x')\cdot C(x'') - S(x')\cdot S(x'')}{2}.$$

Ове једнакости показују да ако су познате вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ у тачкама x' и x'', тада је јединствено одређена вредност тих функција у тачки $\frac{x' + x''}{2}$ пошто су нам из горе наведених разматрања познати знаци функција $S(x)$ и $C(x)$ на сегменту $[0, 2\pi]$. Како је период ових функција 2π, то нам је познат и знак ових функција у било којој тачки реалне праве.

Као последица тога што су вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ одређене на јединствен начин у тачкама 0, $\frac{\pi}{2}$, π и 2π сегмента $[0, 2\pi]$, примењујући горе добијене једнакости можемо на јединствен начин одредити вредности ових функција у тачкама облика $\frac{p\pi}{2^n}$ сегмента $[0,2\pi]$ ($p \in Z$, $n \in N$ и $p \leq 2^{n+1}$). Како је скуп бројева овог облика свуда густ скуп тачака на сегменту $[0,2\pi]$, следи да су функције $S(x)$ и $C(x)$ одређене на јединствен начин на целој реалној правој.

(2) Доказ постојања.

Доказаћемо општије тврђење.

Постоје функције $S(x)$ и $C(x)$, непрекидне на целој реалној правој које задовољавају следеће услове:

1° $S(x'+x'') = S(x') \cdot C(x'') + C(x') \cdot S(x'')$

$$C(x'+x'') = C(x') \cdot C(x'') - S(x') \cdot S(x'') \qquad (1^*)$$

$$S^2(x) + C^2(x) = 1$$

2° $S(0) = 0$, $C(0) = 1$

$$S(d) = 1, \qquad C(d) = 0 \qquad (2^*)$$

где је d неки фиксан позитиван број.

3° За $0 < x < d$ важи неједнакост $0 < S(x) < Lx$ (3*)

при чему, ако је $d = \frac{\pi}{2}$, тада је $L = 1$.

Одредимо прво вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ на скупу $\{s\}$ тачака сегмента $[0,d]$ од којих је свака облика $s=\frac{pd}{2^n}$, $p\in Z$, $n\in N$, $p<2^n$. Одредимо вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ у тачкама $s_n=\frac{d}{2^n}$, $n=0,1,\ldots$. Како је $s_{n+1}=\frac{s_n}{2}$, то из (7) следи

$$S(s_{n+1})=S\left(\frac{s_n}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-C(s_n)}{2}}, \qquad C(s_{n+1})=C\left(\frac{s_n}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+C(s_n)}{2}}. \tag{8}$$

Из $C(d)=C\left(\frac{d}{2^0}\right)=C(s_0)=0$ помоћу рекурентних формула (8) одређујемо вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ у свим тачкама облика $s_n=\frac{d}{2^n}$. Заједно са добијеним вредностима функција $S(x)$ и $C(x)$ у тачкама s_n добијамо и вредности у тачкама 0 и d.

Одредимо сада вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ у свим тачкама скупа $\{s\}$, $s=\frac{pd}{2^n}$, $p\in Z$, $n\in N$, $p<2^n$. Ѕнамо да се сваки цео позитиван број може записати као сума степена броја 2

$$p=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot 2^{n-i} \text{ где је } a_i \text{ нула или један.}$$

Одатле је

$$s=\frac{pd}{2^n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\cdot d}{2^i}=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot s_i\ . \tag{9}$$

На тај начин сваки број s можемо представити као коначну суму бројева s_i, при чему смо већ одредили вредности $S(s_i)$ и $C(s_i)$. Користећи (1*) сада можемо одредити вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ у тачкама скупа $\{s\}$.

Можемо записати $s=x'+x''$, где је $x'=a_1s_1$ и $x''=\sum_{i=2}^{n}a_is_i$. Вредност $S(s)$ рачунамо користећи (1*). Такође, можемо узети и $x'=a_1s_1+a_2s_2$ и $x''=\sum_{i=3}^{n}a_is_i$. Да бисмо доказали да узастопне примене једнакости (1*) дају исти резултат независно од начина бирања сабирака у суми (9), довољно је да докажемо следеће односе:

$$S[(x'+x'')+x''']=S[x'+(x''+x''')]$$

$$C[(x'+x'')+x''']=C[x'+(x''+x''')].$$

Тачност ових односа се утврђује непосредно двоструком применом једнакости (1*).

Нека $s', s'', s'+s'' \in \{s\}$ и представимо $s', s'', s'+s''$ у виду суме (9). Како смо доказали да вредности функција $S(s)$ и $C(s)$ за суму неких аргумената не зависе од начина груписања сабирака те суме, следи да ако $s', s'', s'+s'' \in \{s\}$ тада вредности функција $S(s)$ и $C(s)$ у тим тачкама задовољавају прве две једнакости из (1*). Из дефиниција функција $S(x)$ и $C(x)$ у тачкама 0 и d, следи да је $S^2(0)+C^2(0)=1$ и $S^2(d)+C^2(d)=1$. Из рекурентних формула (8) следи тачност тврђења $S^2(s_n)+C^2(s_n)=1$ за свако s_n, а непосредном провером

$$S^2(x'+x'')+C^2(x'+x'')=\left(S^2(x')+C^2(x')\right)\left(S^2(x'')+C^2(x'')\right)$$

следи тачност тврђења $S^2(s)+C^2(s)=1$ за све тачке скупа $\{s\}$.

Докажимо сада да за све тачке скупа $\{s\}$, различите од 0 и d важе неједнакости

$$0<S(s)<1, \quad 0<C(s)<1 \qquad (10).$$

За овај доказ користићемо индукцију. Сваком броју n доделимо групу елемената скупа $\{s\}$ које можемо представити у облику $\frac{pd}{2^n}$, $0<p<2^n$ где је p непаран број. Елементе те групе ћемо звати елементима реда n. Сваки елемент реда $n+1$ лежи између два узастопна елемента чији је поредак не већи од n и који се разликују за дужину $\frac{d}{2^n}$ тј. за дужину s_n.

Први елемент реда $n+1$ једнак је s_{n+1}. Сви остали елементи реда $n+1$ могу се добити додавањем вредности s_{n+1} на различите елементе реда n.

Из (8) следи

$$S(s_1)=\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad C(s_1)=\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

На овај начин смо доказали да су неједнакости (10) тачне за елементе реда 1.

Претпоставимо сада да неједнакости (10) важе за све елементе реда до n укључујући и n. Тада, по првој једнакости из (1*) вредности $S(s)$ су позитивне у свим тачкама реда $n+1$ и по (1*) не веће од 1.

Ако у прву једнакост из (1*) заменимо $x''=d$ и $x'=-s$ и користећи парност функције добијамо

па следи да је за функцију тачна неједнакост (10) и за елементе реда

зато што ако је реда , тада је и реда . По индукцији следи да је за све тачке скупа различите од и тачна неједнакост (10).

Нека је . Тада су и

и .

Из (5) и неједнакости (10) следи па следи да је функција растућа. Из односа следи да је функција опадајућа на скупу .

Псоматрајмо сада низ и покажимо да је и (постојање ових граничних вредности следи из монотоности и ограничености функција и на скупу .

За даљи доказ посматрајмо низ , где је . Из (8) следи

и

.

Одавде је

.

Дакле, па је низ опадајући и ограничен и има граничну вредност коју ћемо означити са , тј.

(11)

Како кад , то је и уз ограниченост следи

$$\lim_{n\to\infty} S(s_n)=\lim_{n\to\infty}\big(t(s_n)\cdot C(s_n)\big)=0 \tag{12}$$

Пошто је $C(s)>0$, из (12) и из $S^2(s_n)+C^2(s_n)=1$ следи да је

$$\lim_{n\to\infty} C(s_n)=1, \tag{13}$$

а из (11) и (13) следи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(s_n)}{s_n}=L. \tag{14}$$

Како је $\frac{S(s_n)}{s_n}=\frac{2\cdot S(s_{n+1})\cdot C(s_{n+1})}{2\cdot s_{n+1}}<\frac{S(s_{n+1})}{s_{n+1}}$, па је низ $\left(\frac{S(s_n)}{s_n}\right)$ растући. Затим, из (11) и (14) следи

$$\frac{S(s_n)}{s_n}<L<\frac{t(s_n)}{s_n} \text{ тј.}$$

$$S(s_n)<L\cdot s_n<t(s_n). \tag{15}$$

Нека је (s_n^*) било који конвергентан ка нули низ вредности s из скупа $\{s\}$. Тада је за било које n могуће одредити индекс k тако да је $0<s_n^*<s_k$. Отуда, по монотоности функције $S(x)$ на скупу $\{s\}$ имамо да је $0<S(s_n^*)<S(s_k)$ па из (12) следи да је $\lim_{n\to\infty}S(s_n^*)=0$.

Нека је (s_n') монотоно растући конвергентан ка x низ елемената скупа $\{s\}$.Тада, како је $(S(s_n'))$ растући и ограничен низ, постоји гранична вредност $\lim_{n\to\infty}S(s_n')=S(x)$. Нека је (s_n'') било који конвергентан ка x елемената скупа $\{s\}$ $(s_n''\neq x)$. Тада низ $\left(\left|\frac{s_n''-s_n'}{2}\right|\right)$ конвергира ка нули, па је по претходно доказаном $\lim_{n\to\infty}S\left(\left|\frac{s_n''-s_n'}{2}\right|\right)=0$. Из (5) и ограничености функције $C(x)$ следи

$$\lim_{n\to\infty}\left|S(s_n'')-S(s_n')\right|=\lim_{n\to\infty}C\left(\frac{s_n''+s_n'}{2}\right)\cdot S\left(\left|\frac{s_n''-s_n'}{2}\right|\right)=0.$$

Другим речима, $\lim_{n\to\infty}S(s_n'')=S(x)$. Због произвољности низа (s_n''), то значи постојање граничне вредности функције $S(s)$ дефинисане на $\{s\}$ у свакој тачки x сегмента $[0,d]$:

$$\lim_{s\to x}S(s)=S(x).$$

Из односа $S^2(s)+C^2(s)=1$ и ненегативности функције $C(s)$ на скупу $\{s\}$ следи постојање граничне вредности функције $C(s)$ у свакој тачки сегмента $[0,d]$. Означимо

$$\lim_{s\to x} C(s)=C(x).$$

Нека је x произвољан број сегмента $[0,d]$, а s' и s'' било који бројеви из скупа $\{s\}$ који задовољавају неједнакост $s'<x<s''$. Доказаћемо да је тада и $S(s')<S(x)<S(s'')$ ($C(s')>C(x)>C(s'')$ се доказује аналогно).

Нека је (s_n') конвергентан ка x растући низ бројева из скупа $\{s\}$ такав да сви елементи s_n' задовољавају неједнакост $s'<s_n'<x$. Како на скупу $\{s\}$ функција $S(s)$ расте, то низ $(S(s_n')-S(s'))$ расте и има позитивне вредности. На тај начин је $S(s')<S(x)$. Нека су сада x' и x'' два произвољна броја сегмента $[0,d]$ који задовољавају неједнакост $x'<x''$. Ако је s' неки број из скупа $\{s\}$ такав да је $x'<s'<x''$, то по доказаном важи $S(x')<S(s')<S(x'')$ тј. $S(x')<S(x'')$ (неједначина $S(x)<S(s'')$ се доказује аналогно). Овиме смо доказали монотоност функције $S(x)$ на сегменту $[0,d]$.

Размотримо произвољан број s из скупа $\{s\}$ и два конвергентна ка s низа (s_n') и (s_n'') елемената скупа $\{s\}$ таквих да је $s_n'<s<s_n''$. По монотоности функције $S(s)$ на скупу $\{s\}$ важе неједнакости $S(s_n')<S(s)<S(s_n'')$. Пошто је $\lim_{n\to\infty} S(s_n')=\lim_{n\to\infty} S(s_n'')$ и пошто су једнаке вредности $S(s)$, овиме смо доказали да се граничне вредности у тачкама скупа $\{s\}$ поклапају са вредностима те функције у одговарајућим тачкама скупа $\{s\}$.

Нека је (s_k') произвољан низ елемената скупа $\{s\}$ који конвергира слева тачки x. Како је $\lim_{k\to\infty} S(s_k')=S(x)$, за произвољно $\varepsilon>0$ можемо одредити елемент s_k' овог низа за који важи $0<S(x)-S(s_k')<\varepsilon$. Посматрајмо сада произвољан низ (x_n) који конвергира слева ка x. Нека је N број почев од кога важи $s_k'<x_n<x$. Због раста функције при $n\geq N$ важе неједнакости $S(s_k')<S(x_n)<S(x)$. Упоредимо је са неједнакошћу $0<S(x)-S(s_k')<\varepsilon$. Искористивши ове неједнакости, добијамо да за $n\geq N$ важи $0<S(x)-S(x_n)<\varepsilon$. Другим речима, гранична вредност функције $S(x)$ у тачки x слева једнака је њеној вредности у тој тачки. Овим смо доказали непрекидност слева функције $S(x)$ у тачки x. Непрекидност здесна и непрекидност функције $C(x)$ се доказују аналогно.

Користећи формуле $S(x+d)=C(x)$ и $C(x+d)=-S(x)$ одређујемо функције $S(x)$ и $C(x)$ на сегменту $[d,2d]$. Применивши ове формуле још једном, функције ширимо на сегмент $[2d,4d]$. На овај начин дефинишемо те функције за све позитивне вредности x. За негативне вредности, функције дефинишемо користећи особине парности и непарности функција $S(x)$ и $C(x)$.

На крају, доказаћемо да функције $S(x)$ и $C(x)$ задовољавају услове 1°, 2° и 3° формулисане на почетку доказа постојања (1*, 2* и 3*).

Приметимо да, ако s', s'' и $s'+s''$ припадају скупу $\{s\}$, то за ове вредности аргумента важе формуле (1*). Из показаног следи тачност ових формула за вредности аргумента $d+s'$ и s'', где $s',s''\in[0,d]$. Понављајући ова разматрања, доказујемо да су односи (1*) тачни за све вредности бесконачне праве облика $\frac{pd}{2^n}$, $p,n\in Z$. Пошто те вредности образују свуда густ скуп реалне праве, то ће зог непрекидности функција $S(x)$ и $C(x)$ односи бити тачни за све вредности x.

Пошто је услов (2*) коришћен приликом конструкције функција $S(x)$ и $C(x)$, остаје да се утврди тачност услова (3*). Приметимо да ако су s', s'' и $s'+s''$ елементи скупа $\{s\}$ сегмента $[0,d]$ и важе неједнакости $0<S(s')<Ls'$ и $0<S(s'')<Ls''$, то по првој формули из (1*) и неједнакости (10) такође важе и неједнакости $0<S(s'+s'')<Ls'+Ls''=L(s'+s'')$. Искористивши то, (9), (10) и (15) добијамо да су неједнакости $0<S(s)<Ls$ тачне за свако s из $\{s\}$ сегмента $[0,d]$. Пошто је тај скуп свуда густ на $[0,d]$, а $S(x)$ непрекидна функција, то за свако $x\in[0,d]$ важи неједнакост $0<S(x)<Lx$. Овиме смо потврдили и тачност тврђења (3*).

Приметимо да L зависи од избора d. Специјално, ако узмемо $d^*=\frac{d}{k}$, тада $s_n{}^*=\frac{s_n}{k}$. По конструкцији $S(s_n*)=S(s_n)$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{S(s_n*)}{s_n{}^*}=\lim_{n\to\infty}k\cdot\frac{S(s_n)}{s_n}=k\cdot L$. Ако изаберемо $k=\frac{1}{L}$ одређујемо на сегменту $[0,d^*]$ такве функције $S(x)$ и $C(x)$ које задовољавају неједнакост $0<S(x)<x$.

Геометријско тумачење показује да ако је $d=\frac{\pi}{2}$, то је $2S(s_n)$ тачно дужина странице правилног 2^n-тоугла уписаног у кружницу полупречника 1, $2s_n$ дужина кружног лука над тетивом $2S(s_n)$ и $2t(s_n)$ дужина стране правилног 2^n-тоугла описаног око те кружнице. Неједнакост (15) у том случају има облик $S(s_n) < s_n < t(s_n)$, па је у том случају $L = 1$. Тиме је тврђење теореме потпуно доказано.

Дефиниција. Функције $S(x)$ и $C(x)$ чије постојање и јединственост гарантује доказана теорема, називају се *синусном и косинусном функцијом*.

Поменимо на крају да се све формуле које се стандардно користе у раду са тригонометријским функцијама изводе директно из адиционих формула које су, са своје стране, или део дефиниције (као у овој глави) или следе лако из ње (као у случају увођења помоћу редова).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аднађевић Д., Каделбург З., *Математичка анализа I*, Наука, Београд, 1995
2. Аднађевић Д., Каделбург З., *Математичка анализа I I*, Наука, Београд, 1994
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г., *Основы математического анализа*, Наука, Москва, 1980
4. Матељевић М., *Комплексне функције 1 & 2*, Друштво математичара Србије, Београд 2006

Садржај