МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

СПЕЦИФИЧНОСТИ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ У ЕКОНОМСКОЈ ШКОЛИ

(МАСТЕР РАД)

Ментор: проф. др. АЛЕКСАНДАР ЛИПКОВСКИ

Студент: АЛЕКСАНДАР СЕНИЋ
Број индекса: 1046/2008
Смер: Професор математике и рачунарства

Београд, март 2010. године

САДРЖАЈ

1. УВОД 2

2. СПЕЦИФИЧНОСТИ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ У ЕКОНОМСКОЈ ШКОЛИ 4

2.1. НАСТАВНИ САДРЖАЈИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ СПЕЦИФИЧНИ ЗА ЕКОНОМСКЕ ШКОЛЕ 5

2.1.1. ПРОЦЕНТНИ РАЧУН И ПРОСТ КАМАТНИ РАЧУН 5

2.1.2. СЛОЖЕН КАМАТНИ РАЧУН 7

2.1.3. ДЕКУРЗИВНИ ОБРАЧУН КАМАТЕ 9

2.1.4. ПОЈАМ ТРАЖЊЕ, ПОНУДЕ И ЕЛАСТИЧНОСТИ 14

2.1.4.1. Тражња и понуда 14

2.1.4.2. Тражња – крива тражње: однос између цене и тражене количине 14

2.1.4.3. Понуда – крива понуде: однос између цене и понуђене количине 15

2.1.4.4. Равнотежа понуде и тражње 17

2.1.5. ЕЛАСТИЧНОСТ 17

2.1.5.1. Ценовна еластичност тражње и њене детерминанте 17

2.1.5.2. Ценовна еластичност понуде и њене детерминанте 19

2.1.6. ПРИМЕНА ИЗВОДА НА ЕКОНОМСКЕ ФУНКЦИЈЕ 20

2.1.6.1. Функција тражње 21

2.1.6.2. Функција укупног прихода 22

2.1.6.3. Максимум прихода 22

2.1.6.4. Функција укупних трошкова 24

2.1.6.5. Функција просечних трошкова производње 25

2.1.6.6. Функција граничних трошкова 25

2.1.6.7. Функција добити 26

2.1.6.8. Еластичност економских функција 28

2.1.6.9. Еластичност тражње 28

2.1.6.10. Еластичност прихода 29

2.1.7. ЗАЈМОВИ 31

2.1.7.1. Амортизација зајмова 31

2.1.7.2. Зајмови који се отплаћују једнаким ануитетима са декурзивним рачунањем интереса 31

2.1.7.3. Зајмови који се амортизују једнаким ануитетима који су чешћи од обрачуна камате 35

2.2. ПЛАНОВИ И ПРОГРАМИ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ У ЕКОНОМСКОЈ ШКОЛИ У ФУНКЦИЈИ ОСПОСОБЉАВАЊА УЧЕНИКА ЗА РАД 40

2.2.1. Остваривање циљева, задатака и исхода наставе математике у економским школама 42

2.2.2. Недостаци и мане нових образовних профила 47

2.2.3. Промене у наставним садржајима математике 48

2.2.4. Стручна и методичка оспособљеност професора математике за реализацију наставних програма економске струке 49

2.2.5. Уџбеници и збирке задатака за економске школе 51

2.2.6. Корелација на ставних садржаја математике и наставних садржаја осталих предмета 51

ЛИТЕРАТУРА 54

1. УВОД

Познато је да су још стари народи веома ценили математику, а њихови филозофи су своја учења често математиком започињали. Велики грчки филозоф Платон (427. - 347. године п.н.е.), оснивач прве институционализоване филозофске школе Старе Грчке, високо је ценио математику. На улазу у његову академију писало је: "*Нека не улази нико ко не зна математику.*" У новом веку, упоредо са математиком, а под њеним окриљем, развијале су се све остале природне науке. Огист Конт (*Auguste Comte* 1798 —1857), француски математичар, филозоф и мислилац каже: "*Математика је најмоћније оруђе, којим се дух човечији може послужити при проучавању природних појава.*" Американац Џозеф Реј (Joseph Ray) 1948. године у својој књизи "*New Elementary Algebra*" написао је: "Учење математике има двоструки циљ, стицање корисног знања и култивисање и дисциплиновање менталних снага. Родитељ често пита: *Зашто мој син треба да учи математику? Ја не очекујем од њега да буде мерач земљишта, инжењер, или астроном.* А ипак, тај исти родитељ жарко жели да му син буде у стању да правилно мисли и да у свим животним ситуацијама користи снаге једног култивисаног и дисциплинованог духа. То је, заиста, вредније од простог усвајања било које области знања."

Математика је наставни предмет који је кумулативан и који се непрекидно проширује како у теорији тако и у применама. На сваком нивоу учења математике наставник се суочава са два основна проблема:

1) како помоћи ученицима да развију схватање и овладавање новим појмовима, принципима, односима и вештинама

2) како помоћи ученицима да очувају једном постигнуте вештине и схватања

Математика развија интелектуалне, дакле, опште способности човека. Ако је ученик овладао неким школским математичким програмом то ће му омогућити успешнији живот, чак и да математику не користи ни у једној примени.

Сврха општег образовања је: да допринесе припреми ученика за захтеве које поставља живот како оне које ученик сам уочава тако и оне за које га треба научити да их сагледа; да успостави основну везу између знања и свакодневног искуства; да положи темељ основних знања која су неопходна за даљи развој индивидуалних интересовања и посебних способности. Програми предмета које ученици уче у школи треба да буду састављени тако да њиховом добром реализацијом помогну ученику да: успешно мисли, размењује мисли, разликује вредности, доноси одговарајуће судове, одржава и побољшава здравље, учествује у друштву као активан и одговоран грађанин, разборито одабере професију, стекне вештину дограђивања претходно стечених знања, нађе сопствени израз лепог и изгради осећање за лепо, да буде у стању да се емоционално и друштвено прилагођава, разумно одабере своје хобије, схвати и цени своје културно наслеђе, разуме своју физичку околину итд. Програм наставе математике даје значајан допринос остваривању основних задатака општег образовања. Успешно савлађивање програма наставе математике треба да обезбеди: стицање знања потребних за разумевање квантитативних и просторних односа; стицање опште математичке културе; схватање места и значаја математике у развитку људске цивилизације; развијање навика конкретног, апстрактног, интуитивног, аналитичког, функционалног, критичког стваралачког или продуктивног мишљења; развијање логичког закључивања, закључивања по аналогији; размену мисли помоћу симболичких израза и графика; развијање способности доношења одговарајућих судова разликовањем вредности; развијање способности разликовања битних података од небитних; формирање позитивних особина личности (упорност, систематичност, уредност, тачност, одговорност, смисао за самосталан и групни рад, критичност итд.); развијање интелектуалне независности; развијање естетског осећања и способности естетског изражавања; способност ученика за коришћење стручне литературе и других извора знања за учење и проширивање знања; развија способност да уочавање, формулисање, анализирање и решавање проблема; развија способност математичког моделирања (описивања) реалних проблема, појава или процеса и да их успешно решава итд. Основни циљеви наставе математике јесу развијање оних способности разумевања и анализирања односа количине и простора потребних за схватање наше околине и могућности контроле над том околином, способности за процену напретка наше цивилизације у њеним различитим видовима, развијања оних навика мишљења и деловања које ће те способности учинити ефективним у животу сваког појединца.

Према неким истраживањима, у наредних двадесетак година бар 80% свих занимања захтеваће барем елементарно познавање научно-технолошке писмености. Математика је потребна свима јер је веома мали број занимања која не захтевају основна математичка знања и вештине. Свакодневни живот, у којем економија и технологија постају све значајнији елементи, показује да се без математике не може ни ван радног времена. Зато математику можемо третирати као заједнички језик свих наука, технологије и било каквог пословања. Општи задатак наставе математике, без обзира на тип школе и на узраст ученика, састоји се у сталном објашњавању значаја и потребе математике сваком човеку, а на основу тих чињеница развијање интересовања, склоности и љубави према математици. Од тога колико смо успели да развијемо интересовања, склоности и љубав према математици зависи колико ћемо успети да мотивишемо ученике за усвајање математичких знања, а самим тим и за реализацију осталих задатака наставе математике.

Задаци наставе математике условљени су врстом школе и узрастом ученика. Значи један део циљева и задатака наставе математике у стручним школама прилагођен је општим циљевима и задацима одређене стручне школе. Један од посебних задатака наставе математике у економским школама је да оспособи ученике за решавање проблема из привредне и економске делатности и да укаже на везу математике са књиговодством, економијом предузећа, статистиком и другим предметима у овој школи, да усклади навике за планско и економично организовање сваког пословања. Наставни садржаји из математике, у економским школама, усклађени су са општим циљевима стручног образовања за одређени профил и стицању одговарајућих знања, вештина и радних компетенција потребних свршеном ученику тог профила.

2. СПЕЦИФИЧНОСТИ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ У ЕКОНОМСКОЈ ШКОЛИ

План и програм наставе математике у економским школама разликује се од програма математике у гимназијама и другим стручним школама. Постоје наставне теме у програму економских школа које се обрађују само у овим стручним школама. У наведене наставне садржаје спадају Елементи привредне математике и Елементи финансијске математике. Обе теме се јављају и у старим и у новим профилима економске струке. У старом профилу *економски техничар* тема Елементи привредне и финансијске математике обрађује се са 25 часова у трећем разреду и 28 часова и четвртом разреду. У новом, огледном занимању, *пословни администратор* елементи привредне и финансијске математике, такође се обрађују у трећем и четвртом разреду економске школе. У наведеном занимању *пословни администратор* у трећем разреду у оквиру модула функције (48 часова) обрађују се и економске функције (у старом профилу *економски техничар* функције се обрађује у четвртом разреду). Од 96 предвиђених часова математике у IV разреду (3 часа недељно) елементи привредне математике обрађују се са 48 часова, елементи финансијске математике са 30 часова и примери практичне примене привредне и финансијске математике са 18 часова. Значи, у занимању *пословни администратор* у IV разреду елементи привредне и финансијске математике су једини математички садржаји које ученици уче што представља велику специфичност у односу на све остале средње школе.

2.1. НАСТАВНИ САДРЖАЈИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ СПЕЦИФИЧНИ ЗА ЕКОНОМСКЕ ШКОЛЕ

2.1.1. ПРОЦЕНТНИ РАЧУН И ПРОСТ КАМАТНИ РАЧУН

Са процентним рачуном ученици се први пут сусрећу у основној школи. Међутим, проблем је што један део ученика не савлада довољно добро ово градиво, па у средњој школи може у почетку да има проблема. Посебно у економској школи, баратање са процентима је нешто што мора да се зна.

Дефиниција:

Проценат неке величине a је стоти део те величине: $1\%a = \frac{a}{100} = 0.01a$

Углавном се сви проблеми везани за процентни рачун могу решити са знањем из основне школе и наравно уз малу помоћ логичког размишљања. Али у првом разреду економске школе уче се и одређене формуле које се могу користити за решавање тих проблема.

$$G:100 = P:p$$
$$(G+P):(100+p) = P:p$$
$$(G-P):(100-p) = P:p$$

G - главница, P - процентни износ или принос, p - проценат, 100 - стална величина, $G+P$ - увећана главница, $G-P$ - умањена главница.

Пример:

Роба је са 5% губитка продата за 212 135 динара. Одредити набавну цену робе?

$p = 5\%$
$G - P = 212135$
$G = ?$

$(G-P):(100-p) = P:p$
$212135:(100-5) = P:5$
$212135:95 = P:5$
$P = 11165$

$G - P = 212135$
$G = 212135 + P$
$G = 223300$

Због чега су ове формуле значајне? Сем што могу мало да олакшају решавање задатака, оне су веома значајне за увођење формула које су неопходне за каматни рачун. Каматни рачун је интересантна, важна тема, и што је најважније, то је тема коју треба обрађивати кроз практичне примере. Говори се о кредитима, зајмовима, камати, врстама камата итд. У првом разреду свих средњих школа ради се прост каматни рачун, полазећи од дефиниције каматног рачуна, која је основа за све се даље ради из ове области.

$$K : 100 = I : (p \cdot t)$$

K - капитал, 100 - стална величина, I - камата или интерес, p - каматна (интересна) стопа, t - време

Из предходне формуле изведена је готова формула за рачунање интереса (камате), која се најчешће користи:

$$I = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$$

Ова формула се користи у више облика, у зависности од тога шта је дато за време. За време могу бити дате године, месеци и дани.

Ако су за време дате године, онда је t = g : $I = \frac{K \cdot p \cdot g}{100}$

Ако су за време дати месеци, онда је t = m : $I = \frac{K \cdot p \cdot m}{1200}$

Ако су за време дати дани, онда је t = d : $I = \frac{K \cdot p \cdot d}{36000}$ или $I = \frac{K \cdot p \cdot d}{36500}$

Када је време дато у данима, проста камата израчунава се на различите начине. Користи се француска, немачка или енглеска метода.

Француска метода претпоставља да се дани рачунају по календару и да година има 360 дана, што се означава кратко, уз каматну стопу (k , 360).

Немачка метода претпоставља да се дани рачунају тако што се узима да сваки месец има 30 дана, а година 360 дана, ознака (30, 360).

Енглеска метода претпоставља да се дани рачунају по календару и да година има 365 дана (преступна 366 дана), ознака (k , 365).

Пример:

Коју ће камату донети капитал од 45 000 динара од 17.5. до 21.9. (k , 360), уз каматну стопу 35% ?

Да би смо решили задатак, потребно је прво одредити време:

мај	31-17	=	14дана
јун		=	30дана
јул		=	31дан
август		=	31дан
септембар		=	21дан
укупно дана		=	127дана

применом ($I = \dfrac{K \cdot p \cdot d}{36000}$), добија се: $I = \dfrac{K \cdot p \cdot d}{36000} = \dfrac{45000 \cdot 35 \cdot 127}{36000} = 5556{,}25$.

2.1.2. СЛОЖЕН КАМАТНИ РАЧУН

У првом разреду средње школе раде се само основе каматног рачуна, док се у трећем разреду каматни рачун детаљно обрађује. У ствари, у трећем разреду се озбиљно крећу да раде елементи привредне и финансијске математике.

Видели смо како се примењује прост каматни рачун. Међутим ово је само груба рачуница, и ако желимо да подигнемо неки кредит у банци користи се мало прецизнија и сложенија рачуница. Користи се сложен каматни рачун. Прво морамо да видимо како ћемо обрачунавати камату, јер постоји више начина за обрачун камате.

Обрачун камате се врши **декурзивно**[1] и **антиципативно**[2].

Декурзивни обрачун камате значи да се камата обрачунава и исплаћује или додаје главници крајем обрачунског периода. Ова камата обрачунава се на вредност главнице са почетка обрачунског периода.

Антиципативни обрачун камате значи да се камата обрачунава и одузима од главнице унапред, почетком сваког обрачунског периода. Овај обрачун врши се на вредност главнице са краја обрачунског периода.

Да би смо боље уочили разлику између ова два обрачуна камате, наводимо следеће примере:

Пример:

а) Уложено је у банку 92 динара на време од једне године, из каматну стопу од 8% годишње. Колика је увећана вредност ове суме декурзивним обрачуном камате?

На крају године обрачуна се камата на износ од 92 динара, што износи 7,36 динара. Ова камата се додаје главници, па је увећана вредност на крају године 99,36 динара.

б) Позајмили смо 100 динара за време од једне године, уз каматну стопу од 8% годишње и антиципативно рачунање камате.

На износ од 100 динара банка унапред обрачуна камату, што износи 8 динара и одузима од 100, па је почетна вредност коју банка исплаћује 92 динара. На крају прве године наш дуг, односно увећана вредност износи 92+8=100 динара.

---

[1] латински decurrere - превалити, претрчати

[2] латински anticipare - узети унапред

Уколико су исти почетна вредност, време и каматна стопа, може се закључити да је камата обрачуната антиципативно увек већа од камате обрачунате декурзивно. Према томе, за дужника је повољнији декурзивни обрачун камате.

Обрачунавање камате и додавање главници назива се **капиталисање** (**укамаћивање**). Капиталисање може бити везано за различите периоде: годину, семестар, тромесечје, месец. У пракси се најчешће примењује годишње капиталисање.

У сложеном каматном рачуну каматна стопа своди се на период капиталисања. Стога ће се увек поред стопе назначити на који се период односи. Ако је стопа годишња (**per annum**), означава се са (**pa**), полугодишња (**per semestre**) са (**ps**), тромесечна (**per quartale**) са (**pq**), а месечна (**per mensem**) са (**pm**).

У следећем примеру, наведено је како се обрачунава камата применом простог, а затим применом сложеног каматног рачуна.

Пример:

Сума од 50 000 динара уложена је на 4 године, уз каматну стопу од 7,5% годишње. Камата се обрачунава крајем године. Извршити тај обрачун применом:

а) простог,

б) сложеног каматног рачуна.

а) применом ($I = \dfrac{K \cdot p \cdot g}{100}$), добија се:

$$I = \frac{K \cdot p \cdot g}{100} = \frac{50000 \cdot 7{,}5 \cdot 4}{100} = 15000 \text{ динара}$$

б)

Почетна сума	**50 000**
+ 7,5% од 50 000	3 750
Стање на крају прве године	53 750
+ 7,5% од 53 750	4 031,25
Стање на крају друге године	57 781,25
+ 7,5% од 53 750	4 333,59
Стање на крају треће године	62 114,84
+ 7,5% од 62 114,84	4 658,61
Стање на крају четврте године	66 773,45

Сложена камата је разлика између коначне и почетне вредности, тј. :

66 773,45 - 50 000 = **16 773,45.**

Као што се види, сложена камата је већа од просте јер се за сваку следећу годину камата обрачунава на увећану главницу, односно применили смо декурзивни обрачун камате.

У предходном примеру, наведено је како се поступно рачуна камата применом сложеног каматног рачуна. Међутим, овај поступак се може скратити.

2.1.3. ДЕКУРЗИВНИ ОБРАЧУН КАМАТЕ

Вредност капитала који се даје под интерес назива се садашња вредност капитала и обележава се са K_0. Вредност на коју нараста капитал дат под интерес на интерес за одређени број периода назива се крајња вредност капитала или капитал увећан за интерес и обележава се са K_n.

У следећем примеру, објашњено је како се врши израчунавање крајње вредности капитала.

Пример:
На коју ће суму нарасти капитал од K_0 *динара дат под интерес на интерес за* n *година уз* $p\%$ ***(pa)***[3] *и годишње капиталисање ако је рачунање интереса декурзивно.*

Ако се прост интерес који се додаје капиталу на крају прве године не подигне већ се додаје постојећем капиталу, капитал на крају прве године износиће:

$$\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_0 + \frac{\mathrm{K}_0 p}{100} = \mathrm{K}_0(1 + \frac{p}{100})$$

Овај капитал K_1 се у другој години поново укамаћује па ће износ на крају друге године бити:

$$\mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_1 + \frac{\mathrm{K}_1 p}{100} = \mathrm{K}_1(1 + \frac{p}{100}) = \mathrm{K}_0(1 + \frac{p}{100})^2$$

На крају треће године износ ће бити:

$$\mathrm{K}_3 = \mathrm{K}_2 + \frac{\mathrm{K}_2 p}{100} = \mathrm{K}_2(1 + \frac{p}{100}) = \mathrm{K}_0(1 + \frac{p}{100})^3$$

и аналогно томе имамо и за n–ту годину:

---

[3] (pa) per anum – годишња каматна стопа

$$K_n = K_{n-1} + \frac{K_{n-1}p}{100} = K_{n-1}(1+\frac{p}{100}) = K_0(1+\frac{p}{100})^n$$

Дакле, капитал K_0 при годишњем укамаћивању каматном стопом p за n година нарасте на крајњу вредност K_n.

Добили смо један геометријски низ $K_0, K_1, K_2, ..., K_n$ где је K_0 први члан, а $1+\frac{p}{100}$ је количник геометријског низа.

Формула за крајњу вредност капитала K_n се добија када се почетна вредност капитала помножи n–тим степеном израза $(1+i)$ где је:

$$i = \frac{p}{100}$$

Израз:

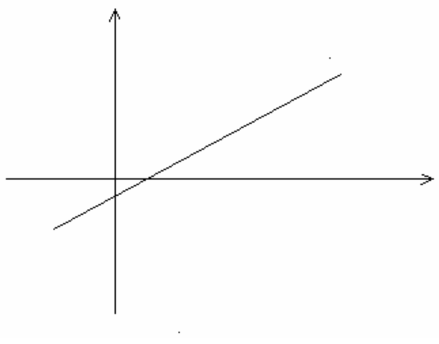
$$1+\frac{p}{100}$$

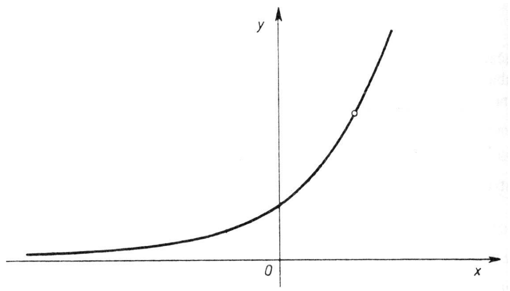
назива се **сложени декурзивни чинитељ** и обележава се малим словом r.

Он представља вредност једне новчане јединице увећане за камату на крају једног обрачунског периода уз декурузивно рачунање камате.

Уколико потражимо n–ти степен сложеног декурзивног интересног чинитеља, добићемо **фактор акумулације**, који представља крајњу вредност једног динара на крају n–те године уложеног уз интерес по стопи $p\%$ декурзивно.

Док код простог каматног рачуна капитал расте **линеарно**, код примене сложеног каматног рачуна капитал расте **експоненцијално**, као функција од времена n.





Вредност декурзивног интересног фактора за одређене проценте и за одређено време можемо прочитати из првих финансијских таблица. Видећемо у следећој табели као изгледају те таблице само за неке одређене вредности.

$$I_p^n$$

$n \setminus p$	5,25%	5,50%	5,75%	6,00%	6,25%	7,50%
1	1,05250000	1,05500000	1,05750000	1,06000000	1,06250000	1,07500000
2	1,10775625	1,11302500	1,11830625	1,12360000	1,12890625	1,15562500
3	1,16591345	1,17424138	1,18260886	1,19101600	1,19946289	1,24229688
4	1,22712391	1,23882465	1,25060887	1,26247696	1,27442932	1,33546914
5	1,29154791	1,30696001	1,32251888	1,33822558	1,35408115	1,43562933

Према томе:

$$(1+\frac{p}{100})^n = r^n = I_p^n .$$

Крајња вредност капитала се израчунава како смо већ видели по формули:

$$\mathrm{K}_n = \mathrm{K}_0(1+\frac{p}{100})^n \qquad \text{или} \qquad \mathrm{K}_n = \mathrm{K}_0 I_p^n .$$

Из ове једначине може се одредити фактор акумулације:

$$(1+i)^n = \frac{\mathrm{K}_n}{\mathrm{K}_0}$$

односно после кореновања:

$$1+i = \sqrt[n]{\frac{\mathrm{K}_n}{\mathrm{K}_0}} .$$

Одавде се може одредити каматна стопа p:

$$1+\frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{\mathrm{K}_n}{\mathrm{K}_0}} \qquad \text{тј.} \qquad p = 100(\sqrt[n]{\frac{\mathrm{K}_n}{\mathrm{K}_0}} - 1) .$$

Ако је непознато време укамаћења онда ћемо га одредити логаритмовањем израза $(1+i)^n = \frac{\mathrm{K}_n}{\mathrm{K}_0}$:

$$n\log(1+i) = \log\frac{\mathrm{K}_n}{\mathrm{K}_0} \Rightarrow n = \frac{\log \mathrm{K}_n - \log \mathrm{K}_0}{\log(1+i)} .$$

Пример који је урађен у поглављу *Сложен каматни рачун*, поступно, користећи сложен каматни рачун, може се урадити и директно помоћу формула које су изведене.
Да се подсетимо како је пример гласио:

Пример:
Сума од 50 000 динара уложена је на 4 године, уз каматну стопу од 7,5% годишње. Камата се обрачунава крајем године. Извршити тај обрачун.

I начин

$K_0 = 50000$

$n = 4$

$p = 7{,}5\%$

$$K_n = K_0(1+\frac{p}{100})^n = 50000(1+\frac{7{,}5}{100})^4 = 66773{,}45$$

$$I = K_n - K_0 = 66773{,}5 - 50000 = 16773{,}45$$

II начин (помоћу таблица)

$K_0 = 50000`$

$n = 4$

$p = 7{,}5\%$

$$K_n = K_0(1+\frac{p}{100})^n = K_0 I_p^n$$

Прочитамо из таблице вредност за $I_{7,5}^4 = 1{,}33546914$.

$K_n = K_0 I_{7,5}^4 = 50000 \cdot 1{,}33546914 = 66773{,}45$

Пример:
На колики износ нарасте капитал од 10 000 еура ако је уложен у банку на три године са годишњом интересном стопом од 8% и капиталисање је:

а) годишње,
б) полугодишње,
в) квартално.

$K_0 = 10000$ $n = 3$ $p = 8\%$

а) У питању је годишње капиталисање, па све радимо исто по већ изведеној формули

$$K_n = K_0(1+\frac{p}{100})^n = 10000 \cdot (1+\frac{8}{100})^3 = 12597{,}12$$

б) Када је у питању полугодишње капиталисање, ствари се мало мењају. Пошто се камата обрачунава 2 пута годишње, нећемо узимати каматну стопу 8%, већ упола мању каматну стопу 4%. А пошто n представља број обрачунских периода, више неће бити само 3 обрачунска периода, већ 6, јер се камата обрачунава 2 пута годишње. Дакле:

$$p=\frac{8}{2}\%=4\% \qquad \mathrm{K}_n=\mathrm{K}_0(1+\frac{p}{100})^n=10000\cdot(1+\frac{\frac{8}{2}}{100})^{2\cdot 3}=12653{,}19$$
$$n=2\cdot 3=6$$

в) Слично се ради када је у питању квартално капиталисање, годишњу каматну стопу делимо са 4, а број обрачунских периода множимо са 4, јер се сада 4 пута годишње обрачунава камата.

$$p=\frac{8}{4}\%=2\% \qquad \mathrm{K}_n=\mathrm{K}_0(1+\frac{p}{100})^n=10000\cdot(1+\frac{\frac{8}{4}}{100})^{4\cdot 3}=12682,42$$
$$n=4\cdot 3=12$$

Из ових примера можемо извести и готову формулу за рачунање сложеног интереса, ако се капиталисање врши више пута годишње. Са m ћемо обележити број капиталисања у току године:

$$\mathrm{K}_n=\mathrm{K}_0(1+\frac{\frac{p}{m}}{100})^{m\cdot n}$$

2.1.4. ПОЈАМ ТРАЖЊЕ, ПОНУДЕ И ЕЛАСТИЧНОСТИ

2.1.4.1. Тражња и понуда

Пре него што уведемо економске функције, морамо да уведемо појам понуде, тражње и еластичности. Понуда и тражња су две речи које економисти најчешће користе. Понуда и тражња су силе које омогућавају функционисање тржишних економија. Оне одређују количину сваког добра које се производи и цену по којој се оно продаје. Ако желите да сазнате како ће неки догађај или политика утицати на економију, прво треба размислити како ће утицати на понуду и потражњу. Када на Блиском истоку избије рат, цена бензина у САД расте, а цена половног аутомобила опада. Ово је прави пример који говори о функционисању понуде и потражње.

Изрази понуда и тражња односе се на понашање људи када на тржиштима међусобно делују једни на друге. Тржиште је група купаца и продаваца одређеног добра и услуге. Купци као група одређују тражњу за производом, а продавци као група одређују понуду тог производа.

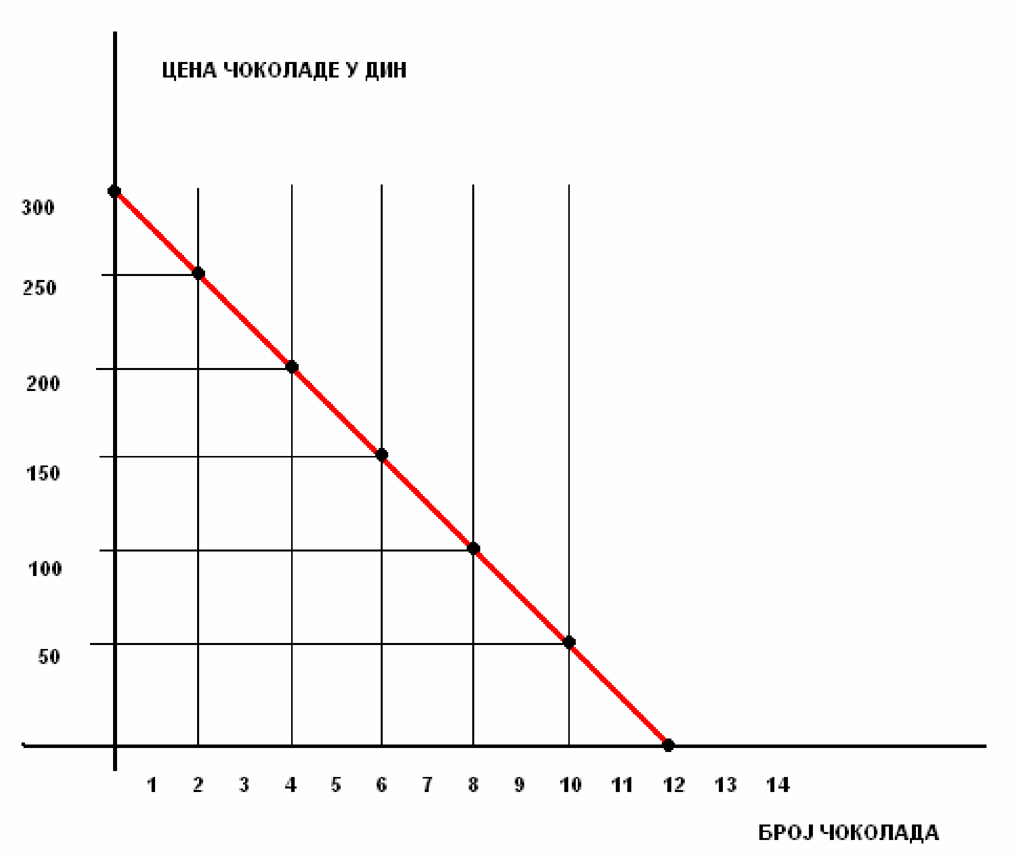
2.1.4.2. Тражња – крива тражње: однос између цене и тражене количине

Тражена количина неког добра јесте количина тог добра коју су купци спремни и у стању да купе. Много тога одређује тражену количину било ког добра (доходак, цене сродних добара, укуси, очекивања, број купаца), али једна детерминанта има кључну улогу, а то је **цена** добра. Претпоставимо да чоколада од 100грама кошта 100динара и да купујемо недељно 8 чоколода. Када би цена чоколаде порасла на 300динара, куповали бисмо мање чоколаде или је уопште не би куповали. А када би цена чоколаде пала на 50динара куповали бисмо више чоколаде. Пошто се тражена количина смањује како цена расте, а повећава како цена опада, кажемо да тражена количина стоји у негативној корелацији са ценом. Овај однос између цене и тражене количине важи за већину добара у економији. Тај однос је толико присутан свуда да га економисти зову:

закон тражње – ако је све остало непромењено, када цена неког добра расте, тражена количина се смањује, а када његова цена пада, тражена количина се повећава.

ЦЕНА ЧОКОЛАДЕ од 100грама	*ТРАЖЕНА КОЛИЧИНА ЧОКОЛАДЕ*
50 динара	10
100 динара	8
150 динара	6
200 динара	4
250 динара	2
300 динара	0

На табели видимо колико месечно купујемо чоколаде, у зависности од тога колика је цена. Ово је уствари **шема тражње** која показује однос између цене добра и тражене количине, под условом да остаје непромењено све оно што утиче на количину добра коју потрошачи желе да купе.



Опадајућа линија која приказује однос између цене и тражене количине зове се **крива тражње**.

2.1.4.3. Понуда – крива понуде: однос између цене и понуђене количине

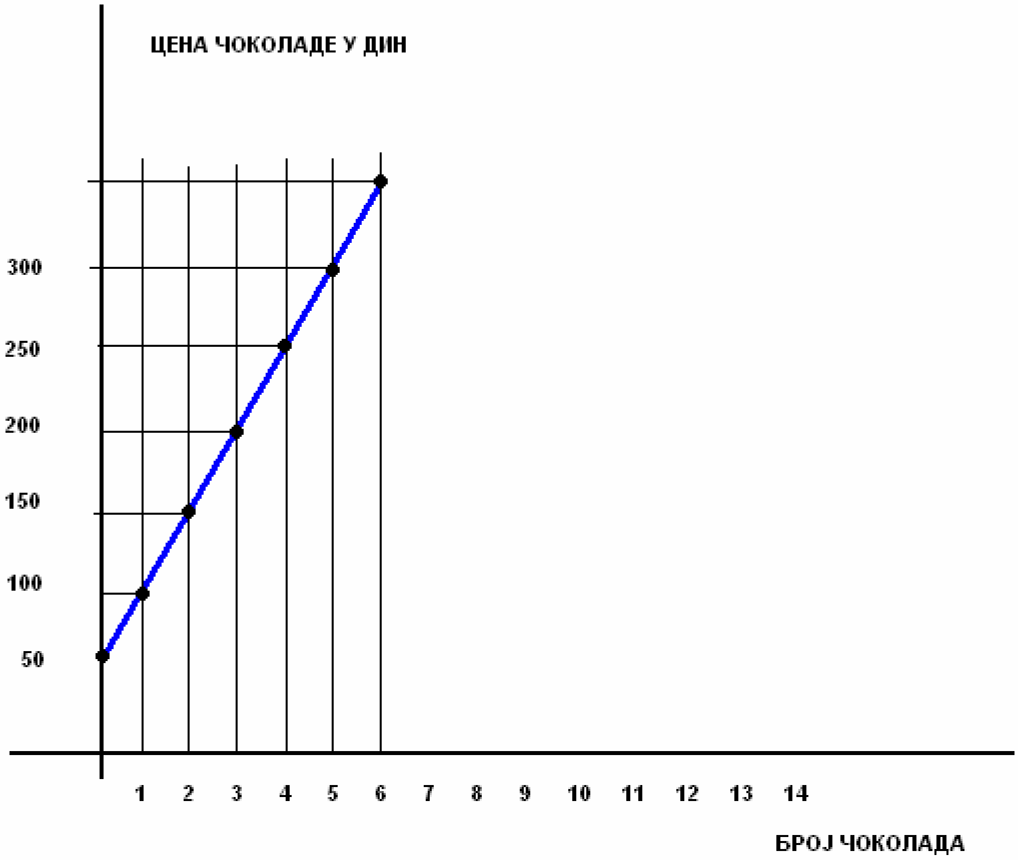
Понуђена количина неког добра или услуге јесте количина коју су продавци спремни и у стању да продају. Као и код тражње, постоје многе детерминанте понуђене количине (цене инпута, технологија, очекивања, број продаваца), али цена опет има кључну улогу. Када је цена чоколаде висока, продаја чоколада је профитабилна, па је понуђена количина велика. Насупрот томе, када је цена чоколаде ниска, посао је мање профитабилан, па продавци имају мање потребе за чоколадом. Пошто понуђена количина расте када цена расте, а пада при паду цена, кажемо да понуђена количина стоји у позитивној корелацији са ценом добра. Овај однос између цене и понуђене количине зове се:

закон понуде – ако је све остало непромењено, када цена неког добра расте, расте и понуђена количина тог добра, а када цена пада, пада и понуђена количина.

ЦЕНА ЧОКОЛАДЕ од 100грама	*ПОНУЂЕНА КОЛИЧИНА ЧОКОЛАДЕ*
100 динара	1
150 динара	2
200 динара	3
250 динара	4
300 динара	5

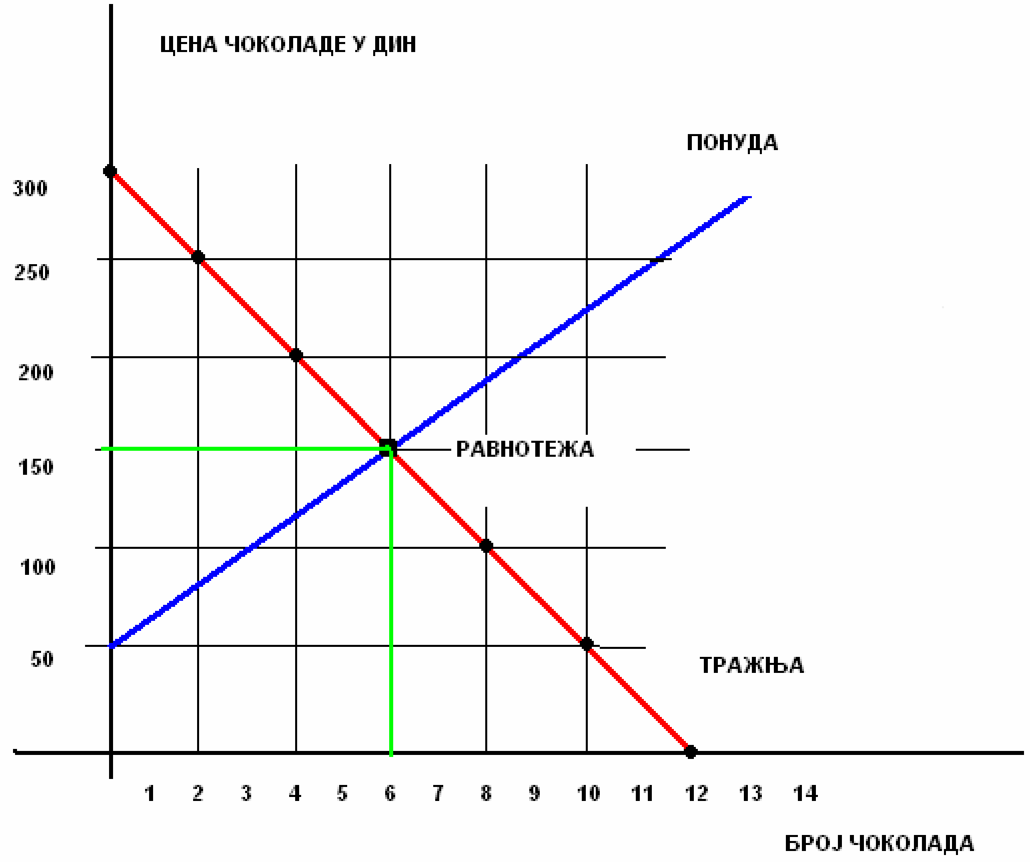
На табели видимо коју количину чоколада нуди продавац чоколада по различитим ценама. Ово је шема понуде, шема која показује однос између цене неког добра и понуђене количине, ако је непромењено све остало што утиче на количину коју продавци желе да продају.

Шема понуде приказује понуђену количину за сваку цену. Ова **крива понуде**, која графички приказује шему понуде, показује како се мења понуђена количина добра када се мења његова цена. Пошто виша цена повећава понуђену количину, крива понуде нагнута је навише.



2.1.4.4. Равнотежа понуде и тражње

Равнотежа се налази у пресеку криве понуде и криве тражње. При равнотежној цени, понуђена количина једнака је траженој количини.



2.1.5. ЕЛАСТИЧНОСТ

На сваком конкурентном тржишту[4] узлазна крива понуде показује понашање продаваца, а опадајућа крива тражње показује понашање купаца. Цена добра се прилагођава како би понуђену и тражену количину добра довела у равнотежу. Да би понуду и тражњу анализирали са већом прецизношћу, уводимо појам еластичности. **Еластичност** показује у којој мери купци и продавци реагују на промене тржишних услова.

2.1.5.1. Ценовна еластичност тражње и њене детерминанте

Према закону тражње, пад цене неког добра повећава тражену количину. **Ценовна еластичност тражње** мери колико тражена количина реагује на промену

---

[4] конкурентно тржиште – тржиште на коме постоји многу купаца и много продаваца, тако да сваки има занемарљив утицај на тржишну цену.

цене. За тражњу за неким добром каже се да је **еластична** ако тражена количина знатно реагује на промену цене. За тражњу се каже да је **нееластична** ако тражена количина само незнатно реагује на промену цене.

Ценовна еластичност тражње за неком добром мери спремност потрошача да се лише тог добра када његова цена расте. Дакле, еластичност рефлектује многе економске, друштвене и психолошке силе које обликују укусе потрошача. Општа правила која одређују ценовну еластичност тражње су:

1. Добра са блиским супститутима[5] обично имају еластичнију тражњу, јер је потрошачима лакше да пређу са једног добра на друго. На пример, бутер и маргарин лако су међусобно замењиви. Мали пораст цене бутера, под претпоставком да је цена маргарина непромењена, доводи до великог пада продате количине бутера. Насупрот томе, пошто су јаја добра без блиског супститута, тражња за јајима је мање еластична него тражња за бутером.
2. Неопходна добра обично имају нееластичну тражњу, док луксузна добра имају еластичну тражњу. Одлазак код лекара се сматра неопходним добром, тако да када цена одласка код лекара расте, људи неће драстично променити број одлазака код лекара. Насупрот томе, када цена једрилица расте, тражена количина једрилица знатно опада.
3. Добра обично имају еластичнију тражњу у току дужег временског хоризонта. Када цена бензина расте, тражена количина бензина првих неколико месеци само незнатно опада. Како време пролази, људи више купују кола која троше мање бензина, прелазе на јавни превоз или се пресељавају ближе радном месту. У року од неколико година, тражена количина бензина знатно опада.

Економисти израчунавају ценовну еластичност тражње тако што процентуалну промену тражене количине деле процентуалном променом цене. Дакле,

$$ЦеновнаЕластичностТражње = \left| \frac{ПроцентуалнаПроменаТраженеКоличине}{ПроцентуалнаПроменаЦене} \right|$$

Пример:

Ако пораст цене неког производа за 10% доводи до пада продате количине за 20%, ценовна еластичност тражње ће бити:

$$ЦеновнаЕластичностТражње = \left| \frac{-20\%}{+10\%} \right| = 2$$

Еластичност је 2, што показује да је промена тражене количине пропорционално двоструко већа од промене цене.

Бољи начин рачунања процентуалних промена и еластичности је **Метод аритметичке средине**. Ако покушате да израчунате ценовну еластичност тражње

---

[5] супститути – два добра која су међусобно замењива (на пример: хамбургер и хот-дог)

између две тачке на криви тражње, убрзо ће се уочити један незгодан проблем: еластичност од тачке А до тачке Б изгледа другачије од еластичности од тачке Б до тачке А.

Пример:

Тачка А: Цена = 4 евра Количина = 120
Тачка Б: Цена = 6 евра Количина = 80.

Ако се крећемо од тачке А до тачке Б, цена расте за 50%, а количина опада за 33%, што показује да ценовна еластичност тражње износи 33/50 = 0,66. Насупрот томе, ако се крећемо од тачке Б до тачке А, цена опада за 33%, а количина расте за 50%, што показује да ценовна еластичност тражње износи 50/33 = 1,5.

Један од начина да се избегне овај проблем јесте коришћење **методе аритметичке средине** за израчунавање еластичности. Методом аритметичке средине процентуална промена се рачуна тако што се вредност промене подели аритметичком средином првобитног и крајњег нивоа вредности. Аритметичка средина за 4 и 6 евра је 5 евра. Дакле, према методу аритметичке средине, промена са 4 на 6 евра узима се као пораст од 40%, јер је $[(6-4)/5]\cdot 100=40\%$. Слично томе, промена са 6 на 4 евра узима се као пад од 40%.

Аритметичка средина за 120 и 80 је 100. Према методу аритметичке средине, промена са 120 на 80 узима се као пад количине од 40%, јер је $[(120-80)/100]\cdot 100=40\%$. Слично томе, промена са 80 на 120 узима се као раст количине за 40%. Дакле, према методу аритметичке средине, када се крећемо од тачке А до тачке Б, цена расте за 40%, а количина опада за 40%. Слично томе, када се крећемо од тачке Б до тачке А, цена опада за 40%, а тражена количина расте за 40%. У оба смера, ценовна еластичност тражње једнака је 1.

Метод аритметичке средине може се изразити помоћу следеће формуле за ценовну еластичност тражње између две тачке означене са: $A(x_1,y_1), Б(x_2,y_2)$.

$$ЦеновнаЕластичностТражње=\left|\frac{(x_2-x_1)/[(x_2+x_1)/2]}{(y_2-y_1)/[(y_2+y_1)/2]}\right|$$

2.1.5.2. Ценовна еластичност понуде и њене детерминанте

Према закону понуде, више цене повећавају понуђену количину. **Ценовна еластичност понуде** мери колико понуђена количина реагује на промену цене. За понуду неког добра каже се да је **еластична** ако понуђена количина знатно реагује на промену цене. За понуду се каже да је **нееластична** ако понуђена количина само незнатно реагује на промену цене.

Кључна детерминанта ценовне еластичности понуде јесте временски период у коме се она разматра. Понуда је обично еластичнија на дуги, него на кратки рок. Током кратких временских периода, предузећа нису у стању да лако промене капацитет својих фабрика како би производили мање или више неког добра. Дакле, на кратки рок, понуђена количина не реагује у знатној мери на цену. Док на дуги рок, понуђена количина може у знатној мери да реагује на промену цену, јер током дужих временских периода, предузећа могу да сагради нове фабрике или затворе старе.

Економисти израчунавају ценовну еластичност понуде тако што процентуалну промену понуђене количине поделе процентуалном променом цене:

$$ЦеновнаЕластичностПонуде = \left|\frac{ПроцентуалнаПроменаПонуђенеКоличине}{ПроцентуалнаПроменаЦене}\right|$$

Претпоставимо, на пример, да пораст цене млека по галону са 2,85 на 3,15 долара по галону[6] повећава количину коју млекари производе са 9 000 на 11 000 галона месечно. Помоћу методе аритметичке средине израчунава се процентуална промена цене на следећи начин:

$$ПроцентуалнаПроменаЦене = \frac{(3,15-2,85)}{3}\cdot 100 = 10\%$$

Слично томе, процентуалну промену понуђене количине изражавамо као:

$$ПроцентуалнаПроменаПонуђенеКоличине = \frac{(11000-9000)}{10000}\cdot 100 = 20\%$$

У овом случају, ценовна еластичност понуде износи:

$$ЦеновнанаЕластичностПонуде = \frac{20\%}{10\%} = 2$$

Еластичност 2 нам говори да се понуђена количина, пропорционално, двоструко мења у односу на цену.

2.1.6. ПРИМЕНА ИЗВОДА НА ЕКОНОМСКЕ ФУНКЦИЈЕ

При утврђивању односа између економских појава уочавају се неке зависности које се могу изразити као функционалне зависности између променљивих величина. Тада говоримо о **економским функцијама**. И за ове функције важе позната правила о понашању функција с тим што је неопходно да променљиве величине имају одговарајући економски смисао. Овде ћемо говорити само о неколико економских функција на које примењујемо знање из израчунавања извода функција.

Како је у примени извода на испитивање економских функција уобичајено да се извод представља као количник диференцијала, најпре ћемо видети дефиницију диференцијала функције.

Дефиниција:

Претпоставимо да функција $f(x)$ има извод у свакој тачки $x \in (a,b)$. Под ***диференцијалом функције*** $f(x)$ у тачки $x \in (a,b)$, који се означава са dy или $df(x)$, подразумева се производ извода $f'(x)$ и прираштаја Δx независно – променљиве. Дакле, важи:

$$df(x) = f'(x)\Delta x,$$

---

[6] галон = 4,54 литара

односно:

$$dy = y'\Delta x.$$

У случају $f(x) = x$, добијамо $df(x) \equiv dx = (x)'\Delta x = \Delta x$, што омогућава да се dy напише у облику:

$$df(x) = f'(x)dx,$$

односно:

$$dy = y'dx.$$

Из предходног следи да за извод важи једнакост:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

односно:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

2.1.6.1. Функција тражње

У условима тржишне привреде тражња за неким производом зависи од великог броја чинилаца. То је најпре цена посматраног производа, а затим су то цене других производа (посебно супститута[7] и комплементарних[8] производа), куповна способност купаца, њихова психологија, време продаје (што је посебно значајно за сезонске производе) итд. Овде ћемо посматрати зависност тражње од цене датог добра, занемарујући све остале чиниоце. Тако поједностављујемо испитивање тражње уз претпоставку да се у посматраном тренутку остали чиниоци не мењају, или да су од малог значаја.

Обележимо тражену количину робе са x, а јединичну цену са p, тада је тражња као функција цене дата у облику:

$$x = f(p).$$

У општем случају када расте јединична цена p, тражња x опада, што значи да је тражња опадајућа функција (**закон тражње – ако је све остало непромењено, када цена неког добра расте, тражена количина се смањује, а када његова цена пада, тражена количина се повећава**). При том, да би функција $f(p)$ могла представљати функцију тражње, треба да је:

1) $p > 0$,
2) $x > 0$,
3) $x' < 0$,

у посматраном интервалу (a,b), који је економски остварљив.

Функцију тражње можемо писати и у инверзном облику:

$$p = \varphi(x),\ p' < 0.$$

---

[7] супститути – два добра која су међусобно замењива (на пример: хамбургер и хот-дог)
[8] комплементи – два добра која се заједно користе (на пример: компјутер и софтвер)

Ту је цена функција количине тражене робе. Овај облик означава и **просечан приход по јединици производа**.

Најчешћи облици функције тражње су:

1) $x = ap + b$,
2) $x = ap^2 + bp + c$,
3) $x = ae^{bp}$,
4) $x = ap^b$.

Параметри a, b и c, који изражавају различите случајеве тражње, одређују се на основу датих цена и њима одговарајућих количина тражене робе познатим математичко–статистичким методама.

2.1.6.2. Функција укупног прихода

Функција укупног прихода или функција прихода, коју означавамо са P, представља производ јединичне цене p и реализоване количине робе x, тј.:

$$P = p \cdot x$$

Функција укупног прихода дефинисана је на истом интервалу као и функција тражње.

Како је $x = f(p)$, та за приход P имамо формулу:

$$P = p \cdot f(p),$$

па је приход изражен у функцији цене, $P = P(p)$.

Ако се користи инверзни облик фунције тражње $p = \varphi(x)$, тада је приход P представљен у облику:

$$P = \varphi(x) \cdot x,$$

односно $P = P(x)$ изражен у функцији реализоване количине производа.

2.1.6.3. Максимум прихода

Претпостављамо да функција прихода $P = p \cdot f(p)$ има извод у интервалу у коме је дефинисана. Њен први извод ће бити:

$$P'(p) = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{P(p+\Delta p) - P(p)}{\Delta p} = \frac{dP}{dp},$$

односно:

$$P'(p) = f(p) + p \cdot f'(p)$$

или:

$$P'(p) = x + p \cdot x'.$$

Изводна функција функције укупног прихода служи за израчунавање максимума прихода, уз коришћење и другог извода. Тако исто, преко првог извода функције прихода посматрамо понашање прихода у зависности од промене цена или тражње. Испитивањем знака прве изводне функције закључујемо да ли укупан приход расте или опада при промени цене или тражње. Први извод функције прихода називамо **функцијом граничног прихода**.

Пример:

Закон тражње неког артикла је $x = \frac{15 - p}{2}$. *Пронаћи:*

а) функцију укупног прихода,
б) функцију граничног прихода.

Функција укупног прихода је $P = p \cdot x$. Пошто је $x = \frac{15 - p}{2}$, следи да је $P = p \cdot x = p \cdot \frac{15 - p}{2} = \frac{15p - p^2}{2}$. Овде је укупан приход представљен у зависности од јединичне цене p. Функцију граничног прихода проналазимо као први извод функције укупног прихода: $P'(p) = (\frac{15p - p^2}{2})' = \frac{15}{2} - p$.

Функција укупног прихода и функција граничних трошкова се може представити и у зависности од количине робе x. Из $x = \frac{15 - p}{2}$, следи да је $p = 15 - 2x$, па је функција укупног прихода је $P = p \cdot x = (15 - 2x)x = 15x - 2x^2$, а функција граничног прихода је $P'(x) = (15x - 2x^2)' = 15 - 4x$.

Пример:

Дата је функција укупног прихода $P = -3p^2 + 48p$. *Одредити:*

а) функцију тражње,
б) цену при којој ће укупан приход достићи максимум,
в) максимум прихода.

а) Пошто је функција укупног прихода $P = p \cdot x = -3p^2 + 48p = p(-3p + 48)$, следи да је фукција тражње $x = -3p + 48$.

б) Да бисмо одредили максимум функције укупног прихода, тражимо њен први извод и изједначимо га са нулом. Потом ћемо израчунати и други извод функције:

$$P'(p) = (-3p^2 + 48p)' = -6p + 48,$$
$$-6p + 48 = 0$$
$$p = 8$$

Како је други извод $P''(p) = (-6p + 48)' = -6$ мањи од нуле, очигледно је да је функција P конкавна и да има максимум при продаји робе по јединичној цени $p_0 = 8$.

в) Максимум прихода је $P(p_0) = -3p_0^2 + 48p_0 = -3 \cdot 8^2 + 48 \cdot 8 = 192$.

Пример:

Дата је функција тражње преко цене $p=\varphi(x)=8{,}25\cdot e^{-0{,}02x}$. *Одредити цену* p *и количину* x *за коју је укупан приход оптималан.*

Прво формирамо функцију укупног прихода:

$$P=\varphi(x)\cdot x=8{,}25\cdot e^{-0{,}02x}\cdot x=8{,}25x\cdot e^{-0{,}02x}.$$

Да би одредили када је укупан приход оптималан, морају се наћи екстремне вредности те функције. Значи, тражимо први извод функције укупног прихода и изједначавамо га са нулом:

$$P'(x)=8{,}25(x\cdot e^{-0{,}02x})'=8{,}25(e^{-0{,}02x}-0{,}02xe^{-0{,}02x})=8{,}25e^{-0{,}02x}(1-0{,}02x)=0$$

$$1-0{,}02x=0$$

$$x_0=50.$$

За $1-0{,}02x>0$, односно за $x<50$, функција P је растућа.

За $1-0{,}02x<0$, односно за $x>50$, функција P је опадајућа.

Одавде следи да функција P има максимум у тачки $x_0=50$.

Значи, за $x_0=50$ и $p(50)=8{,}25\cdot e^{-0{,}02\cdot 50}=\dfrac{8{,}25}{e}$ укупан приход је максималан.

2.1.6.4. Функција укупних трошкова

Функција укупних трошкова или функција трошкова производње, коју означавамо са C, представља функционалну зависност трошкова производње од количине произведене робе, тј.:

$$C=f(x).$$

Функција C је позитивна растућа функција. Да би $C=f(x)$ представљала функцију укупних трошкова, мора бити:

1) $x>0$,
2) $C>0$,
3) $C'>0$.

Функција C је дефинисана и има извод у интервалу (a,b). Најчешће се појављује у облицима:

1) $C=ax+b$ (ax варијабилни трошкови, b фиксни трошкови);
2) $C=ax^2+b+c$;
3) $C=cx^3+bx^2+cx+d$;
4) $C=ae^{bx}$, односно $\ln C=\ln a+bx(a>0)$.

2.1.6.5. Функција просечних трошкова производње

Функција просечних трошкова производње или трошкова по јединици производа, коју означавамо са $\bar{C}$, добија се дељењем укупних трошкова количином x произведене робе, тј.:

$$\bar{C}=\frac{C}{x}=\varphi(x).$$

Просечни трошкови производње показују кретање економичности у производњи, а њихова минимална вредност представља остварење пуне економичности у пословању предузећа за дату производњу.

2.1.6.6. Функција граничних трошкова

Функција граничних трошкова дефинисана је првим изводом функције укупних трошкова, тј.:

$$C'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}=\frac{dC}{dx}.$$

Помоћу ње посматрамо промену укупних трошкова и просечних трошкова при промени производње x.

Пример:

Функција укупних трошкова дата је у облику $C=50000x-300x^2+x^3$. *Одредити:*

а) функцију граничних трошкова,

б) функцију просечних трошкова,

в) минимум просечних трошкова.

а) Функција граничних трошкова тражи се као први извод функције укупних трошкова:

$$C'(x)=(50000x-300x^2+x^3)'=50000-600x+3x^2.$$

б) Функција просечних трошкова производње се добија дељењем укупних трошкова количином x произведене робе:

$$\bar{C}=\frac{C}{x}=\frac{50000x-300x^2+x^3}{x}=50000-300x+x^2.$$

в) Да бисмо нашли минимум просечних трошкова, морамо да нађемо екстремне вредност функције просечних трошкова. Дакле, нађемо први извод функције и први извод изједначимо са нулом:

$$\bar{C}'(x)=(50000-300x+x^2)'=-300+2x,$$

$$-300+2x=0$$

$$x=150.$$

Затим нађемо други извод функције, $\bar{C}''(x) = (-300 + 2x)' = 2$, и пошто је други извод позитиван, функција просечних трошкова је конвексна, па имамо минимум у тачки $x_0 = 150$. Минимум просечних трошкова је:

$$\bar{C}_{\min}(150) = 50000 - 300 \cdot 150 + 150^2 = 27500 .$$

2.1.6.7. *Функција добити*

Рентабилност пословања предузећа представљена је величином добити. У производном предузећу добит се утврђује као разлика између укупног прихода и укупних трошкова производње. Обележимо добит са D, тада је

$$D = P - C ,$$

или:

$$D(x) = P(x) - C(x) .$$

Овде се претпоставља да је x произведена и продата количина робе. Како функције P и C зависе од x, тада и функција добити зависи од x.

Када истовремено посматрамо приходе и трошкове, то нам омогућава да одредимо интервал производње у коме предузеће остварује добит, односно интервал у коме је пословање рентабилно.

Под **интервалом рентабилности** за одређени производ подразумевамо интервал производње (x_1, x_2) у коме је $D > 0$. Границе интервала су одређене из услова $D = P - C = 0$, што значи за производњу за коју су приходи једнаки трошковима. У економији говоримо о **горњој и доњој граници рентабилитета**, између којих се налази **оптимална производња x_0 при којој је добит највећа**.

Максималну добит добијамо из услова:

$$D'(x) = 0 \text{ и } D''(x) < 0 ,$$

односно:

$$P'(x) - C'(x) = 0 \text{ или } P'(x) = C'(x) .$$

Запажамо да је у тачки где је остварена највећа добит гранични приход једнак граничним трошковима.

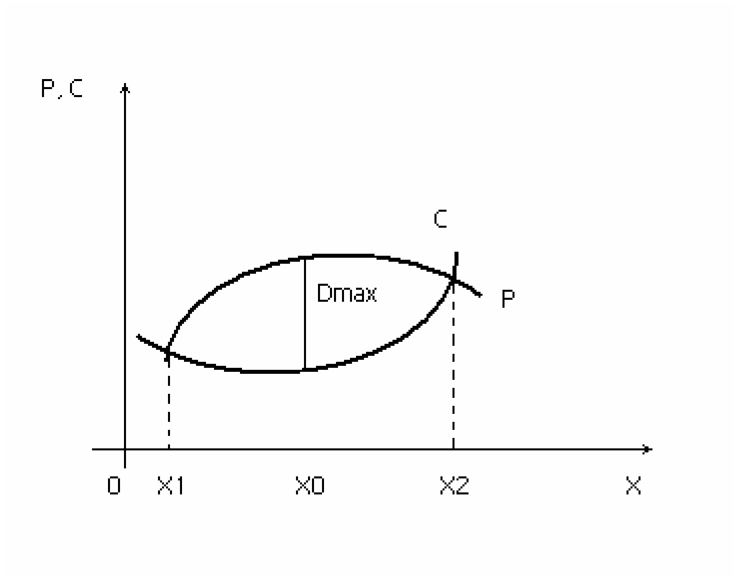
Пример:

Дата је функција укупног прихода $P = -x^2 + 90x$ и функција укупних трошкова $C = 3x^2 + 50x + 30$. Израчунати:

а) горњу и доњу границу рентабилитета,

б) производњу при којој се остварује максимална добит,

в) максималну добит.



а) Интервал рентабилности се добија из односа $P = C$:

$$-x^2 + 90x = 3x^2 + 50x + 30$$
$$-4x^2 + 40x - 30 = 0 / : 2$$
$$-2x^2 + 20x - 15 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot (-2) \cdot (-15)}}{-4} = \frac{-20 \pm 2\sqrt{70}}{-4} = \frac{-10 \pm \sqrt{70}}{-2} \Leftrightarrow x_1 \approx 0{,}82 \vee x_2 \approx 9{,}18 .$$

Добили смо доњу и горњу границу рентабилитета. То значи да ће за сваку количину произведене и продате робе из интервала $(0{,}82;9{,}18)$ предузеће остварити добит.

б) Максималну добит добијамо из услова: $D'(x) = 0$ и $D''(x) < 0$, односно тражимо екстремне вредности функције.
Прво морамо наћи добит (добит је разлика између укупног прихода и укупних трошкова производње):

$$D = P - C = (-x^2 + 90x) - (3x^2 + 50x + 30) = -4x^2 + 40x - 30 ,$$

а затим:

$$D'(x) = (-4x^2 + 40x - 30)' = -8x + 40 = 0$$
$$x_0 = 5 .$$

Пошто је други извод, $D''(x) = (-8x + 40)' = -8$, мањи од нуле, функција добити је конкавна, па производња остварује максималну добит у тачки $x_0 = 5$.

в) Максимална добит је: $D_{\max}(5) = -4 \cdot 5^2 + 40 \cdot 5 - 30 = 70$.

2.1.6.8. *Еластичност економских функција*

Еластичност економских функција има велики значај у проучавању међусобних зависности економских величина као што су, на пример, тражња и цена, производња и трошкови, итд.

Нека економска функција $y = f(x)$ има извод у интервалу (a,b). Еластичност функције $f(x)$ у тачки x, $x \in (a,b)$ је гранична вредност количника релативне промене функције и релативне промене аргумента у тачки x, кад $\Delta x \to 0$, тј.:

$$E_{y,x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}.$$

Из дефиниције се види да еластичност не зависи од јединице мере за x и y.

Ако узмемо да је $\frac{\Delta x}{x} = 1\% = \frac{1}{100}$, тада је:

$$E_{y,x} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} \approx \frac{x}{y}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{y}100,$$

будући да је $dy \approx \Delta y$ за мале вредности Δx.

Из оваквог тумачења еластичности произилази да еластичност функције у тачки x показује за колико се процената приближно мења вредност функције када се вредност независно-променљиве са одређеног нивоа промени за један проценат.

Израчуната вредност $E_{y,x}$ је коефицијент еластичности.

1. Ако је $\left|E_{y,x}\right| < 1$, функција је у тачки x **нееластична**, јер се при промени независно-променљиве за 1% функција мења за мање од 1%.
2. Ако је $\left|E_{y,x}\right| = 1$, кажемо да функција у тачки x има **јединичну еластичност**, јер промена аргумента за 1% изазива промену функције за 1%.
3. Ако је $\left|E_{y,x}\right| > 1$, тада је функција у тачки x **еластична**, што значи да промена аргумента за 1% изазива промену функције за више од 1%.

2.1.6.9. *Еластичност тражње*

Еластичност тражње $x = f(p)$ у тачки p дефинисана је изразом:

$$E_{x,p} = \frac{p}{x} \cdot x'$$

и представља релативну промену тражње на јединицу релативне промене цене. Тражња је, по правилу, опадајућа функција, па је зато $x' < 0$, а како је $p > 0$ и $x > 0$, то је $E_{x,p} < 0$. Јављају се ови случајеви **еластичности тражње**:

1. Ако је $\left|E_{x,p}\right| < 1$, тада је тражња у тачки p **нееластична**,

2. Ако је $\left|E_{x,p}\right| = 1$, тражња у тачки p има **јединичну еластичност** и

3. Ако је $\left|E_{x,p}\right| > 1$, тражња је у тачки p **еластична**.

Инверзни облик функције тражње је $\varphi(x)$. Еластичност цене (флексибилност цене) дата је у облику:

$$E_{p,x} = \frac{x}{p} \cdot p'.$$

Пример:

Функција тражње је $x = 15 - 2p$. *Наћи њену еластичност за:*

а) $p = 3$,

б) $p = 7$.

$$E_{x,p} = \frac{p}{x} \cdot x' = \frac{p}{15-2p} \cdot (15-2p)' = \frac{-2p}{15-2p}.$$

а) $E_{x,3} = \dfrac{-2\cdot 3}{15-2\cdot 3} = -\dfrac{2}{3}$.

За $p = 3$ **тражња је нееластична (**$|E_{x,3}| = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3} < 1$**). Та значи, ако цена порасте са нивоа** $p = 3$ **за 1%, тада ће тражња опасти за око** $\frac{2}{3}\%$**.**

б) $E_{x,7} = \dfrac{-2\cdot 7}{15-2\cdot 7} = -14$

За $p = 7$ **тражња је еластична (**$|E_{x,7}| = |-14| = 14 > 1$**). Та значи, ако цена порасте са нивоа** $p = 7$ **за 1%, тада ће тражња опасти за око** 14%**.**

2.1.6.10. Еластичност прихода

Еластичност прихода показује релативне (приближно процентуалне) промене прихода проузроковане релативним променама цене, односно тражње.

Еластичност прихода по p је представљена преко еластичности тражње:

$$E_{P,p} = \frac{p}{P} P' = \frac{1}{x}(px)' = \frac{1}{x}(x + px'),$$

односно:

$$E_{P,p} = 1 + \frac{p}{x} x' = 1 + E_{x,p}.$$

Еластичност прихода по x је представљена преко еластичности цене:

$$E_{P,x}=\frac{x}{P}P'=\frac{1}{p}(px)'=\frac{1}{p}(p'x+p),$$

односно:

$$E_{P,x}=1+\frac{x}{p}p'=1+E_{p,x}.$$

Уочили смо да гранични приход даје слична обавештења. Разлика је у томе што гранични приход изражава промену прихода у апсолутним вредностима, а еластичност прихода то чини у релативним показатељима.

Пример:

Дата је функција тражње $x=-2p+6$*.Израчунати:*

а) функцију граничног прихода,

б) еластичност прихода у односу на цену.

Показати како се приход мења при повећању цене са нивоа $p=\frac{1}{3}$*:*

в) помоћу граничног прихода,

г) помоћу еластичности прихода.

а) Да би одредили функцију граничног прихода, прво треба одредити функцију укупног прихода:

$$P=p\cdot x=p\cdot(-2p+6)=-2p^2+6p.$$

Функција граничног прихода је први извод функције прихода:

$$P'(p)=(-2p^2+6p)'=-4p+6.$$

б) Еластичност прихода у односу на цену је: $E_{P,p}=1+E_{x,p}$.

$$E_{x,p}=\frac{p}{x}x'=\frac{p}{-2p+6}\cdot(-2)=\frac{-2p}{-2p+6}=\frac{p}{p-3},$$

$$E_{P,p}=1+E_{x,p}=1+\frac{p}{p-3}=\frac{2p-3}{p-3}.$$

в) $P'(\frac{1}{3})=-4\cdot\frac{1}{3}+6=\frac{14}{3}$. То значи, да ће за мало повећање цене са нивоа $p=\frac{1}{3}$ приход повећати за $\frac{14}{3}$ новчане јединице на јединичну промену цене.

г) $E_{P,\frac{1}{3}}=\frac{2\cdot\frac{1}{3}-3}{\frac{1}{3}-3}=\frac{7}{8}$. То значи, да се при малом повећању цене за 1% са нивоа $p=\frac{1}{3}$ приход повећава за $\frac{7}{8}\%$.

2.1.7. ЗАЈМОВИ

2.1.7.1. Амортизација зајмова (фактор повраћаја)

Сама реч зајам или кредит потиче од латинске речи **credo** што значи верујем тј. имам поверења. Зајам представља одређени имовинско правни однос у којем једна страна (зајмодавац) уступа другој страни (зајмопримцу) право располагања новцем. Дакле, зајмодавац даје своја привремено слободна средства зајмопримцу која овај прима, користи и враћа у одређеном периоду увећана за сложени интерес. Даваоци зајмова су, по правилу, банке. Банке дају зајмове одређујући њихову намену коришћења. Уговором о зајму између зајмодавца и зајмопримца ругулишу се висина зајма, намена коришћења позајмљених средстава, интересна стопа, време трајања отплаћивања и други услови.

Зајам се углавном одобрава одједном, у одређеној висини, а враћа се (отплаћује) вишекратно или ануитетима. **Ануитет је износ који садржи и отплату и интерес**. Амортизовати неки зајам значи постепено га отплатити према унапред утврђеном плану амортизације.

Постоје различити начини амортизације (отплаћивања) зајма:

3. отплатама које могу бити једнаке и промењљиве (расту или опадају) по аритметичкој или геометријској прогресији с тим што се интерес посебно плаћа,
4. ануитетима који садржи и отплату и интерес.

2.1.7.2. Зајмови који се отплаћују једнаким ануитетима са декурзивним рачунањем интереса

Нека је дато на зајам ***K*** динара, што треба отплатити за n година уз обрачун p% интереса декурзивно годишње, једнаким годишњим ануитетима од ***a*** динара, који се плаћају крајем године. Капиталисање је једном годишње, треба одредити зајам и ануитет.

Ако све ануитете који се једнаки, а доспевају различито (први после једне године, други после две године, последњи после *n* година) сведемо на рок данас када се исплаћује зајам, онда зајам мора бити једнак:

$$\mathrm{K} = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \ldots + \frac{a}{r^n} . \qquad (1)$$

$\frac{a}{r}, \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r^3}, \ldots, \frac{a}{r^n}$ је геометријски низ, чији је први члан $a_1 = \frac{a}{r}$ и количник $q = \frac{1}{r}$, па је збир првих *n* чланова геометријског низа једнак:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{r} \cdot \frac{1-(\frac{1}{r})^n}{1-\frac{1}{r}} = a\frac{\frac{r^n-1}{r^n}}{r-1} = a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)} .$$

Пошто је $S_n = \mathrm{K}$, следи да је:

$$K = a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)},$$

где је **K зајам**, **a ануитет**, **n** број периода отплаћивања зајма, а $r=1+\frac{p}{100}$ **интересни декурзивни чинилац.**

Из $K = a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}$ следи да је $a = K\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}$.

Ако у једначину (1) уведемо таблице интереса на интерес $II_p^n = \frac{1}{r^n}$, чији је збир

$$II_p^1 + II_p^2 + ... + II_p^n = IV_p^n,$$

онда је:

$$\mathrm{K} = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + ... + \frac{a}{r^n} = a(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + ... + \frac{1}{r^n}) = a(II_p^1 + II_p^2 + ... + II_p^n) = aIV_p^n$$

и

$$a = K\frac{1}{IV_p^n} = KV_p^n .$$

IV_p^n и V_p^n таблице су узајамно реципрочне. V_p^n показују величину ануитета који се уплаћује крајем периода и којим се у n периода отплаћује зајам од једне новчане јединице.

$$II_p^n$$

$n \backslash p$	5,25%	5,50%	5,75%	6,00%	6,25%	6,50%
1	0.95011876	0.94786730	0.94562648	0.94339623	0.94117647	0.93896714
2	0.90272567	0.89845242	0.89420944	0.88999644	0.88581315	0.88165928
3	0.85769660	0.85161366	0.84558812	0.83961928	0.83370649	0.82784909
4	0.81491363	0.80721674	0.79961051	0.79209366	0.78466493	0.77732309
5	0.77426473	0.76513435	0.75613287	0.74725817	0.73850817	0.72988084
6	0.73564345	0.72524583	0.71501927	0.70496054	0.69506652	0.65533412

$$IV_p^n$$

$n \backslash p$	5,25%	5,50%	5,75%	6,00%	6,25%	6,50%
1	0.95011876	0.94786730	0.94562648	0.94339623	0.94117647	0.93896714
2	1.85284443	1.84361971	1.83983591	1.83339267	1.82698962	1.82062642
3	2.71054103	2.69793338	2.68542403	2.67301195	2.66069611	2.64847551
4	3.52545466	3.50515012	3.48503454	3.46510561	3.44536105	3.42579860
5	4.29971939	4.27028448	4.24116742	4.21236379	4.18386922	4.15567944
6	5.03536284	4.99559031	4.95618668	4.91732433	4.87893574	4.84101356

$$V_p^n$$

$n \backslash p$	5,25%	5,50%	5,75%	6,00%	6,25%	6,50%
1	1.05250000	1.05500000	1.05750000	1.06000000	1.06250000	1.06500000
2	0.53971072	0.54161800	0.54352673	0.54543689	0.54734848	0.54926150
3	0.36893004	0.37065407	0.37238067	0.37410981	0.37584149	0.37757570
4	0.28365136	0.28529449	0.28694120	0.28859149	0.29024534	0.29190274
5	0.23257332	0.23417644	0.23578414	0.23739640	0.23901321	0.24063454
6	0.19859542	0.20017895	0.20176803	0.20336263	0.20496273	0.20656831

Пример:
Зајам од 200 000динара амортизује се једнаким годишњим ануитетима у току 5 година и уз интерес 6% и годишње капиталисање. Направити амортизациони план.

$K = 200000$, $n = 5$, $p = 6\%$

Ануитет ћемо израчунати по формули

$$a = KV_p^n = 200000 \cdot 0,2373964 = 47479,28\,.$$

Отплату ћемо обележити са ***b***. Да бисмо одредили отплату b_1 израчунаћемо интерес I_1:

$$I_1 = \frac{K \cdot p \cdot t}{100} = \frac{200000 \cdot 6 \cdot 1}{100} = 12000$$

Пошто је ануитет збир отплате и интереса, отплата је једнака разлици ануитета и интереса:

$$b_1 = a - I_1 = 47479,28 - 12000 = 35479,28$$

После прве године дуг се смањује за износ отплате 35479,28 па износи:

$$R_2 = K - b_1 = 200000 - 35479,28 = 164520,72$$

Крајем друге године при уплати другог ануитета треба израчунати 6% интереса на остатак дуга.

$$I_2 = \frac{R_2 \cdot p \cdot t}{100} = \frac{164520 \cdot 6 \cdot 1}{100} = 9871,24\,.$$

Друга отплата ће бити:

$$b_2 = a - I_2 = 47479,28 - 9871,24 = 37608,04$$

тако да је остатак дуга сада:

$$R_3 = R_2 - b_2 = 164520,72 - 37608,04 = 126912,68$$

Следи:

$$I_3 = \frac{R_3 \cdot p \cdot t}{100} = \frac{126912,68 \cdot 6 \cdot 1}{100} = 7614,76$$

Трећа отплата биће:

$$b_3 = a - I_3 = 47479,28 - 7614,76 = 39864,51$$

Дуг се смањује за трећу отплату, па је остатак дуга:

$$R_4 = R_3 - b_3 = 126912,68 - 39864,52 = 87048,16$$

На тај остатак дуга рачунамо интерес I_4:

$$I_4 = \frac{R_4 \cdot p \cdot t}{100} = \frac{87048,16 \cdot 6 \cdot 1}{100} = 5222,88$$

Отплата b_4 биће:

$$b_4 = a - I_4 = 47479,28 - 5222,89 = 42256,4$$

За износ ове отплате смањује се дуг:

$$R_5 = R_4 - b_4 = 87048,16 - 42256,4 = 44791,76$$

Интерес I_5 на остатак дуга је:

$$I_5 = \frac{R_5 \cdot p \cdot t}{100} = \frac{44791,76 \cdot 6 \cdot 1}{100} = 2687,52$$

Отплата b_5 биће:

$$b_5 = a - I_5 = 47479,28 - 2687,52 = 44791,76$$

Остатак дуга је:

$$R_5 - b_4 = 44791,77 - 44791,77 = 0 .$$

Приказаћемо **амортизациони план** и шематски:

Број године *n*	*Дуг* R_n $(K = R_1)$	*Интерес* I_n	*Отплата* b_n	*Ануитет* *a*
1	200000,00	12000,00	35479,28	**47479,28**
2	164520,72	9871,24	37608,04	**47479,28**
3	126912,68	7614,76	39864,52	**47479,28**
4	87048,16	5222,88	42256,40	**47479,28**
5	44791,76	2687,52	44791,76	**47479,28**
$\sum$		**37396,40**	**200000,00**	**237396,40**

Из амортизационог плана уочавају се односи између интереса и односи између отплата.

Сваки следећи интерес мањи је од предходног:

$$I_1 > I_2 > I_3 > I_4 > \ldots > I_{n-1} > I_n$$

јер се основа за обрачун интереса смањује из године у годину. Како су ануитети једнаки, а они садрже отплату и интерес, свака следећа отплата је већа од предходне:

$$b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < \ldots < b_{n-1} < b_n .$$

Контрола ваљаности урађеног амортизационог плана може са урадити на неколико начина:

1. Збир отплата мора бити једнак зајму:
$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} + b_n = K\ .$$
2. Последња отплата једнака је остатку дуга на почетку последњег периода отплаћивања:
$$b_n = R_n\ .$$
3. Збир колоне интереса и колоне отплата једнак је збиру свих ануитета:
$$I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n + b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n = n \cdot a\ .$$
4. Интерес на збир колоне *дуг* мора бити једнак збиру интереса колоне *интерес*.

2.1.7.3. Зајмови који се амортизују једнаким ануитетима који су чешћи од обрачуна камате

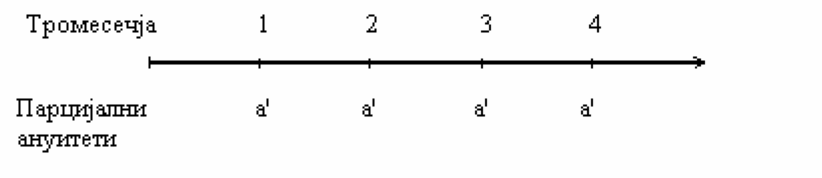
Банке обрачунавају интерес дугорочних зајмова обично једном или два пута годишње. У пракси наших банака често се овакви зајмови отплаћују са више ануитета у току године. У овим случајевима је ануитетни период краћи од периода обрачуна камате. Дугорочни стамбени кредити који користе грађани, амортизују се месечним ануитетима (ратама). Ануитети чији је период краћи од обрачунског периода називају се **парцијални ануитети**. У банкама се најчешће примењује сложени интерес за обрачунске периоде и прост интерес са релативном интересном стопом у ануитетним периодима.

Парцијални ануитет се израчунава преко ануитета $a = KV_p^n$, где је примењен сложен интерес.

Пример:

Израчунати ***парцијални тромесечни ануитет****, који се плаћа крајем тромесечја ако се сложени интерес рачуна једном годишње декурзивно, а у тромесечјима прост интерес применом релативне стопе.*

У току године биће плаћена 4 парцијална ануитета:



Први парцијални ануитет, увећан простим интересом за 9 месеци, имаће на крају године, вредност:

$$a_1 = a' + \frac{a' \cdot 9 \cdot p}{1200} \text{ дин.}$$

Пошто је у питању **парцијални тромесечни ануитет**, после прва три месеца уплаћујемо a' динара. То је исто као да на крају године уплатимо a_1 динара, зато што се за преосталих девет месеци обрачунава проста камата на износ a'.

Други парцијални ануитет је увећан простим интересом за 6 месеци:

$$a_2 = a' + \frac{a' \cdot 6 \cdot p}{1200} \text{ дин.}$$

После шест месеци опет уплаћујемо a' динара. То је исто као да на крају године уплатимо a_2 динара, зато што се за преосталих шест месеци обрачунава проста камата на износ a'.

Трећи парцијални ануитет је увећан простим интересом за 3 месеца:

$$a_3 = a' + \frac{a' \cdot 3 \cdot p}{1200} \text{ дин.}$$

Четврти парцијални ануитет је без интереса:

$$a_4 = a' \text{ дин.}$$

Њихов збир једнак је годишњем ануитету:

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$a = a' + \frac{a' \cdot 9 \cdot p}{1200} + a' + \frac{a' \cdot 6 \cdot p}{1200} + a' + \frac{a' \cdot 3 \cdot p}{1200} + a'$$

$$a = 4a' + (9 + 6 + 3)\frac{a' \cdot p}{1200},$$

тј.:

$$a = a' \cdot \frac{800 + 3p}{200}.$$

Одавде је:

$$a' = a \cdot \frac{200}{800 + 3p} = a \cdot \frac{200}{200 \cdot 4 + (4-1)p}.$$

Овај пример се може искористити за извођење опште формуле за рачунање парцијалног ануитета. Обележимо са v **број ануитетних периода** у години као обрачунском периоду:

$$a' = a \cdot \frac{200}{200v + (v-1)p},$$

или

$$a' = KV_p^n \cdot \frac{200}{200v + (v-1)p},$$

где је p годишња интересна стопа.

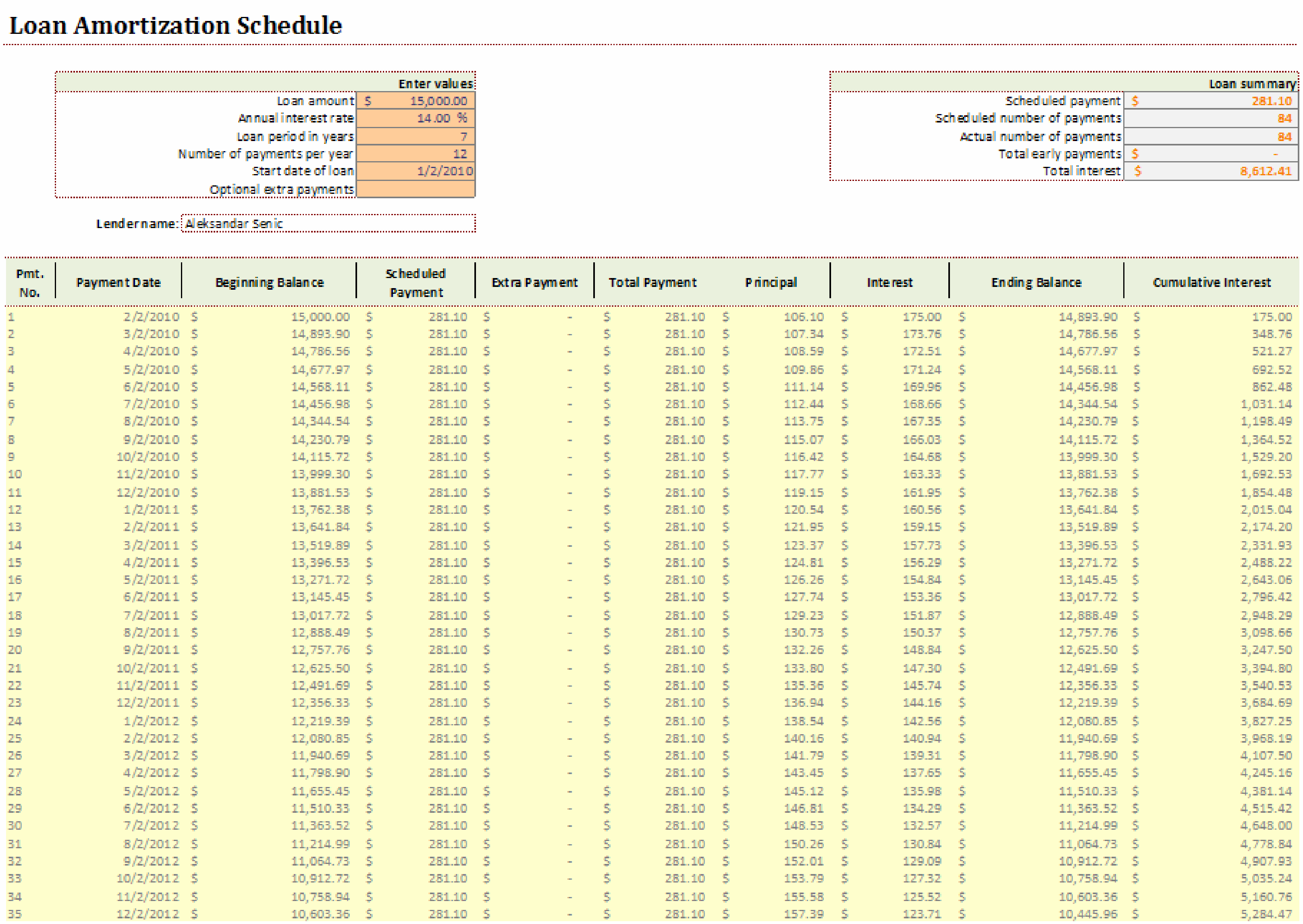
Парцијални месечни ануитет при годишњем обрачуну интереса ($v = 12$) је:

$$a' = KV_p^n \cdot \frac{200}{200 \cdot 12 + (12-1)p} = KV_p^n \cdot \frac{200}{2400 + 11p}.$$

Пример:

Ако је кредит за аутомобил 15 000 долара, а отплаћује се 7 година једнаким месечним ануитетима (ратама) при годишњем капиталисању уз 14% (p.a.), израчунати месечни ануитет (месечну рату) и направити амортизациони план..

Овај задатак се може решити помоћу рачунара. У *Microsoft Office Excel* програму постоје већ унапред уграђени алати, помоћу којих може да се направи амортизациони план (***Loan Amortization Schedule***). Амортизациони план се може представити на следећи начин:



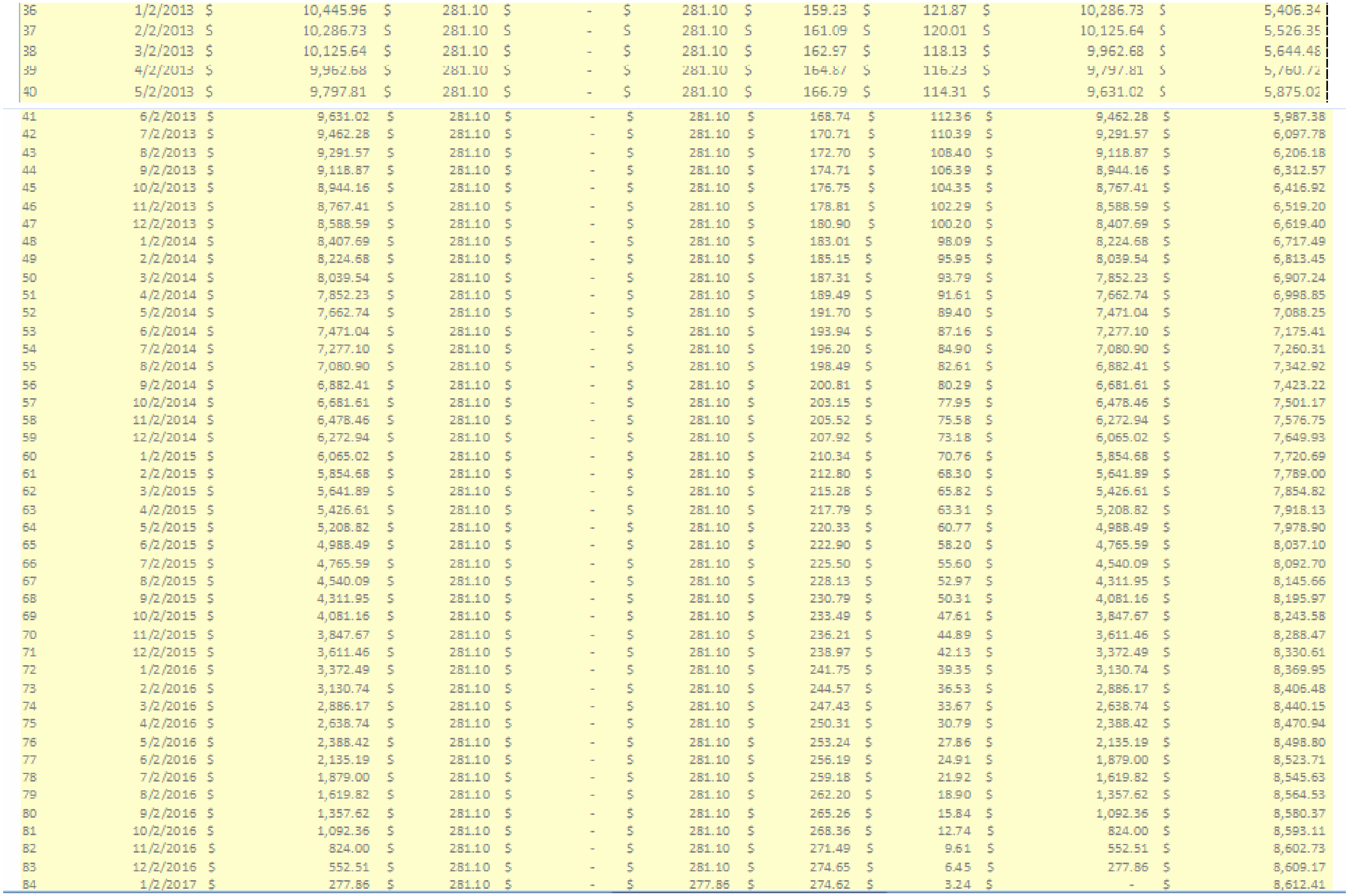
Loan Amortization Schedule

	Enter values
Loan amount	$ 15,000.00
Annual interest rate	14.00 %
Loan period in years	7
Number of payments per year	12
Start date of loan	1/2/2010
Optional extra payments	

Lender name: Aleksandar Senic

	Loan summary
Scheduled payment	$ 281.10
Scheduled number of payments	84
Actual number of payments	84
Total early payments	$ -
Total interest	$ 8,612.41

Pmt. No.	Payment Date	Beginning Balance	Scheduled Payment	Extra Payment	Total Payment	Principal	Interest	Ending Balance	Cumulative Interest
1	2/2/2010	$ 15,000.00	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 106.10	$ 175.00	$ 14,893.90	$ 175.00
2	3/2/2010	$ 14,893.90	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 107.34	$ 173.76	$ 14,786.56	$ 348.76
3	4/2/2010	$ 14,786.56	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 108.59	$ 172.51	$ 14,677.97	$ 521.27
4	5/2/2010	$ 14,677.97	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 109.86	$ 171.24	$ 14,568.11	$ 692.52
5	6/2/2010	$ 14,568.11	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 111.14	$ 169.96	$ 14,456.98	$ 862.48
6	7/2/2010	$ 14,456.98	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 112.44	$ 168.66	$ 14,344.54	$ 1,031.14
7	8/2/2010	$ 14,344.54	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 113.75	$ 167.35	$ 14,230.79	$ 1,198.49
8	9/2/2010	$ 14,230.79	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 115.07	$ 166.03	$ 14,115.72	$ 1,364.52
9	10/2/2010	$ 14,115.72	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 116.42	$ 164.68	$ 13,999.30	$ 1,529.20
10	11/2/2010	$ 13,999.30	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 117.77	$ 163.33	$ 13,881.53	$ 1,692.53
11	12/2/2010	$ 13,881.53	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 119.15	$ 161.95	$ 13,762.38	$ 1,854.48
12	1/2/2011	$ 13,762.38	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 120.54	$ 160.56	$ 13,641.84	$ 2,015.04
13	2/2/2011	$ 13,641.84	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 121.95	$ 159.15	$ 13,519.89	$ 2,174.20
14	3/2/2011	$ 13,519.89	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 123.37	$ 157.73	$ 13,396.53	$ 2,331.93
15	4/2/2011	$ 13,396.53	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 124.81	$ 156.29	$ 13,271.72	$ 2,488.22
16	5/2/2011	$ 13,271.72	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 126.26	$ 154.84	$ 13,145.45	$ 2,643.06
17	6/2/2011	$ 13,145.45	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 127.74	$ 153.36	$ 13,017.72	$ 2,796.42
18	7/2/2011	$ 13,017.72	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 129.23	$ 151.87	$ 12,888.49	$ 2,948.29
19	8/2/2011	$ 12,888.49	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 130.73	$ 150.37	$ 12,757.76	$ 3,098.66
20	9/2/2011	$ 12,757.76	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 132.26	$ 148.84	$ 12,625.50	$ 3,247.50
21	10/2/2011	$ 12,625.50	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 133.80	$ 147.30	$ 12,491.69	$ 3,394.80
22	11/2/2011	$ 12,491.69	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 135.36	$ 145.74	$ 12,356.33	$ 3,540.53
23	12/2/2011	$ 12,356.33	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 136.94	$ 144.16	$ 12,219.39	$ 3,684.69
24	1/2/2012	$ 12,219.39	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 138.54	$ 142.56	$ 12,080.85	$ 3,827.25
25	2/2/2012	$ 12,080.85	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 140.16	$ 140.94	$ 11,940.69	$ 3,968.19
26	3/2/2012	$ 11,940.69	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 141.79	$ 139.31	$ 11,798.90	$ 4,107.50
27	4/2/2012	$ 11,798.90	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 143.45	$ 137.65	$ 11,655.45	$ 4,245.16
28	5/2/2012	$ 11,655.45	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 145.12	$ 135.98	$ 11,510.33	$ 4,381.14
29	6/2/2012	$ 11,510.33	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 146.81	$ 134.29	$ 11,363.52	$ 4,515.42
30	7/2/2012	$ 11,363.52	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 148.53	$ 132.57	$ 11,214.99	$ 4,648.00
31	8/2/2012	$ 11,214.99	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 150.26	$ 130.84	$ 11,064.73	$ 4,778.84
32	9/2/2012	$ 11,064.73	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 152.01	$ 129.09	$ 10,912.72	$ 4,907.93
33	10/2/2012	$ 10,912.72	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 153.79	$ 127.32	$ 10,758.94	$ 5,035.24
34	11/2/2012	$ 10,758.94	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 155.58	$ 125.52	$ 10,603.36	$ 5,160.76
35	12/2/2012	$ 10,603.36	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 157.39	$ 123.71	$ 10,445.96	$ 5,284.47



36	1/2/2013	$ 10,445.96	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 159.23	$ 121.87	$ 10,286.73	$ 5,406.34
37	2/2/2013	$ 10,286.73	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 161.09	$ 120.01	$ 10,125.64	$ 5,526.35
38	3/2/2013	$ 10,125.64	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 162.97	$ 118.13	$ 9,962.68	$ 5,644.48
39	4/2/2013	$ 9,962.68	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 164.87	$ 116.23	$ 9,797.81	$ 5,760.72
40	5/2/2013	$ 9,797.81	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 166.79	$ 114.31	$ 9,631.02	$ 5,875.02
41	6/2/2013	$ 9,631.02	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 168.74	$ 112.36	$ 9,462.28	$ 5,987.38
42	7/2/2013	$ 9,462.28	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 170.71	$ 110.39	$ 9,291.57	$ 6,097.78
43	8/2/2013	$ 9,291.57	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 172.70	$ 108.40	$ 9,118.87	$ 6,206.18
44	9/2/2013	$ 9,118.87	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 174.71	$ 106.39	$ 8,944.16	$ 6,312.57
45	10/2/2013	$ 8,944.16	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 176.75	$ 104.35	$ 8,767.41	$ 6,416.92
46	11/2/2013	$ 8,767.41	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 178.81	$ 102.29	$ 8,588.59	$ 6,519.20
47	12/2/2013	$ 8,588.59	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 180.90	$ 100.20	$ 8,407.69	$ 6,619.40
48	1/2/2014	$ 8,407.69	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 183.01	$ 98.09	$ 8,224.68	$ 6,717.49
49	2/2/2014	$ 8,224.68	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 185.15	$ 95.95	$ 8,039.54	$ 6,813.45
50	3/2/2014	$ 8,039.54	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 187.31	$ 93.79	$ 7,852.23	$ 6,907.24
51	4/2/2014	$ 7,852.23	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 189.49	$ 91.61	$ 7,662.74	$ 6,998.85
52	5/2/2014	$ 7,662.74	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 191.70	$ 89.40	$ 7,471.04	$ 7,088.25
53	6/2/2014	$ 7,471.04	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 193.94	$ 87.16	$ 7,277.10	$ 7,175.41
54	7/2/2014	$ 7,277.10	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 196.20	$ 84.90	$ 7,080.90	$ 7,260.31
55	8/2/2014	$ 7,080.90	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 198.49	$ 82.61	$ 6,882.41	$ 7,342.92
56	9/2/2014	$ 6,882.41	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 200.81	$ 80.29	$ 6,681.61	$ 7,423.22
57	10/2/2014	$ 6,681.61	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 203.15	$ 77.95	$ 6,478.46	$ 7,501.17
58	11/2/2014	$ 6,478.46	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 205.52	$ 75.58	$ 6,272.94	$ 7,576.75
59	12/2/2014	$ 6,272.94	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 207.92	$ 73.18	$ 6,065.02	$ 7,649.93
60	1/2/2015	$ 6,065.02	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 210.34	$ 70.76	$ 5,854.68	$ 7,720.69
61	2/2/2015	$ 5,854.68	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 212.80	$ 68.30	$ 5,641.89	$ 7,789.00
62	3/2/2015	$ 5,641.89	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 215.28	$ 65.82	$ 5,426.61	$ 7,854.82
63	4/2/2015	$ 5,426.61	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 217.79	$ 63.31	$ 5,208.82	$ 7,918.13
64	5/2/2015	$ 5,208.82	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 220.33	$ 60.77	$ 4,988.49	$ 7,978.90
65	6/2/2015	$ 4,988.49	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 222.90	$ 58.20	$ 4,765.59	$ 8,037.10
66	7/2/2015	$ 4,765.59	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 225.50	$ 55.60	$ 4,540.09	$ 8,092.70
67	8/2/2015	$ 4,540.09	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 228.13	$ 52.97	$ 4,311.95	$ 8,145.66
68	9/2/2015	$ 4,311.95	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 230.79	$ 50.31	$ 4,081.16	$ 8,195.97
69	10/2/2015	$ 4,081.16	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 233.49	$ 47.61	$ 3,847.67	$ 8,243.58
70	11/2/2015	$ 3,847.67	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 236.21	$ 44.89	$ 3,611.46	$ 8,288.47
71	12/2/2015	$ 3,611.46	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 238.97	$ 42.13	$ 3,372.49	$ 8,330.61
72	1/2/2016	$ 3,372.49	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 241.75	$ 39.35	$ 3,130.74	$ 8,369.95
73	2/2/2016	$ 3,130.74	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 244.57	$ 36.53	$ 2,886.17	$ 8,406.48
74	3/2/2016	$ 2,886.17	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 247.43	$ 33.67	$ 2,638.74	$ 8,440.15
75	4/2/2016	$ 2,638.74	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 250.31	$ 30.79	$ 2,388.42	$ 8,470.94
76	5/2/2016	$ 2,388.42	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 253.24	$ 27.86	$ 2,135.19	$ 8,498.80
77	6/2/2016	$ 2,135.19	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 256.19	$ 24.91	$ 1,879.00	$ 8,523.71
78	7/2/2016	$ 1,879.00	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 259.18	$ 21.92	$ 1,619.82	$ 8,545.63
79	8/2/2016	$ 1,619.82	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 262.20	$ 18.90	$ 1,357.62	$ 8,564.53
80	9/2/2016	$ 1,357.62	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 265.26	$ 15.84	$ 1,092.36	$ 8,580.37
81	10/2/2016	$ 1,092.36	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 268.36	$ 12.74	$ 824.00	$ 8,593.11
82	11/2/2016	$ 824.00	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 271.49	$ 9.61	$ 552.51	$ 8,602.73
83	12/2/2016	$ 552.51	$ 281.10	$ -	$ 281.10	$ 274.65	$ 6.45	$ 277.86	$ 8,609.17
84	1/2/2017	$ 277.86	$ 281.10	$ -	$ 277.86	$ 274.62	$ 3.24	$ -	$ 8,612.41

2.2. ПЛАНОВИ И ПРОГРАМИ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ У ЕКОНОМСКОЈ ШКОЛИ У ФУНКЦИЈИ ОСПОСОБЉАВАЊА УЧЕНИКА ЗА РАД

Сви образовни профили у економском подручју рада, стари или нови (нови су у огледу), математику изучавају са три часа недељно у сваком разреду. Иако је, по наставном плану, математици додељено три часа у сваком разреду, постоје разлике у програмима математике у старим и новим профилима у економским школама. Настава математике у старим профилима економских школа изводи се по моделу М11. За сваки од четири разреда предвиђен је одређени број тема са унапред задатим бројем часова. За реализацију свих модела програма М4-М14 важи Дидактичко-методичко упутство објављено још 1987. године (*Службени гласник СР Србије-Просветни гласник број 1/87*). У упутству за реализацију тог програма наведено је да је могуће одступање за десет процената од броја часова предвиђеног за сваку тему у зависности од конкретне ситуације у одељењу. Теме треба обрађивати једну за другом, како су наведене у програму, мада није искључен и другачији редослед. Однос броја часова обраде новог градива и осталих часова, по правилу, треба да буде 2:3. Садржаји програма наставе математике изабрани су тако да наставник његовом реализацијом оствари образовну и васпитну функцију наставе математике које се састоје у стицању нових математичких знања, подизању нивоа математичког образовања и изграђивању низа позитивних особина личности. Захваљујући адекватним математичким садржајима и методама, образовна функција наставе математике треба да допринесе оспособљавању ученика да логички мисле и стваралачки приступају решавању различитих проблема. Поред ових циљева врло су битни и практични циљеви наставе математике, односно примени математике у животу, пракси и другим научним областима.

Немачка организација за техничку сарадњу (ГТЗ) од марта 2002. године пружа подршку Министарству просвете Републике Србије у пројекту *Реформа стручног образовања у Србији*, увођењем нових образовних профила у подручју рада економија, право и администрација, у статусу огледа. Улога ГТЗ-а у реформи је иницирање нових образовних профила који одговарају реалним захтевима тржишта, опремање бироа у првих 18 школа које су ушле у оглед и обуку наставника за извођење наставе у новим профилима. Нови образовни профил у економским школама, пословни администратор, уведен је у огледу први пут школске 2003/2004. године у 18 школа у Србији, а данас у пројекту учествује 41 економска школа са 5500 ученика и више нових образовних профила.

Програми математике за нове образовне профиле у економским школама дати су по модулима, а засновани на исходима. Програм је одређен циљевима, исходима и препорученим садржајима по разредима. Исходима је дефинисано шта то ученик треба да зна након обраде одређеног модула. Садржаји и теме за постизање одређеног исхода су препоручени. Значи наставнику је остављена слобода на који начин ће постићи одређене исходе у оквиру одређеног модула, односно шта ће ученик знати, умети, разумети, повезати, знати да израчуна итд. на крају обраде одређеног модула. Циљеви су наведени у облику коначних исхода учења и то у облику компетенција, које обично укључују знања и вештине које ученик треба да поседује после успешно савладаног модула.

У оквиру новог образовног профила, ***пословни администратор***, трећем разреду један од циљева наставе математике је примена знања о функцијама на решавање проблема из области економских функција. Наставник треба да на основу наставних садржаја о изводу, примитивној функцији и економским функцијама (функције тражње, понуда, прихода и трошкова) у трећем разреду постигне следеће исходе: ученик ће научити (знати) да одреди први извод функције, да примени извод функције и примитивну функцију код економских функција. У програму четвртог разреда заступљени су само елементи привредне и финансијске математике. Основни циљеви наставе математике у четвртом разреду образовног профила *пословни администратор* су: стицање основних знања и примена простог каматног рачуна, стицање основних знања из сложеног каматног рачуна, примена сложеног каматног рачуна у рачуну улога и ренте, стицање основних знања о елементима зајма, овладавање поступком амортизације поступком зајма, стицање основних знања о конверзији зајма и примена елемената привредне и финансијске математике кроз практичне задатке из области пословне администрације.

Програми математике по модулима:

1) Успешним реализовањем **првог модула** ***Елементи привредне математике*** у четвртом разреду наставник треба да постигне следеће исходе: ученик ће познавати и примењивати основну пропорцију простог каматног рачуна за време дато у годинама, месецима и данима; израчунавати интерес на основу каматног броја и каматног кључа; израчунавати камату на више сума; примењивати каматни рачун више сто и ниже сто; разумети и примењивати термински рачун, есконтовање менице, рачун штедног улога; знати да израчуна месечну отплату код потрошачких кредита; познавати основне елементе девизног рачуна и његове примене у проблемима продаје и куповине валута; препознавати разлику између простог и сложеног каматног рачуна; разумети појам декурзивног обрачунавања интереса; знати да израчуна увећану вредност главнице; знати да израчуна време, каматну стопу и почетну вредност главнице; знати да израчуна сложену камату; познаје појам конфорне каматне стопе; знати да одреди увећану вредност више периодичних улога при улагању почетком и крајем периода; знати да израчуна број улагања; знати да израчуна каматну стопу; разуме појам садашње (почетне) вредности више периодичних сума које се исплаћују почетком или крајем периода; знати да израчуна збир дисконтованих вредности; знати да одреди вредност исплате крајем и почетком периода; знати да израчуна број исплата и вредност каматне стопе.

2) Успешним реализовањем **другог модула** ***Зајам*** у четвртом разреду наставник треба да постигне следеће исходе: ученик треба да разуме појам и врсте зајмова, смисао амортизације зајма; разуме појам ануитета, отплате, интереса отплаћеног дела дуга и остатка дуга; да зна да повеже елементе зајма и да зна да их израчуна; да зна да израчуна ануитет; да зна да израчуна каматну стопу; да зна да израчуна број периода отплаћивања; да зна да израчуна износ дуга на почетку обрачунског периода; да зна да израчуна интерес и отплату за било који период амортизације зајма; да зна да сачини амотризациони план; да уме да изврши

контролу ваљаности амортизационог плана; да зна да сачини план амортизације зајма подељеног на обвезнице; да разуме појам конверзије зајма; да зна да препозна промену услова отплаћивања зајма; да зна да одреди нови ануитет након промена времена амортизације или промене каматне стопе.

3) Успешним реализовањем **трећег модула** ***Примери практичне примене привредне и финансијске математике*** у четвртом разреду наставник треба да постигне следеће исходе: ученика треба да зна да израчуна плате за све раднике у предузећу на основу познатих података; да зна да обрачуна порезе и доприносе; да зна да припреми пратећу документацију за исплату плата, односно да попуни потребне обрасце; да зна да израчуна штедне улоге и да припреми табелу; да зна да књижи све уплате и исплате и обрачунава салдо камате; да зна да сачини комлетан план амортизације зајма; да зна да сачини план амортизације зајма подељеног на обвезнице.

Упоређујући програм математике за старе профиле и програм нових профила ***пословни администратор*** и ***финансијски администратор*** у економским школама, може се закључити да је програм за нове профиле више прилагођен за стицање одговарајућих знања, вештина и радних компетенција потребних за ефикасно обављање послова на радном месту, самостално или у тиму, занимања економске струке. За доказ ове тврдње довољно је анализирати постављене исходе и упоредити број часова у наведеним програмима одређен за *елементе привредне и финансијске математике*. Број часова намењен за *елементе привредне и финансијске математике* у старом занимању *економски техничар* износи у трећем и четвртом разреду износи око 50, а у новом занимању *пословни администратор* износи само у четвртом разреду 96. Значи у новом занимању број часова намењених *елементима привредне и финансијске математике* увећани су за више од 100 процената. Поред добро испланираних модула *Елементи привредне математике* и *Зајам*, одређеним добрим садржајима и довољним бројем часова, уведен је и модул *Примери практичне примене привредне и финансијске математике*. Последњи модул омогућује да све знања стечена кроз прва два модула провере на разноврсним практичним примерима везаним за обрачун плата, пореза и доприноса, рачуна штедних улога и амортизације зајма и помоћу одговарајућих софтверских пакета у бироу за учење. На тај начин ученик ће бити оспособљен да повеже стечена теоријска знања с конкретним примерима из праксе што ће значајно утицати на стицање способности за примену знања из математике у стручно-теоретским предметима и развој његових радних компетенција потребних за ефикасно обављање послова на радном месту после завршене средње економске школе.

6.2.1. Остваривање циљева, задатака и исхода наставе математике у економским школама

Општи циљеви и задаци математике који важе за све моделе наставних програма М4-М14 објављени су уз сваки модел наставног програма. Модел М11, намењен ученицима економских школа, поред општих циљева и задатака садржи и посебне, васпитно образовне циљеве који произилазе из самог наставног програма за одређени разред. У новом образовном профилу, намењеном економским школама, *пословни администратор,* постављени су циљеви предмета и исходи. Један од показатеља како су остварени постављени циљеви, задаци и исходи су оцене ученика. *Економско-трговинска школа* из Краљева спада међу 18 школа у Србији у којој је школске 2003/2004. године први пут уведен нови, огледни образовни профил *пословни администратор.* У наредне две табеле приказан је успех ученика из математике у овој школи од школске 2003/2004. године закључно са школском 2008/2009. годином.

Економски техничар, финансијски техничар

Школска година	Разред	Број одељења	Број ученика	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	Просек из математике	Просечна оцена из свих предмета
2003/2004.	**I**	2	64	4	5	22	33		2.69	3.84
	II	4	125	15	19	39	52	0	2.98	3.92
	III	4	133	13	10	23	87	0	2.62	4.13
	IV	4	128	10	24	26	68	0	2.81	3.95
	Укупно	14	450	42	58	110	240	0	2.78	**3.96**
2004/2005.	**I**	2	67	3	6	14	44		2.52	3.72
	II	2	67	2	11	17	36	1	2.66	3.86
	III	4	125	8	18	27	72		2.70	3.64
	IV	4	132	24	21	26	61		3.06	4.16
	Укупно	12	391	37	56	84	213	1	2.78	**3.84**
2005/2006.	**I**	2	67	2	3	18	44		2.45	4.1
	II	2	69	3	8	11	47		2.52	3.82
	III	2	67	12	7	16	32		2.99	3.82
	IV	4	123	18	20	36	49		3.06	3.74
	Укупно	10	326	35	38	81	172	0	2.80	**3.87**
2006/2007.	**I**	2	75	13	14	15	33		3.09	4.11
	II	2	68	14	12	14	28		3.18	4.24
	III	2	70	5	10	13	42		2.69	3.93
	IV	2	66	16	15	24	11		3.55	4.12
	Укупно	8	279	48	51	66	114	0	3.12	**4.10**
2007/2008.	**I**	2	72	3	14	19	36		2.78	3.99
	II	2	76	20	6	21	29		3.22	4.23
	III	2	68	3	5	18	42		2.54	4.22
	IV	2	70	11	11	15	32	1	2.99	4.10
	Укупно	8	286	37	36	73	139	1	2.89	**4.14**
2008/2009.	**I**	2	69	8	5	23	33		2.83	4.05
	II	2	74	4	13	16	41		2.73	4.02
	III	2	76	27	13	14	22		3.59	4.19
	IV	2	67	17	10	15	25		3.28	4.50
	Укупно	8	286	56	41	68	121	0	3.11	**4.19**

Успех ученика занимања ***економски и финансијски техничар*** у периоду од 2003. до 2009.године пословни администратор

Школска година	Разред	Број одељења	Број ученика	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	Просек из математике	Просечна оцена из свих предмета
2003/2004.	**I**	2	48	5	5	20	18		2.94	4.205
	II		0							
	III		0							
	IV		0							
	Укупно	**2**	**48**	**5**	**5**	**20**	**18**	**0**	**2.94**	**4.205**
2004/2005.	**I**	2	47	12	5	15	15		3.30	4.34
	II	2	48	4	13	9	22		2.98	4.12
	III		0							
	IV		0							
	Укупно	4	95	16	18	24	37	0	3.14	**4.23**
2005/2006.	**I**	2	48	9	15	15	9		3.50	4.34
	II	2	47	10	12	6	19		3.28	4.26
	III		48	14	4	13	17		3.31	4
	IV		0							
	Укупно	**4**	**143**	**33**	**31**	**34**	**45**	**0**	**3.36**	**4.2**
2006/2007.	**I**	2	39	4	11	15	9		3.26	4.06
	II	2	48	15	3	12	18		3.31	4.52
	III	2	47	13	8	8	18		3.34	4.22
	IV		48	15	9	14	10		3.60	4.09
	Укупно	**6**	**182**	**47**	**31**	**49**	**55**	**0**	**3.38**	**4.26**
2007/2008.	**I**	2	49	7	10	14	18		3.12	4.14
	II	2	47	5	7	12	23		2.87	4.10
	III	2	48	14	3	14	17		3.29	4.45
	IV	2	48	16	8	14	10		3.63	4.33
	Укупно	**8**	**192**	**42**	**28**	**54**	**68**	**0**	**3.23**	**4.26**
2008/2009.	**I**	2	47	7	23	12	5		3.68	4.25
	II	2	48	22	16	9	1		4.23	4.24
	III	2	47	10	10	15	12		3.38	4.12
	IV	2	48	16	13	13	6		3.81	4.55
	Укупно	**8**	**190**	**55**	**62**	**49**	**24**	**0**	**3.78**	**4.29**

Успех ученика занимања ***пословни администратор*** у периоду 2003. до 2009. године

Анализом постигнутог успеха из математике у последњих шест година у овој школи можемо закључити да су ученици новог образовног профила *пословни администратор* од 18 наведених просечних оцена по разредима 16 пута постигли бољи успех у односу на старе образовне профиле *економски техничар* и *финансијски техничар*. У свакој од наведених шест школских година просечна оцена из математике за све разреде на крају школске године у образовном профилу *пословни администратор* била је већа од просечне оцене за све разреде у образовним профилима *економски техничар* и *финансијски техничар*.

Минималан број поена који је имао последњи ученик који је уписан у *Економско-трговинску школу* из Краљева по образовним профилима за последњих пет година дат је у следећој табели:

Школска година	Нови образовни профили			Стари образовни профил
	Пословни администратор	Комерцијалиста	Службеник осигурања	Економски техничар
2005/2006.	**90,76**	-	-	**92,92**
2006/2007.	**89,06**	-	-	**90,70**
2007/2008.	**85,86**	**85,18**	-	**86,50**
2008/2009.	**88,92**	**85,10**	-	**85,78**
2009/2010.	**93,50**	**87,00**	**86,84**	**87.06**

Број уписаних ученика у *Економско-трговинску школу* из Краљева по образовним профилима за последњих пет година дат је у следећој табели:

Школска година	Нови образовни профили			Стари образовни профил
	Пословни администратор	Комерцијалиста	Службеник осигурања	Економски техничар
2005/2006.	**48**	-	-	**60**
2006/2007.	**48**	-	-	**60**
2007/2008.	**48**	**24**	-	**60**
2008/2009.	**48**	**24**	-	**60**
2009/2010.	**24**	**24**	**24**	**60**

Анализом података у претходне две табеле можемо закључити да су у сва занимања *Економско-трговинске школе* из Краљева уписивани претежно одлични ученици. У школским годинама 2005/2006, 2006/2007, 2007/2008. 60-ти ученик старог образовног профила *економски техничар* имао је више поена него 48. ученик новог занимања *пословни администратор*. Школске 2008/2009. године 48. ученик занимања *пословни администратор* имао је више свега 3,14 поена од 60-тог ученика занимања *економски техничар,* а школске 2009/2010. године 24-ти ученик занимања *пословни администратор* имао је више свега 6,44 поена од 60-тог ученика занимања *економски техничар.* Из наведених података можемо закључити да у нове образовне профиле у овој школи нису уписивани бољи ученици, бар према броју поена које су остварили приликом уписа у први разред.

Анализом постигнутог општег успеха из свих предмета, просечне оцене по разредима, у последњих шест година у овој школи можемо закључити да су ученици новог образовног профила *пословни администратор* од 18 наведених просечних оцена по разредима 14 пута постигли бољи општи успех у односу на старе образовне профиле *економски техничар* и *финансијски техничар*. У свакој од наведених шест школских година просечна оцена из свих премета за све разреде на крају школске године у образовном профилу *пословни администратор* била је већа од просечне оцене за све разреде у образовним профилима *економски техничар* и *финансијски техничар.* Иако ученици новог образовног профила *пословни администратор* нису били бољи при упису у први разред, у току школовања постигли су бољи успех из математике и бољу просечну оцену, по разредима, из свих предмета у односу на ученике старог образовног профила *економски техничар*.

Предности нових образовних профила у односу на старе образовне профиле су следеће:

1. Број ученика у одељењима *пословног администратора је* у сваком одељењу 24, а број ученика у одељењима *економског техничара* и *финансијског техничара* креће се од 31 до 38. Мањи број ученика у одељењу омогућује ефикаснији рад јер наставник може више времена да посвети сваком ученику.
2. Директор бира професоре који ће изводити наставу у одељењима *пословног администратора*. Изабрани професор је прошао посебну обуку за извођење наставе у новом образовном профилу.
3. Наставници који изводе наставу у овом профилу обучени су за примену нових метода у настави, метода активно орјентисане наставе и комуникације.
4. Део наставе у четртом разреду који припада модулу *Примери практичне примене привредне и финансијске математике* изводи се у посебно опремљеним кабинетима, бироима за обуку, користећи одговарајући софтвер. Поред тога што овакав приступ чини наставу математике интересантнијом, занимљивијом и разноврснијом, омогућује проверу одговарајућих теоријских знања на конкретним примерима из радне праксе.
5. У наставним програмима, из свих предмета новог образовног профила *пословни администратор,* прецизније су припремљени програми по предметима јер су за сваки модул у сваком разреду прецизно дефинисани исходи, наставни садржаји и препоручене методе за реализацију модула. У старим образовним профилима *економски*

техничар и *финансијски техничар* у наставним програмима издати су само наставни садржаји по темама са бројем часова.

Последице увођења нових образовнох профила:

1. За шест година постојања образовног профила *пословни администратор* ни један ученик није пао ни на поправни испит из математике. У истом периоду у образовним профилима *економски техничар* и *финансијски техничар* 149 ученика ишло је на поправни испит из математике, а 2 ученика је поновило разред због математике.
2. Ученици новог образовног профила *пословни администратор* имају бољи општи успех (просечну оцену из свих предмета) од ученика старог образовног профила *економски техничар.*

2.2.2. Недостаци и мане нових образовних профила

Без обзира на многе добре стране нових образовних профила (мањи број ученика у одељењу, посебна обука професора, нови планови и програми, бољи успех ученика итд.) постоје и одређени недостаци и мане који се тичу истих:

1) За нове образовне профиле у подручју рада економија, уџбеници нису ни написани. Наставницима и ученицима је дат широк списак препоручене литературе за сва четири разреда. То су махом уџбеници, збирке задатака и тестова намењени ученицима средњих стручних школа или гимназија, па самим тим нису посебно прилагођени ученицима економских школа, а посебно не ученицима нових образовних профила у економској школи.

2) Данас све више ученика уписује средње стручне школе, да би већ после завршене средње школе имали одређено занимање, и наравно одређена практична знања. У новим образовним профилима ученици се школују за одређена занимања (комерцијалиста, пословни администратор и службеник осигурања). Тако да се претпоставља да ће после завршене средње школе почети да раде у струци, јер је и циљ нових профила да се ученици оспособе за рад одмах после средње школе. Међутим, велики број ученика жели да настави образовање, па се могу јавити одређени проблеми. С обзиром да је циљ нових смерова првенствено да се ученици оспособе за рад после средње школе, наставни програми су олакшани и прилагођени стицању одређених знања за одређене профиле. Конкретно из математике је фонд часова остао исти, али се више посвећује пажња економској и финансијској математици, и њеној практичној примени. Мање пажње је посвећено општим математичким знањима, која су неопходна за наставак образовања на факултетима где год се математика више користи (природно-математички и технички факултети). Да би надокнадили недостатак општег математичког знања ученици ће морати да посвете више времена како припремању пријемног испита, тако и припремању самог испита из математике на факултету.

Дакле, у новим образовним профилима у економској школи, акценат је на примени математике у занимању за које се ученик школује, а самим тим ученик стиче мање оптшег математичког знања, што може представљати проблем у наставку школовања.

3) У новим програмима наставницима су само препоручени наставни садржаји, али они нису обавезујући. Неизвесно је колико ће избор наставних садржаја наставника, допринети знању ученика које је применљиво у пракси.

2.2.3. Промене у наставним садржајима математике

Да ли су наставни садржаји из математике најбоље конципирани за ученике економских школа? Да ли има садржаја у наставним програмима из математике у разним профилима економске струке који су сувишни или који недостају? Ово су врло битна и врло озбиљна питања на која није лако дати одговоре, чак ни оним људима који се математиком дуго баве, а посебно неком чија каријера наставника математике тек почиње. По мишљењу Миодрага Стојановића, професора математике и дугогодишњег просветног саветника у Министарству просвете потребно би било извршити одређене корекције у наставном програму из математике за ученике економских школа. Те корекције по разредима могле би да изгледају на следећи начин[9]:

Први разред:
Сувишно: Тему Изометријске трансформације (21) могуће је смањити на 10 часова, као и тему Хомотетија и сличност смањити на 6 часова.
Недостаје: Добијене часове додати теми Пропорционалност величина.

Други разред:
Сувишно: У теми Експоненцијалне и логаритамске функције (17) не смањивати фонд, али избацити употребу логаритамских таблица (користити дигитроне или можда одговарајуће рачунарске програме). Тему Елементи тригонометрије (32) скратити на 20 часова.
Недостаје: Добијених 12 часова расподелити на теме Степеновање и кореновање као и квадратна једначина и функција (часове употребити за увежбавање предвиђених садржаја, а не усложавати).

Трећи разред:
Сувишно: Теме Полиедри (14) и Обртна тела (10) потпуно уклонити (ученици су то већ радили у осмогодишњој школи), тему Аналитичка геометрија у равни (27) смањити на 15 часова (радити само тачку, праву и линеарне неједначине).
Недостаје: Добијене часове додати теми Елементи привредне и финансијске математике (25), предлог (25+15+10+12).

Четврти разред:
Сувишно: Елементи финансијске математике (18) пребацити у трећи разред.
Недостаје: Добијене часове додати теми Извод функције (26), додати 18 у делу примена извода у економији (испитивање економских функција).

---

[9] подаци су добијени у разговору са Миодрагом Стојановићем

4.2.3. Стручна и методичка оспособљеност професора математике за реализацију наставних програма економске струке

У настави свих предмета, па математике, присутна је асиметричност, јер се на једној страни налази онај који подучава-наставник, а на другој страни онај који учи-ученик. Квалитет наставника се не мери само његовим стручним образовањем које је стекао на одговарајућем факултету, већ и његовом способношћу учења из сопствене праксе, преко рефлексивне обраде искуства, способношћу размене искустава са колегама, способношћу евалуације и доброг планирања пре свега на нивоу наставних активности и садржаја, способност преношења знања на ученике итд. Тешко је одговорити на питање у којој мери наставник треба да буде стручан из математике, а у којој мери да поседује наставничке вештине да би био успешан наставник. Сигурно је да наставник математике који поседује добро стручно знање, који уме да садржаје приближи ученицима, да пробуди њихово интересовање, може да буде добар наставник, односно компетентан наставник. По професору Ивану Јерковићу са Филозофског факултета Универзитета у Новом Саду[10] *најчешће области за дефинисање одговарајућих компетенција наставника су:*

1. *Знање и способност*
2. *Настава и учење*
3. *Планирање и организација*
4. *Познавање ученика и процеса учења*
5. *Праћење, оцењивање и евалуација*
6. *Понашање*
7. *Професионалне вредности и пракса*
8. *Комуникационе стратегије и изграђивање добрих односа са другима*
9. *Решавање проблема*
10. *Коришћење информационе технологије*
11. *Иницирање акција*
12. *Флексибилност и адаптибилност*

Сигурно је да се добар, компетентан, наставник добро сналази у већини од наведених области.

У економским школама се поред стандардних математичких тема које се јављају у гимназијама и стручним школама, јављају и теме које се обрађују само у економским школама. Таква наставна тема је *Елементи привредне и финансијске математике*. Свршени студент Математичког факултета који је пре факултета завршио гимназију или неку стручну школу(сем економске) није имао прилике да се у средњој школи или на факултету упозна са већином материје коју обухвата ова тема. Логично се одмах намеће питање: Да ли је опште знање професора математике довољно за успешно извођење наставе математике у економским школама? Широко математичко образовање које је професор математике стекао на

---

[10] Усаглашавање програма образовања просветних радника у земљама западног Балкана, Наташа Пантић, новембар 2008, Београд
(http://aaen.edu.yu/files/Usaglasavanje_programa_obrazovanja_nastavnika.pdf.)

студијама математике омогућује му да успешно савлада тему *Елементи привредне и финансијске математике* уз претходно усвајање неких економских термина. Први корак који наставник математике који почиње са радом у економској школи треба да учини је усвајање нових појмова и терминологије из стручних економских предмета који се појављују у привредној и финансијској математици. У свим овим темама примењују се знања из елементарне математике, али проблем представља чињеница да се већина младих професора први пут сусреће са неким од економских појмова и термина. Мислим да би једно од решења овог проблема било увођење једносеместралног предмета *Елементи привредне и финансијске математике* на смеру *Професор математике и рачунарства* Математичког факултета, тако да се већ у току студија студенти упознају са основним економским појмовима и са тим како да примене своје широко математичко знање у економији. У противном, ако то није могуће урадити, а ради лакшег и бржег сналажења младих наставника математике у економским школама, потребно је обавити допунско оспособљавање професора математике за рад у економским школама у смислу упознавања основа стручних економских предмета и утврђивања која су знања из математике потребна у пракси свршеном ученику економске школе, како се иначе ради у многим државама.

Специфичност наставе математике у економској школи је рад са ученицима који су професионално опредељени јер су уписали стручну школу која их припрема за бављење одређеном струком. Део економског образовања ученика економских школа треба да буде усмерен ка решавању практичних проблема економске природе, па у том смислу наставници стручних предмета и математике треба да припремају, планирају и изводе наставу. Приликом обраде одређених тема, специфичних за економску струку, наставник треба да мотивише ученике указивањем на могућу практичну примену тих садржаја у послу којим се свршени ученици економских школа буду бавили. Зато и одабрани примери за часове обраде и вежбања, у темама специфичним за економску школу, треба да буду примери из радне праксе које ће они решавати на свом радном месту.

Да би се успешно реализовао трећи модул *Примери практичне примене привредне и финансијске математике* у четвртом разреду наставник треба да буде оспособљен за обрачун и евиденцију зарада и накнада зарада, односно да зна да израчуна плате за све раднике у предузећу на основу познатих података; да зна да обрачуна порезе и доприносе; да зна да припреми пратећу документацију за исплату плата. Поред овладавања свим информацијама везаним за исплату зарада наставник треба да упозна како ради софтверски пакет за обрачун зарада у бироу за учење. Ово представља додатни напор за наставника јер наведену материју треба да савлада на неком семинару или да се самообразује, односно проучи читав низ прописа у вези са исплатом зарада. Ако то не постигне наставник неће моћи да реализује модул *Примери практичне примене привредне и финансијске математике* у четвртом разреду. Поред зарада наставник у овом модулу треба да са ученицима уради и практичне задатке у вези обрачуна штедних улога и амортизације зајма.

2.2.4. *Уџбеници и збирке задатака за економске школе*

Уџбеници и друга приручна математичка литература имају врло значајно место у настави. Добар уџбеник пружа широке могућности за решавање многих образовно-наставних задатака наставе математике. Због тога је важан задатак наставе математике оспособљавање ученика за коришћење уџбеника.

Велики део садржаја уџбеника математике чине задаци. Задатак у уџбенику математике увек има исту улогу, без обзира да ли је у функцији излагања новог градива, вежбања, утврђивања или обнављања градива. Решавање задатка треба да активира одређена знања и способности ученика и да, на основу успешности решавања одређеног задатка, наставнику омогући увид у квалитет знања и способности ученика. Зато уџбеници математике садрже различите врсте задатака.

Постоје одговарајући уџбеници за економске школе у којима је обрађен теоријски део, који је пропраћен примерима. Али не постоји одговарајућа збирка задатака, као што постоји за школе осталих усмерења. Међутим, уџбеници из математике намењени економским школама нису довољно прилагођени потребама овог подручја рада. Тачније, скоро да нема примера из подручја рада економија у овим уџбеницима изузев у темама из привредне и финансијске математике. Мислим да би ученици лакше учили и радили задатке ако би уџбеници били прилагођени потребама економских школа у смислу терминологије, примера и задатака из праксе. Зашто уџбеници нису прилагођени за потребе подручја рада економија? Вероватно због тога што те уџбенике могу да користе и ученици других подручја рада који раде по истим програмима или им се програми поклапају у великој мери тако да се исти уџбеник може продати широј популацији ученика.

Неприлагођеност уџбеника и збирки задатака за ове школе представља специфичност наставе математике у економској школи. Ако уџбеници нису прилагођени одређеној струци, наставник математике треба да изврши прилагођавање тумачењем појединих садржаја користећи појмове и терминологију економских наука, треба да састави нове примере задатака, односно изабере примере из праксе одређеног занимања економске струке, где год је то могуће.

2.2.5. *Корелација наставних садржаја математике и наставних садржаја осталих предмета*

Корелација, повезивање градива, омогућује целовит приступ школском знању, тако да она не остану расцепкана и подељена по *фијокама* различитих предмета и различитих разреда. Она покреће и охрабрује ученика да слободно користи знања из једног предмета и ван школског живота у другим предметима и ситуацијама. Једна од специфичности наставе математике у економској школи је успостављање корелације између одређених садржаја наставе математике и наставних садржаја, посебно, стручних предмета у одређеном занимању економске струке.

Ако није успостављена потребна корелација са програмима које треба реализовати из математике и одређеног предмета онда наставник математике корелацију треба да успостави планирањем рада и сарадњом са наставницима осталих предмета у току реализације годишњег плана рада. Ако не буде успостављена потребна корелација неких наставних садржаја могу настати извесни проблеми, у случају да наставник неког предмета, због потребе примене математике у том предмету, или обрнуто, због потребе примене усвојених појмова из тог предмета у математици, нестручно и ненаучно тумачи поједине наставне садржаје било из математике или неког другог премета. Много боље решење је да се у току планирања рада, где год је то могуће, успоставити потребну корелацију повезаних наставних садржаја.

Потребна је стална сарадња између наставника математике и наставника предмета у којима се јавља примена неких математичких садржаја ради проналажења проблема и задатака у том предмету који се могу математички тумачити и решавати. То је прави пут за успостављање добре корелације између математике и стручно-теоретских предмета у којима се примењује математика.

Да би успешно реализовао трећи модул *Примери практичне примене привредне и финансијске математике* у четвртом разреду и оспособио ученике за обрачун и евиденцију зарада и накнада зарада, наставник мора да успостави корелацију између математике и рачуноводства. Наиме ученици новог образовног профила *пословни администартор* у трећем разреду из предмета *Рачуноводство* обрађују модул *Обрачун и књижење зарада и накнада зарада*. Зњања која ученици стекну при обради овог модула у трећем разреду наставник ће искористити при обради одговарајућег модула на часу математике што ће му знатно олакшати посао. Наиме, у оквиру предмета *Рачуноводство* у трећем разреду ученик ће научити шта је зарада и накнада зараде и како се израчунавају, која је документација потребна за обрачун зарада а која за исплату зарада, који су обрасци потребни за исплату зарада.

У оквиру модула *Примери практичне примене привредне и финансијске математике* у четвртом разреду новог образовног профила *пословни администратор* наставник треба да, уз помоћ математичког апарата и појмова које су усвојили из рачуноводства, оспособи ученике да знају да обрачунају плате за све запослене у предузећу на основу познатих података, да знају да обрачунају порезе и доприносе који се плаћају из зараде и да припреми одговарајућу пратећу документацију за исплату зарада. Ученик треба да буде оспособљен да обрачун зарада (плата) изведе ручно, помоћу дигитрона и помоћу одговарајућег софтвера у бироу за учење. Да би наведени модул могао успешно да се реализује потребно је да наставник математике проучи и научи начин обрачуна и исплате зарада и да научи да користи одговарајући софтверски пакет за обрачун зарада у бироу за учење који се налази у школи. Ово сигурно представља посебну специфичност извођења наставе математике у економским школама јер наставник математике није обучен за обрачун и исплату зарада већ је потребно његово посебно усавршавање у наведеној области. Додатна тешкоћа за реализацију наведеног модула су честе промене прописа за обрачун зарада. За успешну реализацију наведеног модула наставник математике ће морати стално да прати промене законских прописа за обрачун зарада што, сигуран сам, неће бити ни мало једноставно. У противном, примери које буде радио са ученицима на часовима математике, из области обрачуна и исплате зарада, неће одговарати најновијим законским прописима из ове области.

Корелација између математике и неких стручних предмета у економским школама је неопходна било да је реч о потреби повезивања математике са другим предметима или других предмета са математиком. Један од разлога за недовољно коришћење градива из других предмета у настави математике, односно повезивања нових садржаја са познатим садржајима из стручних предмета економске струке, је недовољно основно образовање наставника математике из области економије и неодговарајућа сарадња наставника математике и наставника стручних предмета у економским школама на успостављању одговарајуће корелације. Ако жели, а потребно је, да повеже математику са неким од предмета економске струке, посебно када је реч о реализацији модула *Елементи привредне и финансијске математике*, наставник математике мора тачно да зна шта је ученик научио, у којем предмету и када из ове области обухваћене овим модулима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Весна Крцељ Каћански, Славица Мрвић Дабетић – **Пословна математика**, ИШ „Стручна књига“ д.п., Београд, 2004.
2. Владислав Милошевић, Миодраг Ивовић, Ратко Ненадовић, Крстомир Симић – **Математика са збирком задатака за III разред средње школе**, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2003.
3. Грегори Н. Макју – **ПРИНЦИПИ ЕКОНОМИЈЕ**, Центар за издавачку делатност Економског факултета у Београду, 2006.
4. Јелена Кочовић – **ФИНАНСИЈСКА МАТЕМАТИКА**, Центар за издавачку делатност Економског факултета у Београду, 2006.
5. Миленко М. Николић, **Уводне теме у методику математичког образовања**, Младо покољење, Београд 1967.
6. Наставни план и програм из математике – Службени гласник Републике Србије-Просветни гласник број 4/1991.
7. Наставни план и програм из математике – Службени гласник Републике Србије-Просветни гласник број 14/2004.
8. Наставни програм из математике за стручне школе, Архимедес, Београд 1991.
9. Правилник о наставном плану и програму огледа за образовни профил Пословни администратор, Службени гласник Републике Србије-Просветни гласник број 001/2004.
10. Правилник о изменама и допунама правилника о наставном плану и програму огледа за образовне профиле Пословни администратор и Финансијски администратор, Службени гласник Републике Србије-Просветни гласник број 18/2007.
11. Радич Вукичевић, Милорад Ђорђевић, Миливоје Лазић – **Математика са збирком задатака за IV разред средње школе**, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2005.
12. Студија праћења ученика образовног профила Пословни администратор, Завод за унапређење образовања и васпитања, Београд 2008.
13. Чарлс Х. Батлер, **Настава математике у средњој школи**, Вук Караџић, Београд 1967.
14. http://www.dositej.org.rs (15.11.2009.)
15. http://www.dobrodosliunemacku.org/ (20.11.2009.)
16. http://www.drugaekonomska.edu.rs/ (25.11.2009.)