

Magistarski rad:

*Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta*

---

UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

Slaviša Milisavljević

**JEDAN POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE  
PROKSIMITETA  
IZMEĐU PUTANJA MALIH PLANETA**

MAGISTARSKI RAD

BEOGRAD 2002

Magistarski rad:

*Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta*

---

Veliko hvala prof.dr. Mikeu Kuzmanoskom za ideju, rukovođenje i pomoć koju mi je ukazao od početka pa sve do kraja rada. Takođe se zahvaljujem prof.dr. Jovanu Lazoviću bez čijih radova na ovu temu ni ovaj ne bi imao ovakav oblik. Posebnu zahvalnost iskazujem prof.dr. Zoranu Kneževiću za upućivanje na noviju literaturu i moderne načine rešavanja problema proksimiteta. Na kraju hvala i mojim kolegama dipl.matematičarima Zlatku Filipoviću i Zoranu Mitroviću kao i dipl. ing. elektrotehnike Zoranu Kataliniću za nesebičnu pomoć i sugestije tokom izrade ovog rada.

Sadržaj

1.	Uvod .....	4
2.	Kratak istorijski pregled problematike proksimiteta .....	7
3.	Uslovi postojanja proksimiteta .....	16
4.	Određivanje broja proksimiteta .....	23
5.	Geometrijski prikaz rešavanja problema .....	33
6.	Analitički postupak.....	39
7.	Rezultati i komentar.....	45
8.	Zaključak .....	52
	Literatura.....	54
	Prilozi: 4 tabele i 38 tabaka slika odgovarajućih rezultata i grafika.....	57

## 1. Uvod

Male planete su nebeska tela čije su sve osnovne karakteristike slične kao kod velikih planeta, osim njihovih dimenzija. To je i razlog za naziv male planete. Prvo takvo nebesko telo otkriveno je 1. januara 1801. godine, od strane italijanskog astronoma Pjacia (Piaci). To je bio rezultat organizovanog traganja za nepoznatom planetom, na kojem su radili skoro svi evropski astronomi toga vremena.

Naime, usled opšteg uvažavanja tada aktuelnog Ticijus-Bodeovog pravila, a naročito posle otkrića Urana, još više se povećala verovatnoća da na udaljenosti od oko 2.8 AJ mora postojati planeta.

Zaista, to se i obistinilo, međutim dimenzije tog nebeskog tela bile su mnogo manje od očekivanih. Ova prva mala planeta dobila je ime Ceres i od tada počinje stalno otkrivanje novih sličnih nebeskih tela. Već sledeće godine nemački astronom Olbers (Olbers) otkriva drugu malu planetu koja dobija ime Palas, da bi do kraja 1807. godine bile otkrivene još dve: Juno i Vesta. Tek 1845. godine dolazi do otkrića pete po redu male planete.

Interesantno je reći da su se otkrića prvih malih planeta dogodila čak 130 godina pre poslednjeg otkrića jedne velike planete. Naime, Pluton je otkriven tek 1930. godine. Razlog tome je sigurno nedovoljno razvijena posmatračka tehnika, jer se on nalazi na oko 40 AJ od Sunca. Tako smo imali situaciju da Sunčev sistem sa njegovim glavnim članovima ( velikim planetama ) još nije bio "kompletiran" , a došlo se do saznanja za postojanje malih planeta. Naravno, odmah se pretpostavilo da takvih malih nebeskih tela ima mnogo više od do tada otkrivenih. Pažnja astronoma sve više je usmeravana ka otkrivanju novih malih planeta, tako da ih sredinom XIX veka ima već oko petnaestak. Obzirom da većina prvootkrivenih pripada grupi najvećih te vrste, dalja otkrivanja, zbog nedovoljno razvijenih posmatračkih tehnika, nisu se odvijala tako ubrzano. Međutim, kasnije njihov broj naglo raste, naročito u poslednje vreme.

Ilustracije radi, u drugoj polovini XX veka bilo je oko 1 500 numerisanih malih planeta. Početkom osamdesetih godina njihov broj raste na preko 2 000, dok je najveći skok usledio krajem devedesetih, kada je bilo numerisano čak 13 000 malih planeta.

Obzirom na neverovatan razvoj računске tehnike poslednjih godina, broj numerisanih malih planeta raste takoreći iz dana u dan, tako da ih trenutno ima preko 46 500.

Usled tako velikog broja ovih malih nebeskih tela odavno je već uvedena katalogizacija, tako da svaka od njih ima svoj kataloški broj, ime, putanjske elemente kao i neke druge poznate karakteristike.

Kada se dalje govori o karakteristikama malih planeta, treba prvo reći da se u početku redosled njihovog otkrivanja skoro poklapao sa redosledom njihovih dimenzija. Tako na primer (1) Ceres, koji je prvi otkriven, je najveći i ima prečnik 914 km i masu  $5 \times 10^{-10} M_{\odot}$  i pretpostavlja se da njegova masa čini jednu četvrtinu ukupne mase svih malih planeta zajedno. Drugootkrivena mala planeta (2) Palas ima prečnik od 523 km, a zatim slede (4) Vesta (502 km.), (10) Higija (429 km.), dok su sve ostale uglavnom mnogo manje. Od ukupnog broja numerisanih malih planeta, njih 241 je sa prečnikom većim od 100 km, a smatra se da ih ima preko 480 000 sa prečnikom većim od 1,6 km. Naravno da onaj ostali ogroman broj malih planeta koje su otkrivene ne treba zanemariti u analizama njihovih kretanja, bez obzira na male vrednosti njihovih prečnika i masa. Zbog slabog otkrivanja i praćenja onih sa prečnicima ispod 1 km možemo biti iznenađeni nekim bliskim prolazom, ili čak sudarom sa Zemljom. Veliki krateri u Jukatanu (Meksiko) i oblasti Tunguska u Sibiru, to najbolje potvrđuju.

U zavisnosti od njihovog hemijskog sastava podeljene su na više tipova i to:

C –tip u čijem sastavu preovlađuje ugljenik i takvih malih planeta ima najviše, oko 75%

S – tip koji se odlikuje većom zastupljenošću silikata i njih ima oko 17%, dok ostale imaju određena polarizaciona svojstva kao neki metali (nikl, gvožđe), pa kao takve pripadaju tipu M.

Kretanje malih planeta je u direktnom smeru, a najveći broj ima putanje između Marsa i Jupitera. Taj prostor zovemo planetoidski pojas ili prsten, jer uslovno rečeno ima oblik torusa. Moglo bi se reći, u pravom smislu te reči, da je on prenatrpan malim planetama, jer se u njemu nalazi preko 99% svih do sada numerisanih malih planeta.

Vidimo dakle, da usled tako velikog broja ovih malih nebeskih tela i velike verovatnoće za bliskost pojedinih putanja među njima, problem najmanjih međusobnih rastojanja, tj. proksimiteta ima zapaženo mesto u astronomskim istraživanjima. Obzirom da sličnim metodama izračunavamo i udaljenosti između Zemlje i neke male planete, kao i da se na osnovu ponašanja malih planeta u proksimitetu ( bliskih prilaza), vrši izračunavanje njihovih masa, značaj njegovog određivanja je od prilične važnosti.

Može se takođe uočiti kako je prvo otkriće male planete, koje se dogodilo pre nešto više od dva veka i koje tada nije zadovoljilo javnost iz sveta astronomije (jer se očekivala velika planeta), zapravo početak jedne velike oblasti istraživanja. Pod tim ne podrazumevamo samo otkrivanje novih malih planeta, već naravno i određivanje njihovih putanja, proksimiteta, masa i ostalih značajnih karakteristika, a sve u cilju izgradnje što celovitije i tačnije slike Sunčevog sistema.

## **2. Kratak istorijski pregled problematike proksimiteta**

Problem proksimiteta počeo je da se javlja sredinom XIX veka. Tada je bilo otkriveno oko petnaestak malih planeta. Prvi koji su počeli da se bave ovom problematikom su bili američki astronom B. A. Guld. (B. A. Gould) i nemački astronom H. A. Darest (H. A. d'Arrest). Imajući u vidu međusobne položaje putanja malih planeta, oni su pretpostavili, da se proksimiteti između dve planetoidske putanje mogu očekivati u okolini relativnih čvorova.

Obzirom da je proksimitet najmanje rastojanje između dve planetoidske putanje, on može biti od većeg značaja za izučavanje kretanja malih planeta. Na mogućnost da se dve male planete nađu istovremeno (ili bar približno u isto vreme) u tom položaju prvi je ukazao direktor bečke opservatorije K. V. Litrov (K. V. Littrow). On je tvrdio da bi planetoidi imali uticaja jedni na druge ako bi se nalazili dosta blizu, pod uslovom da svi ostali poremećaji (od velikih planeta) budu što tačnije izračunati i da bi se na osnovu tih uticaja mogle izračunati mase planetoida.

To je naročito bilo moguće kod planetoida koji su se dugo kretali "jedan pored drugog" oko proksimiteta, skoro "paralelno". Bez obzira što je Litrov ukazao na to, tek će se direktor kopenhavske opservatorije E. Stromgren (E. Strömberg) pozabaviti time. On je smatrao da proksimiteti planetoida od "samo" nekoliko stotih delova AJ nisu dovoljni da proizvedu merljive poremećaje na osnovu kojih bi se mogle izračunati, bar približno, neke od masa planetoida. Kasnije se ispostavilo sasvim suprotno, tj. da upravo izračunavanjem međusobnih gravitacionih uticaja možemo dobiti najpouzdanije vrednosti masa malih planeta. Važno je napomenuti da je još 1802. godine (odmah posle otkrića Palasa), Gaus (Gauss) dao sugestiju da se mase malih planeta mogu dobiti na osnovu međusobnih gravitacionih efekata. Međutim, zbog problema koji proističu iz činjenice da su planetoidi veoma malih masa, Gausova nada ostvarila se tek posle 172 godine, kada su mase Ceresa i Palasa prvi put određene upravo po njegovoj zamisli.

Prvo izračunavanje proksimiteta daje nemački astronom Grunert (Grunert) i to preko opštih izraza za određivanje tačaka ukrštanja dvaju konusnih preseka u prostoru. Izrazi su suviše komplikovani, tako da su u praksi bili skoro neupotrebljivi.

Pored sugestije koje je dao za međusobne uticaje malih planeta, Litrov takođe daje i jednačine koje su imale konkretnu primenu u rešavanju problema proksimiteta. Promenjive veličine u njima su ekscentrične anomalije ( $E$  i  $E_1$ ) i to je prvi put da se proksimiteti predstavljaju preko njih.

Jednačine koje je on izveo imaju oblik:

$$\begin{aligned} \alpha \sin(E+B) - a^2 e^2 \sin 2E + \alpha' \sin(E+B') \cos E_1 + \alpha'' \sin(E+B'') \sin E_1 &= 0, \\ \beta \sin(E+C) - a_1^2 e_1^2 \sin 2E_1 + \beta' \sin(E_1+C') \cos E + \beta'' \sin(E_1+C'') \sin E &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

U ovim jednačinama  $a$  i  $a_1$ , su velike poluose,  $e$  i  $e_1$ , ekscentričnosti dotičnih putanja, a veličine  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$ ,  $\beta''$ ,  $B$ ,  $B'$ ,  $B''$ ,  $C$ ,  $C'$  i  $C''$  funkcije putanjskih elemenata uočenih planetoida.

Litrov je zbog nemogućnosti da na jednostavan i brz način lako dođe do parova planetoida gde postoje proksimiteti, pribegao pravljenju modela planetoidskih putanja od žice. Na taj način bi prvo otkrio kod kojih parova se putanje dovoljno približavaju, pa tek onda pristupao izračunavanju.

Interesantno je da je ovakav postupak ujedno omogućavao da nađe i približne vrednosti heliocentričnih longituda položaja proksimiteta. Ako se ovako nađena vrednost longituda nije mnogo razlikovala od longituda relativnog čvora, Litrov je za približnu vrednost longituda položaja proksimiteta uzimao nadjenu vrednost longituda. Tačniju vrednost položaja proksimiteta određivao je sukcesivnim aproksimacijama.

Sledeći astronom koji se ovim problemom bavio bio je Linser (Linsser). Njegov postupak se svodio na izračunavanje heliocentričnih longituda, heliocentričnih latituda i potega uočenih planetoida u ekvidistantnim razmacima. Upoređivanjem izračunatih



potega i latituda i izdvajanjem onih parova za koje su razlike ovih vrednosti padale ispod usvojenih granica, određivao je vrednosti longituda proksimiteta. Litrov i Linser su za najmanje međusobno rastojanje usvojili iznos od 0.1 AJ.

Sin astronoma Galea (Galle) (koji je otkrio Neptun), A. Gale (A. Galle), u svojoj doktorskoj disertaciji formirao je jednačine za minimalno rastojanje između putanja u obliku:

$$\begin{aligned}\lambda \sin(E_1 + \Lambda) &= \frac{a}{2a_1} \sin^2 \varphi \sin 2E + \alpha \sin(E + \lambda), \\ \lambda' \sin(E_1 + \Lambda') &= \frac{a}{2a} \sin^2 \varphi_1 \sin 2E_1 + \alpha' \sin(E + \lambda').\end{aligned}\tag{2.2}$$

Veličine  $\lambda, \lambda', \Lambda, \Lambda', \alpha, \alpha', A, A'$  mogu se predstaviti preko glomaznih i komplikovanih izraza dobijenih posle niza smena i transformacija. Galle je, kao i njegovi prethodnici, nepoznate  $E$  i  $E_1$  izračunavao sukcesivnim aproksimacijama, uzimajući za polazne vrednosti ekcentričnih anomalija one dobivene pomoću relativnih čvorova.

Ilustracije radi, tada je broj otkrivenih planetoida bio 232, a Galle je konkretne rezultate za neki od parova radio logaritmima na četiri decimale.

Direktor opservatorije u Nici G. Fajet (G. Fayet) je sa svojim saradnicima odredio uzajamne proksimitete za 800 planetoidskih putanja i proksimitete za periodične komete i velike planete.

On je rešavao problem takođe sukcesivnim aproksimacijama, a polazio je od toga da su kod proksimiteta između dva planetoida heliocentrične longituda jednake (što ne mora uvek da bude) i ograničavao se na parove kod kojih je minimalna udaljenost između putanja manja od 0.01 AJ. Postupak kojim se služio je ideja engleskog astronoma A. Mart-a (A. Marth) izložena još 60 godina ranije, koja u stvari predstavlja konstruisanje i nanošenje na milimetarsku hartiju intersekata planetoida. Iz njih je

dobijao približne položaje proksimiteta, a nakon izračunavanja i udaljenosti tačaka proksimiteta. Inače intersekt planetoida je zatvorena kriva linija, koja se dobija kao projekcija stvarne planetoidske putanje na poluravan koja je normalna na ekliptiku.

Tačnost Fajeovog postupka iznosila je od  $0.5^{\circ}$ - $1^{\circ}$  za vrednost longitude a  $\pm 0.003$  AJ za udaljenost proksimiteta.

Rezultati njegovog rada su oko 320 000 parova intersekata, među kojima je pronašao šest parova kod kojih u položaju proksimiteta udaljenost između planetoida nije veća od 0.0004 AJ, tj. 60 000 km.

Vidimo dakle da se u drugoj polovini XIX i početkom XX veka problem proksimiteta već uveliko formirao i da je, kako je vreme prolazilo, sve više dobijao na značaju.

Problemom proksimiteta bave se i naši autori. Opširan istorijski pregled najznačajnijih radova na ovu temu dat je od strane V.V.Miškovića (1974.). Uglavnom su to bile analize dotadašnjih radova nemačkih astronoma. On je obradu ograničavao na slučajeve planetoida koji su se kretali u istoj ravni, drugim rečima slučajeve planetoida sa približno jednakim čvorovima i nagibima putanja. Ovakve parove ili grupe planetoida nazvao je kvazikomplanarnim planetoidima. Svakako da je najkompletniju metodu za izračunavanje proksimiteta putanja malih planeta dao J. P. Lazović (1964) u svojoj doktorskoj disertaciji "Važnije osobenosti u kretanju kvazikomplanarnih planetoida". Ova metoda je najviše primenjivana, a sa određenim dopunama u upotrebi je i danas. Određivanje proksimiteta pomoću izraza u kojima figurišu prave anomalije kao promenljive je takođe dao Lazović (1967.), pri čemu je korišćen isti postupak, sa tom razlikom što su krajnja rešenja položaja i veličine proksimiteta izražena preko pravih anomalija.

U prvom slučaju on polazi od uslovnih jednačina:

$$\frac{\partial(\rho^2)}{\partial E_1} = 0, \quad \frac{\partial(\rho^2)}{\partial E_2} = 0, \quad (2.3)$$

pri čemu je kvadrat rastojanja izražen preko ekscentričnih anomalija  $E_1$  i  $E_2$ ,

odnosno

$$\rho^2 = (f_{1x}(E_1) - f_{2x}(E_2))^2 + (f_{1y}(E_1) - f_{2y}(E_2))^2 + (f_{1z}(E_1) - f_{2z}(E_2))^2. \quad (2.4)$$

Posle niza smena, sređivanja i rešavanja dobija jednačine u obliku:

$$\begin{aligned} f(E_1, E_2) &\equiv X_2 \sin E_1 + Y_2 \cos E_1 - Z_1 \sin E_1 \cos E_1 = 0, \\ g(E_1, E_2) &\equiv X_1 \sin E_2 + Y_1 \cos E_2 - Z_2 \sin E_2 \cos E_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

gde su veličine  $X_2$ ,  $Y_2$ ,  $Z_1$ ,  $X_1$ ,  $Y_1$  i  $Z_2$  odgovarajući koeficijenti koji zavise od putanjskih elemenata.

Ovo su jednačine transcendentnog tipa i on ih rešava sukcesivnim aproksimacijama, pri čemu određuje uzastopne i to sve manje i manje popravke  $\Delta E_{10}$ ,  $\Delta E_{20}$ ,  $\Delta E_{11}$ ,  $\Delta E_{21}$ , ...,  $\Delta E_{1(k-1)}$ ,  $\Delta E_{2(k-1)}$  dok ne odredi za svaki sistem, tj. za svako ukrštanje putanja vrednosti

$$E_{1k} = E_{1(k-1)} + \Delta E_{1(k-1)} \quad \text{i} \quad E_{2k} = E_{2(k-1)} + \Delta E_{2(k-1)}, \quad (2.6)$$

koje zadovoljavaju polazne jednačine sa tačnošću sa kojom se to želi.

Prve popravke  $\Delta E_{10}$  i  $\Delta E_{20}$  mogu se odrediti iz jednačina oblika

$$f_0 + \Delta E_{10} \frac{\partial f}{\partial E_{10}} + \Delta E_{20} \frac{\partial f}{\partial E_{20}} = 0, \quad g_0 + \Delta E_{10} \frac{\partial g}{\partial E_{10}} + \Delta E_{20} \frac{\partial g}{\partial E_{20}} = 0, \quad (2.7)$$

pri čemu se dobijaju nove vrednosti  $E_{11} = E_{10} + \Delta E_{10}$  i  $E_{21} = E_{20} + \Delta E_{20}$ . Sve dalje popravke dobijaju se na analogan način, a vrednosti približnih popravki zbog učinjenih zanemarivanja kod razvijanja u red imaju oblik:

$$\Delta E_{10} = \frac{g_0 \frac{\partial f}{\partial E_{20}} - f_0 \frac{\partial g}{\partial E_{20}}}{\frac{\partial f}{\partial E_{10}} \frac{\partial g}{\partial E_{20}} - \frac{\partial f}{\partial E_{20}} \frac{\partial g}{\partial E_{10}}}, \quad \Delta E_{20} = \frac{f_0 \frac{\partial g}{\partial E_{10}} - g_0 \frac{\partial f}{\partial E_{10}}}{\frac{\partial f}{\partial E_{10}} \frac{\partial g}{\partial E_{20}} - \frac{\partial f}{\partial E_{20}} \frac{\partial g}{\partial E_{10}}}. \quad (2.8)$$

Lazović je ovu metodu potpuno kompletirao 1993. godine.

Kod rešavanja problema preko pravih anomalija, Lazović polazi od uslova da heliocentrični vektori položaja  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$  prve i druge eliptične putanje budu izraženi preko pravih anomalija  $(v_1, v_2)$  u obliku,

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= r_1 \cos v_1 \vec{P}_1 + r_1 \sin v_1 \vec{Q}_1, \\ \vec{r}_2 &= r_2 \cos v_2 \vec{P}_2 + r_2 \sin v_2 \vec{Q}_2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

a da je vektor relativnog položaja jednak  $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Kvadrat rastojanja će isto biti u funkciji pravih anomalija, a uslovne jednačine za postojanje ekstremuma imaju sledeći oblik:

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial \rho^2}{\partial v_2} = 0. \quad (2.10)$$

Posle rešavanja i sređivanja ponovo dobija izraze oblika

$$f(v_1, v_2) = 0, \quad g(v_1, v_2) = 0 \quad (2.11)$$

tj. transcendentni sistem jednačina, ali sada izražen preko pravih anomalija, koje takođe rešava sukcesivnim aproksimacijama dok ne nađu vrednosti,

$$\begin{aligned} v_{1n} &= v_{1(n-1)} + \Delta v_{1(n-1)}, \\ v_{2n} &= v_{2(n-1)} + \Delta v_{2(n-1)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

koje zadovoljavaju polazni sistem jednačina, sa potrebnim stepenom tačnosti.

Sledeće popravke u nizu dobijaju se na analogan način, čime se može dobiti još tačnija vrednost pravih anomalija

$$\begin{aligned}v_{12} &= v_{10} + \Delta v_{10} + \Delta v_{11} = v_{11} + \Delta v_{11}, \\v_{22} &= v_{20} + \Delta v_{20} + \Delta v_{21} = v_{21} + \Delta v_{21}\end{aligned}\tag{2.13}$$

Dalje popravke dobijaju se razlaganjem funkcija  $f(v_1, v_2) = 0$  i  $g(v_1, v_2) = 0$  u Tejlorov red i zanemarivanjem članova sa stepenima većim od jedan. Prve od njih dobijaju se iz jednačina

$$\begin{aligned}f_0 + \Delta v_{10} f'_{v_{10}} + \Delta v_{20} f'_{v_{20}} &= 0, \\g_0 + \Delta v_{10} g'_{v_{10}} + \Delta v_{20} g'_{v_{20}} &= 0,\end{aligned}\tag{2.14}$$

gde su:

$$\begin{aligned}f'_{v_{10}} &= \left( \frac{\partial f}{\partial v_1} \right)_{v_1=v_{10}, v_2=v_{20}}, \\f'_{v_{20}} &= \left( \frac{\partial f}{\partial v_2} \right)_{v_1=v_{10}, v_2=v_{20}}, \\g'_{v_{10}} &= \left( \frac{\partial g}{\partial v_1} \right)_{v_1=v_{10}, v_2=v_{20}}, \\g'_{v_{20}} &= \left( \frac{\partial g}{\partial v_2} \right)_{v_1=v_{10}, v_2=v_{20}},\end{aligned}\tag{2.15}$$

a posle rešavanja sistema one su

$$\begin{aligned}\Delta v_{10} &= \frac{g_0 f'_{v_{20}} - f_0 g'_{v_{20}}}{f'_{v_{10}} g'_{v_{20}} - f'_{v_{20}} g'_{v_{10}}}, \\ \Delta v_{20} &= \frac{f_0 g'_{v_{20}} - g_0 f'_{v_{10}}}{f'_{v_{10}} g'_{v_{20}} - f'_{v_{20}} g'_{v_{10}}}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Razmatrajući razne aspekte i mogućnosti određivanja proksimiteta Lazović radi i na numeričko grafičkim metodama . U jednoj takvoj metodi Lazović (1974) dolazi do jednačina pravih u kojima kao parametar figuriše prava anomalija. U zavisnosti od parametara postojaće i različite prave, koje posle predstavljanja na istom grafiku daju vrednosti traženih pravih anomalija.

Razvojem računске tehnike, naročito u poslednje tri decenije, numeričke metode su u potpunosti potisnule grafičke, ali su to u principu bile prilagođene metode Lazovića (1976,1978).

Isti autor (Lazović 1970,1971) daje analizu i vrši izračunavanje poremećaja parova kvazikomplanarnih planetoida u kretanju, dok su u proksimitetu. Dobijeni rezultati pokazuju i potvrđuju da međusobni gravitacioni uticaj malih planeta, kada se istovremeno nalaze u proksimitetu ili u njegovoj blizini, uopšte nije zanemarljiv. Lazović i Kuzmanoski (1974,1976) daju određene rezultate u vezi trajanja proksimiteta, kao i promenama međusobnih rastojanja zbog promena njihovih putanjskih elemenata .

Izračunavanjem proksimiteta između putanje malih planeta Ceres, Palas, Juno, Vesta i drugih numerisanih malih planeta Lazović i Kuzmanoski (1983) dobili su proksimitet od samo 0,0000154 AJ, tj. svega 2300 km. i to između (2) Palas i (1193) Afrika.

J. Simovljević (1977) daje vrednosti početnih uslova, tj. ekscentričnih anomalija, za izračunavanje proksimiteta metodom sukcesivnih aproksimacija. Simovljević (1979) daje proračune, tj. analitičke izraze poremećajnih efekata planetoidskih putanja tokom trajanja proksimiteta .

I u novije vreme srećemo različite pristupe problemu proksimiteta. Tako između ostalih K.Kolševnjikov i N.Vasiljev (Kholshvnikov i Vassiliev 1999) različitim smenama uspevaju da uproste funkciju rastojanja između dve planetoidske putanje. G. F. Gronki (Gronchi 2002), određuje ukupan, tj. najveći mogući broj stacionarnih tačaka

funkcije rastojanja i daje zavisnost njihovog broja od međusobnog oblika njihovih putanja.

U poslednjoj deceniji su se kao interesantni pokazali bliski prilazi određenog broja malih planeta sa Zemljom. Istraživački projekat NEO-s (Near Earth Objects) i u okviru njega određeni programski paketi, pored ostalog, obrađuju podatke i izračunavaju bliske prilaze i njihova vremena događaja za sve potencijalno hazardne male planete. Obzirom na veliki broj numerisanih malih planeta i njihovih putanja, poznavanje i određivanje uslova postojanja njihovih proksimiteta sa Zemljom je svakako neophodno. Oni su ujedno i najvažniji (glavni) pokazatelji da li je neka mala planeta hazardna po Zemlju ili ne.

Vidimo da je određivanje proksimiteta u modernim tokovima astronomskih istraživanja dobilo jednu drugačiju formu (u obliku bliskih prilaza) i da je to prilično zastupljen astronomski problem, iako datira od sredine XIX veka. Zbog činjenice da se njegova rešenja mogu koristiti i za druga izračunavanja, on ima uvek određenu aktuelnost i značaj. To najbolje potvrđuju upravo bliski prilazi, koji su, slobodno se može reći, "korak dalje" u pogledu korišćenja i rešavanja problema proksimiteta. Sve su to razlozi za stalno traženje novih načina prilaženja problemu, bilo da se radi o njegovom izračunavanju, određivanju uslova za njegovo postojanje ili definisanje problema u celini.

### 3. Uslovi postojanja proksimiteta

Ako uzmemo u obzir dosadašnje radove o proksimitetima vidimo da i pored veće ili manje raznolikosti u prilazima, njihova rešenja su uvek bila data preko pravih ili ekcentričnih anomalija.

Krajnji rezultat će i ovakvim pristupom takođe biti izražen preko ekcentričnih anomalija  $E_1$  i  $E_2$ , što predstavlja poziciju proksimiteta i inteziteta relativnog vektora položaja  $\vec{\rho}$ , što je ustvari veličina samog proksimiteta. Međutim, kada govorimo o uslovima njegovog postojanja, neke činjenice koje su od posebnog značaja se moraju naglasiti. Mi zapravo, strogo matematički gledano, imamo dve elipse u prostoru sa jednom zajedničkom žižom. Naš zadatak je da odredimo sva moguća minimalna rastojanja između njih. Na prvi pogled problem i ne deluje tako komplikovano, međutim, obzirom na specifičnost elipsi kao geometrijskih oblika, veliki broj parametara i činjenice da je ovo prostorni problem, mi zapravo imamo jedan prilično složen zadatak. Obzirom na prirodu jednačina, svi pokušaji da se preko analitičke ili diferencijalne geometrije dobiju rešenja nisu dali ništa bolje ili jednostavnije rezultate. Naprotiv, dobijaju se takođe glomazne jednačine, koje se kao takve ne mogu ni rešiti.

Određenim smenama sistem jednačina (2.3) izražen je preko algebarskih formi, a kao rezultat toga dobijena su neka pojednostavljena kod funkcije rastojanja (Kolševnjikov i Vasiljev 1999). Gronki (2002) prikazuje funkciju rastojanja kao kvadrat rastojanja ali u pravouglom kordinatnom sistemu. On koristi Bernštajnovu teoremu o preseku rešenja dva polinoma sa dve promenjive u kompleksnom polju brojeva i pomoću sume Minkovskog izračunava ukupan broj rešenja sistema. Na osnovu toga određuje broj stacionarnih tačaka funkcije rastojanja u zavisnosti da li su putanje kružne ili eliptične. Iz tabele 1 vidimo kako izgleda ta podela izražena preko ekscentričnosti ( $e$  i  $e'$ ) prve i druge planetoidske putanje.



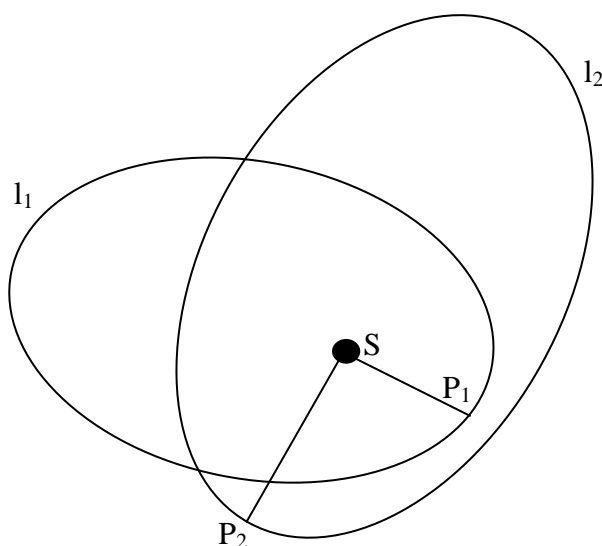
Tabela 1

ekscentričnost prve putanje	ekscentričnost druge putanje	broj stacionarnih tačaka
$e \neq 0$	$e' \neq 0$	12
$e \neq 0$	$e' = 0$	10
$e = 0$	$e' \neq 0$	10
$e = 0$	$e' = 0$	8

Sama priroda problema je takva, da samo izračunavanje preko eliptičnih elemenata daje njegovu realnu predstavu i mogućnost dobijanja tačnih rezultata, ma kakav konkretan primer bio.

Nemogućnost rešavanja transcendentnih jednačina (2.5) u eksplicitnom obliku, može se zaključiti iz razmatranja geometrijskih uslova. Mi ćemo problem proksimiteta tako i posmatrati, a rešavaćemo ga isključivo preko eliptičkih elemenata.

Ako posmatramo dve proizvoljne eliptične putanje  $l_1$  i  $l_2$ , sa jednom zajedničkom žižom (vidi sl. 1),



Slika 1

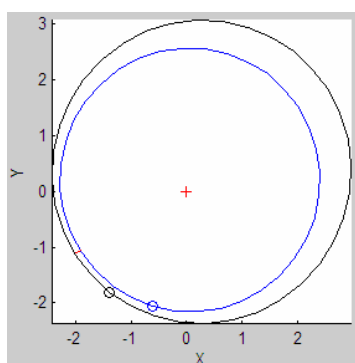
pri čemu su  $SP_1$  i  $SP_2$  perihelske daljine, možemo postaviti više važnih pitanja u vezi definisanja problema proksimiteta. Prvo pitanje koje se nameće je da li postoje još neka karakteristična mesta (osim u okolini relativnih čvorova), gde se takođe mogu očekivati proksimiteti. Zatim, da li se na osnovu vrednosti njihovih putanjskih elemenata to može odmah zaključiti. Obzirom da pod proksimitetom podrazumevamo minimalne vrednosti međusobnih rastojanja između dve eliptične putanje, a znamo da su u tačkama proksimiteta istovremeno zadovoljene obe vektorske jednačine 2.10. postavlja se i sledeće pitanje: šta je sa vrednostima koje takođe zadovoljavaju obe vektorske jednačine, a nisu proksimiteti (prevojne tačke i maksimumi) i koliko ih ukupno može biti? Znajući da sve te vrednosti, (proksimiteti, prevojne tačke i maksimumi) predstavljaju rešenja transcendentnih jednačina 2.5, odgovori na gore postavljena pitanja bi problem proksimiteta sigurno bolje objasnili i definisali.

Videli smo još u uvodnom delu da su izračunavanja proksimiteta bila predmet mnogih autora i da je njegov istorijat prilično dug. Širu analizu mogućeg broja, svih ekstremnih vrednosti funkcije rastojanja između dve eliptične putanje, srecemo ipak tek u skorije vreme i to, kao što smo već rekli, kod Kolševnjikova i Vasiljeva (1999) i Gronkija (2002). Njihove analize potvrđuju ranije pretpostavke o postojanju četiri minimalna rastojanja, t.j. proksimiteta, između dve eliptične putanje. Takođe daju nam broj i položaje ostalih ekstremnih vrednosti (maksimuma i prevoja), koje zadovoljavaju polazni sistem jednačina (2.5). Imajući sve to u vidu, kao i činjenicu da funkcija rastojanja zavisi od dve promenljive (ekscentrične anomalije  $E_1$  i  $E_2$ ), kompletna analiza svih mogućih slučajeva bila bi od veće važnosti. Bez obzira što ona rešenja transcendentnih jednačina koja nisu proksimiteti (prevojne tačke i maksimalna rastojanja), nemaju skoro nikakvu praktičnu primenu. Takav širi pristup problemu dve eliptične putanje u prostoru dao bi takođe dodatna objašnjenja i zaključke zašto je problem proksimiteta ustvari nerešiv u opštem ekscipitnom obliku.

Mi ćemo se ovde detaljnije pozabaviti tim pitanjima i doći do određenih rezultata od kojih se neki nisu očekivali.

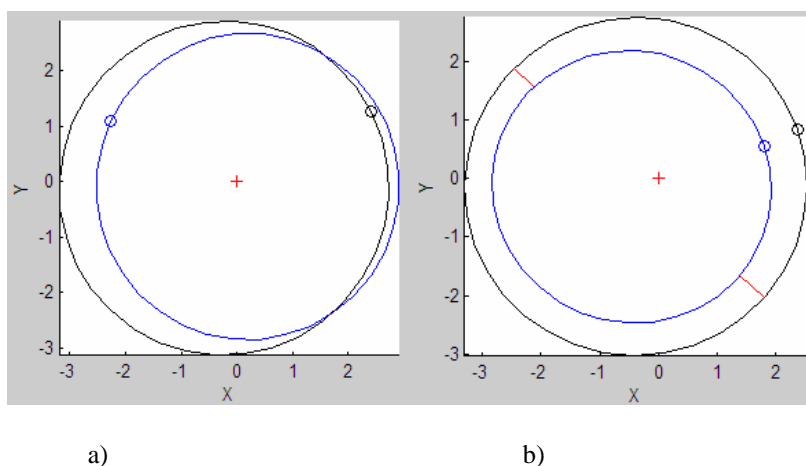
Kada konkretno govorimo o uslovima koji moraju biti ispunjeni da bi između eliptičnih putanja dve male planete postojao proksimitet, onda možemo zaključiti i razdvojiti sledeće moguće slučajeve:

- a) Jedan proksimitet uvek postoji. Sama priroda problema na to ukazuje, tj. poznato je da između bilo koje dve zatvorene krive linije u prostoru mora postojati makar jedno minimalno rastojanje. Zbog toga se o nekim posebnim uslovima koji moraju biti ispunjeni ovde ne mora ni govoriti, jer je to jasno samo po sebi (videti primer na sl. 2, koja predstavlja projekciju putanja para malih planeta (4-638) na ravan prve putanje, tj. XY ravan).



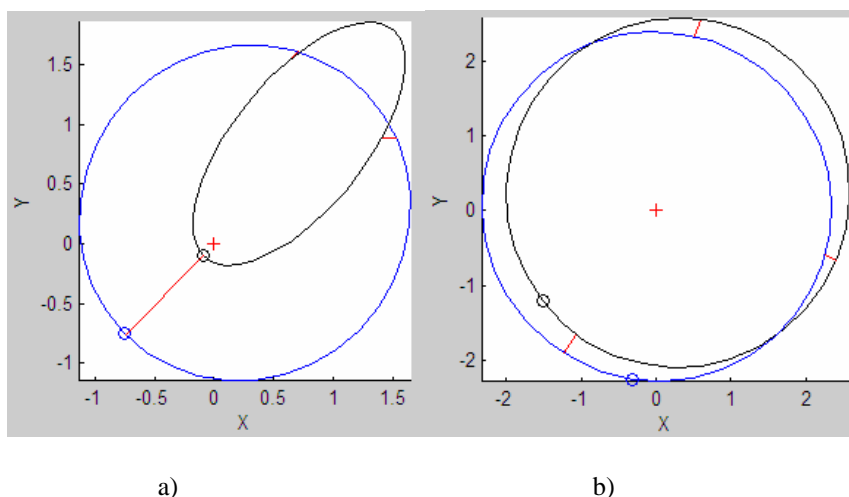
Slika 2

- b) Dva proksimiteta mogu postojati i to je praktično najčešći slučaj. Oni se obično nalaze u blizini relativnih čvorova, ili kada se radi o kvazikomplamarnim putanjama, u okolini njihovih projekcijskih preseka. Obzirom na relativno mali međusobni nagib svih prikazanih primera, njihove projekcije na XY ravan daju dosta realnu sliku stvarnog stanja. Ipak, zbog tačnog izražavanja uveli smo termin projekcijski presek, jer se te tačke ne moraju uvek nalaziti u blizini relativnih čvorova. Da bi slučaj sa dva proksimiteta bio ispunjen, dovoljno je da između ravni u kojima se nalaze putanje postoji određeni nagib, ili da se gledajući njihovu projekciju na XY ravan stiče utisak kao da se seku u dve tačke. Slike 3 a i 3 b u principu odgovaraju svim mogućim slučajevima u stvarnosti. Na sl. 3a prikazana je projekcija putanja para malih planeta (1-3468) na XY ravan, dok je na sl. 3b odgovarajuća projekcija za par (6-16).



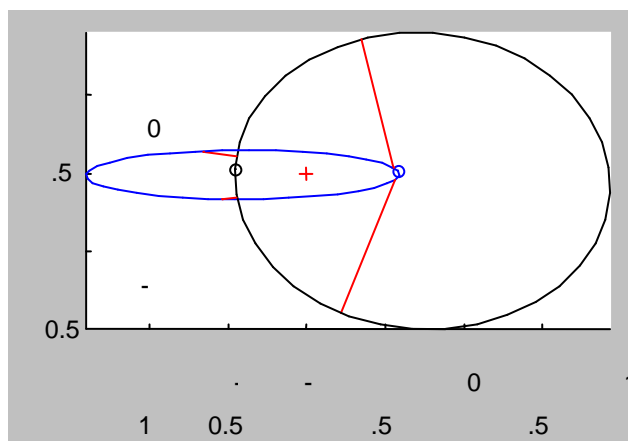
Slika 3

- c) Tri proksimiteta mogu postojati, ali se taj slučaj, kada su u pitanju putanje malih planeta, sreće mnogo ređe. Proksimiteti kod ovog slučaja kao po pravilu obično su raspoređeni tako da su dva u okolini projekcijskih preseka putanja (ređe u blizini čvorova), dok je treći uvek skoro simetrično u sredini naspram njih. Uslovi za postojanje ovakvog slučaja obično proističu iz specijalnih položaja prethodnog slučaja. Sa sl. 4a za par malih planeta ( 1943-3200 ) i sa sl. 4b za par ( 287-486 ) to se može jasno videti.



Slika 4

- d) Četiri proksimiteta takođe mogu postojati, sa tom razlikom sto ih je u stvarnosti jako teško pronaći. Primer sa sl. 5 je simulirani model koji imamo u radu Gronkija (2002) i on upravo pokazuje da je slučaj sa četiri proksimiteta teorijski moguć.



Slika 5

Obzirom na prilično veliku eksecentricnost, zatim na izrazito veliki međusobni nagib (preko  $80^\circ$ ) ovog primera, kao i na ispitivanja ostalih sa bliskim vrednostima eliptičnih elemenata, nameće se sledeći utisak: slučajevi sa četiri proksimiteta su mogući isključivo kod parova sa sličnim karakteristikama kao sto su ove. U sledećem poglavlju ćemo ovu tvrdnju detaljnije obrazložiti.

Svakako treba napomenuti činjenicu da je ukupan broj proksimiteta i maksimalnih rastojanja uvek jednak broju prevojnih tačaka. Sve te vrednosti su rešenja sistema transcendentnih jednačina, odnosno stacionarne tacke funkcije rastojanja.

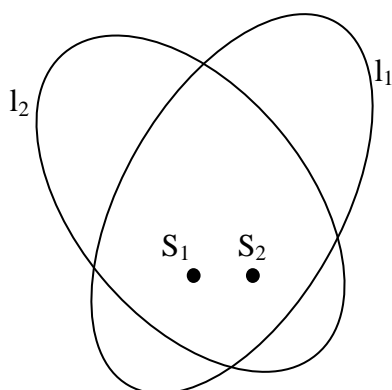
Takođe je važno reći da, bez obzira na to što eliptične putanje malih planeta mogu zauzimati najrazličitije međusobne položaje, jedino slike njihovih projekcija na ravan jedne od njih (XY ravan) pružaju mogućnost da se uoči određena zakonitost, kada je reč o svim mogućim položajima proksimiteta u okviru svakog tipa. Teorijski slučaj (koji se skoro ne javlja kada su u pitanju putanje malih planeta) je kada su njihove

eliptične putanje u ravnima čija je međusobna razlika u nagibima blizu  $90^\circ$ . Sa sl. 5 vidimo da takve međusobno "vertikalne" putanje, uz uslov suprotnih položaja perihela (međusobna razlika oko  $180^\circ$ ), daju karakteristične položaje koji mogu usloviti četiri proksimiteta. Samim tim i broj ostalih stacionarnih tačaka (maksimuma i prevoja) biće veći. Projekcije eventualnih putanja parova malih planeta koje bi imale četiri proksimiteta ne bi se mnogo razlikovale od prikazane na sl. 5 i približno bi zadovoljavale gore navedene uslove, tj. vrednosti određenih putanjskih elemenata.

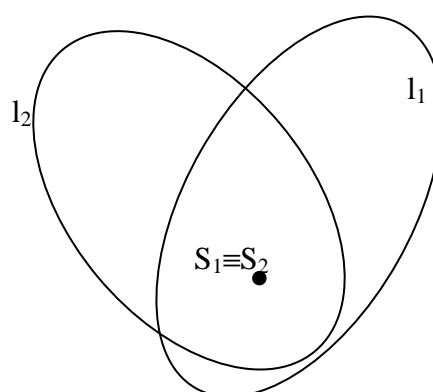
## 4. Određivanje broja proksimiteta

U prethodnom poglavlju smo konstatovali da uslovi za postojanje četiri minimalna rastojanja (proksimiteta) između dve elipse u prostoru postoje. Ipak, oni su izrazito složeni i strogi, upoređujući ih sa uslovima za postojanje 1, 2 ili 3 proksimiteta. Detaljnija analiza svih mogućih položaja putanja malih planeta pokazala je, kao što smo već rekli, da slučajevi sa četiri proksimiteta mogu postojati isključivo kod putanja koje imaju veće ekscentričnosti, izuzetno velik međusobni nagib i suprotne položaje perihela. Da bismo to dokazali, krenuli smo od suprotne pretpostavke.

Razmotrimo prvo dve proizvoljne elipse u ravni, čiji bi eventualni položaj mogao imati četiri presečne tačke i koji bi u prostornom slučaju uslovio postojanje četiri proksimiteta. Sa sl. 6 vidimo da dve elipse  $l_1$  i  $l_2$  to jednostavno ispunjavaju bez drugih dodatnih uslova. Međutim, kao što znamo, one predstavljaju dve planetoidske putanje pa samim tim imaju i jednu zajedničku žižu. Primenjujući taj uslov na njih mi gubimo i dve presečne tačke. Drugim rečima, bilo kako da "namestimo" elipse  $l_1$  i  $l_2$  u ravni, da bi dobili četiri presečne tačke, izgubimo uslov zajedničke žiže i obrnuto (sa sl. 7 vidimo kako mora izgledati njihov položaj sa tim dodatnim uslovom). Ovo naravno važi bez obzira kakve su vrednosti njihovih eliptičnih elemenata.



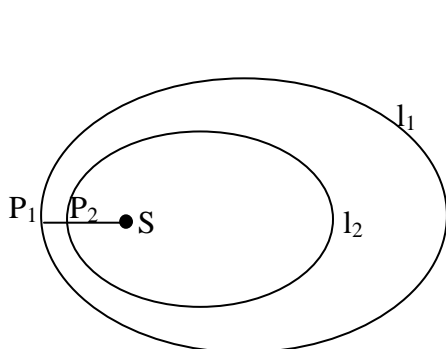
Slika 6



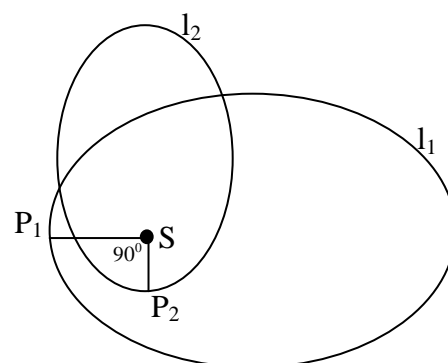
Slika 7

Analizirajmo sve moguće karakteristične položaje elipse  $l_1$  i  $l_2$ , ali sada sa uslovom jedne zajedničke žiže.

Posmatrajmo elipsu  $l_1$  proizvoljnih dimenzija i obeležimo njenu perihelsku daljinu sa  $SP_1$  (videti sl.8).



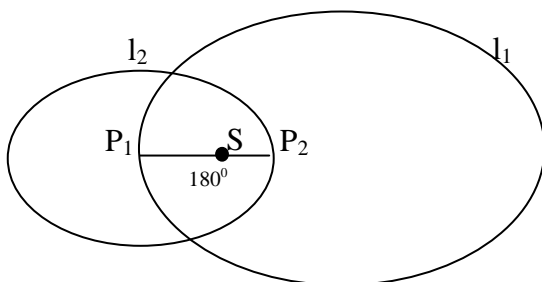
Slika 8



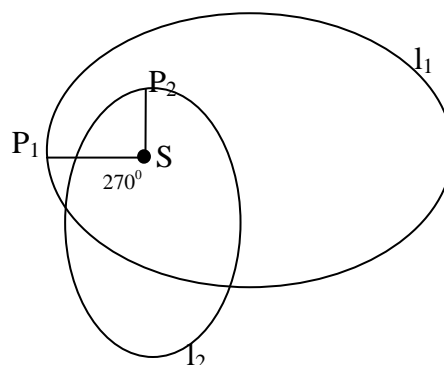
Slika 9

Možemo zaključiti da bilo koja druga elipsa  $l_2$ , čija je perihelska daljina  $SP_2 < SP_1$ , ne može imati više od dve presečne tačke, bilo koji položaj da ima. To je zato što je perihelska daljina najmanje rastojanje od svih mogućih između tačaka na elipsi i žiže. Znači, bez obzira koji je ugao između pravca perihelske daljine  $SP_2$  i pravca perihelske daljine  $SP_1$ , tj. za koliko zarotiramo elipsu  $l_2$  oko žiže, ne može doći do presecanja elipse  $l_1$  i "perihelskog" dela elipse  $l_2$ . (videti sl. 9, 10 i 11).





Slika 10



Slika 11

Bolje rečeno, do preseka može doći samo na drugom ("afelskom") delu elipse, a tu možemo imati uvek najviše dve presečne tačke, što se takođe vidi sa gore prikazanih slika.

Svakako da se isto događa i kada zarotiramo elipsu  $l_1$  oko zajedničke žiže, za neki ugao u odnosu na njen perihelski pravac  $SP_2$ .

Dokazaćemo ovde sledeću tvrdnju:

Između dve elipse u ravni sa jednom zajedničkom žižom, ne može postojati više od dve presečne tačke.

Postavimo polarni kordinatni sistem sa centrom u zajedničkoj žiži, tako da se X osa poklapa sa pravcem velike ose jedne od elipsa. Tada je jednačina te elipse

$$r_1 = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos \nu}, \quad (4.1)$$

pri čemu je, kao što znamo:

$r_1$  – poteg  
 $p_1$  – parametar elipse  
 $b_1$  – mala poluosa  
 $a_1$  – velika poluosa  
 $e_1$  – ekcentričnost,  
 $v$  – prava anomalija

Neka je poluosa druge elipse zarotirana u odnosu na X osu za ugao  $v_0$ . Poštujući već usvojen sistem obeležavanja, jednačina druge elipse je:

$$r_2 = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos(v - v_0)} \quad (4.2)$$

Zajedničke tačke su rešenja jednačine  $r_1 = r_2$ , odnosno:

$$\frac{p_1}{1 + e_1 \cos v} = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos(v - v_0)} \quad (4.3)$$

Nakon sređivanja, dolazi se do izraza:

$$p_2 - p_1 = \cos v (p_1 e_2 \cos v_0 - p_2 e_1) + p_1 e_2 \sin v \sin v_0 \quad (4.4)$$

Ako uvedemo oznake:

$$S = p_1 e_2 \cos v - p_2 e_1, \quad K = p_1 e_2 \sin v_0, \quad F = p_2 - p_1, \quad (4.5)$$

tada je jednačina 4.4 oblika:

$$F = \cos v \cdot S + \sin v \cdot K \quad (4.6)$$

U zavisnosti koje vrednosti imaju F, S i K, možemo razlikovati dva generalna slučaja:

$$\text{I } S^2 + K^2 = 0,$$

$$\text{II } S^2 + K^2 \neq 0.$$

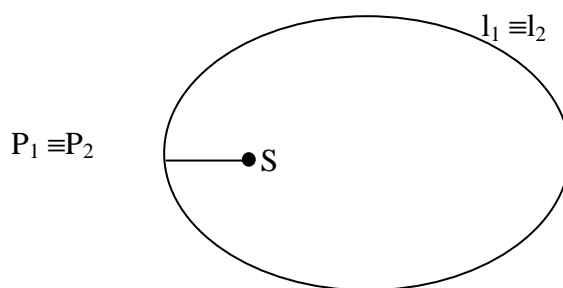
**Prvi** generalni slučaj je trivijalan za  $F = 0$  i za  $F \neq 0$ :

Kada je  $F = 0 \Rightarrow p_2 = p_1$ ,

$$K = 0 \Rightarrow v_0 = 0 \text{ i}$$

$$S = 0 \Rightarrow e_2 = e_1,$$

tj. elipse se podudaraju (videti sl. 12) .



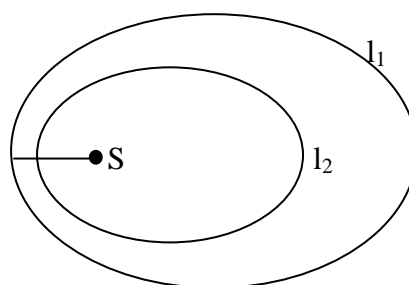
Slika 12

Kada je  $F \neq 0 \Rightarrow p_2 \neq p_1$ ,

$$K = 0 \Rightarrow v_0 = 0 \text{ i}$$

$$S = 0 \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{e_1}{e_2}.$$

Tada imamo određenu proporcionalnost između parametara i ekscentričnosti obe elipse, pri čemu se perihelski pravci i dalje poklapaju, pa ne možemo imati ni jednu presečnu tačku, već je uvek jedna elipsa u drugoj (videti sl. 13).



Slika 13

**Drugi** generalni slučaj obuhvata sve ostale moguće položaje, bez obzira da li je  $F = 0$  ili  $F \neq 0$ . Pošto je  $S^2 + K^2 \neq 0$ , možemo pisati i da je  $\sqrt{S^2 + K^2} \neq 0$ . Ako sada jednačinu (4.6) podelimo sa ovim izrazom, dobijamo jednačinu u obliku

$$\frac{F}{\sqrt{S^2 + K^2}} = \frac{S}{\sqrt{S^2 + K^2}} \cos \nu + \frac{K}{\sqrt{S^2 + K^2}} \sin \nu. \quad (4.7)$$

Ovo smo uradili zato što za ovakav oblik jednačine uvek sa sigurnošću možemo tvrditi da tada postoji ugao  $\theta \in [0, 2\pi]$ , koji je jednoznačno određen, tako da je:

$$\sin \theta = \frac{S}{\sqrt{S^2 + K^2}}, \quad \cos \theta = \frac{K}{\sqrt{S^2 + K^2}}, \quad (4.8)$$

jer je

$$-1 \leq \frac{S}{\sqrt{S^2 + K^2}} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{K}{\sqrt{S^2 + K^2}} \leq 1 \quad (4.9)$$

i

$$\left( \frac{S}{\sqrt{S^2 + K^2}} \right)^2 + \left( \frac{K}{\sqrt{S^2 + K^2}} \right)^2 = 1. \quad (4.10)$$

Sada jednačinu (4.7) možemo napisati u obliku:

$$\frac{F}{\sqrt{S^2 + K^2}} = \cos v \sin \theta + \sin v \cos \theta, \quad (4.11)$$

ili još kraće, zbog adicione formule zbira sinusa uglova kao:

$$\frac{F}{\sqrt{S^2 + K^2}} = \sin(\theta + v). \quad (4.12)$$

Vidimo da se jednačina (4.7) dosta pojednostavila, a uvođenjem smena

$$A = \frac{F}{\sqrt{S^2 + K^2}} \text{ i } \theta + v = \alpha,$$

ceo **Drugi** generalni slučaj, za sve ostale moguće netrivialne slučajeve, možemo svesti na analizu rešenja jednačine,

$$\sin \alpha = A. \quad (4.13)$$

Ova jednačina kao što znamo:

- nema rešenja ako je  $|A| > 1$
- ima jedno rešenje ako je  $|A| = 1$
- ima dva rešenja ako je  $|A| < 1$

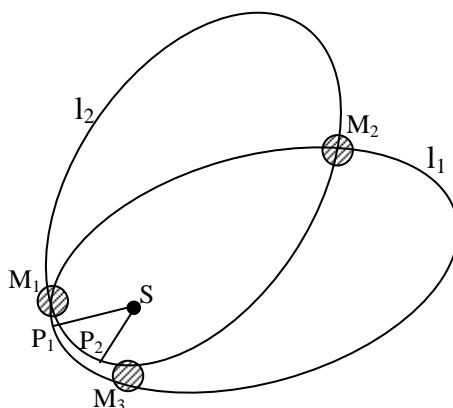
Ovde nam uopšte nije važno da li je  $F = 0$  ili  $F \neq 0$ , jer u oba slučaja mora biti zadovoljena jedna od tri gore navedene apsolutne vrednosti.

Dakle jednačina (4.3) može imati jedno, dva, ili da uopšte nema rešenja. Obzirom da nam svako od njih (ako ih ima) predstavlja jednu presečnu tačku između elipsi koje smo upoređivali, zaključujemo da je maksimalan broj presečnih tačaka između dve elipse u ravni sa jednom zajedničkom žižom dva, što nam je i bio cilj da dokažemo.

Postavlja se pitanje, šta je to što je realno moguće i što se stvarno može dogoditi u ravni između dve elipse sa jednom zajedničkom žižom, a što bi pri maloj promeni

međusobnog nagiba, tj. u prostornom slučaju, uslovalo pojavu tri proksimiteta? To bi bio slučaj kada imamo dve presečne tačke i treću koja je jako bliska dodiru, kao što je prikazano na sl.14. U tom trećem karakterističnom položaju ( na sl. 14 obeležen sa  $M_3$  ) se može nalaziti jedno minimalno rastojanje između dve elipse, a ono je najmanje kada je  $SP_1=SP_2$ .

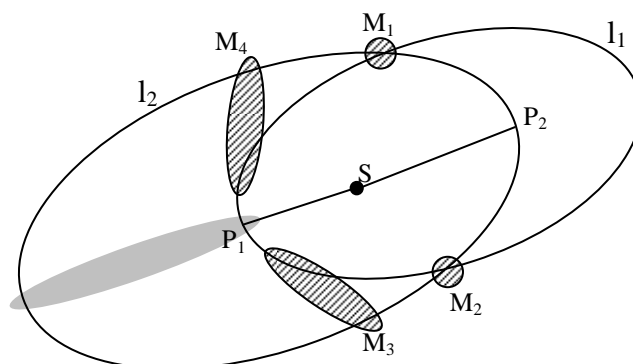
Ipak, nikada se ne može dogoditi da to minimalno rastojanje bude jednako nuli, tj. postati stvarni dodir.



Slika 14

Kada se ispune dati uslovi i dođe do situacije kao na sl. 14 (obično je karakteristično mesto "dodira" u blizini perihela one elipse koja se rotira), dobijamo model koji u prostornom slučaju (kada između ravni u kojima se elipse nalaze postoji određeni nagib), ima tri proksimiteta. Od ta tri proksimiteta, dva su, kao i obično, u okolini projekcijskih preseka putanja  $M_1$  i  $M_2$ , dok je treći u okolini karakterističnog položaja  $M_3$ .

Kada govorimo o slučaju sa četiri proksimiteta on bi se mogao shvatiti kao specijalni slučaj prethodnog prikazanog na sl. 14. Postavimo elipse sa te slike u položaj dve presečne tačke, ali sada sa međusobnom razlikom u poziciji perihela od približno  $180^\circ$  (videti sl. 15).



Slika 15

Na prvi pogled vidimo da je to već razmatrani slučaj dva proksimiteta sa sl. 10. Međutim, iz ovakve ravanske postavke u prostornom slučaju, pri dovoljno velikoj razlici u nagibima ravni u kojima se elipse nalaze, dolazi upravo do pojave još dva proksimiteta i to u zonama  $M_3$  i  $M_4$ . Ovi proksimiteti su skoro simetrično raspoređeni u odnosu na pravac maksimalnog rastojanja između ovih elipsi. Njihovo postojanje (egzistencija) je zasnovana isključivo iz dva razloga. Prvi je položaj elipsi kao “karike u lancu” (periheli su na suprotnim stranama), tako da pozicija  $M_3$  sa sl. 14, koju smo uslovno zvali tačka dodira, ovde ne postoji. Naprotiv, imajući u vidu da se pozicija  $M_3$  nalazila u pravcu perihela, ona se pri ovakvom međusobnom položaju elipsi prosto gubi i postaje jedno od najvećih rastojanja (osenčeni deo sl. 15). Tako imamo situaciju u kojoj “ostajemo samo” na dva proksimiteta, kao što je već prikazano na sl. 10.

Međutim, postepenim povećavanjem međusobnog nagiba ravni u kojima se nalaze elipse, dolazi do pojave trećeg proksimiteta, a kasnije oko “kritičnog ugla” (u prikazanom primeru njegova vrednost je  $79^\circ$ - $81^\circ$ ) i do pojave četvrtog proksimiteta. Oba ova proksimiteta upravo se nalaze u zonama  $M_3$  i  $M_4$ . Svakako da dovoljno veliki međusobni nagib između dve elipse gde imamo četiri proksimiteta, neće biti isti kod svih primera ovog tipa, ali se slobodno može reći da je upravo on taj drugi razlog za postojanje četiri proksimiteta.

Magistarski rad:

*Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta*

---

Svi ostali mogući položaji (bez obzira na vrednosti putanjskih elemenata, a naročito na uzajamni nagib), ne mogu dati ni jedan koji bi se principijelno razlikovao od ovde prikazanih primera i modela. Poslednji slučaj sa četiri proksimiteta je najsloženiji, on zajedno sa dva maksimalna rastojanja koji ovde postoje i šest prevojnih tačaka (sedla) ukupno ima 12 stacionarnih tačaka. To je ujedno i maksimalan broj rešenja ovog problema, a eksplicitan dokaz je dao Gronki (2002).



## 5. Geometrijski prikaz rešavanja problema

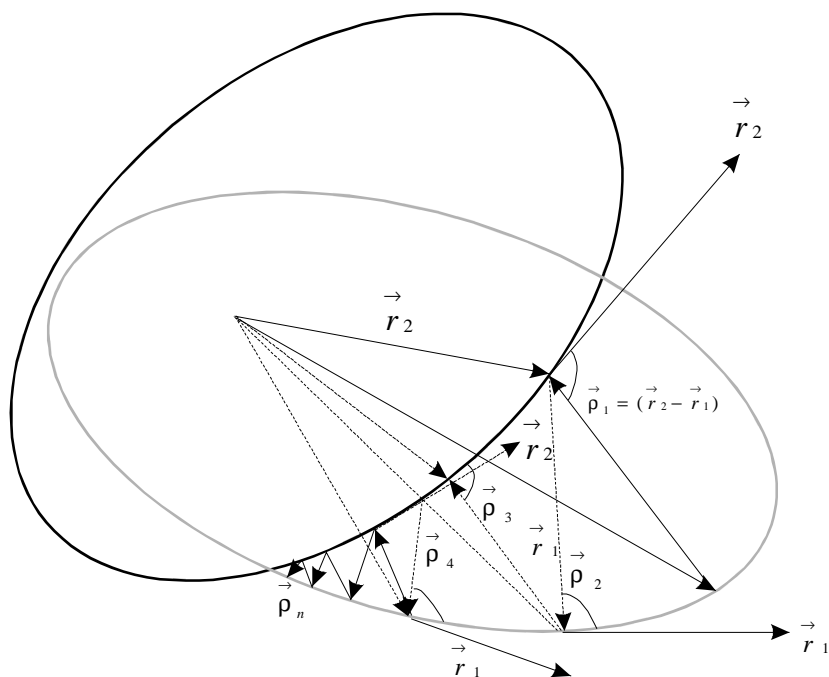
U prethodnom poglavlju smo utvrdili da je maksimalan broj proksimiteta između dve eliptične planetoidske putanje četiri. Oni mogu zauzimati različite položaje, ali ipak svi parovi malih planeta gde eventualno ima uslova za postojanje četiri proksimiteta, principijelno se mogu predstaviti kao na sl. 15.

Postavlja se sada pitanje kako ih pronaći. Postupak nalaženja svih mogućih proksimiteta koji će ovde biti izložen, zasnovan je na ideji koja potiče od J.Simovljevića i koja do sada nigde nije publikovana.

Po toj ideji iz jedne proizvoljne tačke prve putanje (iako je potpuno nevažno sa koje putanje krećemo), povlači se normala na drugu putanju, a zatim se iz nađene tačke sa druge putanje spušta normala na prvu. Postupak teče sve do tačaka proksimiteta, a kada dođe do njih te dve normale će se poklopiti..

Osnova ideje kod ovakvog rešavanja problema proksimiteta, bila je da se iskoristi poznavanje vektora položaja  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$  u svakoj tački na putanji. To obezbeđuje izračunavanje realativnog vektora položaja  $\vec{\rho}$ , čiji je intezitet u tački proksimiteta ustvari veličina samog proksimiteta.

Drugim rečima, ovde nećemo vršiti aproksimacije, već ćemo uspostaviti konvergenciju relativnog vektora položaja  $\vec{\rho}$ , tako da granični slučaj njegove konvergencije uvek bude u nekom od mogućih proksimiteta. Takav način će nam omogućiti da izračunavanjem poslednje vrednosti realitvnog vektora položaja, upravo izračunamo i sam proksimitet. U zavisnosti koliko takvih konvergencija ima tokom obilaženja po jednoj od putanja, toliko će biti i proksimiteta.



Slika 16

$\vec{\rho}_1$  - odgovarajući vektor posle prvog izračunavanja

$\vec{\rho}_2$  - odgovarajući vektor posle drugog izračunavanja

$\vec{\rho}_3$  - odgovarajući vektor posle trećeg izračunavanja

$\vec{\rho}_4$  - odgovarajući vektor posle četvrtog izračunavanja

...

$\vec{\rho}_n$  - odgovarajući vektor posle n-tog izračunavanja

Sa sl. 16 vidimo način na koji se ostvaruje ovakav postupak. Mi ustvari iz proizvoljne tačke na prvoj putanji (obično krećemo iz perihela, tj. za  $E_1=0$ ), povučemo relativni vektor položaja  $\vec{\rho}$ . Njegov početak je u izabranoj tački prvog planetoida. Pri tome vodimo računa da taj vektor mora biti upravan na tangentu u odgovarajućoj tački putanje drugog planetoida. Vektorska jednačina koja to opisuje je jedna od dve poznate jednačine za uslov proksimiteta. Ovde je to jednačina:

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} = 0. \quad (5.1)$$

Obzirom da smo  $E_1$  sami izabrali (obično uzimamo za početak  $E_1=0$ ), nepoznata veličina u ovoj vektorskoj jednačini je samo  $E_2$ . Nju možemo izračunati koristeći podatke za konkretan slučaj. Izračunavši  $E_2$ , mi ustvari dobijamo tačku na drugoj putanji gde nam se nalazi kraj vektora  $\vec{\rho}$ , tj. vektora relativnog položaja. Sada gore navedeni postupak ponavljamo, sa tom razlikom što vektor  $\vec{\rho}$  ima početak u tački na drugoj putanji kojoj odgovara izračunata vrednost ekscentrične anomalije  $E_2$ .

Kraj vektora relativnog položaja  $\vec{\rho}$  je u određenoj tački na prvoj putanji, pri čemu takođe mora biti zadovoljeno da on sada bude upravan na tangentu u tački na prvoj putanji.

Vektorska jednačina koja to opisuje je:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} = 0 \quad (5.2)$$

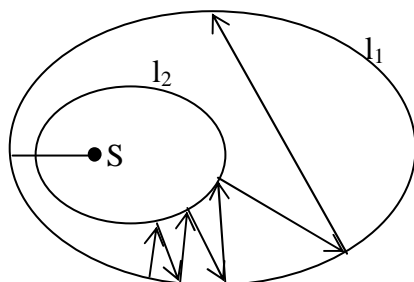
i za razliku od prethodne, sada nam je nepoznata veličina  $E_1$ . Sve ostale veličine su poznate, uključujući i  $E_2$  koje uzima vrednost prethodnog izračunavanja. Vidimo da se postupak ponavlja sve dok ne dođemo u situaciju da su "odlazeći" i "dolazeći" vektor istih intenziteta i pravaca, tj. obe jednačine ne budu zadovoljene do na određenu tačnost (koju sami ustanovimo na početku izračunavanja). Dve poslednje vrednosti za  $E_1$  i  $E_2$  u procesu izračunavanja su vrednosti ekcentričnih anomalija kojima odgovara i najmanje rastojanje, upravo poslednje izračunata vrednost intenziteta vektora relativnog položaja  $\vec{\rho}$ . Odmah se uočava da je metoda krajnje jednostavna i razumljiva. Ona se suštinski razlikuje od svih dosadašnjih načina izračunavanja proksimiteta i kao takva predstavlja jedan potpuno drugačiji način prilaženja problemu proksimiteta.

Glavna karakteristika ovakvog pristupa je, pored jednostavnosti, i dosta velika tačnost. Jasno je da konvergencija relativnog vektora položaja  $\vec{\rho}$  ide sve sporije ukoliko se želi veća tačnost od uobičajene za ovu vrstu izračunavanja (5 decimala). Ipak, ona se donekle može ubrzati (ako je potrebno) određenim dopunama u samom programu.

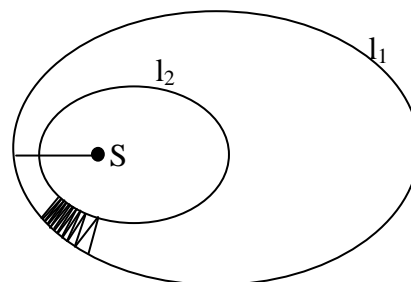
Rešavanje ovakvim postupkom se na kraju svodi na rešavanje karakteristične jednačine četvrtog stepena, koja je kao takva uvek i rešiva. Postupak je lako primenljiv za bilo koji par eliptičnih putanja bez obzira na njihove međusobne položaje, tj. vrednosti samih putanjskih elemenata. Obzirom da krajnji rezultat ovom metodom obuhvata sve proksimitete između dve zadate planetoidske putanje pored izračunatih vrednosti  $E_1$ ,  $E_2$  i  $\rho$  za svaki od njih, vidimo i koliki je njihov ukupan broj.

Kada govorimo o ostalim rešenjima naših vektorskih jednačina (prevojnima tačkama i maksimalnim rastojanjima), oni se ovim postupkom direktno ne mogu odrediti, tj. izračunati. Razlog leži u činjenici što je vektor relativnog položaja  $\vec{\rho}$  uvek upravan na tangentu u tački putanje gde se nalazi njegov kraj, pa samim tim uvek konvergira ka minimalnom međusobnom rastojanju između dve eliptične putanje. U obrnutom slučaju, tj. kada bi on bio upravan na tangentu u tački putanje gde se nalazi njegov početak, tj. one sa koje "odlazi", u određenim specijalnim slučajevima mogli bismo imati konvergenciju ka prevojnima tačkama i maksimalnim rastojanjima između dve eliptične putanje. Međutim, vrlo je važno reći da postupak za određivanje minimalnog rastojanja, tj. proksimiteta, uvek bez obzira na međusobni položaj i veličine eliptičnih putanja, izračunava sve proksimitete, dok ovakav obrnuti postupak ne garantuje određivanje svih prevojnih tačaka i maksimalnih rastojanja već to, kao što smo već rekli, zavisi od konkretnog slučaja.

Naime, zbog činjenice da vektor relativnog položaja  $\vec{\rho}$  mora biti upravan na tangentu u tački eliptične putanje sa koje kreće, tj. tamo gde mu je početak možemo imati situaciju kao na sl. 17.



Slika 17



Slika 18

Zapravo, ako tako izaberemo početnu tačku, vektor relativnog položaja  $\vec{\rho}$  jednostavno ne bi došao do druge putanje, već bi je, kao što vidimo, zbog gore navedenog uslova jednostavno mimoišao. Tada ne može ni doći do bilo kake konvergencije relativnog vektora položaja  $\vec{\rho}$  ka prevojnim tačkama i maksimalnim rastojanjima. Ovo se može dogoditi ne samo zbog "lošeg" odabira tačke iz koje počinjemo sa metodom, već je takvo nešto moguće i tokom samog procesa konvergencije. Zbog svega toga taj postupak i ne koristimo, a određivanje pozicije prevojnih tačaka i maksimuma vršimo direktno sa dijagrama i grafika funkcija rastojanja (videti u prilogu). Ako želimo njihove preciznije vrednosti možemo se poslužiti aproksimativnim postupkom Lazovića (koji je prikazan u poglavlju 2), pri čemu za početne vrednosti uzimamo upravo one koje su očitane sa dijagrama.

Vidimo dakle da mi ovde prikazanom metodom isključivo određujemo i izračunavamo proksimitete. Drugi (obrnuti postupak) ne daje mogućnost dobijanja pouzdanih rezultata, kada je reč o ostalim rešenjima (maksimalnim rastojanjima i prevojnim tačkama).

Postupak za određivanje proksimiteta koji smo ovde izložili, garantuje pretraživanje obe putanje u celosti, pa ne postoji sumnja da neki od eventualnih

Magistarski rad:

*Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta*

---

proksimiteta koji nisu na očekivanim mestima (obično u okolini relativnih čvorova) može slučajno da promakne, tj. ne bude otkriven i izračunat.

Na osnovu ovakvog geometrijskog prikaza izveli smo analitički postupak i kasnije napravili algoritam i program za izračunavanje konkretnih rezultata.

## 6. Analitički postupak

Kod dosadašnjih metoda, poznate dve vektorske jednačine:

$$\begin{aligned}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{V}_1 &= 0, \\(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{V}_2 &= 0,\end{aligned}\tag{6.1}$$

koji definišu problem, isključivo se posmatraju u celini, tj. kao sistem. Obzirom da su jednačine (6.1) ranscedentnog tipa, uglavnom su bile rešavane sukcesivnim aproksimacijama. Tu su, kao što smo već rekli, radovi Lazovića najiscrpniji, bez obzira da li su promenljive veličine u njima prave ili ekscentrične anomalije. Da bismo se prilagodili prethodno izloženom geometrijskom postupku, uzmimo da su vektori položaja malih planeta izraženi preko ekscentričnih anomalija  $E_1$  i  $E_2$ , odnosno:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= a_1(\cos E_1 - e_1)\vec{P}_1 + b_1 \sin E_1 \vec{Q}_1, \\ \vec{r}_2 &= a_2(\cos E_2 - e_2)\vec{P}_2 + b_2 \sin E_2 \vec{Q}_2.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Imajući u vidu da je  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$  i koristeći vezu  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dE} \frac{dE}{dt}$ , jednačine (6.1) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dE_1} &= 0, \\ (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dE_2} &= 0.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Rešavanje sistema (6.3) se dalje vrši korak po korak. Najpre se u prvoj jednačini uzima proizvoljna vrednost za  $E_1$  (npr.  $E_1=0$ ) i pristupa se njenom rešavanju. Za krajnji rezultat dobija se vrednost ekscentrične anomalije  $E_2$ .

Nakon tog prvog izračunavanja prve jednačine sistema, pristupamo rešavanju druge jednačine. Sada je poznata veličina upravo rešenje  $E_2$  iz prve jednačine sistema, a nalazimo nepoznatu veličinu  $E_1$ . Tako, naizmeničnim rešavanjem jedne pa druge jednačine sistema, pri čemu je uvek rešenje jedne od jednačina ulazna vrednost u drugoj, mi zapravo analitički rešavamo problem.

Zamenimo sada vrednosti za  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  i  $\vec{V}_2$  u drugu jednačinu sistema (6.1) i podelimo je sa  $\frac{dE_2}{dt}$ . Posle pregrupisanja članova dobijamo izraz:

$$\begin{aligned} & \cos E_2 \sin E_2 (b_2^2 - a_2^2) + \sin E_2 (a_2^2 e_2 + a_1 a_2 \cos E_1 \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 - a_1 a_2 e_1 \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 + b_1 a_2 \sin E_1 \vec{Q}_1 \cdot \vec{P}_2) \\ & + \cos E_2 (a_1 e_1 b_2 \vec{P}_1 \cdot \vec{Q}_2 - b_1 b_2 \sin E_1 \vec{Q}_1 \cdot \vec{Q}_2 - a_1 b_2 \cos E_1 \vec{P}_1 \cdot \vec{Q}_2) = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Prethodnu jednačinu možemo napisati u obliku:

$$A \sin E_2 + B \cos E_2 + C \sin E_2 \cos E_2 = 0, \quad (6.5)$$

jer su izrazi u zagradama konstantne veličine, pri čemu su:

$$\begin{aligned} A &= (a_2^2 e_2 + a_1 a_2 \cos E_1 \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 - a_1 a_2 e_1 \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 + b_1 a_2 \sin E_1 \vec{Q}_1 \cdot \vec{P}_2) = a_2^2 e_2 + a_2 \vec{P}_2 \cdot \vec{r}_1, \\ B &= (a_1 e_1 b_2 \vec{P}_1 \cdot \vec{Q}_2 - b_1 b_2 \sin E_1 \vec{Q}_1 \cdot \vec{Q}_2 - a_1 b_2 \cos E_1 \vec{P}_1 \cdot \vec{Q}_2) = -b_2 \vec{Q}_2 \cdot \vec{r}_1, \\ C &= b_2^2 - a_2^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ako sada jednačinu (6.5) podelimo sa koeficijentom B (vodeći računa da je B različito od nule) dobija se:

$$M \sin E_2 + \cos E_2 + N \sin E_2 \cos E_2 = 0, \quad (6.7)$$

gde su sa M i N označeni količnici  $\frac{A}{B}$  i  $\frac{C}{B}$ , respektivno.



Primenjujući poznatu smenu za tangens ugla  $\operatorname{tg} \frac{E_2}{2} = t$  i zamenom u jednačinu (6.7), dobijamo:

$$M \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + N \cdot \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{(1-t^2)}{1+t^2} = 0. \quad (6.8)$$

Pomnožimo li sada prethodnu jednačinu sa  $(1+t^2)^2$  posle određenih sređivanja dolazi se do jednačine četvrtog stepena oblika:

$$a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0, \quad (6.9)$$

pri čemu je,

$$a_0 = -1, \quad a_1 = -2(M + N), \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -2(M - N), \quad a_4 = 1. \quad (6.10)$$

Ono što je kod ove jednačine karakteristično je da ona, s obzirom na oblik i problem koji opisuje, mora imati uvek 2 ili 4 realna rešenja.

Samo jedno od moguća četiri rešenja je ono koje je odgovarajuće, a kriterijum za njegovo određivanje je najmanja vrednost od svih mogućih razlika intenziteta vektora  $\vec{r}_2$  i  $\vec{r}_1$ . Naime, nakon rešavanja jednačine (6.9) i posle vraćanja prethodnih smena, nalazimo odgovarajuće ekscentrične anomalije, a samim tim i intenzitete vektora položaja. Oduzimanjem od svakog od njih intenzitet vektora  $\vec{r}_1$ , dobijamo četiri intenziteta vektora  $\vec{\rho}$  i upoređujemo ih međusobno da bi pronašli najmanji. Ona ekscentrična anomalija (od najviše mogućih četiri koje figurišu kao rešenja) koja odgovara najmanjoj vrednosti vektora  $\vec{\rho}$ , je traženo rešenje jednačine.

Tako dobijenu vrednost za  $E_2$  i poznatu vrednost (proizvoljno izabranu još na početku izračunavanja) za  $E_1$  ubacujemo u drugu jednačinu sistema (6.1). Ako je zadovoljena (do na određenu tačnost koju sami izabiramo takođe na početku izračunavanja), naša rešenja su upravo  $E_1$  i  $E_2$ . Kako se ne može očekivati, da se posle prvog koraka dođe do konačnog rešenja, postupak celokupnog dosadašnjeg

izračunavanja ponavljamo, vodeći računa o tome da nam je sada poznata ulazna veličina za drugu jednačinu izlazna veličina, tj. rešenje, iz prve jednačine.

Jednostavnije rečeno, posle svakog izračunavanja (osim prvog gde ulaznu vrednost biramo sami) izlazna vrednost prethodnog izračunavanja postaje ulazna vrednost sledećeg izračunavanja. Postupak ponavljamo sve dotle dok ne dođemo do vrednosti za  $E_1$  i  $E_2$  koje zadovoljavaju istovremeno obe jednačine (6.1), do na određenu tačnost koju smo izabrali.

Sve što je u prethodnom poglavlju rečeno u vezi sa načinom i metodama izračunavanja, primenjeno je prilikom pravljenja algoritamske šeme i programa. Ovde se nećemo posebno zadržavati u objašnjivanju rada programa, jer se to mnogo bolje vidi pri samom korišćenju istog. Ono što je karakteristično za ovaj program je da on uvek kreće za svaki par asteroida od  $E_1=0$  i da zbog stalnog smenjivanja minimalnih rastojanja i prevoja na oblasti koja se obrađuje, ulaznim podacima ( $E_1=5^\circ$ ,  $E_2=10^\circ$ , ...,  $E_n=n \cdot 5^\circ$ ) se prvo pronalazi oblast u kojoj se nalazi proksimitet, pa se tek onda pristupa preciznom izračunavanju.

To zapravo znači da u prvom izračunavanju mi uvek uzmemo vrednost za  $E_1=0$  i izračunamo  $E_2$ , nakon toga program odmah upoređuje intenzitete odlazećeg i dolazećeg relativnog vektora položaja  $\vec{\rho}$ . Ukoliko je  $|\vec{\rho}_1| > |\vec{\rho}_2|$  (tj. u opštem slučaju  $|\vec{\rho}_{n-1}| > |\vec{\rho}_n|$ ), onda potrebe za povećavanjem svake sledeće ulazne vrednosti  $E_1$  za po 5 stepeni ili više nije potrebno, jer je program već "konstatovao" da je u obilaženju po prvoj putanji na dobrom putu, jer ga ispred očekuje minimalno rastojanje, tj. proksimitet koji će on na kraju i izračunati. Ukoliko je pak  $|\vec{\rho}_1| < |\vec{\rho}_2|$  (tj. u opštem slučaju  $|\vec{\rho}_{n-1}| < |\vec{\rho}_n|$ ), onda mi koristimo tu mogućnost povećavanja svake sledeće ulazne vrednosti  $E_1$  za po 5 stepeni ili više ako želimo, sve dotle dok ne "preskočimo" prevoj koji je ispred nas i ponovo ne uđemo u okolinu sledećeg proksimiteta.

Mi zapravo, zbog zadržavanja kontinuiteta u obilaženju, da kojim slučajem neki od mogućih proksimiteta ne bi bio otkriven, a zbog problema stalnog smenjivanja

minimalnih rastojanja i prevoja između dve putanje, moramo stalno "gurati" odlazeći vektor uvek na novu početnu poziciju, sve dok prestane da se vraća unazad na već izračunati proksimitet (slika 19). Naime, ako sa  $l_1$  obeležimo prvu eliptičnu putanju i nju položimo u xy ravan, druga eliptična putanja  $l_2$  bi u tom slučaju zauzimala položaj kao na slici 19. Ona odgovara projekciji ove dve eliptične putanje na XZ ili YZ ravan, zavisno od ostalih parametara. U svakom slučaju, usled međusobnog nagiba ravni u kojima se ove dve putanje nalaze i zakrivljenosti elipse kao geometrijskog oblika, smenjivanje užih i širih oblasti najmanjih rastojanja između ovih (ili bilo kojih) planetoidskih putanja, uvek postoji. Zato i koristimo mogućnost "dodavanja" vrednosti ekscentrične anomalije svakoj sledećoj ulaznoj veličini, jer tek kada vektor relativnog položaja  $\vec{\rho}$  prođe prevoj, tj. najširu oblast (šrafirani deo sl. 19) on, kao što smo rekli, ulazi u zonu proksimiteta i potreba za ovakvim dodavanjem vrednosti nije neophodna.

Ovde treba reći da iako vrednosti za  $\rho$  mogu biti manje u nekim prevojima (sedlima) od samih minimuma, t.j. proksimiteta, to na metodu i rad programa bitno ne utiče. Razlog leži u činjenici što se to nikada ne može dogoditi između "susednih minimuma", već na drugim karakterističnim mestima, tako da smenjivanje užih i širih oblasti na pojasu gde se odvija postupak uvek postoji, pa samim tim ne dolazi ni do remećenja u toku pretraživanja i izračunavanja.

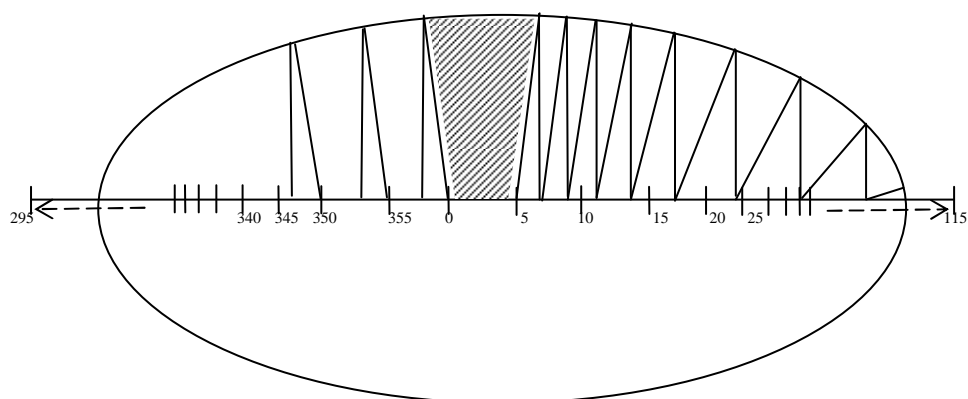
Obzirom na dosadašnji broj numerisanih malih planeta (preko 46 500) i usled svakodnevnog numerisanja novih, brzina izračunavanja proksimiteta je prilično važna. Zbog toga smo mi ovde ipak zadržali ta dodavanja ulaznih vrednosti ekscentričnih anomalija za po  $5^0$ , a u zavisnosti od konkretnog para malih planeta koji se obrađuje ona mogu biti i veća ( $10^0$ ,  $15^0$ ,  $20^0$ ).

Tačnost izračunatih proksimiteta sami izabiramo vodeći računa da ukoliko želimo veću tačnost, konvergencija intenziteta relativnog vektora položaja  $\vec{\rho}$  je sporija, a samim tim i izračunavanje. Što se tiče ovde prikazanih rezultata, oni su u tačnosti do 5 decimala.

Magistarski rad:

*Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta*

---



Slika 19

## 7. Rezultati i komentar

Primenom predhodnog postupka ispitali smo proksimitete za oko 600 000 parova malih planeta. Ovde će biti prikazani rezultati samo za određen broj tj. da bi pokazali konkretne primere od svakog tipa. Rezultati su dati u prilogu i to u obliku tablica sa vrednostima ekscentričnih anomalija  $E_1$  i  $E_2$  u stepenima, što predstavlja poziciju proksimiteta, zatim njegove veličine, tj. intenziteta vektora relativnog položaja  $\vec{\rho}$  u AJ., dok se broj proksimiteta za svaki obrađeni par malih planeta jasno vidi iz tablica.

Sa leve strane se nalazi projekcija planetoidskih putanja analiziranog para malih planeta u ravni prve od putanja, tj. u XY ravni. Obzirom da najveći broj razmatranih parova zadovoljava uslov kvazikomplanarnosti ili ne odstupa značajno od njega, projekcije daju dosta realnu sliku stvarnog stanja. Položaji perihela su obeleženi kružićima, a krstić predstavlja zajedničku žižu (Sunce). Mesta minimalnih rastojanja obeležena su crvenim linijama od jedne do druge putanje male planete, a kod parova gde se to jasno ne vidi razlog je što se proksimitet nalazi baš u "projekcijskom preseku putanja" ili u blizini linije čvorova, što je, kao što znamo, i najčešći slučaj.

Dvodimenzioni dijagram funkcije rastojanja u zavisnosti od ekscentričnih anomalija  $E_1$  i  $E_2$  i trodimenzionalni grafik funkcije  $1/\rho$  u zavisnosti takođe od  $E_1$  i  $E_2$ , zajedno daju najbolju sliku o funkciji rastojanja.

Na prvom grafiku, plave zone sa uskim pojasevima izohipsi predstavljaju oblasti minimalnog rastojanja, tj. proksimiteta, dok je u središtu crvene elipse položaj maksimalnog rastojanja. Ona mesta u plavoj i crvenoj zoni koja imaju oblik "sedla", su oblasti gde se nalaze prevojne tačke.

Drugi grafik daje recipročnu vrednost minimalnog rastojanja. Ovde smo se opredelili za takav prikaz zbog jasnijeg uočavanja proksimiteta (što je vrednost  $\rho$  manja

vrhovi grafika  $1/\rho$  su oštriji), mada vidimo da kod planetoidskih parova sa tri proksimiteta ni to ne pomaže. Razlog tome su dosta bliske vrednosti za  $\rho_1, \rho_2$  i  $\rho_3$ , pa su i vrhovi neuporedivo manje izraženi.

Obzirom da je broj mogućih kombinacija parova malih planeta za analizu ogroman (jer kao što je već rečeno u uvodnom delu, do sada ih ima numerisanih preko 46 500), mi smo se odlučili da u razmatranje prvo uzmemo one parove koji zadovoljavaju uslov kvazikomplanarnosti. Ako među njima ne pronađemo za svaki mogući tip i odgovarajući primer u stvarnosti, onda pređemo na analizu odrađenih parova putanja malih planeta čije karakteristike ne zadovoljavaju uslov kvazikomplanarnosti.

Ovakva analiza uslovlila je određenu podelu parova malih planeta u zavisnosti od broja proksimiteta u četiri osnovne grupe. Prve tri grupe sastoje se iz dva tipa, zavisno od broja maksimalnih rastojanja i prevojnih tačaka. Četvrtoj grupi bi pripadali svi parovi malih planeta koji bi eventualno imali slične karakteristike kao prikazani model sa sl. 5, tj. ispunjavali uslov egzistencije (imali) četiri proksimiteta i dva maksimuma.

Tabela 2

Grupa	tip	broj minimuma	broj maksimuma	broj prevojnih tačaka	ukupan broj stacionarnih tačaka
I	A	1	1	2	4
	B	1	2	3	6
II	A	2	1	3	6
	B	2	2	4	8
III	A	3	1	4	8
	B	3	2	5	10
IV	B	4	2	6	12

Prikazana tabela 2 obuhvata sve moguće parove malih planeta, što znači da ni u kom slučaju ne može postojati takav par malih planeta koji ne bi pripadao nekom od tipova iz ove četiri grupe. Razlog tome leži u činjenici, kao što smo već pokazali ranije, da egzistencija više od četiri proksimiteta nije moguća, kao i postojanje više od dva maksimuma. Obzirom da je ovaj slučaj i najsloženiji, logično sledi da bilo koji mogući par malih planeta mora pripadati ili njemu, ili nekom od manje složenih gore navedenih tipova.

Iz ovakve podele možemo zaključiti da dve poznate nam transcendentne jednačine (2.5), koje opisuju problem proksimiteta, mogu imati 4, 6, 8, 10 ili 12 rešenja. U zavisnosti od vrednosti odgovarajućih parcijalnih izvoda, ta rešenja su minimumi, maksimumi ili prevojne tačke.

Znajući da je

$$\rho^2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (7.1)$$

parcijalni izvod po  $E_1$  možemo napisati u obliku:

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial E_1} = -2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial E_1}, \quad (7.2)$$

a parcijalni izvod po  $E_2$ ,

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial E_2} = 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial E_2}. \quad (7.3)$$

Ako još jednom prvu diferenciramo po  $E_1$ , a drugu po  $E_2$ , dobijamo izraze u obliku:

$$\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial E_1^2} = 2 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial E_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial E_1} - 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_1}{\partial E_1^2}, \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial E_2^2} = 2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial E_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial E_2} + 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_2}{\partial E_2^2}. \quad (7.5)$$

Mešoviti parcijalni izvod dobijamo kada jednačinu (7.2) diferenciramo po  $E_2$ , ili jednačinu (7.3) po  $E_1$ . On će tada imati oblik:

$$\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial E_1 \partial E_2} = \frac{\partial}{\partial E_1} \left( \frac{\partial \rho^2}{\partial E_2} \right) = -2 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial E_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial E_2}. \quad (7.6)$$

Uslov za postojanje ekstremuma je da

$$\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial E_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial E_2^2} - \left( \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial E_1 \partial E_2} \right)^2 > 0, \quad (7.7)$$

za vrednosti odgovarajućih rešenja. Ako je to ispunjeno, ekstremum u toj tački zaista postoji i to ako je  $\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial E_1^2} > 0$  on je minimum, a ako je  $\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial E_1^2} < 0$  on je maksimum. Ostala rešenja sistema (6.1) su prevojne tačke.

Ukoliko želimo da izračunamo tačnu poziciju maksimalnih rastojanja i prevojnih tačaka, možemo se poslužiti aproksimativnim postupkom Lazovića (ukratko opisanom u poglavlju 2). Tada ćemo za početne vrednosti aproksimacija uzimati upravo one koje očitamo sa dijagrama i to za maksimalna rastojanja središta crvenih elipsi, dok će za određivanje pozicije prevojnih tačaka biti središta sedla. Na taj način ćemo utvrditi karakter svih ostalih rešenja (onih koji nisu proksimiteti) i doći do još nekih rezultata koji mogu biti od određenog značaja.

Naime, kod poslednjeg analiziranog para (1943-3200), zahvaljujući ovoj dodatnoj analizi, utvrdili smo da je vrednost intenziteta relativnog vektora položaja  $\vec{\rho}$ , tj. najkraće udaljenosti između te dve planetoidske putanje, u jednoj od prevojnih tačaka manja od jednog od proksimiteta. (videti u prilogu kompletnu analizu svih rešenja



za par 1943-3200). Takođe sličnu situaciju imamo i kod prikazanog modela sa četiri proksimiteta.

Obzirom da se ovde konkretno radi o velikim vrednostima proksimiteta, ovaj rezultat nema neke veće važnosti. Ipak, ovako nešto je moguće i u slučajevima gde su proksimiteti dosta manji, kada bi ova činjenica verovatno imala veći značaj.

Analizirajući sve dobijene rezultate možemo dati sledeći komentar:

a) Prva grupa parova oba tipa ima jako bliske vrednosti nagiba, pa je ovde uslov kvazikomplanarnosti najprisutniji. Ipak, on ne garantuje i male proksimitete. Razlog tome je činjenica da ovde ne postoji projekcijski presek putanja, već su one uvek jedna u drugoj, tako da mala međusobna razlika u nagibima ne uslovljava i male proksimitete. Položaji i vrednosti prevojnih tačaka, bez obzira da li ih ima dve ili tri, su očekivani, jer ispunjavaju uslov da su veće od minimuma, a manje od maksimuma (što inače ne mora uvek da bude). Maksimalna rastojanja su kod tipa A obično na oko  $180^{\circ}$  u odnosu na položaj proksimiteta, dok kod tipa B mogu imati najrazličitije položaje.

b) Druga grupa parova je najzastupljenija u stvarnosti, naročito tip A. Zbog toga su i kriterijumi za egzistenciju parova malih planeta ovoga tipa najslabiji. Položaji proksimiteta su najčešće u okolini čvorne linije, dok su prevojne tačke i maksimumi najrazličitije raspoređeni. Kod tipa B iz ove grupe uočavamo jako bliske položaje perihela.

c) Treća grupa parova malih planeta je najmanje zastupljena u stvarnosti i njih jako teško nalazimo među kvazikomplanarnim. Jedan od tri proksimiteta je skoro uvek jako blizu jednom od perihela, dok su ostala dva u nešto široj okolini linije čvorova. Njihove vrednosti su dosta bliske, pa vrhovi na grafiku funkcije  $1/\rho$  nisu toliko izraženi. Zbog svoje specifičnosti i složenosti tip B iz ove grupe ima prilično stroge uslove za ispunjenje, tj. pronalaženje u stvarnosti. Sa projekcije para (1943-3200) na XY ravan vidimo da on upravo izgleda onako kako smo teorijski i prepostavili u poglavlju 4, kada smo govorili o mogućim položajima putanja gde bi mogla postojati tri

proksimiteta. Iako su vrednosti proksimiteta velike, oni su na pretpostavljenim mestima ili u njihovoj bližoj okolini. Određena simetričnost ovog primera po velikoj poluosi obe putanje (one se skoro poklapaju), uslovlila je da imamo dva maksimuma i čak pet prevojnih tačaka, što je ukupno sa tri minimuma deset rešenja, tj. parova vrednosti  $E_1$  i  $E_2$  koje zadovoljavaju obe polazne jednačine. Ono što je u ovom primeru interesantno kao što smo ranije napomenuli, je činjenica da je jedna od vrednosti relativnog vektora položaja u prevojnoj tački manja od odgovarajuće vrednosti proksimiteta. Ukoliko bi imali slučaj u stvarnosti koji pripada tipu B iz ove grupe, ali sa sva tri proksimiteta dovoljno malih vrednosti, onda bi i eventualni istovremeni prolaz obe male planete kroz takvu prevojnu tačku mogao da se tretira kao bliski prilaz.

d) Četvrta grupa i u okviru nje prikazan model dve eliptične putanje sa četiri proksimiteta, dva maksimuma i šest prevojnih tačaka, prilično podseća na poslednji primer iz predhodne grupe (1943-3200). Razlika je u suprotnom položaju perihela (jedan od njih je pomeren za približno  $180^\circ$  u odnosu na drugi) i naravno u mnogo većem međusobnom nagibu ravni u kojima se putanje nalaze. Položaji proksimiteta su na očekivanim mestima (o tome smo već govorili u 4. poglavlju) i imaju međusobno dosta bliske vrednosti (što isto važi i za treću grupu). Ovde vrednost relativnog vektora položaja u prevojnoj tački takođe može biti manja od nekog od proksimiteta, a položaj jednog od maksimalnih rastojanja je, zbog suprotne orijentacije perihela, uvek u sredini dijagrama.

Detaljnija analiza četvrte grupe pokazala je da malom promenom nekih parametara (najčešće međusobnog nagiba), vrlo jednostavno dobijamo primere sa karakteristikama ostalih grupa. Za takve primere, obzirom na izuzetno veliki međusobni nagib, prethodno izloženi komentari ne bi važili u potpunosti. Ipak, sve do sada navedene sličnosti ili eventualne zakonitosti o karakteristikama parova malih planeta u okviru svih grupa, imale bi smisla za one kod kojih su nagibi putanja dosta bliski (ako već nisu kvazikomplanarni), ili bar njihova međusobna razlika nije tako velika. Prikazani primeri parova putanja malih planeta, uključujući i sve ostale koje ovde

Magistarski rad:

*Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta*

---

nismo prikazali, ali smo ih analizirali tokom izrade ovog rada, to nam najbolje potvrđuju.

## 8. Zaključak

Ovakav pristup određivanja proksimiteta predstavlja jedan drugačiji model rešavanja problema od dosadašnjih metoda. Njegova odlika je prilična jednostavnost, laka primena i zadovoljavajuća brzina obrade parova malih planeta, tj. izračunavanja. Rezultati su u željenoj tačnosti, a u zavisnosti od konkretnih potreba postoje načini za dobijanje još preciznijih rezultata. Mi ovde nismo toliko insistirali na tačnosti koliko na analizi kompletne problematike minimalnih i maksimalnih rastojanja između dve planetoidske putanje, posmatrajući problem isključivo sa geometrijske strane. Imajući to u vidu, problem smo i tretirali kao problem dve elipse u prostoru, sa jednom zajedničkom žižom.

Pre pojave ovakvog pristupa, svi pokušaji metodama analitičke i diferencijalne geometrije u raznim koordinatnim sistemima doveli su ili do nemogućnosti dobijanja rešenja, ili do poznate nam dve jednačine transcendentnog tipa, čija rešavanja sukcesivnim aproksimacijama na više načina imamo još odavno u radovima Lazovića. Izvesna pojednostavljenja u obliku algebarskih formi strećemo tek u skorije vreme kod Kolševnikova i Vasilieva (1999).

Znajući da su ekstremna rastojanja upravo u tačkama gde vrednosti ekscentričnih anomalija istovremeno zadovoljavaju obe poznate nam vektorske jednačine  $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{V}_1 = 0$  i  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{V}_2 = 0$ , izloženi postupak izračunavanja je sveden na rešavanje jedne jednačine četvrtog stepena, sa karakterističnim koeficijentima.

Najveći značaj ove analize je nesumnjivo činjenica da smo otkrili mogućnost postojanja parova malih planeta koje mogu imati tri proksimiteta. Takođe smo pokazali da je moguć slučaj sa četiri proksimiteta, kako se ranije i pretpostavljalo, ali da ga je zbog izuzetno strogih uslova za njegovo postojanje, za sada jako teško pronaći u stvarnosti među malim planetama (ukoliko uopšte i postoje imajući u vidu njihove

međusobne nagibe). Prikazani model sa četiri proksimiteta Gronki (2002) je dobio metodom slučajnih uzoraka, tj. posle mnogo simuliranja i proba sa raznim vrednostima eliptičnih elemenata.

Kao posledica kompletnog izračunavanja (ne samo minimalnih, već i svih ostalih vrednosti koje zadovoljavaju polazne jednačine) različitih parova u okviru svake grupe, pokazali smo da se broj prevojnih tačaka kreće u intervalu od dva do šest. Činjenicu da intenzitet relativnog vektora položaja  $\vec{\rho}$  u nekim prevojnima tačkama može biti manji nego u nekom od proksimiteta takođe treba naglasiti, naročito ako su proksimiteti jako mali.

Obzirom da smo obradili oko 600 000 parova da bismo prikazali što je moguće više tipova, ustanovili smo da su najčešći oni iz druge grupe, a da su svi ostali neuporedivo manje zastupljeni. To se naročito odnosi na tip B iz prve i treće grupe. Oba ova tipa imaju po dva maksimalna rastojanja i bez obzira na njihov broj proksimiteta, mnogo su ređi u stvarnosti, a samim tim i teži za pronalaženje. Treba još reći da maksimalnih rastojanja ne može biti više od dva, kao i da ukupan broj svih ekstremnih rastojanja i prevojnih tačaka, tj. svih stacionarnih tačaka, ne može biti veći od 12. Eksplícitan matematički dokaz Gronkija (2002) nam to i direktno potvrđuje.

Na kraju treba reći da je naš cilj prvenstveno bio konačno razrešenje dileme: koliko zapravo ima ekstremnih rastojanja između dva planetoida na njihovim putanjama i u kom odnosu oni sve mogu biti? Imajući u vidu važnost proučavanja bliskih prilaza zbog određivanja masa, kao i činjenice da uvek postoji mogućnost i nekog bliskog prilaza sa Zemljom, ovakve i slične analize bi doprinele potpunijoj predstavi o malim planetama. Da li ćemo u stvarnosti imati male planete čije putanje između sebe, ili sa Zemljinom, imaju tri ili četiri proksimiteta dovoljno malih vrednosti, ostaje kao pitanje. U svakom slučaju, teorijski tako nešto je moguće.

## Literatura

1. Fayet G., *Contribution à l'étude des proximités d'orbites dans le système solaire*, Ann. Bur. des Long., t. XII, Centre National de la Rech, Scient., Paris, 1949.
2. Gronchi G.F.: 2002. *On the stationary points of the squared distance between two ellipses with a common focus* Dept. of Mathematics University of Pisa.
3. Grunert, *Über die Proximitäten der Bahnen der Planeten und Cometen*, Sitzb. d. math. – naturw. Cl. der k. Ak. d. Wiss., Wien, 1854, Bd. XIII.
4. I. I. Putilin, *Malie planeti*, Moskva 1953.
5. Karl von Littrow, *Bahnnähenwischen den periodischen Gestirnen des Sonnensystems*, Sitzb. d. Math. – Naturw. Cl. der k. Ak. d. Wiss., Wien, 1854, Bd. XIII. Većina kasnijih radova po ovom pitanju pojavila se u volumima XXIX, XLIII, XLV; XLVII; XLIX; LI; LIV; LVI istog zbornika.
6. Kholoshevnikov K. and Vassiliev N.: 1999. *On the distance function between two Keplerian elliptic orbits* St. Petersburg. University St.Petersburg Branch of the Steklov Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences.
7. Kurepa Đuro, *Viša algebra*, Beograd 1969.
8. Kuzmanoski M. 1992. a., *Close encounters between minor planets*, Bul. Astron. Obs., Belgrade 145-151.
9. Kuzmanoski M. 1992. b., *Mutual perturbing effects of minor planets in their orbital elements*, Bul. Astron. Obs., Belgrade 153-156.
10. Kuzmanoski M. and Z.Knežević: 1993, *Close encounters with large asteroids in the next 50 years*, Icarus 103, 93-103

11. Lazović J.P.: 1964. *Važnije osobenosti u kretanju kvazikomplanarnih asteroida*. Doktorska disertacija, Beograd 1964
12. Lazović J.P.: 1967, *Determination of the minimum distance between orbits of asteroids with small mutual inclination*. Bull. ITA 1, 57-62
13. Lazović J.P.: 1974. *Approximate values of true anomalies of quasicomplanar asteroids in proximity*. Dept. Astron. Belgrade 5, 85-93.
14. Lazović J.P.: 1976. *Numerical determination of the approximate true anomalies in the proximity of quasicomplanar orbits of celestial bodies*. Public. Dept. Astron. Belgrade 6, 83-88
15. Lazović J.P.: 1978, *Numerical determination of approximate of true anomalies of the quasicomplanar asteroids proximity* Public. Dept. Astron. Belgrade 8, 43-46
16. Lazović J.P.: 1979, *Masses of some numbered minor planets*. Public. dept. Astron. Belgrade 9, 55-61
17. Lazović J.P.: 1980, *Contribution to the proximity of non-quasicomplanar elliptical orbits of celestial bodies*, (OSP). Public. Dept. Astron.. Belgrade 10, 43-47
18. Lazović J.P.: 1981, *Determination of proximity determination elliptical orbits of celestial bodies by way of eccentric anomalies*, (OSP). Public. dept. Astron. Belgrade 11, 65-73
19. Lazović J.P.: 1993, *The approximate values of eccentric anomalies of proximity* Zbornik radova X Nacionalne konferencije Jugoslovenskih astronoma No. 44, 11-14
20. Lazović J.P. and Kuzmanoski M.: 1980, *Proximities of asteroids (1) Ceres, (2) Palas, (3) Juno and (4) Vesta*, (OSP) Public. Dept. Astron. Belgrade 10, 29-34
21. Lazović J.P. and Kuzmanoski M.: 1983, *Ceres, Pallas, Junos and Vestas proximities with other numbered minor planet*, (OSP) Public. Dept. Astron. Belgrade

22. Lazović J.P. and Kuzmanoski M.: 1985, *Perturbing action of Ceres, Palas, Juno and Vesta at their proximities with other selected minor planets*. (OSP) Public. Dept. Astron. Belgrade 13, 13-18.
23. Marth A., *Data for a Graphical Representation of the Solar System*, Monthly Notices R. A. S., 1885, XLV, 348, 483.
24. Milanković M., *Nebeska mehanika*, 1935-1995, Beograd.
25. Mišković V.V.: 1974. *Prilog provlematici proksimiteta planetoida*. Glas srpske akademije nauka i umetnosti (Odeljenje prirodno-matematičkih nauka) 37, 31-54
26. Robin M. Grin, *Astronomija*, Glasgow, 1984.
27. Simovlević J.L.:1976. *Teorijska astronomija*, 1976 Beograd.
28. Simovljević J.L.: 1977. *A contribution to the determination of proximitz of asteroid orbits*, Glas Acad. Serbe Sci. Arts (Math.-Nat.) 41, 65-74
29. Simovljević J.L.: 1979. *Approximate perturbation methods for regular asteroid proximities*, Acta Astron. 29, 445-453
30. Sitarski G.: 1968, *Approache of the Parabolic Comets to the Outer Planets*, Acta Astronomica, Vol. 18,2,171-196
31. Standish E.M.:1990, *The Observational Basis for JPLs DE200, the Planetary Ephemerides of the Astronomical Almanac*. Astron. and Astrophzs. 233, 252
32. Zoshikawa M. and T. Nakamura: 1992, *"Near-miss" among asteroids. phenomena in orbital motial of asteroids*. Proceedings 25th ISAS Lunar and Planetary Symposium.



Magistarski rad:

*Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta*

---

**Prilozi: 4 tabele i 38 tabaka slika odgovarajućih rezultata i grafika**

Magistarski rad:

*Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta*

Tabela sa uporednim rezultatima prikazanih parova malih planeta (I deo).

GRUPA TIP	ASTEROIDSKI PAR		BROJ MIN.	BROJ MAX	E <sub>1</sub>				E <sub>2</sub>				ρ			
					1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
I A	4	638	1	1	318.967433				340.249584				0.11881608			
	5	933	1	1	312.706654				297.302111				0.047196291			
	5	7015	1	1	299.722771				272.883825				0.024417198			
	6	9038	1	1	234.851250				253.975712				0.040672117			
	6	17367	1	1	112.398698				90.992470				0.0065865653			
	8	16665	1	1	224.844783				251.317369				0.044100568			
I B	6	5651	1	2	236.500346				243.517153				0,67499933			
II A	1	3468	2	1	149.074598	266.231525			283.877566	26.989619			0.010086978	0.015192299		
	1	6358	2	1	66.118347	291.341853			261.103638	100.158154			0.0098925052	0.0081538673		
	3	3883	2	1	111.812402	303.266840			194.456494	357.732910			0.007961969	0.0077208055		
	3	4117	2	1	119.462212	293.389098			250.107399	23.822538			0.017956696	0.0047575898		
	3	4502	2	1	67.042155	253.598784			356.551117	151.919450			0.005247323	0.011706341		
	3	5001	2	1	113.484941	306.275822			232.045497	26.555078			0.0079492381	0.0002694883		
	3	5007	2	1	120.442905	311.448417			227.540475	22.071432			0.016495841	0.0091743864		
II B	2	13	2	2	55.633571	261.555109			58.273631	247.507784			0.048952648	0.21530592		
	6	16	2	2	116.026033	302.073699			116.159223	299.344475			0.47502977	0.56712944		
	6	18	2	2	87.711718	288.546055			87.253306	288.575483			0.13666059	0.13546653		
	8	19	2	2	45.361053	257.466472			47.182367	261.378162			0.22475493	0.23055124		
	16	18	2	2	146.609615	291.312721			146.531778	294.090475			0.5675111	0.70773182		

Magistarski rad:

*Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta*

Tabela sa uporednim rezultatima prikazanih parova malih planeta (II deo).

GRUPA TIP	ASTEROIDSKI PAR		BROJ MIN.	BROJ MAX	$E_1$				$E_2$				$\rho$			
					1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
					1	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
III A	5	29	3	1	121.109388	273.260901	338.168369		213.185130	343.388641	50.894535		0.51315999	0.44341348	0.45460981	
	33	39	3	1	19.327834	82.188329	254.932808		6.941324	77.469594	221.642821		0.55819276	0.54373861	0.57805759	
	45	387	3	1	35.244275	207.488698	300.603308		350.002033	147.350762	259.631433		0.48365951	0.54683653	0.52228889	
	57	439	3	1	86.905478	235.416276	353.895579		66.650556	207.589915	331.088189		0.2113557	0.23089925	0.19149363	
	58	387	3	1	90.135240	211.404643	336.337156		0.596015	104.624437	257.048828		0.62333288	0.68247902	0.59913665	
	73	216	3	1	96.496953	200.075592	336.044609		108.828459	236.248118	359.524241		0.70217504	0.71816082	0.47701421	
	74	200	3	1	85.079532	208.029051	356.290882		54.494041	160.912391	321.907103		0.41312331	0.50917599	0.36440214	
	90	294	3	1	166.839776	255.497150	353.227923		150.199275	248.341303	344.350031		0.29747009	0.26160957	0.31167185	
	177	205	3	1	4.023781	128.863248	231.609991		5.172109	138.426909	222.784858		0.55167579	0.52809531	0.51026427	
	195	289	3	1	17.382783	85.670748	257.708693		123.090712	208.885295	8.711346		0.62192967	0.64808489	0.63963437	
	215	216	3	1	34.540416	197.834012	285.106901		346.603279	133.949099	244.115517		0.61169318	0.62749076	0.68965614	
	287	486	3	1	82.955763	175.228201	336.229042		118.568066	224.566002	15.644404		0.3378866	0.3317445	0.34319174	
	308	410	3	1	104.657248	231.837321	280.945388		118.226247	267.305685	312.384668		0.42093247	0.55517338	0.55665726	
	324	353	3	1	1.741296	46.326779	202.057802		325.184125	9.086711	131.154659		0.50022138	0.4986536	0.92224752	
378	415	3	1	34.376689	164.810410	287.380643		2.612966	115.657336	262.160593		0.55485577	0.64875647	0.42682285		
442	463	3	1	57.671837	108.925052	254.890643		287.324885	332.541002	91.074818		0.61011463	0.61119662	0.6483809		
85	1021	3	1	71.046932	217.929628	348.818275		4.586064	119.872994	287.466257		0.65426741	1.0305813	0.7279546		
III B	1943	3200	3	2	0.937111	160.783606	207.629896		359.954690	114.935624	247.205530		0.92727839	0.40194025	0.22666053	
IV	MP1	MP2	4	2	8.230714	96.894151	255.144312	339.552785	291.754111	355.364496	11.063867	67.551575	0.86963111	0.83240761	0.95536426	0.94555766

Magistarski rad:

*Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta*

---

Rezultati za par malih planeta 1943-3200. Šesta vrednost za  $\bar{\rho}$  u prevojnoj tački je manja od prve koja je i jedna od minimalnih, o čemu smo ranije govorili.

$E_1$	$E_2$	$\rho$	
0.93711	359.95469	0.927278	<b>min</b>
160.78361	114.93562	0.401940	<b>min</b>
207.62990	247.20553	0.226661	<b>min</b>
3.49866	180.48346	3.454164	<b>max</b>
180.11995	359.39036	1.933373	<b>max</b>
183.05929	177.78636	0.722612	<b>prev</b>
119.45135	316.76053	1.830068	<b>prev</b>
64.37153	39.75393	0.983832	<b>prev</b>
246.76346	45.15348	1.803981	<b>prev</b>
308.07886	326.30679	0.963051	<b>prev</b>

Rezultati simuliranog modela malih planeta MP1 i MP2. Ukupan broj stacionarnih tačaka je 12, pri čemu imamo 4 minimuma, 2 maksimuma i 4 prevojne tačke. Ovde je takođe (kao i kod prethodnog primera), jedna od vrednosti funkcije rastojanja ( $\rho$ ) u prevoju, manja od odgovarajuće u tački minimuma.

$E_1$	$E_2$	$\rho$	
1.135	343.459	1.0527	<b>Max</b>
5.282	204.023	0.9703	<b>Prev</b>
355.364	96.894	0.8324	<b>Min</b>
11.064	255.144	0.9554	<b>Min</b>
346.325	323.537	1.0487	<b>Prev</b>
291.754	8.231	0.8696	<b>Min</b>
34.551	302.158	0.9757	<b>Prev</b>
321.611	40.033	0.8982	<b>Prev</b>
67.552	339.553	0.9456	<b>Min</b>
30.399	19.201	1.0308	<b>Prev</b>
181.953	173.950	3.3464	<b>Max</b>
177.495	352.694	1.3528	<b>Prev</b>