UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

MASTER RAD

ELEKTRONSKI KURS NA PLATFORMI MOODLE O PREDSTAVNICIMA BROJEVNIH INTERVALA U ELEMENTARNOM I ALGEBARSKOM RAČUNU

mentor:
Docent dr Miroslav Marić

kandidat:
Milica Živanović, dipl. mat.

Beograd, januar 2011.

SADRŽAJ

UVODNA REČ

Ideja da radim na ovoj temi proistekla je iz jedne diskusije sa učenicima četvrtog razreda specijano-matematičkog odeljenja Valjevske gimnazije, kojima sam imala priliku da održim nekoliko časova. Namera mi je bila da ih uvedem u oblast intervalne algebre i da im pokažem da se sa brojevnim intervalima može raditi slično kao i sa običnim brojevima.

Kako sama tema zahteva nekoliko časova uvoda, dosetila sam se da našu raspravu povežem sa svojim master radom, a kako da ovu ideju učinim još praktičnijom i primenljivijom pomogao mi je mentor, docent dr Miroslav Marić, spomenuvši mi platformu *Moodle*. Iskoristila bih ovu priliku da mu se zahvalim na pruženoj podršci i savetima koje mi je davao i time mi pomogao da oblikujem svoju početnu zamisao. Takođe bih se zahvalila prof. dr Dušanu Tošiću i prof. dr Aleksandru Lipkovskom, koji su svojim savetima i predlozima poboljšali tekst ovog rada.

Rad obuhvata 64 strane, 31 sliku i literaturu od 25 bibliografskih jedinica. Korišćena literatura je dostupna u biblioteci Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, u biblioteci Valjevske gimnazije, Gradskoj biblioteci grada Valjeva, kao i u biblioteci Istraživačke stanice Petnica. Jedan deo navedene literature je u elektronskoj verziji preuzet sa interneta i preveden sa engleskog jezika.

1. MOODLE

1.1. UKRATKO O MOODLE-U I NJEGOVOJ INSTALACIJI

Naziv *Moodle* je skraćenica od „*Modular Object-Oriented Dynamic Learning Evironment*”. To je softverski paket dizajniran da omogući kreiranje kurseva za koje je dovoljno imati pretraživač (*Firefox, IE, Safari, Opera*…). Njegova upotreba bi se mogla dopasti naročito učenicima i studentima, jer na jednostavan način mogu da postave, razmenjuju i komentarišu neka nova saznanja i informacije. Korisnici kojima instalacija može predstavljati problem, informacije o *Moodle*-u, njegovom razvoju i instalaciji mogu naći na zvaničnom sajtu [1].

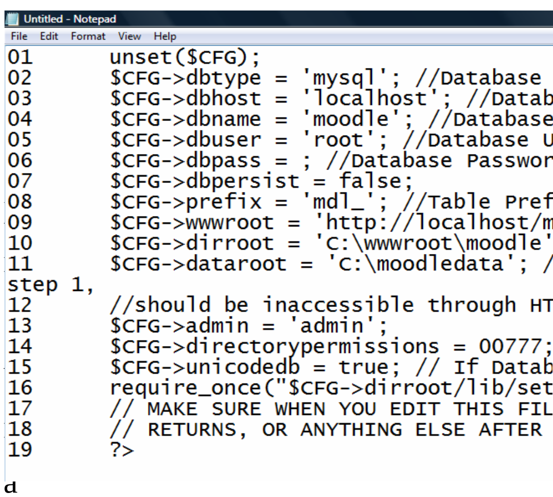
Moodle je besplatan softver otvorenog koda za preuzimanje, korišćenje i modifikovanje. Izmene u njegovim temama, jezičkim paketima i modulima mogu vršiti poznavaoci *PHP*-a, *CSS*-a i *HTML*-a. Prvobitno je pravljen za operativni sistem *Linux*, ali razvijene su i verzije za *Mac OS X* i *Windows* korisnike. Upoznavanjem sa više verzija *Moodle*-a, počev od 1.5., preko 1.6., 1.8. do 1.9.7. i 2.0., može se uvideti kako se razvijao, šta je to što se menjalo, šta je ostajalo isto i koliko

Slika 1. Izgled stranice sa uputstvima za instalaciju Moodle-a

pažnje je poklonjeno kom uslužnom elementu. Novije verzije *Moodle*-a sadrže dodatak pod nazivom *XAMPP*. Ovaj paket odgovara većem broju platformi i sastoji se od *Apache HTTP* servera, *MySQL* baze i interpretera za programske jezike *PHP* i *Perl*. Uloga *XAMPP* dodatka je da instalaciju učini jednostavnijom.

Ako se pri instalaciji na *OS WindowsVista* ili *Windows7*, nakon započetog formiranja baze podataka pojavi beo ekran i instalacija neće da se nastavi, onda se predlažu sledeći koraci:

1. Kreirati *moodledata* folder negde na računaru (recimo c:\wwwroot\moodledata).
2. Desni klik na folder *moodledata*, selektovati *Properties*, a potom selektovati *Security tab*.
3. Kliknuti na *Everyone* (*Users*) na vrhu prozora (*Group or User names*), a potom kliknuti *Edit*.
4. Čekirati *Alow read and write permissions for Everyone*.
5. Kreirati *config.php* (slika 2.) u glavnom *Moodle* folderu.

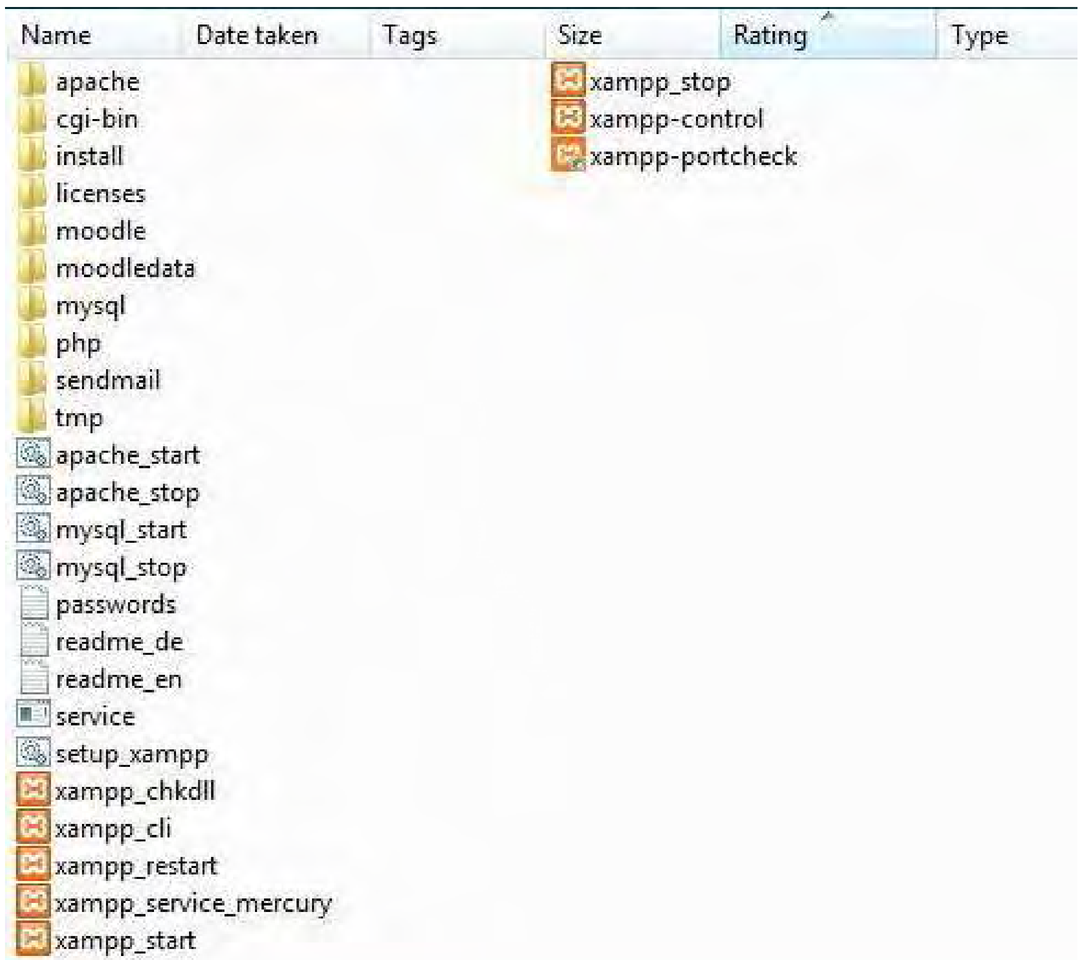


Slika 3. Deo ekrana odnosno stranice na kojoj se bira jezik instalacije

Slika 2. Na slici je prikazan sadržaj fajla Config.php

živaču treba ponovo ukucati URL *Moodle*-a (http://127.0.0.1/ ili http://localhost), nakon čega se instalacija nastavlja. Na narednoj strani korisnik se odlučuje za jezik sajta (Slika 3.), potom se formira baza i ukoliko nema dodatnih smetnji, pojavljuju se poruke „Success“ i „Main databases set up successfully“. Na jednoj od sledećih stranica pojaviće se forma u kojoj korisnik definiše parametre za svoj *Moodle* sajt i za naslovnu stranicu (*front page*).

Ukoliko se server ne pokrene nakon prvog odjavljivanja ili stopiranja, savet je da se zaobiđe startovanje i stopiranje *Moodle*-a sa *xampp_control* i da se to učini pomoću *BAT* fajlova (*apache_start*, *apache_stop*, *mysql_start*, *mysql_stop*) prikazanih na Slici 4.

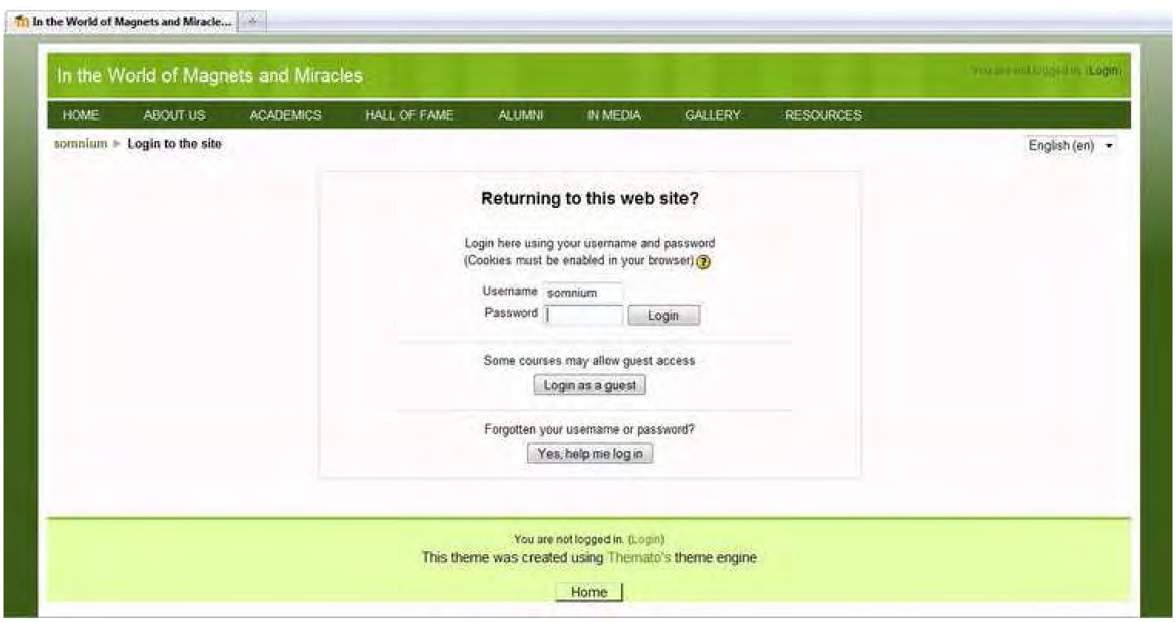


Slika 4. Kontrole za pokretanje i stopiranje Moodle-a

1.2. OTVARANJE I UREĐIVANJE NALOGA

Kreiranje novog naloga (*New Account*) vrši se nakon instalacije *Moodle*-a i definisanja parametara za naslovnu stranicu. Tipovi korisničkih naloga su:

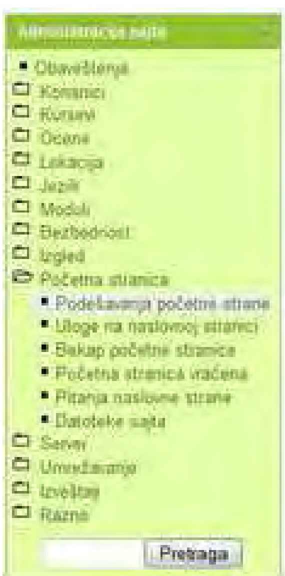
- studentski - *Student* (omogućava jedino interakciju sa sadržajima kursa)
- nastavnički sa dozvolom izmene sadržaja – *Teacher with Editing Permissions*
- nastavnički bez dozvole izmene sadržaja – *Teacher without Editing Permission*
- kreator kursa – *Course Creator*
- administrator – *Administrator* (omogućava gotovo sve u radu sa *Moodle*-om)



Slika 5. Kreiranje novog naloga

Slika 6. Modifikovanje i ažuriranje naloga

Uređenje početne stanice tek otvorenog naloga omogućavaju blokovi sa strana. Jedan od njih je prikazan na Slici 7. Klikom na *Podešavanje početne strane* otvara se strana na kojoj se navodi puno i skraćeno ime sajta, opis početne strane sajta i drugo. Na Slici 8. prikazan je izgled jedne početne strane.

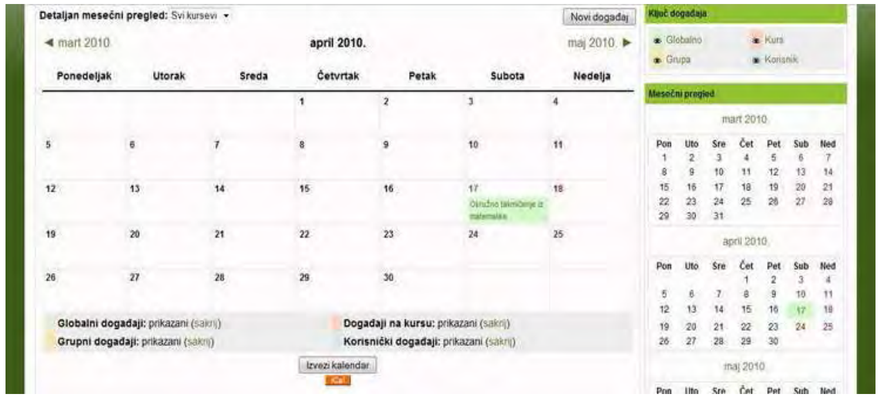


Slika 7. Izgled bloka za administraciju sajta

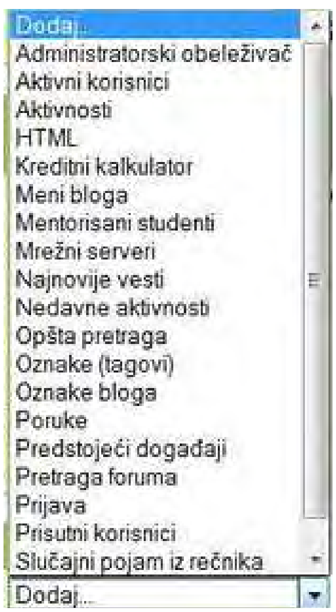
Slika 8. Početna strana kursa Predstavnici brojevnih intervala u elementarnom i algebarskom računu

Jedan od blokova prikazanih sa strana (odatle potiče njihov naziv *side bloks*) je kalendar (*Calendar*). Ovaj dodatak omogućava svim korisnicima da markiraju bitne datume i događaje, a sve to u saglasnosti sa tipom njihovih naloga. Tako se i razlikuju sledeći tipovi događaja:

- globalni događaj
- događaj na kursu
- grupni događaj
- korisnički događaj

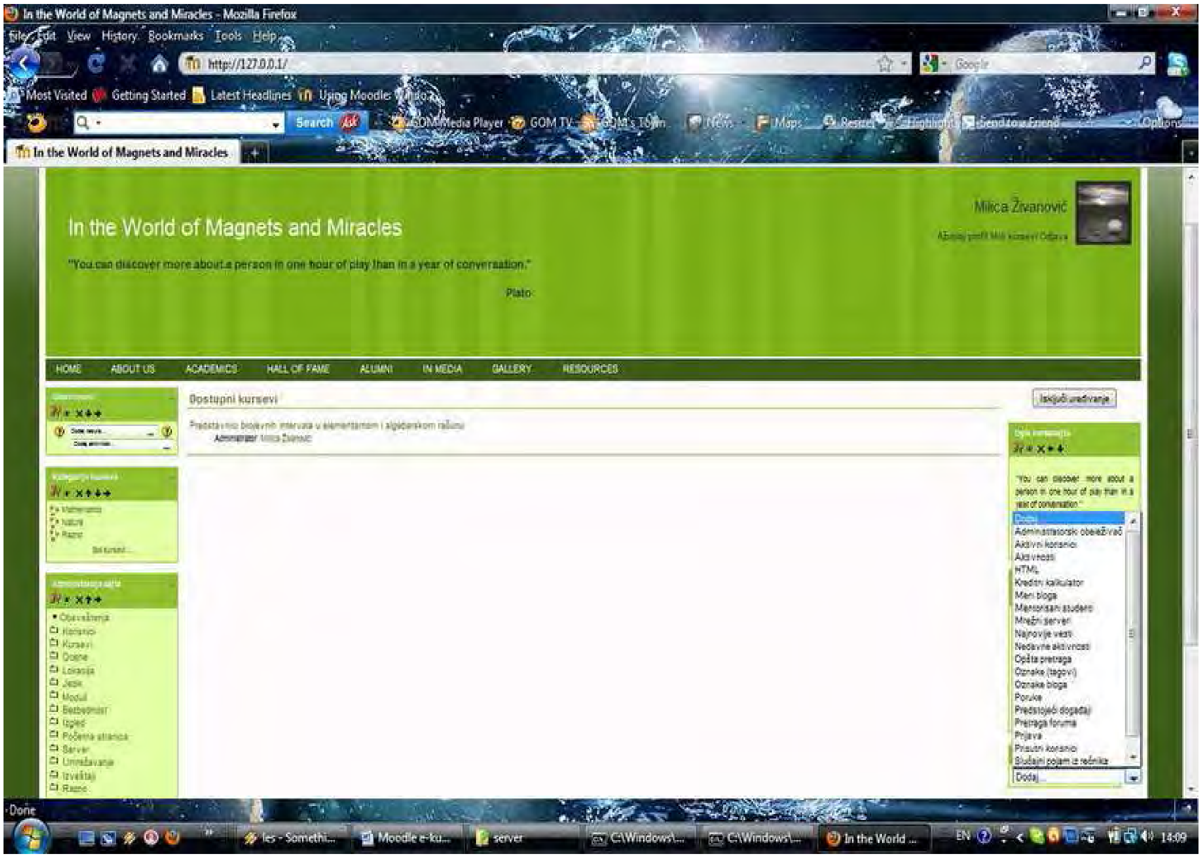


Slika 9. Pregled događaja u bloku Kalendar



Slika 10. Dodavanje blokova

Postoji još par blokova koje je moguće dodati po potrebi (Slika 10., Slika 11.). Neki od njih su: najnovije vesti, aktivnosti, aktivni korisnici, poruke, predstojeći događaji, prisutni korisnici, itd. Kako se iz samog naziva naslućuje njihova svrha, nije neophodno objašnjavati svaki posebno.

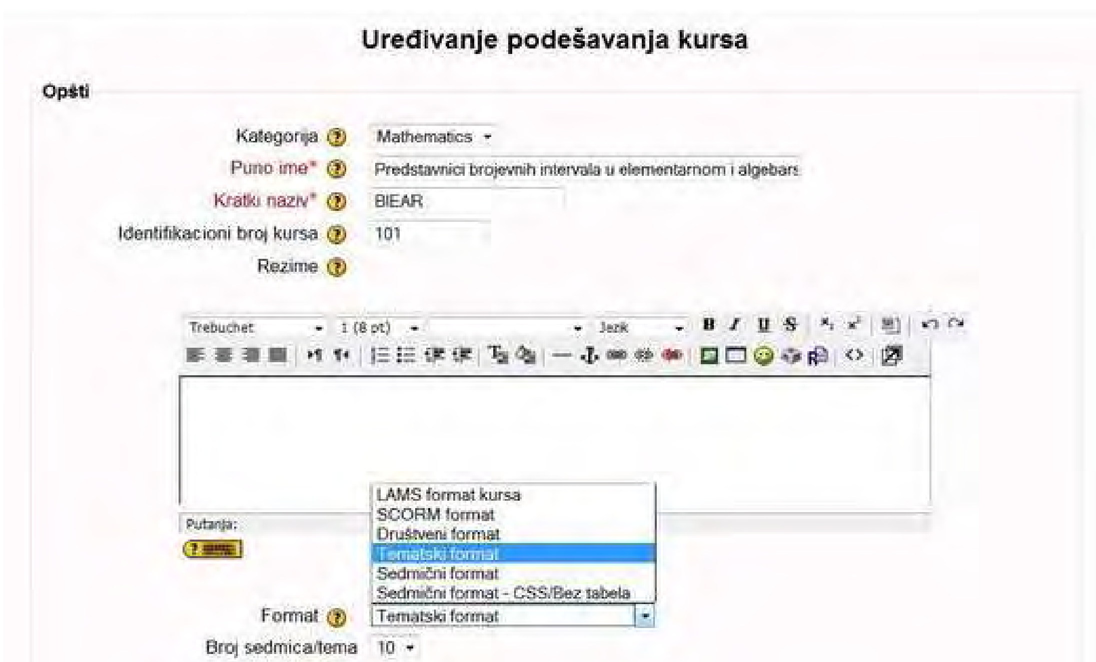


Slika 11. Izgled početne strane kursa sa blokovima sa strane

1.3. KREIRANJE I UREĐIVANJE KURSA

Slika 12. Blok za uređivanje kursa

Kreiranje novog kursa omogućeno je blokom čiji je naziv *Administracija sajta* (*Administration block*). Klikom na link *Kursevi* otvara se padajući meni prikazan na Slici 12. Nakon klika na *Dodaj/uredi kurs* otvara se prozor u kom se bira novi kurs ili nova kategorija. U ovom koraku može se odabrati neka od već postojećih kategorija pod kojom se otvara novi kurs ili se može formirati nova kategorija. Korekcije i promene se mogu vršiti naknadno.



Slika 13. Deo stranice sa zahtevima za uređivanje kursa

Sada kada je kurs formiran može se pristupiti njegovom uređivanju. Na Slici 13. prikazani su zahtevi na koje korisnik mora odgovoriti da bi mogao da radi na tek otvorenom kursu.

Kako je ova tema algebarska, najpre je formirana kategorija *Mathematics*, pa je u okviru nje formiran kurs pod punim nazivom *Predstavnici brojevnih intervala u elementarnom i algebarskom računu*. Od korisnika se zahteva i kratak naziv koji se pojavljuje u *Navigation bar*-u kao neka vrsta prečice. Skraćeni naziv ovog kursa je *BIEAR*. *Identifikacioni broj kursa*, ukoliko ga poseduje, korisnik može uneti na ovom mestu, u suprotnom polje treba da ostavi prazno. Što se *Rezimea* tiče, potrebno je ukratko opisati namenu i cilj postavljenog kursa. Pod *Formatom* se bira kog oblika će biti kurs. Neki od ponuđenih i najčešće korišćenih su:

- tematski format (*Topic*)
- sedmični format (*Weekly*)
- društveni format (*Social*)

Format koji je bio najpogodniji za izradu ove teme je tematski format (*Topic*), u kome je izabrano 10 tema:

1. Uvod
2. Računski predstavnici brojevnih intervala
3. Neke transformacije računskih predstavnika brojevnih intervala
4. Funkcija brojevnih intervala
5. Brojevni intervali u algebarskom računu
6. Brojevni intervali i nizovi
7. Brojevni intervali i aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina
8. Brojevni intervali i neki algebarski odnosi
9. Zaključak
10. Preporučena literatura

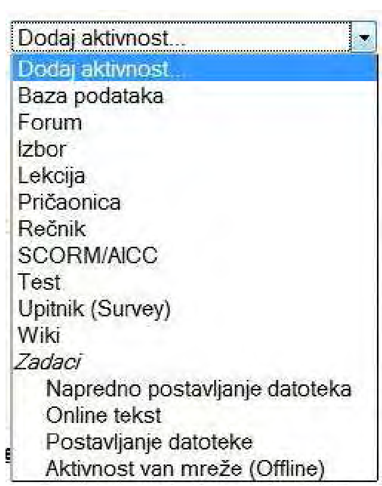
Nakon izabranog formata, ređaju se: *Broj sedmica/tema, Datum početka kursa, Dodaci za upis, Obaveštenje o isteku upisa na kurs, Grupe, Dostupnost, Jezik,* itd.

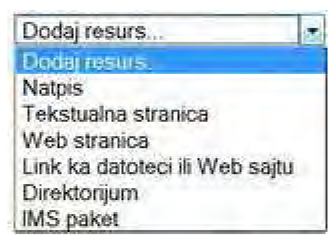
Alati koji će biti od velike koristi za sređivanje navedenih tema prikazani su na Slici 14. Kako bi ovi simboli za editovanje bili dostupni, potrebno je kliknuti na *Uključi uređivanje* (*Turn editing on*) u gornjem desnom uglu. Strelice omogućavaju korisniku pomeranje tema udesno, naviše ili naniže, odnosno promenu njihovog redosleda;  - omogućava etitovanje teme;  - brisanje aktivnosti;  - omogućava skrivanje aktivnosti od studenata, ili ponovno prikazivanje aktivnosti ukoliko je već bila skrivena; i konačno  - služi za prikazivanje grupa.

Slika 14. Simboli za editovanje teksta

Sledeće dve opcije vredne pomena su *Dodavanje aktivnosti* (*Add an activity*) i *Dodavanje resursa* (*Add a resourse*) prikazane na slikama 15. i 16. Pod dodavanjem aktivnosti podrazumeva se dodavanje:

- baze podataka
- foruma
- izbora
- lekcija
- pričaonica
- rečnika
- testa
- upitnika
- zadataka



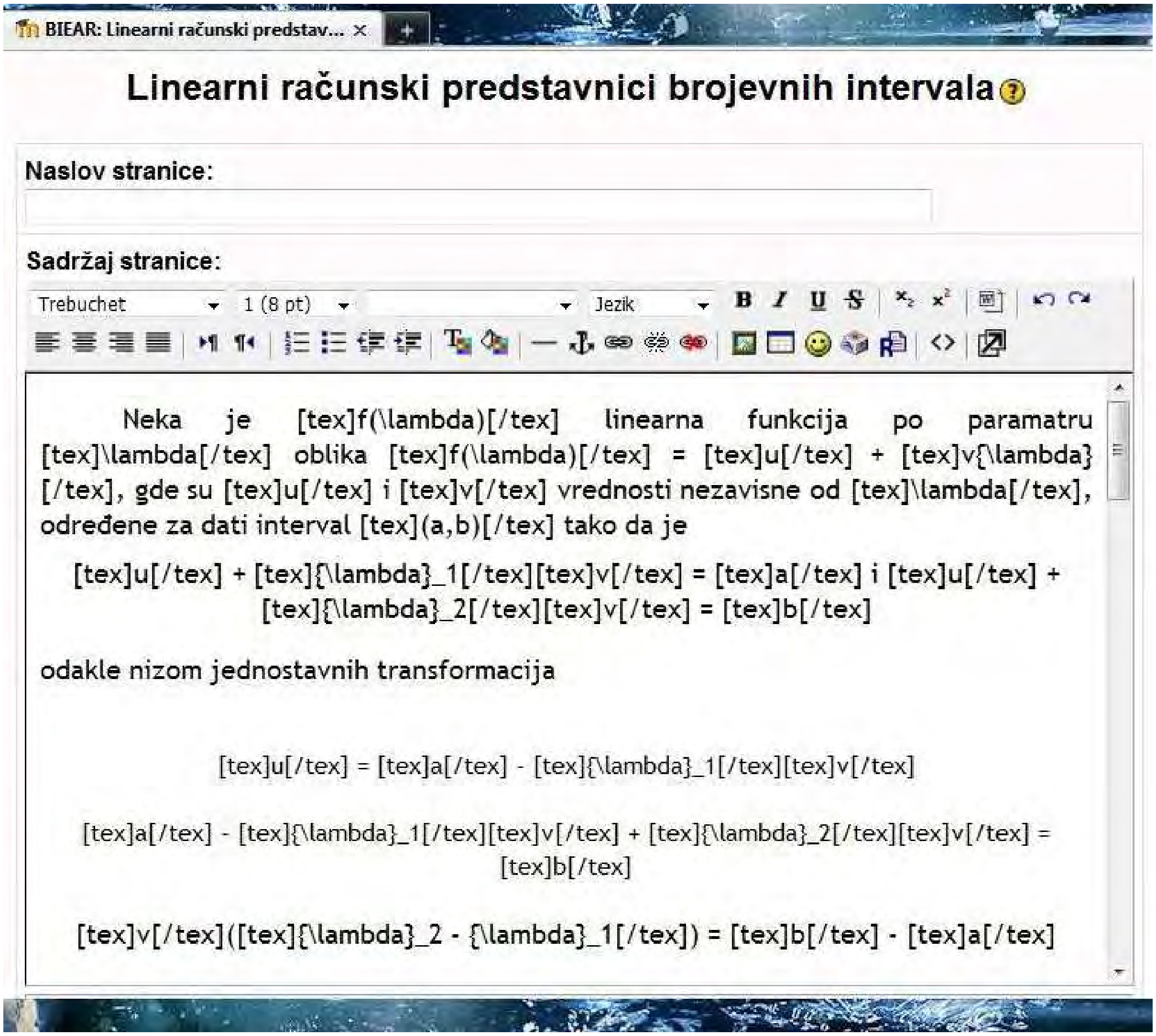


Slika 16. Dodavanje resursa

Slika 15. Dodavanje aktivnosti

Za kurs *Predstavnici brojevnih intervala u elementarnom i algebarskom računu*, najprikladnije je bilo izabrati aktivnost *Lekcija* (*Lesson Module*). Klik na ovaj link, iz gore prikazanog padajućeg menija, vodi na stranicu na kojoj se popunjava prvo naziv lekcije. Na novootvorenom prozoru ponuđene su i opcije za: *ocenjivanje*, *kontrolu toka lekcije*, *formatiranje lekcije*, *kontrolu pristupa*, itd. U okviru lekcija mogu se dodati: *pitanja*, *grupa pitanja*, *tabela grananja, stranica sa pitanjem*. U iznad navedenom kursu najčešće su zastupljene lekcije sa tabelom grananja ili stranicom sa pitanjima.

Kreiranje lekcije korisnik počinje klikom na ikonicu . Odavde odlazi na novu stranicu (Slika 17.), na kojoj će primetiti prostor za unos teksta nešto sličan *Microsoft Word*-u. Sa dodatkom se možda većina korisnika nije susretala. Njegova svrha je da korisnika prebaci u *HTML editor*, ukoliko ima potrebu za tim.



Slika 17. Izgled prostora za unos podataka

Korisnicima koji će *Moodle* koristiti za kreiranje lekcija iz prirodnih nauka (matematike, fizike, hemije i njima srodnih), zapis formula se može na prvi pogled učiniti problematičan. Postoji više načina i modula koji mogu omogućiti jednostavan zapis složenih matematičkih formula. Pošto *Moodle* podržava *Tex* i *Algebarsku notaciju*, kreatori kurseva moraju zahtevati od administratora da aktivira ove filtere ukoliko već nije. Na početnoj strani u bloku *Administracija sajta* (*Administration block*) potrebno je izabrati *Module*. U padajućem meniju klikom na *Filtere* (*Filters*) otvara se stranica prikazana na

Slici 18. Potrebno je aktivirati filter pod nazivom *Tex notacija* i *Algebarska notacija*. Sada je sve spremno za unos matematičkih formula, svakako pod uslovom da korisnik zna da radi u *Tex*-u. Formule se prilikom unosa kucaju unutar *[tex]* i *[/tex]* (prikazano na Slici 17.)[2].

Aktivni filteri

Ime	Isključiti/Omogući	Gore/Dole	Podešavanja
TeX notacija			Podešavanja
Algebarska notacija			
Geogebra			
Tidy			
Automatsko linkovanje baze podataka			
Automatsko linkovanje rečnika			
Automatsko linkovanje naziva resursa			
Automatsko linkovanje wiki stranice			
Automatsko linkovanje naziva aktivnosti			
Cenzura reči			Podešavanja
Zaštita elektronske pošte			

Slika 18. Aktivacija potrebnih filtera

Ukoliko korisnik ne poznaje rad u *Tex*-u, postoji više načina da ubaci potrebne formule. Neki od njih su instalacija dodatnih modula tj. filtera, kao na primer: *TyniMCE, A Wysiwyg Equation Editor, fully working HTML editor, FCK editor,* itd. Navedeni filteri se mogu preuzeti sa već spomenute internet stranice na kojoj se mogu naći i uputstva za njihovo instaliranje [1].

Ovim se završava ovo kratko izlaganje o *Moodle*-u. Namera je bila da se dotaknu svi bitni alati, opcije i mogućnosti koje *Moodle* ima i pruža kako bi rad s njim bio što prijatniji i jednostavniji.

2. PREDSTAVNICI BROJEVNIH INTERVALA

Za brojeve koji imaju beskonačno mnogo decimala i za koje nije uočena nikakva zakonitost može se fiksirati samo jedan *brojni razmak*[1], odnosno razmak na brojevnoj pravoj za koji se može tvrditi da se pomenuta veličina sigurno nalazi u njemu. Kao najčešći primeri uzimaju se brojevi $\sqrt{2}$ ili π. Kada pred oči padnu sve moguće greške koje bi se mogle isprečiti pri rešavanju nekog problema, ideja za uvođenje brojevnih intervala je sasvim prirodna i razumljiva [22].

Neki od mogućih problema na koje se može naići su:

- nepoznate veličine po samoj svojoj prirodi javljaju se kao brojevni intervali
- nekada sami uslovi zadatka ne zahtevaju tačno određivanje nepoznatih veličina
- kada je nepoznatu iz nekih razloga nemoguće tačno odrediti
- kada je nepoznata takve prirode da je dovoljno naći dovoljno sužen brojevni interval u kome se ona kreće, pa se odmah ili nizom nekih računskih radnji dobije njena tačna ili približna vrednost

Radi ilustracije nekih jednostavnijih problema navešćemo par primera.

Primer 2.1. Odrediti vrednosti y za koje će kvadratna jednačina $x^2 - 2x + y^2 - 7y + 7 = 0$ imati realne i različite korene.

Potrebno je i dovoljno da y leži u intervalu između 1 i 6, a to se lako može pokazati pomoću diskriminante za koju treba da važi $D > 0$. Dakle:

$$D = 4 - 4(y^2 - 7y + 7) = -4y^2 + 28y - 24 = 4(6 - y)(y - 1).$$

[1] Pojam brojni razmak preuzet je iz radova Mihaila Petrović Alasa. Danas bi se umesto ovog, možda nekome arhaičnog termina, koristio termin brojevnog intervala.

Primer 2.2. Stepeni red sa pozitivnim koeficijentima $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$ biće konvergentan ako se x nalazi u brojevnom intervalu $(-R, R)$, gde je $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$. Slično, red će biti divergentan ako se x nalazi van tog intervala, odnosno radijusa konvergencije [3].

Primer 2.3. Za velike vrednosti n je teško izračunati $n!$ koji tada ima veliki broj cifara. Stoga je nekada jednostavnije koristiti činjenicu da $n!$ uvek uzima vrednost koja se kreće između sledeće dve [3]:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

2.1. OSNOVNI POJMOVI

Neka je dat interval (a,b). Funkcija $f(\lambda)$ na ovom intervalu se može formirati na sledeći način:

1) za $\lambda=\lambda_1$, $f(\lambda)=a$, a za $\lambda=\lambda_2$, $f(\lambda)=b$,
2) dok λ uzima vrednosti iz intervala (λ_1,λ_2), funkcija $f(\lambda)$ dobija vrednosti iz intervala (a,b).

Tako dobijena funkcija $f(\lambda)$ naziva se *računski predstavnik* intervala (a,b), a interval (λ_1,λ_2) se naziva *parametarski interval* [7, 20].

Ukoliko se sa α i β označe sledeći izrazi $\alpha=\dfrac{\lambda-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$ i $\beta=\dfrac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}$, za računski predstavnik intervala (a,b) mogla bi se uzeti bilo koja od sledećih funkcija:

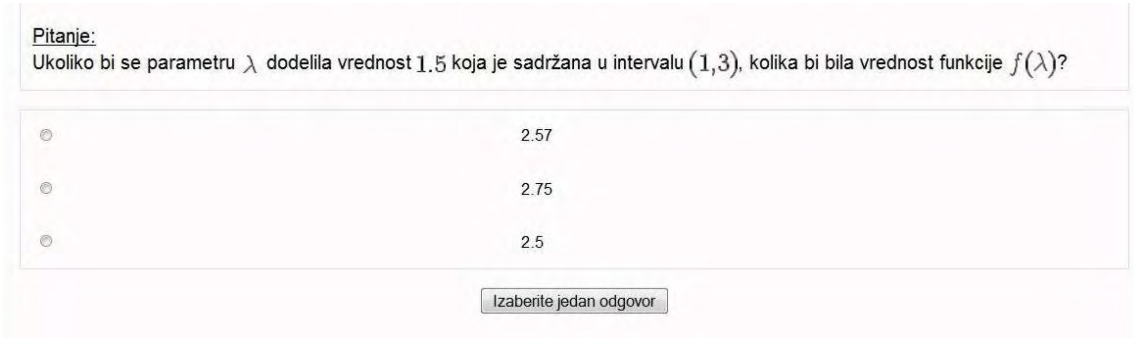
1) $f(\lambda)=\alpha\cdot a+\beta\cdot b$,
2) $f(\lambda)=(\alpha\cdot a^m+\beta\cdot b^m)^{\frac{1}{m}}, m\in N, a\geq 0, b\geq 0$,
3) $f(\lambda)=a^{\alpha}\cdot b^{\beta}$.

Svaki računski predstavnik intervala (a,b) ima osobinu da može uzeti bilo koju vrednost u tom intervalu kada se za parametar λ uzme podesno odabrana brojevna vrednost iz intervala (λ_1,λ_2).

<u>Primer 2.1.1.</u> Interval (2,5) imaće za svog računskog predstavnika sa parametarskim intervalom (1,3), funkciju $f(\lambda)=2\alpha+5\beta$, gde su $\alpha=\dfrac{3-\lambda}{2}$ i $\beta=\dfrac{\lambda-1}{2}$, odnosno:

$$f(\lambda)=2\cdot\frac{3-\lambda}{2}+5\cdot\frac{\lambda-1}{2}=\frac{6-2\lambda+5\lambda-5}{2}=\frac{1+3\lambda}{2}.$$

Na osnovu prethodnog primera mogao bi se postaviti sledeći zahtev (Slika 19.):



Slika 19. Izgled jednog postavljenog zahteva u Moodle-u

Sa računskim predstavnicima brojevnih intervala može se računati kao i sa običnim brojevima. Ova činjenica predstavlja jedan od razloga za njihovo uvođenje. Predstavnici brojevnih intervala, kao što se može videti iz priloženog, su ništa drugo do funkcije definisane na tim intervalima. Kako je linearna funkcija jedna od prvih sa kojom se srećemo, u narednoj glavi uvodi se pojam linearnog predstavnika brojevnog intervala.

2.2. LINEARNI RAČUNSKI PREDSTAVNICI BROJEVNIH INTERVALA

Ako je $f(\lambda)$ linearna funkcija po paramatru λ oblika $f(\lambda) = u+v\lambda$, gde su u i v vrednosti nezavisne od λ određene za dati interval (a,b) onda je:

$$u+\lambda_1 v = a \text{ i } u+\lambda_2 v = b.$$

Odavde se nizom jednostavnih transformacija:

$$u = a-\lambda_1 v,$$

$$a-\lambda_1 v+\lambda_2 v = b,$$

$$v(\lambda_2-\lambda_1) = b-a,$$

dobija:

$$v = \frac{b-a}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}b - \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}a,$$

$$u = \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}a - \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}b.$$

Izdvojmo sada dva jednostavna slučaja u zavisnosti od vrednosti koje uzima parametar λ.

<u>Slučaj 1.</u> Neka su $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 1$, tada je računski predstavnik brojevnog intervala (a,b) funkcija:

$$f(\lambda) = u+v\lambda,$$

gde je:

$$a = u-v \text{ i } b = u+v,$$

odnosno:

$$u = \frac{b+a}{2}, v = \frac{b-a}{2},$$

a parametarski interval je (-1,1).

Možemo primetiti da su krajevi intervala (a,b) simetrični u odnosu na sredinu tog intervala.

Ukoliko bi se tražilo da je funkcija $f(\lambda)=a$ za $\lambda=-1$ i $f(\lambda)=b$ za $\lambda=1$ na intervalu (a,b), dobili bismo:

$$u-v=a \text{ i } u+v=b.$$

Kako je $a<b$, v će biti veće od 0 (v>0).

Ukoliko bi se tražilo da je $f(\lambda)=a$ za $\lambda=1$ i $f(\lambda)=b$ za $\lambda=-1$ na intervalu (a,b), dobili bismo:

$$u+v=a \text{ i } u-v=b.$$

Kako je $a<b$, u ovom slučaju v će biti manje od 0 (v<0).

<u>Slučaj 2.</u> Neka su $\lambda_1=0$ i $\lambda_2=1$. U ovom slučaju računski predstavnik intervala (a,b) je funkcija:

$$f(\lambda) = u+v\lambda,$$

gde je $u=a, v=b-a$, a parametarski interval je (0,1). Tada je $a=u, b=u+v$, što nam pokazuje da su krajevi intervala (a,b) nesimetrični u odnosu na vrednost u.

Ukoliko se traži da je $f(\lambda)=a$ za $\lambda=0$ i $f(\lambda)=b$ za $\lambda=1$, dobija se:

$$u=a \text{ i } u+v=b.$$

Kako je $a<b$, onda sledi da je $v>0$.

Slično tome, ukoliko se traži da je $f(\lambda)=a$ za $\lambda=1$ i $f(\lambda)=b$ za $\lambda=0$, tada se dobija:

$$u+v=a \text{ i } u=b.$$

Kako je $a<b$, odavde sledi da je $v<0$.

Intervali koji su korišćeni u navedenim slučajevima odabrani su kao najjednostavniji predstavnici, s jedne strane simetričnih intervala, tj. intervala oblika $(\mathrm{I}\lambda, \lambda)$ i s druge strane onih nesimetričnih na koje se češće nailazi. Zbog svoje jednostavnosti, funkcije $f(\lambda)$ dobijene u prethodna dva slučaja nazivamo *normalnim računskim predstavnicima* intervala (a,b).

Funkciju:

$$f(\lambda) = u + v\lambda, \quad u = \frac{b+a}{2}, \quad v = \frac{b-a}{2},$$

sa parametarskim intervalom $\lambda \in (-1,1)$ nazivamo *simetričnim normalnim računskim predstavnikom,* a funkciju:

$$f(\lambda) = u + v\lambda, \quad u = a, \quad v = b-a,$$

sa parametarskim intervalom $\lambda \in (0,1)$ nazivamo *asimetričnim normalnim računskim predstavnikom* intervala (a,b) [5, 7].

Dalje u tekstu sa ω ćemo označavati broj koji pripada intervalu (-1,1), a sa θ broj koji pripada intervalu (0,1). Uvođenjem ω i θ simetrične i nesimetrične normalne predstavnike intervala (a,b) možemo zapisati na sledeći način:

1) simetrični normalini predstavnik:

$$\frac{b+a}{2} + \omega\frac{b-a}{2} = u + \omega v,$$

gde član u predstavlja sredinu intervala (a,b), a član v njegovu poludužinu.

2) nesimetrični normalni predstavnik:

$$a + \theta(b-a) = u + \theta v,$$

gde član u predstavlja prednji kraj intervala (a,b), a član v njegovu dužinu.

<u>Primer 2.2.1.</u> Simetrični normalni predstavnik intervala $(0,b)$ je oblika $\frac{1+\omega}{2}b$, a asimetrični normalni predstavnik istog intervala bi bio θb.

<u>Primer 2.2.2.</u> Simetrični normalni predstavnik intervala $(-a,+a)$ je $\omega a,$ a asimetrični normalni predstavnik istog intervala je $a(2\theta-1)$.

Primer 2.2.3. Ako je x broj sa p decimala, takav da je:

$$x = m, a_1 a_2 \ldots a_p ,$$

gde $m \in \mathrm{Z}$, a a_k je njegova k-ta decimala [6], onda se x se nalazi između brojeva:

$$m, a_1 a_2 \ldots a_p 0 < x < m, a_1 a_2 \ldots a_p 999\ldots$$

Simetrični normalni predstavnik ovog intervala je:

$$m, a_1 a_2 \ldots a_p 0 + \frac{5}{10^{p+1}}(1+\omega), \quad -1 \leq \omega \leq 1 .$$

Asimetrični normalni predstavnik gore navedenog interval je:

$$m, a_1 a_2 \ldots a_p 0 + \frac{\theta}{10^p}, \quad 0 \leq \theta \leq 1 .$$

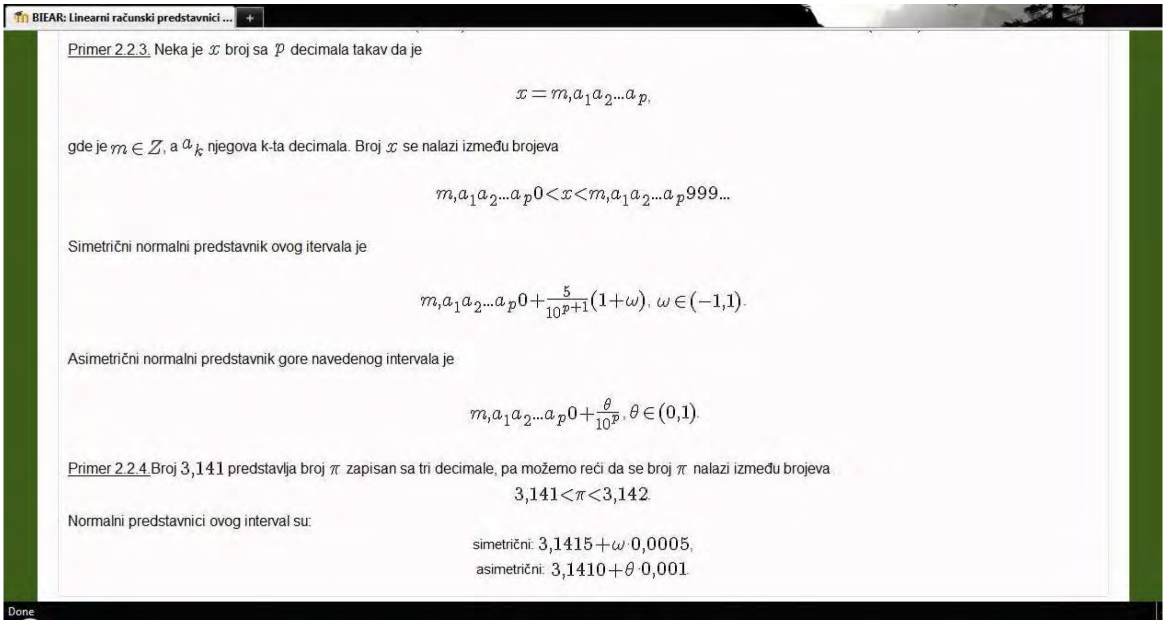
Primer 2.3.4. Broj 3,141 predstavlja broj π zapisan sa tri decimale, pa možemo reći da se broj π nalazi između brojeva:

$$3{,}141 < \pi < 3{,}142.$$

Normalni predstavnici ovog intervala su:

simetrični: $3{,}1415 + \omega \cdot 0{,}0005$,

asimetrični: $3{,}1410 + \theta \cdot 0{,}001$.



Slika 20. Deo lekcije Linearni računski predstavnici brojevnih intervala

3. NEKE TRANSFORMACIJE RAČUNSKIH PREDSTAVNIKA BROJEVNIH INTERVALA

Neka su λ i μ dva promenljiva parametra, $f(\lambda)$ i $\varphi(\mu)$ dva računska predstavnika jednog istog brojevnog intervala (a,b), a (λ_1,λ_2) i (μ_1,μ_2) parametarski intervali. Pitanje koje se prirodno nameće je - da li postoji neka veza između ovih elemenata?

Pošto su funkcije $f(\lambda)$ i $\varphi(\mu)$ definisane na sledeći način:

$$f(\lambda_1)=a \text{ i } \varphi(\mu_1)=a,$$

$$f(\lambda_2)=b \text{ i } \varphi(\mu_2)=b,$$

primetimo da je:

$$f(\lambda_1)=\varphi(\mu_1) \text{ i } f(\lambda_2)=\varphi(\mu_2).$$

Na osnovu ovako uspostavljene veze, može se odrediti interval (λ_1, λ_2) parametra λ ukoliko je poznat interval (μ_1, μ_2). Naravno, važi i obrnuto.

<u>Tvrđenje 3.1.</u> Neka je dat računski predstavnik intervala (a, b) u obliku funkcije $f(\lambda)$ sa parametarskim intervalom (λ_1, λ_2). Tada je normalni simetrični oblik ovog predstavnika funkcija:

$$\varphi(\omega) = \frac{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)}{2} + \omega \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{2}, \ -1 \le \omega \le 1.$$

Dokaz (Slika 21.): Traženi predstavnik će biti oblika:

$$\varphi(\omega) = u + \omega v, \ -1 \le \omega \le 1.$$

Kako je:

$$f(\lambda_1) = \varphi(-1) = u - v \text{ i } f(\lambda_2) = \varphi(1) = u + v,$$

sabiranjem ove dve jednačine dobija se:

$$2u = f(\lambda_1) + f(\lambda_2),$$

$$u = \frac{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)}{2},$$

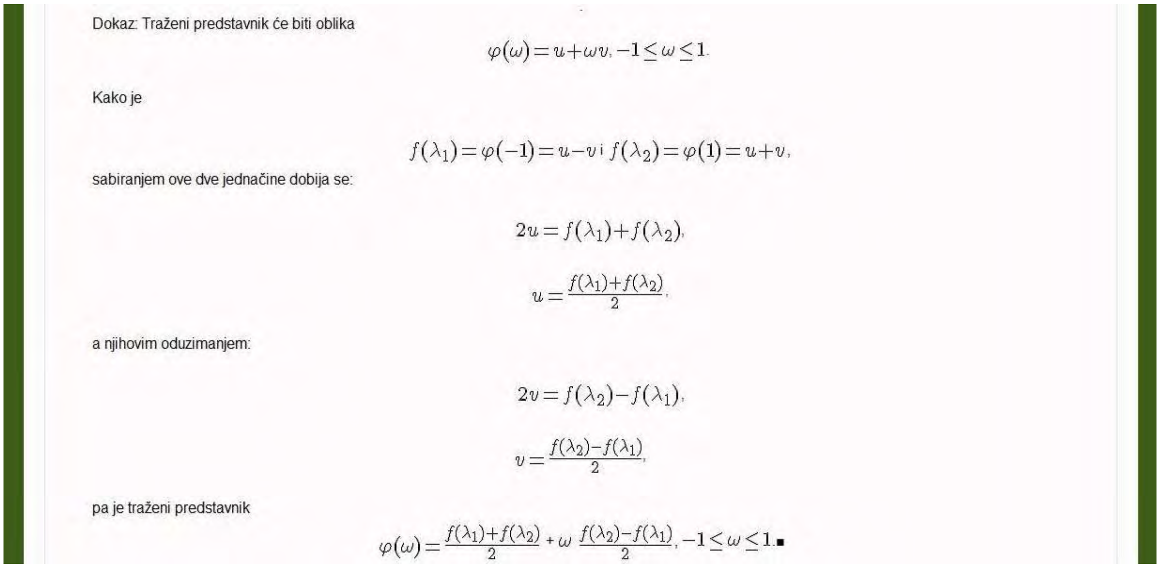
a njihovim oduzimanjem:

$$2v = f(\lambda_2) - f(\lambda_1),$$

$$v = \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{2},$$

pa je traženi predstavnik:

$$\varphi(\omega) = \frac{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)}{2} + \omega \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{2}, \ -1 \le \omega \le 1. \blacksquare$$



Dokaz: Traženi predstavnik će biti oblika

$$\varphi(\omega)=u+\omega v,\ -1\leq\omega\leq 1.$$

Kako je

$$f(\lambda_1)=\varphi(-1)=u-v \text{ i } f(\lambda_2)=\varphi(1)=u+v,$$

sabiranjem ove dve jednačine dobija se:

$$2u=f(\lambda_1)+f(\lambda_2),$$

$$u=\frac{f(\lambda_1)+f(\lambda_2)}{2},$$

a njihovim oduzimanjem:

$$2v=f(\lambda_2)-f(\lambda_1),$$

$$v=\frac{f(\lambda_2)-f(\lambda_1)}{2},$$

pa je traženi predstavnik

$$\varphi(\omega)=\frac{f(\lambda_1)+f(\lambda_2)}{2}+\omega\,\frac{f(\lambda_2)-f(\lambda_1)}{2},\ -1\leq\omega\leq 1.\blacksquare$$

Slika 21. Izgled dokaza Tvrđenja 3.1. u Moodle-u

<u>Tvrđenje 3.2.</u> Neka je dat računski predstavnik intervala (a,b) u obliku funkcije $f(\lambda)$ sa parametarskim intervalom (λ_1,λ_2). Normalni asimetrični oblik ovog predstavnika je funkcija:

$$\varphi(\lambda)=f(\lambda_1)+\theta[f(\lambda_2)-f(\lambda_1)],\ \ 0\leq\theta\leq 1.$$

Dokaz: Traženi predstavnik treba da bude oblika:

$$\varphi(\theta)=u+\theta v,\ \ 0\leq\theta\leq 1.$$

Kako je:

$$f(\lambda_1)=\varphi(0)=u \ \text{ i } \ f(\lambda_2)=\varphi(1)=u+v,$$

dobija se da je:

$$u=f(\lambda_1) \text{ i } v=f(\lambda_2)-f(\lambda_1),$$

pa je traženi normalni asimetrični oblik predstavnika intervala (a,b), funkcija oblika:

$$\varphi(\theta)=f(\lambda_1)+\theta[f(\lambda_2)-f(\lambda_1)],\ \ 0\leq\theta\leq 1.\blacksquare$$

Tvrđenje 3.3. Neka je dat simetrični normalni predstavnik $f(\omega)=u+\omega v,\ \ -1\le\omega\le 1,$ intervala (a,b). Asimetrični normalni oblik ove funkcije je:

$$\varphi(\theta)=u-v+2\theta v,\ \ 0\le\theta\le 1.$$

Dokaz: Tražena funkcija će biti oblika:

$$\varphi(\theta)=u'+\theta v',\ \ 0\le\theta\le 1.$$

Iz:

$$f(-1)=\varphi(0) \text{ i } f(1)=\varphi(1),$$

sledi da je:

$$u-v=u' \text{ i } u+v=u'+v',$$

odnosno:

$$u'=u-v,$$

$$v'=u+v-(u-v),$$

$$v'=2v,$$

pa je traženi asimetrični normalni oblik navedene funkcije $f(\omega)$, funkcija:

$$\varphi(\theta)=u-v+2\theta v,\ \ 0\le\theta\le 1.\blacksquare$$

Tvrđenje 3.4. Neka je dat asimetrični normalni predstavnik $f(\theta)=u+\theta v,\ \ 0\le\theta\le 1,$ intervala (a,b). Simetrični normalni oblik gornje funkcije je funkcija:

$$\varphi(\omega)=u+\frac{v}{2}+\omega\frac{v}{2},\ \ -1\le\omega\le 1.$$

Dokaz: Iz:

$$f(0)=\varphi(-1) \text{ i } f(1)=\varphi(1),$$

sledi:

$$u=u'-v' \text{ i } u+v=u'+v'.$$

Sabiranjem ovih dveju jednačina dobijamo:

$$u' = \frac{2u+v}{2} = u + \frac{v}{2},$$

a oduzimanjem istih:

$$v' = \frac{v}{2},$$

pa je traženi normalni oblik polazne funkcije:

$$\varphi(\omega) = u + \frac{v}{2} + \omega\frac{v}{2},\ -1 \le \omega \le 1. \blacksquare$$

Primer 3.1. Kako je $n! = \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{\theta'}{12n}}$, $0 \le \theta' \le 1$, može se naći asimetrični normalni predstavnik za $n!$ [3].

Uvođenjem da je N= $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, $n!$ zapisujemo kao $n! = N \cdot e^{\frac{\theta'}{12n}}$.

Neka je:

$$f(\lambda) = N \cdot e^{\frac{\lambda}{12n}},\ 0 \le \lambda \le 1,$$

i

$$\varphi(\theta) = u + \theta v,\ 0 \le \theta \le 1.$$

Kako je:

$$f(0) = \varphi(0),\ \text{tj. } N = u \text{ i}$$

$$f(1) = \varphi(1),\ \text{tj. } N \cdot e^{\frac{1}{12n}} = u + v,$$

dobijamo da je:

$$u = N \quad \text{i} \quad v = N\left(e^{\frac{1}{12n}} - 1\right).$$

Stoga je traženi asimetrični normalni predstavnik za $n!$:

$$N+\theta N\left(e^{\frac{1}{12n}}-1\right)=N\left[1+\theta\left(e^{\frac{1}{12n}}-1\right)\right],\ 0\leq\theta\leq 1.$$

4. FUNKCIJA BROJEVNOG INTERVALA

4.1. FUNKCIJA BROJEVNOG INTERVALA

Definicija 4.1.1. Neka je $z=(x,y)$ jedan brojevni interval. Funkcija $f(z)$ će biti jedan brojevni interval oblika (N,M), gde je N najmanja vrednost, a M najveća vrednost koju funkcija $f(z)$ dobija kada z uzima vrednosti od x do y.

Navedeni interval za simetričnog normalnog predstavnika imaće izraz:

$$Z = f(z) = \frac{M+N}{2} + \omega\frac{M-N}{2}, -1 \le \omega \le 1,$$

a za asimetričnog normalnog predstavnika izraz:

$$Z = f(z) = N + \theta(M-N), 0 \le \theta \le 1.$$

U slučaju da je $f(z)$ monotono rastuća funkcija promenljive z u intervalu (x,y), biće:

$$N = f(x) \text{ i } M = f(y),$$

a u slučaju monotono opadajuće funkcije biće:

$$N = f(y) \text{ i } M = f(x).$$

Ako $f(z)$ nije ni monotono rastuća ni monotono opadajuća funkcija, tj. ako $f(z)$ ima za neko $z=(x,y)$ maksimume koji su veći od obeju vrednosti $f(x)$ i $f(y)$, onda za M treba uzeti najveći od tih maksimuma. Isto tako, ako $f(z)$ ima za neko $z=(x,y)$ minimume koji su manji od obeju vrednosti $f(x)$ i $f(y)$, onda za N treba uzeti najmanji od tih minimuma [8, 19].

Primer 4.1.1. Ako je $z = u + \theta v$, $0 \le \theta \le 1$, normalni asimetrični predstavnik jednog intervala, odrediti kvadrat tog predstavnika $z^2 = (u+\theta v)^2$.

Iz:

$$\theta = 0, \; f(0) = N = u^2,$$

$$\theta = 1, \quad f(1) = N + M - N = M = (u+v)^2,$$

$$M - N = v^2 + 2uv,$$

sledi:

$$z^2 = u^2 + \theta'\left(v^2 + 2uv\right),\ 0 \le \theta' \le 1 .$$

Primer 4.1.2. Ako je $z = u + \omega v,\ \ -1 \le \omega \le 1,$ normalni simetrični predstavnik nekog intervala, odrediti $z^2 = (u + \omega v)^2$.

Ako je:

$$\omega = -1,\quad f(-1) = \frac{M+N}{2} - \frac{M-N}{2} = (u-v)^2,$$

$$N = (u-v)^2,$$

$$\omega = 1,\quad f(1) = \frac{M+N}{2} + \frac{M-N}{2} = (u+v)^2,$$

$$M = (u+v)^2,$$

onda se dobija:

$$z^2 = \frac{M+N}{2} + \omega'\frac{M-N}{2} = u^2 + v^2 + 2uv\omega',\ -1 \le \omega' \le 1 .$$

Primer 4.1.3. Neka je $z = u + \theta v, 0 \le \theta \le 1,$ naći $z^3 = (u + \theta v)^3$.

Kako je $0 \le \theta \le 1,$ za:

$$\theta = 0,\quad f(0) = N\ ,\ N = u^3,$$

$$\theta = 1,\quad f(1) = N + M - N = M\ ,\ M = (u+v)^3,$$

dobijamo:

$$M - N = 3u^2v + 3uv^2 + v^3,$$

pa je:

$$z^3 = u^3 + \left(3u^2v + 3uv^2 + v^3\right)\theta',\ 0 \le \theta' \le 1 .$$

Primer 4.1.4. Neka je $z = u + \omega v, -1 \le \omega \le 1.$ Naći $z^3 = (u + \omega v)^3$.

Kako je $-1 \le \omega \le 1,$ za:

$$\omega = -1, \quad f(-1) = \frac{M+N}{2} - \frac{M-N}{2} = N, \quad N = (u-v)^3,$$

$$\omega = 1, \quad f(1) = M, \quad M = (u+v)^3,$$

dobijamo:

$$\frac{M+N}{2} = \frac{u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3}{2} = u^3 + 3uv^2,$$

$$\frac{M-N}{2} = 3u^2v + v^3.$$

Konačno je:

$$z^3 = \left(u^3 + 3uv^2\right) + \omega'\left(v^3 + 3u^2v\right), \quad -1 \le \omega' \le 1.$$

<u>Primer 4.1.5.</u> Neka je $z = u + \theta v, 0 \le \theta \le 1,\ u > 0, v > 0$. Naći $\log z = \log(u + \theta v)$.

Za:

$$\theta = 0, \quad f(z) = N, \quad N = \log u,$$

$$\theta = 1, \quad f(z) = M, \quad M = \log(u+v),$$

dalje dobijamo:

$$\log z = \log u + \theta'\left(\log(u+v) - \log u\right),$$

$$\log z = \log u + \theta' \log\left(1 + \frac{v}{u}\right), \quad 0 \le \theta' \le 1.$$

<u>Primer 4.1.6.</u> Neka je $z = u + \theta v, 0 \le \theta \le 1$. Naći $e^z = e^{u+\theta v}$.

Za:

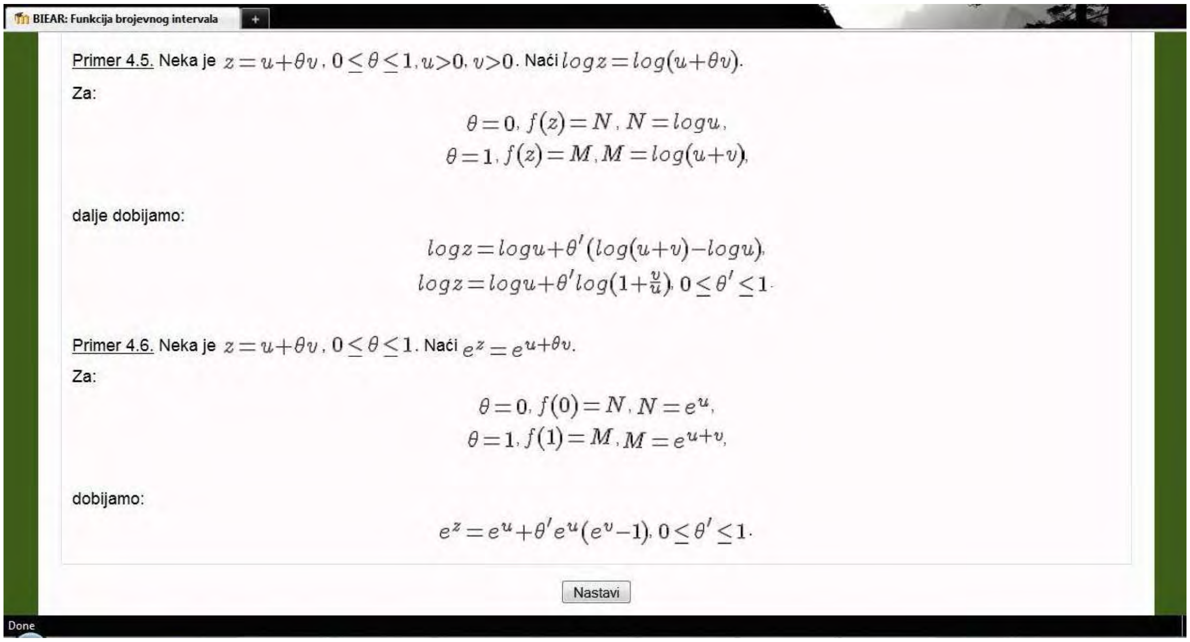
$$\theta = 0, \quad f(0) = N, \quad N = e^u,$$

$$\theta = 1, \quad f(1) = M, \quad M = e^{u+v},$$

dobija se:

$$e^z = e^u + \theta' e^u\left(e^v - 1\right), 0 \le \theta' \le 1.$$

Na Slici 22. prikazan je prethodni primer u Moodle-u:



Slika 22. Primer 4.1.5. i Primer 4.1.6. u Moodle-u

4.2. FUNKCIJA VIŠESTRUKIH INTERVALA

Definicija 4.2.1. Neka su $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$ dva data intervala. Funkcija $f(z_1, z_2)$ dveju promenljivih biće jedan interval (N, M), gde je N najmanja vrednost, a M najveća vrednost funkcije $f(z_1, z_2)$ kada z_1 uzima vrednosti iz intervala (x_1, y_1), a z_2 uzima vrednosti iz (x_2, y_2).

Navedeni interval za asimetrične normalne predstavnike ima izraz:

$$Z = f(z_1, z_2) = N + \theta(M - N), 0 \le \theta \le 1 .$$

Ako su intervali z_1 i z_2 i sami dati svojim asimetričnim normalnim predstavnikom:

$$z_1 = u_1 + \theta_1 v_1 \quad \text{i} \quad z_2 = u_2 + \theta_2 v_2, \quad 0 \le \theta_1, \theta_2 \le 1,$$

onda će biti:

$$x_1 = u_1, \quad y_1 = u_1 + v_2, \quad x_2 = u_2, \quad y_2 = u_2 + v_2 .$$

U slučaju da je $f(z_1, z_2)$ monotono rastuća funkcija promenljivih z_1 i z_2 na intervalima (x_1, y_1) i (x_2, y_2), biće [8, 10, 27]:

$$N = f(x_1, x_2) = f(u_1, u_2),$$

$$M = f(y_1, y_2) = f(u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

pa je asimetrični predstavnik intervala:

$$Z = f(z_1, z_2) = f(u_1, u_2) + \theta[f(u_1 + v_1, u_2 + v_2) - f(u_1, u_2)].$$

U slučaju da je $f(z_1, z_2)$ monotono opadajuća funkcija promenljivih z_1 i z_2 na intervalima (x_1, y_1) i (x_2, y_2), biće [8, 10, 27]:

$$N = f(y_1, y_2) = f(u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

$$M = f(x_1, x_2) = f(u_1, u_2),$$

pa je asimetrični predstavnik intervala:

$$Z = f(z_1, z_2) = f(u_1 + v_1, u_2 + v_2) + \theta[f(u_1, u_2) - f(u_1 + v_1, u_2 + v_2)].$$

Primer 4.2.1. Neka je $z_1 = u_1 + \theta_1 v_1$ i $z_2 = u_2 + \theta_2 v_2, 0 \le \theta_1, \theta_2 \le 1.$ Naći $Z = z_1 + z_2$.

Za:

$$N = u_1 + u_2,$$

$$M = u_1 + u_2 + v_1 + v_2,$$

je:

$$Z = u_1 + u_2 + \theta'(v_1 + v_2),\ 0 \le \theta' \le 1.$$

Primer 4.2.2. Neka je $z_1 = u_1 + \theta_1 v_1$ i $z_2 = u_2 + \theta_2 v_2, 0 \le \theta_1, \theta_2 \le 1.$ Naći $Z = z_1 z_2$.

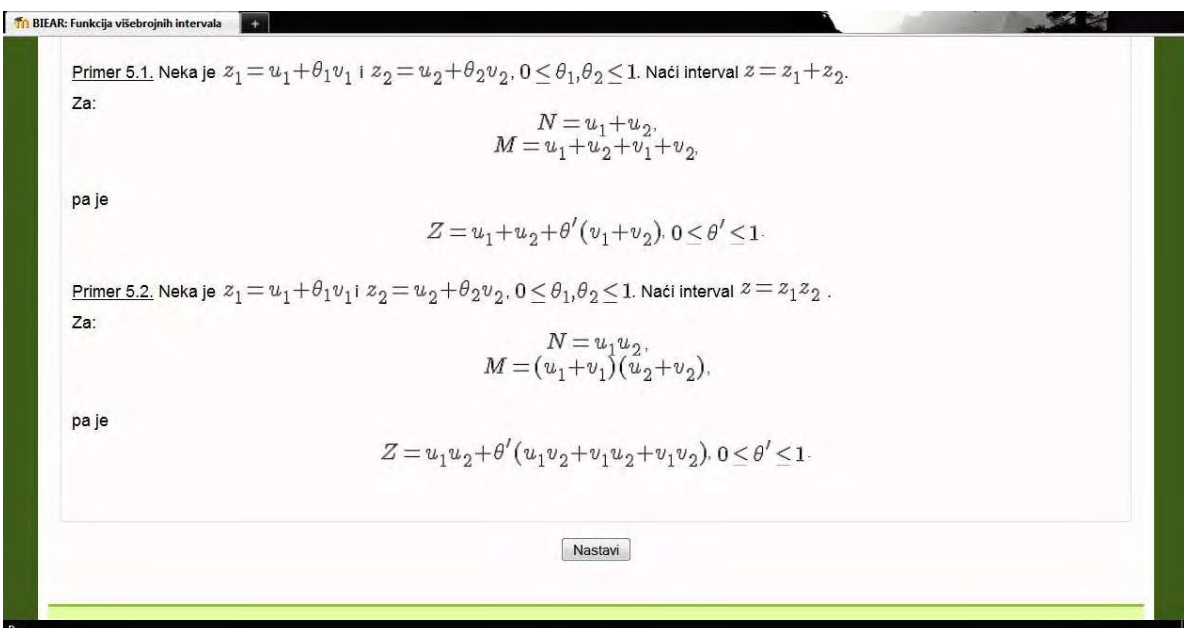
Za:

$$N = u_1 u_2,$$

$$M = (u_1 + v_1)(u_2 + v_2),$$

dobija se:

$$Z = u_1 u_2 + \theta'(u_1 v_2 + v_1 u_2 + v_1 v_2),$$
$$0 \le \theta' \le 1.$$



Slika 23. Primer 4.2.1. i Primer 4.2.2. u Moodle-u

Primer 4.2.3. Neka je $z_1 = u_1 + \theta_1 v_1$ i $z_2 = u_2 + \theta_2 v_2, 0 \le \theta_1, \theta_2 \le 1$. Naći $Z = \sqrt{{z_1}^2 + {z_2}^2}$.

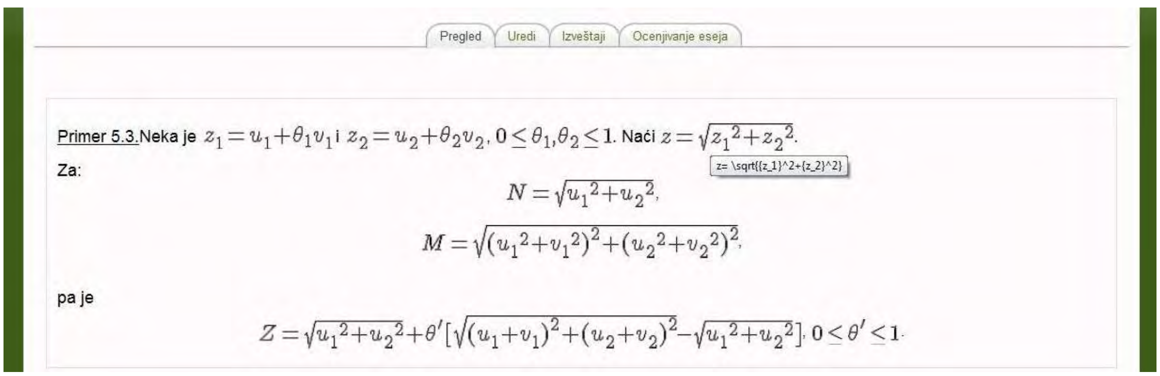
Za:

$$N = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2},$$

$$M = \sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2},$$

dobija se:

$$Z = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} + \theta' \left[\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} - \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} \right], \ 0 \le \theta' \le 1.$$



Slika 24. Primer 4.2.3 u Moodle-u

4.3. SISTEM FUNKCIJA BROJEVNIH INTERVALA

Definicija 4.3.1. Neka je dato n intervala $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \dots, z_n = (x_n, y_n)$. Tada funkcije $f_1(z_1, z_2, \dots z_n), f_2(z_1, z_2, \dots z_n), \dots, f_p(z_1, z_2, \dots z_n)$ čine sistem od p datih funkcija tih intervala, gde svaka od funkcija f_k ima svoj interval Z_k u kom varira, dok svaka promenljiva z_i varira u svom intervalu (x_i, y_i).

Označimo sa N_k i M_k najmanju i najveću vrednost koju dobija funkcija f_k kada sve promenljive $z_{1,} z_2, \dots z_n$ variraju u svojim intervalim.

Asimetrični normalni predstavnici sistema funkcija $f_1, f_2, \dots, f_n$ biće izrazi:

$$Z_1 = f_1(z_1, \dots, z_n) = N_1 + \theta_1(M_1 - N_1),$$
$$Z_2 = f_2(z_1, \dots, z_n) = N_2 + \theta_2(M_2 - N_2),$$
$$Z_3 = f_3(z_1, \dots, z_n) = N_3 + \theta_3(M_3 - N_3),$$
$$\vdots$$
$$Z_p = f_p(z_1, \dots, z_n) = N_p + \theta_p(M_p - N_p).$$

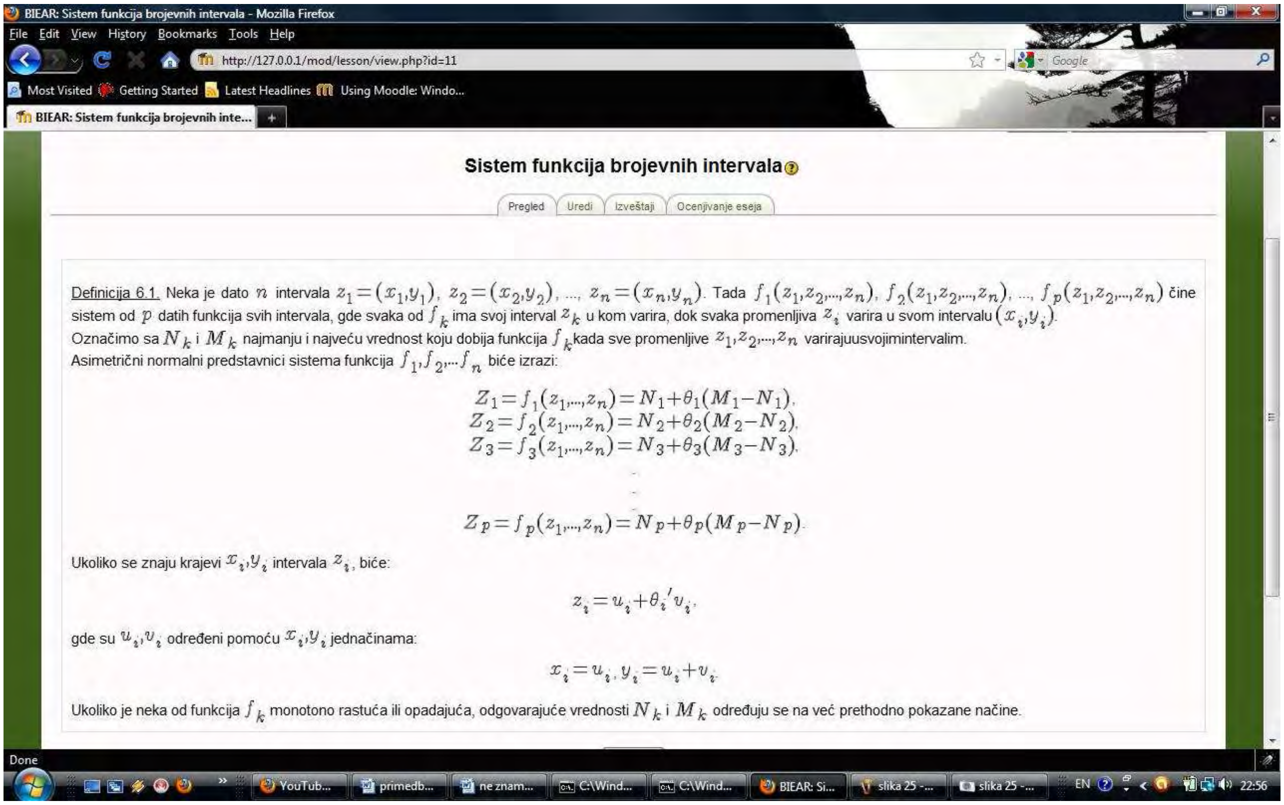
Ukoliko se znaju krajevi x_i, y_i intervala z_i, biće:

$$z_i = u_i + \theta_i' v_i,$$

gde su u_i, v_i određeni pomoću x_i, y_i jednačinama:

$$x_i = u_i, \quad y_i = u_i + v_i.$$

Ukoliko je neka od funkcija f_k monotono rastuća ili opadajuća, odgovarajuće vrednosti N_k i M_k određuju se na već prethodno prikazan način.



Slika 25. Izgled lekcije Sistem funkcija brojevnih intervala u Moodle-u

5. BROJEVNI INTERVALI U ALGEBRI

5.1. TRINOM DRUGOG STEPENA

Na intervale, kao rešenja nekih zadataka, nailazi se u zadacima u kojima se traže uslovi za realnost, pozitivnost ili negativnost nula datog polinoma. Ukoliko koeficijenti polinoma sadrže promenljiv parametar α, onda bi se kao rešenje ovakve algebarske jednačine dobio interval u kome se nalazi vrednost parametra α .

Primer 5.1.1. Neka je dat polinom drugog stepena $ax^2 + 2bx + c$, gde su svi a, b, c iz R. Obe nule ovog polinoma su realne i suprotnog znaka ako je $b^2 - 4ac > 0$ i $ac < 0$.

Da bi to bio slučaj sa trinomom:

$$(\alpha - 5)x^2 - 4\alpha x + \alpha - 2,$$

potrebno je i dovoljno da se vrednost α nalazi u intervalu (2,5), tj. da je:

$$\alpha = 2 + 3\theta,\ \ 0 \leq \theta \leq 1.$$

Primer 5.1.2.[12] Neka je dat trinom:

$$(4 - \alpha)x^2 - 3x + \alpha + 4.$$

Potreban i dovoljan uslov da ovaj trinom ima kompleksne nule je da se α nalazi u intervalu $\left(-\frac{\sqrt{55}}{2}, \frac{\sqrt{55}}{2}\right)$, tj. da je:

$$\alpha = \omega\frac{\sqrt{55}}{2},\ \ -1 \leq \omega \leq 1.$$

Neka je potrebno odrediti maksimum i minimum linearne funkcije $f(x,y)=ax+by+c$, gde su pomenljive x i y vezane kvadratnom relacijom:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Najpre se postavlja sledeća jednačina:

$$f(x,y)=\alpha.$$

Eliminacijom jedne promenljive, recimo y, dobija se kvadratna jednačina po nepoznatoj x:

$$Mx^2+2Nx+P=0,$$

gde je P polinom drugog stepena po parametru α, koeficijent N linearna funkcija od α, a koeficijent M nezavisan od α. Zadatak se sada svodi na određivanje intervala u kome treba da se nalazi α da bi promenljiva x, određena gornjim jednačinama, bila realna. Prednji kraj tog intervala predstavljao bi minimum, a zadnji kraj maksimum funkcije $f(x,y)$. Uslov za to je:

$$4N^2-4MP>0,$$

tj.

$$N^2-MP>0.$$

Kako je N^2-MP polinom drugog stepena po parametru α, zadatak se dalje radi slično kao u prethodnom primeru. Rešavanjem ovog uslova, dobija se interval čija donja granica predstavlja minimum, a gornja maksimum date funkcije.

Primer 5.1.3.[14] Neka se traže maksimum i minimum funkcije:

$$f(x,y)=y-2x,$$

gde su promenljive x i y vezane relacijom:

$$36x^2+16y^2-9=0.$$

Eliminacijom promenljive y sa $y=\alpha+2x$, dobija se kvadratna jednačina:

$$36x^2+16(\alpha+2x)^2-9=0,$$

$$36x^2 + 16\alpha^2 + 64x\alpha + 64x^2 - 9 = 0,$$

$$100x^2 + 64\alpha x + 16\alpha^2 - 9 = 0\,.$$

Kako je:

$$(64\alpha)^2 - 400(16\alpha^2 - 9) > 0,$$

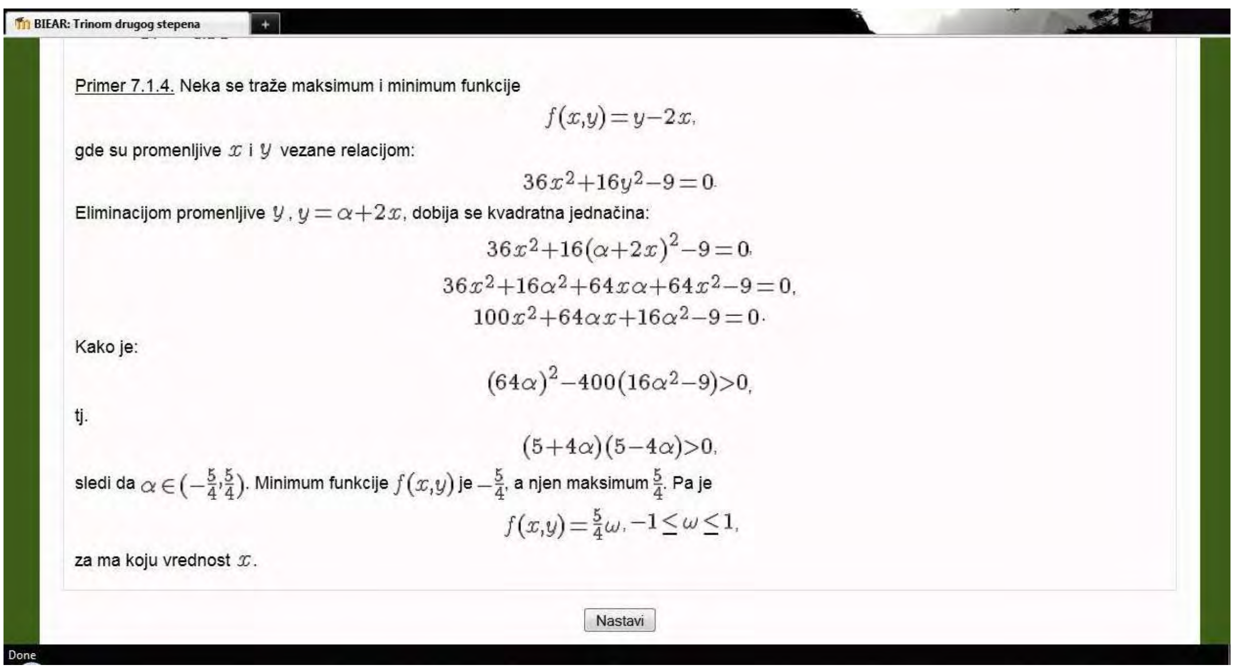
tj.

$$(5+4\alpha)(5-4\alpha) > 0,$$

sledi da $\alpha \in \left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$. Minimum funkcije $f(x, y)$ je $-\frac{5}{4}$, a njen maksimum $\frac{5}{4}$. Pa je:

$$f(x, y) = \frac{5}{4}\omega, \ -1 \le \omega \le 1,$$

za ma koju vrednost x.



Slika 26. Izgled Primera 5.1.3. u Moodle-u

Ovakav način određivanja minimuma i maksimuma funkcije, koji ne zahteva upotrebu izvoda, može se primeniti i šire, a ne samo na polinome prvog i drugog stepena. Analogno prethodnom mogu se odrediti minimum i maksimum funkcije:

$$f(x, y, z, \ldots),$$

u kojoj su promenljive $x, y, z, \ldots$ vezane nekim datim relacijama čiji je broj za jedan manji od broja promenljivih.

Neka je dat trinom $ax^2 + 2bx + c$, gde su a, b, c iz R. Za koje vrednosti x će ovaj trinom uvek imati vrednost sadržanu u datom intervalu (A, B)?

Traži se da je:

$$A < ax^2 + 2bx + c < B,$$

tj. da je istovremeno ispunjeno:

$$ax^2 + 2bx + c - A > 0 \text{ i } ax^2 + 2bx + c - B < 0\,.$$

<u>Primer 5.1.4.</u> Da bi se vrednost trinoma:

$$x^2 - 14x + 50,$$

nalazila u intervalu (5, 26), potrebno je i dovoljno da bude:

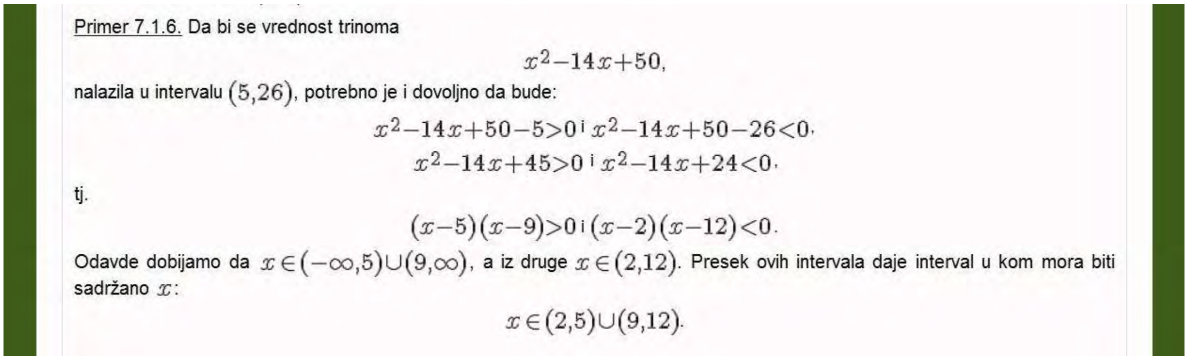
$$x^2 - 14x + 50 - 5 > 0 \text{ i } x^2 - 14x + 50 - 26 < 0,$$

$$x^2 - 14x + 45 > 0 \text{ i } x^2 - 14x + 24 < 0,$$

$$(x-5)(x-9) > 0 \text{ i } (x-2)(x-12) < 0\,.$$

Odavde dobijamo da $x \in (-\infty, 5) \cup (9, +\infty)$, a iz druge $x \in (2, 12)$. Presek ovih intervala daje interval u kom mora biti sadržan x:

$$x \in (2,5) \cup (9,12)\,.$$


Primer 7.1.6. Da bi se vrednost trinoma

$$x^2-14x+50,$$

nalazila u intervalu $(5,26)$, potrebno je i dovoljno da bude:

$$x^2-14x+50-5>0 \text{ i } x^2-14x+50-26<0,$$

$$x^2-14x+45>0 \text{ i } x^2-14x+24<0,$$

tj.

$$(x-5)(x-9)>0 \text{ i } (x-2)(x-12)<0.$$

Odavde dobijamo da $x\in(-\infty,5)\cup(9,\infty)$, a iz druge $x\in(2,12)$. Presek ovih intervala daje interval u kom mora biti sadržano x:

$$x\in(2,5)\cup(9,12).$$

Slika 27. Izgled dela stranice sa Primerom 5.1.4. u Moodle-u

5.2. KOREN REALNOG BROJA

Neka za $x\in R$ važi da je $1+x>0$. Prema Bernulijevoj nejednakosti [11] je:

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

gde jednakost važi za $x=0,$ ili za $n=0,$ ili za $n=1$.

Ukoliko se x zameni sa $x=\frac{h}{n},$ dobija se:

$$\left(1+\frac{h}{n}\right)^n \geq 1+h,$$

a odavde važi:

$$1\leq \sqrt[n]{1+h} \leq 1+\frac{h}{n},$$

za ma kakvo h.

Neka je z bilo koji broj veći od 1. Ako se uvede smena $1+h=z,$ dobija se:

$$1\leq \sqrt[n]{z} \leq 1+\frac{z-1}{n}.$$

Odavde sledi:

$$\sqrt[n]{z} = 1+\frac{\theta}{n}(z-1), 0\leq\theta\leq 1.$$

Ako je z pozitivan broj manji od 1, uzmu li se u nejednačini recipročne vrednosti, dobija se:

$$\frac{1}{1+\frac{h}{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{1+h}} \leq 1.$$

Ukoliko je:

$$\frac{1}{1+h} = z < 1,$$

odnosno:

$$h = \frac{1-z}{z},$$

dobija se:

$$\frac{1}{1+\frac{1-z}{nz}} \leq \sqrt[n]{z} \leq 1,$$

i

$$\sqrt[n]{z} = 1 - \frac{1-z}{1+(n-1)z}(1-\theta), 0 \leq \theta \leq 1,$$

gde $\sqrt[n]{z}$ teži jedinici kada n teži beskonačno. Dobijeni obrasci su od koristi za približno određivanje n-tog korena datog broja.

6. BROJEVNI INTERVALI I NIZOVI

6.1. KOLIČNIK DVA ZBIRA

Tvrđenje 6.1.1. Neka je $a_1, a_2, ..., a_n$ jedan niz realnih brojeva ma kakvog znaka, i neka su $b_1, b_2, ..., b_n$ i $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ dva niza realnih pozitivnih brojeva. Označimo sa N i M najmanji i najveći među brojevima $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ..., \frac{a_n}{b_n}$. Tada uvek važi:

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + ... + \lambda_n b_n} = N + \theta(M - N), 0 \leq \theta \leq 1,$$

za ma kakve članove niza a_k.

Dokaz: Kako je da važi:

$$N \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M,$$

dalje sledi:

$$N\lambda_k \leq \frac{a_k \lambda_k}{b_k} \leq M\lambda_k,$$

$$N\lambda_k b_k \leq a_k \lambda_k \leq M\lambda_k b_k.$$

Menjajući *k* od 1 do *n*, dobija se:

$$N\lambda_1 b_1 \leq a_1 \lambda_1 \leq M\lambda_1 b_1,$$

$$...$$

$$N\lambda_n b_n \leq a_n \lambda_n \leq M\lambda_n b_n.$$

Sabiranjem ovako dobijenih nejednakosti, dobija se:

$$N(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n) \le a_1\lambda_1 + ... + a_n\lambda_n \le M(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n).$$

Deljenjem poslednje nejednakosti zbirom:

$$\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n,$$

dobija se:

$$N \le \frac{a_1\lambda_1 + ... + a_n\lambda_n}{b_1\lambda_1 + ... + b_n\lambda_n} \le M.$$

Odavde sledi:

$$\frac{a_1\lambda_1 + ... + a_n\lambda_n}{b_1\lambda_1 + ... + b_n\lambda_n} = N + \theta(M - N), 0 \le \theta \le 1. \ \blacksquare$$

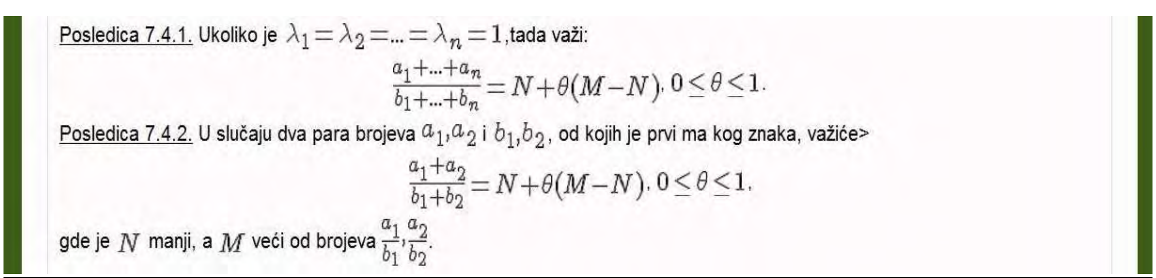
Posledica 6.1.1. Ukoliko je $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 1,$ tada važi:

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{b_1 + ... + b_n} = N + \theta(M - N), 0 \le \theta \le 1.$$

Primer 6.1.1. U slučaju dva para brojeva a_1, a_2 i b_1, b_2, od kojih je prvi ma kog znaka, važiće:

$$\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = N + \theta(M - N), 0 \le \theta \le 1,$$

gde je N manji, a M veći od brojeva $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$.


Posledica 7.4.1. Ukoliko je $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 1$, tada važi:

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{b_1 + ... + b_n} = N + \theta(M - N), 0 \le \theta \le 1.$$

Posledica 7.4.2. U slučaju dva para brojeva a_1, a_2 i b_1, b_2, od kojih je prvi ma kog znaka, važiće>

$$\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = N + \theta(M - N), 0 \le \theta \le 1.$$

gde je N manji, a M veći od brojeva $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$.

Slika 28. Posledice Tvrđenja 7.2.1.

<u>Primer 6.1.2.</u> Neka je:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = x, \lambda_3 = x^2, ..., \lambda_n = x^{n-1}, \quad x > 0 .$$

Ako je:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^{n-1} = f(x),$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^{n-1} = \varphi(x),$$

gde su koeficijenti a_k realni i ma kakvog znaka, a b_k realni i pozitivni, onda je:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = N + \theta(M - N), 0 \le \theta \le 1,$$

gde N označava najmanji, a M najveći od brojeva:

$$\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, ..., \frac{a_n}{b_n} .$$

<u>Primer 6.1.3.</u> Na osnovu prethodnog, možemo zaključiti da vrednost racionalne funkcije:

$$\frac{2 + 5x + 3x^2 + x^3}{4 + 7x + 4x^2 + 8x^3}$$

uvek leži u intervalu $\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{4}\right)$.

6.2. ODNOS IZMEĐU ZBIRA I PROIZVODA

Neka je $a_1, a_2, ..., a_n$ jedan niz pozitivnih brojeva. Zbir elemenata ovog niza označimo sa:

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

a sa P sledeći proizvod:

$$P = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)...(1 + a_n).$$

Iz:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2,$$

zaključuje se da važi sledeća nejednakost:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) > 1 + a_1 + a_2.$$

Množenjem ove nejednakost sa $1 + a_3$, dobija se:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) > (1 + a_1 + a_2)(1 + a_3) > 1 + a_1 + a_2 + a_3.$$

Nastavljajući postupak, dolazi se do nejednakosti:

$$P > 1 + S.$$

Iz:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...,$$

sledi:

$$e^x > 1 + x.$$

Ukoliko se umesto x menjaju vrednosti $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$e^{a_1} > 1 + a_1,$$

$$\dots$$
$$e^{a_n} > 1 + a_n,$$

pa se tako dobijene nejednakosti izmnože, dobijamo se sledeća nejednakost:

$$e^{a_1 + \dots + a_n} > (1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n),$$

$$e^S > P.$$

Odavde je:

$$1 + S < P < e^S,$$

pa se P može zapisati kao:

$$P = 1 + S + \theta(e^S - 1 - S), 0 \le \theta \le 1.$$

Ukoliko se uvedu sledeće smene:

$$1 + a_k = b_k,$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = T = n + S,$$

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n = Q = P,$$

iz jednakosti:

$$P = (1 + S) + \theta(e^s - S - 1), 0 \le \theta \le 1,$$

se dobija:

$$Q = (T - n + 1) + \theta(e^{T-n} - T + n - 1), 0 \le \theta \le 1,$$

čime je ostvarena veza između zbira i proizvoda proizvoljnog broja pozitivnih brojeva.

U slučaju da su $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitivni brojevi manji od jedinice, dobijamo još jedan odnos zbira i proizvoda:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$Q = (1 - a_1)(1 - a_2)\dots(1 - a_n).$$

Iz:

$$(1-a_1)(1-a_2)=1-(a_1+a_2)+a_1a_2,$$

sledi:

$$(1-a_1)(1-a_2)>1-(a_1+a_2).$$

Množenjem ove nejednakosti sa $1-a_3$, dobija se:

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)>[1-(a_1+a_2)](1-a_3)>1-(a_1+a_2+a_3).$$

Nastavljajući postupak dolazi se do nejednakosti:

$$Q>1-S,$$

a kako je $Q<1$, dobija se:

$$1-S<Q<1,$$

odnosno:

$$Q=(1-S)+\theta S, 0\le\theta\le 1.$$

6.3. ZBIR PROIZVODA

Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ i $b_1, b_2, ..., b_n$ dva niza realnih brojeva ma kog znaka i neka je:

$$P = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n .$$

Iz:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2} + 2P,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2} - 2P,$$

dobija se da je:

$$P = \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 \right].$$

Ako se sa N i M označe najmanja i najveća apsolutna vrednost zbirova:

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n,$$

a sa N' i M' najmanja i najveća apsolutna vrednost razlika:

$$a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n,$$

dobijaju se nejednakosti [17]:

$$\frac{n}{4}\left(N^2 - M'^2\right) \le P \quad \text{i} \quad \frac{n}{4}\left(M^2 - N'^2\right) \ge P,$$

gde jednakost važi za $a_i + b_i = a_j + b_j$ i $a_i - b_i = a_j - b_j$, tj. kada su svi brojevi a_k među sobom jednaki, a isto tako i svi b_k. P se sada može zapisati:

$$P = \frac{n}{4}\left[N^2 - M'^2 + \theta\left(M^2 + M'^2 - N^2 - N'^2\right)\right], 0 \le \theta \le 1.$$

Posmatrajući izraz:

$$\left(a_1+b_1\lambda\right)^2+\left(a_2+b_2\lambda\right)^2+\ldots+\left(a_n+b_n\lambda\right)^2,$$

može se zaključiti da on ne može biti jednak nuli ni za kakvu vrednost λ, jer su mu svi članovi pozitivni.

To znači da kvadratna jednačina:

$$C\lambda^2+2B\lambda+A=0,$$

gde je:

$$A=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\ldots+a_n^{\ 2},$$

$$C=b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+\ldots+b_n^{\ 2},$$

$$B=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=P,$$

nema realnih korena, jer je:

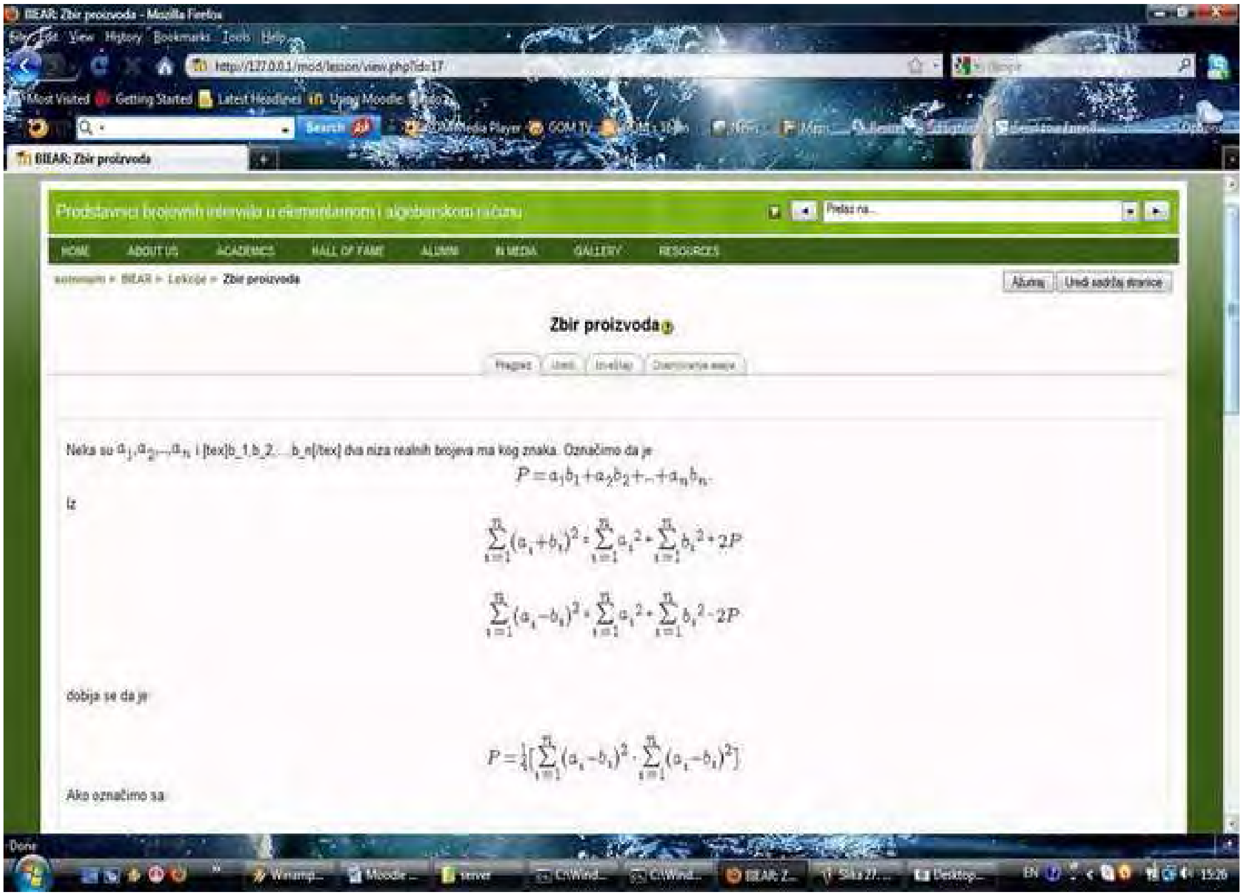
$$4B^2-4AC<0.$$

Odavde dobijamo Košijevu nejednakost [11]:

$$P^2<\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\ldots+a_n^{\ 2}\right)\left(b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+\ldots+b_n^{\ 2}\right).$$

Iz prethodne nejednakosti i nejednakosti $\frac{n}{4}\left(N^2-M'^2\right)\leq P$ sledi da P uvek uzima vrednosti iz intervala:

$$\left(\frac{n}{4}\left(N^2-M'^2\right),\sqrt{AC}\right).$$



Slika 29. Izgled lekcije Zbir proizvoda u Moodle-u

7. BROJEVNI INTERVALI I ARITMETIČKA, GEOMETRIJSKA I HARMONIJSKA SREDINA

7.1. ARITMETIČKA SREDINA

Prisetimo se formule iz glave 6.1.:

$$\frac{a_1\lambda_1 + \ldots + a_n\lambda_n}{b_1\lambda_1 + \ldots + b_n\lambda_n} = N + \theta(M - N), 0 \le \theta \le 1.$$

Ako se uzme da je:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1, \quad b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1,$$

dobija se:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = N + \theta(M - N), 0 \le \theta \le 1,$$

gde su N i M najmanji i najveći među brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ovo znači da se aritmetička sredina jednog niza brojeva uvek nalazi u intervalu između najmanjeg i najvećeg člana tog niza. Granice intervala se dostižu u slučaju kada su svi a_k međusobno jednaki. Tada je $M=N$, pa se granice stapaju u jednu.

Izraz:

$$\frac{(a + b) + |a - b|}{2},$$

za ma kakve realne brojeve a i b je jednak većem od njih.

Ako je $a > b$ onda je izraz jednak broju a i obratno, ako je $a < b$ izraz je jednak broju b. Ukoliko bi važilo $a = b$, tada bi se vrednost izraza poklopila sa oba ova broja.

Ako se sa M obeleži najveći među brojevima $a_1, a_2, ..., a_n$, onda važi nejednakost:

$$\frac{(a_i + a_j) + |a_i - a_j|}{2} \leq M \text{, za sve } i \text{ i sve } j.$$

Ukoliko se indeks j fiksira, a za i se uzmu redom vednosti $1, 2, \ldots, n$, pa se potom dobijene nejednakosti saberu, dobija se:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_j) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i - a_j| \leq nM,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i + \frac{n}{2}a_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i - a_j| \leq nM .$$

Ako se sada u poslednjoj nejednakosti menja indeks j redom vrednostima 1,2,...,n, a potom se dobijene nejednakosti saberu, dobija se:

$$\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i + \frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n}a_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i - a_j| \leq n^2 M .$$

Kada se novodobijena nejednakost podeli sa n^2, onda se dobija:

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}a_i + \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}a_j + \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i - a_j| \leq M .$$

Označimo sa:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

aritmetičku sredinu brojeva a_k, a sa R sledeći izraz:

$$R = \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i - a_j| .$$

Sada dobijamo da važi:

$$A + R \leq M,$$

tj.

$$A \leq M - R.$$

Ovim je nađena gornja granica za *A*. Kako bi se dobila donja granica za *A*, treba posmatrati izraz :

$$\frac{(a+b)-|a-b|}{2},$$

za ma koje brojeve a i b. Ukoliko je $a < b,$ izraz dobija vrednost a, i obratno, ukoliko je $a > b,$ izraz je jednak broju b. Ako se sa *N* označi najmanji među brojevima $a_1, a_2, ..., a_n$, onda važi sledeća nejednakost:

$$\frac{(a_i + a_j)-|a_i - a_j|}{2} \geq N \text{, za sve } i \text{ i } j \text{ iz skupa } N.$$

Slično prethodnom postupku, ukoliko se fiksira indeks *j*, a *i* redom menja sa vrednostima 1,2,…,*n*, pa se potom dobijene nejednakosti saberu, dobija se:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_j) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i - a_j| \geq nN,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{n}{2} a_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i - a_j| \geq nN .$$

Ukoliko se sada u poslednjoj nejednačini j menja sa $1, 2, \dots, n$, a potom se dobijene nejednakosti saberu, dobija se:

$$\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i - a_j| \geq n^2 N .$$

Koristeći iste oznake kao i maločas, dobija se:

$$A - R \geq N,$$

tj.

$$A \geq N + R,$$

čime je dobijena donja granica za *A*.

Nejednakosti:

$$A \leq M - R \quad \text{i} \quad A \geq N + R,$$

nas dovode do novih rezultata.

Označimo sa S sledeći izraz:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| a_i - a_j \right|.$$

Možemo zaključiti da aritmetička sredina *A* brojeva a_k, uvek pripada intervalu:

$$\left(N + \frac{S}{2n^2}, M - \frac{S}{2n^2} \right),$$

pa odavde *A* možemo izraziti formulom:

$$A = N + \frac{S}{2n^2} + \theta \left(M - N - \frac{S}{n^2} \right), 0 \leq \theta \leq 1.$$

Ako bi vrednosti a_k bile međusobno jednake, dobilo bi se da je:

$$S = 0 \quad \text{i} \quad M = N,$$

a interval u kom leži *A* sveo bi se na zajedničku vrednost brojeva a_k [24].

7.2. ODNOS ARITMETIČKE, GEOMETRIJSKE I HARMONIJSKE SREDINE DVA BROJA

Neka su a i b dva pozitivna broja, i neka se sa A, G, H označi njihova aritmetička:

$$A = \frac{a+b}{2},$$

geometrijska:

$$G = \sqrt{ab},$$

i harmonijska sredina:

$$H = \frac{2ab}{a+b}.$$

Iz identiteta:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

se zaključuje da je:

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

tj.

$$G \le A,$$

gde jednakost važi za a=b [15].

Iz drugog identiteta:

$$G^2 = AH,$$

dobija se:

$$G^2 = AH \ge GH,$$

odnosno:

$$G \ge H.$$

Odavde se dobija već poznata nejednakost:

$$H \le G \le A,$$

a dalje se može zapisati da je:

$$G = H + \theta(A - H), 0 \le \theta \le 1,$$

ili

$$\sqrt{ab} = \frac{2ab}{a+b} + \frac{\theta}{2}\frac{(a-b)^2}{a+b}, 0 \le \theta \le 1.$$

Prethodni obrazac se može upotrebiti za izračunavanje kvadratnog korena nekog datog broja sa bilo kojom tačnošću.

Stavi li se da je:

$$A = \frac{a+b}{2}, H = \frac{2ab}{a+b},$$

$$A_1 = \frac{A+H}{2}, H_1 = \frac{2AH}{A+H},$$

$$A_2 = \frac{A_1+H_1}{2}, H_2 = \frac{2A_1H_1}{A_1+H_1},$$

$$\ldots$$

$$A_k = \frac{A_{k-1}+H_{k-1}}{2}, H_k = \frac{2A_{k-1}H_{k-1}}{A_{k-1}+H_{k-1}},$$

Slika 30. Postupak za izračunavanje kvadratnog korena

dobija se:

$$ab = G^2 = AH = A_1H_1 = A_2H_2 = \ldots$$

Iz:

$$G = H + \theta(A - H), 0 \le \theta \le 1,$$

sledi:

$$G = H_k + \theta(A_k - H_k), 0 \le \theta \le 1,$$

za ma koje *k*.

Iz identiteta:

$$A_k - H_k = \frac{A_{k-1} + H_{k-1}}{2} - \frac{2A_{k-1}H_{k-1}}{A_{k-1} + H_{k-1}} = \frac{\left(A_{k-1} - H_{k-1}\right)^2}{2\left(A_{k-1} + H_{k-1}\right)} = \left(A_{k-1} - H_{k-1}\right)\frac{A_{k-1} - H_{k-1}}{2\left(A_{k-1} + H_{k-1}\right)},$$

vidi se da je:

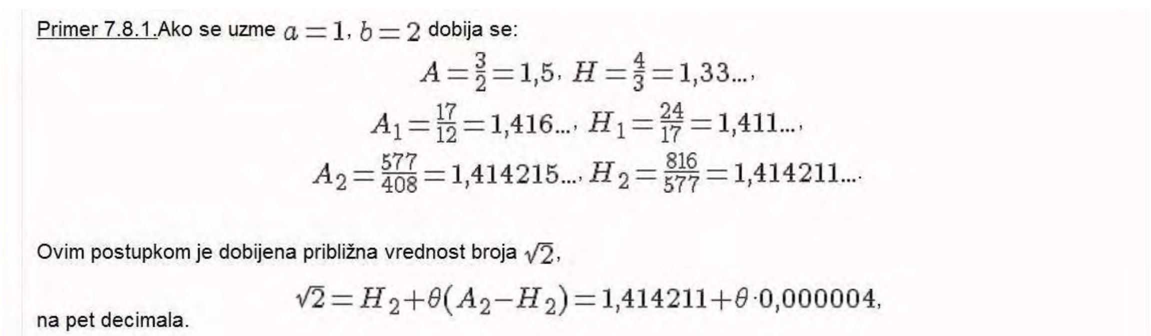
$$A_k - H_k < A_{k-1} - H_{k-1},$$

pa se može zaključiti da član $\theta\left(A_k - H_k\right)$, iz obrasca $G = H_k + \theta\left(A_k - H_k\right)$, opada kako indeks k raste.

Za dovoljno veliko k može se uzeti da je:

$$\sqrt{ab} = H_k .$$

<u>Primer 7.2.1.</u> Ako se uzme da je *a=1* i *b=2*, dobija se:



<u>Primer 7.8.1.</u>Ako se uzme $a=1$, $b=2$ dobija se:

$$A=\frac{3}{2}=1{,}5,\ H=\frac{4}{3}=1{,}33\ldots,$$

$$A_1=\frac{17}{12}=1{,}416\ldots,\ H_1=\frac{24}{17}=1{,}411\ldots,$$

$$A_2=\frac{577}{408}=1{,}414215\ldots,\ H_2=\frac{816}{577}=1{,}414211\ldots.$$

Ovim postupkom je dobijena približna vrednost broja $\sqrt{2}$,

$$\sqrt{2}=H_2+\theta(A_2-H_2)=1{,}414211+\theta\cdot 0{,}000004,$$

na pet decimala.

Slika 31. Postupak za izračunavanje $\sqrt{2}$

Ovim postupkom je dobijena približna vrednost broja $\sqrt{2}$,

$$\sqrt{2} = H_2 + \theta\left(A_2 - H_2\right) = 1{,}414211 + \theta \cdot 0{,}000004,$$

na pet decimal [22].

ZAKLJUČAK

Na temelju elaboriranog možemo zaključiti da računanje sa brojevnim intervalima pri rešavanju pojedinih problema ima prednost nad običnim računom. Ova prednost se vidi u činjenici da se iz nepotpuno određenih odnosa može doći do potpuno tačnih rezultata.

U ovom radu:

– uvedeni su osnovni pojmovi intervalne algebre i računski predstavnici ovih pojmova,

– prikazane su neke od transformacija koje se mogu vršiti nad definisanim računskim predstavnicima brojevnih intervala, kao i konkretni primeri u kojima se navedene transformacije mogu primeniti,

– izložen je još jedan način za pronalaženje ekstremnih vrednosti funkcija bez korišćenja izvoda funkcije,

– izvedeni su obrasci za približno određivanje *n*-tog korena datog broja,

– prikazana je metoda za određivanje vrednosti zadate racionalne funkcije,

– izvedeni su odnosi zbira i proizvoda članova niza pozitivnih brojeva, kao i odnosi zbira i proizvoda dva niza realnih brojeva,

– prikazan je još jedan način za određivanje odnosa aritmetičke, geometrijske i harmonijeske sredine dva broja,

– izveden je obrazac za izračunavanje kvadratnog korena nekog broja sa bilo kojom tačnošću.

Rad je urađen u softverskom paketu *Moodle* kroz uredno izložene lekcije. Spomenuti paket predstavlja jedno od novijih oruđa za razmenu informacija, učenje i proširivanje znanja. Jedan od razloga zbog kog je ovaj paket korišćen je njegova dostupnost i otvoren kod. Time je omogućeno njegovo modifikovanje, usavršavanje i prilagođavanje potrebama korisnika, a sve to u cilju da bar deo naše stručne i šire zajednice spozna lakoću kojom znanje i informacije mogu dopreti do pojedinca.

IMENIK

Bernuli, Jakob (Jacob Bernoulli**,** 1654 - 1705) je bio švajcarski matematičar i naučnik, prvi iz čuvene porodice matematičara i profesor Univerziteta u Bazelu. Svojim radovima doprineo je razvoju infinitezimalnog računa (između ostalog, otkrio je lemniskatu i lančanicu). Sa bratom Johanom započeo je izgradnju varijacionog računa, uticao je na razvoj teorije verovatnoće i njenih primena. Poznat je Bernulijev zakon velikih brojeva i Bernulijeva nejednakost koju je dokazao za sve prirodne brojeve veće ili jednake od dva. Kasnije je dokazano da Bernulijeva nejednakost važi za sve realne brojeve veće ili jednake od -1, a danas je poznato da ta nejednakost važi za sve realne brojeve veće ili jednake od -2. Vrlo je zanimljivo istaći da je porodica Bernuli u svojim dvema generacijam dala čak osam matematičara, među kojima su najistaknutiji Jakob, Johan i Danijel Bernuli.

Diofant iz Aleksandrije (živeo oko 250. godine nove ere) uprkos tome što je bio istaknut grčki matematičar, vrlo se malo zna o njegovom životu. Njegov rad je sačuvan u šest poglavlja *Aritmetike* koja su dospela do nas, dok je ostalih šest poglavlja izgubljeno. Ovo je najverovatnije bio najstariji sistematski trakt o algebri. Diofant se prvenstveno interesovao za teoriju brojeva i rešavanje jednačina. Mnogo je doprineo napretku algebre upotrebom simbola za veličine, matematičke operacije i odnose, jer su pre toga ove veličine bile opisane rečima. Možda je najpoznatiji po svom otkriću Diofantovih jednačina, neodređenih jednačina s racionalnim koeficijentima za koje se traži racionalno rešenje.

Petrović, Mihailo Alas (1868-1943) bio je jedan od najistaknutijih srpskih matematičara, profesor Beogradskog univerziteta, akademik Skprske kraljevske akademije i alas. Zahvaljujući Petrovićevim radovima iz oblasti diferencijalnih jednačina srpska matematika je prvi put izašla na međunarodnu scenu. Bavio se i drugim oblastima kao što su funkcije kompleksne promenljive, integralni račun, aritmetika, nejednakosti, polinomi i opšta fenomenologija. Imao je mnogo ideja koje nije stizao da obradi do detalja. Stoga se proučavanjem njegovih rasprava, naročito iz oblasti diferencijalnih jednačina, mogu naći ideje za nova istraživanja.

Koši, Ogisten Luj (Augustin Louis Cauchy, 1789-1857) bio je istaknuti francuski matematičar, profesor univerziteta u Parizu, jedan od tvoraca teorije funkcija kompleksne promenljive. Objavio je radove iz raznih oblasti matematike i njenih primena, kao što su teorija brojeva, matematička analiza, teorija diferencijalnih i parcjalnih jednačina, teorija poliedara, teorijska i nebeska mehanika, matematička fizika itd. Takođe je postavljao i rešavao nove probleme i uvodio nove pojmove i nove metode. Uveo je termine modula i argumenta kompleksnog broja, konjugovane kompleksne brojeve i ostale.[16]

LITERATURA

[1] Free Software Foundation, Inc., Boston, http://www.moodle.org, decembar 2009.

[2] Ungar, Š.: *Ne baš tako kratak uvod u Tex*, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osjeku, Osijek, 2002.

[3] Ljaško,I.I., Borčuk, A.K., Gaj, J.G. i Golovač, G.P.: *Zbirka zadataka iz matematičke analize*, IBC'98, Beograd, 2002.

[4] Andrić, V.: *Diofantove jednačine*, Društvo matematičara Srbije, Valjevska gimnazija, Valjevo, 2008.

[5] Muhammad, G.: *Interval arithmetic*, University of Oxford, 1975.

[6] Radunović, D.: *Numeričke metode*, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1998.

[7] Petrović, M.: *Računanje s brojnim razmacima*, Građevinska knjiga, Beograd, 1969.

[8] Kosheleva, O. & Vroegindeweij, P.G.: *When is the product of intervals also interval?*, Reliable Computing, Springer, 1998., vol. 4

[9] Miller, F.P., Vandome, A.F. & McBrewster, J.: *Interval Arithmetic*, VDM Publishing House Ltd., 2009.

[10] Si Kaddour, H.: *A note on the length of members of an interval algebra*, Algebra Universalis, Birkhäuser Basel, 2000., vol. 44

[11] Kadelburg, Z., Đukić, D., Lukić, M. i Matić, I.: *Nejednakosti*, Društvo matematičara Srbije, Beograd 2003.

[12] Klašnja, S.: *Elementarna matematika i algebra*, Sarajevo, 1963.

[13] Березин, В.Н., Березина, Л.Ю. & Николъская, И.Л.: *Сборник задач для факулътативных и внеклассных занятий по математике*, Москва, 1985.

[14] Devide, V.: *Zbirka elementarnih ali težih matematičkih zadataka*, Zagreb, 1971.

[15] Tomić, I.: *Nejednakosti*, Krug, Beograd, 1999.

[16] Božić, M.: *Pregled istorije i filozofije matematike,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2002.

[17] Dhompongsa, S., Kreinovich, V. & Nguyen, H.T., NASA, Future Aerospace Science and Technology Program, USAF, http://www.cs.utep.edu/vladik/2001/tr01-29.pdf, decembar, 2009.

[18] Garloff, J., Freiburg Interval Library, http://www.cs.utep.edu/interval-comp/bibl.html decembar 2009.

[19] Oxford Study Courses, UK/USA, http://www.pdfgeni.com/book/IB-mathematics-interval-notation-pdf.html, januar 2010.

[20] Weisstein, E.W., Wolfram Research Inc., http://mathworld.wolfram.com/IntervalArithmetic.html, decembar 2009.

[21] Indian Institute of Technology Kanpur, http://home.iitk.ac.in/~amit/interval, decembar 2009.

[22] Sunaga, T., Институт вычислительных технологий СО РАН, http://www-sbras.nsc.ru/interval/Introduction/sunaga.pdf, decembar 2009.

[23] Jansson, C., The Pennsylvania State University, http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.80.2143, januar 2010.

[24] Pownuk, A., The University of Texas at El Paso, http://www.pownuk.com/IntervalEquations.htm, decembar 2009.

[25] 2020ok Directory of Free Online Books and Free eBooks, http://2020ok.com/13895.htm, januar 2010.