УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МАСТЕР РАД

Тема: **ГОРЊА И ДОЊА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗА И НИЗА СКУПОВА И ЊИХОВЕ ПРИМЕНЕ У РЕЛНОЈ АНАЛИЗИ**

МЕНТОР:

Проф. др Драгољуб Кечкић

КАНДИДАТ:

Милинко Миловић

Београд 2010.

ПРЕДГОВОР

Овај мастер рад је посвећен појмовима доње и горње граничне вредности низа и низа скупова на скупу реалних бројева.

У првом делу рада сам обрадио горњи и доњи лимес низа и низа скупова.

Други део рада обрађује основне појмове Лебегове мере, Лебеговог интеграла и мерљиве функције.

У трећем делу рада наводимо неједнакости о Лебеговој мери.

Четврти део рада се састоји од левел скупова и епи лимеса.

Аутор дугује велику захвалност ментору рада проф. др. Кечкићу и члановима комисије за одбрану: проф. др. Ивану Аранђеловићу и мр.Ђорђу Кртинићу

Београд
30.10.2010.

Милинко Миловић

САДРЖАЈ

I ГОРЊИ И ДОЊИ ЛИМЕС

У овом делу уводимо дефиниције доње и горње границе низа и скупа и неке теореме.

Дефиниција 1: Нека је $A \neq \emptyset$ и $A \subseteq$.

1.Реалан број g зовемо **доња граница** скупа A ако важи

$$(\forall x)(x \in A) \Rightarrow (g \leq x).$$

2. Реалан број G **зовемо горња граница** скупа A ако важи

$$(\forall x)(x \in A) \Rightarrow (x \leq G).$$

Теорема 1: 1. Може постојати највише једна доња граница скупа која му припада.

2. Може постојати највише једна горња граница скупа која му припада.

Доказ: 1. Нека су g_1 и g_2 доње границе скупа A и нека $g_1 \in A$ и $g_2 \in A$. Како је

$$(\forall x)(x \in A) \Rightarrow (g_1 \leq x) \Rightarrow g_1 \leq g_2$$

и

$$(\forall x)(x \in A) \Rightarrow (g_2 \leq x) \Rightarrow g_2 \leq g_1$$

па је

$$g_1 = g_2 .$$

2. Слично као под 1.

Дефиниција 2: 1.Доњу границу g скупа A која му припада зовемо **минимум скупа** A и пишемо

$$\min A = g .$$

2.Горњу границу G скупа A која му припада зовемо **максимум скупа** A и пишемо

$$\max A = G .$$

Теорема 2: 1. Ако скуп A има доњу границу, онда постоји максимум скупа S свих доњих граница.

2. Ако скуп A има горњу границу, онда постоји минимум скупа T свих горњих граница.

Доказ: Ову теорему доказујемо на основу представљања реалних бројева помоћу децималних записа.

1. Ако постоји доња граница скупа A онда постоји и $g_1 \in$ који је доња граница. Разликујемо два случаја:

1. $1'$. $g_1 = \min A$. Тада је $g_1 = \max S$. Заиста, ако је g произвољна доња граница од A, онда је

$$(\forall x)(x \in A) \Rightarrow (g \leq x) \Rightarrow g \leq g_1.$$

Дакле

$$(\forall g)(g \in S) \Rightarrow g \leq g_1,$$

што значи да је g_1 једна горња граница од S. Како је при томе $g_1 \in S$, то значи да је

$$g_1 = \max S.$$

1. $2'$. $(\forall x)(x \in A) \Rightarrow (g_1 \leq x)$.

Формираћемо низ g_2, $g_3, \ldots, g_n, \ldots$ на следећи начин:

$1''$. Нека је k_1 природан број или нула који задовољава релацију:

$(\forall x)(x \in A)(g_1 + k_1 \leq x) \wedge (\exists x)(x \in A)(x < g_1 + k_1 + 1)$.

Ставимо $g_2 = g_1 + k_1$. Ако је $g_2 = \min A$, поступак се обуставља и доказ је даље као под $1'$, само за g_2. Ако није $g_2 = \min A$, идемо на следећи корак.

$2''$. Нека је k_2 елемент скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ који задовољава релацију

$(\forall x)(x \in A)(g_2 + 0{,}k_2 \leq x) \wedge (\exists x)(x \in A)(x < g_2 + 0{,}k_2 + 0{,}1)$.

Узмимо $g_3 = g_2 + 0{,}k_2$. Ако је $g_3 = \min A$, поступак се обуставља и доказ је даље као под $1'$, само за g_3. Ако није $g_3 = \min A$, идемо на следећи корак „n“.

Нека је k_n елемент скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ који задовољава релацију

$$(\forall x)(x \in A)(g_n + 0{,}0\ldots0k_n \leq x) \wedge (\exists x)(x \in A)(x < g + 0{,}0\ldots0k_n + 0{,}0\ldots01).$$

Ставимо $g_{n+1} = g_n + 0{,}0\ldots0k_n$. Ако је $g_n = \min A$, поступак се обуставља и доказ је даље као под $1'$, само за g_{n+1}. Ако није $g_{n+1} = \min A$, идемо на следећи корак итд.

Нека је g децималан број који за сваки природан број $n(n \geq 2)$ има првих $n-2$ децимала истих као и g_n. Тада је $g = \max S$.

Пре свега, из самог начина формирања низа $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n, \ldots$ следи да је g доња граница скупа A.

Претпоставимо сада да је g произвољан реалан број за који важи $g' > g$. Како су g' и g децимални бројеви, то из релације $g' > g$ следи да постоји природан број j такав да g' и g имају $(j-1)-$ву исту децималу, док је

$$z_j' > z_j,$$

при чему је z_j' $j-$децимала од g' а z_j $j-$децимала од g.

С обзиром да из претходног поступка следи

$$(\exists x)(x \in A)\left(x < g_{j+2} + 0,0\ldots 01\right),$$

јер g_{j+2} и g имају истих првих j децимала, имамо

$$(\exists x)(x \in A)(x < g').$$

Сваки број g' $(g' > g)$ није доња граница скупа A, па је према томе $g = \max S$.

2. Доказује се слично као под 1.

На основу претходног тврђења можемо увести нове појмове:

Дефиниција 3: 1. Ако за скуп A важи да је

$$(\forall n)(n \in \quad) \wedge (\exists x)(x \in A)(x < -n)$$

онда кажемо да скуп A нема доње границе и пишемо $\inf A = -\infty$.

2. Ако скуп A има доњу границу, онда највећу доњу границу скупа A зовемо инфимум од A и пишемо

$$\inf A = \max\left\{g \mid (\forall x)(x \in A)(g \leq x)\right\}.$$

3. Ако за скуп A важи да је

$$(\forall n)(n \in \quad) \wedge (\exists x)(x \in A)(n \leq x)$$

онда кажемо да скуп A нема горње границе и пишемо

$$\sup A = \infty.$$

4. Ако скуп A има горњу границу, онда најмању горњу границу скупа A зовемо супремум од A и пишемо

$$\sup A = \min\left\{G \mid (\forall x)(x \in A)(x \leq G)\right\}.$$

Дефиниција 4: Нека је T скуп свих тачака нагомилавања низа $\{x_n\}_{n\in}$ реалних бројева и $A = \{a_n \mid n \in \quad\}$.

1. Ако је $\inf A = -\infty$, онда пишемо

$$\liminf a_n = -\infty,$$

и читамо „**лимес инфериор** од a_n је минус бесконачност“

2. Ако је $\sup A = \infty$, онда пишемо

$$\limsup a_n = \infty,$$

и читамо „**лимес супериор** од a_n је плус бесконачно“.

3. Ако је скуп A ограничен, онда је

$$\liminf a_n = \inf T$$

и

$$\limsup a_n = \sup T.$$

У употреби су још и ознаке :

$\underline{\lim}_{n\to\infty}$ (**чита се „доњи лимес**“) уместо $\liminf$ и

$\overline{\lim}_{n\to\infty}$ **(чита се „горњи лимес“)** уместо $\limsup$.

Пример 1: 1. Нека је $a_n = \frac{1}{n}(n\in \ )$. Тада је $T = \{0\}$ и $\liminf a_n = \limsup a_n = 0$.

2. Нека је $a_n = 1(n\in \ )$. Тада је $T = \{1\}$ и $\liminf a_n = \limsup a_n = 1$.

3. Нека је $a_n = (-1)^n (n\in \ )$. Тада је $T = \{-1,1\}$ $\liminf a_n = -1$ и $\limsup a_n = 1$

4. Нека је $a_n = n(n\in \ )$. Тада је $T = \theta$ и $\sup A = \infty$, па је $\limsup a_n = \infty$ док $\liminf a_n$ не постоји.

5. Нека је $a_n = -n(n\in \ )$. Тада је $T = \theta$ и $\inf A = -\infty$, па је $\liminf a_n = -\infty$, док $\limsup a_n$ не постоји.

Дефиниција 5: Нека је $\{a_n\}_{n\in}$ низ реалних бројева.

1. Ако постоји реалан број a такав да важи

$$\liminf a_n = \limsup a_n = a,$$

онда кажемо да је низ $\{a_n\}_{n\in}$ конвергентан и пишемо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

и за a кажемо да је гранична вредност (limes) низа $\{a_n\}_{n\in}$, односно да низ $\{a_n\}_{n\in}$ конвергира ка вредности a.

2.Ако не постоји $\liminf a_n$, а $\limsup a_n = \infty$, онда пишемо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty .$$

3. Ако не постоји $\limsup a_n$, а $\liminf a_n = -\infty$, онда пишемо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

4. У случајевима 2. и 3. кажемо да је низ $\{a_n\}_{n\in}$ одређено дивергентан.

5.Ако постоји $\liminf a_n$ и $\limsup a_n$, било да су реални бројеви или да су $-\infty$, или ∞, и при томе

$$\liminf a_n \neq \limsup a_n ,$$

онда кажемо да је низ $\{a_n\}_{n\in}$ неодређено дивергентан.

Пример 2: 1. Низ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in}$ је конвергентан и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Низ $\{1\}_{n\in}$ је конвергентан и $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

3. Низ $\{n\}_{n\in}$ је одређено дивергентан и $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

4. Низ $\{-n\}_{n\in}$ је одређено дивергентан и $\lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.

5. Низ $\left\{(-1)^n\right\}_{n\in}$ је неодређено дивергентан.

6. Низ $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}n + \frac{1-(-1)^n}{2}(-n)\right\}_{n\in}$ је неодређено дивергентан.

Теорема 3: Нека је $\{a_n\}_{n\in}$ низ са позитивним члановима такав да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in$ тако да је

$$n \geq n_0 \Rightarrow (\forall k \in \ )\, a_{n+k} < a_n + \varepsilon$$

тада је низ конвергентан.

Доказ: Из услова тореме, за изабрано $\varepsilon > 0$, одговарајуће $n_0(\varepsilon)$ и фиксирано $n \geq n_0$ имамо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_{n+k} \leq a_n + \varepsilon . \qquad (1)$$

Означимо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = A$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = a$. Како је $a_n > 0$ за $\forall n \in$, то је $0 \leq a \leq A$.

Из релације (1), како је за све $n > n_0$

$$A < a_n + \varepsilon,$$

следи

$$A \le \lim_{n\to\infty} a_n + \varepsilon = a + \varepsilon. \qquad (2)$$

Неједнакост (2) важи за све $\varepsilon > 0$. Значи, $A \le a$, одакле добијамо $A = a$, те је низ $\{a_n\}_{n\in}$ конвергентан.

Теорема 4: Нека су $\{a_n\}_{n\in}$ и $\{b_n\}_{n\in}$ ограничени низови такви да је $a_n \le b_n$ за свако $n \ge n_0$. Тада је

$$\underline{\lim}\, a_n \le \underline{\lim}\, b_n \text{ и } \overline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, b_n.$$

Доказ: За сваки $n \ge n_0$ је $\inf\{a_k\} \le \inf\{b_k \mid k \ge n\}$ и како је

$$\underline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k\} = \sup\inf\{a_k \mid k \ge n, n\in \quad\},$$

то је

$$\underline{\lim}\, a_n \le \underline{\lim}\, b_n.$$

На исти начин се доказује да је за свако $n \ge n_0$ $\sup\{a_k\} \le \sup\{b_k \mid k \ge n\}$ и због

$$\overline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k\} \le \lim_{n\to\infty} \sup\{b_k\} = \overline{\lim}\, b_n \left(n\in \quad, k \ge n\right).$$

Напомена. Уочене неједнакости важе и за произвољне низове у проширеном скупу реалних бројева $\overline{} = \ \cup(-\infty,\infty)$.

Теорема 5: Нека су $\{a_n\}_{n\in}$ и $\{b_n\}_{n\in}$ ограничени низови ненегативних бројева. Тада важи неједнакост

$$\underline{\lim}\, a_n \cdot \underline{\lim}\, b_n \le \underline{\lim}\left(a_n b_n\right) \le \underline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n \le \overline{\lim}\left(a_n b_n\right) \le \overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n. \qquad (1)$$

Доказ: 1. Докажимо да је

$$\underline{\lim}\, a_n \cdot \underline{\lim}\, b_n \le \underline{\lim}\left(a_n b_n\right)$$

Како је

$$\underline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k \mid k \ge n\} \text{ и } \underline{\lim}\, b_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{b_k \mid k \ge n\}$$

и за сваки $n\in$ и за сваки $k \ge n$ је

$$\inf\{a_k \mid k \ge n\} \le a_k,\ \inf\{b_k \mid k \ge n\} \le b_k,$$

одакле следи

$$\inf\{a_k\}\cdot\inf\{b_k\}\le a_k b_k \text{ за свако } k\ge n,$$

па је и

$$\inf\{a_k\}\cdot\inf\{b_k\}\le\inf\{a_k b_k\}(k\ge n)\ ,$$

то је

$$\lim_{n\to\infty}\left(\{a_k\}\cdot\{b_k\}\right)=\lim_{n\to\infty}\inf\{a_k\}\cdot\lim_{n\to\infty}\inf\{b_k\}\le\lim_{n\to\infty}\inf\{a_k b_k\}(k\ge n),$$

тј.

$$\underline{\lim}\,a_n\cdot\underline{\lim}\,b_n\le\underline{\lim}\left(a_n b_n\right).$$

2. Докажимо да је

$$\underline{\lim}\left(a_n b_n\right)\le\underline{\lim}\,a_n\cdot\overline{\lim}\,b_n .$$

Уведимо ознаку $d_n=\sup\{b_k \mid k\ge n\}, n\in\ $. Тада је

$$\overline{\lim}\,b_n=\lim_{n\to\infty}d_n=\inf\{d_n \mid n\in\ \}.$$

За сваки $n\in\ $ и за сваки $k\ge n$ је $b_k\le d_n$, па је $a_k b_k\le a_k d_n$ за свако $k\ge n$, одакле следи

$$\inf\{a_k b_k\}\le\inf\{a_k d_n\}=d_n\inf\{a_k\}(k\ge n)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\inf\{a_k b_k\}\le\lim_{n\to\infty}\left(d_n\cdot\inf\{a_k\}\right)=\lim_{n\to\infty}d_n\cdot\lim_{n\to\infty}\inf\{a_k\}(k\ge n),$$

тј.

$$\underline{\lim}\left(a_n b_n\right)\le\underline{\lim}\,a_n\cdot\overline{\lim}\,b_n .$$

3. Докажимо да је

$$\underline{\lim}\,a_n\cdot\overline{\lim}\,b_n\le\overline{\lim}\left(a_n b_n\right).$$

Уведимо ознаку $c_n=\inf\{a_k \mid k\ge n\}, n\in\ $. Тада је $\underline{\lim}\,a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$. За сваки $n\in\ $ и за сваки $k\ge n$ је $a_k\ge c_n$, па је и $a_k b_k\ge c_n b_k$ за свако $k\ge n$. Следи да је

$$\sup\{a_k b_k\}\ge\sup\{c_n b_k\}=c_n\sup\{b_k\}(k\ge n)$$

као и

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{a_k b_k\}\ge\lim_{n\to\infty}\left(c_n\cdot\sup\{b_k\}\right)=\lim_{n\to\infty}c_n\cdot\lim_{n\to\infty}\sup\{b_k\}(k\ge n),$$

што да је

$$\overline{\lim}\left(a_n b_n\right) \geq \underline{\lim}\, a_n \overline{\lim}\, b_n .$$

4. Докажимо да је

$$\overline{\lim}\left(a_n b_n\right) \leq \overline{\lim}\, a_n \overline{\lim}\, b_n .$$

За сваки $n \in \mathbb{N}$ и сваки $k \geq n$ је $a_k \leq \sup\{a_k\}(k \geq n), b_k \leq \sup\{b_k\}$ онда следи

$$a_k b_k \leq \sup\{a_k\} \cdot \sup\{b_k\}(k \geq n),$$

па је и

$$\sup\{a_k b_k\} \leq \sup\{a_k\} \cdot \sup\{b_k\}(k \geq n).$$

Стога је,

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{a_k b_k\} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sup\{a_k\} \cdot \sup\{b_k\}\right) = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k\} \cdot \lim_{n\to\infty} \sup\{b_k\}(k \geq n),$$

тј.

$$\overline{\lim}\left(a_n b_n\right) \leq \overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n .$$

Напомена 1. Неједнакост (1) је тачна и у проширеном скупу реалних бројева $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (-\infty, \infty)$ уколико су производи $\underline{a}\underline{b}$, $\underline{a}\overline{b}$ и $\overline{a}\overline{b}$ дефинисани, тј. ако нису облика $0 \cdot \infty$.

Напомена 2. Из доказане неједнакости непосредно следи да је за конвергентан низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ненегативних бројева и произвољан низ $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\underline{\lim}\left(a_n b_n\right) = \lim a_n \cdot \underline{\lim}\, b_n \text{ и } \overline{\lim}\left(a_n b_n\right) = \lim a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n .$$

Напомена 3. За произвољан низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ позитивних бројева важе следеће једнакости у $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\underline{\lim}\left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\overline{\lim}\, a_n} \text{ и } \overline{\lim}\left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\underline{\lim}\, a_n} .$$

Ако је $\underline{\lim}\, a_n > 0$ и $\overline{\lim}\, a_n < \infty$ тврђење следи непосредно из доказане неједнакости

$$1 = \underline{\lim}\left(a_n \cdot \frac{1}{a_n}\right) \leq \underline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim} \frac{1}{a_n} \leq \overline{\lim}\left(a_n \cdot \frac{1}{a_n}\right) = 1$$

и

$$1 = \underline{\lim}\left(\frac{1}{a_n} \cdot a_n\right) \leq \underline{\lim} \frac{1}{a_n} \cdot \overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\left(\frac{1}{a_n} \cdot a_n\right) = 1.$$

Ако је $\underline{\lim}\, a_n = 0$ постоји подниз $\{a_{n_k}\}_{n\in}$ низа $\{a_n\}_{n\in}$ који конвергира 0. Тада $\frac{1}{a_{n_k}} \to \infty$ и $\overline{\lim}\frac{1}{a_n} = \infty$. Ако је $\overline{\lim}\, a_n = \infty$, низ $\{a_n\}_{n\in}$ неграничен низ $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n\in}$ има тачку нагомилавања 0 и $\underline{\lim}\frac{1}{a_n} = 0$.

Горња и доња гранична вредност низа скупова

Појмови горње и доње граничне вредности (лимеса) низа могу се пренети и на низове скупова.

Нека је $\{A_n\}_{n\in}$ низ скупова. Лимес супериор се дефинише као скуп свих елемената који се налазе у бесконачно много чланова, а лимес инфериор као скуп свих елемената који се налазе у свим, сем у највише коначно много чланова тог низа скупова.

Уколико су та два скупа једнака, за низ скупова $\{A_n\}_{n\in}$ кажемо да је конвергентан и важи

$$\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \lim A_n .$$

Теорема 6: За произвољан низ скупова $\{A_n\}_{n\in}$ важи:

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \text{ и } \overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k .$$

Доказ: Из $x\in \overline{\lim}\, A_n$ следи да за сваки природан број n постоји $k \geq n$ такав да је $x\in A_k$, одкле добијамо да $x\in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ за свако n, па је према томе

$$x\in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k .$$

Тиме смо показали да је

$$\overline{\lim}\, A_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k .$$

Претпоставимо сада да је

$$x\in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k .$$

Дакле, добијамо да је $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ за свако $n,$ па за сваки природан број n постоји $k \geq n$ такав да је $x \in A_k$, одакле следи $x \in \overline{\lim} A_n$. На тај начин смо добили:

$$\overline{\lim} A_n \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k .$$

Из $x \in \underline{\lim} A_n$ следи да постоји природан број n такав да је за свако $k \geq n$ $x \in A_k$, одакле добијамо да $x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, па је према томе

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_k .$$

Тиме смо показали да је

$$\underline{\lim} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k .$$

Претпоставимо сада да

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k .$$

Дакле, добијамо да постоји n такав да је $x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, па за свако $k \geq n$ важи $x \in A_k$, одакле следи $x \in A_n$.

На тај начин смо добили

$$\underline{\lim} A_n \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k .$$

Теорема 7: За произвољан низ скупова $\{A_n\}_{n\in}$ важи:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Доказ: Из $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ следи да x припада свим члановима низа па према томе $x \in \underline{\lim} A_n$.

Ако је $x \in \underline{\lim} A_n$ онда се x налази у бесконачно много чланова низа, па према томе $x \in \overline{\lim} A_n$. Из $x \in \overline{\lim} A_n$ следи да се x налази у бар једном члану низа, па $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Низ скупова $\{A_n\}_{n\in}$ је рстући (опадајући) ако за сваки природан број n важи $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\left(A_n \supseteq A_{n+1}\right)$. Низ скупова је монотон ако је растући или опадајући.

Теорема 8: Сваки монотон низ скупова је конвергентан.

1.Ако је $\{A_n\}_{n\in}$ растући низ, тада је $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2. Ако је $\{A_n\}_{n\in}$ опадајући низ, тада је $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Доказ: Према теореми 7. увек важи $\underline{\lim}\, A_n \subseteq \overline{\lim}\, A_n$. Остаје нам да докажемо обрнуте инклузије.

Нека је $\{A_n\}_{n\in}$ растући низ скупова. Из $x \in A_n$ следи да $x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, па је

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_k = \underline{\lim}\, A_n$$

односно

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \underline{\lim}\, A_n .$$

Из теореме 7. добијамо обрнуте инклузије па према томе важи

$$\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Нека је $\{A_n\}_{n\in}$ опадајући низ скупова .Из $x \in A_n$ следи да $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ одакле је

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim}\, A_n$$

па је

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq \overline{\lim}\, A_n$$

Из теореме 7. добијамо обрнуте инклузије па према томе важи

$$\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Теорема 9: Ако су $\{A_n\}_{n\in}$ и $\{B_n\}_{n\in}$ два низа скупова таква да је за свако n

$$A_n \subseteq B_n .$$

Тада је

$$\underline{\lim}\, A_n \subseteq \underline{\lim}\, B_n \text{ и } \overline{\lim}\, A_n \subseteq \overline{\lim}\, B_n .$$

Доказ: Из $x \in \underline{\lim}\, A_n$ да се x налази у бесконачно много чланова низа $\{A_n\}_{n\in}$.
Из $x \in A_n$ следи $x \in B_n$, за сваки природан број n, па се према томе x налази у бесконачно много чланова низа $\{B_n\}_{n\in}$, одакле следи $x \in \underline{\lim}\, B_n$. Према томе важи:

$$\underline{\lim}\, A_n \subseteq \underline{\lim}\, B_n .$$

Из $x \in \overline{\lim}\, A_n$ следи да се x налази у свим, сем у највише коначно много, чланова низа $\{B_n\}_{n\in}$, одакле следи $x \in \overline{\lim}\, B_n$. Према томе важи

$$\overline{\lim}\, A_n \subseteq \overline{\lim}\, B_n .$$

Теорема 10: Ако су $\{A_n\}_{n\in}$ и $\{B_n\}_{n\in}$ два низа скупова тада је:

1. $\left(\overline{\lim} A_n\right)^c = \underline{\lim}\left(A_n^c\right)$;
2. $\left(\underline{\lim} A_n\right)^c = \overline{\lim}\left(A_n^c\right)$;
3. $\underline{\lim}\left(A_n \cap B_n\right) = \left(\underline{\lim} A_n\right) \cap \left(\underline{\lim} B_n\right)$;
4. $\overline{\lim}\left(A_n \cup B_n\right) = \left(\overline{\lim} A_n\right) \cup \left(\overline{\lim} B_n\right)$;
5. $\left(\underline{\lim} A_n\right) \cup \left(\underline{\lim} B_n\right) \subseteq \underline{\lim}\left(A_n \cup B_n\right)$;
6. $\overline{\lim}\left(A_n \cap B_n\right) \subseteq \left(\overline{\lim} A_n\right) \cap \left(\overline{\lim} B_n\right)$;
7. $A \quad \underline{\lim}\, A_n \subseteq \overline{\lim}\left(A \quad A_n\right)$;
8. $A \quad \overline{\lim}\, A_n \subseteq \overline{\lim}\left(A \quad A_n\right)$.

Доказ: 1. Коришћењем Де Моргановых правила добијамо

$$\left(\overline{\lim} A_n\right)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \underline{\lim}\left(A_n^c\right).$$

2. Коришћењем Де Моргановых правила добијамо

$$\left(\underline{\lim} A_n\right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c = \overline{\lim}\left(A_n^c\right).$$

3. Из $x \in \underline{\lim}\left(A_n \cap B_n\right)$ следи да се x налази у свим, сем у највише коначно много, чланова низа $\left(A_n \cap B_n\right)$.

Према томе постоји природан број m такав да за свако $n \geq m$, $x \in A_n$ и $x \in B_n$. Значи x се налази у свим, сем у највише коначно много чланова низа $\left\{A_n\right\}_{n\in}$ и да се x налази у свим, сем у коначно много, чланова низа $\left\{B_n\right\}_{n\in}$. Према томе

$$x \in \left(\underline{\lim}\, A_n\right) \cap \left(\underline{\lim}\, B_n\right).$$

4. Из $x \in \overline{\lim}\left(A_n \cup B_n\right)$ следи да се x налази у бесконачно много чланова низа $\left(A_n \cup B_n\right)$. Према томе за сваки природан број m постоји природан број $n \geq m$ такав да је $x \in A_n$ или $x \in B_n$. Одакле следи да се x налази у бесконачно много чланова низа $\left\{A_n\right\}_{n\in}$ или да се x налази у бесконачно много чланова низа $\left\{B_n\right\}_{n\in}$. Према томе:

$$x \in \left(\overline{\lim}\, A_n\right) \cup \left(\overline{\lim}\, B_n\right).$$

У теореми 10. $-$ за тачке 5, 6, 7 и 8. могу се конструисати контра примери из којих се се види да не важе обрнуте инклузије, одакле следи да у општем случају не важе одговарајуће једнакости. На пример, ако је

$$A = \{a\} \text{ и}$$

$$A_n = \begin{cases} \{a,b\}, & n=2k, \\ \{b\}, & n=2k+1, \end{cases} \text{ онда је: } A \quad A_n = \begin{cases} \{b\}, & n=2k+1 \\ \{a,b\}, & n=2k, \end{cases}$$

одакле следи $\overline{\lim}\, A_n = \{a,b\}$, $A \quad \overline{\lim}\, A_n = \{b\}$ и $\overline{\lim}\left(A \quad A_n\right) = \{a,b\}$, па према томе у 5.8. не важи једнакост.

Нека је A произвољан скуп реалних бројева. Са χ_A означавамо карактеристичну функцију скупа A дефинисану са:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \in A^c \\ 1, & x \in A. \end{cases}$$

Теорема 11: Нека је $\{A_n\}$ произвољан низ скупова. Тада је

$$\overline{\lim}\,\chi_{A_n}(x) = \chi_{\overline{\lim} A_n}.$$

Доказ: Ако је $\overline{\lim}\chi_{A_n}(x) = 1$ онда функције χ_{A_n} узимају бесконачно много пута вредност 1 у тачки x, одакле следи да се x налази у бесконачно много чланова низа $\{A_n\}$ то јест $x \in \overline{\lim} A_n$, па је према томе $\chi_{\overline{\lim} A_n} = 1$.

Ако је $\overline{\lim}\chi_{A_n}(x) = 0$ онда функције χ_{A_n} узимају коначно много пута вредност 1 у тачки, одакле следи $x \notin \overline{\lim}\, A_n$ па је према томе $\chi_{\overline{\lim}\, A_n} = 0$.

II ЛЕБЕГОВА МЕРА И ЛЕБЕГОВ ИНТЕГРАЛ НА СКУПУ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

Уовом делу рада дефинишемо: $\sigma-$прстен, адитивну функцију, Лебегову меру, спољну меру на скупу реалних бројева, мерљиве функције и Лебегов интеграл. Наводимо и неке значајне теореме без доказа које користимо у даљем раду.

Колекција подскупова $\mathcal{R}$ непразног скупа X, зове се $\sigma-$прстен ако:

а) Из $A, B \in \mathcal{R}$ следи $A \bigcap B \in \mathcal{R}$

б) Из $A_n \in \mathcal{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ следи

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

Функција $f : \mathcal{R} \to (-\infty, \infty)$ је адитивна ако из $A, B \in \mathcal{R}$ и $A \bigcap B = \varnothing$ следи $f(A \bigcup B) = f(A) + f(B)$, а $\sigma-$адитивна ако из $A_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$ следи

$$f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n).$$

Лебегова мера. Нека је $\mathcal{R}$ $\sigma-$прстен и $\lambda : \mathcal{R} \to (0, \infty)$ $\sigma-$адитивна функција. Ако за сваки растући низ скупова $A_n \in \mathcal{R}$, $n = 1, 2 \ldots$ важи

$$\lim \lambda(A_n) = \lambda(\cup A_n)$$

онда је λ Лебегова мера на $\sigma-$прстену $\mathcal{R}$.

Спољна мера на скупу реалних бројева. Коначне уније отворених интервала зову се елементарни скупови и они чине прстен елементарних скупова. Мера интервала се дефинише као његова дужина. Како се сваки елементарни скуп A може представити као унија дисјунктних интервала, тј.

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

тада се његова мера дефинише са

$$\lambda(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k).$$

За било који скуп B подскуп скупа реалних бројева, његова спољна мера дефинише се релацијом

$$m^*(B) = \inf(A_n),$$

где је A_n, пребројив прекривач скупа B елементарним скуповима а инфимум се узима преко свих таквих покривача.

За скупове A и B подскупове скупа реалних бројева, нека је

$$d(A,B) = m^*(A \quad B)$$

где је са $A \quad B$ означена симетрична разлика скупова A и B.

Тада пресликавање d са партитивним скупом реалних бројева образује псеудо–метрички простор, тј. испуњене су све метричке аксиоме осим што из $d(A,B) = 0$ не следи $A = B$.

А подскуп скупа реалних бројева за који постоји низ $\{A_n\}_{n \in N}$ мерљивих скупова таквих да је

$$A = \lim A_n,$$

где се конвергенција узима у смислу метрике d, назива се коначно мерљив, а скуп који је пребројива унија коначно мерљивих скупова зове се мерљив скуп.

Колекција мерљивих скупова означава се са M .

Колекција M мерљивих скупова је $\sigma-$прстен а $m*$ на M је $\sigma-$адитивна функција.

Рестрикција спољне мере на колекцију M зове се Лебегова мера и обиљежава са λ. Скуп A, за који је $\lambda(A) = 0$, зове се скуп мере нула. За неку особину везану за реалне бројеве, која не важи само у тачкама скупа A, где је $\lambda(A) = 0$ каже се да важи скоро свуда на скупу реалних бројева.

Мерљиве функције. Нека је са означен скуп реалних бројева.

Функција $f : \quad \to \quad$, је мерљива ако и само ако су скупови

$$\{x \mid f(x) > c\}$$

мерљиви за свако $c \in \quad$.

Теорема 1: Нека је f_n низ мерљивих функција. За $\forall x \in \quad$ дефинишимо:

$$g_1(x) = \sup f_n(x),\ g_2(x) = \inf f_n(x), h_1(x) = \underline{\lim} f_n(x),\ \text{и}\ h_2(x) = \overline{\lim} f_n(x).$$

Тада су функције g_1, g_2, h_1 и h_2 такође мерљиве.

Теорема 2: Ако су f и g мерљиве а $F: \ {}^2 \to \ $ непрекидна функција онда је $h(x) = F\left(f(x), g(x)\right)$ мерљива функција.

Специјално $f+g,\ f-g,\ fg,$ и f/g (ако је $g(x) \neq 0,\ x \in \ $) су мерљиве функције.

Лебегов интеграл. Карактеристична функција скупа E се дефинише са

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0, & x \in E^c \\ 1, & x \in E. \end{cases}$$

Коначна линеарна комбинација карактеристичних функција

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}(x)$$

где су E_k дисјунктни скупови, назива се проста функција. Примећујемо да је $s(x)$ мерљива ако и само ако су сви E_k мерљиви.

Нека је $s(x)$ проста ненегативна мерљива функција дефинисана са

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}(x).$$

Интеграл функције $s(x)$ дефинише са

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{n}} s \, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k).$$

Ако је $f(x)$ мерљива на и ненегативна, њен интеграл је

$$\int f \, d\lambda = \sup_{0 \le s \le f} \int s \, d\lambda$$

где се супремум узима преко свих мерљивих простих функција које задовољавају неједнакост $0 \le s(x) \le f(x)$ за свако $x \in \ $.

Ако $f: \ \to \ $, њен позитивни део се дефинише са

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases},$$

а њен негативни део са

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) > 0 \\ f(x), & f(x) \le 0 \end{cases}.$$

Ако је f мерљива и ако је интеграл $\int f_+ d\lambda$ или интеграл $\int f_- d\lambda$ коначан, тада је интеграл функције дефинсан са

$$\int f\, d\lambda = \int f_+ d\lambda + \int f_- d\lambda .$$

Ако су оба интеграла коначна, функција f је интеграбилна.

Регуларност Лебегове мере. Нека је $A \subseteq$ Лебег мерљив скуп.

а) За свакок $\varepsilon > 0$ постоји отворен скуп $V \supseteq A$ такав да је $\lambda(V \setminus A) < \varepsilon$, а ако је A коначне мере то се своди на $\lambda(A) > \lambda(V) - \varepsilon$;

б) Ако је A коначне мере онда за свако $\varepsilon > 0$ постоји компактан скуп $K \subseteq A$ такав да је $\lambda(A \setminus K) = \lambda(A) - \lambda(K) < \varepsilon$.

Теорема Лузина. Нека је $f : (a,b) \to$ мерљива функција, и нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји мерљив скуп $A \subseteq (a,b)$ такав да је $\lambda((a,b) \setminus A) < \varepsilon$, и f је непрекидна на A.

Теорема Јегорова. Нека је $f_n : [a,b] \to$ низ функција који конвергира ка f тачка по тачка, и нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји мерљив скуп $A \subseteq [a,b]$ такав да је $\lambda([a,b] \setminus A) < \varepsilon$ и такав да f_n конвергира ка f равномерно на скупу A.

III ЈЕДНА НЕЈЕДНАКОСТ О ЛЕБЕРГОВОЈ МЕРИ

У овом делу рада наводимо неке познате теореме о и неједнакостима Лебегове мере као и њихове доказе који су објавили Иван Д.Аранђеловић и Дојчин С.Петковић.

Нека је λ ознака за Лебегову меру на скупу реалних бројева.

Теорема 1: Ако је $\{A_n\}$ низ Лебег мерљивих скупова у **,** тада је:

1. $\lambda\left(\underline{\lim} A_n\right) \le \underline{\lim}\lambda\left(A_n\right)$, док за неједнакост;
2. ако је $\lambda\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) < \infty$ за бар једну вредност n, онда важи $\lambda\left(\overline{\lim} A_n\right) \le \overline{\lim}\lambda\left(A_n\right)$.

Доказ: 1. Нека је $B_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_n,\ n = 1, 2, \ldots$ тада је B_n растући низ скупова који конвергира ка скупу $B = \underline{\lim} A_n$. Пошто је Лебегова мера непрекидна одоздо, добијамо да је $\lambda(B) = \lim \lambda(B_n)$. Како је мера растућа функција и $B_n \le A_i$ за $i \ge n$, па је $\lambda(B_n) \le \lambda(A_i)$ за $i \ge n$ односно $\lambda(A_n) \le \inf \lambda(B_i)(i \ge n)$, одакле се кад $n \to \infty$ добија тражена неједнакост.

2. Нека је $C_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_n, n = 1, 2, \ldots$, тада је C_n опадајући низ скупова који конвергира скупу $C = \overline{\lim} A_n$. Пошто је Лебегова мера непрекидна одозго на коначним скуповима добијамо да је $\lambda(C) = \lim \lambda(C_n)$. Како је мера растућа функција и $A_i \le C_n$ за $i \ge n$ па је $\lambda(A_i) \le \lambda(C_n)$ за $i \ge n$ односно $\sup \lambda(C_i) \le \lambda(A_n)$ за $i \ge n$, одакле се кад $n \mapsto \infty$ добија тражена неједнакост.

У општем случају имамо следећу неједнакост, која је доказана ураду [2]:

Теорема 2: Нека је A мерљив скуп позитивне мере и $\{x_n\}$ ограничен низ реалних бројева. Тада је

$$\lambda(A) \le \lambda\left(\overline{\lim}(x_n + A)\right). \qquad (1)$$

Доказ: Нека је $K \subseteq A$ компактан скуп. Из $\overline{\lim}(x_n + K) \subseteq \overline{\lim}(x_n + A)$ следи $\lambda\left(\overline{\lim}(x_n + K)\right) \le \lambda\left(\overline{\lim}(x_n + A)\right)$, па имамо

$$\lambda(K) = \overline{\lim}\lambda(x_n + K) \le \lambda\left(\overline{\lim}(x_n + K)\right) \le \lambda\left(\overline{\lim}(x_n + A)\right) \qquad (2)$$

Како је $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) \mid K$ компактан подскуп од A$\}$, то из (2) следи (1).

Познати пољски математичар Хуго Штајнхаузен је доказао наредне две теореме .

Теорема 3: Нека је А Лебег мерљив скуп позитивне мере. Тада у А постоје бар две различите тачке чије је међусобно растојање рационалан број.

Доказ. Нека је (q_n) произвољан ограничен низ рационалних бројева, такав да су им чланови различити. Из

$$0<\lambda(\mathrm{A})\leq\lambda\left(\overline{\lim}(A+q_n)\right)$$

следи да скуп $\overline{\lim}(A+q_n)$ није празан. Тако постоје $p_{1,}\ p_2\in A$ и $i\,,j$ такви да је $p_1+q_1=p_2+q_2$, што повлачи $\left|p_1-p_2\right|=\left|q_i-q_j\right|$.

Теорема 4: Нека је $A\subseteq$ Лебег мерљив скуп позитивне мере. Тада његов скуп разлика $A-A=\{x\,|\,x=a_1-a_2,a_1,\ a_2\in A\}$ садржи неку околину нуле.

Доказ: Претпоставимо да тврдња није тачна. Тада постоји компактан скуп позитивне мере $K\subseteq A$такав да разлика $K-K$ не садржи околину нуле. Одатле постоји конвергентан низ $\{x_n\}\subseteq$ такав да је $\lim x_n=0$ и $\{x_n\}\bigcap(K-K)=\varnothing$. Из

$$0<\lambda(K)\leq\lambda\left(\overline{\lim}(K-x_n)\right)$$

следи да је скуп $\overline{\lim}(K-x_n)$ непразан што повлачи да постоји $t\in\mathbf{R}$ такав да $\{x_n+t\}\in K$ за бесконачно много вредности n. Из $\lim x_n=0$ следи да $t\in K$, јер је K затворен. Тако постоје бесконачни низови $\{a_j\}\in K$ и $\{x_{n_j}\}\subseteq\{x_n\}$ такви да је $x_{n_j}=a_j-t\in K-K$, што је контрадикција.

У овом делу рада дајемо даље примене ове неједнакости. Прва од њих је следећи доказ непрекидности мерљивих решења Кошијеве функционалне једначине. Први доказ ове тврдње дао је М. Фреше [4], али он се ослања на *аксиому избора*. Доказе независне од аксиоме избора дали су С. Банах [2] и В. Сјерпински [9].

Теорема 5: (М. Фреше [4]) Нека је $f:\quad\to\quad$ мерљива функција таква да је

$$f(x+y)=f\left(x\right)+f\left(y\right),$$

за ма које $x,y\in\quad$. Тада је f непрекидна функција.

Доказ: Претпоставимо да f није непрекидна. Тада постоје $\varepsilon>0,\ x_*\in\quad$ и конвергентан низ $\left\{x_n\right\}\subseteq\quad$ такав да је $\lim x_n=x_*$ и $\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_*\right)\right|>\varepsilon$. Тада, према теореми Лузина, постоји компактан скуп позитивне мере K такав да је f непрекидна на K. Низ $\left\{x_n\right\}$ је ограничен, јер је конвергентан. Тада, према Теореми 2, имамо

$$\lambda\left(\overline{\lim}\left(K-x_n\right)\right)\geq\lambda\left(K\right)>0,$$

што повлачи да је

$$\lambda\left(\overline{\lim}\left(K-x_n\right)\right)\neq\varnothing$$

Тако, постоји $t\in\quad$ и подниз $\left\{x_{n_j}\right\}\subseteq\left\{x_n\right\}$ такав да је $\left\{t+x_{n_j}\right\}\subseteq K$. Из $x_{n_j}\to x_*$ следи $t+x_*\in K$, јер је K затворен.

Тако је

$$\lim\left(f\left(x_{n_j}+t\right)-f\left(x_*+t\right)\right)=0,$$

јер је f непрекидна на K. Отуда

$$\lim\left(f\left(x_{n_j}+t\right)-f\left(x_*+t\right)\right)=\lim\left(f\left(x_{n_j}\right)-f\left(x_*\right)\right)=0,$$

што је контрадикција.

Теорема 6. (Ј. Карамата[7]) Нека је $f: \quad \to \quad$ мерљива функција таква да је

$$\lim_{s\to+\infty}\left[f(s+t)-f(s)\right]=0 \quad ,$$

за све $t\in$. Тада је

$$\lim_{s\to+\infty}\ \sup_{t\in[a,b]}\left[f(s+t)-f(s)\right]=0,$$

за произвољне $a,b\in$ такве да је $a<b$.

Доказ: Користећи теорему Јегорова, следи да за све $a,b\in$ $(a<b)$ постоји мерљив скуп $A\subseteq[a,b]$ позитивне мере такав да је

$$\lim_{s\to+\infty}\ \sup_{t\in A}\left[f(t+s)-f(s)\right]=0.$$

Узимамо сада да конвергенција није равномерна на $[a,b]$. Тада постоји

$\varepsilon>0,\{x_n\}\subseteq[a,b],\{y_n\}\subseteq$, такви да је $\lim y_n=\infty$ и

$$\lim\left[f(x_n+y_n)-f(y_n)\right]>\varepsilon.$$

Према Теореми 2. имамо

$$\lambda\left(\overline{\lim}(A-x_n)\right)>\lambda(A)>0,$$

што повлачи да постоји $t\in$ и подниз $\left\{x_{n_j}\right\}\subseteq\{x_n\}$ такав да је $\left\{t+x_{n_j}\right\}\subseteq A$. Тада је

$$\left|f\left(x_{nj}+y_{nj}\right)-f\left(y_{nj}\right)\right|\le\left|f\left(x_{n_j}+t+y_{n_j}-t\right)-f\left(y_{n_j}-t\right)\right|+\left|f\left(y_{n_j}-t\right)-f\left(y_{n_j}\right)\right|.$$

Сада

$$\lim\left|f\left(x_{n_j}+t+y_{n_j}-t\right)-\left(f\left(y_{n_j}-t\right)\right)\right|=0,$$

јер $\left\{t+x_{n_j}\right\}\subseteq A$ и $\lim\left(y_{n_j}-t\right)=\infty$.

Из

$$\lim\left(f\left(y_{n_j}-t\right)-f\left(y_{n_j}\right)\right)=0,$$

следи

$$\lim\left(f\left(x_{n_j}+y_{n_j}\right)-f\left(y_{n_j}\right)\right)=0,$$

што је контрадикција.

IV ЛЕВЕЛ СКУПОВИ И ЕПИ ЛИМЕСИ

У овом делу рада дефинишемо епи конвергенцију, PK-конвергенцију и левел низове и доказујемо две теореме на основу радова: Rogera J-B-Wetsa, Geralda Beera, R.T.Rockafellara.

Дефиниција 1: Нека је дата реална функција $f : X \to \overline{\ }$ на метричком простору X . Функцију f зовемо **полунепрекидна одоздо** под условом да је њен епиграф

$$epi\ f = \{(x,\alpha) \mid x \in X, \alpha \in \quad , \alpha \geq f(x)\}$$

затворен подскуп од $X \times$. Аналогно f је **полунепрекидна одозго** под условом да за свако реално α левел низ у тачки α функције f ,

$$lev(f,\alpha) \equiv \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$$

је затворен скуп од X .

Дефиниција 2: За низ $\{f_n\}$ полунепрекидних функција одоздо на метричком простору (X,d) кажемо да **епи конвергира** ка функцији f и пишемо $f = e - \lim f_n$, за свако $x \in X$.

За свако $x \in X$, важе следећа два услова:

Ако $\{x_n\}$конвергира ка x, онда је $f(x) \leq \liminf f_n(x_n)$; (1)

Постоји низ $\{x_n\}$ који конвергира ка x, такав да је $f(x) = \lim f_n(x_n)$. (2)

Дефиниција 3: За неке затворене или могуће празне подскупове $A, A_{1,} A_2, \ldots$ од X конвергенција $\{A_n\}$ по Painleve-Kuratowski се дедефнише ако је испуњен услов

$$A = LiA_n = LsA_n$$

где је

$LiA_n = \{x \in X \mid$да постоји низ $\{a_n\}$ који конвергира ка x тако да је $a_n \in A_n$ за коначно много n $\}$

$LsA_n = \{x \in X \mid$да постоје $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$и $a_k \in A_{n_k}$ такви да низ $\{a_k\}$ конвергира ка x $\}$.

Када је $A = LiA_n = LsA_n$, онда пишемо $A = PK - \lim A_n$.

Значи да је низ $\{f_n\}$ епи конвергентан ка f ако и само ако $epi\ f = PK - \lim epi\ f_n$.

Уколико није назначено подразумевамо да је X метрички простор са метриком d.

Кад радимо са метриком, морамо водити рачуна о производу $X \times$, и уводимо следећу метрику $\rho\left[(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2)\right] = \max\left\{d(x_1,x_2),|\alpha_1-\alpha_2|\right\}$.

Лимес инфериор и лимес супериор можемо дефинисати и на следећи начин.

Нека је $\left\{S^\nu \subset \mathbb{R}^n, \nu = 1,2,\dots\right\}$ низ скупова. Његов лимес инфериор и лимес супериор су скупови

$$\liminf_{\nu\to\infty} S^\nu = \left\{x = \lim_{\nu\to\infty} x^\nu \mid x^\nu \in S^\nu\ ,\forall \nu = 1,2,\dots\right\}$$

и

$$\limsup_{\nu\to\infty} S^\nu = \left\{x = \lim_{k\to\infty} x^k \mid x^k \in S^{\nu_k}, = 1,2,\dots \text{.за неке } \{\nu_k\} \in \quad \right\}$$

Дакле, $\liminf\limits_{\nu\to\infty} S^\nu$ је скуп граничних вредности сваког могућег низа $\left\{x^\nu, \nu = 1,2,\dots \text{где је } x \in S^\nu \right\}$ и $\limsup\limits_{\nu\to\infty} S^\nu$ је скуп свих тачака нагомилавања таквих низова.

Очигледно увек важи

$$\liminf_{\nu\to\infty} S^\nu \subset \limsup_{\nu\to\infty} S^\nu.$$

Нека је $\left\{f^\nu, \nu = 1,2,\dots\right\}$ низ функција дефинисаних на ^{n} са вредностима у $\overline{}$.

Епи лимес инфериор и лимес супериор су функције $\left(li_e f^\nu\right)$ и $\left(ls_e f^\nu\right)$ чији епи графици одговарају лимес супериору и лимес инфериору низа скупова $\left\{epi\ f^\nu, \nu = 1,2,\dots\right\}$ где је

$$epi\ g = \left\{(x,\alpha) \mid g(x) \le \alpha\right\}.$$

Из дефиниције и наведене инклузије следи да је

$$li_e f^\nu \le ls_e f^\nu.$$

Низ $\left\{f^\nu, \nu = 1,2,\dots\right\}$ има епи лимес који означавамо са $lm_e f^\nu$ ако важи једнакост

$$lm_e f^\nu = li_e f^\nu = ls_e f^\nu.$$

У том случају кажемо да да низ епи $-$ конвергира ка $lm_e f^\nu$ и пишемо $f^\nu \to_e \left(lm_e f^\nu\right)$.

Значи да је функција f епи–граница низа $\left\{ f^{\nu}, \nu = 1, 2, \dots \right\}$ ако важи

$$ls_e f^{\nu} \leq f \leq li_e f^{\nu} .$$

Користећи дефиниције није тешко уочити да ће друга неједнакост бити задовољена за $\forall x \in$, ако:

(1_e) за било који подниз функција $\left\{ f^{\nu_k}, k = 1, 2, \dots \right\}$ и било који низ $\left\{ x^k, k = 1, 2, \dots \right\}$ који конвергира ка x важи

$$\liminf_{n \to \infty} f^{\nu_k}\left(x^k \right) \geq f\left(x \right),$$

а прва неједнакост важи, за свако $x \in {}^n$ ако:

(2_e) постоји низ $\left\{ x^{\nu}, \nu = 1, 2, \dots \right\}$ који конвергира ка x такав да је

$$\limsup_{\nu \to \infty} f^{\nu}\left(x^{\nu} \right) \leq f\left(x \right).$$

За сваки опадајући низ $\left\{ S^{\nu}, \nu = 1, 2, \dots \right\}$ подскупова ^{n} постоји $\lim\limits_{\nu \to \infty} S^{\nu}$ који је дат формулом

$$\lim_{\nu \to \infty} S^{\nu} = \bigcap_{\nu = 1} cl S^{\nu} .$$

Слично, ако је $\left\{ f^{\nu} \mid {}^n \to \overline{\ } \right\}$ растући низ функција тј. $f^{\nu} \leq f^{\nu+1}$, онда постоји епи $-$ граница која је дефинисана са

$$lm\, f^{\nu}\left(x \right) = \lim_{\nu \to \infty} cl\, f^{\nu}\left(x \right)$$

где је $cl\, g$ доње полунепрекидно ограничење од g или еквивалетно $cl\, g$ је функција таква да је $epi\, cl\, g = cl\, epi\, g$.

Следећа теорема нам даје карактеризацију **левел скупова** ограничених функција у односу на левел скупове функција f^{ν} .

Дефиниција 4: За $\alpha \in$, $\alpha -$ **левел скуп** функције g је скуп дефинисан са

$$lev_{\alpha} g = \left\{ \left(x, \alpha \right) \mid g\left(x \right) \leq \alpha \right\} .$$

Генерално ако је $f = \lim\limits_{\nu \to \infty} f^{\nu}$, то не значи да $lev_{\alpha} f = \lim\limits_{\nu \to \infty} lev_{\alpha} f^{\nu}$.

Узмимо опадајућу фамилију функција

$$f^{\nu}(x)=\nu^{-1}x^{2}, \nu=1,2,\ldots$$

која епи–конвергира ка $f\equiv 0$. Како је $lev_{\alpha} f=\{0\}$, за свако ν и следи да је

$\lim\limits_{\nu\to\infty} lev_{0} f^{\nu}=\{0\}$ или $lev_{0} f=$.

Чак је могуће за f^{ν} да епи конвергира ка f, за неко $\alpha\in$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} lev_{\alpha} f^{\nu}$ можда и не постоји, што значи да $\liminf\limits_{\nu\to\infty} lev_{\alpha} f^{\nu}$ је стриктно садржан у $\limsup\limits_{\nu\to\infty} lev_{\alpha} f^{\nu}$.

Теорема 1: Нека је $\left\{f^{\nu}=\mathbb{R}^{n}\to\overline{\mathbb{R}}, \nu=1,2,\ldots\right\}$ низ функција. Тада за свако $\alpha\in$ важи

$$\lim_{\alpha'\downarrow\alpha}\limsup_{\nu\to\infty}\left(lev_{\alpha'} f^{\nu}\right)\subset lev_{\alpha}\left(li_{e} f^{\nu}\right) \tag{1}$$

и

$$lev_{\alpha}\left(ls_{e} f^{\nu}\right)\subset \lim_{\alpha'\downarrow\alpha}\liminf_{\nu\to\infty}\left(lev_{\alpha'} f^{\nu}\right). \tag{2}$$

Доказ: Нека је $T_{\alpha'}=\limsup\limits_{\nu\to\infty} lev_{\alpha'} f^{\nu}$ и $T=\lim_{\alpha'\downarrow\alpha} T_{\alpha'}$. Како су левел скупови (било које функције) опадајући кад $\alpha'\downarrow\alpha$, следи да су и T_{α} опадајући кад $\alpha'\downarrow\alpha$ и важи

$$T=\lim_{\alpha'\downarrow\alpha} T_{\alpha'}=\bigcap_{\alpha'>\alpha} T_{\alpha'}.$$

Скупови $T_{\alpha'}$ су затворени, што следи из дефиниције лимес супериор.

Следи да је $x\in T$ ако и само ако је $x\in T_{\alpha'}$ за свако $\alpha'>\alpha$. Инклузија (1) је тривијално задовољена ако је $T=\{0\}$. Претпоставимо да T није празан скуп. Ако је $x\in T_{\alpha'}$, из дефиниције лимес супериора за низове скупова следи да мора да постоји подниз функција $\left\{f^{\nu_k}, k=1,2,\ldots\right\}$ и низ $\left\{x^{k}, k=1,2,\ldots\right\}$ који конвергира ка x за свако $k=1,2,\ldots$

$$x^{k}\in lev_{\alpha'} f^{\nu_k}$$

или еквивалетно да за свако $k=1,2,\ldots$ важи

$$\left(x^{k},\alpha'\right)=epi\ f^{\nu_k}.$$

Како је $epi\left(li_{e} f^{\nu}\right)=\limsup\limits_{\nu\to\infty} epif^{\nu_k}$, следи да је

$$(x,\alpha')\in\lim_{k\to\infty}\left(x^{\nu_k},\alpha'\right)\in epi\left(li_{e} f^{\nu}\right)$$

па је $x\in lev_{\alpha'}\left(li_{e} f^{\nu}\right)$.

Одакле , ако је $x\in T_{\alpha'}$ за свако $\alpha'>\alpha$ следи

$$x\in lev_{\alpha'}\left(li_e f^{\nu}\right).$$

што имплицира да је

$$x\in lev_{\alpha}\left(li_e f^{\nu}\right),$$

пошто је за сваку функцију g

$$lev_{\alpha}g=\bigcap_{\alpha'>\alpha} lev_{\alpha'}g\ .$$

Нека је

$$S_{\alpha'}=\liminf_{\nu\to\infty} lev_{\alpha'}f^{\nu} \text{ и } S=\lim_{\alpha'\downarrow\alpha}S_{\alpha'}=\bigcap_{\alpha'>\alpha}S_{\alpha'}\ .$$

Инклузија (2) је тривијална ако је $lev_{\alpha}\left(ls_e f^{\nu}\right)=\varnothing$. Разматрајмо случај кад тај скуп није празан.

Ако је $x\in lev_{\alpha}\left(ls_e f^{\nu}\right)$ следи да постоји низ уређених парова $\left(x^{\nu},\alpha^{\nu}\right)$ који конвергира ка $\left(x,\alpha\right)$ такав да важи

$$\left(x^{\nu},\alpha^{\nu}\right)\in epi\ f^{\nu},$$

пошто је по дефиницији $epi\left(ls_e f^{\nu}\right)=\liminf_{\nu\to\infty} epi\ f^{\nu}$.

Како је $\alpha=\lim_{\nu\to\infty}\alpha^{\nu}$, за било које $\alpha'>\alpha$, постоји одговарајући ν' да је $\alpha^{\nu}\le\alpha'$ за свако $\nu\ge\nu'$. Из импликације $x^{\nu}\in lev_{\alpha'}f^{\nu}$ за свако $\nu\ge\nu'$ следи да је $x\in S_{\alpha'}$. То важи за свако $\alpha'>\alpha$ па је $x\in S$.

Теорема 2: Нека је X сепарабилан метрички простор и нека су функције $f,\ f_1,\ f_{2,}\dots$ проширене функције полунепрекидне одоздо на X .

(1) Ако је $f=e-\lim f_n$, онда за свако $\alpha\in$ постоји низ $\{\alpha_n\}$ реалних бројева који конвергира ка α такав да је $lev(f,\alpha)=PK-\lim lev(f_n,a_n)$;

(2) Ако за свако $\alpha\in$ постоји низ реалних бројева $\{\alpha_n\}$ који конвергирају ка α такав да је $lev(f,\alpha)=PK-\lim lev(f_n,a_n)$, онда је $f=e-\lim f_n$.

Доказ: (1). Фиксирајмо неко $\alpha\in$. Познато је да за било који низ који конвергира ка α, важи $Ls\,lev(f_n,\alpha_n)\subset lev(f,\alpha)$.

Претпоставимо да је $x \in Ls\,lev\left(f_n, \alpha_n\right)$, тј. постоје индекси $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ и $x_{n_k} \in lev\left(f_{n_k}, \alpha_{n_k}\right)$ за $k = 1, 2, \ldots$ такви да низ $\left\{x_{n_k}\right\} \to x$.

За свако $n \notin \left\{n_k \mid k \in {}^{+}\right\}$ је $x_n = x$. Онда из $\left\{x_{n_k}\right\} \to x$, по епи−конвергенцији имамо

$$f\left(x\right) \le \liminf_{n\to\infty} f_n\left(x_n\right) \le \liminf_{k\to\infty} f_{n_k}\left(x_{n_k}\right) \le \liminf_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \alpha .$$

Доказали смо да $x \in lev\left(f, \alpha\right)$.

Доказ инклузије $lev\left(f, \alpha\right) \subset Li\,lev\left(f_n, \alpha_n\right)$ захтева сепарабилност и добар избор низа скалара $\left\{\alpha_n\right\}$.

Како је $epi\ f \subset Li\,epi\ f_n$, за сваки позитиван број m, онда постоји позитиван број N_m такав да за свако $n \ge N_m$ постоји низ тачака $\left\{\left(\omega_{in}, \alpha_{in}^{(m)}\right) \mid i = 1, 2, \ldots, m\right\}$ из $epi\ f_n$ па за свако $i \in \left(1, 2, \ldots, m\right)$ имамо

$$d\left(\omega_{in}^{(m)}, x_i\right) < \frac{1}{m} \text{ и } \left|\alpha_{in}^{(m)} - \alpha\right| < \frac{1}{m}.$$

Без губитка општости можемо претпоставити да је низ $\left\{N_m\right\}$ строго растући низ .

Сада можемо дефинисати низ скалара $\left\{\alpha_n\right\}$: узмимо $\alpha_n = \alpha + 1$ за $n < N_1$ и за $N_m \le n < N_{m+1}$ и одаберимо $\alpha_n = \alpha + \dfrac{1}{m}$, $m = 1, 2, \ldots$. Докажимо да је ово добар избор.

За доказ инклузије $lev\left(f, \alpha\right) \subset Li\,lev\left(f_n, \alpha_n\right)$ узимамо олакшавајућу околност па радимо са $Fell$−топологијом. Узмимо да је $lev\left(f, \alpha\right) \cap V \ne \emptyset$, V отворен подскуп скупа X .

Изаберимо тачку $x \in lev\left(f, \alpha\right) \cap V$ и $\varepsilon > 0$ такву да $S_\varepsilon\left[x\right] \subset V$. Како x припада колекцији тачака низа $\left\{x_i\right\}$, можемо изабрати $k \in {}^{+}$ тако да важи

$$\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } d\left(x_k, x\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

За фиксирано $n \ge N_k$ онда постоји највећи m такав да је $n \ge N_m$.

Из неједнакости

$$d\left(\omega_{kn}^{(m)}, x_k\right) < \frac{1}{m},\ \left|\alpha_{kn}^{(m)} - \alpha\right| < \frac{1}{m} \text{ и } f_n\left(\omega_{kn}^{(m)}\right) \le \alpha_{kn}^{(m)} < \alpha + \frac{1}{m} = \alpha_n$$

имамо да је $\omega_{kn}^{(m)} \in lev\left(f_n, \alpha_n\right)$.

Такође важи

$$d\left(\omega_{kn}^{(m)}, x\right) \le d\left(\omega_{kn}^{(m)}, x_k\right) + d\left(x_k, x\right) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon ,$$

па је $\omega_{kn}^{(m)} \in V$.

То значи да да за свако $n \ge N_k$ важи $V \cap lev\left(f_n, \alpha_n\right) \ne \varnothing$. Доказали смо да је

$$lev\left(f, \alpha\right) \subset Li\, lev\left(f_n, \alpha_n\right)$$

тако да је $lev\left(f, \alpha\right) = PK - \lim lev\left(f_n, \alpha_n\right)$.

(2) Из услова $lev\left(f, \alpha\right) \subset Li\, lev\left(f_n, \alpha_n\right)$ и свако $\alpha \in$ и за неки низ $\left\{\alpha_n\right\}$ који конвергира ка α, следи да је $epi\ f \subset Li\, epi\ f_n$. Да би доказали да је $Ls\, epi\ f_n \subset epi\ f$, претпоставимо супротно да $\left(x, \beta\right) \in Ls\, epi\ f_n$ такав да $\left(x, \beta\right) \notin epi\ f$. Онда је $\beta < f\left(x\right)$. Можемо наћи растући низ $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ и $\left(x_k, \beta_k\right) \in epi\ f_{n_k}$ такав да низ $\left\{\left(x_k, \beta_k\right)\right\}$ конвергира ка $\left(x, \beta\right)$. Изаберимо скалар α између β и $f\left(x\right)$ и нека је $\left\{\alpha_n\right\}$ низ скалара који конвенгирају ка α, за који важи $lev\left(f, \alpha\right) = PK - \lim lev\left(f_n, \alpha_n\right)$. Тада за довољно велико k важи $\beta_k < \alpha_{n_k}$. За свако такво k имамо $x_k \in lev\left(f_{n_k}, \alpha_{n_k}\right)$.

Из услова $Ls\, lev\left(f_n, \alpha_n\right) \subset lev\left(f, \alpha\right)$ следи да је $x \in lev\left(f, \alpha\right)$. Што је контрадикција да је $f\left(x\right) > \alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

1.Др. Аљанчић С. Увод у реалну и функционалну анализу, Грађевинска књига, Београд 1968.

2.Др.Иван Д.Аранђеловић, AN INQUALITY FOR LEBESGUE MEASURE, Унив.Београд.Публ. Електротехнички Факакултет Сер.Мат.15 (2004), 84-85.

3.Др Иван Д.Аранђеловић и Др Дојчин С. Петковић , AN INQUALITY FOR LEBESGUE MEASURE AND ITS APLIKACACATIONS,
Факта универ.(Ниш) Сер. Мат. Информ. Вол. 22,Но.1 (2007), пп 11-14.

4. Др Милан Тасковић и др Драгољуб Аранђеловић, Теорија функција и функционална анализа, НИРО, „ Књижевне новине“, Београд 1981.

5. Др Милош Лабан, Збирка решених задатака из математике 1, Научна књига Београд 1987.

6. Др Милош Лабан, Основи математичке анализе, Научна књига, Београд, 1990.

7. Мр Мила Мршевић и мр Ђорђе Дугошија, Збирка решених задатака из математичке анализе, Грађевинска књига, Београд, 1994.

8. Др Милан Р. Тасковић, Нелинеарна функционална анализа, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 1993.

9. Др Светозар Курепа, Математичка анализа 2, Техничка књига Загреб, 1971.

10. Roger J-B.Wets, A formula for the level sets of epi limits and some applications, septembar 1982, WP-82-81

11. Gerald Beer, R.T.Rockafellar, and Roger J-B.Wets ,Proceedings of the
Amercan mathematical society, Volume116, Number3, November 1992.