Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Jelena Rusov

Pregled Hab Lokacijskih Problema i Metoda za Njihovo Rešavanje

Diplomski (master) rad

B e o g r a d

2011

Mentor: **Docent dr Zorica Stanimirović**
Matematički fakultet u Beogradu

Članovi komisije: **dr Boško Jovanović**
Matematički fakultet u Beogradu

dr Aleksandar Savić
Matematički fakultet u Beogradu

Datum odbrane: ____

Pregled hab lokacijskih problema i metode za njihovo rešavanje

Rezime

Habovi predstavljaju centre konsolidacije i kolekcije protoka u mreži između dve lokacije. U hab mrežama transport snabdevač-korisnik dozvoljen je preko izabranog skupa habova umesto direktnog snabdevanja svakog korisnika od njemu pridruženog snabdevača. Suština hab lokacijskih problema je određivanje optimalne lokacije habova u odnosu na koje se vrši alokacija ne-hab čvorova u cilju rutiranja saobraćaja između odlazno-dolaznih parova. Velika primena hab lokacijskih problema je u telekomunikacionim i transportnim sistemima, sistemima brze isporuke, prevoženju putnika i robe u avio saobraćaju, poštanskim mrežama, isporukama tereta, odnosno u situacijama gde treba uspostaviti saobraćaj od početnih do krajnjih odredišta. Ovaj rad se bavi klasifikacijom hab lokacijskih problema i metoda za njihovo rešavanje.

Ključne reči: *Habovi, Jednostruka/Višestruka alokacija, Hab lokacijski problemi, Odlazno-dolazni čvorovi, Snabdevači, Metode*

Review of hub location problems and methods for their solution

Abstract

Hubs represent the centers of consolidation and collection of network flow between two locations. In hub networks, supplier-user transport is allowed via a chosen set of hubs instead of a direct supply of every user by his supplier. The essence of hub location problems is determining the optimal hub location which serves as the base for allocation of non-hub knots for the purpose of traffic routing between departure/arrival pairs. The major application of hub location problems is in telecommunication and transport systems, fast delivery system, air passenger and cargo transport, postal networks, cargo delivery, in other words, in situations where it is neccessary to establish the traffic from starting to final destinations. This paper deals with classification of hub location problems and their solving methods.

Key words: *Hubs, Single/Multiple allocation, Hub Location Problems, Origin-destination nodes, Facilities, Survey*

PREDGOVOR

Rad se sastoji od šest poglavlja. U prvom, uvodnom poglavlju, su definisani osnovni pojmovi lokacijskih problema (oblast primene, struktura, osobine i Weber-ov problem), mrežnih, diskretnih i neprekidnih lokacijskih problema kao i pojam NP-teških problema. Druga celina daje osnovne informacije o hab lokacijskim problemima, osnovne pojmove, primere, primene, istorijat kao i kratak opis problema jednostruke i višestruke alokacije i hab lokacijskih problema ograničenih kapaciteta. Naredna tri poglavlja su posvećena problemima: hab medijane, hab centra, lučnim hab lokacijskim problemima, problemima hab pokrivanja kao i nekim naprednijim konceptima (poput Stackelberg-ovih i pouzdanih *p*–hab lokacijskih problema). Zaključak rada je prikazan u poslednjem - šestom poglavlju.

Želela bih da se zahvalim mentoru doc. dr Zorici Stanimirović na rukovođenju pri izradi ovog rada. Dugujem joj posebnu zahvalnost zbog razumevanja, podrške, utrošenog vremena i energije za prevazilaženje problema koji su se pojavljivali tokom rada. Takođe, zahvalila bih se članovima komisije dr Bošku Jovanoviću i dr Aleksandru Saviću na korisnim sugestijama koje su doprinele kvalitetu ovog rada.

Naročito se zahvaljujem svojoj porodici, prijateljima i kolegama sa posla na razumevanju i ogromnoj podršci čime su mi rad učinili neuporedivo lakšim.

Beograd, 2011.

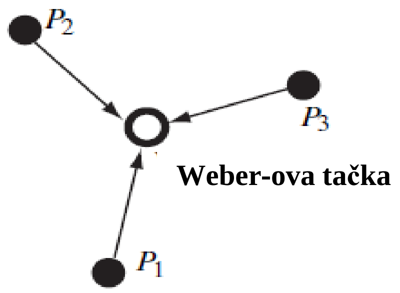
Kandidat
Jelena Rusov

1. UVOD

1.1 Lokacijski problemi

Lokacijski problemi su u poslednjih nekoliko decenija doživeli pravu ekspanziju kroz praktičnu primenu pri projektovanju mreža različitog tipa, na primer određivanje lokacija za izgradnju škola, bolnica, skladišta, industrijskih postrojenja, autobuskih stanica, aerodroma, tržnih centara i drugih sličnih problema. Cilj je zadovoljiti potrebe korisnika uz svođenje troškova transporta na minimum. Lokacijska optimizacija na duži rok ima strukturu lanca, koja odgovara zahtevu da profit bude što je moguće veći, troškovi eksploatacije što je moguće manji, uz najviši mogući kvalitet usluge s tim da budu ispunjeni, ukoliko postoje, svi specifični tržišni i drugi zahtevi.

Prvi ko je ukazao na praktičan značaj lokacijskih problema je Alfred Weber. On je u svojoj knjizi [Web09], koristeći jedan od prvih lokacijskih problema u istoriji matematike (ako su date tri tačke u ravni, naći četvrtu tačku takvu da je suma njenih rastojanja do preostalih triju tačaka minimalna, Slika 1.1.1) predstavio problem minimizacije troškova transporta u industriji. Suština Weber-ovog problema je naći optimalnu lokaciju za industrijsko postrojenje tako da cena transporta bude minimalna. Svaka tačka ima svoju „težinu“ i on je dve, od tri, fiksirane tačke označio kao resurse sirovina, a treću kao lokaciju potrošača. Do idealne lokacije je došao konstruktivnim putem, a predložio je i postupak za rešavanje problema čije su dimenzije veće od 3.



Slika 1.1.1 Weber-ov problem

Formulacija Weber-ovog problema nalaženja optimalne lokacije skladišta (x, y):

$$\min_{(x,y)} W(x,y) = \sum_{i=1}^{n} w_i d_i(x,y) \text{, gde je}$$

$d_i(x,y) = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$ Euklidovo rastojanje tačaka (x, y) i (x_i, y_i),

(x_i, y_i) $i=1,...,n$ koordinate n fiksiranih tačaka (lokacije potrošača),

w_i $i=1,...,n$ odgovarajuće težine (cena transporta do datog potrošača po jedinici dužine).

Weber-ov problem je jednostavan problem lokacije snabdevača, jer se locira jedan snabdevač uz pomoć jedinog kriterijuma optimizacije (minimizacije sume rastojanja zadatog skupa tačaka). Jedan od najjednostavnijih primera ovog problema je lokacija skladišta, težina w_i koje predstavljaju troškove jedinice rastojanja transporta ka potrošačima koji su na lokacijama (x_i, y_i).

Posmatrajući istovremene lokacije snabdevača mogu se izvršiti dve generalizacije problema:

1) *Weber-ov problem višestrukog broja snabdevača (Multifacility Weber problem):* nekoliko snabdevača, svaki sa različitim proizvodom (ili različitog servisiranja) su locirani tako da je minimizovana suma težinskih rastojanja između svih korisnika i snabdevača. Ovo je problem konveksne optimizacije sa funkcijom cilja koja nije diferencijabilna jer se dva objekta (snabdevači ili korisnici) mogu podudarati, odnosno mogu biti na istoj lokaciji [Mla*xx*].
2) *Višeizvorni Weber-ov problem (Multisource Weber problem):* lokacija snabdevača, koji proizvode isti proizvod, se određuje minimizacijom suma težinskih rastojanja svih korisnika do njima najbližih snabdevača. Problem se može rešiti algoritmom zamene lokacije-alokacije (Location-Allocation algorithm - ALT) [Coo63], kao i metodom projekcije (Projection metod - MPROJ) kojom se problem rešava u $R^{2n+pn-p}$ prostoru, gde su n i p, redom, broj korisnika i snabdevača. MPROJ metodom rastojanje se može računati uz pomoć bilo koje l_p norme i olakšani su {0,1} uslovi alokacije [Conn94]. Diskretan oblik višeizvornog Weber-ovog problema je problem p-medijane. U problemu p-medijane snabdevači moraju biti locirani unutar zadatog skupa, jer se u suprotnom dobija višeizvorni Weber-ov problem. Često se izabrane lokacije snabdevača, višeizvornog Weber-ovog problema, poklapaju sa lokacijama korisnika. U slučaju p=1 dobija se dobro poznati Weber-ov problem [Mla*xx*].

Weber-ov problem se može primeniti i na praktične geografske probleme jer je baziran na geometrijskoj prezentaciji lokacijskih problema. Tipična primena su zabranjene i ograđene oblasti unutar kojih su ograničeni snabdevači. Zabranjene oblasti se mogu koristiti za modelovanje parkova ili drugih zaštićenih regiona. Ograđene oblasti, kroz koje je zabranjen saobraćaj, se koriste za modelovanje vojnih oblasti, planinskih lanaca, jezera, velikih reka, ili u manjoj meri za mašine i prenosne trake u industriji. Ako je zabranjena oblast *R* predstavljena povezanim skupom, sa metrikom *d*, tada je optimalno rešenje, uz pomoć Weber-ovog problema, na granici skupa *R*. Ograđene oblasti za Weber-ov problem nameću veća ograničenja i imaju nekonveksne funkcije rastojanja, jer je u regionu zabranjen saobraćaj i lokacije snabdevača su ograničene unutar njega. Rastojanje u ograđenim oblastima, između snabdevača i korisnika je definisano kao dužina najkraćeg puta koji povezuje dve tačke i koji ne preseca unutrašnjost ograničene oblasti. Većina lokacijskih problema sa ograđenim oblastima ima specijalna ograničenja ili funkcije rastojanja. Primena Weber-ovog problema može biti i u lociranju dimenzionih snabdevača (ne tačaka) kao što su putevi, delovi puteva, granice, staze, skverovi ili obilaznice. To su modeli koji potiču iz železničkih mreža, planiranja autoputeva i postrojenja.

Mnoge generalizacije problema su bazirane na modifikaciji funkcije cilja osnovnog Weber-ovog problema. Na primer, troškovi transporta su uopšteniji problem u kome se zahteva da funkcija rastojanja bude složenija i neprekidna, s tim da se uslov da težine moraju biti nenegativne može izbaciti. U tom slučaju su snabdevači „izgurani napolje“ iz zahtevnih tačaka i kao takvi nazivaju se nepoželjnim snabdevačima (obnoxious facility), što će dovesti do nove funkcije cilja koja maksimizuje sumu rastojanja zahtevnih tačaka [Loz00, Dre90].

Takođe Weber-ov problem se može posmatrati kao stohastički ili problem optimizacione dinamike. Na primer, može se desiti da zahtevne tačke nisu fiksirane, da uopšte nisu tačke, ali da mogu biti predstavljane po oblastima sa nekom funkcijom gustine. Ovakav pristup se može koristiti kod skupa zahtevnih tačaka koji je prevelik da bi se mogao prikazati pojedinačnim tačkama, ili kod modela raspodele verovatnoće tražnje nad oblastima.

Weiszfeld-ova procedura je standardan način rešavanja Weber-ovog problema. Endre Vaszonyi Weiszfeld je formulisao praktičan metod nalaženja mediane (Weiszfeld-ova procedura) u čijoj je osnovi gradijentna metoda, kao minimum sume Euklidovih rastojanja tačaka različitih težina [Wei36]. Ova metoda je iterativna procedura koja predstavlja postupak delimičnog odvajanja tačaka (x, y) od ekstremnih jednačina. Sama procedura je elegantna, jednostavna i u svakom koraku poboljšava rešenje, ali spora u okolini fiksne tačke.

Weber-ov problem je prvi postavljen lokacijski problem koji je baza mnogih modela (objekti korišćeni u mnogim modelima uključuju minisum - standardan Weber-ov problem). Kao osnova lokacijskog modela omogućava proučavanje drugih okruženja (mreže ili zemljine kugle) i predmet je proučavanja do današnjeg dana.

1.2 Lokacijski problemi u realnom prostoru. Mrežni lokacijski problemi

U lokacijskoj teoriji srećemo problem koliko novih objekata smestiti u prostor u kome već postoje drugi objekti povezani izvesnim relacijama. Jedna od prvih klasifikacija lokacijskih problema je na osnovu toga da li je nov objekat poželjan, delimično poželjan ili nepoželjan. Poželjni objekti pružaju dobre usluge postojećim objektima i osnovni cilj je da su im što bliže. Tipični primeri su: distribucioni centri, službe za hitnu pomoć, prodavnice, vatrogasne službe, službe za održavanje, dečiji vrtići, škole itd. Delimično poželjni objekti su oni koji treba da budu što je moguće dalje od stambenih jedinica, ali da to nije predaleko, tu spadaju deponije smeća koje treba da su što dalje od stambenih jednica, ali ne predaleko, s obzirom na svakodnevne transportne troškove odnošenja smeća. Nepoželjni objekti ugrožavaju postojeće i treba ih postaviti što dalje od njih, na primer skladište opasnog materijala. Lokacijski problemi se mogu klasifikovati i na osnovu: topoloških karakteristika, namera ili ciljeva, metoda rešavanja, karakteristika snabdevača ((ne)ograničenog kapaciteta) itd.

Lokacijski problemi se na osnovu prostora u kome su locirani čvorovi mreže (klijenti i snabdevači) i metrike mogu podeliti na

- Lokacijske probleme u realnom *n*-dimenzionom prostoru, koji mogu biti
  - diskretni
  - neprekidni
- Mrežne lokacijske probleme, koji mogu biti
  - diskretni
  - neprekidni

Rastojanja u *n*-dimenzionom prostoru se mogu definisati pomoću raznih metrika. Specijalno, l_p ($1 \leq p \leq +\infty$) metrika za par tačaka (a_i, b_i) i (a_j, b_j) se definiše kao

$$d_{ij}^p = \left[\left| a_i - a_j \right|^p + \left| b_i - b_j \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

U literaturi su najzastupljenije metrike za vrednosti prametra p=1, 2, ∞:

1) p=1 $d_{ij} = |a_i - a_j| + |b_i - b_j|$
2) p=2 $d_{ij}^2 = (|a_i - a_j|^2 + |b_i - b_j|^2)^{1/2}$ (Euklidova metrika)
3) $p=\infty$ $d_{ij}^\infty = \max\{|a_i - a_j|, |b_i - b_j|\}$ (l_∞ metrika).

Korišćenje raznih metrika u mnogobrojnim istraživanjima dovelo je do zaključka da je, za praktične probleme, najefikasnija l_p metrika. Razlog tome je memorijski prostor, naime koordinate n zadatih tačaka zauzeće $O(n)$ memorije, dok sva rastojanja od tačke do tačke zauzimaju $O(n^2)$ memorijskog prostora. Kao takva l_p metrika je najzastupljenija u lokacijskim problemima u realnom prostoru (više u [Lov88]).

Mrežni lokacijski problemi predstavljaju kombinaciju diskretnih i neprekidnih problema. Mogu imati diskretna rešenja koja se nalaze u temenima grafa, ili neprekidna rešenja koja se nalaze na lukovima. Poseban slučaj mrežnih modela su tkz. hab modeli. Rastojanja u mrežnim lokacijskim problemima se računaju kao najkraći put unutar mreže koji spaja dve tačke. O'Kelly [O'Ke86], Aykin [Ayk88, Ayk95] su proučavali probleme u ravni, dok se mrežnim hab lokacijskim problemima bavio Klincewich [Kli91]...

1.2.1 Diskretni lokacijski problemi

U diskretnim lokacijskim problemima snabdevači mogu biti postavljeni samo u ograničenom broju dopustivih tačaka u ravni ili u mreži. Uglavnom su vrlo teški za rešavanje i većina ih spada u NP-teške probleme [Gar79, Cre97]. Najpoznatiji diskretni mrežni lokacijski problemi su: problemi maksimalnog pokrivanja (maximal covering problems), problemi *p*-centra (*p*-center problems), *p*-medijane (*p*-median problems), problemi fiksnih troškova (fixed charge problem), lokacije habova (hub location problems), maksimalne sume (maxisum problem) itd. U svim ovim modelima, poznata je mreža, lokacije korisnika koji treba da budu usluženi i lokacije postojećih snabdevača. Potrebno je locirati nove snabdevače, ili relocirati postojeće, da bi se zadovoljili neki postavljeni uslovi. Diskretni lokacijski problemi imaju veliku primenu u svakodnevnom životu, u vidu ispunjavanja zahteva korisnika, pri minimizaciji troškova transporta, kao što je određivanje lokacija raznih javnih objekata. Primena diskretne mreže habova je u dostavnim sistemima, kao i avio i drugim vidovima prevoza putnika i robe.

Ne postoji opšti matematički model koji dobro opisuje sve diskretne probleme koji se susreću u praksi. Razlog tome je specifičnost lokacijskih problema (uslovi, funkcija cilja i promenljive) koji zavise od problema na koji se odnose. Zbog toga većina egzaktnih metoda ne mogu rešiti instance problema velikih dimenzija u razumnom vremenu. Zato je do sada razvijen čitav niz najraznovrsnijih heurističkih metoda koje su prilagođene karakteristikama i strukturi specijalnih vrsta problema, ali koje su zavisne od prirode problema. O egzaktnim i heurističkim metodama će biti reči u narednim poglavljima.

1.2.2 Neprekidni lokacijski problemi

Polazne pretpostavke kod neprekidnih lokacijskih problema (problema u ravni):

1) Rastojanja se mere odgovarajućom metrikom (najzastupljenije su Euklidova i l_p -metrika) i
2) Neprekidan prostor, što je veoma praktično za lociranje snabdevača u svakoj tački u prostoru.

Snabdevači, koje treba locirati, mogu biti postavljeni bilo gde u ravni ili unutar mreže i cilj je minimizovati postavljene uslove. Na primer, minimizovati sumu svih rastojanja između snabdevača i datog broja zahtevanih tačaka, fiksne troškove, najduže rastojanje... Ovi problemi pripadaju lokacijskim problemima koji dopuštaju postavljanje objekata na bilo koju lokaciju u kontinualnom prostoru u kojem se nalaze i drugi objekti. Za primer neprekidnih lokacijskih problema u ravni može se uzeti postavljanje helikoptera za prvu pomoć, ambulanti duž autoputeva...

O'Kelly je dao prvu formulaciju modela gde habovi mogu biti locirani bilo gde u prostoru tako da je suma kvadrata rastojanja minimalna [O'Ke87]. Pored neprekidnih lokacijskih problema u prostoru, postoje i neprekidni lokacijski problemi na sferi u kojima se odvojeno raspoređuju zahtevi [Ayk92]. Formulaciju neprekidnih lokacijskih problema u kojima se zahtevi podjednako šire u zadatoj oblasti, dao je Suzuki [Suz97]. U literaturi je razmatrano nekoliko varijanti i proširenja: Hab lokacijski problemi (Hub location problem [Gel08]), Sferni lokacijski problemi (Spherical location problem [Jay05]), Problemi sa barijerama (Problems with barriers [Ham94, Kla01]), Lokacijski modeli sa željenim i neželjenim snabdevačima (Location problems with both desirable and undesirable facilities [Che92]), Minmax lokacijski modeli (Minmax location models [Kra79, Lov88]), Lokacijski problemi snabdevača (Facilities location problem [Mel07]), 1-medijalni problemi (One-median problem [Dre07])...

Složenost diskretnih lokacijskih problema raste sa povećanjem broja kandidata za habove. Neprekidni lokacijski problemi su u prednosti jer nemaju navedene poteškoće, međutim i pored toga im je posvećeno mnogo manje pažnje nego diskretnim lokacijskim problemima.

1.3 NP-teški problemi

Def.1 Problem odlučivanja je problem za koji se rešenje dobija u oblku DA ili NE odgovora.

Def.2 Nedeterministički algoritam je algoritam koji osim uobičajenih operacija može obavljati i tri specijalne operacije:

1. Choice (m,n)…odabira element iz skupa {m,$m+1$,…n}
2. Failure ( )…signalizira neuspeh i završava algoritam
3. Success ( )…signalizira uspeh i završava algoritam.

Def.3 Deterministički algoritam je onaj algoritam koji će za zadati ulaz uvek dati istu izlaznu vrednost, koja je posledica prolaska kroz tačno definisana stanja.

Def.4 P je skup svih problema odlučivanja koji su rešivi determinističkim algoritmom u polinomijalnom vremenu.

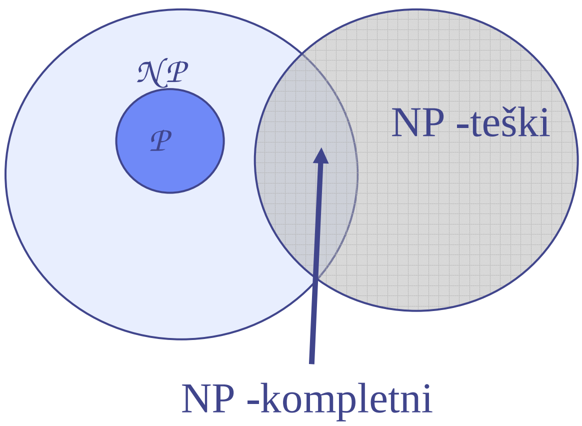
Kod problema sa polinomskom složenošću složenost je $O(n^k)$, gde je k neka konstanta.

Def.5 Klasa problema odlučivanja koji se mogu rešiti u polinomijalnom vremenu pomoću nedeterminističkog algoritma označava se sa NP (prema nedeterministički polinomijalni). Problem pripada klasi NP, i naziva se NP-problem, ako se za neko izabrano potencijalno rešenje može determinističkim polinomskim algoritmom proveriti da li je i stvarno rešenje. Problem iz klase NP može samo verifikovati rešenje u polinomijalnom vremenu izvršavanja.

Def.6 NP-problem se naziva NP-kompletan ako za svođenje bilo kojeg NP-problema na posmatrani problem postoji polinomijalni algoritam, tj. ako se bilo koji NP-problem polinomijalno transformiše u posmatrani problem.

U klasi NP problema može se izdvojiti grupa najtežih problema koji se nazivaju NP-kompletni. Neki problem se smatra NP-kompletnim ako pripada klasi NP i svaki drugi problem iz NP je polinomijalno svodljiv na dati problem.

Problem koji nije problem odlučivanja, a čije rešavanje nije jednostavnije od rešavanja nekog NP-kompletnog problema, naziva se NP-težak [Cve96, Gar79, Gib85]. Problem je NP-težak ako i samo ako postoji ekvivalentan problem odlučivosti koji je NP-kompletan. NP-teški problemi predstavljaju kombinatorne probleme za čije rešavanje nisu poznati algoritmi s vremenom računanja koje zavisi od veličine problema, tj. čija se složenost može izraziti polinomnom funkcijom (npr. linearnom, kvadratnom, kubnom,...).



Slika 1.3.1 Grafički prikaz odnosa skupova NP, P, NP-teških i NP-kompletnih problema

Iako nikad nije dokazano, veruje se da odnos skupova NP, P, NP-teških i NP-kompletnih problema izgleda kao na Slici 1.3.1. Optimizacijski problem može biti NP-težak, a da pritom nije i NP-kompletan. Problem trgovačkog putnika u originalnoj optimizacionoj verziji je NP-težak.

Prva formulacija lokacijskih problema, kao kvadratni problem celobrojnog programiranja sa nekonveksnom funkcijom cilja, koju je definisao O'Kelly, spada u NP-teške probleme, čak i kada su lokacije habova fiksne [Lov88]. Veliki broj hab lokacijskih problema i nekih potproblema, spadaju u klasu NP-teških [Gar79, Cre97]. Na primer, USApHCP je NP-težak, što je dokazano u [Ern04b]. Takođe, za unapred zadat skup habova, kao i pri pretpostavci da nema redukovane cene transporta (α=0), dobija se potproblem optimalnog pridruživanja habova ne-hab čvorovima koji je takođe NP-težak [Ern04b]. Problemi hab pokrivanja pripadaju navedenoj klasi problema što su, i pored različitih linearnih formulacija samog problema, pokazali Kara i Tansel [Kar03]. Još jedan pripadnik klase NP-teških problema su i USApHMP. Čak i ako je zadat skup habova, pridruženi potproblem optimalne alokacije ne-hab čvorova je NP-težak. Diskretni lokacijski problemi su uglavnom vrlo teški za rešavanje. Štaviše, većina spada u NP-teške probleme ([Gar79, Cre97]), kao i problemi celobrojnog, 0-1 programiranja... Postoje specijalni slučajevi hab lokacijskih problema koji se mogu rešiti u polinomijalnom vremenu, kao što su problemi 1-hab medijane i 1-hab centra (oni su p=1 polinomske složenosti) i potproblemi p-medijane (centra) neograničenog kapaciteta sa višestrukim alokacijama koji nastaju fiksiranjem skupa habova.

NP-teški problemi velikih dimenzija ne mogu se rešavati pretragama, pa su iz tog razloga predložene razne metode (heuristike) za njihovo rešavanje. Rešenja koja se dobijaju putem heuristika nazivaju se suboptimalna. Za mnoge NP-teške probleme postoje efektivne, brze heuristike. Često se u praksi pomoću njih može dobiti optimalno rešenje, ali se ne može verifikovati njegova optimalnost. Izazov u datom slučaju može biti u pronalaženju načina u korišćenju poznatih heuristika i vrednosti funkcije cilja kao izvora informacija kada se traga za optimalnim rešenjem.

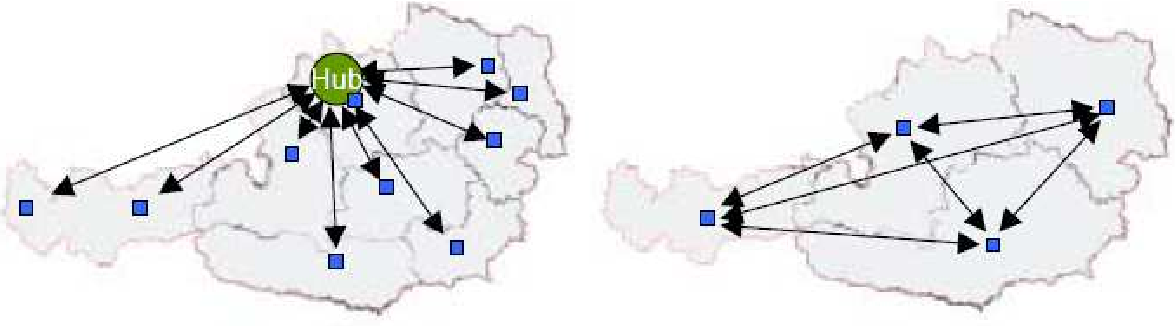
Postojeće egzaktne metode za rešavanje hab lokacijskih problema mogu rešiti samo instance problema relativno malih dimenzija. Jedan od razloga je što su hab lokacijski problemi teški za rešavanje, a to se posebno vidi iz činjenice da su čak i njihovi potproblemi sa fiksiranim habovima takođe NP-teški.

2. HAB LOKACIJSKI PROBLEMI

Klasične lokacijske mreže se zasnivaju na tome da svaki korisnik očekuje da bude snabdeven, direktnom interakcijom, i to od strane njegovog pridruženog snabdevača. Suprotno tome, napredniji koncepti lokacijskih mreža su strukturirani tako da su neki od čvorova u mreži izabrani da izgrade posredničku strukturu. Ova struktura, takozvana hab mreža, upravlja samim tokom i opslužuje potrebe korisnika i snabdevača. Mrežom se postiže ekonomičnost bazirana na faktoru uštede, *economic discount factor*, α ($0 < \alpha \leq 1$), koji se odnosi na bilo koji transportni trošak unutar hab mreže. Za razjašnjenje suštine problema dizajniranja mreže iskorišćena je studija iz realnog života [Was05].

Treba formirati mrežu prijema i isporuke za Austriju, sa dvadesetčetvoročasovnom servisnom garancijom čija je oblast izdeljena na 2042 podoblasti (sveobuhvatne geografske poštanske zone identifikovane poštanskim brojevima) za dostavu i prijem paketa iz drugih zona, sa predviđenim obimom prometa. Povezivanjem graničnih podoblasti dobija se graf. Odabir poštanske zone je posledica rezultata na nivou agregacije u okviru strateškog planiranja mreže, jer se samo u okviru toga može predvideti razumna količina pošiljki. Mreže prevoza pošiljki se za većinu postojećih preduzeća zasnivaju na strukturama koje rastu u skladu sa rastom kompanije.

Moguća rešenja problema prikazana su na Slici 2.1.



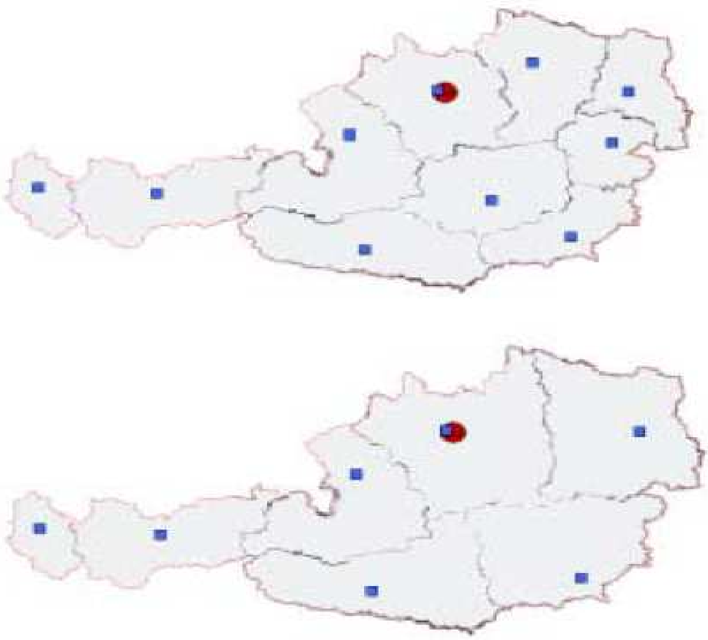
Slika 2.1 Moguće varijante mrežnog sistema Austrije

Rešenje prikazano na levoj strani koristi hab strukturu (10 snabdevača, svaki u po jednoj oblasti Austrije; habovi su uvek postavljeni unutar poštanskih zona), dok je rešenje sa desne strane realizovano uz pomoć 4 snabdevača (direktni saobraćaj) sa direktnim transportom među njima i definisanim oblastima koje oni opslužuju. U hab strukturi dnevni protok je oko 40.000 pošiljki.

Struktura transporta se određuje na osnovu toga da li se transport sprovodi kao direktni saobraćaj (isključivo sa snabdevač-snabdevač kobilice transportom Slika 2.1, desno) ili se uspostavljaju habovi (uporedite Slika 2.1, levo). Zadati uslovi kao što su količina pošiljki, unapred određene oblasti, korisnikova očekivanja dostavnih sistema, omogućiće optimalnu mrežu koja podrazumeva broj i lokaciju snabdevača i habova, granice oblasti i tip mreže (raster ili hab sistem). Prijem i isporuka pošiljki, zbog male veličine Austrije kao zone, ne može biti mreža sa više od jednog haba.

Visoki troškovi prijema i isporuke (koji iznose oko 60% ukupnih troškova) zahtevaju obradu posebnih organizacionih procesa (24-časovne poštanske službe, prijem, isporuku), planiranje ruta, infrastrukture (naročito za Austriju: Alpi, reke, doline, Autobahn, naplata putarina...), kao i razne vrste troškova (uključujući fiksne troškove za snabdevače i habove ili fiksne troškove za prijem i isporuku). Geografski sveobuhvatan sistem isporuke zahteva, da se u toku planiranja strateškog položaja (konfiguracije mreže) utvrdi broj i lokacije habova i snabdevača, kao i njihove servisne oblasti. Broj i lokacija snabdevača zavise od prijema i dostave, jer broj klijenata koji će biti usluženi zavisi isključivo od vremena koje je potrebno da se dođe od jednog do drugog snabdevača. Vreme prolaska između dva snabdevača zavisi od organizacije i infrastrukture. Dodela klijenta snabdevaču (određivanje oblasti koju opslužuje snabdevač) zavisi od dizajna prijema i dostave, količine pošiljki koju može da primi jedan snabdevač, i utiče na određivanje putanje transporta, i na optimalan broj habova i njihovih lokacija.

Troškovi mreže od jednog haba i deset snabdevača iznose 1.000.000 novčanih jedinica. Studija prikazana u radu [Was05] pokazuje da promenom mesta servisnih oblasti (snabdevača) troškovi mogu biti smanjeni za 2,3%. Ako je kapacitet snabdevača neupotrebljiv ili je snabdevač blizak drugom snabdevaču tada treba razmatrati njihovo gašenje. Kao što je i pokazano u radu [Was05], ukoliko se ugase tri snabdevača i promene granice opsluživanja svakog snabdevača, moguće je uštedeti 10,8% potencijala, Slika 2.2 (plavim kvadratićima su predstavljeni snabdevači, a crvenim kružićem hab).



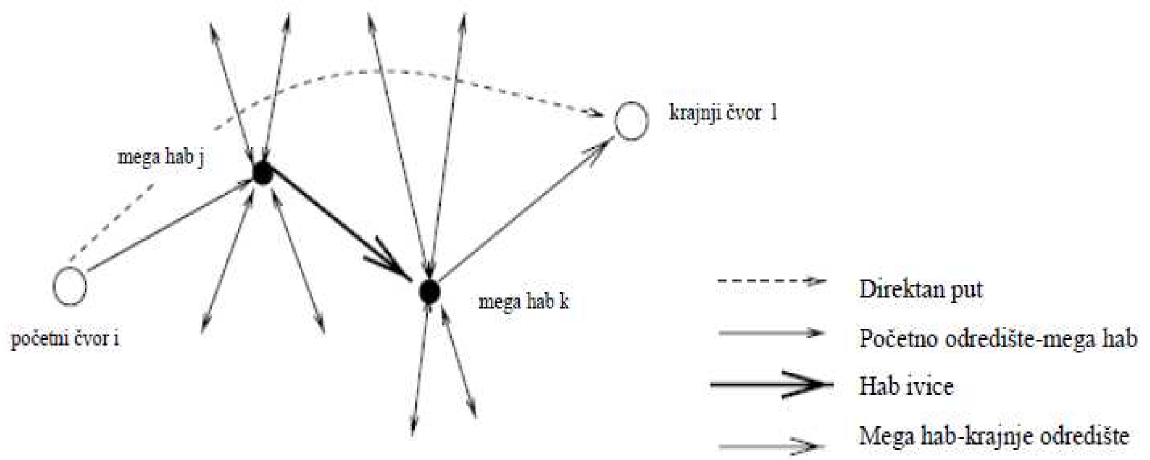
Slika 2.2 Prikaz pre i nakon isključivanja tri snabdevača i izmene granica oblasti

Navedenom studijom je pokazano da je optimalna mreža za sistem prijema i isporuke u Austriji, u stvari hab mreža sa sedam snabdevača (i isto toliko oblasti koje svaki opslužuje). Troškovi iznose 853.000 novčanih jedinica i u odnosu na navedene primere ušteda potencijala je za 14,7%, Slika 2.3.

Slika 2.3 Optimalna mreža prijema i dostave za Austriju

Formulacija hab lokacijskog problema: *Neka je G potpun graf G=(I,E), a I konačan neprazan skup čvorova. Elementi skupa I predstavljaju početna i krajnja odredišta, kao i potencijalne habove. Skup dvoelementnih podskupova skupa I je označen sa E i njegove elemente nazivamo granama. Saobraćaj (protok) između čvorova i i j je* w_{ij}, *a* d_{ij} *rastojanje koje može, a i ne mora, da zadovoljava nejednakost trougla. Cilj je neke od ovih tačaka proglasiti habovima, a zatim pridružiti ne-hab čvorove habovima da bi se zadovoljili* *određeni uslovi. Troškovi transporta se sastoje od tri komponente: troškovi sakupljanja (collection) od polaznog odredišta do alociranog haba, troškovi prenosa (transfer) tokom transporta između habova i troškovi raspodele (distribution) od alociranog haba do krajnjeg odredišta.*

Hab lokacijski problemi nastaju u sistemima brze isporuke, prevoženju putnika i robe u avio-saobraćaju, poštanskim mrežama, železničkim i drumskim sistemima, odnosno u situacijama gde treba uspostaviti saobraćaj od početnih do krajnjih odredištava. U hab lokacijskim problemima postoji saobraćajni tok koji prolazi kroz sve čvorove ali saobraćaj ne protiče direktno od početnog do krajnjeg odredišta. Saobraćaj se usmerava kroz intermedijalne čvorove - habove i kroz intermedijalne lukove koji ih spajaju, Slika 2.4. Optimalna lokacija habova unutar mreže znatno je teži problem u odnosu na druge lokacijske probleme jer su habovi u interakciji sa svima ostalima. Habovi, kao neki od izabranih čvorova mreže, predstavljaju centre konsolidacije i kolekcije protoka u mreži između dve lokacije. Usmeravanjem saobraćaja kroz habove umanjuju se troškovi trasiranja toka između svaka dva čvora koji zavise od vremena ili rastojanja. U pojedinim slučajevima postoje fiksni troškovi koji se odnose na postavljanje habova. Kapacitet mreže se može efikasnije iskoristiti koristeći habove kao tačke preusmeravanja protoka i povećavanjem transporta između njih. Cena transporta između habova po jedinici količine je niža, što dovodi do smanjenja ukupnih troškova transporta u mreži.



Slika 2.4 Primer odlazno-dolaznog čvora u hab mreži

Dve osnovne funkcije hab čvorova su

1. funkcija povezivanja - dopušta transfer, kako putnicima tako i robi, od jednog transportnog vozila do drugog i
2. funkcija konsolidacije i preopterećenja koja omogućava putnicima ili robi promene vozila različitih veličina i naplatnih struktura.

Velika vozila imaju manju cenu jedinice prevoza zbog jake transportne skale ekonomičnosti. Na primer, trošak po putničkom sedištu po kilometru (pređenog puta) kod velikih letelica (kao što je Boing 747) je mnogo manji nego kod manjih (sa na primer 40 sedišta).

Zahtev klasičnog modela lokacije snabdevača, kao što je problem *p*-medijane, je u diskretnim čvorovima i lociranju *p* snabdevača tako da se minimizuje ukupno rastojanje (ili troškovi) od snabdevača do krajnjih odredišta. U hab lokacijskom modelu zahtev je definisan kao saobraćaj (putnički i robni) između specifikovanih odlaznih i dolaznih odredišta, što čini razliku između hab lokacijskog i klasičnog modela lokacije snabdevača.

Goldman je dao osnovu hab lokacijskih problema jer se ispostavilo da su centri koje je proučavao u stvari habovi [Gol69]. Lokacije centara je utvrđivao minimizacijom ukupnih troškova transporta odlazno-dolaznih parova i tako došao do formulacije problema hab medijane. U svom radu „Optimalna lokacija centara u mreži" („Optimal location for centers in netwok"), naveo je probleme lokacije višestrukih centara (multi-center location) i probleme višestrukih nivoa (multi-stage problem). U problemima lokacije višestrukih centara roba od polaznog do krajnjeg odredišta putuje kroz centar kolekcije i konsolidacije, gde jedinica troškova transporta centra zavisi od transportnih troškova robe, odnosno destinacije. Problemi višestrukih nivoa (izvor-centar, centar-centar, centar-odredište) se javljaju u komunikacionim mrežama i baziraju se na pretpostavci da se saobraćaj može razviti na više od jednog centra, s tim da se transportni troškovi izvor-centar, centar-centar i centar-odredište mogu totalno razlikovati. Prema tome, suština problema je naći određeni broj centara kojima je pridružen saobraćaj tako da se postignu minimalni troškovi transporta što je kasnije rezultiralo *p*-hab medijalnim problemima [Gol69].

O'Kelly je kroz prizmu operacionih istraživanja prvi otvorio put hab lokacijskim problemima i omogućio mnogima da dođu do novih formulacija kao i do samih metoda za njihovo rešavanje. Proučavanjem avio-saobraćaja došao je do prve formulacije lokacijskih problema - *p*-hab medijalnih problema jednostruke alokacije (Single Allocation *p*-Hub Median Problem - USApHMP), kao i do skupa podataka koji će kasnije biti korišćeni u skoro svim hab lokacijskim istraživanjima [O'Ke87].

Campbell je u svome radu „Integer programming formulations of discrete hub location problems'' formulisao tri nove klase modela analogne standardnim lokacijskim problemima: problemi *p*-hab centra, problemi hab pokrivanja i problemi maksimalnog hab pokrivanja [Cam96]. Takođe je dao i prvu formulaciju *p*-hab lokacijskih problema preko linearnog programiranja. Skorin-Kapov i Campbell su 1996. godine ustanovili da se oslabljivanjem uslova da svaka veza mora ići ka jednom habu dolazi do nove varijante *p*-hab lokacijskih problema. Kasnije su Marianov, Serra i ReVelle 1998. formulisali hab lokacijski problem maksimalnog pokrivanja za konkurentno okruženje [Mar99]. Većina ovih modela, sem Campbell-ovih modela maksimalnog pokrivanja, zahteva minimizaciju troškova.

Sung i Jin su 2001. godine predstavili novi hab lokacijski problem mreža kao i heuristiku za njegovo rešavanje [Sun01]. U pitanju je problem jednostruke alokacije, a model kojim je opisan problem je veoma sličan modelu koji su 1996. predstavili Skorin-Kapov [Sko96]. Nickel je, te iste godine, izneo predlog još jednog modela hab lokacijskih problema [Nic01].

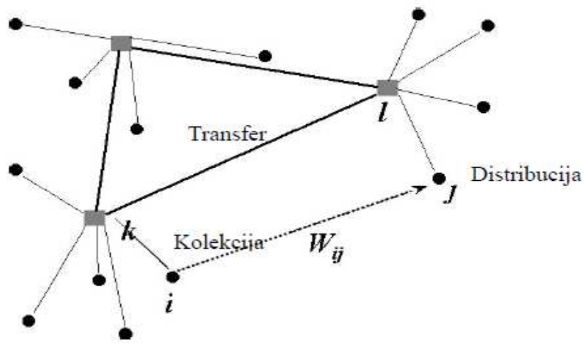
Labbé je 2003. godine sa grupom naučnika predstavio nov model hab lokacijskih problema – Kvadratne hab lokacijske probleme ograničenog kapaciteta (Quadratic capacitated hub location problems) [Lab03]. Ujedno su prikazali dve oslabljene varijante modela: Hab lokacijski problemi linernog kapaciteta jednostruke alokacije (Linear capacitated hub location problem with single allocation) i Hab lokacijski problemi neograničenog kapaciteta jednostruke alokacije (Uncapacitated hub location problem with single allocation) [Lab03]. Dve godine kasnije Campbell je sa timom naučnika formulisao novi model pod nazivom Lučni hab lokacijski problemi (Hub arc location problem) [Cam05]. Tokom te godine Yaman je predstavio telekomunikacijski model sa modularnim kapacitetom - Hab lokacijski problem neograničenog kapaciteta sa modularnim lučnim kapacitetom (Uncapacitated hub location problem with modular arc capacities) [Yam05]. Različite varijante ovog modela je razvijao sa Carello-m. Dve godine kasnije Wagner dolazi do formulacije novog modela lokacijskih problema - Hab lokacijski problemi sa klasterima (Cluster hub location problem) [Wag07].

Iako hab lokacijski problemi imaju relativno jednostavnu formulaciju, njihovo rešavanje je uglavnom teže u odnosu na klasične diskretne lokacijske probleme, pa su se uz razvijanje modela hab lokacijskih problema razvijale i metode za njihovo rešavanje.

Klincewich je 1991. godine usavršio izmenjenu heuristiku (jednostruku i dvostruku) koja je dobra koliko i heuristika nagomilavanja. Naredne godine je predložio dve nove heuristike. Iste godine je Campbell formulisao dve heuristike bazirane na varijanti problema oslabljenog trasiranja. O’Kelly je 1993. godine predložio da jedan od pristupa lokacijskim problemima bude heurističko rešenje.

Skorin-Kapov i Skorin-Kapov su naredne godine usavršili modifikaciju TS (tabu search) metod [Sko94]. Campbell je dve godine kasnije razvio druge dve heuristike. Abdinnour-Helm i Venkataramanan 1995. razvijaju branch-and-bound i genetski algoritam - GA [Abd98a]. Već naredne godine Klincewicz predlaže dualni algoritam kao i metod za rešavanje hab lokacijskih problema.

Na Slici 2.5 je prikazana hab mreža, pravougaonicima su označeni habovi, a bold kružićima čvorovi. Ovakve mreže imaju primenu u telekomunikaciji, što će biti iskorišćeno za njeno pojašnjenje. Neka je zahtev za poziv poslat iz *i* (čvora koji je uputio poziv) ka call centru *k*, sa kojim je povezan, kako bi se uspostavila veza sa *j*. Call centar (hab), koji prima dosta takvih zahteva u sekundi, proverava da li je ovlašćen da ispuni takav zahtev (odredište mu je dodeljeno) ili zahtev mora biti ispunjen od strane drugog call centra. Ukoliko jeste autorizovan uspostavlja vezu, zajedno sa svim ostalim pozivima koji su adresirani na *j*; u suprotnom predaje ovaj zahtev zajedno sa svim ostalima koji bi trebali da budu ispunjeni od strane *l*, ka *l*; i call centar *l* uspostavlja vezu sa *j*.

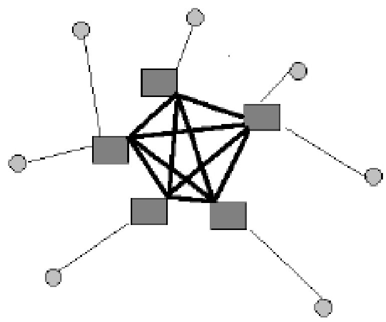


Slika 2.5 Hab lokacijski problem mreže

Tipičan hab lokacijski problem mreže sadrži: lokacijski deo, u kome određeni čvorovi moraju biti izabrani za transportne tačke (ili habove), i alokacijski deo, u kome je zahtev da određeni odlazno-dolazni parovi budu usmereni kroz habove. Kada su hab čvorovi izabrani, ne-hab čvorovi se alociraju prema njima tako da se njihov saobraćaj šalje kroz hab-nivo mrežu. Optimalne alokacije su u vezi sa hab lokacijama, a sa druge strane optimalna hab lokacija u vezi sa alokacijom, zbog toga se lokacijski i alokacijski deo mora uzeti u obzir pri dizajniranju hab mreža. U odnosu na to kako su ne-hab čvorovi alocirani prema habovima, razlikujemo sledeće šeme:

♦ **Šema jednostruke alokacije (Single allocation scheme)**

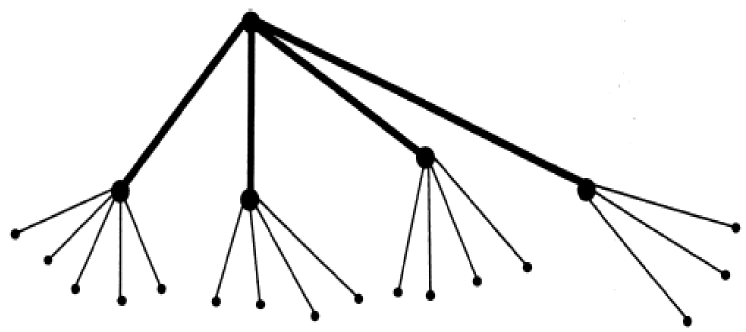
Svaki snabdevač/korisnik je pridružen tačno jednom habu tako da se sav transport od/do čvora odvija preko određenog haba, Slika 2.6. Celokupan saobraćaj koji potiče iz jednog ne-hab čvora ide ka samo jednom habu. Takođe saobraćaj, koji dolazi ka odredišnom čvoru potiče iz samo jednog haba kome je pridružen.



Slika 2.6 Primer hab mreže jednostruke alokacije

Šema jednostruke alokacije se koristi, na primer, u poštanskim mrežama brze isporuke (DHL sistemi) u kojima je važno minimizovati maksimalno vreme isporuke za svaki par korisnik-snabdevač. Iako šema višestruke alokacije omogućava veću fleksibilnost, većina hab lokacijskih problema podrazumeva šemu jednostruke alokacije jer je svaki korisnik/snabdevač obično pridružen svom najbližem habu, odnosno habu sa najnižim troškovima transporta. U problemima gde treba fiksirati lokaciju dva haba, alokacijski deo može biti napisan u vidu linearnog problema koji se može rešiti za polinomijalno vreme, dok za fiksiranje lokacije tri haba alokacijski deo postaje NP-težak.

Jedan od primera šeme jednostruke alokacije je konfiguracija zvezda, *star network*, Slika 2.7. U hab problemima jednostruke alokacije habovi moraju biti izabrani među čvorovima samoga problema. Ne-hab čvorovi su sa habovima povezani konfiguracijom zvezda, i svaki ne-hab čvor je povezan sa tačno jednim habom što omogućava i međusobnu povezanost samih habova. Sa ovakvom strukturom celokupan saobraćaj nekog ne-hab čvora mora proći kroz jedan hab sa kojim je dati ne-hab čvor povezan. Neke od primena konfiguracije zvezda su u transportu tereta. Jedna od najvećih kompanija u Turskoj za transport tereta, ima star mrežu sa centralnim habom lociranim u Ankari.

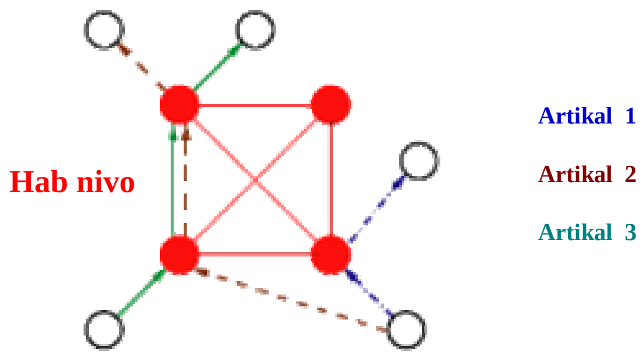


Slika 2.7 Konfiguracija zvezda

- **Šema višestruke alokacije (Multiple allocation scheme)**

Ova mreža omogućava svakom ne-hab čvoru da komunicira sa jednim ili više habova. Šemom višestruke alokacije se obezbeđuje veća fleksibilnost modela, jer se za dati skup habova saobraćaj između snabdevača i korisnika može realizovati putem sa najnižom cenom transporta nezavisno od ostalih čvorova. Na primer, putnici avio-saobraćaja u istom gradu (polaznom čvoru) mogu izabrati da lete preko različitih gradova (habova) u zavisnosti od njihovog krajnjeg odredišta - grada (dolaznog čvora).

Slika 2.8 je hab mreža sa habovima koji su označeni popunjenim krugovima i sa po jednim odlazno-dolaznim parom. Neka su poslata tri artikla od polazne do krajnje tačke kroz neke od habova. Artikli 1, 2, 3 sa putanjama su redom označeni plavom, bordo i zelenom bojom, a njihovi prevozni putevi sa crta-tačka, isprekidanom i punom linijom. Dodatne konturne strane na hab nivoima su označene tankim linijama. Artikal 1 je transportovan kroz samo jedan hab, a artikli 2 i 3 kroz dva. Ova slika je primer višestruke alokacije iako artikli 1 i 2 dele početni čvor.



Slika 2.8 Primer hab mreže višestruke alokacije

U radu [Sli09] su upoređeni rezultati ukupnih transportnih troškova u slučaju jednostruke i višestruke alokacije koji su dobijeni genetskim algoritmom koristeći HubLoc softver. To je specijalan program formiran na Katedri za tehnologiju i kontrolu, Univerziteta Pardubice, Republika Češka, čiji se polazni podaci učitavaju iz tekstualne datoteke i kojim se dobija vrednost funkcije cilja koja odgovara najboljem pronadjenom rešenju. Pored optimizacije program omogućava dizajniranje prilagođenih rešenja i izračunavanje odgovarajuće funkcije cilja.

Algoritam je testiran na standarnim grupama podataka: CAB (Civil Aeronautic Board) baziranim na putničkom avio-saobraćaju između 25 gradova u Americi; AP (Australian Post) koji se odnosi na transport pošiljki između 200 Australijskih gradova; i CR (Czech Railways) koji sadrži podatke o transportu tereta između 50 železničkih okruga u Češkoj za 2007. godinu. Oba modela, jednostruke i višestruke alokacije, su rešena za različite vrednosti faktora uštede α i fiksni broj habova (3 i 4). Na Slici 2.9 prikazani su samo rezultati dobijeni sa CAB skupom podataka, za ostale videti u [Sli09].

	3 hab model				4 hab model			
α	TCS ($\cdot 10^9$)	TCM ($\cdot 10^9$)	TC%	NMA	TCS ($\cdot 10^9$)	TCM ($\cdot 10^9$)	TC%	NMA
0	5.363	5.363	100.0	0	3,938	3,938	100,0	0
0.1	5.972	5.930	99.3	2	4,669	4,640	99,4	1
0.2	6.553	6.430	98.1	5	5,377	5,282	98,2	7
0.3	7.135	6.902	96.7	8	6,078	5,886	96,8	7
0.4	7.701	7.341	95.3	9	6,725	6,443	95,8	9
0.5	8.348	7.742	92.7	12	7,373	6,954	94,3	12
0.6	8.898	8.106	91.1	14	8,021	7,399	92,3	13
0.7	9.362	8.425	90.0	18	8,663	7,788	89,9	17
0.8	9.960	8.711	87.5	19	9,289	8,128	87,5	19
0.9	10.489	8.940	85.2	21	9,914	8,407	84,8	20
1	10.943	9.071	82.9	24	10,390	8,597	82,7	24

Slika 2.9 Rezultati poređenja jednostruke i višestruke alokacije na CAB skupu podataka

Kolona TCS/TCM se odnosi na ukupne troškove jednostruke/višestruke alokacije; TC% je vrednost izraza TCM/TCS·100 sa istom vrednošću α i istim brojem habova; a NMA predstavlja broj čvorova korišćenih u višestrukoj alokaciji.

Na osnovu dobijenih rezultata može se zaključiti da:

- Za zadati broj habova ukupni troškovi višestruke alokacija su uvek manji ili jednaki u odnosu na troškove jednostruke alokacije. Samo za veoma male vrednosti faktora uštede (bliske nuli) troškovi su isti. Uz povećanje α povećava se i razlika.
- Za male vrednosti α oba modela imaju tendenciju da koriste najbliži hab. Sa povećanjem α nije uvek optimalno koristiti najbliži hab, što je očekivano ne samo u slučaju višestruke, već i kod jednostruke alokacije.
- Povećanjem α povećava se i broj višestrukih zahteva, koji dostiže 0% za α=0 i čak 100% za α=1.
- Povećanjem α rastojanja među habovima imaju značajniju ulogu u ukupnim transportnim troškovima što uzrokuje promene u lokaciji habova (dolazi do nihovog međusobnog približavanja).

Iako je testiranje obavljeno na tri različita skupa podata, dobijeni rezultati su veoma slični pri promeni α i broja habova, [Sli09]. Iz dobijenih rezultata se može zaključiti da je, uz određene uslove, višestruka alokacija sa manjim brojem habova efektnija u odnosu na jednostruku sa većim brojem. Za manje i srednje vrednosti faktora uštede jeftiniji je model jednostruke alokacije sa 4 haba (granica je oko 0,7 za CAB i AP skup podataka, a za CR oko 0,8), dok je za veće vrednosti α model sa tri haba u prednosti. Razlog je povećanje troškova veza između habova i pod takvim okolnostima višestruka alokacija ima više prednosti (generalno skraćivanje ruta). Može se izvesti zaključak da ako je faktor uštede na hab lukovima mali, onda je bolje formirati višestruku alokaciju nego povećati broj habova, kao i jeftinije troškove.

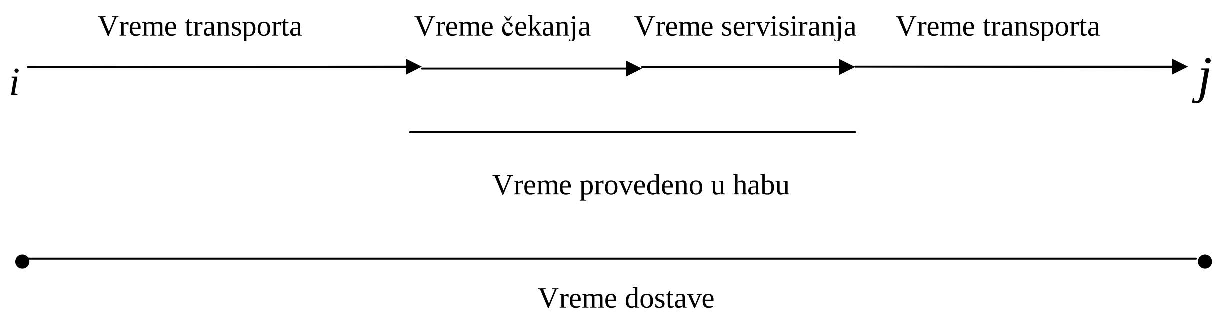
Hab lokacijski problemi se mogu klasifikovati prema ograničenjima kapaciteta. U zavisnosti od toga da li postoji ograničenje količine protoka koji se može obraditi u svakom habu, javljaju se problemi (ne)ograničenog kapaciteta. Ukoliko postoje, ograničenja mogu da variraju od haba do haba i često se odnose na dolazeći saobraćaj. Habovi moraju biti odgovarajuće veličine da bi mogli da obrade nailazeće informacije. U mnogim situacijama odlazeći saobraćaj ne predstavlja poteškoće u smislu kapaciteta jer ne zahteva nikakvu obradu.

Hab lokacijski problemi ograničenih kapaciteta imaju veliki praktični značaj, ali su u odnosu na probleme neograničenih kapaciteta, zbog dodatnih ograničenja, teži za rešavanje. Kapaciteti hab lokacijskih problema su različite prirode i mogu se odnositi na: čvorove (ograničenje kapaciteta snabdevača), habove (količinu protoka koji dolazi i/ili prolazi kroz čvor), na lukove u mreži, saobraćaj između haba i ne-hab čvora, između habova (protok koji se odvija u mreži habova), ili na minimalni saobraćaj koji je potreban da bi se obezbedila komunikacija između ne-hab čvorova i uspostavljenih habova.

Ako se uz ograničenje kapaciteta habova doda ograničenje kapaciteta na lukovima model je dovoljno obogaćen da uzme u obzir više praktičnih situacija. Na primer, broj aerodromskih pisti i broj mesta dodeljen avio-kompanijama može predstavljati kapacitet habova. Kapacitet lukova će biti broj raspoloživih aviona jedne kompanije na lukovima.

Vreme dostave predstavlja vreme provedeno u transportu i vreme provedeno u habu. Može se desiti da zbog ograničenih mogućnosti habova, kamioni moraju da čekaju kada pristignu do haba da bi bili primljeni, pa je vreme koje roba provede u habu jednako zbiru vremena provedenog u čekanju u redu i vremena pružanja usluga, Slika 2.10. Takođe se može desiti da u određenim trenucima dođe do zakrčenja habova (zbog ograničenog kapaciteta) pa vreme koje pošiljka provede u habu može negativno da utiče na standard usluge.

Kapacitet haba se može definisati i kao maksimalan broj kamiona koje može da primi. Ako se habu dodeli više kamiona onda je vreme čekanja toliko da je nemoguće isporučiti pošiljke u dogovorenom vremenu. Na Slici 2.10 se vidi da od određene vrednosti stope dolaska pa nadalje vreme čekanja se toliko povećava da postaje nemoguće da se ispune standardi usluga i rokovi isporuke. Zato će deo čvorova koji su pridruženi habovima sa velikim brojem kamiona biti realocirani habovima sa manjim brojem primljenih kamiona. Kamioni će reorganizovanu robu isporučiti kasno jer će zbog zagušenja provesti više vremena u habu. Zbog toga bi trebalo da kompanija odredi vrednost kapaciteta haba prema ciljanom procentu robe isporučene na vreme (poznatije kao nivo usluge).



Slika 2.10 Distribucija vremena isporuke između habova

Uvođenjem kriterijuma za smanjenje klasičnih troškova dobijaju se rešenja sa preteranom koncentracijom protoka na malom broju čvorova. Ovaj problem se može izbeći limitiranjem količine protoka što će dovesti do novog problema ograničenja kapaciteta. Ako u toku jednog dana stigne više pošte nego što je procenjeni kapacitet, onda će biti potrebno dodatno vreme da bi se obradio primljeni sadržaj, jer ne bi bilo razumno odbiti primljenu poštu. Ovo je očiglednije na primeru hitnih službi jer one ne mogu odbiti hitne slučajeve, čak iako to prevazilazi njihove kapacitete.

Takođe se mogu razmatrati i različiti tipovi troškova, poput fiksnih troškova uspostavljanja habova i/ili promenljivih troškova koji se koriste, kao i fiksni, za uspostavljanje potrebnog kapaciteta na vezama ili promenljivih troškova za korišćenje veza. Za svaku vezu, troškovi uspostavljanja zavise od dužine veze [Yam05]. Hab lokacijski problemi sa fiksnim troškovima imaju široku primenu u telekomunikacijskim (troškovi uspostavljanja hab centara ili linkova su značajni) i transportnim mrežama (neke stanice ili linije mogu biti javno ili privatno vlasništvo, poput puteva, skladišta, aerodroma, što će podrazumevati naknadu za njihovo korišćenje). Cilj je izbalansirati, prilikom uspostavljanja ili korišćenja novih habova, povećanje fiksnih troškova sa smanjenjem troškova transporta u mreži, pri povećanju broja habova. Hab lokacijski problemi sa promenljivim transportnim troškovima obuhvataju cene transporta među habovima koje se menjaju u zavisnosti od količine protoka (cena transporta je obrnuto proporcionalna protoku).

Klasifikacijska šema hab lokacijskih problema koji će biti obrađeni u ovom radu prikazana je na Slici 2.11.

I. ČVORNO ORJENTISANI HAB LOKACIJSKI PROBLEMI

1. **Prema alokaciji koncepta**
    - Šema jednostruke alokacije (single allocation scheme)
    - Šema višestruke alokacije (multiple allocation scheme)

2. **Prema kapacitetu**
    - Hab lokacijski problemi neograničenog kapaciteta (Uncapacitated hub location problems)
    - Hab lokacijski problemi ograničenog kapaciteta (Capacitated hub location problems)
3. **Problemi hab medijane (Hub median problems)**
    - Broj habova nije unapred zadat
    - Broj habova je unapred zadat - *p*
4. **Problemi hab centra (Hub center problem)**
    - Broj habova nije unapred zadat
    - Broj habova je unapred zadat - *p*

II. LUČNO ORJENTISANI HAB LOKACIJSKI PROBLEMI (HUB ARC LOCATION PROBLEMS)

- Jednostruke alokacije (single allocation)
- Višestruke alokacije (multiple allocation)

III. PROBLEMI HAB POKRIVANJA (HUB COVERING PROBLEMS)

IV. NAPREDNI HAB LOKACIJSKI KONCEPTI

1. Stackelberg-ovi hab lokacijski problemi (Stackelberg hub location problem)
2. Pouzdani *p*-hab lokacijski problemi

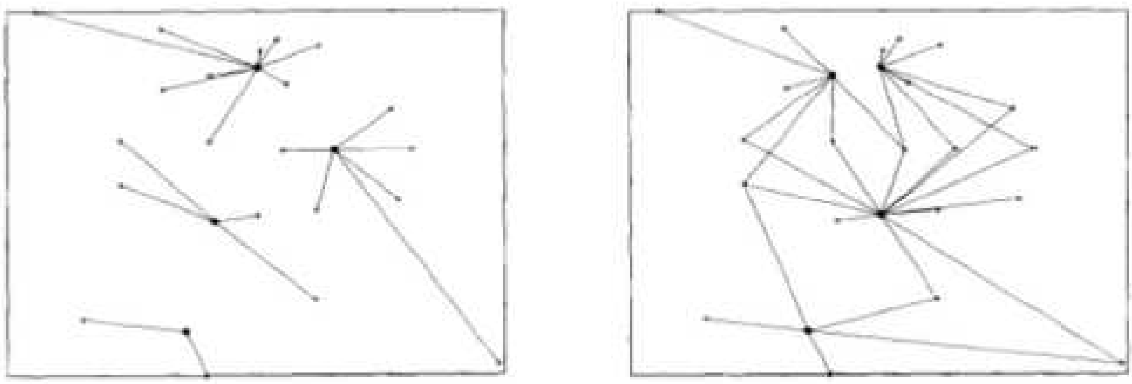
Slika 2.11 Šema hab lokacijskih problema

3. OSNOVNI HAB LOKACIJSKI MODELI

3.1 Problemi hab medijane (Hub median problem)

Problemi hab medijane minimizuju sumu troškova transporta za svaki odlazno-dolazni par preko odgovarajućeg skupa habova. Ukoliko je unapred zadat broj habova (p) koje treba locirati, govorimo o problemima p-hab medijane. U slučaju da broj habova nije unapred definisan, potrebno je platiti fiksne troškove za uspostavljanje habova.

Jedna od osnovnih podela (p-)hab medijalnih problema je na probleme jednostruke i višestruke alokacije. Ako se ne ograniči broj habova sa kojima ne-hab čvorovi mogu biti povezani dobije se problem višestruke alokacije. Sa druge strane, ukoliko je svaki ne-hab čvor povezan samo sa jednim habom u pitanju je problem jednostruke alokacije. Na Slici 3.1.1 prikazana su rešenja problema od 4 haba i 25 čvora u vidu jednostruke (leva slika) i višestruke alokacije (desna slika). Kao što se vidi sa slike, razlika je u dodeli i lokaciji habova i u ovom primeru višestrukom alokacijom su umanjeni troškovi za 3% što automatski znači i bolje rešenje.



Slika 3.1.1 Primer jednostruke i višestruke alokacije p-hab medijalnih problema sa 25 čvorova i 4 haba

Problemi p-hab medijane minimizuju ukupne troškove transporta (vreme, rastojanje,...) da bi se opslužilo n zadatih čvorova, protok, saobraćaj između odlazno-dolaznih parova i broj habova koje treba locirati (p). Alokacija ne-hab čvorova se određuje prema lokaciji habova čime će se oslabiti međusobni uticaj ne-hab čvorova. Za habove se pretpostavlja da su u potpunosti međusobno povezani i da se komunikacija ne-hab čvorova odvija preko njih. Problemi p-hab medijane imaju veliku primenu u avio i telekomunikacionim sistemima. U nekim slučajevima, na primer kada je bitno najveće rastojanje (troškovi) odlazno-dolaznih parova, p-hab medijalnim problemima će se dobiti nezadovoljavajući rezultati.

Spadaju u NP-teške probleme, čak iako se fiksira lokacija habova, alokacijski deo problema ostaje NP-težak ([Kar99]), odnosno za fiksirani skup habova potproblem određivanja višestrukih alokacija može se rešiti u polinomijalnom vremenu, dok potproblem jednostruke alokacije ostaje NP-težak. Problemima jednostruke alokacije, specijalno problemima 2-hab i 3-hab medijane, bavili su se Sohn i Park i pokazali da je problem u slučaju dva haba rešiv u polinomijalnom vremenu, za fiksne lokacije habova [Soh97], dok je za broj habova veći i jednak od tri problem NP-težak [Soh00].

U radu [Gel10] je prikazan generalizovan problem p-hab medijane (generalized p-hub median problem - GpHMP) sa širokom primenom u telekomunikaciji i transportu. Pokazalo se da je problem NP-težak i da je jedan od najtežih problema za rešavanje kombinatorne optimizacije. Takođe je pokazano da se slučajevi sa više od 10 lokacija ne mogu rešiti u razumnom vremenu. Kod klasičnih problema p-hab medijane za habove koje treba locirati se uglavnom pretpostavlja da su sličnih karakteristika i da se na sve veze odnosi isti faktor uštede. Odnosno, bez obzira koji su snabdevači postavljeni u habovima k i m, ekonomičnost je uvek pokazana jedinstvenim faktorom uštede α.

U nekim primenama, posebno u upravljanju lancima snabdevanja i logistici, javnom prevozu i telekomunikaciji, pronalaženje lokacija habova otvara novo pitanje: instalirati odgovarajuće objekte (ili operatere) u habovima, tako da se kroz uspešnu interakciju i bilateralnu saradnju obezbedi kupcima ponuda sa najnižim transportnim troškovima. Odnosno, potrebno je pronaći p habova i na njima instalirati p različitih snabdevača/operatera, sa faktorom uštede (konsoliduje protok na hab-lukovima) koji zavisi tih istih snabdevača/operatera postavljenih na oba haba koji su na krajevima luka.

Neka je u zemlji sa n pokrajina, savezna vlada spremna da odredi p transportnih terminala i proširi infrastrukturu konvertujući ih u hab terminale. Putem tendera je izabrano p operatera kako bi instalirali/upravljali snabdevačima na poznatim habovima. Na svakoj hab-vezi na kojoj operater s radi na jednom od krajnja dva haba veze, tvrdi da rezultujuća brzina (nakon eksploatacije ekonomičnosti skale) koju mogu da obezbede na kraju hab luka zavisi od operatora sa druge krajnje tačke (recimo r) u drugoj državi i iznosi α_{sr}. U principu operateri s i r ne moraju da dele isto mišljenje i $\alpha_{sr} \neq \alpha_{rs}$. Sada vlada traži najbolju raspodelu p snabdevača u p lokacija, uzimajući u obzir razdaljinu, potražnju i faktor uštede. Navedenim primerom su objašnjeni problemi GpHMP.

3.1.1 Problemi hab medijane jednostruke alokacije neograničenog/ograničenog kapaciteta (Uncapacitated/capacitated single allocation hub median problem – U(C)SAHLP, U(C)SApHMP)

Hab lokacijski problemi neograničenih kapaciteta sa jednostrukim alokacijama pozicije habova (Uncapacitated single allocation hub location problem – USAHLP) nemaju ograničenja kapaciteta na čvorovima ili lukovima u mreži. Broj habova nije unapred definisan, ne-hab čvorovi mogu biti dodeljeni tačno jednom habu i postoje fiksni troškovi za uspostavljanje svakog haba. Ukoliko je broj habova fiksiran, recimo *p*, dobija se problem *p*-hab medijane neograničenog kapaciteta jednostruke alokacije (Uncapacitated single allocation p-hub median problem – USApHMP). Cilj USAHLP je locirati habove i njima pridružiti ne-hab čvorove tako da se minimizuje suma transportnih troškova u mreži i fiksnih troškova lociranja habova. Velika primena je u transportnim i telekomunikacionim sistemima. Dokazano je da su NP-teški čak iako je fiksirana lokacija habova [O’Ke87].,

Uz sledeće definicije, formulacija USAHLP glasi:

Z_{ik}=1 ako je ne-hab čvor *i* pridružen uspostavljenom habu *k*, inače 0,

Z_{kk}=1 ako je hab lociran u čvoru *k*, inače 0,

W_{ij}- količina robe koju treba transportovati od *i* do *j*,

D_{ij} – rastojanje između čvorova *i* i *j*,

f_k- fiksni trošak uspostavljanja haba *k*.

$$min \sum_{i,j,k,l \in I} W_{ij} (\chi D_{ik} Z_{ik} + \alpha D_{kl} Z_{ik} Z_{jl} + \delta D_{jl} Z_{jl}) + \sum_j Z_{jj} f_j \tag{1}$$

uz uslove:

$$\sum_k Z_{ik} = 1, \text{ za svako } i \tag{2}$$

$$Z_{kk} - Z_{ik} \geq 0, \text{ za svako } i, k \tag{3}$$

$$Z_{ik} \in \{0, 1\}, \text{ za svako } i, k. \tag{4}$$

Funkcija cilja minimizuje sumu troškova kolekcije, transfera, distribucije i troškova uspostavljanja habova (1). Ograničenjem (2) se postiže jednostruka alokacija (ne-hab čvor je pridružen tačno jednom habu), a (3) da je čvor *i* prdružen čvoru *k* samo ako je *k* izabran za hab. Binarna prezentacija promenljive Z_{ik} je postignuta uslovom (4).

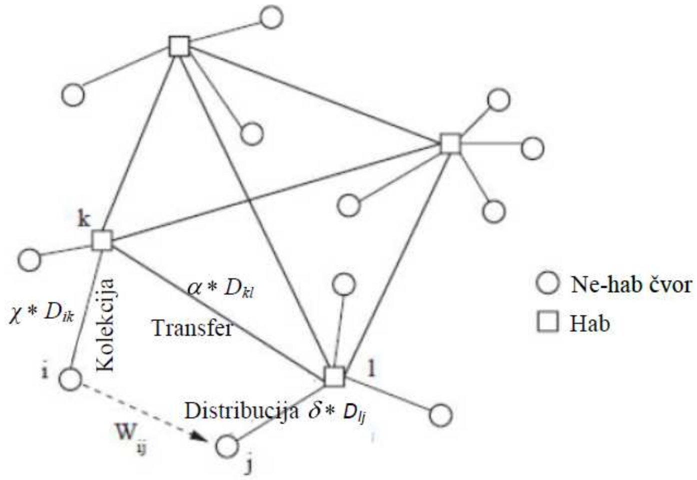
USApHMP su problemi neograničenog kapaciteta gde se iz skupa čvorova locira *p* habova i svaki odlazno-dolazni čvor je pridružen jednom habu. Pripadaju klasi NP-teških problema, iako se zada skup habova dobijeni potproblem određivanja optimalne alokacije ne-hab čvorova ostaje NP-težak [Lov88].

Neka je $I=\{1,...,n\}$ skup čvorova, Z_{ik} promenljiva koja uzima vrednost 1 ako je čvor i dodeljen habu k, u suprotnom 0. $Z_{ii}=1$ samo ukoliko je čvor i hab. D_{ij} je rastojanje (u smislu metrike), a W_{ij} količina saobraćaja između čvorova i i j. Koeficijenti kolekcije, distribucije i troškova transfera po jedinici količine robe i saobraćaja koji se transportuje označeni su redom χ, δ i α. Tada su troškovi unutar mreže (Slika 3.1.1.1):

→ χD_{ik} troškovi kolekcije od ne-hab čvora i do haba k

→ δD_{ki} troškovi distribucije od haba k do ne-hab čvora i, i

→ αD_{kl} troškovi transfera između bilo koja dva haba k i l.



Slika 3.1.1.1 Prikaz troškova u hab mreži

Koristeći gornju notaciju matematička formulacija USApHMP se može zapisati na sledeći način, preuzeto iz [Ern96]:

$$\min \sum_{k\in I}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{l\in I} W_{ij}(\chi D_{ik}Z_{ik} + \alpha D_{kl}Z_{ik}Z_{jl} + \delta D_{jl}Z_{jl}) \tag{5}$$

uz uslove:

$$\sum_{k\in I} Z_{ik} = 1, \text{ za svako } i\in I \tag{6}$$

$$Z_{ik} \le Z_{kk}, \text{ za svako } i,k\in I \tag{7}$$

$$\sum_{k\in I} Z_{kk} = p \tag{8}$$

$$Z_{ik} \in \{0, 1\}, \text{ za svako } i, k\in I \tag{9}$$

Funkcija cilja minimizuje ukupne troškove saobraćaja izvorište-hab, hab-hab, hab-odredište (5). Uslovi (6) i (9) obezbeđuju da je svaki čvor pridružen tačno jednom habu (jednostruka alokacija), uslov (7) znači da do pridruživanja čvora habu može doći samo ukoliko je lociran hab (odnosno da saobraćaj prolazi samo kroz otvorene habove) čime se sprečava direktna komunikacija ne-hab čvorova. Uslovom (8) se fiksira broj uspostavljenih habova na p.

Poštanski sistemi su motivisali uvođenje CSAHLP. Neka je zadato *n* poštanskih okruga (prikazani čvorovima) koji na dnevnom nivou razmenjuju poštu. Neka je poznata prosečna prognoza količine pošte između svih parova okruga. Pošta, koju treba transportovati između svih odlazno-dolaznih parova mora da se usmeri kroz jedan, ili najviše dva, konsolidaciona centra (haba). Osim što je omogućen ekonomičniji prevoz (kroz konsolidaciju poštanskog saobraćaja), habovi predstavljaju i centre distribucije i sortiranja.

U problemima jednostruke alokacije pošiljke iz poštanskih okruga se moraju sakupiti u jednom habu. Zbog vremenskih ograničenja samo će određena količina pošte biti sortirana u habu. Iz tog razloga postoje ograničenja kapaciteta pridolazeće pošte koju treba sortirati. Potreban broj habova za efikasno rukovođenje celokupnim protokom pošte nije poznat a priori. Umesto toga, ostavljeno je da se izabere broj i lokacija habova u zavisnosti od fiksnih troškova uspostavljanja habova, ograničenja kapaciteta i samog modela. Pri izboru lokacije habova i alokacije ne-hab čvorova, treba uzeti u obzir i troškove prevoza pošte kroz mrežu. Cilj je izabrati skup habova i njima pridružiti ne-hab čvorove, tako da je suma transportnih i fiksnih troškova minimalna. Dokazana je NP-kompletnost USAHLP [Kara98], što dalje implicira da su CSAHLP, kao širi problem, NP-kompletni.

U matematičkoj formulaciji problema upotrebljene su sledeće promenljive:

D_{ij} - rastojanje između čvorova i, j,

W_{ij} - količina protoka od snabdevača i do korisnika j,

Γ_k - kapacitet haba k,

f_k - fiksni troškovi uspostavljanja haba k,

$O_i = \sum_{j \in I} W_{ij}$, količina protoka koji polazi iz čvora i,

$D_j = \sum_{i \in I} W_{ij}$, količina protoka koji dolazi u čvor j,

Z_{ik}=1 ako je čvor i pridružen habu k, inače 0,

Y_{kl}^{i} = količina saobraćaja koja polazi od snabdevača i, sakuplja se u habu k i distribuira preko haba l.

Uz gore navedenu notaciju matematička formulacija CSAHLP je:

$$min \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{ik} Z_{ik} (\chi O_i + \delta D_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha D_{kl} Y_{kl}^{i} + \sum_{k=1}^{n} f_k Z_{kk} \tag{10}$$

uz uslove:

$$\sum_{k=1}^{n} Z_{ik} = 1, \quad \forall\ i \in I \tag{11}$$

$$Z_{ik} \leq Z_{kk}\ , \quad \forall\ i, k \in I \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} W_{ij} Z_{jk} + \sum_{l=1}^{n} Y_{kl}^{i} = \sum_{l=1}^{n} Y_{lk}^{i} + O_i Z_{ik}\ , \quad \forall\ i, k \in I \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} O_i Z_{ik} \leq \Gamma_k Z_{kk}, \ \forall \, k \in I \tag{14}$$

$$Y_{kl}^{i} \geq 0, \ \forall \, i, k, l \in I \tag{15}$$

$$Z_{ik} \in \{0, 1\}, \ \forall \, i, k \in I \tag{16}$$

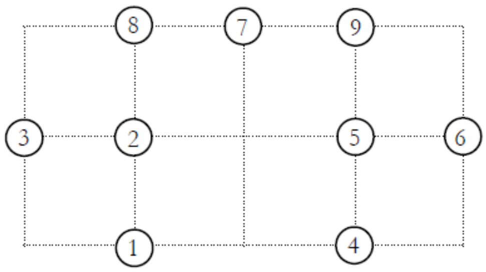
Kao što je pomenuto, cilj CSAHLP je minizovati ukupne troškove transporta u mreži i fiksne troškove uspostavljanja habova (10). Sprečavanje direktne komunikacije između ne-hab čvorova, odnosno da je ne-hab čvor pridružen tačno jednom prethodno uspostavljenom habu, obezbeđuju ograničenja (11) i (12). Konzervacija protoka u mreži je ograničenje (13), a (14) ograničava količinu protoka koja ulazi u svaki hab (odnosi se na kapacitet haba). Preostala ograničenja (15) i (16) ukazuju na ne-negativnu i binarnu prezentaciju promenljivih.

Često su habovi veliki strukturni objekti koji zahtevaju nekoliko strateških odluka, pored onih koje se odnose na određivanje njihovih lokacija. Jedna od odluka je da se ne može ignorisati dimenzija/kapacitet koju bi trebalo da ima svaki pojedinačni hab. U [Cor09] je urađeno proširenje problema pod nazivom hab lokacijski problemi jednostruke alokacije ograničenog kapaciteta sa višestrukim nivoima kapaciteta (capacitated single-assigment hub location problem with multiple capacity level - CSAHLPM). Pretpostavlja se da je na raspolaganju niz različitih veličina za svaki potencijalni hab. Shodno tome, ne samo da se mogu birati habovi već i nivo kapaciteta sa kojim će svaki od njih da radi. Svaki nivo kapaciteta određuje fiksne troškove uspostavljanja haba za koje je zadata skala ekonomičnosti.

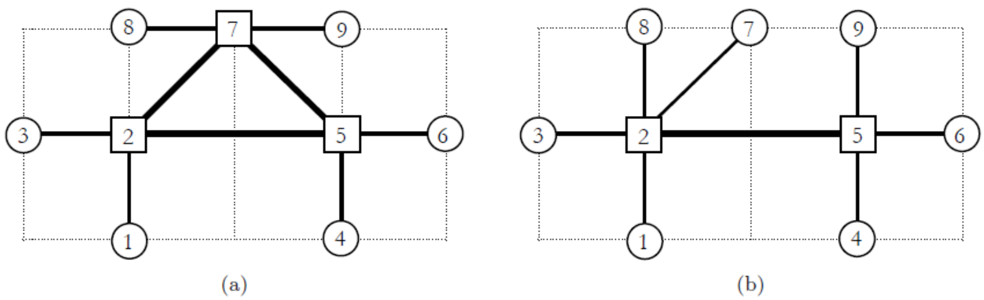
Fleksibilnost i prednosti modela su pokazane primerom sa 9 čvorova, Slika 3.1.1.2. U primeru koji je naveden u [Cor09] pretpostavlja se da: 1) svaki čvor treba da pošalje 2 jedinice protoka/saobraćaja svakom drugom čvoru (svaki čvor će poslati ukupno 16 jedinica saobraćaja); 2) hab može biti lociran u čvoru gde su troškovi uspostavljanja 100 za čvorove 2, 5 i 7 i jednaki 500 za ostale čvorove; 3) kapacitet konsolidovanja protoka za svaki hab iznosi 50 (maksimalni protok/saobraćaj koji hab može da primi od njemu pridruženih čvorova); 4) troškovi slanja jedinice saobraćaja između dva haba iznose 0,75; 5) troškovi slanja jedinice saobraćaja između ne-hab čvora i haba (hab i ne-hab čvor) jednaki su rastojanju između svih uključenih čvorova; 6) rastojanje u mreži je Euklidovo.

Uzimajući u obzir ograničenja kapaciteta habova (50 jedinica protoka) kao i to da iz svakog čvora potiče 16 jedinica protoka, jasno je da treba alocirati najmanje 3 haba. Mreža na Slici 3.1.1.3(a) je optimalno rešenje problema, gde su habovi prikazani kvadratima. Troškovi ovog rešenja iznose $492+54(1+\sqrt{2})\approx492+54(1+1.414)\approx622.4$ (uzimajući u obzir da ukupni troškovi protoka/saobraćaja ne-hab-hab iznose 192, hab-hab $54(1+\sqrt{2})$, a ukupni troškovi uspostavljanja 300).

Pretpostavimo da je moguće odrediti kapacitet habova u čvorovima 2 ili 5. Konkretno, neka je zadat dodatni uslov, koji se odnosi na čvorove 2 i 5: ograničenje kapaciteta haba iznosi 80 jedinica saobraćaja, sa troškovima uspostavljanja 120. Optimalno rešenje je prikazano na Slici 3.1.1.3(b) gde su habovi predstavljeni kvadratima. Troškovi ovog rešenja iznose $552+32\sqrt{2}\approx552+32*1.414\approx597.3$ (uzimajući u obzir da ukupni troškovi protoka/saobraćaja ne-hab-hab iznose 192+32√2, hab-hab 120, a ukupni troškovi uspostavljanja 240). Ovo znači da se smanjenje ukupnih troškova može postići korišćenjem činjenice da za čvorove 2 i 5 postoji mogućnost izbora kapaciteta.



Slika 3.1.1.2 Skup čvorova za definisanje CSAHLP



Slika 3.1.1.3 Fleksibilnost dizajniranja mreže omogućena različitim nivoima kapaciteta

Posmatramo mrežu od n čvorova koji predstavljaju poštanske regione (svaki odgovara različitom poštanskom broju) među kojima se svakodnevno razmenjuju pošiljke. Sve pošiljke čiji transfer ide od čvora snabdevača (polaznog poštanskog regiona) do čvora korisnika (odredišnog poštanskog regiona) mora se obaviti kroz jedan, ili najviše dva, haba (centra konsolidacije pošte). CSApHMP ima šemu jednostruke alokacije, što znači da se sva pošta iz snabdevača sakuplja i distribuira do korisnika iz jednog haba. Količina pošiljki koja se sakuplja i sortira u habu je limitirana jer je rad poštanskih centara vremenski ograničen. Za što efikasniji rad poštanskog sistema potrebno je uspostaviti p habova. CSApHMP imaju za cilj minimizaciju ukupnih troškova transporta u poštanskoj mreži i nastaju zbog problema koji se javljaju u poštanskim i drugim sistemima isporuke, što se može videti kroz navedeni primer.

Neka je:

Y_{kl}^{i} = količina saobraćaja koja polazi od snabdevača i, sakuplja se u habu k i distribuira preko haba l,

Γ_k= kapacitet haba k,

$O_i = \sum_{j \in I} W_{ij}$, količina protoka koji polazi iz čvora i,

$D_j = \sum_{i \in I} W_{ij}$, količina protoka koji dolazi u čvor j.

Koristeći gornju notaciju formulacija CSApHMP sa ograničenjima na količini robe koja se sakuplja u habovima je [Sta07]:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{k \in I} D_{ik} Z_{ik} (\chi O_i + \delta D_i) + \sum_{i \in I} \sum_{k \in I} \sum_{l \in I} \alpha D_{kl} Y_{kl}^{i} \tag{17}$$

uz uslove:

(6), (7), (8), (9) kao i

$$\sum_{j \in I} W_{ij} Z_{jk} + \sum_{l \in I} Y_{kl}^{i} = \sum_{l \in I} Y_{lk}^{i} + O_i Z_{ik}, \quad \forall\, i, k \in I \tag{18}$$

$$\sum_{i \in I} O_i Z_{ik} \le \Gamma_k Z_{kk}, \quad \forall\, k \in I \tag{19}$$

$$Y_{kl}^{i} \ge 0, \quad \forall\, i, k, l \in I \tag{20}$$

Ova formulacija CSApHMP problema obuhvata (n^3+n^2) promenljivih, od toga je n^2 binarnih i ($2n^2+n+1$) linearnih uslova. Odnosno, dimenzija problema, broj uslova i promenljivih zavise od n. Cilj CSApHMP je minimizacija ukupnih troškova transporta u mreži (17). Uslov (18) je jednačina konzervacije protoka, a (19) ograničava količinu protoka koji se sakuplja u svakom habu. Na kraju uslov (20) omogućava ne-negativnu reprezentaciju promenljive. CSApHMP je NP-težak jer je njegov potproblem sa neograničenim kapacitetima, USApHMP, NP-težak [Lov88].

3.1.2 Pregled postojećih metode za rešavanje U(C)SAHLP, U(C)SApHMP

Primerom je pokazano u [Cor10] da je matematička formulacija CSAHLP (koja je takođe navedena u ovom radu) nepotpuna i da to zavisi od strukture podataka. Predložen je skup nejednakosti koje će u svim situacijama osigurati validnost modela. Testiranjima je pokazano da nova ograničenja smanjuju vreme računanja optimalnog rešenja.

U [Ern99] je predložena nova MILP formulacija CSAHLP, kao i dve jednostavne heuristike za nalaženje gornje granice: jedna je bazirana na simulaciji žarenja (simulated annealing), a druga na slučajnom silaženju (random descent). Optimalno rešenje je dobijeno pomoću algoritma grananja i ograničavanja, sa početnom gornjom granicom dobijenom pomoću navedenih heuristika.

Contreras je [Con09] poboljšao Lagranževu relaksaciju, redukovanim testovima, kojom je omogućeno izračunavanje čvrste gornje i donje granice CSAHLP problema velikih istanci.

Egzaktna metoda grananja i sečenja (branch-and-cut) za rešavanje CSAHLP i USAHLP je navedena u [Lab03]. Algoritam najpre izvršava proceduru preprocesiranja i „ojačavanja" koja proverava dopustivost problema i dodaje nove uslove koristeći dobijene donje granice za količinu protoka i broj habova koje treba locirati.

Novi genetski algoritam za rešavanje CSAHLP je naveden u [Staxx]. Primenjena funkcija cilja osigurava da se nepodesne jedinke ne pojavljuju u generaciji GA. Uređivanjem lokacije habova u ne-opadajući redosled njihovih rastojanja za svaki ne-hab čvor usmerava se GA ka obećavajućim regionima. Za male instance AP problema, GA je veoma efektivan u nalaženju rešenja visokog kvaliteta u veoma kratkom vremenu. Rešavanjem velikih AP instanci, GA se u pogledu kvaliteta rešenja i vremena računanja pokazao kao potencijalan algoritam, korisna metaheuristika za rešavanje CSAHLP kao i drugih problema hab kapaciteta, kao i mnogo složenijih hab lokacijskih modela.

U [Chen05] se navode dva pristupa za utvrđivanje gornje granice broja habova USAHLP zajedno sa hibridnom heuristikom (hybrid heuristic) na osnovu metode simuliranog kaljenja (simulated annealing – SA method), tabu pretraživanjem (tabu search) kao i poboljšanim procedurama. Metode su testirane na CAB i AP (Australia post) skupovima podataka i upoređivane sa postojećim rezultatima u literaturi.

Tabu pretraživanje i hibridni genetski algoritam, za rešavanje USAHLP, su navedeni u [Abd98]. Hibridni GA ima bolje performanse od čistog GA. Rezultati su pokazali da je GA komponenta korisna za preinačenje pretrage i TS za njeno lokalizovanje.

Predstavljena su dva modela sa novim bi-kriterijumskim pristupom CSAHLP u [Cos08]. Prvim se minimizuje ukupno vreme servisiranja, a drugim minimizuje maksimalno servisno vreme habova. Odbačena su ograničenja kapaciteta i analiziran uticaj ovoga na različita nedominantna rešenja. Novim pristupima je omogućeno da se znatno poboljša jedan kriterijum bez većih povećanja drugih kriterijuma, što je od krucijalne važnosti za donošenje bitnih odluka.

USAHLP se mogu rešiti genetskim i algoritmom grananja i ograničavanja (Branch-and-bound) [Abd98a]. Genetski algoritam je adaptiran za mnoge probleme operacionih istraživanja, poput problema trgovačkog putnika, problema zakazivanja (scheduling problem); međutim, malo je aplikacija za probleme određivanja lokacija-alokacija. U [Top05] su upoređena rešenja dobijena GA sa rešenjima dobijenih GATS algoritmom (Genetic algorithm and tabu search - GATS). GATS algoritam je naprednija varijanta GA za rešavanje USAPHLP, koji koristi efikasnije kodiranje jedinki, napredniji operator ukrštanja, prilagođen domen ukrštanja, itd. Rezultati istraživanja u navedenom radu su dobijeni pri rešavanju instanci CAB i AP problema.

Formulaciju prvih heuristika (HEUR1, HEUR2) za rešavanje problema p-hab medijane jednostruke alokacije dao je O'Kelly [O'Ke87]. Obe heuristike nabrajaju sve moguće opcije za lokaciju p habova. U prvoj heuristici zahtevne tačke su dodeljene najbližem habu, dok su u drugoj dodeljene boljem od prva dva najbliža haba u smislu vrednosti funkcije cilja. Istraživanja Klincewicz-a su pokazala da je heuristika razmene superiornija u odnosu na heuristike koje je predložio O'Kelly [Kli91]. Ona je bazirana na lokalnom poboljšanju razmatranja koristeći se jednostrukim i dvostrukim procedurama razmene. Takođe je naveo još neke metode za rešavanje problema *p*–hab medijane kao što su tabu pretraga (tabu search) i pohlepna nasumična procedura pretrage (Greedy randomized search procedure - GRASP) u kojima su zahtevni čvorovi alocirani najbližim habovima i koje su testirane na CAB i skupu podataka od 52 zahtevne tačke i najviše 10 habova [Kli93].

Još jedna metoda za rešavanje problema *p*-hab medijane je Put Povezivanja (Path Relinking - PR) čija se originalna formulacija može pronaći u [Glo77]. Uspešnost metaheuristike je bazirana na dobroj integraciji metoda za selektovanje (podela seta podataka na podskupove), kombinovanju i unapređivanju rešenja koje pri svakom koraku koriguje set podataka. PR predstavlja raznovrsne mehanizme za unapređivanje seta podataka i heuristika radi pronalaženja optimalnog rešenja problema.

Najefikasnije egzaktno rešenje dobija se algoritmom najkraćeg puta (shortest-path alorithm) baziranom na metodi grananja i ograničavanja (branch-and-bound) [Ern98b], kojim je do sada optimalno rešen problem od najviše 100 čvorova. Lagranževa relaksacija je najefektivnija heuristika za rešavanje problema *p*–hab medijane [Pir98], a najefektivnija metaheuristka je tabu pretraživanje [Sko94].

Jedan od načina rešavanja *p*-hab medijalnih problema je genetskim algoritmom. Genetski algoritam - GA (Genetic Algorithm) je nastao na osnovu prenošenja nasleđa (informacija) živih bića na svoje potomstvo. Prilikom razmnožavanja u procesu ukrštanja genetski materijal sa roditelja prelazi na potomstvo. Nepravilno ukrštanje ili uticaj životne sredine mogu dovesti do mutacije gena.

Sposobnost preživljavanja (kvalitet) jedinke je merljiva kategorija i naziva se prilagođenost. Proces preživljavanja, koji zavisi od prilagođenosti, može se opisati matematičkom terminologijom i iskoristiti u slučajevima gde potraga za što boljom prilagođenošću predstavlja pronalaženje optimalnog rešenja.

GA je zasnovan na procesu prirodne evolucije i koristi se za razne probleme kombinatorne optimizacije, inženjerskog dizajna... Primenjuje se na konačnom skupu jedinki - populaciji (u praksi ih je najviše do nekoliko stotina) i svaka jedinka je predstavljena genetskim kodom (nizom karaktera). Raznovrsnost genetskog materijala se postiže slučajnim izborom jedinki za početnu populaciju. Svakoj jedinki se dodeljuje funkcija prilagođenosti kao merilo njenog kvaliteta. Suština genetskog algoritma je da se poboljša prilagođenost svake jedinke u populaciji iz generacije u generaciju, kao i srednja prilagođenost cele populacije primenom genetskih operatora selekcije, ukrštanja i mutacije.

Za rešavanje *p*-hab medijalnih problema koristi se modifikacija GA. Postoje dva faktora u procesu evolucije: raznovrsnost populacije i selektivni pritisak, koji su čvrsto povezani jer porast selektivnog pritiska smanjuje raznolikost stanovništva, i obrnuto. Drugim rečima, jak selektivni pritisak omogućava bržu konvergenciju GA, dok slabiji selektivni pritisak može dovesti do neefikasne pretrage. Svako rešenje se predstavlja nizom duzine n sa određenim redosledom i u vidu uređene liste L. Prvih p mesta zauzimaju habovi, a preostalih *n-p* ne-hab čvorovi koji su im pridruzeni. Na primer, neka je *n*=5, *p*=2 i uređena lista *L*=(1, 2, 3, 4, 5). Tada se matrično rešenje problema

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

može predstaviti u vidu niza *s*=(2 4|2 1 2) koji se tumači kao: prvi broj u stringu *s* je 2, znači druga tačka liste *L* je prvi hab; drugi broj stringa, 4, odnosno četvrti element liste *L* je drugi hab; kako je broj selektovanih tačaka 2 habovi su izdvojeni iz liste *L*. Naredni element stringa je 2 tako da je prvi broj u listi, 1, pridružen drugom habu – 4. Sledeći element stringa je 1 i znači da je element koji je na trećoj poziciji u listi, 3, pridružen prvom habu odnosno 2; poslednji element stringa *s*, 2, odnosno poslednji element liste *L*, 5, je pridružen drugom habu.

Operator ukrštanja gradi potomstvo nasumičnim izborom pozicije iz opsega [1...*p*-1] (*p* je dužina lokacije - broj habova) pri čemu se čuvaju mesta koja se nalaze levo u odnosu na ovu poziciju. Operator koji koristi alokaciju za svaki par spregnutih alokacija generiše pozicije iz opsega [1...*n*-*p*-1] slučajnim izborom, a nakon toga se zamenjuju mesta habova i čvorova kod roditelja (habovi jednog roditelja idu na mesto drugog, dok će čvorovi prvog otići na mesto čvorova drugog roditelja). Opertator mutacije, koji koristi alokacijski deo, zamenjuje element *i* bilo kojim celim brojem iz opsega [1...*p*].

Hibridni algoritam (Hybrid aproach) je veoma efikasan algoritam za rešavanje *p*-hab medijalnih problema. Sastoji se od Genetske paradigme (Genetic paradigm) i Multistartne heuristike pretrage (Multistart Search Heuristics) koja predstavlja operator mutacije u genetskom algoritmu.

Glavne komponente Multistartne heuristike pretrage su lokalno pretraživanje, mehanizam za formiranje početnih rešenja i kriterijum zaustavljanja. Da bi se primenila potrebno je da se dobro izaberu početna rešenja koja moraju da pokriju oblast pretraživanja. Početna rešenja se mogu izabrati nasumice (lokacija i alokacija su nasumice izabrani; početna rešenja će biti veoma raširena ali neće biti pogodno izabrana) ili sa određenim uslovima (habovi su locirani na *p* mesta koja imaju najveći protok nadolazećeg i odlazećeg saobraćaja i svaki ne-hab čvor je alociran ka najbližem habu). Procedura lokalnog pretraživanja skladišti najbolje pronađeno rešenje deleći skup pretraživanja na podskupove i zamenjujući svaki hab ne-hab čvorom, koji je pridružen tom habu, kao i ponovnim realociranjem ne-hab čvora novom najbližem habu. Postupak se ponavlja sve dok se ne postignu poboljšanja [Pér98]. Kriterijum zaustavljanja je odrađen fiksiran broj lokalnih pretraga.

U poslednjoj deceniji su razvijeni algoritmi za rešavanje USApHMP poput: 1) simuliranog kaljenja (simulated annealing - SA) kojim se može dobiti gornja granica za poboljšanje opšte metode grananja i ograničavanja [Sko96]. Takođe su upoređene metode SA sa TS u pogledu kvaliteta rešenja i vremena računanja [Sko94], s tim da se njima ne mogu rešiti problemi sa više od 50 čvorova. 2) Tabu pretraživanja (tabu search - TS) [Kli91]; 3) Genetskog algoritma (genetic algorithm - GA); 4) Heuristike pohlepne procedure slučajnog prilagođavanja (greedy randomized adaptive search procedure - GRASP) gde su ne-hab čvorovi pridruženi najbližem habu [Kli91]; 5) Metode ponovnog povezivanja puteva (path reliking method - PR) koja je u stvari metaheuristika koja koristi prostore susedstva kao osnovu za rekombinovanje rešenja [Pér04].

USApHMP se mogu rešiti algoritmom pod nazivom prag prihvatanja (treshold accepting algorithm - TA) [Wan09] kojim se uređuju čvorovi u ne-opadajući redosled, na osnovu njihovog ukupnog protoka, za selektovanje *p* habova kao početnog skupa TA. Algoritam je testiran na instancama CAB i AP. Rezultati testiranja pokazuju da je TA algoritam efikasan metod za rešavanje USApHMP i da za kratko vreme dolazi do optimalnog rešenja. Iako jedan primer ne može dostići najpoznatije rešenje, TA ažurira dva najpoznatija rešenja za velike instance AP.

Nov pristup rešavanju USApHMP, [Ili10], je generalna promenljiva pretraživanja susedstva (General variable neighborhood search) u kojoj su korišćena tri susedstva i efikasno ažuriran skup podataka za izračunavanje ukupnog protoka u mreži. Pored uobičajne sekvencijalne strategije (sequential strategy), nova ugnježdena strategija (nested strategy) je predložena u projektovanju determinističkih promenljivih susedstva iz lokalne pretrage. Rezultati testiranja pokazuju da je generalna promenljiva pretrage susedstva nadmašila najpoznatije heuristike u pogledu kvaliteta i napora prilikom izračunavanja. Štaviše, poboljšane su najpoznatije vrednosti za neke AP i PlanetLab instance.

Metodu najkraćeg puta za prebrojavanje svih mogućih lokacija habova pri rešavanju USApHMP su koristili Ernst i Krishnamoorthy [Ern98b]. Algoritam koji su predložili je polinomijalan po *n* i eksponencijalan po *p*, odnosno daje tačna rešenja u razumnom vremenu računanja za probleme sa relativno malim brojem habova koje treba uspostaviti ($p \leq 5$). Za probleme većih dimenzija metoda najkraćeg puta se kombinuje sa metodom grananja i ograničavanja (branch-and-bound algorithm) [Ern04b]. Donje granice koje se koriste u metodi grananja i ograničavanja za dobijanje egzaktnog rešenja se obezbeđuju metodom najkraćeg puta.

Rešenja *p*–hab medijalnih problema višestruke alokacije obezbeđuju donju granicu optimalnih rešenja *p*–hab medijalnih problema jednostruke alokacije [Cam96]. Koristeći se tom činjenicom Campbell je predložio dve heuristike, MAXFLO i ALLFLO, kojima se rešenja *p*–hab medijalnih problema jednostruke alokacije dobijaju od rešenja *p*–hab medijalnih problema višestruke alokacije [Cam96]. U ovim heuristikama, lokacije će se određivati na osnovu istih odluka, a alokacijski deo po različitim pravilima.

U radu [Sta07] su predložene dve verzije genetskog algoritma za rešavanje hab lokacijskih problema ograničenih kapaciteta CSApHMP. Demonstracija rešenja je odrađena na dva načina i u skladu sa osobinama problema razvijeni genetski operatori. Upotrebljeni genetski operatori čuvaju korektnost jedinki u smislu očuvanja broja uspostavljenih habova i ograničenja kapaciteta habova. Uz ovaj rad je pronađen još jedan koji se bavi rešavanjem CSApHMP [Pér05]. U njemu je predložena evolutivna metoda ponovnog povezivanja puteva (Path Relinking method - PR), heuristika gramzive slučajne pretrage (Greedy randomize search procedure - GRASP), kao i njihova hibridizacija za rešavanje problema *p*–hab medijane ograničenih kapaciteta sa jednostrukom alokacijom, ali su prikazani rezultati čudni i nekozistentni što je navedeno i objašnjeno u radu [Sta07].

3.1.3 Problemi hab medijane višestruke alokacije neograničenog/ograničenog kapaciteta (Ucapacitated/capacitated multiple allocation hub median problem – U(C)MAHLP, U(C)MApHMP)

Problem neograničene višestruke alokacije pozicije habova (Uncapacitated multiple allocation hub location problem - UMAHLP) ne postavlja ograničenja na kapacitet habova, broj habova nije unapred zadat i svaki ne-hab čvor može biti pridružen većem broju habova. U zavisnosti od potreba samog modela određuje se neophodni broj habova čije lociranje dovodi do izvesnih fiksnih troškova. Cilj je naći optimalno lokacijsko-alokacijsko rešenje kojim se minimizuju ukupni troškovi (suma transportnih i fiksnih troškova). U radu [O'Ke87] je dokazano da su UMAHLP NP-teški. Ukoliko je broj habova unapred definisan, na primer *p*, u pitanju je problem UMApHMP.

Za formulaciju UMAHLP potrebno je definisati promenljive:

y_k – uzima vrednost 1 ako je hab lociran u čvoru *k*, 0 u suprotnom,

x_{ijkm} – deo toka od W_{ij} iz čvora *i* koji je prikupljen u habu *k*, distribuisan prema habu *m* i prosleđen u čvor *j*,

f_k – fiksni troškovi uspostavljanja haba *k* (za UMApHMP $\sum_{k\in J} f_k$ je obično 0 jer uglavnom nema fiksnih troškova lociranja habova),

D_{ij} – rastojanje između čvorova *i* i *j* (rastojanje na bazi troškova, koje je simetrično i zadovoljava nejednakost trougla),

W_{ij} – transportni troškovi po jedinici saobraćaja od *i* do *j*, $W_{ij}=\sum_{k\in J}\sum_{m\in J} x_{ijkm}$.

Parametri χ i δ predstavljaju jedinične troškove prikupljanja i raspodele, a 1-α predstavlja popust u ceni za transport između habova.

Koristeći gornju notaciju, UMAHLP se matematički može zapisati kao [Sta09]:

$$min \sum_{i,j,k,m} W_{ij}\left(\chi D_{ik} + \alpha D_{km} + \delta D_{mj}\right) x_{ijkm} + \sum_{k} f_k y_k \tag{21}$$

uz uslove:

$$\sum_{k,m} x_{ijkm} = 1 \quad \forall i, j \tag{22}$$

$$\sum_{m} x_{ijkm} + \sum_{m,m\neq k} x_{ijkm} \le y_k \quad \forall i, j, k \tag{23}$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \forall k \tag{24}$$

$$x_{ijkm} \ge 0, \forall i, j, k, m \tag{25}$$

Funkcija cilja (21) minimizuje sumu troškova transporta $W_{ij}(\chi D_{ik}+\alpha D_{km}+\delta D_{mj})$ putanje $i\rightarrow k\rightarrow m\rightarrow j$ sa habovima u čvorovima k i m (snabdevač-hab, hab-hab i hab-korisnik, pomnoženi redom sa faktorima χ, α i δ) i fiksnih troškova uspostavljanja habova. Uslov (22) obezbeđuje da se celokupan saobraćaj šalje između svih parova habova, a (23) omogućava da se saobraćaj trasira samo kroz otvoren hab. Ograničenje (24) omogućava binarnu prezentaciju y_k, a (25) ne-negativnu reprezentaciju promenljive x_{ijkm}. Napomena, gornja granica $x_{ijkm} \leq 1$ je izostavljena u (25) jer je implicitno navedena u uslovu (22). Uzimajući u obzir da ne postoji ograničenje kapaciteta habova, promenljive x_{ijkm} će u optimalnom rešenju biti binarne uzimajući vrednost 1 samo onda kada predstavljaju najjeftiniju put od i do j.

U problemima p-hab medijane višestruke alokacije ne-hab čvorovi su povezani sa više habova i saobraćaj od ne-hab čvora se odvija preko haba koji omogućava najjeftiniju putanju. Na primer, u avio-saobraćaju putnici iz ne-hab čvora mogu da biraju habove preko kojih će putovati u zavisnosti od njihovog krajnjeg odredišta. U poštanskim sistemima se pošta iz ne-hab čvora može transportovati kroz različite habove u zavisnosti od krajnje destinacije i može se unutar ne-hab čvora presortirati.

Problemi UMApHMP nemaju ograničenja kapaciteta habova i količine saobraćaja među lukovima. Ne-hab čvor prima/odaje saobraćaj preko višestruke alokacije habova koja omogućava svakom ne-hab čvoru da bude povezan sa nekoliko, ili sa svim, habovima tako da ukupni troškovi saobraćaja budu minimalni. p-hab medijalni problemi višestruke alokacije su problemi lokacije-alokacije jer se prema optimalnim lokacijama habova određuju alokacije svih ne-hab čvorova.

Neka je $G=(I, A)$ potpun graf, $I=\{1,...,n\}$ skup čvorova, a $A=I\times I$ skup lukova. Za svaki par čvorova (i, j), W_{ij} je količina robe koju treba transponovati od i-tog snabdevača do j-tog korisnika (intenzitet saobraćaja između ta dva čvora), a D_{ij} rastojanje između njih. U nekim primerima se pretpostavlja da je intenzitet saobraćaja simetričan, odnosno da je $W_{ij}=W_{ji}$. Neka je p broj habova koje treba locirati i promenljive H_j, Z_{ik}, Y_{kl}^{i}, X_{lj}^{i} definisane na sledeći način:

H_j uzima vrednost 1 ako je hab lociran na j-tom čvoru, inače 0

Z_{ik} predstavlja količinu robe koja polazi od i-tog čvora a sakuplja se u habu k

Y_{kl}^{i} je količina robe koja polazi od i-tog čvora, sakuplja se u habu k i distribuira preko haba l

X_{lj}^{i} predstavlja količinu robe koja kreće od čvora i, čije je odredište čvor j, a transportuje se preko haba l.

Protok od čvora-snabdevača do čvora-korisnika sastoji se od tri komponente: transfera od snabdevača do prvog haba, transporta između habova i distribucije od poslednjeg haba do korisnika, sa podrazumevanom šemom višestruke alokacije. Parametri χ i δ redom označavaju troškove (cenu) kolekcije i distribuciju robe po jedinici količine, dok 1-α predstavlja koeficijent uštede za transpot između habova. Koristeći gore navedenu notaciju matematička formulacija UMApHMP glasi [Sta04]:

$$\min \sum_i \left[\chi \sum_k D_{ik} Z_{ik} + \alpha \sum_k \sum_l D_{kl} Y_{kl}^i + \delta \sum_i \sum_j D_{lj} X_{lj}^i \right] \tag{26}$$

uz uslove:

$$\sum_j H_j = p \tag{27}$$

$$\sum_k Z_{ik} = \sum_j W_{ij}\,, \qquad \text{za} \quad \forall\, i \tag{28}$$

$$\sum_l X_{lj}^i = W_{ij}\,, \qquad \text{za} \quad \forall\, i, j \tag{29}$$

$$\sum_l Y_{kl}^i + \sum_j X_{kj}^i - \sum_l Y_{lk}^i - Z_{ik} = 0\,, \qquad \text{za} \quad \forall\, i, k \tag{30}$$

$$Z_{ik} \le \sum_j W_{ij} H_k\,, \qquad \text{za} \quad \forall\, i, k \tag{31}$$

$$\sum_i X_{lj}^i \le \sum_i W_{ij} H_l\,, \qquad \text{za} \quad \forall\, i, j \tag{32}$$

$$X_{lj}^i, Y_{lk}^i, Z_{ik} \ge 0\,,\ H_k \in \{0,1\}, \qquad \text{za} \quad \forall\, i, j, k, l \tag{33}$$

Funkcija cilja (26) minimizuje sumu transportnih troškova snabdevač-hab, hab-hab i hab-korisnik pomnoženih sa koeficijentima χ, α i δ respektivno. Uslovom (27) se fiksira broj uspostavljenih habova na p, a uslovi (28)-(30) predstavljaju za svaki čvor i jednačine divergencije protoka u mreži. Ograničenja (31) i (32) ne dopuštaju direktnu komunikaciju između ne-hab čvorova, a (33) označava ne-negativnu i/ili binarnu reprezentaciju promenljivih H_j, Z_{ik}, Y_{kl}^i i X_{lj}^i.

Retko je u problemima dizajniranja hab mreža, koje se sreću u praksi, omogućen transport neograničenih količina jedinica robe između korisnika i snabdevača preko mreže habova u neograničenom vremenu. Ograničenja kapaciteta mogu biti različite prirode i hab lokacijski problemi ograničenih kapaciteta imaju veliki praktični značaj, ali su u odnosu na hab lokacijske probleme neograničenih kapaciteta, zbog dodatnih ograničenja, teži za rešavanje Motivacija problema je u poštanskim sistemima. Količina pošte koju hab (centar sortiranja) može da sortira je vremenski ograničena. To zauzvart ograničava obim pošte koja može biti sortirana u centrima. Stoga se uvodi ograničenje kapaciteta habova. Ova ograničenja se odnose samo na saobraćaj koji ulazi u hab iz ne-hab čvora. Varijanta ovog problema je kada se kapacitet odnosi na kolekciju i distribuciju (odnosno, odlazni i dolazni protok).

U primeru pošte, intenzitet saobraćaja W_{ij}, od čvora i do čvora j, se sastoji od tri različite komponente: raspodele, prenosa i skupa. Pod skupom se podrazumeva kretanje pošte počev od poštanskog okruga do centra za njeno alociranje i sortiranje, odnosno, haba. U datoj aplikaciji habovi su centri konsolidacije i sortiranja poštanskog saobraćaja, a kretanje pošte među habovima predstavlja prenos. Raspodela je od terminalnog haba do destinacionog poštanskog okruga. Svaka komponenta saobraćaja sadrži određene troškove po jedinici saobraćaja proporcionalne rastojanju.

Razlika između CMAHLP i UMAHLP je što CMAHLP imaju ograničenja kapaciteta Γ_k na količinu protoka koji može ući u (i/ili izaći) dati hab k. Da bi se uveo problem ograničenja kapaciteta kolekcije habova definišu se promenljive:

♦ Γ_k= ograničenje kapaciteta količine protoka koji može ući (i/ili izaći) u bilo koji hab k.

Ograničenje kapaciteta na kolekciji je motivisano poštanskim sistemima jer je za sortiranje pošte jedino neophodno konsolidovanje i sortiranje unutar kolekcionog haba. U poštanskim isporukama, obim pošte koju habovi (centri sortiranja) mogu sortirati je vremenski ograničen. Iz tog razloga je uslov $\sum_{(i,j)\in A}\sum_{l\in J} X_{ijkl} \le \Gamma_k$ (X_{ijkl} predstavlja saobraćaj od čvora i do čvora j preko habova k i l).

♦ C_{ij} -troškovi transporta jedinice saobraćaja između čvorova i i j za svako $i, j\in I$.

($C_{ij}=C_{ji}$, $C_{ii}=0$ za svako $i\in I$, $C_{ij}>0$ za svako $i, j\in I$, $i \neq j$)

♦ f_k-fiksni troškovi uspostavljanja haba k.

Formulacija CMAHLP sa ograničenjima na količini saobraćaja koji kolekcijom ulazi u hab je (preuzeto iz [Bol04]):

$$\min \sum_i \left[\chi \sum_k C_{ik} Z_{ik} + \alpha \sum_k \sum_l C_{kl} Y_{kl}^i + \delta \sum_i \sum_j C_{lj} X_{lj}^i \right] + \sum_k f_k H_k$$

Uz uslove (28), (29), (30), (31), (32), (33) i

$$\sum_i Z_{ik} \le \Gamma_k H_k, \text{ za } \forall\, k \tag{34}$$

Dodavanje raspodela protoka za ograničenje kapaciteta je trivijalno proširenje modela, koje ne povećava broj promenljivih, ali zahteva neka dodatna ograničenja. Uključivanjem uslova (27), odnosno uspostavljanje tačno p habova, i izbacivanjem iz funkcije cilja troškove uspostavljanja habova dobija se problem p-hab medijane višestruke alokacije ograničenog kapaciteta, CMApHMP.

Ukoliko se desi nedostatak ograničenja kapaciteta na vezama, onda neće postojati optimalno rešenje u kojem su sve promenljive X_{ijkl} jednake nuli ili jedinici, jer bi trebalo da se ukupan saobraćaj za svaki odlazno-dolazni par trasira kroz najjeftiniji hab. Dakle, nema potrebe ograničavati X_{ijkl} na skup celih brojeva [Cam94].

Iako hab ima dovoljno kapaciteta ne može se pretpostaviti da će prikupiti sopstveni saobraćaj (slučaj ograničenja kapaciteta kolekcijom), što je prikazano sledećim primerom. Razmatrajmo CMAHLP sa N={1,2,3}, F=(100,0,0), Γ=(10,1,1), W_{12}=1, W_{23}=1, W_{ij}=0 za sve (i, j)$\in A\setminus${(1,2), (2,3)}, $C_{12}=C_{21}=C_{23}=C_{32}=1$, $C_{13}=C_{31}=2$, $\delta=\chi=2$ i $\alpha=1$. Čvor 1 nije hab zbog visokih troškova, pod uslovom da postoji neko moguće optimalno rešenje gde čvor 1 nije izabran za hab. Pošto čvorovi 2 i 3 nemaju fiksne troškove i kombinovani kapacitet 2, onda oba čvora moraju biti izabrana za habove, pod uslovom da to nije čvor 1. Sada se protok od haba 2 može prikupljati preko 2 ili 3. Saobraćaj od 1 do 2 ima dve opcije: 1→2 ili 1→3→2 što vodi do dva moguća rešenja:

1. Saobraćaj koji proističe iz 1 prikuplja se u 2, iz 2 se prikuplja u 3, ima troškove jednake $\chi(C_{12}+C_{23})=4$.
2. Saobraćaj koji proističe iz čvora 1 prikuplja se u 3 i prebacuje u 2, dok se protok iz 2 prikuplja u 2 i prebacuje u 3, ima troškove $\chi C_{13}+\alpha C_{32}+\chi C_{22}+\alpha C_{23}=6$.
Stoga je prvo rešenje, gde se saobraćaj od haba 2 sakuplja u habu 3, optimalno i čvor 1 nije moguć za hab. Odavde se vidi da nije neophodno da hab prikupi sopstveni van-obavezan protok ako je ograničene kolekcije. U slučaju problema sa neograničenim kapacitetom, svako optimalno rešenje neće usmeravati protok iz čvora *i* do haba *j* preko haba *k*, ako je jeftinije ići direktno do *j*. Takođe, ni jedno optimalno rešenje problema sa neograničenim kapacitetom neće sakupljati saobraćaj u habu *l* ako je jeftinije sakupiti u habu *k*, a zatim sprovesti do *l*.

3.1.4 Pregled postojećih metode za rešavanje U(C)MAHLP, U(C)MApHMP

Glavna ideja u [Marí06] je prikaz nove formulacije UMAHLP kojom se omogućava jedna, ili dve, posete habovima, s tim da cene troškova ne moraju da zadovoljavaju nejednakost trougla. Takođe su ukrštanjima u grafu dobijene bolje nejednakosti.

Mayer i Wagner su 2002 godine [May02] predložili novi algoritam grananja i ograničavanja za rešavanje UMAHLP, takozvani HabLokator algoritam (HubLocator algorithm). Donja granica je dobijena metodom dvostrukog penjanja (dual ascent method), a gornja je za neka ograničenja konstruisana i poboljšana putem jednostavne heurističke procedure. Navedenim algoritmom se u razumnom vremenu mogu rešiti problemi koji sadrže do 40 čvorova.

U [Cán04] je predstavljen algoritam grananja i ograničavanja (Branch-and-bound) za rešavanje UMAHLP. Prvo je konstruisan heuristički metod, baziran na tehnici dualnog penjanja (dual heuristic) koja je ojačana sa nekoliko specijalizovanih sabrutina i pruža dobru donju granicu čvorovima stabla grananja. Heuristika daje skoro 70% optimalnih rešenja ORLIB instancama do 120 čvorova. Algoritam grananja i ograničavanja je primenjen na CAB skupu podataka i pokazao se veoma efikasnim: rešene su instance do 120 čvorova i daje optimalna rešenja u svim slučajevima.

Za dobijanje tačnog rešenja problema hab medijane višestruke alokacije u [Kli96] je korišćen algoritam grananja i ograničavanja (Branch-and-bound) baziran na tehnici dualnog penjanja (dual ascent) i dualnoj tehnici prilagođavanja (dual adjustment). Boland sa saradnicima [Bol04] je razvio proceduru preprocesiranja i zatezanja ograničenja za mešovite 0-1 LP formulacije za dobijanje tačnog rešenja.

U radu [Chen07] za nalaženje optimalnog broja habova UMAHLP korišćena je efektivna heuristika (effective heuristic) bazirana na metodi simulativnog kaljenja (simulated annealing) i tabu listi. Testiranja pokazuju da se primenom gornje granice broja habova, dobijene heuristikom, može dobiti optimalno rešenje za instance CAB i AP problema.

MILP formulacijom CMAHLP, navedenom u [Cam94], je zadata gornja granica sume saobraćaja koji ulazi u hab kroz kolekciju i tranfer, koja je jednaka kapacitetu haba. Formulacija modela u [Ebe00] sadrži samo ograničenja kapaciteta na količinu saobraćaja koji kroz kolekciju ulazi u hab. Samo je ovo ograničenje uvedeno, jer kada se nakon prikupljanja pošta sortira, ne treba je ponovo sortirati za distribuisanje.

U [Ebe00] je predstavljena nova MILP (mixed intager linear programing) formulacija CMAHLP kao i heuristika za rešavanje istih, koja koristi najkraći put (shortest path). Gornja granica dobijena navedenom heuristikom je inkorporirana u algoritam grananja i ograničavanja. Takođe su prikazani i rezultati dobijeni heuristikom i egzaktnom metodom. Kao i za UMAHLP, CMAHLP se mogu rešiti algoritmom zasnovanim na tehnici dualnog penjanja (dual-ascent technique) [May02].

Manje modifikacije heuristike gornje granice (the upper bound heuristic) za rešavanje CMAHLP odrađene su da bi se dobila gornja granica instanca UMAHLP i UMApHMP [Bol04]. Takođe su u navedenom radu formulacije sva tri problema (U(C)MAHLP, UMApHMP) dopunjene preprocesiranjem i jačanjem ograničenja. U svim slučajevima gde je linearna formulacija problema ojačana vreme izračunavanja je redukovano. Ovaj efekat je najveći kod problema ograničenih kapaciteta za koje je bi u suprotnom početni raskorak bio veliki.

Klincewich [Kli96] je koristio Lagranževu relaksaciju zajedno sa algoritmom grananja i ograničavanja za rešavanje UMApHMP. Metoda njakraćeg puta (Shortest path method) se koristi za prebrojavanje svih mogućih lokacija habova u UMApHMP [Ern98a]. Algoritam daje tačna rešenja u razumnom vremenu računanja za probleme sa relativno malim brojem habova (p<5) koje treba locirati (eksponencijalan po p i polinomski po n). Kod problema većih dimenzija, metoda najkraćeg puta se uspešno kombinuje sa algoritmom grananja i ograničavanja (Branch-and-bound algorithm - BnB) za dobijanja donjih granica koje se dalje koriste u BnB za pronalaženje egzaktnog rešenja.

Alokacijski deo problema se efektivno može rešiti rešavanjem problema najkraćih rastojanja među svim parovima grafa. Za njegovo rešavanje koristi se modifikovana verzija Floyd-Warshall algoritma (videti [Ahu93]). Ako se definiše $C_{ijkl}=\chi D_{ik}+\alpha D_{kl}+\delta D_{lj}$, promenljiva X_{ijkl} koja predstavlja frakciju totalnog protoka W_{ij} od čvora i do čvora j kroz habove k i l, skup habova J, i skup čvorova I. Algoritam najkraćeg puta (Shortest path algorithm - SPA), za svako $i, j\in I$ glasi:

$$c\,[i, j]=\sum_{k\in I}\sum_{l\in I} C_{ijkl}X_{ijkl}\,.$$

Optimalni troškovi za zadati skup habova se izračunavaju uz pomoć $\sum_{i,j\in I} W_{ij}c\,[\,i,\,j\,]$.

Još jedna od primena SPA je kroz algoritam eksplicitne enumeracije (Explicit enumeration algorithm - EE). SPA se primenjuje na svaku moguću kombinaciju habova $J\subseteq I$ (I je skup od n čvorova od kojih je tačno p habova) dok se ne postigne optimalno rešenje, odnosno rešenje sa minimalnim troškovima. Ovakav pristup garantuje optimalno rešenje. Njegova efikasnost je $O(C_p^n pn^2)$. Algoritam je prihvatljiv kod problema gde je p zadati mali broj. Na primer, ako treba locirati dva haba, broj mogućih habova je $O(n^4)$. Kod problema većih razmera ovaj algoritam je nepraktičan jer broj mogućih habova je srazmeran broju C_p^n.

Heuristika bazirana na najkraćem rastojanju (A shortest path based heuristic - SPBH) se koristi algoritmom najkraćeg puta. Ideja heuristike je zasnovana na činjenici da se za dati skup habova *J*, koristeći SPA, može pronaći resenje UMApHMP problema. Neka je *J* proizvoljan skup habova. Svaka zamena jednog elementa skupa *J* sa elementom (čvorom) skupa *I\J*, uzima će se za početak nove iteracije, sve dok se ne postigne optimalni skup habova. Ako se ne postigne optimalni skup habova, onda se menja početni skup *J*. Broj samih iteracija zavisi od pronalaženja globalnog optimuma i od veličine samog problema. Povećanjem broja iteracija, kod problema velikih razmera, potrebno vreme izračunavanja znatno se povećava.

Heuristika za rešavanje problema ograničenog kapaciteta [Ebe00] je bazirana na metodi za selekciju habova, proceduri-algoritmu najkraćeg rastojanja i proceduri trasiranja protoka koja krši ograničenje kapaciteta. Na početni skup habova se primenjuje algoritam najkraćeg rastojanja. Ako su zadovoljeni kapaciteti u bilo kojoj fazi, onda postoji izvodljivo rešenje za CMApHMP, ako ne onda se protok preusmerava koristeći heuristiku.

3.2 Problemi hab centra (Hub center problem)

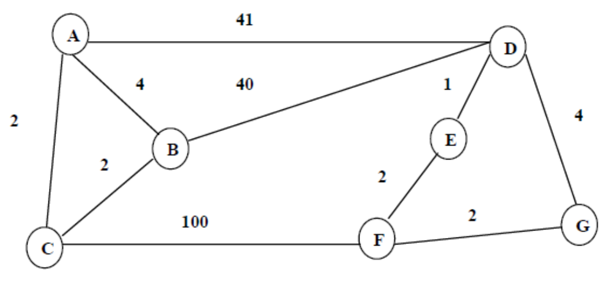
Problemi hab medijane se baziraju na lokaciji habova unutar mreže i alokaciji ne-hab čvorova u odnosu na habove, tako da ukupni troškovi transporta budu minimalni. Njihova velika primena se ogleda u avio i telekomunikacionim sistemima, međutim, kod izuzetno velikih rastojanja ovakva formulacija hab mreže može dovesti do neodgovarajućih rezultata. Takve poteškoće su prevaziđene u problemima hab centra, čija je suština lociranje (*p*) habova unutar mreže tako da se minimizuje maksimalna udaljenost/vreme/troškovi transporta između parova korisnik-snabdevač (*minmax* kriterijum). Problemi hab centra imaju veliku primenu kod brzih ili vremenski ograničenih sistema isporuka, kao što su brze poštanske isporuke i službe hitnih intervencija. Ovaj model odgovara realnim problemima lociranja službe za pružanje pomoći kao što je lokacija vatrogasnih stanica (jer vatrogasna kola treba što pre da stignu do najudaljenijeg objekta) ili službe za hitnu pomoć (kada je zahtev sličan prethodnom). U ovakvim sistemima dato maksimalno vreme predstavlja najbolje vreme koje se može garantovati svim klijentima. Da bi sistemi, kao što su Federal Express, bili što konkurentniji neophodno je da to vreme bude što kraće moguće. Uspešnost ovakvih mreža je u optimizaciji (npr. vreme prolaska robe između dva centra u pošti ili lancu snabdevanja), a faktor uštede na lukovima pokazuje da je postavljanje bržih veza, poput bržih aviona ili više telekomunikacionih veza za protok, između habova, ekonomičnije nego korišćenje drugih lukova. Takođe, faktor uštede se može tumačiti kao ubrzavanje ili faktor smanjenja cena koji nastaje čestim korišćenjem istog luka.

Problemi *p*-hab centra spadaju u NP-teške probleme, što su pokazali Kariv i Hakimi 1979. godine, (videti u [Kar79]). Čak iako je faktor uštede nula, ili ako je fiksiran broj habova, problemi *p*-hab centra pripadaće i dalje NP-teškim problemima (videti [Ern02]). Kako su problemi *p*-hab centra NP-kompletni (videti [Tan00]) mnogi algoritmi za njihovo rešavanje će iterativno selektovati habove, a zatim rešavati problem alokacije.

Generalno, ne postoji samo jedno rešenje problema *p*-hab centra gde su snabdevači na svim čvorovima mreže, što za posledicu ima da su centri obično locirani negde uz samu ivicu mreže. Kao rezultat toga, pravi se razlika između centralnih čvorova - centers node (gde podobne lokacije snabdevača mogu biti ograničena na temena) i apsolutnih centara - absolute centers (u kojima lokacija snabdevača može biti bilo gde na mreži). 1-centralni čvor se može naći ispitivanjem svih čvorova kao potencijalnih kandidata, dok je određivanje 1-apsolutnog centra dosta komplikovanije, jer je zapravo to min-max-max-min problem.

Prvu formulaciju problema uvodi Campbell, a ujedno daje i definiciju tri različita tipa problema *p*-hab centra:

1) Minimizacija maksimalnih troškova za svaki par početno-krajnje odredište. Ovaj tip problema je važan za hab sisteme koji podrazumevaju artikle, koji su kratkog roka trajanja ili su pokvarljivi, tj. čija cena zavisi od vremena.
2) Minimizacija maksimalnih troškova za kretanje na svakoj jednostrukoj vezi (izvorište-hab, hab-hab i hab-odredište). Primer ovog tipa problema *p*-hab centra su artikli koji zahtevaju čuvanje, ili čuvanje i obradu, kao što je grejanje ili hlađenje, koje je dostupno na hab lokacijama. Drugi primer su vozači koji su podložni ograničenju vremena prilikom kontinuiranog pružanja usluga.
3) Minimizacija maksimalnih troškova saobraćaja između habova i početnih, odnosno, krajnjih odredišta (vertex centri). Za ovaj tip problema mogu se dati primeri slični drugom tipu s obzirom na to da hab-hab veze mogu imati neke posebne karakteristike.



Slika 3.2.1 Primer tri tipa problema hab centra

Neka je p=2, α=0, 1 i sav saobraćaj 0 sem A-G i B-E. Habovima A i D je predstavljen prvi tip problema centra, jer oni minimizuju maksimalne troškove transporta odlazno-dolaznih parova za B-A-D-E koji iznose 9,1. Habovi B i D predstavljaju probleme centra drugog tipa, zato što minimizuju maksimalne troškove na svim pojedinačnim lukovima, koji za lukove A-B, B-D i D-G iznose 4. Habovi C i F su trećeg tipa jer minimizuju maksimalne troškove hab-odlazni/dolazni čvor, koji za lukove C-A, C-B, F-E i F-G iznose 2.

Poznato je da su problemi *p***-**hab centra NP-teški, zato je teško osmisliti efikasan algoritam koji će optimalno rešiti neki primer velikih dimenzija. Iz tog razloga se pristupa heuristikama uz pomoć kojih se za razumno vreme dolazi do dopustivog rešenja. Da bi se došlo do dobre heuristike potrebno je odgovoriti na sledeća četiri pitanja: (1) Kako pronaći početni skup habova?; (2) Za dati set habova, kako ne-hab čvorove dodeliti habovima bez narušavanja zahteva alokacije?; (3) Kako datu alokaciju poboljšati bez značajnije promene datog uslova?; i (4) Kako izbeći lokalnu optimalnost?

Za rešavanje problema *p*-hab centra može se koristiti heuristika koja vrši alokacije na osnovu najkraćeg rastojanja, d_{ij}, između svih čvorova (i, j). Prioritetni su čvorovi sa visokim vrednostima $w_{ij} \cdot d_{ij}$, dok se alokacija novih čvorova sprovodi u odnosu na čvorove koji su već alocirani. Ova heuristika je nazvana Naizmenično troškovi-težinska dodela (Alternate cost-weight allocator - ACWA) jer naizmenično uzima u obzir rastojanja alociranih čvorova u odnosu na habove i vrednosti $w_{ij} \cdot d_{ij}$ alociranih u odnosu na nealocirane čvorove. ACWA identifikuje ne-hab čvorove (i, j) sa maksimalnom vrednošću $w_{ij} \cdot d_{ij}$ i alocira čvorove i, j ka onim habovima koji minimizuju vreme putovanja između ta dva čvora. Nakon što se prva dva ne-hab čvora dodele na ovaj način, ACWA postavlja zastavicu na dodeljen čvor koji je najudaljeniji od svog haba, recimo haba k. Pri svakom koraku, uz pomoć čvora i koji je obeležen zastavicom, ACWA identifikuje nedodeljen čvor j tako da je vrednost izraza $w_{ij} \cdot (d_{kj}+c_{ik})$ maksimalna. Nakon toga je čvor j alociran ka habu koji će minimizovati vreme prolaska između čvorova i i j, pod pretpostavkom da je čvor i već alociran ka k. Ukoliko je potrebno menja se markirani čvor, a algoritam se ponavlja dok se ne izvrši alokacija svih čvorova. ACWA je veoma brza heuristika koja naizmenično razmatra transportno vreme i rastojanje, bez obzira da li je potencijalna mreža potpun graf.

3.2.1 Problemi hab centra jednostruke alokacije neograničenog/ograničenog kapaciteta (Uncapacitated/capacitated single allocation hub center problem – HCSAP, U(C)SApHCP)

Problemi hab centra jednostruke alokacije (Hub center single allocation problem - HCSAP), kao potproblem USApHCP koji se dobija fiksiranjem skupa habova, imaju za cilj alociranje svakog ne-hab čvora tačno jednom habu tako da se minimizuju maksimalni troškovi transporta između svih odlazno-dolaznih parova. U [Ern04a] je dokazano da su HCSAP NP-teški.

Neka je $I=\{1,..,n\}$ skup čvorova, J skup habova, $J \subseteq I$, D_{ij} rastojanje od i-tog do j-tog čvora (najkraće rastojanje od i do j), troškovi hab luka $[k, m]$ se definišu kao αD_{km} (α zadati faktor uštede transporta među habovima), troškovi luka koji spaja ne-hab čvor sa habom jednaki su dužini datog luka. Rastojanje od polaznog čvora i do odredišta j, kroz habove k i m, se računa po formuli $D_{ik}+\alpha D_{km}+D_{mj}$. U slučaju da je $i=j$, odnosno saobraćaj ide od čvora pa natrag, rastojanje je zadato sa $2D_{im}+D_{kk}$. Iako rastojanje različito od nule od haba do samog sebe u avio-saobraćaju nema smisla (jer ljudi neće leteti iz grada do haba pa nazad do polaznog grada) u sistemima gde se prebacivanje i sortiranje odvija u habu, poput telekomunikacionih i poštanskih sistema, ima smisla. Promenljiva Z_{ik} je jednaka 1 ako je čvor i pridružen habu k, inače 0. Matematička formulacija HCSAP glasi [Ern04a]:

$$\min \quad \max_{i,j \in I, k,m \in J} (D_{ik}+\alpha D_{km}+D_{mj}) Z_{ik} Z_{jm} \tag{35}$$

uz uslove:

$$\sum_{k \in J} Z_{ik} = 1, \text{ za } \forall\, i \in I \tag{36}$$

$$Z_{ik} \in \{0, 1\}, \ \forall\, i \in I, \forall\, k \in J \tag{37}$$

Funkcija cilja minimizuje maksimalne transportne troškove između svih odlazno-dolaznih parova (35). Uslovi (36) i (37) garantuju da će čvor biti pridružen tačno jednom habu.

U problemima USApHCP ne postoje ograničenja u pogledu kapaciteta habova ili protoka. Takođe je potrebno izabrati fiksan broj habova i dodeliti čvor tačno jednom habu, tako da se minimizuje maksimalna putanja između bilo kog odlazno-dolaznog para. Neka je $I=\{1,...,n\}$ skup različitih čvorova mreže, $J=\{1,...,p\}$ skup habova , $J \subseteq I$, a D_{ij} rastojanje od i-tog do j-tog čvora (vreme putovanja), pri čemu je $D_{ij}=D_{ji}$. Pretpostavka je da rastojanja zadovoljavaju nejednakost trougla i da važi $D_{ii}=0$, $D_{ij}>0$ za $i \neq j$. Binarna promenljiva Z_{ik} uzima vrednost 1 ako je čvor i pridružen habu k, u suprotnom ima vrednost 0. Promenljiva Z predstavlja funkciju cilja, odnosno troškove transporta.

Transfer od snabdevača i do prvog haba k, transport između habova k i h i distribucija od haba h do korisnika j, su tri komponente koje čine protok od snabdevača i do korisnika j. Cena transporta jedinice količine robe duž puta $i \rightarrow k \rightarrow h \rightarrow j$ računa se kao $\chi D_{ik}+\alpha D_{kh}+\delta D_{hj}$, gde parametri χ, α i δ označavaju redom troškove (cenu) kolekcije, transfera i distribucije robe po jedinici količine.

Koristeći gornju notaciju, USApHCP se matematički može zapisati kao [Sta07]:

$$\min Z \tag{38}$$

uz uslove:

$$Z - \sum_{k=1}^{n} (\chi D_{ik} + \alpha D_{kh}) Z_{ik} + \delta D_{hj} Z_{jh} \geq 0, \text{ za } \forall\, i, j, h \in I \tag{39}$$

$$\sum_{k=1}^{n} Z_{kk} = p \tag{40}$$

$$\sum_{k=1}^{n} Z_{ik} = 1, \text{ za } \forall\, i \in I \tag{41}$$

$$Z_{ik} \le Z_{kk}, \text{ za } \forall\, i, k \in I \tag{42}$$

$$Z_{ik} \in \{0, 1\}, \text{ za } \forall\, i, k \in I \tag{43}$$

Funkcija cilja predstavlja minimizaciju maksimalnih troškova transporta između bilo koja dva čvora u mreži (38). Uslovom (39) je data donja granica za promenljivu Z funkcije cilja. Dok je uslovom (40) određen tačan broj habova (p) koje treba locirati, ograničenja (41) i (42) će obezbediti da svaki korisnik/snabdevač bude pridružen tačno jednom, prethodno lociranom habu. Konačno, (43) ukazuje na binarnu reprezentaciju promenljive Z_{ik}.

USApHCP su NP-kompletni [Kar00], međutim postoji nekoliko varijanti koje su polinomijalno rešive. Na primer, kada je dat kompletan graf i α=0 problem alokacije se može reši optimalno za $O(np)$ vremena. Za p=2 u kompletanom grafu, problem 2-hab centra jednostruke alokacije se može reši optimalno za $O(n^2 logn)$ vremena, dok se problem lokacije rešava optimalno za $O(n^4 logn)$ vremena [Cam07].

U literaturi postoje dva gledišta problema ograničenog kapaciteta habova. Ebery ([Ebe00]) razmatra ograničenje kapaciteta haba prilikom primanja saobraćaja putem kolekcije. Primera radi, kada se pošta nakon prikupljanja jednom sortira nema potrebe ponovo je sortirati za distribuisanje. Sa druge strane, Campbell-ov ([Cam94]) pristup podrazumeva da će se ukupan saobraćaj koji je ušao i prošao kroz bilo koji hab, u vidu kolekcije i transfera, ograniči kapacitetom samog haba, odnosno neće biti manji, ili će biti jednak, određenom kapacitetu. Primer ovakvog pristupa je avio-saobraćaj gde je kapacitet određen brojem odlazaka i veličinom samog terminala.

Formulacija CSApHCP sa ograničenjem kapaciteta haba na količinu saobraćaja koji ulazi u hab putem kolekcije, za prikupljanje saobraćaja, pored uslova (38)-(43) sadrži i dodatni uslov:

$$\sum_{i \in I} O_i Z_{ik} \le \Gamma_k Z_{kk}, \;\; \forall\, k \in I \tag{44}$$

U uslovu (44) Γ_k predstavlja kapacitet haba k, sa W_{ij} je označen saobraćaj od i-tog do j-tog čvora, količina protoka koja polazi iz čvora i je $O_i = \sum_{i \in I} W_{ij}, \forall i \in I$, a $\sum_{i \in I} O_i Z_{ik}$ predstavlja ukupan saobraćaj koji je kroz kolekciju pristigao u hab k.

Ako se pod kapacitetom haba podrazumeva ograničen saobraćaj, koji kroz kolekciju i transfer ulazi u hab, onda bi formulacija CSApHCP problema imala umesto uslova (44):

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} W_{ij} (Z_{ik} + Z_{jk} - Z_{ik} Z_{jk}) \le \Gamma_k, \;\; \forall\, k \in J \tag{45}$$

Navedeni uslov predstavlja ograničenje kapaciteta za ukupan saobraćaj koji je kroz kolekciju i transfer pristigao u hab. Leva strana nejednakosti (45) predstavlja ukupan saobraćaj koji je prikupljen u habu *k* kroz kolekciju i transfer. Vrednost izraza $Z_{ik}+Z_{jk}-Z_{ik}Z_{jk}$ je manja ili jednaka 1. Odnosno ako je $Z_{ik}=1$ i $Z_{jk}=1$ (to jest saobraćaj W_{ij} od *i* -tog do *j*-tog čvora se posmatra putem $i \rightarrow k \rightarrow j$), $Z_{ik}+Z_{jk}-Z_{ik}Z_{jk}$ osigurava da se W_{ij} (umesto $2W_{ij}$) dodaje saobraćaju koji ulazi u hab *k*.

Kako je problem *p*-hab centra jednostruke alokacije neograničenog kapaciteta NP-težak, odatle sledi da je to i problem *p*-hab centra jednostruke alokacije ograničenog kapaciteta kao njegov potproblem. Ograničenja u pogledu kapaciteta, čak i na problemima jednostavnijih struktura, daće NP-teške probleme.

3.2.1.1 Pregled postojećih metode za rešavanje HCSAP, U(C)SApHCP

U [Ern04a] ja data nova formulacija HCSAP koristeći koncept radijusa habova. Formulacija je prikazana kao problem pokrivanja u kome treba pronaći skup radijusa, tako da je svaki čvor sadržan u nekom krugu opisanom oko nekog haba. Takođe je predloženo i pet heuristika za rešavanje istih [Ern04a]. Svaka heuristika je hibridizovana metodom pretrage (problem space search method) koja je zasnovana na evolutivnom konceptu za pronalaženje optimalnog rešenja. Rezultati testiranja problema do 100 čvorova pokazuju da je hibridizacija „heuristike najbližeg haba" (closest hub heuristic) sa evolutivnim PSS algoritmom, po vremenu izvršavanja i kvaliteta dobijenih rešenja najbolja.

Problemi *p*-hab centra su manje proučavani u poređenju sa problemima *p*-hab medijane. Nekoliko linearizacija USApHCP, kao i novi linearni model prikazani su u [Cam96]. Novi model je znatno pogodniji za rešavanje hab problema sa $n \leq 25$ čvorova i $p \leq 5$ habova, u odnosu na ostale linearizacije problema.

U [Cam05b] je dokazano da su neki slučajevi problema *p*-hab centra jednostruke alokacije neograničenog kapaciteta polinomijalno rešivi, kada je $\alpha=0$ i mreža habova kompletan graf, kada je $p=2$ i mreža habova kompletan graf i kada je graf drvo ili put.

Postoji nekoliko sličnosti između UMApHMP i UMApHCP: USApHMP i USApHCP su NP-teški i alokacijski problem se može rešiti u polinomijalnom vremenu rešavajući seriju problema najkraćeg puta [Ern02]. Ernst i Krishnamoorthy su predložili efikasan algoritam grananja i ograničavanja za rešavanje USApHMP implicitno ispitivajući sve moguće kombinacije habova iz skupa svih čvorova. Za mali broj habova algoritam mora da reši mali broj alokacijskih problema. U [Ern02] je naveden identičan algoritam grananja i ograničavanja za rešavanje USApHCP. Takođe je pokazano da optimalna vrednost funkcije cilja USApHCP nije veća od one za UMApHCP. U pomenutom radu je pokazano da je navedena nova formulacija USApHCP superiornija u odnosu na najpoznatiju formulaciju koju su naveli Kara i Tansel [Kar00].

Razne linearizacije kao i različiti modeli problema p-hab centra jednostruke alokacije, kao i dokaz NP-kompletnosti i testiranja datih problema navedena su u [Kar00]. Nove linearizacije imaju bolje preformanse, ali je pravi napredak postignut novim formulacijama problema. Ovo pokazuje da je nekad bolje napraviti novi model za dati problem nego se fokusirati na poboljšanja problema različitim linearizacijama.

Problemi *p*-hab centra jednostruke alokacije se mogu rešiti 2-faznim algoritmom [Mey09], gde se u prvoj fazi računa skup potencijalnih optimalnih hab kombinacija pomoću najkraćeg puta zasnovanom na metodi grananja i ograničavanja. Nakon toga sledi faza raspodele, koristeći formulaciju smanjene veličine koja daje optimalno rešenje. Da bi se dobila dobra gornja granica algoritma grananja i ograničavanja razvijena je heuristik za probleme *p*-hab centra jednostruke alokacije na osnovu mravljih kolonija. Rezultati su: nova optimalna rešenja za probleme većih dimenzija od onih prijavljenih u ranijoj literaturi; rešavanje problema do 400 čvorova u razumnom vremenu.

Heuristika jednostruke-relokacije (Single-relocation heuristics) je prva heuristika za rešavanje problema *p*–hab centra jednostruke alokacije kojom se, u realnom vremenu, utvrđuju lokacije-alokacije [Pam01]. Ova heuristika se bazira na jednostavnim zamenama, odnosno ide se od rešenja do rešenja zamenjujući habove sa ne-hab čvorovima i primenjujući tabu pretraživanje da bi se izbegao lokalni minimum. U svakom koraku se pronalazi i izvršava najbolja relokacija, dok se ne zadovolji neki kriterijum zaustavljanja. Kao sredstvo za smanjenje mogućnosti zarobljavanja od strane lokalnih optimuma korišćena je tabu pretraga. Tabu pretraživanje je heuristika koja se uspešno primenjuje i kod rešavanja hab medijalnih problema [Kli93, Sko94]. U kontekstu iterativnih procedura pretrage, tabu operator koristi u svakoj iteraciji određene zabranjene korake, u nameri da se navede algoritam da istraži nove oblasti iz mogućih regiona. Za datu aplikaciju, tabu pretraživanje se karakteriše definisanjem i veličinom tabu liste, dužinom tabu mandata, postojanjem „kriterijuma težnje (aspiration criteria)“ koji onemogućava da se napravi tabu potez, kao i protokom restartovanja. Od korisnika se zahteva da podesi skup vrednosti parametara u algoritmu kao što je veličina tabu liste (ili dužina tabu mandata) broj relokacija i ponovnih restartovanja za tabu pretraživanje. Tabu liste se formiraju na osnovu prethodnih koraka, i koriste kako bi se izbeglo padanje na istom lokalnom minimumu Šema jednostruke alokacije je prilagođena i specijalno razvijena za minmax funkciju cilja za korišćenje u fazi evaluacije algoritma. Pohlepna lokalna pretraga je korišćena da bi se poboljšale dobijene alokacije. Broj strategija za izbor početnog skupa čvorova i početna strategija, alokacijska šema, se razmatraju i kombinuju u smislu kvaliteta rešenja i efikasnosti okruženja.

Algoritam jednostruke-relokacije sa tabu pretraživanjem:

1. *Inicijalizacija:* Pronaći početno rešenje.
2. *Relokacija:* Oceniti sve jednostruke-relokacije [*n*, *h*]–*h* je tekući hab, a *n* ne-hab čvor i implementirati onu koja je najbolja i dozvoljena (čak iako se nije

poboljšala vrednost funkcije cilja). Uneti *h* u tabu listu sa najviše *t* tabu mandata, tako da u bliskoj budućnosti ne postane ponovo hab. Ponoviti za iteraciju sa maksimalnim brojem lokacija (max_loc).
Tokom obavljanja jednostruke relokacije, održavati dve liste dužine *n*. Prva ukazuje na preostale tabu mandate za svaki ne-hab čvor. Druga („dugoročno pamćenje") predstavlja učestalost sa kojom je svaki hab hab. U svakoj iteraciji, dozvoljeni potezi su oni kojima se za novi hab ne izabere tabu.

3. *Restartovanje:* Pronaći neko drugo početno rešenje, ili kao najbolje rešenje dobijeno poslednjom relokacijom ili (ako nema poboljšanja u poslednjoj relokaciji) rešenje dobijeno iz početnog rešenja kažnjavanjem habova prema dugoročnoj memoriji. Restartovati algoritam u koraku 1.

Kombinovanjem strategija za dobijanje početnog rešenja (NN, FIN i ARB) sa alokacijskim šemama (HEUR1, ACWA i MAXFLO) može se dobiti devet verzija algoritma jednostruke-relokacije sa tabu pretraživanjem [Pam01].

U [Ern09] je predložena linearizacija problema USApHCP zasnovana na konceptu "radijusa habova", kao i dve heurisike za rešavanje istih. Testiranja na instancama sa najviše 100 čvorova i 10 habova su pokazala efikasnost nove formulacije. Međutim, ni jedna od predloženih heuristika nije dala rešenja zadovoljavajućih kvaliteta.

Algoritam binarne pretrage (binary search - BS) za rešavanje USApHCP, naveden u [Hamxx], se sastoji od binarne kombinatorne pretrage i iterativnih rešenja problema hab centra. BS(HCoP) algoritam vrši binarnu pretragu sa zadatim ograničenjem β u kome se rešava HCoP (problemi hab pokrivanja - hub covering problem, HCoP) sve dok se ne postignu minimax troškovi za zadati broj habova, p.

Neka je sa $c^*(\beta)$ označeno optimalno rešenje problema hab pokrivanja, sa zadatim ograničenjem β koje je nerastuće po β, odnosno za $\beta' \geq \beta$ važi da je $c^*(\beta') \leq c^*(\beta)$. Donja granica binarne pretrage može biti $L_{start} := \alpha\ max_{i,j}\, c_{ij}$, a gornja $U = 2\ max_{i,j}\, c_{ij}$.

Algoritam BS(HCoP)

Ulaz: Kompletan graf $G=(I, E)$ sa $|I|=n$, troškovi c_{ij}, faktor uštede α, broj habova p i kriterijum zaustavljanja ε.
Izlaz: Skup habova $J=\{1, \ \ , p\}$ i alociranje čvorova ka habovima tako da je minimizovana dužina maksimalnog puta u hab mreži.
Koraci:
(1) Neka je $z := max_{i,j}\ c_{ij}$, $U := 2z$, $L := \alpha\, z$, $\beta := (L+U)/2$;
(2) Rešiti HCoP u odnosu na β da bi se dobilo $c^*(\beta)$;
(3) Ukoliko je $c^*(\beta) \leq p$, postaviti $U := \beta$, inače $L := \beta$;
(4) Ako je $U - L < \varepsilon$ prekinuti algoritam, u suprotnom postaviti $\beta := (L+U)/2$ i ići na korak (2).

Manje vrednosti ε vodiće do kvalitetnijeg rešenja. Za dovoljno male vrednosti parametra skup habova se ne menja u binarnoj pretrazi čime se postižu optimalna rešenja

USApHCP. Složenost BS (HCoP) algoritma zavisi od problema hab pokrivanja za koje se zna da su NP-teški. Broj potrebnih iteracija za dobijanje rešenja USApHCP je $\log_2(\frac{U_{start} - L_{start}}{2})$.

Optimalna rešenja za dva problema USApHCP se mogu podudarati iako su u vezi sa različitim vrednosti $p_1 > p_2$. Kako algoritam BS(HCoP) za bilo koje zadato β minimizuje broj habova pri svakoj iteraciji, za problem USApHCP, koji se odnosi na p_1, izlazni broj habova će uvek biti p_2. Ovo je poželjno jer je odabir habova usko povezan sa fiksnim troškovima.

U nastavku su upoređeni rezultati dobijeni BS(HCoP) algoritmom i radijus formulacije USApHCP, koji su preuzeti iz [Hamxx], za čije detalje pogledati u navedenom radu. Testiranja su izvršena na CAB, Slika 3.2.1.1.1, i AP, Slika 3.2.1.1.2, skupovima podataka, kao i na dvema formulacijama problema hab pokrivanja (-r radijus koncept i -W2 Wagnerova formulacija problema sa preprocesiranjem za rešavanje problema pokrivanja[Wag04]).

Prva kolona predstavlja vrednosti n, p i α respektivno, druga optimalne vrednosti, a poslednje tri potrebno vreme izvršavanja (u sekundama) za dobijanje optimalnog rešenja problema BS(HCoP-W2), BS(HCoP-r) i USApHCP (mešoviti celobrojni program), respektivno. Parametar $\varepsilon = 10^{-3}$, za CAB skup podataka, je dovoljno mali da obezbedi optimalnost BS(HCoP-W2) i BS(HCoP-r) za sve instance. Za BS(HCoP-W2) t_{cplex} je CPLEX vreme izračunavanja, a t_{all} vreme preprocesiranja. Za AP skup podataka kriterijum zaustavljanja je 10^{-4}, a faktor uštede fiksiran na 0,75, pa je izbačen iz prve kolone.

Rešenja testa pokazuju da je BS(HCoP-W2) nadmašio BS(HCoP-r) u 35 od ukupnih 37 istanci. U većini od 35 instanci je BS(HCoP-W2) oko 4 puta za t_{cplex}, odnosno za t_{all} oko 3 puta, brži od BS(HCoP-r).

Radijus formulacija kao i novi pristup problema hab centra dolaze veoma brzo do optimalnog rešenja. Međutim, skoro za sve instance, BS(HCoP-W2) potrebno je manje CPU vremena u odnosu na USApHCP, iako je u nekim slučajevima BS(HCoP-W2) potrebno više vremena računanja od radijus formulacije. Otprilike je CPU vreme potrebno za USApHCP duplo veće od CPU vremena potrebno za BS(HCoP-W2). Na Slici 3.2.1.1.2 se vidi da je algoritam binarne pretrage izuzetno dobar za probleme sa 30 i 40 čvorova.

$n.p.\alpha$	Obj	BS(HCoP-W2) t_{cplex}/t_{all}	BS(HCoP-r)	USApHCP
10.2.75	1759.13	0.04 / 0.1	0.1	0.07
10.2.5	1728.49	0.06 / 0.13	0.13	0.17
10.2.25	1476.07	0.06 / 0.12	0.14	0.36
10.3.75	1538.46	0.05 / 0.1	0.19	0.05
10.3.5	1286.03	0.05 / 0.1	0.15	0.1
10.3.25	1119.53	0.05 / 0.09	0.09	0.25
10.4.75	1377.38	0.04 / 0.09	0.08	0.08
10.4.5	1047.62	0.05 / 0.09	0.1	0.09
10.4.25	858.216	0.04 / 0.1	0.12	0.11
15.2.75	2343.4	0.08 / 0.16	0.23	0.26
15.2.5	2160.75	0.23 / 0.28	0.9	0.27
15.2.25	2059.04	0.1 / 0.19	0.84	0.62
15.3.75	2086.13	0.07 / 0.12	0.21	0.27
15.3.5	1760.15	0.09 / 0.16	0.49	0.27
15.3.25	1760.15	0.08 / 0.16	1.02	0.47
15.4.75	1979.01	0.06 / 0.11	0.14	0.17
15.4.5	1530.41	0.07 / 0.12	0.22	0.28
15.4.25	1361.42	0.2 / 0.26	0.29	0.25
20.2.75	2444.89	0.32 / 0.46	1.5	0.72
20.2.5	2224.11	0.82 / 0.97	3.04	1.5
20.2.25	1933.42	0.5 / 0.7	1.44	1.41
20.3.75	2187.63	0.33 / 0.41	2.15	1
20.3.5	1871.24	1.91 / 2.01	3.41	1.16
20.3.25	1635.37	0.23 / 0.3	0.84	1.53
20.4.75	2086.13	0.1 / 0.21	0.37	0.86
20.4.5	1650.81	0.73 / 0.82	2.61	0.82
20.4.25	1361.42	1.43 / 1.55	2.31	1.18
25.2.75	2675.88	0.94 / 1.14	2.35	2.32
25.2.5	2480.64	14.47 / 14.74	24.15	2.9

Slika 3.2.1.1.1 Rezultati dobijeni na CAB skupu podataka, [Hamxx]

$n.p$	Obj	BS(HCoP-W2) t_{cplex} / t_{all}	BS(HCoP-r)	USApHCP
30.2	55.8204	0.53 / 0.89	0.57	4.81
30.3	49.3919	0.24 / 0.51	0.5	4.8
30.4	48.5632	0.66 / 0.93	0.56	4.98
40.2	61.6825	9.68 / 10.97	16.8	13.66
40.3	58.1928	5.49 / 6.46	18.54	23.53
40.4	52.2653	2.92 / 3.49	7.25	13.63
40.5	49.7412	4.28 / 4.79	15.35	14.61
50.2	65.5234	239.02 / 242	118	39.46
50.3	60.1321	290.27 / 292.62	622.05	116.55
50.4	52.9058	7.96 / 9.32	24.74	46.27
50.5	50.7079	6.18 / 7.37	13.87	35.89

Slika 3.2.1.1.2 Rezultati dobijeni na AP skupu podataka, [Hamxx]

Rešavanjem USApHCP i UMApHCP problema, se uglavnom, utroši puno vremena prilikom izračunavanja, ili postizanja aproksimativnog rešenja, pogotovo ukoliko su problemi velikih dimenzija. Heuristika 1, veoma brzo izgeneriše potoptimalno rešenje problema. Kada je kod USApHCP dat skup habova, preostalo je samo da se čvorovi pridruže habovima. Ovaj potproblem je nazvan problem hab centra jednostruke alokacije (hub center single allocation problem - HCSAP). Analogno se definiše potproblem HCMAP.

Heuristika 1

1. Naći optimalno rešenje USApHCP za p=1.
2. Pretpostavimo da postoji optimalno rešenje USApHCP (UMApHCP) sa q habova (q<p)
   - Označiti najdužu putanju u postojećem rešenju, zatim izabrati ne-hab čvor, neka je to k, na datoj putanji i ubaciti ga u postojeće rešenje.
   - Dodeliti k samom sebi.
   - Ponovo dodeliti bilo koji drugi ne-hab čvor i novom habu k, ako je dužina najduže putanje, koja počinje od i, poboljšana prilikom alokacije ka k. Navedeni postupak ponavljati sve dok se ne provere svi ne-hab čvorovi.
3. Ako je q+1<p ići na korak 2, u suprotnom prekinuti algoritam.

U drugom koraku heuristike rešava se HCSAP, iako je NP-težak.

Problemi p–hab centra jednostruke alokacije se mogu rešiti genetskim algoritmom. Rešenje će biti predstavljeno u vidu hromozoma koji se sastoji od dva lanca. Jedan lanac je niz lokacije habova dužine p gde svaki gen predstavlja indeks čvora koji je lociran za haba. Drugi lanac je alokacijski niz dužine n gde je genom predstavljena alokacija čvorova. Ako gen *i* ima vrednost *k*, onda je čvor *i* pridružen habu *k*. Svaki hab je alociran ka samom sebi, a svaki ne-hab čvor ka najbližem habu.

Veličina populacije je proporcionalna veličini problema (zavisi od *n*, *p*) i svaki indeks čvora bi trebalo da se pojavi kao hab u početnoj populaciji. Niz lokacije habova se generiše iz početne populacije, zatim se alociraju ne-hab čvorova ka habovima koristeći heuristiku najbližeg pridruživanja (Nearest assignment heuristic). Dva nasumice izabrana roditelja se rekombinuju, što se može obaviti genetskim operatorima, klasičnim operatorima ukrštanja, ili metodama lokalnih pretraživanja kao što je operator razmene (Exchange operator), operator pripajanja-istovara (Merge-drop operator) [Sol06]. Slučajno izabran hab iz niza lokacije habova izabranih roditelja se nasumice zamanjuje ne-hab čvorom. Kritični par ne-hab čvorova koji je odgovoran za maksimalnu vrednost, određuje i realocira druge habove da bi se dobilo bolje rešenje. Ovaj postupak se ponavlja sve dok postoji napredak. Stalna zamena stanja se koristi da bi se imalo koristi od obe starije jedinke i novog generisanog potomstva. Kriterijum zaustavljanja može biti broj generacija ili broj sukcesivnih generacija bez poboljšanja.

Većina istraživanja se bavi kvantitivnim parametrima kao što su troškovi, kapacitet i vreme, u [Mah08] se razmatra, pored kvantitativnog i kvalitativni aspekt kao što je agilnost usluge, mogućnost budućeg razvoja i dostupnost, saobraćajne zone. Hibridni pristup koji koristi kvalitativne i kvantitativne promenljive je korišćen za rešavanje hab lokacijskih problema, specijalno CSApHCP i CAHLCP. Prikazana su dva modela, od kojih se u prvom lociraju habovi na osnovu kvalitativnih promenljivih. Metod TOPSIS faza je korišćen da bi se pronašla lokacija *p* habova, a zatim se na osnovu IP formulacije alociraju ne-hab čvorovi sa funkcijom cilja koja minimizuje maksimalno vreme putovanja između bilo kojih odlazno-dolaznih parova. U drugom modelu hibridna formulacija obavlja lokacijske i alokacijske faze sa kvantitativnim i kvalitativnim kriterijumima istovremeno.

3.2.2 Problemi hab centra višestruke alokacije neograničenog/ograničenog kapaciteta (Uncapacitated/capacitated multiple allocation hub center problem – HCMAP, U(C)MApHCP)

Ako je skup habova zadat, kao u UMApHCP, preostalo je rešiti problem alokacije ne-hab čvorova ka habovima. Ukoliko skup habova nije zadat ovi alokacijski potproblemi su problemi hab centra višestruke (multiple allocation hub center problem - HCMAP) i jednostruke alokacije (single allocation hub center problem - HCSAP). Za razliku od HCSAP koji su NP-teški [Ern09] HCMAP se mogu rešiti u polinomijalnom vremenu. Preciznije, za svaki odlazno-dolazni par (i, j), poznato je da se najkraće rastojanje (koje se može odrediti Floyd Warshall-ovim algoritmom) između čvorova i i j može naći u polinomijalnom vremenu. Tada rešavanje HCMAP je ekvivalentno rešavanju najviše n^2 problema najkraćeg rastojanja u hab mreži, jedan za svaki odlazno-dolazni par [Ern04a].

Analogno HCSAP, definišu se problemi hab centra višestruke alokacije (multiple allocation p-hub center problem - HCMAP), gde je svaki čvor pridružen različitom broju habova. Dokazano je da optimalno rešenje HCMAP obezbeđuje donju granicu HCSAP [Ern04a], kao i da je svako moguće rešenje USApHCP (HCSAP) takođe i moguće za UMApHCP (HCMAP) za istu mrežu [Ern02]. U oba slučaja, obrnuto tvrđenje ne mora da važi.

Kod problema višestruke alokacije čvor može biti alociran ka više habova, što omogućava da saobraćaj od čvora i do j može ići preko različitih habova od kojih je svaki dodeljen čvoru i. Problemi p–hab centra višestruke alokacije alociraju ne-hab čvorove ka jednom ili više habova, tako da se minimizuje maksimalno vreme putovanja svih odlazno-dolaznih parova. Vrednost funkcije cilja problema višestruke alokacije, nije veća od vrednosti problema jednostruke alokacije, jer su kod problema višestruke alokacije oslabljeni jedinstveni alokacijski uslovi. Primera radi, u avio-kompaniji, ako ne-hab gradovi nude letove u nekoliko habova, a ne u jedan, onda korisnici između pojedinih lokacija mogu brže putovati. Takođe je lakše naći optimalno rešenje za problem višestruke nego jednostruke alokacije, jer su UMApHCP polinomijalno rešivi [Cam07], dok su USApHCP NP-kompletni [Ern04a].

Pre same formulacije UMApHCP definišimo nove promenljive. Neka je Y_{ijkm} binarna promenljiva koja uzima vrednost 1 ako se saobraćaj od i -tog do j -tog čvora usmerava kroz habove k i m ($i \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow j$; čvor i je pridružen habu k, j habu m) i binarna promenljiva Z_k koja je 1 ako i samo ako je čvor k izabran za hab. Promenljive D_{ij}, W_{ij}, Γ_k, α, I i J imaju isto značenje kao u prethodnim poglavljima.
Sada možemo uvesti matematičku formulaciju UMApHCP [Ern09].

$$Min\ Z \tag{46}$$

uz uslove:

$$\sum_{k\in I}\sum_{m\in I} Y_{ijkm} = 1, \quad \forall\, i, j \in I \tag{47}$$

$$\sum_{k\in I} Y_{ijkm} \le Z_m, \quad \forall\, i, j, m \in I \tag{48}$$

$$\sum_{m\in I} Y_{ijkm} \le Z_k, \quad \forall\, i, j, k \in I \tag{49}$$

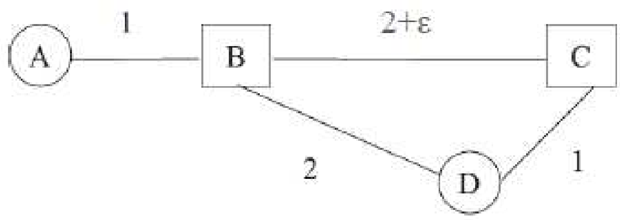
$$Z \ge \sum_{k\in I}\sum_{m\in I} Y_{ijkm}(D_{ik} + \alpha D_{km} + D_{mj}), \quad \forall\, i, j \in I \tag{50}$$

$$Z_k,\ Y_{ijkm} \in \{0, 1\}, \quad \forall\, i, j, k, m \in I \tag{51}$$

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k = p \tag{52}$$

Funkcija cilja, Z, minimizuje maksimalne troškove između svih polaznih i krajnjih odredišta, (46). Uslovom (47) je obezbeđena jedinstvena putanja od početnog do krajnjeg odredišta. Uslovi (48) i (49) obezbeđuju da ako je čvoru pridružen neki drugi čvor, onda on mora biti selektovan za hab, dok je uslovom (50) definisana najniža donja granica za promenljivu Z funkcije cilja. Uslov (51) omogućava binarnu reprezentaciju promenljivih. Konačno, uslovom (52) je definisano tačno p habova. Problemi UMApHCP su NP-teški, ali alokacijski deo problema je polinomijalno rešiv za $O(pn^2)$ vremena, rešavanjem niza problema najkraćeg puta [Cam07, Ern09].

Za UMApHCP je karakteristično da će se od početnog do krajnjeg odredišta saobraćati najkraćim putem, odnosno saobraćaj od jednog do drugog haba će se odvijati direktno preko luka koji ih spaja, kao što je slučaj kod UMApHMP. Kod problema p-hab centra ograničenih kapaciteta višestrukih alokacija ovo i nije slučaj. Zbog ograničenog kapaciteta samog haba, saobraćaj W_{kk} (čvor k je izabran za hab) može biti preusmeren preko nekog drugog haba, i ruta od jednog do drugog haba ne mora ići preko luka koji ih spaja, što je pokazano primerom. Pretpostavimo da imamo četiri haba h_1, h_2, h_3 i h_4, čiji su kapaciteti redom $\Gamma_{h_1} = 5$, $\Gamma_{h_2} = 2$, $\Gamma_{h_3} = 1$, $\Gamma_{h_4} = 2$. Neka je saobraćaj $W_{h_1h_1}$=4 i $W_{h_1h_3}$=2, a saobraćaj između ostalih polaznih i krajnjih odredišta 0. Ako kapacitet zavisi od kolekcije $W_{h_1h_1}$ i je alociran ka h_1, onda $W_{h_1h_3}$, mora biti preusmeren preko h_2 ili h_4, do haba h_3.



Slika 3.2.2.1 Primer mreže hab centra

Mreža prikazana na Slici 3.2.2.1 sastoji se od 4 čvora A, B, C i D, gde su rastojanja između A i B, B i C, C i D, B i D data redom 1, 2+ε, 1 i 2. Neka je ε mala pozitivna konstanta,

α=5 i B, C habovi. Tada su transportni troškovi optimalnog rešenja problema hab centra višestruke alokacije (HCMAP), od početnog do krajnjeg odredišta kroz habove B i C dati matricom

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2+\varepsilon & 3 \\ 1 & 0 & 1+\varepsilon & 2 \\ 2+\varepsilon & 1+\varepsilon & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

U ovom optimalnom rešenju čvor D je višestruko alociran ka B i C, dok je čvor A jednostruko alociran ka B. Maksimalni troškovi transporta iznose 3. Za probleme hab centra jednostruke alokacije HCSAP, optimalno rešenje se može dobiti dodeljivanjem čvora A habu B i čvora D habu C, tada bi optimalni maksimalni troškovi transporta iznosili 3+ε, što je veće od 3. Ovaj primer pokazuje da optimalno rešenje problema hab centra jednostruke alokacije nije i praktično rešenje problema hab centra višestruke alokacije. Odatle sledi da praktično rešenje UMApHCP možda i nije praktično USApHCP.

Ako se za određivanje kapaciteta haba uzme kolekcija i transfer koju hab može da primi, formulacija CMApHCP je slična formulaciji UMApHCP s tim da je uslov (50) zamenjen sa:

$$Z \geq Y_{ijkm}(D_{ik} + \alpha D_{km} + D_{jm}), \;\; \forall\, i, j \in I \backslash J;\, k, m \in J \tag{53}$$

$$Z \geq Y_{ijkm}(D_{ik} + \alpha D_{km} + \alpha D_{jm}), \;\; \forall\, i \in I \backslash J;\, j, k, m \in J \tag{54}$$

$$Z \geq Y_{ijkm}(\alpha D_{ik} + \alpha D_{km} + D_{jm}), \;\; \forall\, j \in I \backslash J;\, i, k, m \in J \tag{55}$$

$$Z \geq Y_{ijkm}(\alpha D_{ik} + \alpha D_{km} + \alpha D_{jm}), \;\; \forall i, j, k, m \in J \tag{56}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} W_{ij} \left[\sum_{m \in J} (Y_{ijkm} + Y_{ijmk}) - Y_{ijkk} \right] \leq \Gamma_k \;\;\; \forall\, k \in J \tag{57}$$

Uslovom (57) je naznačen kapacitet haba, dok uslovi (53)-(56) obezbeđuju da maksimalno vreme *Z*, između svih odlazno-dolaznih parova, uzima u obzir četiri moguća slučaja najdužeg puta:

1) ne-hab čvor - ne-hab čvor,
2) ne-hab čvor - hab,
3) hab - ne-hab čvor,
4) hab - hab.

Zbog faktora uštede α, koji se odnosi samo na lukove između habova, važno je razmotriti svaki slučaj, 1)-4), ponaosob. Višestruka alokacija omogućava da se protok, koji ulazi/izlazi u hab, usmeri preko drugih habova, čime će se povećati fleksibilnost i verovatnoća pronalaženja mogućeg rešenja. U poštanskim sistemima, obim pošte za vreme Božića najverovatnije prevazilazi kapacitet haba (predstavljen obimom pošte koja može biti sortirana). U tom slučaju, može se desiti da deo pošte bude poslat u drugi hab na sortiranje.

Ako je restrikcija kapaciteta samo količina saobraćaja koja kroz kolekciju ulazi u hab, uslov (57) je zamenjen sa

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{m\in J} W_{ij} Y_{ijkm} \le \Gamma_k \quad \forall\, k \in J \tag{58}$$

Problemi CMApHCP su NP-teški, i u slučaju da je isto vreme između bilo kog ne-hab čvora i haba, kao i α=0. Takođe, ako se ograničenja kapaciteta odnose na hab lukove, CMApHCP su i dalje NP-teški [Cam07].

3.2.2.1 Pregled postojećih metoda za rešavanje HCMAP, U(C)MApHCP

U [Cam04b] su navedene IP formulacije za slučaj *p*-hab centra višestruke alokacije neograničenog i dve za slučaj ograničenog kapaciteta. Takođe je dokazano da je jedna varijanta ograničenog kapaciteta NP-kompletna, a druga polinomijalno rešiva.

U radu [Ern09] su razmatrane dve heuristike za rešavanje *p*-hab centar lokacijskog problema sa jednostrukom/višestrukom alokacijskom šemom, kao i branch-and-bound algoritam (koji je zasnovan na metodi najkraćeg puta).

Mnoge vrste hab lokacijskih problema su NP-teške i nepodesne za rukovanje kada broj čvorova premašuje 200. U [Gav09] je pokazano da se uz pomoć agregacije i ispitivanja grešaka rezultata može izboriti sa problemima velikih dimenzija. Osim toga, struktura granice grešaka daje smernice kako koristiti agregaciju kako bi se te greške minimizovale. Praktična primena agregacije se bavi sledećim pitanjima: Šta je maksimalna akumulirana greška agregacije? Koje je veličine greška agregacije u praksi? Da li je ušteđeno vreme agregacijom? U ovom radu je na prvo pitanje odgovoreno za šest hab lokacijskih problema (US(M)AHMP, US(M)ApHCP, US(M)ApHMP) i razvijena heuristika, bazirana na agregaciji, za probleme *p*-hab centra. Specijalno za US(M)ApHCP dobijeni rezultati za AP skup podataka daju odgovor na poslednja dva pitanja.

Nova MILP formulacija USApHCP, dve nove IP formulacije UMApHCP, kao i metoda najkraćeg puta zasnovana na metodi grananja i ograničavanja (branch and bound) predstavljeni su u [Ern09]. Rezultati testiranja pokazuju da je nova USApHCP formulacija superiornija u odnosu na najpoznatiju, [Kar00], formulaciju problema u pogledu računarskog vremena, kao i efikasnost BnB u rešavanju UMApHCP. Sledi kratak pregled BnB algoritma za rešavanje UMApHCP [Ern09].

Skup habova se izdeli na regione C_i, a sa h_i se označi broj habova koje sadrži svaki od njih. Skup uređenih parova (C_i, h_i) koji ukazuje na približnu poziciju habova, naziva se scenario i označava sa *S*. Za svaki par tačaka *i*, *j* računa se najkraće rastojanje između njih, pretpostavljajući da svaki čvor u regionu koji ispunjava uslove može biti izabran za hab. Odnosno, računa se donja granica za funkciju cilja UMApHCP svakog rešenja koje se pokalapa sa scenariom.

Koristeći se rešenjem najkraćeg puta mogu se javiti tri scenarija *S*: 1) nađeno je moguće rešenje UMApHCP; 2) nema boljeg rešenja za ovaj scenario od najpoznatijeg mogućeg rešenja za UMApHCP (tj. donja granica premašuje gornju); 3) scenario se mora dalje ispitivati.

Bira se region sa najvećim brojem čvorova po habu, da bi se otpočelo grananje. Algoritam grananja i ograničavanja može otpočeti jednim korenskim čvorom, tradicionalni algoritam grananja i ograničavanja, ili skupom korenskih čvorova [Ern09]. Rezultati u [Ern98b] su pokazali da je izmenjena verzija algoritma pogodnija i efikasnija za rešavanje UMApHCP. Algoritam može otpočeti i scenarijom $S=\{(I, p)\}$, ali će to dati veoma slabu povezanost. Iz tog razloga je bolje početi u nekim nižim tačkama stabla grananja i povezivanja, tako da se dobije povezana i razgranata šuma. Koren čvorovi ove šume pokrivaju sve moguće opcije lokacije habova. Definisanje korenskog čvora se može naći u [Ern09].

Svaki čvor povezane i razgranate šume je u potpunosti određen scenariom *S*. Rešava se potproblem povezan sa scenariom *S*. Ako je pronađeno moguće rešenje UMApHCP, ili ako se ne može naći bolje rešenje za dati scenario *S*, onda se odustaje od stabla pretrage za *S*. U suprotnom, vrši se dalje grananje u dubinu. Ovaj postupak se nastavlja sve dok je dalje grananje moguće i svi čvorovi u šumi ispitani.

U cilju smanjenja veličine i grananja šume, poželjno je pronaći što bolje moguće rešenje za UMApHCP pre istraživanja šume. Heuristika nalaženja mogućeg rešenja je veoma slična kao i za UMApHMP, uz male modifikacije: 1) nasumice se izabere skup od *p* habova; 2) za svaki zadati hab optimalno rešenje HCMAP može biti pronađeno korišćenjem svih parova dobijenih algoritmom najkraćeg puta. Pronađeno bolje rešenje za UMApHCP se pamti kao trenutno najbolje rešenje; u suprotnom se ide na sledeći korak; 3) formirati novi skup habova menjajući jedan član početnog skupa habova sa jednim ne-hab čvorom. U suprotnom ići na 2). Ova heuristika se može ponoviti nekoliko puta izborom različitih nasumično dobijenih skupova habova.

Genetski algoritam za rešavanje UMApHCP koristi binarnu prezentaciju jedinki, odnosno genetski kod duzine *n*. Svaki gen toga koda uzima 1 ako je na toj poziciji uspostavljen hab, u suprotnom 0. Niz (Z_k) se dobija iz genetskog koda, a kako korisnici/snabdevači mogu biti pridruženi isključivo uspostavljenim habovima, vrednost promenljive Y_{ijkm} se dobija tokom računanja funkcije cilja koja je identički jednaka funkciji prilagođenosti. Za konačan skup habova koristi se Floyd-Warshall-ov algoritam najkraćeg puta. Za svaki par čvorova u mreži, nakon nalaženja najkraćih puteva, lako se računa funkcija cilja jednostavnim sumiranjem najkraćih rastojanja snabdevač-hab, hab-hab i hab-korisnik pomnoženim odgovarajućim parametrima α, χ i δ.

Rešavanjem UMApHCP problema se utroši puno vremena prilikom izračunavanja, ili postizanja aproksimativnog rešenja, pogotovo u slučaju kada su problemi većih dimenzija.

Navedenom heuristikom se veoma brzo izgeneriše podoptimalno rešenje navedenog problema.

Heuristika 2

1. Optimalno rešiti UMApHCP za p=1.
2. Pretpostavimo da postoji optimalno rešenje USApHCP sa q habova (q<p)
   - Označiti najdužu putanju u postojećem rešenju, zatim izabrati ne-hab čvor, neka je to k, na datoj putanji i ubaciti ga u postojeće rešenje.
   - Rešiti HCMAP koristeći q+1 hab.

Ako je q+1<p ići na korak 2, u suprotnom prekinuti algoritam.

3.3 Lučno orjentisani hab lokacijski problemi (Hub arc location problems)

Putnički avio prevoz i ekspresna dostava samo su neki od primera hab mreža unutar kojih se saobraćaj odvija kroz snabdevače, sa znatnom eksploatacijom faktora uštede u transportu, kao i redukcijom fiksnih troškova formiranja mreže. Dizajniranje takvih mreža je veoma izazovan problem operacionog istraživanja koji podrazumeva određivanje: lokacije snabdevača, veza koje povezuju habove, kao i veza odlazno-dolaznih čvorova. U proteklih dvadesetak godina na tu temu su vršena razna istraživanja, čija je posledica model, izuzetne primene u praksi, poznatiji kao lučni hab lokacijski model.

Različiti tipovi aviona za određene odlazno-dolazne destinacije čine model sličan lučnim hab lokacijskim problemima. Odnosno, različiti tipovi aviona mogu se posmatrati kao različiti tipovi lukova u mreži, i selektovanjem određenog broja aviona za svaku vrstu veze postiže se minimizacija troškova [Jai96]. Model koji koristi hab lukove za konekciju lake železnice u kontekstu planiranja urbanog saobraćaja takođe je sličan hab lokacijskim problemima [Nic00]. Broj hab lukova, u modelu, nije propisan, već ograničen fiksnim troškovima.

U klasičnim hab lokacijskim modelima habovi su povezani hab lukovima jeftinijih transportnih troškova. Pretpostavka da je skup hab lukova potpuno povezan, može dovesti do nerealnih rezultata gde hab lukovi imaju mnogo manji protok, sa manjim troškovima transporta, nego ne-hab lukovi.

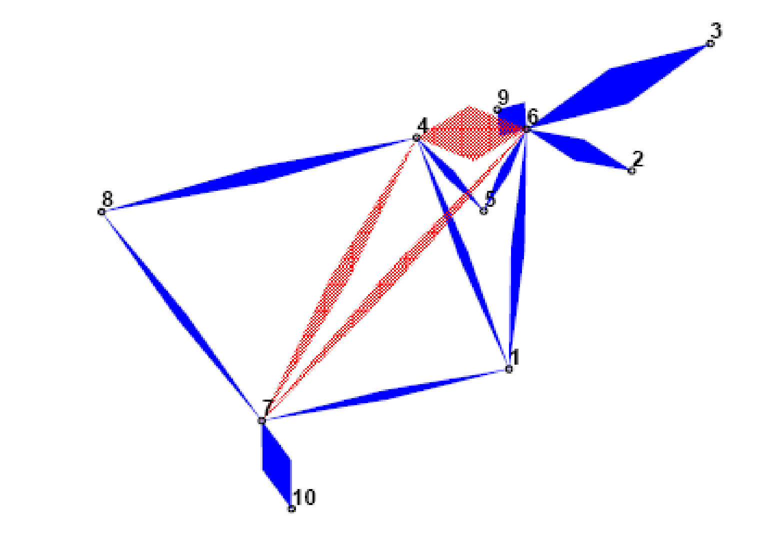
Osnova lučnih hab lokacijskih problema je lokacija zadatog broja hab lukova, da bi se zadovoljio zahtev da se transport odvija između specifikovanih odlazno-dolaznih parova i da ukupni troškovi saobraćaja budu minimalni. Uslov da su svi habovi međusobno povezani je oslabljen, i potrebno je locirati hab lukove, kao krajnje tačke u odnosu na lokacije habova.

Takođe, lučni hab lokacijski problemi se mogu posmatrati i kao problem dizajniranja mreže gde treba utvrditi na kojim lukovima će biti raspoređena isplatljiva ograničena sredstva (npr. veća vozila), odnosno gde će se postići ograničeni troškovi saobraćaja. Kao problem lokacije, snabdevači koji se lociraju su lukovi, ne čvorovi, sa smanjenim troškovima i karakteristikama:

1. Svaki protok se mora obaviti kroz najmanje jedan hab,
2. Broj hab lukova je unapred zadat (fiksiran) i
3. Jedinica troškova zavisi od vrste lukova kao i od količine saobraćaja za svaki tip luka.

Struktura optimalnih hab lučnih mreža zavisi od broja slobodnih hab lukova, kao i ekonomičnosti skale. Povezane lučne hab mreže nastaju spontano kada postoji veliki broj hab lukova i značajan popust za njihovo korišćenje.

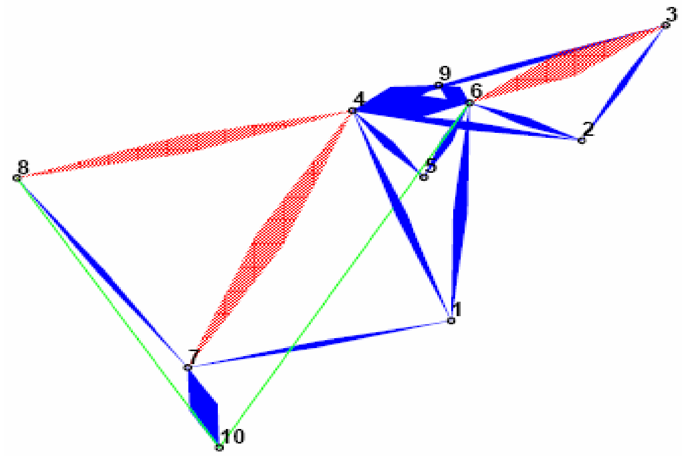
Na Slici 3.3.1 je primer baziran na CAB setu podataka (*Civil Aeronautics Board*), avio saobraćaj u Americi koji se sastoji od 10 gradova korišćenih za hab lokacijska istraživanja. CAB je jedan od standardnih tipova ORLIB instanci, koji se koristi za hab lokacijske probleme. Zasniva se na podacima o protoku putnika u avio-saobraćaju između gradova SAD, koji su poređani po alfabetu (na primer 1=Atlanta, 2=Baltimor, 3=Boston, 4=Čikago,...). Ovaj skup se sastoji od 60 istanci sa najviše 25 čvorova (gradova) i 4 haba (terminala). Na slici je predstavljeno optimalno rešenje u vidu 3-hab medijalnog rešenja sa α=0,4, habovima u Čikagu (čvor 4), Klivlendu (6) i Dalasu (7) i hab lukovima, koji su predstavljeni crvenom bojom. Količina saobraćaja kroz hab lukove Čikago-Dalas (4-7) i Klivlend-Dalas (6-7) je skoro neprimetno veća u odnosu na saobraćaj kroz ostale lukove, specijalno Boston-Klivlend (3-6) i Detroit-Klivlend (6-9) [Cam05].



Slika 3.3.1 Hab medijalno rešenje za CAB set podataka slučaj n=10, p=3, α=0,4

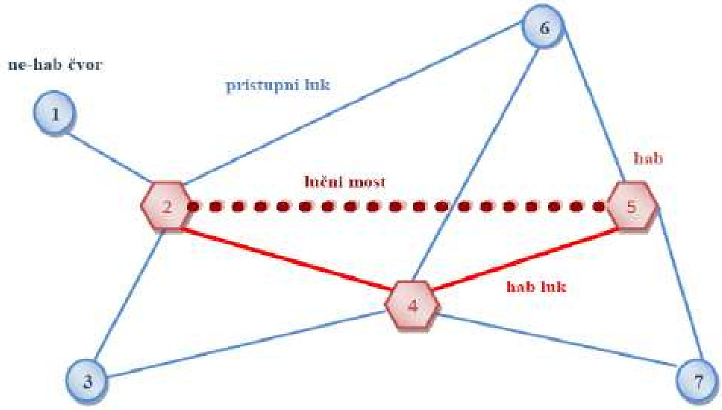
Ako bi se oslabio uslov da su hab lukovi u potpunosti međusobno povezani, a zadržali ostali uslovi hab medijalnih problema, dobilo bi se rešenje u vidu lučnih hab lokacijskih problema, prikazano na Slici 3.3.2. Na slici je prikazano kako se uz pomoć velike lokacijske fleksibilnosti hab lukovi nose sa velikom količinom saobraćaja između Bostona i Klivlenda

(3-6). Ovo rešenje ima pet habova (terminalnih čvorova, ili krajnjih tačaka hab lukova) i tri hab luka, dok je rešenje predstavljeno Slikom 3.3.1 ograničeno na tri haba i tri hab luka. Veći broj habova, u rešenju pomoću hab lukova, vodi do manjih troškova i kružnih putanja, s tim da se može povećati broj pristupnih lukova [Cam05].



Slika 3.3.2 Lučno hab rešenje za CAB set podataka sa n=10, α=0,4

Optimalno rešenje lučnih hab lokacijskih problema može uzeti u obzir tri tipa lukova: hab luk koji spaja dva haba (sa redukovanom jedinicom troškova), pristupni luk između odlazno-dolaznog ne-hab čvora i haba, i lučni most između dva haba, bez redukovane jedinice troškova. Hab lukovi se koriste samo za transfer i generalno imaju najnižu jedinicu transporta, posmatrano na skali ekonomičnosti za konsolidovanje, ili koncentraciju saobraćaja. Oni se mogu koristiti za modelovanje vozila visokog kapaciteta ili komunikacijskih veza. Pristupni lukovi se koriste samo za kolekciju i distribuciju, što obično dovodi do uobičajenog troška koji se odražava na slična transportna vozila ili slične telekomunikacione tehnologije. Lučni mostovi se koriste samo za prenosne aktivnosti, i njihova jedinica troškova trebalo bi da bude između jedinice troškova hab lukova i kolekcije, ili distribucije, pristupnih lukova. U svakom slučaju, uloga lučnih mostova zavisi od uloge hab snabdevača ka svojoj krajnjoj tački. Na Slici 3.3.3 su prikazana sva tri tipa lukova: lučni most, hab i pristupni luk, a na Slici 3.3.2 tri lučna mosta između Bostona i Čikaga (3-4), Čikaga i Klivlenda (4-6) i Dalasa i Denvera (7-8).



Slika 3.3.3 Osnovna lučna hab mreža

Lučni hab lokacijski problemi mogu biti sa ograničenim i neograničenim dužinama putanja. Modeli sa ograničenim dužinama putanja su najprikladniji kada treba izbeći posete većem broju habova, kao što je prevoz putnika ili vremenski osetljive robe. Sa druge strane modeli bez ograničenja dužine su primenljivi kod prevoza robe koja nije vremenski osetljiva, gde duže staze putem konsolidacije mogu da proizvedu niže troškove, kao što je primer u telekomunikaciji gde će brže kretanje putanjom omogućiti da se poseti veći broj habova. Lučni hab lokacijski problemi selektuju lukove koji spajaju ne-hab čvorove (odlazno-dolazne) sa habovima, i mogu biti:

— **Jednostruke alokacije (single allocation)**
  Spadaju u NP-teške probleme, čak i kada su poznate lokacije habova, a samim tim i hab lukova [Soh00]. Jednostruka alokacija je moguća samo kada su habovi povezani, eventualno lučnim mostovima. Odnosno, potrebno je da mreža habova čini potpun podgraf. Ovakvi modeli mogu rezultirati višim troškovima protoka, ali se mogu obezbediti niži fiksni troškovi uspostavljanja mreže.
— **Višestruke alokacije (multiple allocation)**
  Ovakav pristup problemu je veoma jednostavan u slučaju kada su poznate lokacije habova, samim tim i sami hab lukovi. Višestruka alokacija može dovesti do velikog broja pristupnih lukova, specijalno u modelima sa ograničenim dužinama putanja.

Neka je $G=(V, E)$ kompletan graf sa skupom čvorova $I=1,...,m$. Elementi skupa V su potencijalne lokacije ili habova, kao krajnjih tačaka snabdevača, ili odlazno-dolaznih čvorova. Sa W_{ij} je označen saobraćaj, a sa d_{ij} troškovi transporta, koji zadovoljavaju nejednakost trougla, od čvora i do čvora j. Neka je dato q hab lukova. Hab lukovi povezuju dva hab čvora, recimo k i l, sa redukovanom cenom jedinice troškova transporta (discounted cost) αd_{kl}.

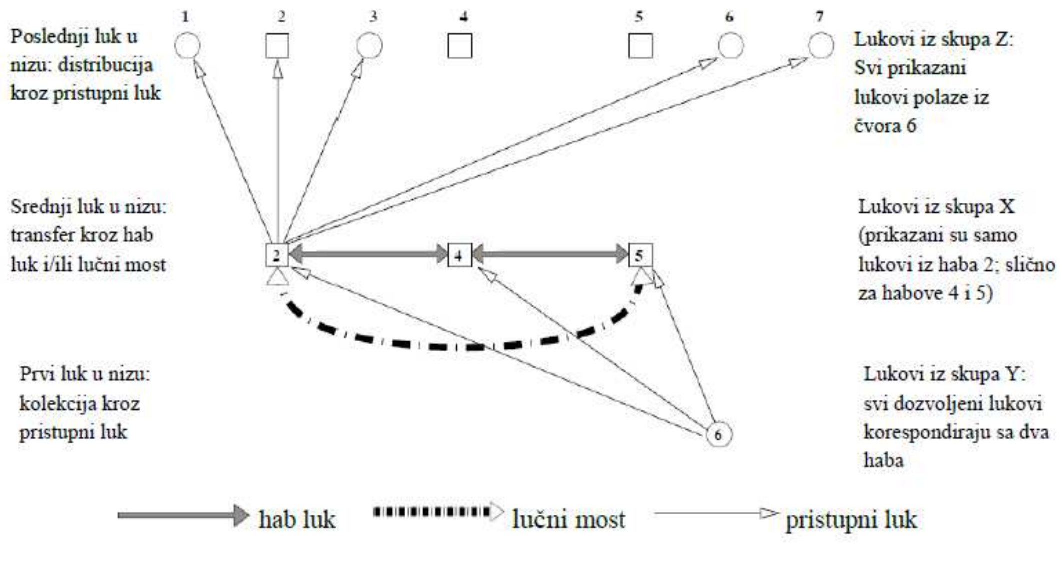
Lučni q-hab lokacijski problemi se baziraju na minimizaciji ukupnih troškova saobraćaja prilikom lociranja q hab lukova, gde:

(1) svi odlazno-dolazni putevi uključuju bar jedan hab;

(2) jedinica troškova, koja se odnosi na hab lukove, je bazirana na faktoru uštede α ($0<\alpha\leq 1$).

Prvi uslov obezbeđuje da nema direktnih lukova između parova ne-hab odlazno-dolaznih čvorova, što omogućava lučnim hab lokacijskim problemima da budu konkurentni hab medijalnim problemima, a drugi da se hab lukovi mogu koristiti po potrebi radi minimizacije ukupnih troškova. Neka je sa W_{ij} označen saobraćaj na luku od čvora i do čvora j. Tada su po hab luku troškovi puta $\alpha\sum_i\sum_j D_{ij}W_{ij}$, dok su po ne-hab luku dati sa $\sum_i\sum_j D_{ij}W_{ij}$. U lučnim hab lokacijskim problemima uslov (1) se zadržava, tako da optimalno rešenje neće uzimati u obzir direktan luk između para ne-hab odlazno-dolaznih čvorova.

Osnovni primer lučne hab lokacijke mreže je HAL0, koji je predstavljen u vidu mreže sa tri nivoa (leyer-a), gde svaki nivo sadrži kopiju originalnih čvorova. Donji nivo odgovara izvorištima, srednji habovima, a prvi korespondira destinacijama. Od ukupnog broja lukova u mreži njih Z lukova za kolekciju će povezivati donji i srednji nivo, dve grupe po Y lukova za transfer, će povezivati čvorove unutar srednjeg nivoa, a preostalih X lukova za distribuciju, direktno će povezivati srednji i poslednji nivo. Svaka odlazno-dolazna putanja je niz lukova od čvorova u donjem do čvorova u gornjeg nivou, s tim što je moguće povezati više čvorova unutar srednjeg nivoa.



Slika 3.3.4 Generalni model lučne hab lokacijske mreže

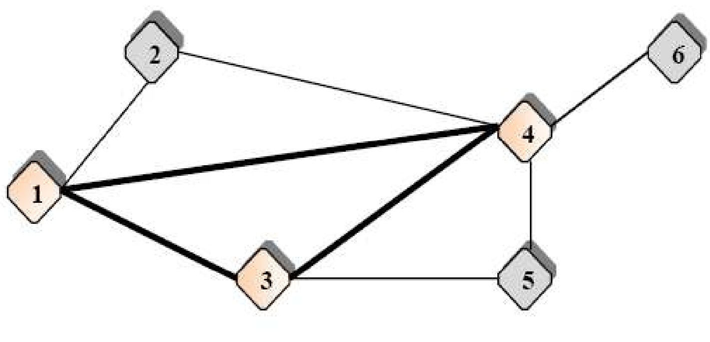
Još jedan tip lučnih hab lokacijskih problema je HAL1, gde se locira q hab lukova bez ograničenja njihovih lokacija ili veza [Cam05a]. Svaki hab luk se završava habom i ne moraju svi parovi habova biti povezani hab lukom. HAL1 se ograničava svaki odlazno-dolazni par na najviše tri luka i jedan centralni hab, da bi se održavao nivo usluga sličan p–hab medijalnim problemima.

Povećanje nivoa usluge može dovesti do izmene zadate hab mreže relociranjem habova, i hab lukova, ili njihovim dodavanjem. Dodavanje habova i hab lukova će povećati fiksne troškove snabdevača i smanjiti troškove transporta. U lučnom hab lokacijskom problemu, HAL1, zahteva se da svaki hab bude uz hab luk, a povećanje nivoa usluga se postiže dodatnim izolovanim habovima koji nisu u njihovoj blizini. Izolovani habovi predstavljaju područje koje je u procesu istraživanja i njima se nivo usluge povećava umerenijim cenama u odnosu na dodavanje hab lukova (i pridružene habove).

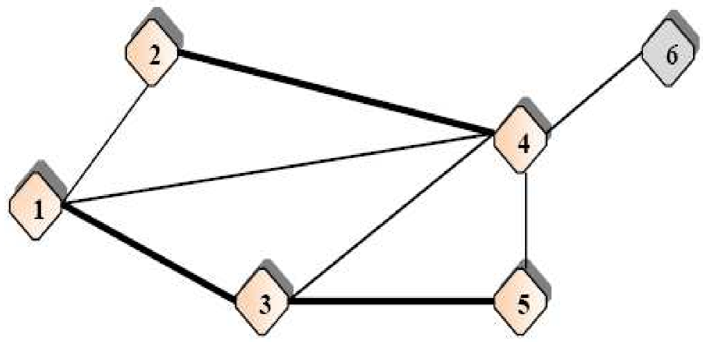
Analiza parametara p i q je dovela do raznih zaključaka. Nejednakost $q \leq p(p-1)/2$ važi jer je hab krajnja tačka svakog luka. Za $q<p/2$ hab lukovi ne mogu povezati sve habove što dovodi do formiranja izolovanih habova (kao i uslov $q \geq p/2$). Izolovanim habovima se postiže putanja izvorište–hab-dolazni čvor, ali se ne omogućava redukcija troškova transporta na hab lukovima između samih habova. Na primer, neka je dato $p=4$ habova i $q=2$ hab lukova, tada se za najbolje rešenje (misli se na ono koje ima minimalne troškove transporta) uzima ili dva nesusedna hab luka sa četiri povezana haba, ili dva susedna hab luka koja koriste tri povezana i jedan izolovani hab.

Problemi p-hab medijane se mogu posmatrati kao specijalan slučaj pronalaženja maksimalnog broja hab lukova pri datom broju habova. Sa druge strane, q-hab lučni lokacijski problemi dopuštaju proizvoljan broj habova maksimalno $2q$ (pod pretpostavkom da su habovi krajevi hab lukova), ali to neće uvek dati najbolje rešenje. Za dati broj habova troškovi se mogu povećati ili smanjiti kao i samo povećanje habova.

Slike 3.3.5 (a) i (b) prikazuju razlike lučnih i hab medijalnih lokacijskih problema. Slika 3.3.5 (a) je prikaz 3-hab medijalnog problema sa habovima u čvorovima 1, 3 i 4 koji su prikazani narandžastom bojom. Ukoliko se kroz hab lukove obezbedi niža cena jedinice transporta, onda tražena putanja ne mora biti i najkraća. Na primer optimalna putanja između čvorova 2 i 6 je 2-1-4-6, bez obzira što je putanje 2-4-6 kraća. Na Slici 3.3.5 (b) je prikazan HAL1 sa pet habova i tri hab luka. Čvorovi 1 i 6 se mogu povezati putanjom 1-2-4-6, dok je putanja 1-3-4-6 neprihvatljiva jer obuhvata dva susedna ne-hab luka. Putanja 1-3-5 je moguća pod uslovom da sadrži jedan hab luk i jedan lučni most koji se poklapa sa hab lukom, jer dva hab luka (na putu) u HAL1 nisu dozvoljena. HAL1 ima veću fleksibilnost za korišćenje hab lukova, da bi se dobila mreža sa nižim troškovima prevoza (za dati broj hab lukova), zbog oslabljenog uslova da hab lukovi čine potpun podgraf na habovima.



Slika 3.3.5 (a) 3-hab medijalni problem



Slika 3.3.5 (b) HAL1 sa tri hab luka

Upoređivanjem HAL1 i hab medijalnih problema pokazalo se da je ostvarena ušteda od 5-16% oslabljivanjem uslova da svi hab lukovi moraju biti povezani, posebno kod većih problema. Međutim, relativno mala ušteda će se postići dodavanjem novih hab lukova skupu povezanih habova (za optimalnih q hab lukova). Na primer, dodavanjem trećeg hab luka dvoma potpuno povezanim hab lukovima ostvariće se ušteda manja od 1%. U principu analiza troškova pokazuje da kada je faktor uštede α mali, potpuno povezani podgraf sa manje habova i hab lukova je bolji od nepovezanog podgrafa sa više habova i hab lukova.

3.3.1 Pregled postojećih metode za rešavanje lučnih hab lokacijskih problema

Algoritam nabrajanja (Enumeration-Based Algorithm - EB algorithm)

EB algoritam je optimalni algoritam nabrajanja za pronalaženje rešenja lučnih hab lokacijskih problema. Algoritam nabraja sve moguće kombinacije hab lukova, koristeći gornju i donju granicu radi brze eliminacije lošeg rešenja (odnosno postavljanje q hab lukova), bez računanja ukupnih troškova svih odlazno-dolaznih parova. Nastao je u pokušajima da se redukuje prebrojavanje svih mogućih kombinacija hab lukova, kojih je mnogo više nego kombinacija habova. Na primer, za datih n čvorova broj lukova je $O(n^2)$. Ideja algoritma je da se posmatra većina potencijalnih rešenja (set hab lukova) koja su daleko od optimalnog, i čiji su troškovi opsluživanja, nekoliko odlazno-dolaznih parova, premašili optimalne troškove.

Neka je P broj odlazno-dolaznih parova. Za CAB set podataka sa simetričnom kolekcijom i distribucijom troškova i sa W_{ii}=0, imamo da je P=n(n-1)/2. Tada je algoritam dat sa:

Algoritam nabrajanja

1. Naći početno gornje ograničenje *U* ukupnih troškova.
2. Za svaki set od *q* lukova:
3. Za $m=1,...,P$
4. Izračunati najnižu donju granicu troškova, označenu sa Λ, koja uključuje istinite troškove opsluživanja *m* odlazno-dolaznih parova, i donju granicu troškova, L_m, koja se odnosi na preostale odlazno-dolazne parove.
5. Ako Λ prevazilazi gornju granicu *U*, onda preći na novi set hab lukova i korak 2.
6. Gornju granicu *U* uvećati za troškove Λ.

Suština algoritma je razmatrati da li je određeni broj odlazno-dolaznih parova optimalno rešenje, odnosno koja je mogućnost eliminacije svakog potencijalnog rešenja (seta hab lukova). Najjednostavnije bi bilo kada bi prvi uzeti skup od *q* hab lukova bio optimalno rešenje, međutim to bi se moglo utvrditi tek nakon ispitivanja svih skupova od *q* hab lukova. Eliminisanje lošeg rešenja je moguće ako se dobro postavi gornje *U* i donje ograničenje Λ, da bi se procenili ukupni troškovi za dati set hab lukova, bez procene aktuelnih troškova svih odlazno-dolaznih parova.

Donju granicu Λ čine dve komponente. Jedna je prava cena opsluživanja prvih *m* odlazno-dolaznih parova, a druga, L_m, predstavlja donju granicu troškova koji se odnose na opsluživanje odlazno-dolaznih parova, različitih od prvih *m*. Vrednosti L_m i *U* zavise od redosleda kojim su procesirani odlazno-dolazni parovi. Ako bi se selektovali ,,skupi" odlazno-dolazni parovi, onda bi se donja granica troškova odnosila na *m* odlazno-dolaznih parova, i tada se ne moraju proceniti aktuelni troškovi ostalih odlazno-dolaznih parova. Performanse algoritma zavise od redosleda kojim se pristupa skupu hab lukova i odlazno-dolaznim parovima.

Kada se u lučnim hab lokacijskim problemima zahteva dodatni uslov za hab lukove (na primer, da su međusobno povezani), onda se u koraku 2 razmatra samo skup onih hab lukova koji zadovoljavaju dati uslov. Kod nekih vrsta lučnih hab lokacijskih problema, računanje minimuma troškova odlazno-dolaznih parova i zadatog skupa hab lukova, može biti izuzetno komplikovano. Izračunavanje troškova svih povezanih habova za zadatu kombinaciju hab lukova vrši se pre koraka 3, a uslov u početnoj sumi Λ se može izračunati za određeno vreme za svaki odlazno-dolazni par.

Sortiranje potencijalnog skupa od *q* habova, gde je dobijeni rezultat blizu optimalnog, ubrzaće algoritam. Najbolji niz nije uvek očit, mada čvorovi koji su veliki odlazno i/ili dolazni protočnici mogu biti kandidati za habove, što će uveliko zavisti i od samog modela. Na primer, ako lučni hab lokacijski model ne zahteva (ili podstiče) visoki stepen konekcije među habovima (kao što je HAL1), onda bi trebalo da se skup jako povezanih hab lukova pojavi u kasnijem poretku.

4. PROBLEMI HAB POKRIVANJA (HUB COVERING PROBLEMS)

Velika primena problema hab pokrivanja je u lociranju objekata hitnih službi javnog sektora, odnosno sistema u kojima je vreme od velikog značaja (rastojanje snabdevač-klijent ne prelazi maksimalni zadati prag). Fokusirani su na najgore slučajeve servisiranja (maksimalno vreme/rastojanje odlazno-dolaznih parova) gde se ukupni troškovi transporta ignorišu. Koriste se za lociranje vatrogasnih i stanica hitne pomoći, transport robe, avio i drumski saobraćaj, kao i za postizanje pokrivenosti samo na određenim udaljenostima od snabdevača (maloprodajni objekti, snabdevači za prenos signala - repetitori mobilnih telefona...). Problemi hab pokrivanja pripadaju klasi NP-teških problema [Kar03].

Algoritmi za rešavanje problema hab centra se sastoje od niza problema pokrivanja skupa zato se za njihovo rešavanje mogu koristiti problemi hab pokrivanja. Problemi hab pokrivanja smanjuju broj habova vodeći računa da troškovi bilo kojih odlazno-dolaznih parova ne prelaze određenu vrednost. Faktor uštede α kod problema p–hab centra i pokrivanja se najčešće odnosi na vreme umesto na troškove, slučaj kod hab medijalnih problema, veći je nego faktor uštede troškova i vrlo blizu 1. Ako se transport obavlja većim i bržim vozilima vreme putovanja će biti kraće. Na primer, u modelu hab pokrivanja koji se odnosi na isporuke tereta u Turskoj [Tan07] faktor uštede iznosi 0,9 ako su rute sačinjene od veza među habovima.

Za klijente (zahtevne objekte) kažemo da su „pokriveni“ ukoliko su na određenom rastojanju u odnosu na snabdevače, odnosno ako su snabdevači dovoljno blizu da ih opslože u okviru zadatih parametara tražnje. Odlazno-dolazni par (i, j) je pokriven habovima k, m ako: 1) troškovi od i do j kroz k, m ne prelaze unapred zadati maksimalan iznos troškova odlazno-dolaznih parova 2) troškovi svakog luka od i do j kroz k, m ne prelaze određenu vrednost i 3) svaki od lukova hab-izvorište i hab-odredište ispunjava zadate uslove. Problemi hab pokrivanja se dodatno razlikuju od standardnih problema pokrivanja zbog interakcije između habova koje stvaraju dodatne komplikacije, jer su odlazno-dolazni parovi pokriveni parovima habova i naplata troškova se vrši po svakom habu.

Za objekte pokrivanja važi:

1. *Potpuna ili ne pokrivenost.* Svaki klijent je potpuno pokriven ako je unutar radijusa pokrivenosti snabdevača (tj. svi zahtevi korisnika se realizuju u objektu), u suprotnom se smatra nepokrivenim.

2. *Individualna pokrivenost.* Pokrivenost klijenta zavisi od blizine njemu najbližeg snabdevača. Drugi po blizini snabdevač ne utiče na pokrivenost.
3. *Radijus fiksne pokrivenosti.* Radijus pokrivenosti je maksimalno vreme putovanja kojim se utvrđuje pokrivenost klijenta

U pojedinim slučajevima pretpostavke koje se odnose na objekte su neodržive i nerealne. Primarna oblast supermarketa obično ima radijus pokrivanja od 1 do 3 km. Odnosno, standardni okvir pokrivenosti podrazumeva da će svaki kupac koji je unutar okvira, na primer na razdaljini od 1,5. km do najbližeg supermarketa, biti pokriven, a van ne. Međutim, neverovatno zvuči da će kupac posećivati supermarkete od kojih je udaljen 1,49 km (potpuno je pokriven), a da u supermarkete na udaljenosti od 1,51. km neće ulaziti. Ovaj primer ukazuje nedostatke prve pretpostavke i zato je razumnije formulisati model čija funkcija cilja prati postepen pad frekventnosti kupovine sa udaljenošću klijenta od prodavnice.

Druga pretpostavka navodi na zaključak da kupac koji u krugu od 2 km ima tri supermarketa, a u krugu od 1,5 km ni jedan, ima lošiju pokrivenost od kupca koji na udaljenosti od 1,5 km ima jedan supermarket. Zbog toga je bolje da se pretpostavi da svaka radnja, koja je na određenoj udaljenosti od klijenta, ima uticaj na kupovnu moć, bar zbog toga što kupcu povećava sveukupnu vidljivost lanca.

Fiksne pretpostavke iz treće stavke, poput pokrivenosti u radijusu od 1,5 km, se mogu menjati, odnosno može se pretpostaviti da će veće (ili više atraktivne) prodavnice ostvariti veću oblast trgovanja, a samim tim i profit. Iz tog razloga odluke koje treba doneti zavise od fleksibilnosti veličine supermarketa koji treba izgraditi, pa je radijus pokrivenosti promenljiva koja će direktno zavisiti od tih odluka. Možda bi najoptimalnije bilo da se u okviru neke oblasti izgrade manji (sa manjom oblašću trgovanja), a u okviru druge oblasti veći snabdevači.

Modeli postepenog pokrivanja (The gradual cover models)

Modeli postepenog pokrivanja su most između objekata pokrivanja i drugih klasičnih lokacijskih problema, poput *p*–medijalnih problema. Preciznije, jedna vrsta modela postepenog pokrivanja (Modeli naručenog postepenog pokrivanja - Ordered gradual cover model) predstavlja generalizaciju svih klasičnih lokacijskih objekata (*p*-medijane, *p*-centra, pokrivanja) [Ber03, Dre10]. Kod modela postepenog pokrivanja prvi uslov, koji se odnosi na objekte pokrivanja, je zamenjen opštom funkcijom pokrivanja koja ne raste sa rastojanjem (odatle i naziv modela) i predstavlja odnos zahteva za pokrivanje na određenim rastojanjima od snabdevača. Ovi modeli predstavljaju najstariju klasu modela pokrivanja, literatura im je najobimnija i obuhvata mrežne i probleme u ravni sa različitim podešavanjima.

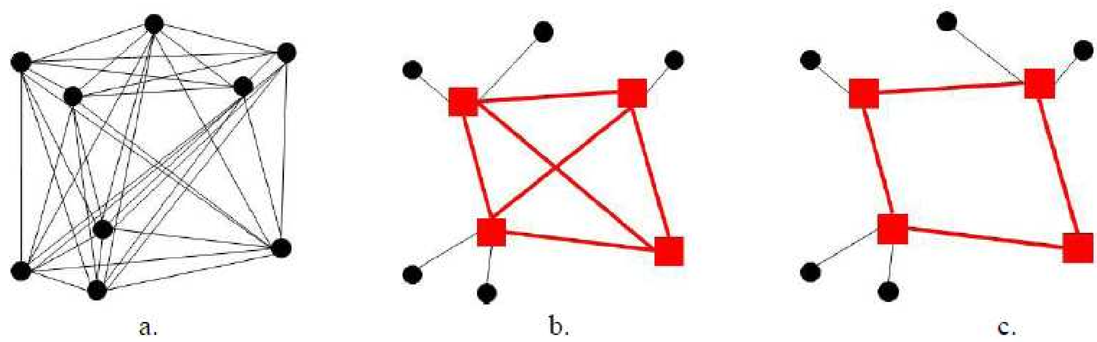
Model kooperativnog pokrivanja (The cooperative cover model)

Kod modela kooperativnog pokrivanja drugi uslov, koji se odnosi na objekte pokrivanja, zamenjuje se zahtevom da svi snabdevači doprinose pokrivanju čvor-korisnika. Ovo se postiže pregledom pokrivenosti kao prenosa „signala“ od snabdevača. Signal koji primi svaki čvor-korisnik predstavlja agregaciju transmisije svih snabdevača. Ukoliko jačina signala u čvor-korisniku prelazi određeni prag uzima se da je tačka pokrivena, inače se smatra nepokrivenom. Ovakav mehanizam omogućava modelima pokrivanja veliku primenu kod većine fizičkih signala. Na primer, kod lociranja ulične rasvete za osvetljivanje određenog područja treba voditi računa da se svetlost rasipa sa udaljenošću i da je intenzitet svetla u svakom trenutku jednak sumi svetala primljenih iz svih izvora.

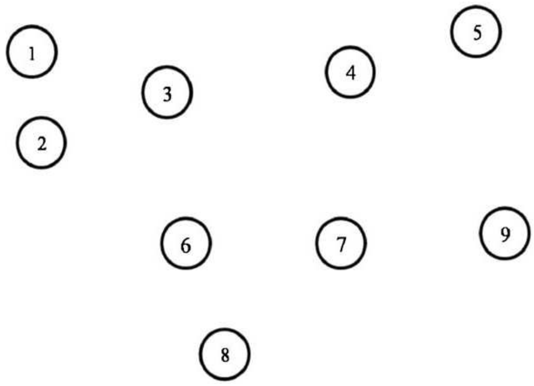
Model promenljivog radijusa (Variable radius model)

Ovaj model je nastao da bi se oslabio treći uslov za objekte pokrivanja tako što se radijus pokrivanja dobijao iz određene funkcije troškova snabdevača. Umesto lociranja unapred zadatog broja, postoji budžet za izgradnju različitih tipova snabdevača (skuplji snabdevači imaju veći radijus pokrivanja) za onog ko donosi odluke. Model promenljivog radijusa pored osnovnog lokacijskog pitanja, gde locirati snabdevače, sadrži novi aspekt dizajn, odnosno kakve snabdevače izgraditi.

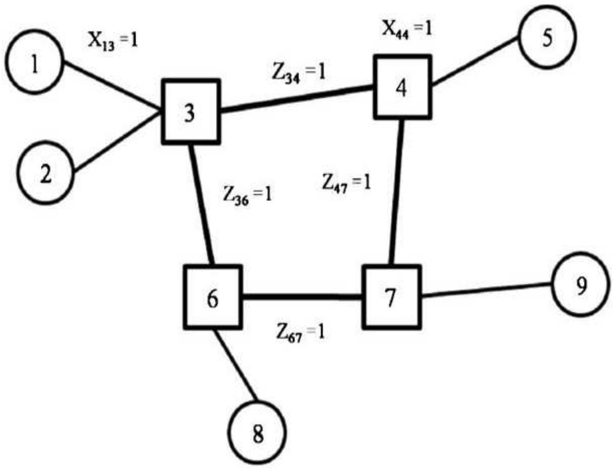
U mnogim studijama o hab lokacijskim problemima pretpostavlja se da je zadata kompletna hab mreža (tj. pridruženi graf je kompletan), odnosno da su svi parovi habova međusobno povezani lukovima Slika 4.1. Međutim, nekompletne hab mreže (odgovarajući graf je nekompletan) sa različitim aplikacijama se najčešće sreću u praksi. Na primer, kod transporta tereta, slanje različitih kamiona iz habova ka svim distributivnim centrima je skupo u smislu investiranja u ukupan broj kamiona. Umesto toga, neki kamioni će posetiti više od jednog distributivnog centra čime se mogu značajno smanjiti ukupni troškovi investiranja. Slično u avio-saobraćaju, avio-kompanije raspoređuju letove do velikog broja destinacija. Dodeljivanje posebnih letelica i osoblja svakoj destinaciji izazvaće zagušenja na aerodromu i u avio-mreži, kao i visoke investicije i troškove za kompaniju. U telekomunikacionim sistemima direktna povezivanja svih terminala mogu biti nepotreban način pružanja usluga.



Slika 4.1: a. Potpuna mreža sa 9 čvor-korisnika b. Kompletna hab mreža sa 4 haba i 9 čvor-korisnika c. Nekompletna hab mreža sa 4 haba i 9 čvor-korisnika



Slika 4.2 (a) Skup čvorova



Slika 4.2 (b) Mreža formirana na osnovu zadatog skupa čvorova

Na Slici 4.2(b) prikazana je nekompletna mreža formirana nad skupom čvorova sa slike 4.2(a) kao rešenje problema hab pokrivanja. Čvorovi 3, 4, 6 i 7 ($X_{33}=X_{44}=X_{66}=X_{77}=1$, $X_{ik}=1$, ako je čvor i pridružen habu k, u suprotnom 0) su izabrani za habove, promenljive $X_{13}=X_{23}=X_{54}=X_{86}=X_{97}=1$, predstavljaju alokaciju ne-hab čvorova ka habovima, a $Z_{34}=Z_{36}=Z_{47}=Z_{67}=1$ (Z_{ij}=1 ako postoji luk između habova i, j) hab lukove. Sve ostale vrednosti promenljivih Z i X su 0. Svaki hab šalje jednu jedinicu saobraćaja svim ostalim habovima. Na primer, hab 3 šalje jednu jedinicu saobraćaja habu 7, što znači da postoje dva načina da se dođe od haba 3 do 7. Prvi je koristeći hab lukove (3,6) i (6,7), a drugi (3,4) i (4,7) s tim da će se na osnovu samog modela odlučiti koja se putanja koristiti [Cal09].

Problemi hab pokrivanja se mogu rešiti heuristikom baziranom na tabu pretraživanju čiji algoritam započinje inicijalnim skupom lokacija habova. U odnosu na te habove se alociraju preostali čvorovi čime se formira hab mreža. Prva heuristika u literaturi za rešavanje problema hab pokrivanja je predložena u [Cal09]. Algoritam startuje sa delimičnim rešenjem, to jest skupom habova koji ne garantuje odgovarajuću alokacijsku konstrukciju. U okviru heuristike su korišćene tri različite konstrukcijske metode, bazirane na različitim alokacijskim strategijama u kojima se traže izvodljiva rešenja za početne potpune hab mreže. Kada se pronađe moguće rešenje, u fazi poboljšanja iz hab mreže se uklanjaju neizvodljivi hab lukovi da bi se dobilo bolje odgovarajuće rešenje.

Ukoliko troškovi pokrivanja svih odlazno-dolaznih parova prelaze dozvoljeni budžet onda se ili oslabe zadati uslovi maksimalnih troškova, ili će neki od odlazno-dolaznih parova ostati nepokriveni što može dovesti do kazni. Prekoračenje dozvoljenog budžeta se može izbeći i rešavanjem problema maksimalnog pokrivanja, odnosno povećanjem zahteva za pokrivanje zadatog skupa snabdevača. Model maksimalnog pokrivanja nastaje zbog ograničenih resursa u praksi i suština je pokriti što više korisnika odabirom fiksnog broja lokacije snabdevača iz ponuđenog skupa lokacija. Ovi modeli se veoma često koriste pri rešavanju problema koji podrazumevaju postavljanje (poželjnih) objekata, kao što su domovi zdravlja, vatrogasne stanice, fakulteti, škole, itd, na ponuđene lokacije. U nekim slučajevima se javljaju i nepoželjni objekti poput deponija smeća, nuklearnih reaktora ili zatvora.

Lokacijski problemi maksimalnog pokrivanja (Maximal covering location problem-MCLP)

Osnovne pretpostavke standarnih lokacijskih problema maksimalnog pokrivanja su nenegativne težine čvorova w_i i pokrivanje što većeg broja čvor-korisnika. Međutim, određeni korisnici mogu biti nepoželjni, poput radnji u kvartovima sa velikom stopom kriminala jer moraju da plate skupa osiguranja i mogu pretrpeti velike gubitke zbog krađa i razbojništva. Zato, pri određivanju lokacija radnji, kvartovi sa niskom stopom kriminala u okviru radijusa pokrivanja radnje, mogu se smatrati poželjnim, dok oni sa visokom stopom nepoželjnim. Ako se poželjni/nepoželjni kvartovi posmatraju kao pozitivne/negativne težine dobije se model MCLP kao kombinacija pozitivnih i negativnih težina [Dre10]. Za rešavanje ovog problema velikih dimenzija postoji nekoliko heuristika od kojih je tabu pretraživanje sa najboljim performansama [Bea90].

Cilj MCLP je da se locira ekonomski izvodljiv broj snabdevača, $p \geq 1$, tako da broj kupaca koje pokrivaju snabdevači bude maksimalan (ako postoji snabdevač koji klijenta pokriva na toj udaljenosti). Međutim, u mnogim situacijama je pretpostavka o pokrivanju nerealna. Na primer, većina menadžera malopodajnih mesta razmatra za lociranje radnji osnovne i srednje (a možda i trećestepene) oblasti trgovanja: za mušterije na rastojanju R_1 (postavljene često između 2. i 5. km) smatra se da su u primarnoj zoni trgovanja i da su potpuno pokrivene; za mušterije u velikoj srednjoj oblasti (radijusa pokrivanja $R_2 > R_1$) se pretpostavlja da su samo delimično pokrivene, odnosno očekuje se da će biti mnogo manji procenat kupovne moći nego u prodavnicama koje u potpunosti pokrivaju mušterije.

Prema prostoru u kome se vrši lokacija MCLP mogu biti:

- *Diskretni.* Skup potencijalnih lokacija snabdevača je unapred zadat i važi diskretni skupa X= skup čvorova I (X je prostor lokacija, I zahtevni prostor, a uređeni par (X, I) čini metrički prostor). Ovi problemi spadaju u NP-teške [Dre10].
- *Neprekidni.* Za prostor lokacija može se uzeti Euklidski prostor $X=\Re^2$ ili skup presečnih tačaka krugova poluprečnika R koji su opisani oko korisnika. Mogu se svesti na diskretne probleme, ali je problem velikih dimenzija skupa potencijalnih rešenja X težak za rešavanje [Dre10].

- *Mrežni.* Skup potencijalnih lokacija X je skup čvorova i lukova neke mreže (pretpostavka da je skup čvorova jednak zahtevnom prostoru je moguća bez umanjenja opštosti jer se uvek može dodati 0-težinski čvor). Ovi problemi se takođe mogu svesti na diskretne probleme i rastojanje u mreži se računa kao najkraći put, za razliku od druga dva tipa gde je rastojanje popriličnoo opšto [Dre10].

<u>Lokacijski problemi promenljivog pokrivanja (The variable radius location problem)</u>

Radijus pokrivanja zavisi od fizičkih karakteristika snabdevača. Na primer, jačina signala radio stanice određuje koliki je radijus pokrivanja, a samim tim i oblast pokrivanja. Veličine oblasti trgovanja radnji ili tržnih centara zavise od njihovih dimenzija (ili atraktivnosti) čime se povećava veličina oblasti trgovanja snabdevača. Međutim, snabdevači koji pokrivaju veće oblasti su obično skuplji [Dre10]. Shodno tome, umesto da se razmatra model pokrivanja sa unapred zadatim radijusom pokrivanja bilo bi prikladnije razmatrati lokacijski model sa zadatim budžetskim ograničenjima i radijusom pokrivanja kao funkcijom koja zavisi od toga koliko je novca uloženo u lociranje, odnosno izgradnju snabdevača.

Problem je da se pored lokacije snabdevača, utvrdi i radijus pokrivanja kako bi se pokrio diskretni skup tačaka uz minimalne troškove. Diskretni i mrežni lokacijski problemi promenljivog pokrivanja, kao i formulacije, opisani su u [Dre10]. Postoje problemi koji pokrivaju kružne površine promenljivih poluprečnika sa centrima u zadatom skupu tačaka tako da ukupna površina krugova bude minimalna [Suz03].

Jedna od najvećih primena hab lokacijskih problema pokrivanja je u oblasti transporta. Osnova poslovanja većine preduzeća za transport, koja omogućavaju mnogobrojne usluge bazirane na različitom zagarantovanom vremenu isporuke, čini vreme. Za isporuku tereta je veoma bitno vreme transporta, dok su troškovi transporta u drugom planu. Većina hab lokacijskih problema su fokusirani na saobraćaj uz minimalne troškove, zanemarujući time vreme isporuke. Problemi hab pokrivanja su jedni od lokacijskih problema koji uzimaju u obzir vreme putovanja između odlazno-dolaznih parova.

Standardni hab lokacijski modeli nisu pogodni za transport tereta jer ne računaju ukupno vreme putovanja na adekvatan način i ne uključuju eventualno vreme čekanja u habovima [Tan01]. Ovi nedostaci su prevaziđeni u hab lokacijskim problemima koji za cilj imaju minimizaciju vremena transporta u najgorem slučaju. To su takozvani hab lokacijski problemi „najnovijeg dolaska“ (The latest arrival hub location problem). Jedna varijanta ovih problema je razmatrana u [Tan01]. U tom radu je pokazano da se ovi problemi, kao problem minimaks tipa, mogu modifikovati u probleme p–hab centra, u odnosu na koje imaju mnogo bolje CPU vreme za CPLEX, kao i pružanje realnijeg i boljeg uvida u problem. Ako se model formira tako da se ignoriše prolazno vreme provedeno u habu, dobijeno rešenje će ipak biti optimalno.

Većina preduzeća za transport koristi usluge postojeće transportne mreže. Transport tereta počinje u filjalama lociranim u operativnim centrima. Klijentu se ostavlja mogućnost da izabere da li će sam odneti teret do filjale ili će ga preuzeti firma. Filjale na kraju dana distribuiraju sav teret do operativnih centara u čijoj su nadležnosti. U operativnim centrima teret se sortira prema odredištima na osnovu čega se vrši utovar u velike i specijalizovane kamione, u zavisnosti od krajnje destinacije. Teret se transportuje do operativnih centara u odredištu, od kojih filjale preuzimaju isporuke za koje su nadležne, čime je proces transporta završen. Ekonomičnost je postignuta transportom jer za prenos tereta između operativnih centara firme za transport tereta poseduju specijalna, brža i veća vozila. Struktura sistema za isporuku tereta je veoma slična strukturi hab mreža, zato su filjale analogne zahtevnim centrima, operativni centri habovima, a alokacija jedne filjale jednom operativnom centru postiže analogiju sa šemom jednostruke alokacije.

Usklađenost kamiona u sistemima isporuke tereta je važna za dizajniranje hab mreža firmi za transport tereta. Ukoliko na svojoj ruti kamion ima stajanje u nekom habu (međuhabu), može da se desi da kamion pristigne u hab ali da teret ne bude spreman, ili da dođe do kašnjenja kamiona pa da protok generisan u međuhabu mora da čeka. S obzirom na garantovano vreme isporuke kompanija mora da uzme u obzir vreme koje se provede u čekanju.

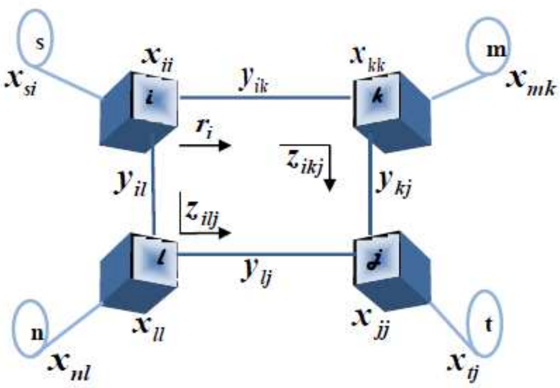
Takođe, još jedna stvar na koju firme za transport tereta moraju da obrate pažnju, jeste sigurnost tereta. Potrebno je da teret stigne do željenog odredišta u ugovorenom vremenu bez gubitaka i oštećenja, zbog čega se kamioni zapečate pre polaska i mogu se otpečatiti samo u habovima. Zbog nepotpune hab mreže kamioni se mogu pored habova koji su krajnje odredište, otpečatiti i u međuhabovima. Međutim, usputna stajanja u habovima su nezgodna jer bi teret mogao greškom da se istovari ili izgubi što bi dovelo do kašnjenja. U povezanim hab mrežama, kamioni bi imali stajanja samo u dva haba na putu, u polaznom gde bi bili zapečaćeni i krajnjem, gde bi ih otpečatili.

Postoje razne mere kojima se kompanija obezbeđuje od kašnjenja, gubljenja tereta, itd. Jedna od njih je minimizacija broja usputnih stajanja u habovima, što je navelo kompanije da ograniče rute svakog odlazno-dolaznog para sa najviše tri stajanja u habovima. Da bi klijenti bili zadovoljni uslugom koju pružaju firme za transport tereta, uz sigurnost tereta potrebna je pouzdanost i garancija isporuka [Alu09a]. Praksa je pokazala će se bržim i sigurnijim transportom tereta dobiti zadovoljne mušterije.

Na troškove transporta tereta čiji je ključni element na tržištu isporuka robe na vreme, značajno utiču brzina i pouzdanost isporuke. Isporuka tokom noći smatra se VIP uslugom i obezbeđena je samo između određenih gradova. Vreme polaska iz habova je izuzetno važno za firme za transport tereta. Pre nego što vozila napuste habove potrebno je sačekati sva dolazna vozila, jer će u suprotnom za pošiljke koje stignu u operativne centre nakon što ih napuste vozila i koje su usmerene ka istom habu kao ta vozila, morati da se obezbede druga vozila. Vremenom isporuke mnoge kompanije mere svoj kvalitet usluga i volele bi da svojim klijentima mogu da garantuju usluge u određenim vremenskim rokovima (24 ili 48 sati).

U radu [Tan07] razmatran je hab model koji je formiran na osnovu transportne mreže u Turskoj. Ako se formira model sa jednim habom optimalno rešenje je grad Kayseri za β=2160 ili Tokat za β=2040 (β - unapred zadata granica kojom se ograničava ukupno vreme isporuke). U periodu od 24 sata iz Kayseria se mogu opslužiti 22 grada, iz Tokata 21, a iz oba 13 gradova. U navedenom radu može se primetiti da najpopularniji grad Turske, Istanbul, nije izabran za hab. Zato problemi hab pokrivanja imaju razne alternative, odnosno mogu se izabrati optimalna rešenja koja će za habove birati popularnije gradove. Ovakav pristup dovodi do formiranja novog modela u okviru koga svi gradovi imaju tendencije da budu izabrani za habove s tim da određeni gradovi, u zavisnosti od zahteva firme, imaju bolje predispozicije [Tan07].

U skladu sa uslovima i potrebama firmi za transport tereta formiran je model hab pokrivanja jednostruke alokacije sa najviše tri stajanja (u međuhabovima) na ruti. Ovim modelom se formira mreža tako što se sa najviše tri stajanja u međuhabovima oslabi uslov potpune povezanosti, lociraju habovi u odnosu na koje se alociraju zahtevni centri, i uspostave veze između habova koje obezbeđuju zadate usluge. Minimizacija ukupnih troškova, uključujući troškove uspostavljanja habova i hab veza, se postiže zadatim maksimalnim vremenom dostave. Slika 4.3 je grafički prikaz promenljivih u navedenom modelu, sa detaljnijim opisom u [Alu09a]. Na slici je takođe prikazan i odnos između habova. Sa *i*, *j*, *k*, *l* su označeni habovi, *s*, *m*, *n*, *t* čvorovi, promenljive definisane redom kao: r_j = vreme dopremljenosti tereta u habu *j*; x_{ij} ima vrednost 1 ako je čvor *i* pridružen habu *j*, u suprotnom 0; y_{ij} je 1 ako je hab veza uspostavljena između habova *i* i *j*, 0 inače; z_{ikj} postaje 1 ako je iskorišćen hab *k* na putu od haba *i* do haba *j*, inače 0. Jedna od vodećih špediterkih firmi u Turkoj zbog geografske strukture same zemlje i sigurnosti, kod isporuke tereta koristi strategiju 1-dodatnog stajanja.

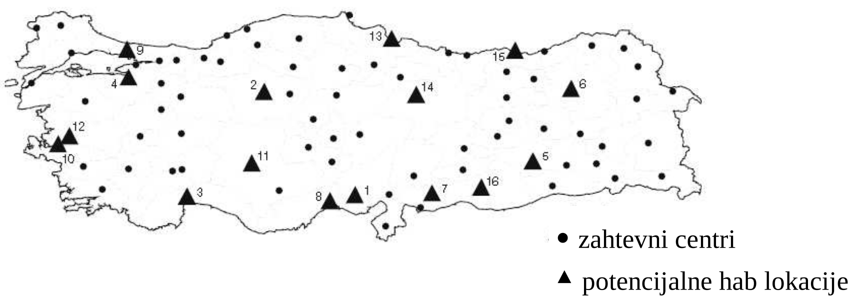


Slika 4.3 Grafički prikaz odnosa promenljivih u modelu sa najviše tri stjanja u međuhabovima

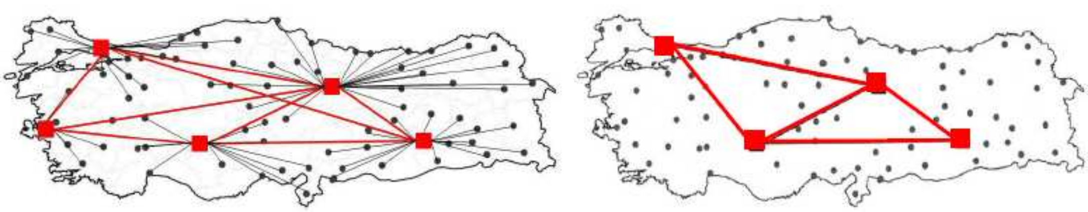
Za modelovanje sistema za transport tereta koriste se problemi hab pokrivanja najnovijeg dolaska (The latest arrival hub covering problem), čija je struktura u radu [Tan07] prikazana kroz četiri privatne firme za transport tereta i Nacionalnu poštu Turske. Jednostavnosti radi u svih pet firmi primenjena je jednostruka alokacija. Kvalitet usluge zavisi od dostave robe u dogovorenom vremenu čime se naglašava značaj pravilnog računanja vremena isporuke. Zato su problemi pokrivanja najbolji za prevoz tereta, pa se velika pažnja posvećuje hab lokacijskim problemima najnovijeg dolaska. Suština ovih problema je lociranje minimalnog broja habova, koji se postiže ako su vremena isporuka u okviru zadatog roka β (unapred zadata granica kojom se ograničava ukupno vreme isporuke) u odnosu na koje se alocira ostatak čvorova [Tan07].

Performanse ovog modela su ispitivane na osnovu Turske transportne mreže (gradovi predstavljaju čvor-korisnike, a lukovi postojeće puteve koji povezuju čvorove u mreži). Podrazumeva se da na kvalitet usluga utiče i broj gradova do kojih teret iz nekog drugog grada može da stigne u roku od 24 sata. Smatramo da je teret isporučen u roku od 24 sata, ukoliko je vreme putovanja, koje uključuje i vreme polaska iz haba, između grada i haba manje ili jednako od 24 sata. Isporuku u roku od 24 sata, koja je veoma bitna firmama za transport tereta, je teško obezbediti za sve gradove u Turskoj sem u slučaju avio-saobraćaja. Iz tog razloga kompanije omogućavaju usluge u tom periodu samo za određene parove gradova, a preostali gradovi za isporuke će imati duži vremenski rok (obično 48 sati).

U radu [Alu09a] na primeru Turske su testirani problemi hab pokrivanja sa nepotpunom mrežom od 81. zahtevne tačke (čvora) i 16 kandidata za habove, Slika 4.4. To je jedan od najvećih slučajeva nepotpunih hab mreža u literaturi do sada, koji je optimalno rešen i na Slici 4.5 su prikazani samo neki rezultati testiranja. Kao zaključak se može izvesti da je za pružanje usluga u datom trenutku nepotrebna i neisplativa izgradnja kompletne hab mreže za veliki broj habova (više od tri haba).

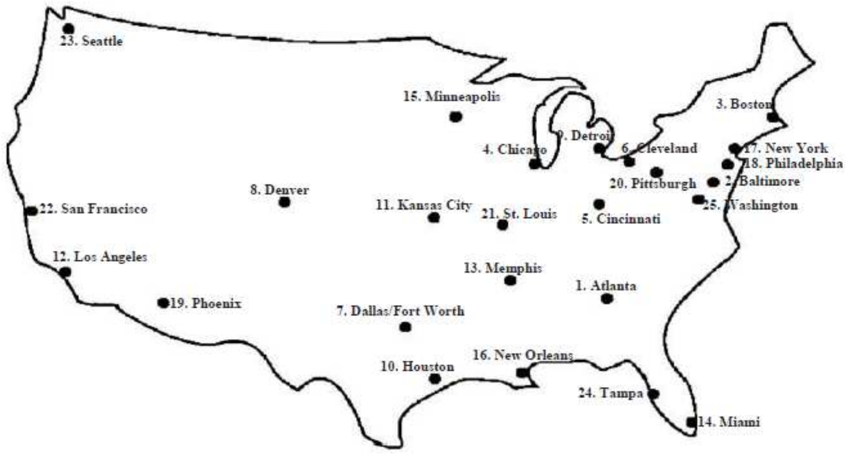


Slika 4.4 Zahtevni centri i 16 kandidata za lokaciju habova u Turskoj mreži

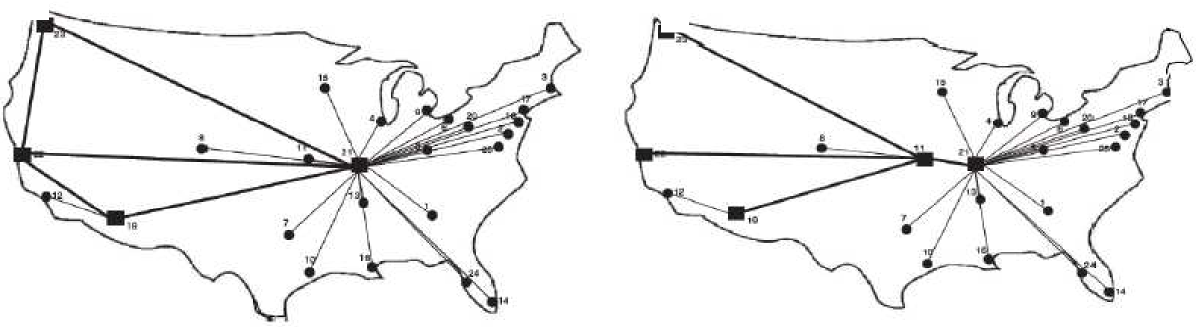


Slika 4.5 Grafički prikaz nekih od rezultata problema hab pokrivanja za Tursku

Model je testiran i na CAB skupu podataka, prikazanom na Slici 4.6 [Alu09a]. Svih 25 čvorova CAB skupa su kandidati za habove. Rezultati testiranja su prikazani na Slici 4.7, leva strana je sa niskim troškovima veza, a desna sa visokim. Pokazalo se da su rešenja za oba skupa, sem u nekoliko slučajeva, neosetljiva na troškove veza [Alu09a]. Povećanje broja klijenata ne utiče na CPU vreme, koje će se povećati sa povećanjem broja habova. Poređenjem testiranja CAB skupa i Turske mreže, dobija se da je CAB skup podataka za nijansu teži za rešavanje. To je posledica broja kandidata za habove, kojih kod CAB ima 25, a kod Turske mreže 16. Rešenja, dobijena testiranjem, su u vidu nekompletne hab mreže i pokazuju da pretpostavka u većini hab mreža o kompletnosti nije potrebna u praksi.



Slika 4.6 Gradovi koji čine CAB skup podataka



Slika 4.7 Grafički prikaz rezultata testiranja na CAB skupu podataka

Većina studija o hab lokacijskim problemima podrazumeva da je svaki par habova međusobno povezan hab lukom, odnosno kompletnu hab mrežu. Međutim, u praksi se javlja potreba za nekompletnim hab mrežama. Kod problema hab pokrivanja javljaju se nekompletne hab mreže čija se formulacija, heuristika za njihovo rešavanje kao i rezultati testiranja mogu naći u [Cal09].

Cilj problema hab pokrivanja je locirati habove, povezati ih lukovima i alocirati ne-hab čvorove tako da je vreme putovanja između bilo kojih odlazno-dolaznih parova uokviru zadate gornje granice. Vrši se minimizacija troškova uspostvljanja hab mreže (uspostavljanja habova i hab lukova) umesto ukupnih troškova saobraćaja. Predložena heuristika za rešavanje problema hab pokrivanja sa nekompletnom mrežom habova je bazirana na tabu pretrazi (a tabu-search based heuristic), da bi se moglo upravljati problemom realne veličine i koja se pokazala dosta efikasnom. Testirana je na CAB skupu podataka kao i na Turskoj mreži od 81. čvora.

Heuristika se sastoji od faza izgradnja i poboljšanja. Algoritam startuje sa skupom potencijalnih lokacija habova dobijenih procedurom, koju su razvili autori [Cal09]. Sa zadatim hab lokacijama algoritam alocira ne-hab čvorove ka habovima i formira hab mrežu. U stvari, algoritam ne startuje sa kompletnim već sa delimičnim rešenjem, tj. skupom habova, koje ne garantuje izvodljivu alokacijsku raspodelu. Tokom faze izgradnje rešenja, tri različite konstrukcijske metode bazirane na alokacijskoj strategiji su korišćene. U svakoj od ovih alokacijskih strategija, moguća rešenja se traže uokviru komletne hab mreže. Kad je pronađeno moguće rešenje, u fazi poboljšanja, hab lukovi koji ne vode do neizvodljivosti se uklanjaju iz hab mreže da bi se dobilo što bolje moguće rešenje.

Faza izgradnje se vrši za određeni broj (K) slučajno izabranih suseda skupa hab lokacija. Mogući sused sa najboljom vrednošću funkcije cilja izabrana je za sledeći potez. Ukoliko nije pronađeno moguće rešenje u $2K$ suseda, sused se bira nasumice.

Faze izgradnje i poboljšanja se objavljuju u svakom potezu, kao i najbolje od svih mogućih rešenja koje je pronašao algoritam. Ukratko, algoritam traži nova rešenja prvo menjajuću skup habova, zatim izgradnjom alokacija, i na kraju, redukovanjem hab veza.

Da bi se izbeglo ciklično ponavljanje čuva se lista tabu poteza. U pretraživanju susedstva, dobro i loše moguće rešenje se prihvata zajedno sa izvodljivim, ukoliko nisu tabu potezi. Prihvatanjem lošijeg rešenja može se izbeći zaglavljivanje u lokalnom optimalnom rešenju.

Slično drugim studijama o problemima hab pokrivanja, za CAB skup podataka nije obezbeđen skup podataka u realnom vremenu. Takođe, zbog nekompletne hab mreže, uz fiksne troškove uspostavljanja habova potrebni su i fiksni troškovi uspostavljanja hab lukova.

Prikazani su rezultati za 10 čvorova dobijeni CPLEX i heuristikom, Slika broj 1, a za skup od 15 i 20 čvorova rezultati se mogu pronaći u [Cal09]. Prve tri kolone se odnose na zadato vremensko ograničenje – T, n broj čvorova i diskontni faktor, α, za vreme. Kolone ispod CPLEX predstavljaju optimalnu vrednost funkcije cilja i CPU vreme, u sekundama, navedeno CPLEX-om. Kolone ispod „Heuristic“ predstavljaju optimalnu vrednost funkcije cilja, CPU vreme u sekundama, i pukotine (gap) heuristike. Kolona pod nazivom Bcpu predstavlja CPU vreme kada je najbolja heuris. Poslednja kolona se odnosi na broj hab veza otvorenih u najboljem pronađenom rešenju. Takođe je izračunato i prosečno (average) i maksimalno (maximum) CPU vreme u sekundama, za CPLEX i heuristiku.

Test bed			CPLEX		Heuristic				
n	α	T	Obj.	CPU time (s)	Obj.	CPU time (s)	Bcpu (s)	Gap (%)	Number of hub links
10	0.2	1425	206.374	1.892	206.374	100	0.141	0	1
	0.2	1271.5	306.631	2.422	306.631	100	0.752	0	2
	0.2	1118	308.195	1.070	308.195	100	0.327	0	2
	0.2	975	413.927	1.827	413.927	100	1.805	0	3
	0.2	832	423.804	2.380	423.804	100	0.248	0	4
	0.4	1627	206.374	3.725	206.374	100	0.147	0	1
	0.4	1406	306.631	2.576	306.631	100	2.152	0	2
	0.4	1185	317.359	1.746	317.359	100	0.189	0	2
	0.4	1077.5	413.927	1.836	413.927	100	3.431	0	3
	0.4	970	435.865	2.637	435.865	100	1.961	0	4
	0.6	1758	221.938	5.331	221.938	100	0.508	0	1
	0.6	1572.5	308.195	4.151	308.195	100	2.857	0	2
	0.6	1387	319.180	4.800	319.180	100	1.916	0	3
	0.6	1267.5	435.865	15.409	435.865	100	6.345	0	4
	0.6	1148	444.084	9.061	444.084	100	4.534	0	5
	0.8	1758	221.938	2.838	221.938	100	0.147	0	1
	0.8	1673.5	313.089	9.677	313.089	100	2.102	0	3
	0.8	1589	319.180	8.314	319.180	100	1.977	0	3
	0.8	1523	413.037	14.646	413.037	100	5.741	0	4
	0.8	1457	453.790	19.630	453.790	100	5.586	0	6
	1	1839	201.867	1.605	201.867	100	0.649	0	1
	1	1815	306.828	6.466	306.828	100	1.929	0	3
	1	1791	319.180	5.360	319.180	100	2.046	0	3
	1	1778.5	413.037	11.694	413.037	100	5.987	0	5
	1	1766	422.742	11.857	422.742	100	5.639	0	6
Average				5.879		100	2.365	0	
Maximum				19.630		100	6.345	0	

Slika 4.8 Rezultati na CAB skupu podataka dobijeni CPLEX-om i heuristikom baziranom na tabu pretrazi, [Cal09]

Na skupu od 10 čvorova CPLEX-om su optimalno rešene sve instance u proseku za nešto manje od 6 sekundi CPU vremena računanja, Slika 4.8. Heuristikom se došlo do optimalnog rešenja za instance svih 10 čvorova i iz tabele se vidi da joj je u proseku potrebno manje od 3 sekunde za pronalaženje optimalnog rešenja.

Primer od 15 čvorova, videti [Cal09], pokazuje da ga je teško optimalno rešiti. Prosečno CPU vreme penje se na 9 minuta sa maksimalnom vrednošću od oko 49 minuta i heuristikom je uspešno rešeno 21. od 23 instanci.

Od ukupnog broja testiranja 71, uspešno je pronađena nekompletna hab mreža za 39 instanci. Ovi rezultati ukazuju na to da formiranje kompletne hab mreže za pružanje usluga sa zadatim vremenskim ograničenjem u mnogim slučajevima nije isplativo.

T	CPU time (min)	Bcpu (min)	Number of hubs	Number of hub links
1880	10	1.065	2	1
1870	10	1.115	2	1
1860	30	16.554	3	3
1850	30	3.266	3	2
1840	30	8.899	3	2
1830	30	28.751	3	2
1820	30	1.825	3	3
1810	60	23.244	3	3
1800	60	4.753	4	6
1790	60	52.824	5	7
1780	90	84.073	5	10
1770	90	7.356	5	8
1760	90	91.828	7	15
Average CPU time (min)	47.692	25.043		

Slika 4.9 Rezltati dobijeni heuristikom na Turskoj mreži, [Cal09]

Svi čvorovi Turske mreže su kandidati za habove, Slika 4.9. Za jača vremenska ograničenja algoritam je duže računao pronalaženje optimalnog rešenja, jer postaje teži za rešavanje. Takođe, jača vremenska ograničenja će usloviti otvaranje većeg broja habova i hab veza. I pored toga algoritam će i dalje projektovati nepotpunu hab mrežu za većinu instanci. Iako se ne zna kvalitet dobijenih rešenja za Tursku mrežu, ona predstavlja najveći testirani skup podataka pri formiranju nekompletnih hab mreža.

Upoređivanjem performansi heuristike i CPLEX-a na CAB skupu podataka ustanovljeno je da se heuristikom dobijaju efikasnija rešenja sa manje utrošenog CPU vremena. Vreme izračunavanja heuristike za Tursku mrežu je razumno, s obzirom na veličinu mreže, čak i za mala vremenska ograničenja. Ona je najveći skup podataka u literaturi koji je testiran pri dizajniranju nekompletnih hab mreža. Takođe, navedena heuristika u [Cal09] je prva heuristika za rešavanje problema hab pokrivanja i za razliku od ostalih hab lokacijskih problema, nalaženje optimalnog rešenja za probleme hab pokrivanja, posebno sa zadatim malim vremenskim ograničenjem, predstavlja veliki izazov.

5. NAPREDNI HAB LOKACIJSKI KONCEPTI

5.1 Stackelberg-ovi hab lokacijski problemi (Stackelberg hub location problem - SHLP)

Neka je zadata korporacija (velika firma) i nekoliko manjih firmi koje pokušavaju da se probiju na tržište. Nakon što korporacija locira svoje habove ostale firme će istovremeno locirati svoje. Ovakvi modeli spadaju u konkurentne hab lokacijske modele (Competitive hub location problem) i nazivaju se Stackelberg-ovi hab lokacijski problemi zbog sličnosti sa Stackelberg-ovom igrom [Fri96].

Stackelberg-ovi hab lokacijski problemi se sastoje od jedne vodeće korporacije i nekoliko manjih firmi koje su njeni sledbenici, koje nisu međusobno konkurentne i imaju zasebne servise. Za model se uzima jedna korporacija i nekoliko manjih firmi jer neke korporacije imaju svoje servise po celom tržištu, dok manje firme samo u okviru ograničenih oblasti. Velike korporacije su uglavnom dominantne na tržištu, pa su manje firme često potčinjene njihovoj strategiji. To je razlog što se pretpostavlja da je korporacija vodeća na tržištu, a manje firme njeni sledbenici. Servisi su odlazno-dolazni parovi preko kojih firma obezbeđuje svoje poslovanje i međusobno su odvojeni, jer zbog slabe konkurentnosti korporacijama, manje firme moraju da skoncentrišu svoje servise u relativno malim oblastima da bi što uspešnije poslovale na tržištu. Takođe se pretpostavlja da je put između svih odlazno-dolaznih parova poznat i simetričan, da se habovi mogu locirati bilo gde u prostoru (neprekidni lokacijski problem) kao i da ne postoji ograničenje broja korisnika koji će biti pridruženi lociranom habu.

Svaka firma preko svog haba pruža usluge na tržištu. Odlazno-dolazni parovi koji opslužuju više od jednog servisa raspoređuju svoje klijente između slobodnih servisa i omogućavaju korisnicima da izaberu slobodan servis koji odgovara njihovim potrebama.

U lociranju novih habova vodeće korporacije prate manje firme što im obezbeđuje optimalne odluke. Korporacije, kao lideri, prve lociraju nove habove na tržištu. Nakon njih će manje firme, da bi povećale profit, istovremeno izvršiti lokaciju svojih novih habova, unutar ograničenih oblasti ili u ograničenom broju gradova. Korporacije su monopolisti na tržištu, odnosno implicitno se pretpostavlja da će zadržati potražnju na tržištu bez obzira na lokacije svojih habova. Drugim rečima, lokacija habova će se određivati prema tome kako odgovara firmi, a ne korisniku. Pod ovim uslovima, korisnici, zbog nedostatka ponuda, su primorani da koriste usluge firmi čak i ako im to neodgovara. U praksi je korisnicima ostavljena mogućnost da izaberu servis koji im najviše odgovara.

Optimalno rešenje Stackelberg-ovih hab lokacijskih problema je upoređeno sa bestežinskom (unweighted) medijanom. Primer na kome su pokazane razlike se sastoji od jedne vodeće firme *A* (korporacije) koja locira svoje habove u bestežinskoj medijani i dve manje B_1 i B_2, čije su lokacije habova rezultati SHLP. Testiranja su obavljena metodom SQP na 25 grada u Americi - CAB (Civil Aeronautics Board) [Sas01].

Oblast firme B_1 (odnosno B_2) se definiše kao odnos prihoda te firme i ukupnih prihoda sve tri firme *A*, B_1 i B_2. To je proporcionalni udeo firme u ukupnim prihodima servisiranja svih firmi. Sa druge strane, definiše se cela oblast za firmu B_1 (odnosno B_2) kao sudelovanje te firme na celokupnom tržištu.

Rezultati, koji su preuzeti iz [Sas01], prikazani su na Slici 5.1.1 Za sva tri testiranja koja su izvršena, prva vrsta predstavlja rezultate dobijene iz SHLP, a druga razultate dobijene lociranjem habova firme *A* u bestežinskom medijanu čvorova.

Br.	udeo firme *A*	udeo firme B_1		udeo firme B_2	
		cela oblast	B_1 oblast	cela oblast	B_2 oblast
1	46,62	25,78	56,23	27,6	50,97
	42,11 (▲9,68%)	30,12	65,7	27,77	51,28
2	41,21	21,74	64,38	37,05	55,93
	39,78 (▲3,48%)	25,56	75,7	34,65	52,32
3	39,92	33,18	69,75	26,9	51,3
	33,77 (▲15,40%)	28,14	59,15	38,09	72,65

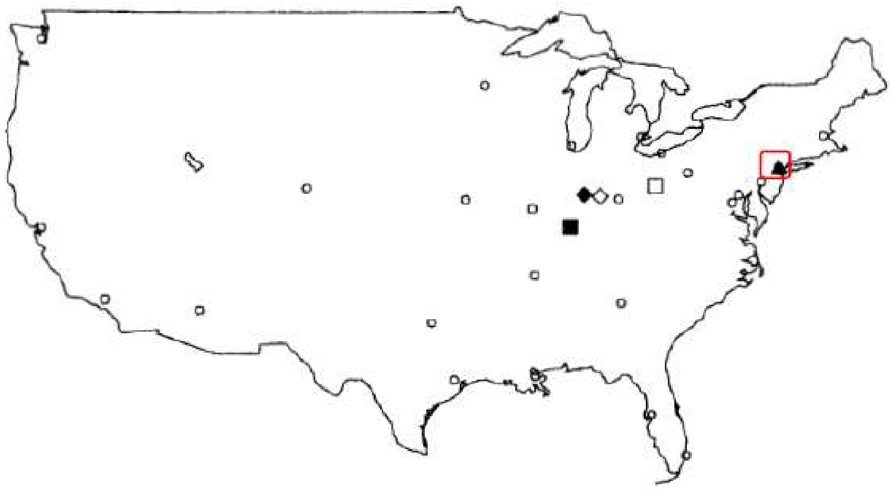
Slika 5.1.1 Udeo u tržištu (%): Takmičarski naspram netakmičarskog modela

Grafički prikaz rezultata testiranja 1, 2 i 3 je na Slikama 5.1.2. (a), (b) i (c) respektivno. Beli krugovi predstavljaju 25 gradova, druge bele oznake ukazuju na hab lokacije dobijene iz SHLP, dok crne oznake pokazuju rezultate kada firma *A* postavlja habove u bestežinskim medijanama čvorova. Kvadratima su prikazane lokacije habova firme *A*, trouglovima firme B_1, a dijamantima lokacije habova firme B_2.

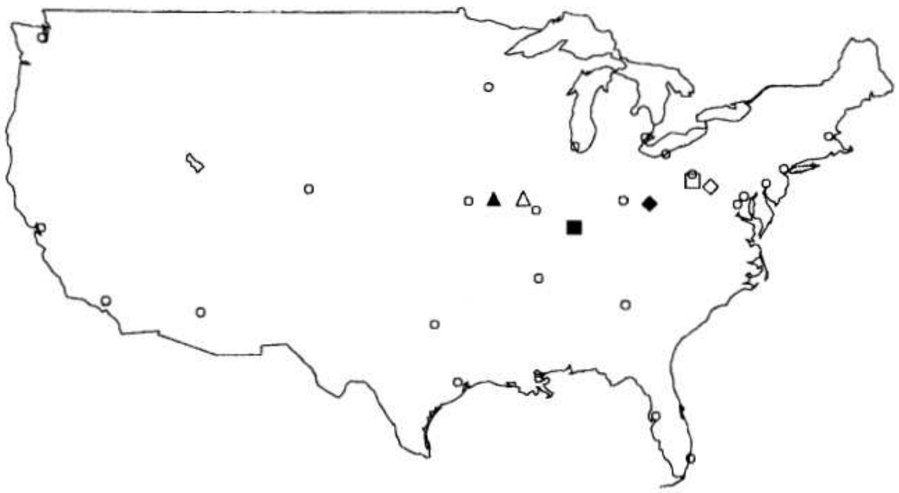
Dobijeni rezultati pokazuju da firma *A* povećava svoj udeo koristeći se vođstvom na tržištu, kao i da je konkurencija značajno uticala na određivanje lokacija habova. U testiranim primerima se vidi da udeo firme *A* na tržištu iznosi od 9,68% do 15,40%. Primer broj 3 iz tabele (Slika 5.1.1) pokazuje da firma B_1 ima skoro 70% tržišnog udela u okviru njene oblasti, uprkos činjenici što joj je firma *A* ozbiljna konkurencija. Interesantno je primetiti da manje firme umanjuju svoj profit pružajući svoje usluge samo na ograničenom području.

Primer br.2 (Slka 5.1.1) pokazuje da firma B_1 pruža usluge samo onim odlazno-dolaznim parovima koji sadrže Njujork, kao što je prikazano na Slici 5.1.2(b), gde se beli i crni troglovi preklapaju u Njujorku. Bez obzira na hab lokaciju firme *A*, optimalna hab lokacija firme B_1 je Njujork i ona neprekidno obezbeđuje usluge za sve odlazno-dolazne parove koji sadrže Njujork. Slika 5.1.2(a) prikazuje da firma *A* omogućava usluge proistekle iz Njujorka sa relativno kratkom dužinom putovanja, osim za neke usluge čije su destinacije blizu Njujorka ili na jugu. Iz ovog razloga je više od 35% tržišnog učešća u posedu firme *A*, jer neproduktivnost usluga zavisi samo od stvarne dužine putovanja, ne uzimajući u obzir transfer (prevoz). Ako se u modelu dozvoli non-stop pružanje usluga onda će firma B_1 zadržati veći deo tržišta.

Slika 5.1.2 (a) Rezultati test primera broj 1



Slika 5.1.2 (b) Rezultati test primera broj 2



Slika 5.1.2 (c) Rezultati test primera broj 3

Pretpostavke da manje firme nisu međusobna konkurencija kao i da nije pružena dvadesetčetvoročasovna usluga omogućavaju formiranje i proučavanje novih modela. S tim u vezi, neka buduća istraživanja se mogu odvijati u smeru formiranja modela u okviru kojih postoje različiti tipovi firmi međusobno konkurentnih, ili da firme obezbeđuju non-stop usluge, da se manje firme međusobnom saradnjom bore za poziciju na tržištu kao i za konkurentnost gigantskim firmama...

5.2 Pouzdani p-hab lokacijski problemi (The reliable p-hub location problem - RPHLP)

Pouzdanost sistema je ključni faktor u dizajniranju mrežne infrastrukture. Održavanje željenih operacija u mreži na zavidnom nivou je veliki izazov jer je nemoguće obezbediti perfektan rad sistema bez grešaka. Mnogi modeli telekomunikacionih mreža ili maksimizuju performanse mreže za određeni skup odlazno-dolaznih čvorova povećavanjem dostupnih veza ili smanjuju troškove izgradnje mreže, pri čemu je ključno da sistem funkcioniše besprekorno. Većina optimizacionih problema koji uključuju zahtev pouzdanosti je teška za rešavanje zbog svoje složenosti, pa su često predložena praktična rešenja. Jedan od problema dizajniranja telekomunikacione mreže, koji pronalazi najbolju vezu koja se dodaje postojećoj strukturi da bi se dostigao određeni nivo pouzdanosti mreže i da bi se smanjili troškovi, predložen je u [Sha97].

U telekomunikacionim sistemima „pouzdanost“ se definiše kao verovatnoća uspešne komunikacije, dostava saobraćaja bez zagušenja, ili gubitka, između odlazno-dolaznih parova. Uspešna komunikacija se definiše kao verovatnoća da će snabdevač, kao što je veza ili hab, u okviru zadatog vremena uspešno, bez kvarova, obaviti preusmeravanje saobraćaja.

„Pouzdanost“ između dva čvora na Internet protokolu (Internet protocol - IP) na bazi mreža, opada sa dužinom (rastojanjem) puta, jer je vreme prenosa paketa podataka ili stopa kašnjenja saobraćaja u korelaciji sa geografskim rastojanjem i nivoom zagušenja na ruti. Dakle veliki problem je određivanje ruta čijom se pouzdanošću povećava interakcija saobraćaja većeg broja izvorišta i destinacija na mreži.

„Pouzdani“ *p*–hab lokacijski problemi lociranjem *p* habova poboljšavaju pouzdanost mreže, odnosno interakcije svih odlazno-dolaznih parova. Sastoje se od dva potproblema koja se baziraju na razmatranju rasutosti lokacija snabdevača. Prvi, problem maksimalne *p*-hab pouzdanosti (The *p*-hub maximum reliability model - PHMR) optimizuje hab mrežu maksimizujući nivoom pouzdanosti završen protok skupa čvorova kroz *p* habova. Motivacija ovog potproblema je dizajniranje pouzdane hab mreže od performansi mera modela hab mreža i posebnu pažnju posvećuje hab lokacijskim problemima sa kriterijumima o pouzdanosti.

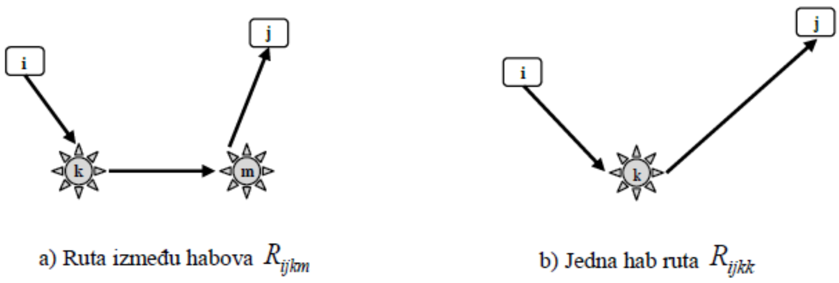
Model obavezne *p*-hab disperzije (The *p*-hub mandatory dispersion model - PHMD) predstavlja drugi potproblem koji određivanjem optimalnih lokacija habova poboljšava pouzdanost mreže zadržavajući rasutost habova i zahtevajući da habovi budu što dalje, sem onih na zadatom minimalnom rastojanju. PHMD model ispituje uticaj disperzije habova na proticanje i nivo aktivnosti protoka habova sa ciljem da se predupredi potencijalna šteta od mogućih kvarova habova sa prekomernim nivoom aktivnosti. Osim toga, cilj im je da se izbegne koncentracija strateškog značaja u jednoj oblasti da bi se smanjili nedostaci koji mogu nastati zagušenjem ili prekidom na mreži.

U problemima obavezne *p*-hab disperzije, uslovi koji se odnose na rastojanje su isti kao kod problema pokrivanja ili *p*-hab centra, gde se uslovi za rastojanje (maksimalno rastojanje) koriste ili za celu rutu, svaku vezu na ruti, ili samo za mrežu habova. PHMD primenjuje uslov minimalnog rastojanja samo na hab veze za obavezno rasipanje habova.

Glavne komponente RPHLP su „pouzdanost rute“ (routing reability) R_{ijkm}, koja se definiše kao verovatnoća izvršenja uspešne dostave za promenljivu X_{ijkm} (trasa gde saobraćaj od izvorišta i do odredišta j ide preko habova k i m; $i \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow j$) i faktori pouzdanosti α i γ ($0 \leq \alpha, \gamma \leq 1$) koji se razlikuju od onih iz običnih hab lokacijskih modela. Faktor pouzdanosti α predstavlja stepen korisnosti hab veza za saobraćaj, od kada im je poboljšana pouzdanost. γ se definiše kao sposobnost haba za prenos saobraćaja bez kašnjenja ili zagušenja, što bi moglo da predstavlja nivo performansi komunikacije hab veza.

Na primer, R_{ijkm}=0,792 znači da ruta X_{ijkm} može da dostavi 79,2% saobraćaja između čvorova i i j, kroz habove k i m (Slika 5.2.1a)). Ako je α vrlo blisko 1., vrednost pouzdanosti puta R_{ijkm} se poboljšava zbog poboljšanja pouzdanosti hab veza. Nasuprot tome, manje vrednosti α pokazuju manju korist od trasiranja saobraćaja kroz hab veze. Velike vrednosti faktora pouzdanosti γ ukazuju na bolje mogućnosti snabdevača za prenos, uključujući ruter, repetitor i pojačalo u samom habu.

Pozdanost haba je od velikog značaja kod ruta sa samo jednim habom u prenošenju saobraćaja do odredišta X_{ijkk} ($i \rightarrow k \rightarrow j$), Slika 5.2.1b). Ako se za obe rute (sa jednim i sa dva haba) uzme ista vrednost parametra α i za rutu sa jednim habom $\gamma<0,8$, onda je ruta sa dva haba X_{ijkm} pouzdanija (Slika 5.2.1a)). U slučaju da je $\gamma>0,8$, a parametar α isti za obe rute, tada je ruta sa jednim habom X_{ijkk} bolja, Slika 5.2.1b). Zbog odabira optimalne rute iz velikog broja mogućih ruta, veliki broj rešenja koja maksimizuju sumu saobraćajnih tokova između odlazno-dolaznih parova mogu se ispitati, na osnovu tipa zadatka, za različite vrednosti oba faktora.



Slika 5.2.1 Odabir ruta na osnovu faktora pouzdanosti α i γ

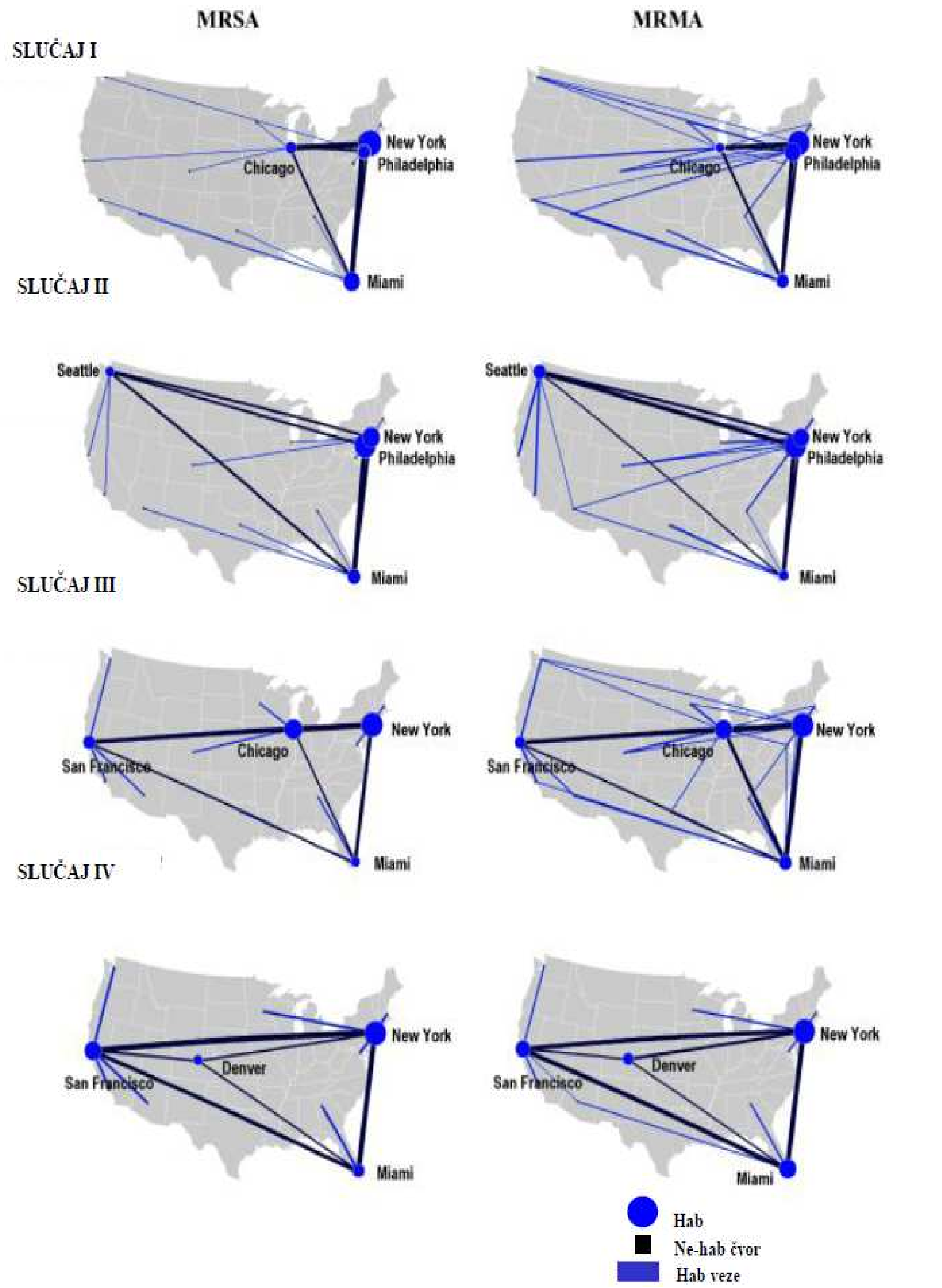
S obzirom na tip alokacijske šeme, razlikujemo dva tipa PHMR modela sa jednostrukom - MRSA i višestrukom alokacijom - MRMA. Oba modela imaju iste funkcije cilja sa različitim uslovima. Vrednost funkcije cilja MRMA je uvek veća ili jednaka od vrednosti funkcije cilja MRSA, zbog fleksibilnosti zadatka, odnosno habovima je dozvoljeno više strateških opcija pri određivanju optimalne rute. Drugim rečima, svako izvorište i može da trasira saobraćaj sa čvorom j kroz različite habove da bi se dobila najpouzdanija ruta.

Slika 5.2.2 predstavlja rezultate optimalne konfiguracije hab mreže MRMA i MRSA od p=4 haba [Hyu09]. Povećanje vrednosti funkcije cilja, kod oba modela, uticaće na povećanje jednog ili oba faktora pouzdanosti. U ovom primeru je vrednost funkcije cilja MRMA uvek veća od MRSA, iako se povećavaju vrednosti oba faktora pouzdanosti i smanjuje razlika u pouzdanosti ova dva modela. MRMA ima više veza od MRSA zbog fleksibilnosti rutiranja. Troškovi mreža ukazuju na to da bi MRMA bio manje isplativ pristup projektu od MRSA, ako bi budžetska sredstva za izgradnju veza bila uključena u model.

Ovim primerom je pokazano da se velike promene lokacije i alokacije habova oslanjaju na različite nivoe faktora pouzdanosti. Primeri MRSA i MRMA prikazani na Slici 5.2.2 mogu se objasniti tipovima ruta koje su korišćene u svakoj fazi. U Slučaju I, habovi su relativno blizu, ali postaju rasuti ako se jedan od faktora pouzdanosti poboljša (Slučaj II ili III). Kao što je prikazano u Slučaju IV, ako su oba faktora pouzdanosti zadata velikim vrednostima, habovi se lociraju tako da budu široko razmaknuti sa uniformnim rastojanjem.

U radu [Hyu09] je pokazano kako se faktori pouzdanosti menjaju izborom rute. Ako model ne sadrži faktore pouzdanosti, svaka interakcija protoka između i, j teži da koristi najkraću rutu kroz habove, jer je koeficijent R_{ijkm} funkcija od dužine (udaljenosti) rute. Veliko α na hab vezama povećava šansu da se iskoristi ruta sa dva hab stajanja, i veliki broj sa jednim hab stajanjem (R_{ijkk}) ili direktnih (R_{ikkk}) ruta koje su izgrađene zbog težinskog povećanja faktora γ. Kao što je prikazano u Slučaju I i III, podstiče se korišćenje rute sa dva hab stajanja, ako se male vrednosti γ primenjuju u šemi rutiranja, jer se izborom rute teži da se izbegne rutiranje sa malim vrednostima γ. Međutim, kada je veći podsticaj faktora pouzdanosti γ bolje je koristiti direktnu ili rutu sa jednim hab stajanjem od rute sa dva hab stajanja. Ovi slučajevi su jasniji kod MRMA zbog mogućnosti većeg izbora fleksibilnijih ruta (Slučaj II i IV).

Kao što se i navodi u radu [Hyu09], otvoreni habovi problema maksimalne p–hab pouzdanosti višestruke alokacije - MRMA, kao što su u Njujorku i Filadelfiji, često imaju veće interakcije sa drugim čvorovima. Drugačiji skup hab lokacija je pronađen u problemima jednostruke alokacije - MRSA koji imaju različite promene faktora pouzdanosti. Ako su ti habovi blizu jedan drugom, onda se najveća interakcija odvija na hab vezama i habovima, proizvodeći velika odstupanja u nivoima protoka snabdevača. Periferni habovi, poput Sijetla, mogu biti odabrani za habove sa visokom koncentracijom protoka, ako se broj čvorova koje opslužuju povećava. Razlike MRMA i MRSA su u alokacijskim šemama i za razliku od drugih višeproblemskih hab lokacijskih problema, cilj MRMA je da promeni alokacije ne-hab čvorova ka habovima da bi se pronašla optimalna ruta između i, j radije nego da se promeni lokacija habova.



Slika 5.2.2 Model ponašanja: MRSA (levo) i MRMA (desno) za *p*=4, rad [Hyu09]
Veličina haba je proporcionalna količini saobraćaja

Kombinacija faktora pouzdanosti odražava se na nivo tehnologije u telekomunikacionim sistemima. Male vrednosti parametara α i γ (male vrednosti parametra α - nizak prenos sposobnosti hab veza; male vrednosti parametra γ - niska unutarnja pouzdanost) predstavljaju tradicionalne telekomunikacione sisteme sa tehnologijom na bazi bakra, što rezultira čestim prekidom usluga zbog manje pouzdanih snabdevača i ograničenih performansi. Velike vrednosti parametara α i γ se odnose na optičke tehnologije u tekućim telekomunikacionim sistemima baziranim na Internet protokolu (Internet protocol - IP), gde je uspostavljena veoma pouzdana mreža snabdevača (visoke vrednosti parametra α - visok nivo prenosa sposobnosti hab veza; visoke vrednosti parametra γ - visoka unutarnja pouzdanost).

Ako bi se povećao nivo zagušenja pojedinačnog haba ili snabdevača, koristi od hab mreže bi mogle biti ugrožene. Glavni razlog hab disperzije je preraspodela protoka razdvajanjem snabdevača na odgovarajući način ako nagomilani protok putuje posebnim hab vezama ili habovima. U radu [Hyu09] je prikazano kako se međusobne i unutrašnje hab aktivnosti menjaju kada se geografski rašire grupisani habovi, kao i da je grupisana hab mreža optimalno rešenje MRMA modela i da se rasuta mreža dobija relokacijom jednog haba.

Problemi maksimalne *p*-hab pouzdanosti pokazuju kako se mogu utvrditi optimalne lokacije habova pod različitim uslovima pouzdanosti habova i hab veza. U dizajniranju hab mreža disperzijom habova se postiže zaštita prekomerne koncentracije interakcija protoka iz pojedinačnih habova. Ovo može biti od pomoći za postizanje ravnomernije raspodele protoka u mreži snabdevača, da bi se, ne samo sprečila potencijalna zagušenja i degradacije, koje mogu nastati grupisanjem habova, već i da bi se smanjila šteta kada se jave kvarovi u veoma aktivnim habovima ili hab vezama.

Predloženi modeli, u [Hyu09], ispitivani su na manjem skupu podataka čime se buduća istraživanja mogu usmeriti za rešavanje opšteg modela ili sa dodatnim ograničenjima poput troškova, kapaciteta objekata i minimalnog protoka na vezama. Takođe, problemi maksimalne *p*–hab pouzdanosti se mogu razvijati u smeru različitih šema prenosa, poput direktne veze između ne-hab čvorova ili nepovezanosti svih habova hab vezama. Pozdanost nivoa se može određivati na osnovu nivoa aktivnosti u habovima čime bi se definisali uslovi faktora pouzdanosti.

6. ZAKLJUČAK

Postoji bogata literatura o lokacijskim problemima, čije su osnovne karakteristike: 1) klijenti; 2) snabdevači koje treba locirati; 3) prostor u kome su locirani snabdevači i klijenti, i 4) metrika kojom se računa rastojanje/vreme između klijenata i snabdevača. Njihova primena je obilata počev od benzinskih stanica, restorana brze hrane, preko outlet-a, deponija, pa do (termo)elektrana. Hab lokacijski problemi, kao podvrsta ovih problema, nastaju u sistemima u kojima se zahteva saobraćaj između velikog broja odlazno-dolaznih parova. Jeftinija varijanta je izbeći direktne putanje između svih parova sa protokom, odnosno locirati habove, diskontovati transportne veze, pridružiti ne-hab čvorove habovima i usmeriti protok kroz formiranu mrežu.

Do 2000. godine hab lokacijska teorija se razvijala u smeru formulisanja i definisanja novih problema, od kojih se najviše odnosilo na probleme *p*-hab medijane. Nadalje se proces razvijanja usmeravao ka metodologijama za njihovo rešavanje. Tokom proteklih godina modeliran je i rešen širok spektar hab lokacijskih problema motivisanih transportom (vodom, vazduhom i kopnom) kao i komunikacionim mrežama. U transportnim mrežama habovi se koriste kao centri konsolidacije i kolekcije protoka da bi se diskontovali troškovi transporta mreže. Komunikacijske mreže sadrže skup čvorova koji prenose poruke ili informacije u vidu glasa, podataka i/ili videa, putem komunikacijskih veza (poput bakarnih i fiber-optičkih kablova, radio i satelitskih veza). Njima se mogu pokriti manje oblasti, poput zgrada, ali isto tako i velika geografska područja i one podrazumevaju jednostavne telefonske pozive, video telekonferencije, kao i prenos paketa podataka.

Projektovanje efektivne, ali isplatljive, mreže je težak problem, specijalno u slučaju velikih mreža sa puno čvorova sa saobraćajem. Lokacija habova je presudna kod dizajniranja mreža jer utiče na ukupne troškove transporta u mreži, nivo protoka u centralnim snabdevačima, vreme, zagušenja a u praksi se pokazalo da je mreža habova veoma robusna.

Kako prikaz svih hab lokacijskih problema sa metodama za rešavanje prevazilaze okvire ovog rada, u radu su nevedeni samo najpoznatiji problemi, najefikasnije metode kao i najvažniji njihovi doprinosi. Ovi problemi imaju velike primene u praksi i za svaki su detaljno opisani teorijski i praktični aspekti. Razmatrani hab lokacijski problemi su teški za rešavanje, što se posebno vidi iz činjenice da su čak i njihovi potproblemi sa fiksiranim habovima takođe NP-teški.

Raznovrsni lokacijski problemi koji se susreću u praksi se rešavaju manje više uspešno. Na osnovu raznolikog teorijskog i praktičnog iskustva teorija lokacije se dovoljno razvila da se stvore osnove za prilaz novim problemima. Na raspolaganju su rezultati koji usmeravaju modeliranje problema, metode i algoritme koje ima smisla koristiti u rešavanju odgovarajućih optimizacionih zadataka. Pri tome, danas postoji puno dostupnog softvera kao podrška za rešavanje problema lokacije.

Iako odnedavno postoji više studija u kojima su problemi svakodnevnice modelirani hab lokacijskim problemima, ova teorija je na početku svog razvijanja. Na osnovu situacija iz realnog života nastaju novi zhatevi zbog čega su modeli komplikovaniji i teži za rešavanje. Razvojem novih modela i njihove realne primene otvara se novi apsekt istraživanja koju vredi sprovesti. U poslednje dve decenije, zbog ogromnog povećanja sistema komunikacije, transporta i logistike, nove i moderne strategije, kao i studije posvećene su ovim oblastima. I pored bogate i raznovrsne literature problemi lokacije ostaju izazov i sa teorijskog i sa praktičnog apekta jer svaki zaseban problem lokacije zahteva istraživački pristup, odgovarajući model i pogodne metode za rešavanje. Ovaj rad je pokušaj da se kroz prikaz nekoliko osnovnih hab lokacijskih problema omogući uvid i podstrek za rešavanje praktičnih problema. Iako je prikazana široka primena navedenih hab lokacijskih problema kao i mogućnost njihovog daljeg razvijanja na raznim poljima (poput ekonomije), može se zaključiti da oblast lokacijskih problema nije još uvek dovoljno istražena i da pruža veliki prostor za dalja istraživanja.

LITERATURA

[Abd98] Abdinnour-Helm S., "A hybrid heuristic for the uncapacitated hub location problem", European Journal of Operational Research, **106**, 489-499, (1998).

[Abd98a]Abdinnour-Helm S., Venkataramanan M., "Solution approaches to hub location problems", Annals of Operations Research 78, 31-50, (1998).

[Ahu93] Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B., "Network flows: theory, algorithms and applications", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1993).

[Alu07] Alumur S., Kara Y.B., "Network hub location problems: The state of the art", Deparment og Industrial Engineering, Bilkent University, 06800 Ankara, Turkey, (2007).

[Alu09] Alumur S., Kara Y.B., O.E. Karasan, "The design of single allocation incomplete hub network", Transportation Research Part B 43, 939-951, (2009).

[Alu09a] Alumur S., Kara B.Y., "A hub covering network design problem fog cargo applications in Turkey", Journal of Operational Research Society 60, 1349-1359, (2009).

[Ayk88] Aykin T., "On the location of hub facilities", Transportation Science, **22**, 155-157, (1988).

[Ayk92] Aykin T., Brown G.F., "Interacting new facilities and location-allocation problems", Transformation Science, 26, 221-222, (1992).

[Ayk95] Aykin T.,"The hub location and routing problem", European Journal of Operational Research, **83**, 200-219, (1995)

[Bea90] Beasley J.E., OR-library-distributing test problems by electronic mail, Journal of the Operational Research Society, 41: 1069-72. Also available at <http://people.brunel.ac.uk/mastjjb/jeb/orlib/pmedinfo.html>, (1990).

[Bea96] Beasley J.E., "Obtaining Test Problems via Internet", *Journal of Global Optimizacion*, Vol. 8, pp. 429-433, (1996).

[Ber03] Berman O., Krass D., Drezner Z., "The gradual covering decay location problem on a network", European Journal of Operationsl Research, 151, 474-480, (2003).

[Ber03] Berman O., Krass D., Drezner Z., "The gradual covering decay location problem on a network", European Journal of Operationsl Research, 151, 474-480, (2003).

[Bol04] Boland N., Krishnamoorthy M., Ernst A.T., Ebery J., "Preprocesing and cutting for multiple allocation hub location problems", European Journal of Operation Research 155, 638-653, (2004).

[Cam94] Campbell J.F., "Integer programming formulations of discrete hub location problems", European Journal of Operational Research **72**, 387-405, (1994).

[Cam96] Campbell J.F., "Hub location and the p-hub median problem", Operation Research **44** (6), 1-13, (1996).

[Cam01]Campbell J.F., Ernst A.T., Krishnamoorthy M., "Hub Arc Location Problems: Part-Introduction and Results", Menagement Science (to be submitted), (2001).

[Cam03a] Campbell J.F., Stiehr G., Ernst A.T., Krishnamoorthy M., "Solving hub arc location problems on a cluster of workstation", Parallel Computing 29, 555-574, (2003).

[Cam03b] Campbell J.F., Ernst A.T., Krishnamoorthy M., "Hub Arc Location Problems: Part-Formulations and Optimal Algorithms", (2003).

[Cam05] Campbell J.F., Ernst A.T., Krishnamoorthy M., "Hub Arc Location Problems: Part I–Introduction and Results", Menagement Science 51 (10), 1540-1555, (2005).

[Cam05a] Campbell J.F., Krishnamoorthy E. A., "Hub arc location problems: Part II-formulation and optimal algorithms", *Menagment Science* 51(10), 1540-55, (2005).

[Cam05b] Campbell A.M., Lowe T.J., Zhang L., "The p-hub center allocation problem", European Journal of Operational Research, (2005).

[Cam07] Campbell M.A., Lowe T.J., Zhang Li, "The p-hub center allocation problem", European Journal of Operational Research 176, 819-835, (2007).

[Cal09] Calic H., Alumur S.A., Kara B.Y., Karasan O.E., "A tabu-search based heuristic for the hub covering problem over imcomplete hub network", Computers & Operations Research 36, 3088-3096, (2009).

[Cán04] Cánovas L., García S., Marín A., "Solving the uncapacitated multiple allocation hub location problem by means of dual-ascent technique", *Working paper no 1,* Departamento de Estadısticae Investigacion Operativa, University of Murcia,Spain,http://www.optimization-online.org/DB FILE/2004/01/812.pdf, (2004).

[Che98] Chen P.S., Hansen P., Jaumard B., Tuy H., "Solution of the multisourse Weber and conditional Weber problems" by d.-c. programming. Operation research, **46** (4), 548-562, (1998).

[Chen07] Chen J. F., "A hybrid heuristic for the uncapacitated single allocation hub location problem", *OMEGA The Internacional Journal of Menagement Science*, 35: 211-220. (2007).

[Chen05] Chen J. F., "A heuristic for the uncapacitated multiple allocation hub location problem", *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers,* Vol. 23, No. 5, pp. 371-381, (2006).

[Coo63] Cooper L., "Location-Allocation Problems", *Operations Research*, 11, 331-343, (1963).

[Con09] Contreras I., Dias J., Fernández E., "Lagrangean relaxation for the capacitated hub location problem with single assigment", OR Spectrum 31: 483-505, (2009).

[Conn94] Conn A.R, Calamai P.H., Bongartz I., "A projection method for l_p norm locatio-allocation problems", Mathematical Programming 66, 283-312, (1994).

Cor09] Correia I., Nickel S., Saldanha-da-Gama F., "Single-allocation hub location problems with capacity choices", Berichte des Fraunhofer ITWM, Nr. 169, (2009).

[Cor10] Correia I., Nickel S., Saldanha-da-Gama F., "The capacitated single-allocation hub location problem revisited:

A note on a classical formulation", European Journal of Operational Research 207: 92-96, (2010).

[Cos08] Costa M. da G., Captivo M.E., Clímaco J., "Capacitated single allocation hub location problem-A bi-criteria approach", Computers & Operations Research 32:3671-3695,(2008).

[Cre97] Crescenci P., Kann V., "A compendium of NP optimization problems", (1997).

[Cve96] Cvetković D., Čangalović S., Dugošija Đ., Kovačević-Vujčić V., Simić S.,Vuleta J., Redaktori: Cvetković D, Kovačević-Vujčić V., "Kombinatorna optimizacija-matematička teorija i algoritmi" , Društvo operacionih istraživanja Jugoslavije-DOPIS, Beograd, (1996).

[Dre90] Drezner Z., Wesolowsky G.O., "The Weber problem on the plane with some negative weights", *INFOR*, 29, 87-89, (1990).

[Dre07] Drezner Z., Nickel S., "Solving the ordered one-median problem in the plane", Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM 2007, Bericht 107, (2007).

[Dre10] Drezner Z., Krass D., Berman O., "Generalized coverage: New developments in covering location models", Computers & Operations Research 37, 1675-1687, (2010).

[Ebe00] Ebery J., Krishnamoorthy M., Ernst A., Boland N., "The capacitated multiple allocation hub location problem: Formulation and algorithms", European Journal of Operational Research 120, 614-631, (2000).

[Ern96] Ernst A.T., Krishnamoorty M., „Efficient algorithms for the uncapacitated singl allocation p-hub median problem", CSIRO Division of Mathematics and Statistics, (1996).

[Ern98a] Ernst A.T., Krishnamoorthy M., "Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation *p*-hub median problem", European Journal of Operation Research 104, 100-112, (1998).

[Ern98b] Ernst A.T., Krishnamoorthy M., "An exact solution approach based on shortest-paths for p-hub median problems", INFORMS Journal on Computing, 10(2):149-162, (1998).

[Ern99] Ernst A.T., Krishnamoorthy M., "Solution algorithms fro the capacitated single allocation hub location problem", Annals of Operations Research 86: 141-159, (1999).

[Ern02] Ernst A.T., Hamacher H.W., Jiang H., Krishnamoorty M., Woeginger G., "Uncapacitated single and multiple allocation p-hub center problems", (2002).

[Ern04a] Ernst A.T., Hamacher H.W., Jiang H., Krishnamoorty M., Woeginger G., "Heuristic algorithms for the uncapacitated hub center single allocation problem", European Journal of Operational Research (2004).

[Ern04b] Ernst A.T., Hamacher H., Jiang H., Krishnamoorty M., Woeginger G., "Uncapacitated Single and Multiple Allocation p-Hub Center Problems", Submitted to Operation Research (2004 to appear).

[Ern09] Ernst A.T., Hamacher H., Jiang H., Krishnamoorthy M., Woeginger G., “Uncapacitated single and multiple allocation p-hub center problems“, Operations Research, Vol 36 (4), pp. 2230-41, (2009).

[Fri96] Friesz T.L., Tobin R.L., Miller T.C., “Equilibrium Facility Location on Networks“, Springer-Verlag, Berlin, (1996).

[Gav09] Gavriliouk E.O., “Agregation in hub location problem“, Computers & Operations Research, 36: 3136-3142, (2009).

[Gar79] Garey M.R., Johnson D.S., "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness", Freeman, San Francisco, (1979).

[Gel08] Gelareh S., dissertation: "Hub Location Models in Public Transport Planning", Vom Fachbereich Mathematik der Technischen Universit at Kaiserslautern zur Erlangung des akademischen Grades Doktor der Naturwissenschaften, (2008).

[Gela08] Gelareh S., Nickel S., “New approaches to hub location problems in public transport planning”, Fraunhofer-Institut für Techno-und Wirtschaftsmathematik ITWM 2007, Bericht 133, (2008).

[Gib85]Gibbons A., "Algorithmic Graph Theory", Cambridge University Press, Cambridge, (1985).

[Glo77] Glover F., “Heuristics for Integer Programming Using Surrogate Constraints“, Decision Sciences, Vol. 8, No 1, 156-166, (1977).

[Gol69] Goldman A.J., "Optimal location for centers in network", Transportation Science, 3:352-360, (1969).

[Gho95] Ghobrial A., Kanafani A., “Future of airline hubbed networks: Some policy implications“, J Transposrtat Eng 121, 124-134, (1995).

[Hak64] Hakimi S.L., "Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians in graph", Operation research, 12:450-459, (1964).

[Hak65] Hakimi S. L., "Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems", Operations Research, **13**(3):462-475, (1965).

[Ham94] Hamacher H.W., Nickel S., "Combinatorial algorithms for some 1-faclity median problems in the plane", European Journal of Operational Research, **74**, 340-351, (1994).

[Ham98] Hamacher H.W., Nickel S., "Classification of location models", Location Science, **6**, 229-242, (1998).

[Ham03] Hamacher H.W., Labbe M., Nickel S., Sonneborn T., "Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems", available at www.ElsevierMathematics.com, Discrete applied mathematics, (2003).

[Hamxx] Hamacher H.W., Meyer T., “Hub cover and hub center problem“, (xxxx).

[Han98] Hansen P., Mladenović N., Taillard, "Heuristic solution of the multisource Weber problem as a p-median problem", Operations Research Letters, **22**, 55-62, (1998).

[Han01a] Hansen P., Mladeović N., “Developments of Variable Neighborhood Search“, in Ribeiro C.C. and Hansen P. eds.: *Essays and Surveys in Metaheuristics*, Kluwer Academic Publishers, pp.415-439, (2001).

[Han01b] Hansen P., Mladeović N., “ Variable Neighborhood Search", in Glover F. and Kochenberg G. eds.: *Handbook of Metaheuristics*, (2001).

[Han01c] Hansen P., Mladeović N., “ Variable neighborhood search: Principles and applications", *European Journal of Operations Research*, Vol.130, No.3, pp. 449-467, (2001).

[Hll75] Holland J.H., "Adaptation in Natural and Artificial Systems", The University of Michigan Press, Ann Arbor, (1975).

[Hyu09] Hyun K., O’Kelly M.E., “Reliable p-Hub Location Problems in Telecomunication Network”, Geographical Analysis **41**, 283-306, The Ohio State University, (2009).

[Ili10] Ilić A., Urošević D., Brimberg J., Mladenović N., “Agenral variable neighborhood search for solving te uncapacitated single allocation p-hub median problem“, European Journal of Operational Research, 206: 289-300, (2010).

[Jai96] Jaillet P., Song G., Yu G., “Airline network design and hub location problems“, *Location Science*, 4:195-211, (1996).

[Jay05] Jayasundara M., “Spherical location problems with restricted regions and polygonal barriers“, Von Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern, Dissertation, (2005).

[Kar79] Kariv O., Hakimi S.L., “An algoritmic approach to network location problems. Part II: The p-median “, SIAM Journal of Applied Mathematics 37, 539-560, (1979).

[Kara98] Kara B.Y., Tansel B.C., "On the Allocation Phase of the p-Hub Location Problem", *Technical Report, Department of Industrial Engeneering, Bilkent University,* Bilkent 06533, Ankara, Turkey (1998).

[Kar99] Kara, B.Y. “ Modeling and analysis of issues in hub location problems.”, Ph. D. Thesis, Bilkent University Industrial Engineering Deprtment, 06800 Bilkent, Ankara, Turkey, (1999).

[Kar00] Kara, B.Y., Tansel B., “The single assignment p-hub center problem”, European Journal of Operation Research 125 (3), 648-655, (2000).

[Kar03] Kara, B.Y., Tansel B., “The single assignment hub covering problem”, Journal of the Operation Research Society, 54: 59-64, (2003).

[Kar09] Kara B.Y., Alumur S.A., Karasan O.E., “The design of single allocation incomplete hub network“, Transportation Research Part B 43, 936-951, (2009).

[Kla01] Klamroth K., "Planar Weber location problems with the barries", Optimization, **49**, 517-527, (2001).

[Kli91] Klincewicz J.G., "Heuristics for the p-hub location problem", European Journal of Operational Research, **53**, 25-37, (1991).

[Kli93] Klincewicz J.G., “Avoiding local optima in the p-hub location problem using tabu search and GRASP“, Annals of Operations Research, **40**, 283-302, (1993).

[Kli96] Klincewicz J.G., “ A dual algorithm for the uncapacitated hub location problem“, Location Science, 4 (3): 173-84, (1996).

[Klo04] Klose A., Drexl A., "Facility Location Models for Distribution Sistem Desing", Klose Andreas, Universität St. Gallen, 9000 St. Gallen, and Institut für Operations Research, Universität Zürich, Switzerland, andreas.klose@unisg.ch Drexl Andreas, Cristian-Albrechts-Universität zu Kiel, Olshausenstr. 40 , 24118 Kiel, Germany, drexl@bwl.uni-kiel.de, (2004).

[Kra79] Krarup J., Pruzan P.M., "Selected families of location problems", Annals of Discrete Mathemetics, **5**, 327-387, (1979).

[Lab03] Labbé M., Yaman H., Gourdin E., „A Branch and Cut Algorithm for Hub Location Problems with Single Assignment“, *ISRO/OR Preprint 2003/05*, Université Libre de Bruxelles (2003).

[Lov88] **Love R.F., Morris J.G., Wesolowsky O. G.,** "Facilities Location: Models and Methods", Publication in Operation Research vol. 7, North Holland, New York, (1988).

[Loz00] Lozano A.J., Mesa J.A., “Location of facilities with undesirable effects and inverse location problems: A classification“, Studies in Locational Analysis, 14, 253-291, (2000).

[Mar99] Marianov V., Serra D., ReVelle C., „Location of hubs in a competitive environment“, European Journal of Operational Research, 114, 363-371, (1999).

[Mar05] **Marianov V., Serra D.,** "Location Models for Airline Hubs Behaving as M/D/c Queues", (2005).

[Marí06] Marín A., Cánovas L., Landete M., “New formulation for the uncapacitated multiple allocation hub location problem“, *European Journal of Operational Research*, 172 (1): 274-292, (2006).

[Mah08] Mahdi B., Masoud M., “ Hybrid Fuzzy Capacitated Hub Center Allocation Problem with Both Qualitative and Quantitative Variables“, World Applied Science Journal 6 (4): 507-516, (2008).

[May02] Mayer G., Wagner B., “Hublocater: An exact solution method for the multiple allocation hub location problem“, Computers & OR, 29: 715-739, (2002).

[Mel88] Melachrinoudis E., "An efficient computational procedure for the rectilinear maximin location problem", Transportation Science, **22**, 217-223, (1988).

[Mel07] Melo M.T., Nickel S., Saldanha da Gama F.,“Facility Location and Supply Chain Management–A comprehensive review”, Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM 2007, Bericht 130, (2007).

[Mey09] Meyer T., Ernst A.T., Krishnamoorthy M., “A2-phase algorithm for solving the single allocation p-hub center problem“, Computers & Operations Research, 36: 3143-3151, (2009).

[Mlaxx] Mladenović N., Hansen P., Taillard E. “Heuristic Solution of the Multisource

Weber Problem as a p-Median Problem”, (xxxx).

[Nic00] Nickel S., Schobel A., Sonnebon T., “Hub location problems in urban traffic networks“. In Niittymahi and Pursula, editors, *Mathematical methods and optimisation in transportation systems*, pages 1-12, Kluwer Academic Publishers, (2000).

[Nic08] Nickel S., Gelareh S., "New approaches to hub location problems in public transport planning", Fraunhover Institut Techno-und Wirtschaftsmathemetik, Berichte des Fraunhover ITWM, Nr. 133, (2008).

[O'Ke86] O'Kelly M., "The location of interacting hub facilities", Transportation Science, **20**, 92-106, (1986).

[O'Ke87] O'Kelly M., "A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities“, European Journal of Operational Research 32, 393-404, (1987).

[O'Ke01] O'Kelly M., Skorin-Kapov D., Skorin-Kapov J., "Lower Bounds for the Hub Location Problem", Department of Geography, The Ohio State University, 1036 Derby Hall, 154 North Oval Mall, Columbus, Ohio 43210; W. A. Harriman School for Management and Policy, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, New York 11794-3775, (2001).

[Pam01] Pamuk F.S., Sepil C., “A solution to the hub center problem via a single-relocation algorithm with tabu search“, IIE Transactions 33 (5), 399-411, (2001).

[Pet95] Peterson M., Bertsimas D., Odoni A., "Models and Algorithms for Transient Queuing Congestion at Airports" , Menagment Science , **41** (8) ,1279-1295, (1995).

[Pir98] Pirkul H., Schilling D.A., “An efficient procedure for designing single allocation hub and spoke systems“, Menagement Science **44** (12), 235-242, (1998).

[Pér98] Pérez M., Almeida Rodriguez F., Moreno Vega J.M., “Fast Heuristics for the p-Hub Location Problems“, *Presented in EWGLAX*, Murcia, Spain, (1998).

[Pér04] Pérez M., Almeida Rodriguez F., Moreno Vega J.M., “On the use of the path relinking for the p-hub median problem“, *Lecture Notes in Computer Science 3004*, pp. 155-164, (2004).

[Pér05] Pérez- Pérez M., Almeida Rodriguez F., Moreno Vega J.M., "A Hybrid GRASP-Path Relinking Algorithm for the Capacitated p-Hub Median Problem", *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 3636, pp. 142-153, (2005).

[Rev03] **ReVelle C.S., Eiselt H.A.,** "Location analisys: A sinthesis and survey", University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, (2003).

[Sas01] Sasaki M., Fukushima M., “Stackelberg Hub Location problem“, Journal of the Operations Research, Society of Japan, Vol. 44, (2001).

[Sas05] Sasaki M., "Hub Network Desing In A Competitive Environment With Flow Threshold", Journal of the Operations Reseach Society of Japan, Vol. 48, NO **2**, 158-171, (2005).

[Sep00] Sepil C., Pamuk F.S., "A solution to the hub center problem via a single-relocation algorithm with tabu search", Industrial Engineering Department, Middle East Technical University, Ankara, 06531 Turkey, (2000).

[Sha97] Shao F., Zhao L., "Optimal Desing Improving Communication Network Reliability", *Microelectronics and Reliability 37*, 591-95, (1997).

[Sny07] Snyder L.V., Daskin M.S., "Models for Reliable Supply Chain Network Design", In Critical Infrastructure: Reliability and Vulnerebility, 257-90, edited by. Murray A.T and Grubesic T.H., Berlin, Germany: Springer-Verlag, (2007).

[Soh00] Sohn J., Park S., "The single allocation problem in the interacting three hub network", Networks, 35: 17-25, (2000).

[Sol06] Solyali O., "Solving the single allocation p-hub center problem using genetic algorithms", Industrial Engineering Department, Midle East Technical University Ankara, 06531 Turkey, (2006).

[Sko94] Skorin-Kapov D., Skorin-Kapov J., "On tabu search for the location of interacting hub facilities", *European Journal of Operational Research* **73**, pp. 502-509, (1994).

[Sko96] Skorin-Kapov D., Skorin-Kapov J., O'Kelly M., "Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problems", European Journal of Operational Research 94, 582-593, (1996).

[Sli09] Slivone M., „Single vs. multiple assigment in hub-and-spoke network: a total cast comparison", University of Pardubice, Number 4., Volume IV., (2009).

[Soh97] Sohn J., Park S., "A linear program for the two hub location problem", *European Journal of Operational Research* 100 (3), 617-622, (1997).

[Soh00] Sohn J., Park S., "The single allocation problem in the interacting three-hub network", Networks 35(1), 17-25, (2000).

[Srđ03] Srđević B., "Mravlje kolonije i kombinatorna optimizacija", Letopis naučnih radova Godina 27 (2003), broj 1, strana 128–137, (2003).

[Sta04] Stanimirović Z., "Rešavanje nekih diskretnih lokacijskih problema primenom genetskih algoritama", Magistarski rad, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, (2004).

[Sta07] Stanimirović Z., "Genetski Algoritmi za Rešavanje Nekih NP-Teških Hab Lokacijskih Problema", Doktorska Disertacija, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, (2007).

[Sta09] Stanimirović Z., Kratica J., Filipović V., Tošić D., "Evolutivni pristup za rešavanje hab lokacijskih problema", Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, (2009).

[Staxx] Stanimirović Z.,"Solving the capacitated single allocation hub location problem using genetic algorithm", (xxxx).

[Sun01] Sung C.S., Jin H.W., "Dual based approach for a hub network design problem under non-restrictive policy", *European Journal of Operational Research*, Vol. 32, pp. 967-984, (2001).

[Suz97] Suzuki A., Drezner Z., “On the airline hub problem: The continuous model“, Journal of the Operational Research Society of Japan, 40, 62-74, (1997).

[Suz03] Suzuki A., Drezner Z., “Covering problem with variable radii and fixed centers“. In: Proccedings of the international workshop on urban operations research, Seto, Japan, Nanazan University, p. 34-35, (2003).

[Tan00] Tansel B.C., Kara B.Y., “On the single-assignment p-hub center problem“, European Journal of Operational Research 125 (3), 648-655, (2000).

[Tan01] Tansel B., Kara B.Y., “The latest arrival hub lcation problem“, Manage Sci. 47, 1408-1420, (2001).

[Tan07] Tan P.Y., Kara B.Y., „A hub covering model for cargo delivery sistem“, Department of Industrial Engineering, Bilkent University, Ankara, Turkey, 2006 Wiley Periodicals, Inc. Networks 49 (1), 28-39, (2007).

[Top05] Topcuoglu H., Corut F., Ermis M., Yilmaz G., "Solving the Uncapacitated Hub Location Problem Using Genetic Algorithms", *Computers & Operations Research, Vol. 32*, pp. 967-984, (2005).

[Wag04] Wagner B., “Model formulation for Hub Covering problems“, Schriften zur Quantitativen Betriebswirtschaftslehre Nr. 3, (2004).

[Wag07] Wagner B., “An exact solution procedure for a cluster hub location problem“, European Journal of Operational Research 178, 391-401, (2007).

[Wan09] Wang H.J., Ting C.J., “A threshold accepting algorithm for the uncapacitated single allocation p-hub median problem“, Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies, Vol.8, (2009).

[Was05] Wasner M., Zäpfel G., "Optimal Desing of Transportation Networks: Theoretical Aspect and a Case Study", Department of Production management, University of Linz, A-4045 Linz, Austria, (2005).

[Web09] Weber A., "Über den Standort der Industrien", Tübingen (1909) (English translation by Friedrrich C.J., Theory of the Location of Industries, University of Chicago Press), (1909).

[Wei36] Weiszfeld E., “Sur le point pour lequel la somme des distances de *n* points donnes est minimum“, *The Tohoku Mathematical Journal*, 43, 355-386, (1936).

[Yam05] Yaman H., Carello G., “Solving the hub location problem with modular link capacities“, Computers & Operation Research 32, 3227-3245, (2005).

Literatura

S A D R Ž A J: