UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

VEROVATNOĆA RAZARANjA U KRAMER-LUNDBERGOVOM MODELU

MASTER RAD

Mentor:
prof.dr Pavle Mladenović

Student:
Milena Čelebić

Beograd, jul 2010

SADRŽAJ:

UVOD

Ovde će biti reči o najčešćem procesu broja odšteta- Puaonovom procesu. On ima veoma pogodna teorijska svojstva. Na primer, može se eksplicitno izvesti njegova konačno-dimenziona raspodela. Puasonov proces ima dugu tradiciju u teoriji verovatnoće i teoriji stohastičkih procesa. U svojoj 1903. tezi, Filip Lundberg ga je već iskoristio kao model za proces broja odšteta. Kasnije, 1930.godine, Herald Kramer je znatno razvio čitavu teoriju rizika koristeći proces S ukupne sume odšteta, sa trenucima prispeća T_i, koji su generisani Puasonovim procesom. Dakle, Puasonov proces igra centralnu ulogu u matematici osiguranja.

Neke oznake:

Za sve realne funkcije f definisane na $[0,\infty)$ pisaćemo

$$f(s, t] = f(t) - f(s), \quad 0 \leq s < t < \infty.$$

Takođe, kaže se da celobrojna slučajna promenljiva M ima Puasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda > 0$ ($M \sim \mathcal{Pois}(\lambda)$) ako je njena raspodela data sa

$$P(M = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, \dots$$

PUASONOV PROCES

Definicija: Slučajan proces $N = (N(t))_{t\geq 0}$ je Puasonov proces, ako ima sledeća svojstva:

(1) Proces počinje od nule, tj $N(0) = 0$ skoro sigurno.

(2) Proces ima nezavisne priraštaje, tj za sve prirodne brojeve n, i sve realne brojeve t_k, $k = 0,1,2,\dots,n$, $n \geq 0$, takve da $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ slučajne veličine $N(t_k) - N(t_{k-1})$ (odnosno priraštaji $N(t_{k-1}, t_k]$) su međusobno nezavisne.

(3) Postoji neopadajuća funkcija $\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$ koja je neprekidna s'desne strane, i za koju važi $\mu(0) = 0$. Za proizvoljne brojeve s i t , $0 < s < t$, priraštaji $N(s, t]$ imaju Puasonovu raspodelu $\mathcal{Pois}(\mu(s,t]))$ (odnosno $N(t) - N(s) \sim \mathcal{Pois}(\mu(t) - \mu(s))$. Funkcija μ se naziva funkcijom srednje vrednosti procesa N.

(4) Sa verovatnoćom 1 traektorije $(\mathrm{N}(t,\omega)_{t\geq 0})$ slučajnog procesa $\mathbf{N}$ su neprekidne sa desne strane za $t \geq 0$ i imaju levu graničnu vrednost za $t > 0$. Ovo svojstvo se još naziva 'cadlag' svojstvo traektorija *(continue a droite, limites a gauche).*

Napomenimo, jasno je da slučajna velicina $\mathbf{M}$, sa Puasonovom raspodelom ima svojstvo da $\lambda = \mathrm{E(M)} = \mathrm{D(M)}$.
Shodno tome, kako bi se utvrdila raspodela Puasonovog procesa $\mathbf{N}$ dovoljno je znati njegovu funkciju srednje vrednosti μ. Funkcija srednje vrednosti može se smatrati skrivenim (unutrašnjim) satom ili operativnim vremenom brojačkog procesa $\mathbf{N}$. Veličina $\mu(\mathrm{s},\mathrm{t}]$ na intervalu $(\mathrm{s},\mathrm{t}], \mathrm{s} < t$, takoreći određuje veličinu priraštaja $\mathrm{N}(\mathrm{s},\mathrm{t}]$.
Takođe, kako je $\mathrm{N}(0) = 0$ skoro sigurno, i $\mu(0) = 0$, važi

$$\mathrm{N}(t) = \mathrm{N}(t) - \mathrm{N}(0) = \mathrm{N}(0,t] \sim \mathcal{Pois}(\mu(0,t\,]) = \mathcal{Pois}\big(\mu(t)\big).$$

HOMOGEN PUASONOV PROCES, FUNKCIJA INTEZITETA, KRAMER-LUNDBERGOV MODEL

Najčešće zastupljen Puasonov proces odgovara slučaju linearne funkcije srednje vrednosti μ, odnosno:

$$\mu(t) = \lambda t, t \geq 0,$$

za neko $\lambda > 0$. Proces sa takvom funkcijom srednje vrednosti naziva se homogeni proces, u suprotnom nehomogeni.
Veličina λ naziva se *intezitet homogenog Puasonovog procesa*. Ukoliko je $\lambda = 1$, $\mathbf{N}$ se naziva *standardni homogeni Puasonov proces*.
Opštije, kaže se da $\mathbf{N}$ ima funkciju inteziteta λ ako je μ apsolutno neprekidna, odnosno za svako $s < t$ priraštaj $\mu(\mathrm{s},\mathrm{t}]$ ima oblik

$$\mu(s,t] = \int_s^t \lambda(x)dx\,, s < t.$$

za neku ne-negativnu merljivu funkciju $\boldsymbol{\lambda}$. Jedna od posledica toga je neprekidnost funkcije μ.

Spomenuto je da se μ može shvatiti kao operativno vreme ili unutrašnji sat Puasonovog procesa. Ukoliko je proces N homogen, vreme se linearno uvećava, pri tom važi: μ(s,t] = μ(s+h, t+h] za svako $h > 0 \ i \ 0 \leq s < t < \infty$. Intuitivno, ovo znači da odštete pristižu otprilike ravnomerno tokom vremena.
Ukoliko je intezitet λ procesa N ne-konstantna veličina, u tom slučaju vreme "usporava" ili "ubzava" shodno vrednosti veličine λ(t). Ovakva pojava, ne-konstantne veličine λ bi u osiguranju odgovarala sezonskim efektima ili trendovima.

Homogen Puasonov proces sa intezitetom λ ima sledeca svojstva:

(1) počinje od nule, tj N(0) = 0
(2) N ima nezavisne i stacionarne priraštaje
(3) N ima cadlag traektorije.
(4) N(t) ~ $\mathcal{Pois}(\lambda t)$, za t > 0

Pod stacionarnošću priraštaja se podrazumeva da za sve $0 \leq \mathrm{s} < t$, i $\mathrm{h} > 0$

$$\mathrm{N}(\mathrm{s}, \mathrm{t}] \triangleq \mathrm{N}\big(\mathrm{s} + \mathrm{h}, \mathrm{t} + \mathrm{h}\big] \sim \mathcal{Pois}\big(\lambda(t - s)\big).$$

Drugim rečima, Puasonov parametar, odnosno raspodela priraštaja zavisi samo od dužine intervala, a ne zavisi od njegovog položaja tj. od h.
Proces definisan na $[0, \infty)$ koji ima prva tri od navedenih svojstava naziva se *Levijev proces*. Homogen Puasonov proces je jedan od trivijalnih primera Levijevih proseca. Takođe, i Braunovo kretanje je jedan od njih.

KRAMER-LUNDBERGOV MODEL

Homogen Puasonov proces je osnovni model matematike neživotnog osiguranja. Ako predstavimo proces broja odšteta kao homogen Puasonov proces, rezultujući model koji kombinuje veličine odsteta i trenutke njihovih prispeća je Kramer-Lundbergov model. Njime se opisuje veličina kapitala kojim raspolaže odgovarajuća osiguravajuća kompanija, kao i način na koji se taj kapital menja tokom vremena.

Vrednost kapitala u trenutku t zavisi od početnog kapitala, akumuliranih premija i ukupnih isplaćenih odšteta do trenutka t. Ta zavisnost se predstavlja na sledeći način:

$$K(t) = K(0) + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j \ , t \geq 0, n > 0.$$

Ili, opštije

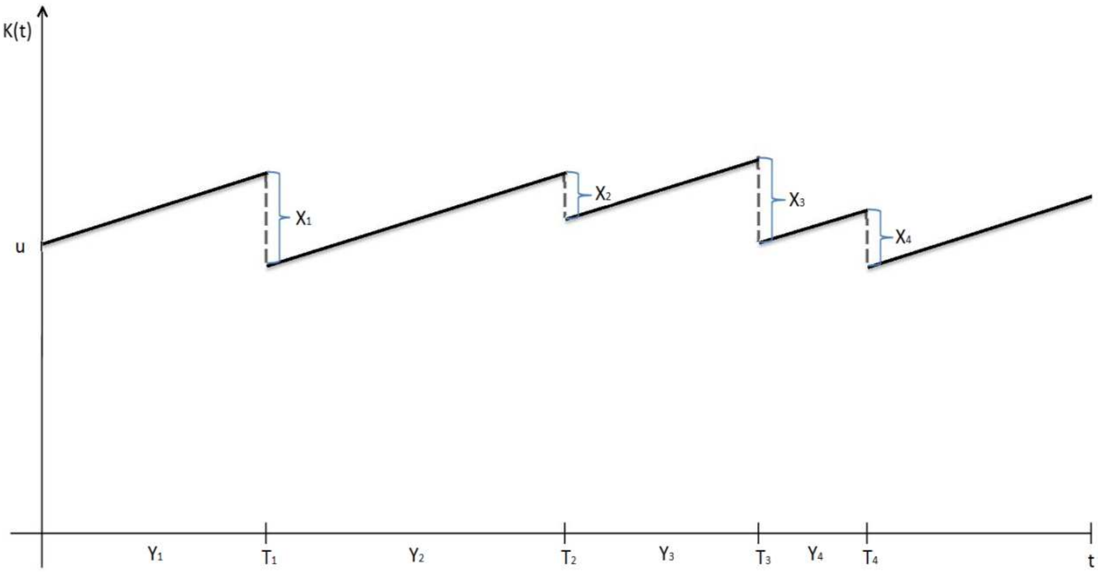
$$K(t) = u + p(t) - S(t), \qquad t \geq 0, n > 0.$$

- u predstavlja početni kapital, odnosno vrednost početnog kapitala u “nultom” trenutku, $u = K(0)$. Konstanta u često nije precizirana, ali se obično pretpostavlja da je ta vrednost velika. Objašnjenje za to je kako matematičko, tako i ekonomsko.
- Akumulirane premije su opisane neprekidnom funkcijom $p(t)$, koja takođe figuriše u izrazu za ukupan kapital. Obično se $p(t)$ modelira kao linearni prirast, odnosno:

  $$p(t) = ct,$$

  gde je c- neslučajna veličina, i predstavlja brzinu akumulacija premija.
- Zahtevi za odštetom se dešavaju u trenucima prispeća T_j, j=1,2,.., takvih da $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ Oni zapravo predstavljaju jedan niz slučajnih trenutaka.
- J-ti zahtev za odštetom pristiže u trenutku T_j i prouzrokuje veličinu odštete X_j, koju isplaćuje osiguravajuća kompanija. Niz (X_j) predstavlja niz nezavisnih(i ne-negativnih) slučajnih veličina, sa zajedničkom funkcijom raspodele $F(x)$ pri čemu je $F(0) = 0$.

  U ovom modelu pretpostavlja se da $E(X) = m < +\infty, i\ D(X) = \sigma^2,\ \sigma^2 \leq +\infty$. (Dozvoljava se čak da disperzija bude beskonačno.)



Grafik.1: Primer trajektorije procesa K

- Nizovi (T_j) i (X_j) su nezavisni. Posebno, N i (X_j) su nezavisni.
- Slučajna veličina Y_k, $Y_k = T_k - T_{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots, T_0 = 0$, formira niz ($Y_k$), niz nezavisnih slučajnih veličina koje imaju istu raspodelu (eksponencijalnu), sa parametrom $\lambda, (\lambda > 0)$, tj.

$$P\{Y_k \leq t\} = P\{T_k - T_{k-1} \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, za\ t \geq 0.$$

- Nizovi $(X_j)_{j=1,2,\dots} i\ (Y_k)_{k=1,2,\dots}$ su nezavisni.
- $N(t)$ predstavlja broj prispelih zahteva za odštetom do trenutka t. To je jedan proces. $N(t)$ se moze predstaviti kao

$$N(t) := \mathcal{sup}\{n \geq 1 :\ T_n \leq t\}, t \geq 0.$$

Naravno, ukoliko ne postoji indeks n za koji $T_n \leq t$, podrazumeva se da je supremum praznog skupa jednak nuli.
Na osnovu uvedene pretpostavke o raspodeli verovatnoća slučajnih veličina $Y_k = T_k - T_{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots$, dokazuje se da je verovatnoća događaja

$$P\{N(t) = k\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\ za\ k = 0, 1, 2, \dots$$

odnosno, da $N(t) \sim \mathcal{Pois}(\lambda t), t > 0.$

Takođe, $\mathrm{N}(t)$ se može zapisati i kao

$$\mathrm{N}(t) = \#\{n \geq 1 : \mathrm{T}_n \leq t\},\ t \geq 0$$

odakle se vidi da $\mathbb{N}$ zapravo prebrojava trenutke prispeća do trenutka t.

- Proces $\mathrm{N}(t)$ je nezavisan od niza veličina odšteta $(\mathrm{X_j})$.
- Ukupna vrednost odšteta, u oznaci $S(t)$, je ukupna vrednost svih isplaćenih odšteta do trenutka t, tj.

$$S(t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}(t)} \mathrm{X_j}\,, \mathrm{t} \geq 0$$

gde je proces broja odšteta nezavisan od niza veličina odšteta $(\mathrm{X_j})$. U pitanju je takođe jedna familija slučajnih veličina, i podrazumeva se da $\mathrm{X_j} > 0$, skoro sigurno. U zavisnosti od izbora procesa $\mathbb{N}$, mogu se dobiti i različiti modeli procesa S. Naravno, ukoliko je $\mathrm{N}(t) = 0$, tada je i $S(t) = 0$. U opštem slučaju pokazuje se da

$$E\big(S(t)\big) = E(\mathrm{X_1}) \cdot E\big(\mathrm{N}(t)\big),$$
$$D\big(S(t)\big) = D(\mathrm{X_1}) \cdot E\big(\mathrm{N}(t)\big) + \big(E(\mathrm{X_1})\big)^2 D\big(\mathrm{N}(t)\big).$$

U Kramer-Lundbergovom modelu proces N(t) je homogen, a intrezitet tog homogenog procesa je λ, te je $\mathbb{N}$(t) $\sim \mathcal{Pois}(\lambda t)$. Odatle sledi (na osnovu osobine Puasonove raspodele) da su $E\big(\mathrm{N}(t)\big)$, $D\big(\mathrm{N}(t)\big)$ jednaki λt. Dakle, u Kramer-Lundbergovom modelu, u kome je S proces ukupne sume odšteta, važi

$$E\big(S(t)\big) = \lambda t \cdot E(\mathrm{X_1}) = \lambda t m,$$
$$D\big(S(t)\big) = \Big\{D(\mathrm{X_1}) + \big(E(\mathrm{X_1})\big)^2\Big\} \cdot \lambda t$$
$$= (\sigma^2 + m^2) \cdot \lambda t = \lambda t \cdot \Big(E\big(\mathrm{X_1}^2\big)\Big)$$

gde je $E(\mathrm{X}_j) = m, D(\mathrm{X}_j) = \sigma^2, \forall$j.

Vrednost $S(t)$ ne sme biti veća od kapitala kojim određena osiguravajuća kompanija raspolaže u trenutku t, inače dolazi do razaranja. U sledećem poglavlju biće više reči o tome.

Na grafiku Grafik.1 se vidi da proces K počinje sa početnim kapitalom, vrednosti u. Dalje se vrednost kapitala uvećava linearnom brzinom tj. brzinom akumuliranja premija c, do trenutka T_1, kada pristiže prvi zahtev za odštetom. U tom trenutku kapital se umanjuje za vrednost veličine odštete X_1. Dalje, na intervalu $[T_1, T_2)$ proces opet ima rastuću tendenciju, brzinom c do trenutka T_2 kada 'pada' za dužinu odtštete X_2 i tako dalje. Dakle, vidi se iz samog izraza, a i sa grafika da je moguće i da $K(t)$ 'uzme' negativnu vrednost. To se, između ostalog, može dogoditi ukoliko postoji velika odšteta X_i kojom vrednost grafika u tom trenutku 'pada' ispod nule.

Kramer-Lundbergov model je jedan od najpopularnijih i korisnijih modela u matematici neživotnog osiguranja. Bez obzira na svoju jednostavnost on opisuje neke glavne crte procesa ukupne sume odšteta.

VEROVATNOĆA RAZARANJA U KRAMER-LUNDBERGOVOM MODELU

Događaj da proces K 'padne' ispod nule, odnosno da proces $K(t)$ uzme negativnu vrednost u nekom trenutku t, naziva se *Razaranje.*

Definicija_1: Razaranjem se naziva događaj da kapital K, u nekom trenutku t, padne ispod nule.

$$RAZARAN_JE = \{K(t) < 0,\ za\ neko\ t > 0\}$$

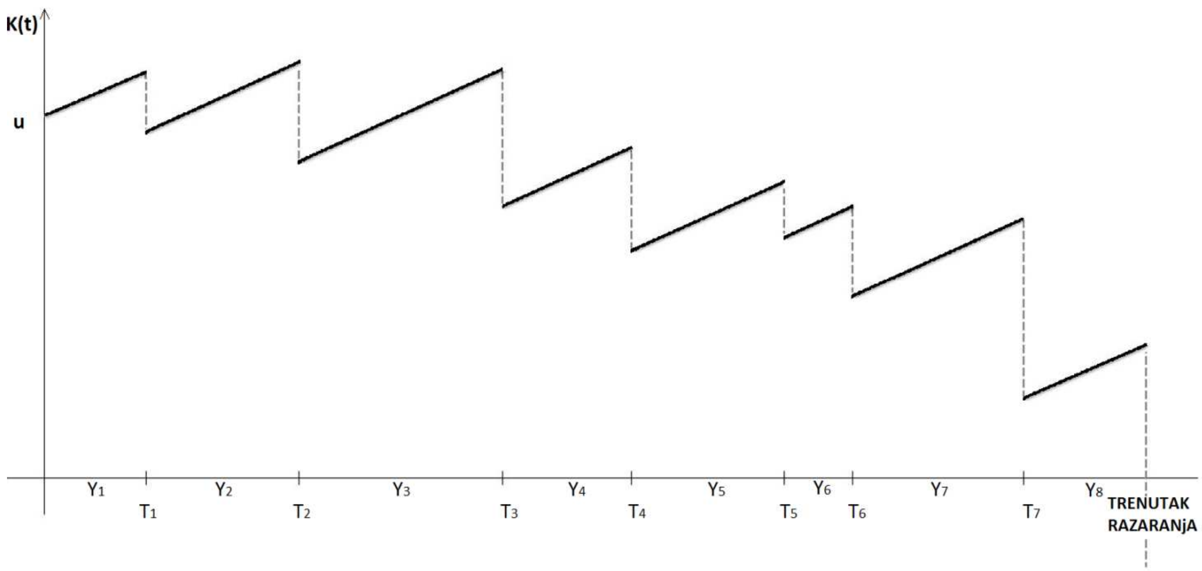
Definicija_2: Trenutak razaranja τ je trenutak kada dođe do razaranja, odnosno prvi od trenutaka kada proces K padne ispod nule.

$$\tau = \mathit{inf}\{\, t > 0 : \mathrm{K(t)} < 0\}$$

Trenutak razaranja je zapravo prvi trenutak u kome se dogodilo razaranje (prvi, u smislu najmanje vrednosti za t, za koje je $\mathrm{K(t)} < 0$). Takva vrednost može da se dostigne a i ne mora(ukoliko do razaranja uopšte i nije došlo).

Definicija_3: Verovatnoća razaranja je data sa:

$$\psi(u) = P\left\{\, RAZARAN_JE \mid \mathrm{K(0)} = \mathrm{u} \,\right\} = P\{\,\tau < +\infty\}, u > 0$$



Grafik.2: Primer procesa K u kome dolazi do razaranja.

Dakle, verovatnoća razaranja $\psi(u), u \geq 0$ je funkcija od u, tj. ona zavisi od početnog kapitala. Uslov $\mathrm{K}(0) = u$ u zapisu verovatnoće razaranja je 'veštački' ukoliko je $\mathrm{K}(0)$ konstanta. Takođe, razaranje i trenutak razaranja zavise od u, ali obično to izostavljamo u zapisu.
U prethodnoj definiciji koristili smo činjenicu

$$RAZARAN_JE = \bigcup_{t\geq 0}\{ \mathrm{K(t)} < 0 \} = \left\{ \inf_{t\geq 0} \mathrm{K(t)} < 0 \right\} = \{\tau < \infty\}.$$

U opštem slučaju τ ne mora biti realan broj, dozvoljeno je čak da on bude ∞ sa pozitivnom verovatnoćom. Može se reći da je τ jedna 'produžena' slučajna promenjliva. Shodno modelu koji je opisan (Kramer-Lundbergovom modelu) i činjenicama da se zahtevi za odštetom dešavaju u trenucima $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_{3,\ldots}$, kao i da je rastojanje između tih uzastopnih trenutaka prispeća jedna slučajna veličina koja ima određenu raspodelu, sasvim je jasno sledeće: Razaranje se može dogoditi jedino u trenucima prispeća, tj. u T_n, za neko $n \geq 1$.
Niz $K(Tn)$ naziva se skelet risk procesa K. Koristeći skelet procesa, razaranje se može predstaviti preko niza Y_n , tj niza čiji su članovi dužine vremena između uzastopnih prispeća odšeta*(inter-arrival times),* veličina odšteta X_n i brzine akumulacija premija c. U daljem izlaganju koristićemo i činjenicu da je

$$\mathrm{N}(t) = \#\{i \geq 1 : \mathrm{T}_i \leq \mathrm{T}_n\} = n, \text{ skoro sigurno,}$$

te je broj sabiraka u ukupnoj sumi odšteta jednak n. Podrazumevaćemo još da je $\mathrm{Y_k} > 0$ skoro sigurno, za svako $\mathrm{k} \geq 1$.
Dakle,

$$RAZARAN_JE = \left\{ \inf_{t>0} \mathrm{K(t)} < 0 \right\} = \left\{ \inf_{n\geq 1} \mathrm{K(T}_n) < 0 \right\} = \left\{ \inf_{n\geq 1} [u + p(\mathrm{T}_n) - S(\mathrm{T}_n)] < 0 \right\}$$
$$= \left\{ \inf_{n\geq 1} \left[u + c\mathrm{T}_n - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_j \right] < 0 \right\}.$$

Označimo sa $\mathrm{Z_k}$ sledeći niz :

$$Z_k = X_k - cY_k \,,\ \ k = 1, 2, \ldots$$

i sa

$$S_n = Z_1 + Z_2 + \ \ldots + Z_n \,, n \geq 1,\ S_0 = 0.$$

Kako su X_n i Y_n međusobno nezavisni nizovi, kao što su i sami članovi unutar tih nizova međusobno nezavisni, sledi da je niz Z_k niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom. Sada verovatnoću razaranja možemo predstaviti na sledeći način:

$$\psi(u) = P\left(\inf_{n\geq 1} (-S_n) < -u \right) = P\left(\sup_{n\geq 1} S_n > u \right).$$

Dakle, verovatnoća razaranja se može shvatiti kao verovatnoća repa raspodele supremuma slučajnog lutanja S_n.
Komplement verovatnoći razaranja bi bila verovatnoća opstanka, u oznaci $\varphi(u)$:

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u)$$

Glavni cilj je izbeći ‘razaranje sa verovatnoćom 1’. Takođe, i verovatnoća da slučajno lutanje S_n prevaziđe gornju granicu u bi trebalo da bude toliko mala da se događaj razaranja može čak isključiti iz bilo kakvog praktičnog razmatranja ukoliko je vrednost početnog kapitala dovoljno velika.
Dakle, podrazumevaćemo da su $E(Y_1)$ i $E(X_1)$ konačni. Time će biti oslabljen postojeći uslov za dužine vremena između uzastopnih prispeća i veličine odšteta, što je uglavnom i slučaj u praksi. Takođe, $E(Z_1)$ je dobro definisano, a na osnovu prethodne konstatacije jasno je da će i $E(Z_1) = E(X_1) - cE(Y_1)$, biti konačno. Za niz slučajnih veličina Z_k važi jaki zakon velikih brojeva. Tačnije, slučajno lutanje (S_n) zadovoljava sledeće :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{s.s.} E(Z_1)\,, n \to \infty.$$

Drugim rečima, $S_n \to +\infty$ skoro sigurno ako je $E(Z_1) > 0$, odnosno, $S_n \to -\infty$ ukoliko je $E(Z_1) < 0$. Dakle, u slučaju da je $E(Z_1) > 0$, razaranje je neizbežno ($\psi(u) = 1$) bez obzira na vrednost početnog kapitala u.
Iz teorije slučajnog lutanja sledi da važi $\psi(u) = 1$ i pri uslovu $E(Z_1) = 0$. To zapravo sledi iz činjenice da postoji podniz $(n_k(\omega))$ takav da $S_{n_k}(\omega) \to \infty$ i podniz $(m_k(\omega))$ takav da $S_{m_k}(\omega) \to -\infty$.
Ako se uslov $E(Z_1) = 0$ 'pojača' još i uslovom $D(Z_1) < \infty$, može se pokazati da je $\psi(u) = 1\ , \forall u > 0$.

Tvrđenje_1: (Razaranje sa verovatnoćom 1) : Ako su $E(X_1)$ i $E(Y_1)$ konačni i ako važi $E(Z_1) = E(X_1) - cE(Y_1) \geq 0,\ \forall n > 0$, razaranje se događa sa verovatnoćom 1.

Ovim tvrđenjem se dolazi do zaključka da svaka osiguravajuća kompanija za premiju $p(t)$ bi trebalo da izabere linearnu funkciju $p(t) = ct$ kako bi važilo $E(Z_1) < 0$, jer se u tom slučaju obezbeđuje uslov $\psi(u) \neq 1$. Ovo je način da se izbegne razaranje sa verovatnoćom 1.

USLOV ČISTOG PROFITA:

Definicija_4 : Kaže se da Kramer-Lundbergov model zadovoljava uslov čistog profita ako važi:

$$E(Z_1) = E(X_1) - cE(Y_1) < 0.$$

Vrlo je jednostavno objašnjenje uslova čistog profita, i ono je dosta intuitivno. Dakle, za dati vremenski period, očekivana vrednost odštete, $E(X_1)$, bi trebalo da bude manja od premije $p(t)$ (*premium income*) za taj vremenski period (tj. $cE(Y_1)$).

Primer_1: Uslov čistog profita i računanje premije u Kramer - Lundbergovom modelu

Poznato je da za dati model važi sledeće:

$$ES(t) = E\mathrm{N}(t)\, EX_1 = \lambda t\, EX_1 = \frac{EX_1}{EY_1}\, t.$$

Ako za akumulirane premije izaberemo linearnu funkciju $p(t) = ct$, pri čemu $c = \frac{EX_1}{EY_1}$, obezbedićemo uslov čistog profita. U ovom slučaju, $\mathrm{EZ}_1 = 0$ tj. razaranje je neizbežno sa verovatnoćom 1.
Dalje, za pozitivnu vrednost ρ, koju nazivamo *zaštitni dodatak*, funkcija $p(t)$ se može predstaviti i kao:

$$p(t) = (1+\rho)ES(t) = (1+\rho)\frac{EX_1}{EY_1}\, t.$$

Odatle se može izraziti c-brzina akumulacija premija,

$$c = (1+\rho)\frac{EX_1}{EY_1}, \rho > 0,$$

kao i zaštitni dodatak,

$$\rho = c\,\frac{EY_1}{EX_1} - 1 > 0.$$

S'obzorom da je $\rho > 0$, jasno je da važi $c > \frac{EX_1}{EY_1}$, što se vidi iz samog izraza za c. Posebno, $E(Z_1) < 0$, odnosno uslov čistog profita je zadovoljen. □

Primer_2: Korišćenjem centralne granične teoreme pokažimo da važe sledeće nejednakosti:

(1) $\lim\limits_{u\to\infty} \psi(u) \geq 1 - \Phi(0) = 0.5$

(2) $\lim\limits_{u\to\infty} \psi(u) \geq P\left(\max(Y_1, Y_1+Y_2, \dots, Y_1+\dots+Y_n) \geq 0\right),$

gde je Φ funkcija raspodele slučajne veličine sa normalnom $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom, $(\mathrm{Y_n})$ niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom.

Može se dokazati sledeće: $P(\sup \quad S_n \leq t) \leq P(S_n \leq t)$, te važi

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u) = \lim_{u\to\infty} P\left(\sup_{n\geq 1} S_n > u\right) = \lim_{u\to\infty}\left(1 - P\left(\sup_{n\geq 1} S_n \leq u\right)\right)$$
$$= 1 - \lim_{u\to\infty} P\left(\sup_{n\geq 1} S_n \leq u\right) \geq 1 - \lim_{u\to\infty} P(S_n \leq u).$$

Na osnovu centralne granične teoreme važi

$$\lim_{u\to\infty} P(S_n \leq u) = \lim_{u\to\infty} P\left(\frac{S_n - ES_n}{DS_n} \leq \frac{u - ES_n}{DS_n}\right) = \lim_{u\to\infty} P(W \leq w),$$

gde je W slučajna veličina sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom, a w neka pozitivna vrednost s' obzirom na činjenicu da $u \to \infty$ i da su očekivanje i disperzija slučajnog lutanja S_n konačni. Na osnovu toga važi : $P(W \leq w) \leq P(W \leq 0)$.
Sada,

$$1 - \lim_{u\to\infty} P(S_n \leq u) = 1 - \lim_{u\to\infty} P(W \leq w) \geq 1 - P(W \leq 0) = 1 - \Phi(0)$$

tj.

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u) \geq 1 - \Phi(0) = 0.5$$

Dalje,

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(0) &\geq 1 - \Phi(0)^n \\ &= 1 - P(Y_1 < 0) \cdot P(Y_1 + Y_2 < 0) \cdot \ldots \cdot P(Y_1 + \cdots + Y_n < 0) \\ &= 1 - P\left(\max(Y_1, Y_1 + Y_2, \ldots, Y_1 + \cdots + Y_n) < 0\right) \\ &= P\left(\max(Y_1, Y_1 + Y_2, \ldots, Y_1 + \cdots + Y_n) \geq 0\right) \end{aligned}$$

čime se pokazuje da važi i druga nejednakost, odnosno

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u) \geq P\left(\max(Y_1, Y_1 + Y_2, \ldots, Y_1 + \cdots + Y_n) \geq 0\right).$$

USLOV MALIH ODŠTETA:

Definicija_5: Veličine odšteta zadovoljavaju uslov malih odšteta ako njihova generatorna funkcija $E(e^{sX_1})$ postoji za svako $s \in (-s_0, s_0)$, za neko $s_0 > 0$.

LUNDBERGOV KOEFICIJENT I LUNDBERGOVA NEJEDNAKOST

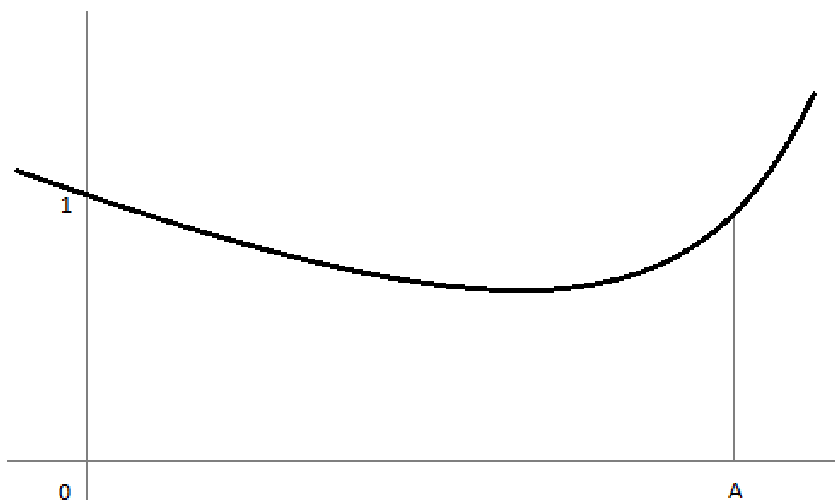
U razmatranju Lundbergovog koeficijenta, i Lundbergove nejednakosti, podrazumeva se opisani model, za koji važi uslov čistog profita, kao i uslov malih odšteta.

Definicija_6: Pretpostavimo da generatorna funkcija $E(e^{s\mathrm{Z}_1})$ slučajne veličine Z_1 postoji u okolini nule $(-\mathrm{s}_0, \mathrm{s}_0)$, gde je $\mathrm{s}_0 > 0$. Tada, ako postoji A, jedinstveno i pozitivno rešenje jednačine:

$$m_{\mathrm{Z}_1}(\mathrm{s}) = \mathrm{E}(e^{s\mathrm{Z}_1}) = \mathrm{E}(e^{-cs\mathrm{Y}_1})\mathrm{E}(e^{s\mathrm{X}_1}) = 1$$

ono se zove *Lundbergov koeficijent*.

Napomena: traženo rešenje je rešenje jednačine po promenljivoj s



Grafik.3: Karakterističan primer funkcije $f(s) = m_{\mathrm{Z}_1}(\mathrm{s})$ sa Lundbergovim koeficijentom A.

Postojanje generatorne funkcije $m_{\mathrm{X}_1}(\mathrm{s})$, $\left(m_{\mathrm{X}_1}(\mathrm{s}) = \mathrm{E}(e^{s\mathrm{X}_1})\right)$ za $s \in [0, s_0)$, obezbeđuje postojanje $m_{\mathrm{Z}_1}(\mathrm{s})$

$$m_{\mathrm{Z}_1}(\mathrm{s}) = m_{\mathrm{X}_1}(\mathrm{s}) \cdot m_{\mathrm{cY}_1}(-\mathrm{s}), \forall \mathrm{s} \in [0, s_0),$$

jer $m_{\mathrm{cY}_1}(-\mathrm{s}) \leq 1, \forall \mathrm{s} \geq 0$.

Tačnije,

$$E(e^{sZ_1}) = \mathrm{E}(e^{sX_1}) \cdot \mathrm{E}(e^{-csY_1}), \text{ tj.}$$

$$E(e^{sZ_1}) = \mathrm{E}(e^{sX_1}) \cdot \mathrm{E}\left(e^{(-s)cY_1}\right), \text{ za sve } s \in [0, s_0),$$

gde je $\mathrm{E}(e^{-scY_1}) \leq 1, \forall s \geq 0$.
Slično, za $s \in (-s_0, 0)$, $E(e^{sZ_1})$ postoji ako je $\mathrm{E}(e^{-scY_1})$ konačna.
Jasno je da generatorna funkcija slučajne veličine Z_1 postoji u okolini nule ako postoje generatorne funkcije za X_1 i cY_1. U Kramer-Lundbergovom modelu gde je proces broja odšteta, $\mathrm{N}(t)$, Puasonov proces sa intezitetom λ važi:

$$m_{cY_1}(s) = \frac{\lambda}{\lambda - cs} \text{ postoji za } s < \frac{\lambda}{c}.$$

Teorema_1 : Pretpostavimo da za dati proces obnavljanja važi uslov čistog profita, i da postoji Lundbergov koeficijent A. Tada za svako $u > 0$ važi nejednakost:

$$\psi(u) \leq e^{-Au}.$$

Dokaz : Definišimo

$$\psi_n(u) = P\left(\max_{1 \leq i \leq n} S_i > u\right) = P(S_i > u, za\ neko\ i \in \{1, 2, \dots, n\})$$

Prvo ćemo dokazati da $\psi_n(u) \uparrow \psi(u)$.
Neka je

$$\mathcal{B}_n = \left\{\max_{1 \leq i \leq n} S_i > u\right\}$$

Tada

$$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B} = \left\{\sup_{n \geq 1} S_n > u\right\}$$

gde je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n = \mathcal{B}$$

Na osnovu svojstva neprekidnosti verovatnoće sledi

$$\lim_{n \to \infty} P(\mathcal{B}_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n\right) = P(\mathcal{B}),$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) = \psi(u)$$

odnosno baš $\psi_n(u) \uparrow \psi(u)$ kad $n \to \infty$, $\forall u > 0$, što je i trebalo dokazati.
Dalje, dovoljno je dokazati da važi

$$\psi_n(u) \leq e^{-Au}, \quad \forall n \geq 1, \forall u > 0. \tag{1.1}$$

Sada dokaz ide indukcijom po n. Za $n = 1$
$\psi_1(u) = P\{S_1 > u\} = P\{Z_1 > u\} = P\{e^{AZ_1} > e^{Au}\} \leq \frac{Ee^{AZ_1}}{e^{Au}}$, pri tom $\frac{Ee^{AZ_1}}{e^{Au}} = \frac{1}{e^{Au}} = e^{-Au}$, gde je A Lundbergov koeficijent tj. rešenje jednačine $Ee^{sZ_1}=1$, po s.
Pretpostavimo da (1.1) važi za $n = k \geq 1$, tj. $\psi_n(u) \leq e^{-Au}, \forall u > 0$.
Potom, dokažimo da važi za $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
\psi_{k+1}(u) &= P\left\{\max_{1\leq i\leq k+1} S_i > u\right\} \\
&= P\{Z_1 > u\} + P\left\{\max_{2\leq i\leq k+1}\left(Z_1 + (S_n - Z_1)\right) > u, Z_1 \leq u\right\} \\
&= \int_u^{+\infty} d\left(F_{Z_1}(t)\right) + \int_{-\infty}^{u} P\left\{\max_{1\leq i\leq k}(t + S_i) > u\right\} d\left(F_{Z_1}(t)\right) \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Integral $I_1 = \int_u^{\infty} d\left(F_{Z_1}(t)\right) \leq \int_u^{\infty} e^{A(t-u)} d\left(F_{Z_1}(t)\right)$, jer za $t \geq u$ važi $e^{A(t-u)} \geq 1$.

Integral $I_2 = \int_{-\infty}^{u} P\left\{\max_{1\leq i\leq k}(t + S_i) > u\right\} d\left(F_{Z_1}(t)\right)$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{u} P\left\{\max_{1\leq i\leq k} S_i > u - t\right\} d\left(F_{Z_1}(t)\right) = \int_{-\infty}^{u} \psi_k(u-t)\, d\left(F_{Z_1}(t)\right) \\
&\leq \int_{-\infty}^{u} e^{-A(u-t)}\, d\left(F_{Z_1}(t)\right) = \int_{-\infty}^{u} e^{A(t-u)} d\left(F_{Z_1}(t)\right)
\end{aligned}$$

jer jednakost (1.1) važi za $n = k$.
Dakle,

$$\psi_{k+1}(u) = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \le \int_u^{\infty} e^{A(t-u)}\, d\left(F_{\mathrm{Z}_1}(t)\right) + \int_{-\infty}^{u} e^{A(t-u)} d\left(F_{\mathrm{Z}_1}(t)\right)$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} e^{A(t-u)} d\left(F_{\mathrm{Z}_1}(t)\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{A(t-u)} d\left(F_{\mathrm{Z}_1}(t)\right) = e^{-Au} \int_{-\infty}^{u} e^{At} d\left(F_{\mathrm{Z}_1}(t)\right) = e^{-Au} E\,(\mathrm{e}^{A\mathrm{Z}_1})$$

$$= e^{-Au}$$

odakle sledi da važi:

$$\psi_{k+1}(u) \le e^{-Au}$$

$\square$

Primer_3: Lundbergova nejednakost u slučaju eksponencijalno raspodeljenih veličina odšteta:

Podrazumevamo Kramer-Lundbergov model, u kome veličine odšteta obrazuju niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina, sa eksponencijalnom funkcijom raspodele $\mathcal{E}xp(\gamma)$, i intezitetom Puasonovog procesa λ. Veličine Y_i su nezavisne slučajne promenljive sa $\mathcal{E}xp(\lambda)$ raspodelom.
Generatorna funkcija jedne eksponencijalno raspodeljene slučajne veličine A, odnosno slučajne veličine sa $\mathcal{E}xp(a)$ raspodelom, je data sa :

$$m_{\mathrm{A}}(s) = \frac{a}{a-s}\ , \qquad s < a$$

Dalje, generatorna funkcija od $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{X}_1 - cY_1$ ima oblik

$$m_{\mathrm{Z}_1}(s) = m_{\mathrm{X}_1}(s) m_{c\mathrm{Y}_1}(-s) = \frac{\gamma}{\gamma - s}\,\frac{\lambda}{\lambda + cs}\ , \quad -\frac{\lambda}{c} < s < \gamma.$$

Traženi (Lundbergov) koeficijent se potom dobija kao rešenje jednačine

$$1 + s\frac{c}{\lambda} = \frac{\gamma}{\gamma - s} = \frac{1}{1 - sE\mathrm{X}_1}\ , \ -\frac{\lambda}{c} < s < \gamma. \qquad (1.2)$$

gde je $\gamma = (E\mathrm{X}_1)^{-1}$. S'obzirom na uslov čistog profita, tačnije ako se podsetimo da važi $\frac{EX_1}{EY_1} = \frac{\lambda}{\gamma} < 0$, jednostavnim računom se pokazuje da jednakost (1.2) ima jedinstveno pozitivno rešenje dato sa:

$$A = \gamma - \frac{\lambda}{c} > 0.$$

U primeru_1, polazeći od principa očekivane vrednosti, brzina akumulacija premija, c predstavljena je na sledeći način

$$c = (1+\rho)\frac{EX_1}{EY_1} = (1+\rho)\frac{\lambda}{\gamma}.$$

Stoga, izražen preko zaštitnog dodatka ρ, Lundbergov koeficijent dat je sa

$$A = \gamma \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Dakle, u Kramer-Lundbergovom modelu sa nezavisnim i jednako raspodeljenim veličinama odštete $\mathcal{Exp}(\gamma)$, Lundbergova nejednakost za verovatnoću razaranja data je sa:

$$\psi(u) \leq exp\left\{-\gamma \frac{\rho}{1+\rho}\, u\right\}, u > 0.$$

Na osnovu osobine eksponencijalne funkcije, vidi se da sa porastom promenljive u verovatnoća da dodje do razaranja postaje veća. Takođe, što veće vrednosti izaberemo za zaštitni dodatak ρ, Lundbergov koeficijent će biti sve manji. Specijalno, $\frac{\rho}{1+\rho} \uparrow 1,$ kad $\rho \uparrow \infty$. S'obzirom da $\gamma = (E\mathrm{X}_1)^{-1}$, što je manja očekivana veličine odštete, manja je i vrednost verovatnoće razaranja. □

Primer_4: Lundbergova nejednakost u slučaju veličina odšeta sa gama $\Gamma(2,\gamma)$ *raspodelom.*

Dakle, veličine odšteta X_i obrazuju niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina, sa gama $\Gamma(2,\gamma)$ funkcijom raspodele i intezitetom Puasonovog procesa λ, tj. veličine Y_i su nezavisne slučajne promenljive sa $\mathcal{Exp}(\lambda)$ raspodelom.

Gustina raspodele slučajne veličine sa $\Gamma(2,\gamma)$ raspodelom je data sa

$$f_{X_i}(x) = \gamma^2 x e^{-\gamma x}.$$

Generatorna funkcija slučajne veličine sa datom gama raspodelom ima oblik

$$m_{X_1}(s) = \left(\frac{\gamma}{\gamma - s}\right)^2.$$

Generatorna funkcija slučajne ,veličine Y_1 ostaje ista kao u prethodnom primeru.
Dalje, generatorna funkcija od $Z_1 = X_1 - cY_1$ ima oblik

$$m_{Z_1}(s) = m_{X_1}(s) m_{cY_1}(-s) = \left(\frac{\gamma}{\gamma - s}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda + cs}, \quad -\frac{\lambda}{c} < s < \gamma.$$

Sada se Lundbergov koeficijent dobija kao rešenje jednačine

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma - s}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda + cs} = 1,$$

odnosno,

$$s\left(cs^2 + s(\lambda - 2\gamma c) + (\gamma^2 c - 2\gamma\lambda)\right) = 0.$$

S' obzirom da je $-\frac{\lambda}{c} < s < \gamma$, rešenje jednačine je jedinstveno i to:

$$A = \gamma - \frac{\lambda}{2c} - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2c}\right)^2 + \frac{\gamma\lambda}{c}}$$

gde je c dato sa

$$c = (1 + \rho)\frac{2\lambda}{\gamma}.$$

Dalje, Lundbergov koeficijent izražen preko zaštitnog dodatka ρ ima oblik

$$A = \gamma \frac{3 + \rho - \sqrt{8\rho + 9}}{4(1 + \rho)}.$$

Tačnije,

$$A = \gamma \left(1 - \frac{1 + \sqrt{8\rho + 9}}{4(1 + \rho)}\right) < \gamma \frac{\rho}{1 + \rho}.$$

Dakle, Lundbergova nejednakost za verovatnoću razaranja kada je u pitanju Kramer-Lundbergov model sa nezavisnim i gama $\Gamma(2, \gamma)$ raspodeljenim veličinama odštete, data je sa:

$$\psi(u) \leq exp\left\{-\gamma \left(1 - \frac{1 + \sqrt{8\rho + 9}}{4(1 + \rho)}\right) u\right\}, u > 0.$$

Na osnovu prethodne dve nejednakosti zaključuje se da je gornja granica za verovatnoću razaranja u slučaju gama $\Gamma(2, \gamma)$ raspodele veća nego što je u slučaju exponencijalne raspodele veličine odšteta, odnosno $\Gamma(1, \gamma)$ raspodele.

□

VEROVATNOĆA RAZARANJA U SLUČAJU MALIH ODŠTETA

Podrazumevamo Kramer-Lundbergov model gde je $N(t)$ homogeni Puasonov proces sa intezitetom λ. Sledeća teorema je jedna od najbitnijih u teoriji rizika.

Teorema_2: *(Kramerova granica razaranja)*
Razmatramo Kramer-Lundbergov model za koji važi uslov čistog profita. Pretpostavimo da je funkcija raspodele odšteta $\mathrm{F}_{\mathrm{X}_1}$ apsolutno neprekidna i da generatorna funkcija momenata slučajne veličine odšteta X_1 postoji u okolini nule $(-s_0, s_0)$, $s_0 > 0$, a Lundbergov koeficijent A postoji i pripada intervalu $(0, s_0)$. Tada, postoji konstanta $c > 0$ takva da važi:

$$\lim_{n\to\infty} e^{Au}\,\psi(u) = c.$$

Lema_1: Razmatramo Kramer-Lundbergov model za koji važi uslov čistog profita. Pretpostavimo da je $\mathrm{EX}_1 < \infty$ i da je funkcija raspodele odšteta $\mathrm{F}_{\mathrm{X}_1}$ apsolutno neprekidna. Tada *verovatnoća opstanka* $\varphi(u)$ zadovoljava jednakost:

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{1}{(1+\rho)EX_1}\int_0^u \overline{F}_{X_1}(y)\,\varphi(u-y)d(y) \qquad (2.0)$$

gde je $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$, a $\overline{F}_{X_1}(y) = 1 - F_{X_1}(y)$.

Dokaz:
Pre dokaza same Leme, predstavljene će biti dve napomene, koje će se koristiti u okviru njega.
Napomena_1: Označimo sa

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}_1,\mathrm{I}}(y) = \frac{1}{\mathrm{EX}_1}\int_0^y \overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{X}_1}(z)\,dz, \quad y > 0,$$

Integrisanu funkcija repa raspodele za X_1. Primetimo da je $\mathrm{F}_{\mathrm{X}_1,\mathrm{I}}(y)$ zapravo funkcija raspodele, jer za svaku pozitivnu slučajnu promenljivu A važi :
(1) $\mathrm{E(A)} = \int_0^\infty \overline{F}_A(y)\,dy$, i (2) $\mathrm{F}_{\mathrm{X}_1,\mathrm{I}}(y) \uparrow 1$ kad $y \uparrow \infty$.

Shodno ovome, izraz (2.0) poprima sledeći oblik

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{1}{(1+\rho)} \int_0^u \varphi(u-y) d\, \mathrm{F}_{\mathrm{X}_1,\mathrm{I}}(y).$$

□

Napomena_2: Moguće je oceniti konstantu $\varphi(0)$ koja figuriše u izrazu (2.0). Uočimo da $\varphi(u) \uparrow \infty\ kad\ u \to \infty$. Ovo je posledica Uslova Čistog Profita i činjenice da $\mathrm{S_n} \to -\infty$ skoro sigurno, odatle $\mathscr{sup}_{n\geq 1} S_n < \infty$ skoro sigurno.
Na osnovu (2.0) i teoreme o monotonoj konvergenciji

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{u\uparrow\infty} \varphi(u) &= \varphi(0) + \frac{1}{1+\rho} \int_0^\infty I_{\{y\leq u\}}\, \varphi(u-y) d\mathrm{F}_{\mathrm{X}_1,\mathrm{I}}(y) \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{1+\rho} \int_0^\infty 1 d\mathrm{F}_{\mathrm{X}_1,\mathrm{I}}(y) \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{1+\rho} \end{aligned}$$

Dakle,

$$\varphi(0) = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

□

U ovom dokazu koristićemo nezavisnost veličine $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{X}_1 - c\mathrm{Y}_1$ i niza $(S_n - \mathrm{Z}_1)_{n\geq 2}$ koji ima istu raspodelu kao i niz $(S_n)_{n\geq 1}$. Slučajna veličina Y_1 ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelu.

$$\psi(u) = P\left\{\sup_{n\geq 1} S_n > u\right\} = 1 - \varphi(u)$$

gde (S_n) predstavlja slučajno lutanje generisano nizom (Z_n), koje se može zapisati kao $(S_n = \mathrm{Z}_1 + \cdots + \mathrm{Z}_n)$, $\mathrm{Z}_n = \mathrm{X}_n - c\mathrm{Y}_n$.

Tada,

$$\begin{aligned} \varphi(u) = P\left\{\sup_{n\geq 1} S_n \leq u\right\} &= P\{S_n \leq u, za\ neko\ n \geq 1\} \\ &= P\{\mathrm{Z}_1 \leq u, S_n - \mathrm{Z}_1 \leq u - \mathrm{Z}_1, \forall n \geq 2\} \\ &= E\left[I_{\{Z_1\leq u\}} P(S_n - \mathrm{Z}_1 \leq u - \mathrm{Z}_1, \forall n \geq 2 \mid \mathrm{Z}_1)\right] \end{aligned}$$

$$= \int_{u=0}^{\infty} \int_{x=0}^{u+cy} P(S_n - Z_1 \leq u - (x - cy), \forall n \geq 2) d\left(F_{X_1}(x)\right) d\left(F_{Y_1}(y)\right)$$
$$= \int_{u=0}^{\infty} \int_{x=0}^{u+cy} P(S_n \leq u - (x - cy), \forall n \geq 1)\, d\left(F_{X_1}(x)\right)\, \lambda e^{-\lambda y}\, d(y).$$

Odnosno,

$$\varphi(u) = \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{u+cy} \varphi(u - x + cy) d\left(F_{X_1}(x)\right) \lambda e^{-\lambda y} d(y)\,.$$

Uvešćemo potom smenu promenljive $z = u + cy$,

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c}\, e^{u\frac{\lambda}{c}} \int_{z=u}^{\infty} e^{-\lambda\frac{z}{c}} \int_{x=0}^{z} \varphi(z - x)\, d\left(F_{X_1}(x)\right) d(z). \tag{2.1}$$

S'obzirom da je F_{X_1} apsolutno neprekidna, $g(z) = \int_{x=0}^{z} \varphi(z - x)\, d\left(F_{X_1}(x)\right)$ je neprekidna, pa je

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c}\, e^{u\frac{\lambda}{c}} \int_{z=u}^{\infty} e^{-\lambda\frac{z}{c}} g(z) d(z),$$

čak šta više, φ je diferencijabilna.
Diferenciranjem jednakosti (2.1),

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c} \varphi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \varphi(u - x)\, dF_{X_1}(x).$$

Sada, integracijom, i primenom parcijalne integracije, kao i činjenice da važi $F_{X_1}(0) = 0,$ kada $X_1 > 0$, dobijamo

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \varphi(0) - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \varphi(u)\, du &= -\frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u \varphi(u - x) dF_{X_1}(x) du \\ &= -\frac{\lambda}{c} \int_0^t \left[\varphi(u - x) F_{X_1}(x) \Big|_0^u + \int_0^u \varphi'\,(u - x) dF_{X_1}(x) dx \right] du \\ &= -\frac{\lambda}{c} \int_0^t \left[\varphi(0) F_{X_1}(u) + \int_0^u \varphi'\,(u - x) dF_{X_1}(x) dx \right] du.\end{aligned}$$

Daljim računom,

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\varphi(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(u)\,du - \frac{\lambda}{c}\varphi(0)\int_0^t F_{X_1}(u)du \\ &\quad -\frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)[\varphi(t-x)-\varphi(0)]\,dx \\ &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(t-u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)\,\varphi(t-x)dx \\ &= \frac{\lambda}{c}\int_o^t \overline{F}_{X_1}(x)\varphi(t-x)dx.\end{aligned}$$

Takođe, važi $\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{1+\rho}\,\frac{1}{EX_1}$ (videti ranije), te na osnovu toga, i prethodnog izraza sledi dokaz leme.

Prethodna Lema zajedno sa opisanim napomenama obezbeđuje sledeću jednakost

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_0^u \varphi(u-y)\,dF_{X_1,I}(y), \tag{2.2}$$

gde je

$$F_{X_1,I}(x) = \frac{1}{EX_1}\int_0^x \overline{F}_{X_1}(y)dy, \qquad x > 0,$$

integrisana funkcija repa raspodele veličine odšteta X_1.
Radi jednostavnijeg zapisa uvedimo q, $q = \frac{1}{1+\rho}$, i predstavimo φ kao $\varphi = 1-\psi$. Time jednakost (2.2) postaje:

$$\psi(u) = qF_{X_1,I}(u) + \int_0^u \psi(u-x)d\left(qF_{X_1,I}(x)\right),$$

odnosno,

$$R(t) = K(t) + \int_{[0,t]} R(t-y)dF(y),$$

gde je F funkcija raspodele pozitivne slučajne promenljive, u je funkcija definisana na $[0,\infty)$ ograničena na svakom konačnom intervalu, i R je nepoznata funkcija. Suštinska razlika između prethodne dve jednakosti je u sledećem:

u prvoj jednakosti se integrali u odnosu na meru $qF_{X_1,I}$, koja nije mera verovatnoće jer $\lim_{n\to\infty}\left(qF_{X_1,I}(x)\right) = q < 1$. Stoga se ta, prva jednakost naziva *defektna jednačina obnavljanja (a defective renewal equation)*. Pre primene standardne teorije, potrebno je da se prva jednakost transformiše u standardan oblik, tj. drugu jednačinu, za neke funkcije raspodele F.
Definisaćemo funkciju raspodele $\mathrm{F}^{(\mathrm{A})}$ za $x > 0$.

$$F^{(A)}(x) = \int_0^x e^{Ay}\, d\left(qF_{X_1,I}(y)\right) = q\int_0^x e^{Ay} d\, F_{X_1,I}(y)$$
$$= \frac{q}{EX_1}\int_0^x e^{Ay}\, \overline{F}_{X_1}(y)dy.$$

Kaže se da je raspodela, data sa $F^{(A)}$, *Esscher-ova transformacija eksonencijalno nagnute raspodele za F*. Zaista, radi se o funkciji raspodele jer je $F^{(A)}(x)$ ne-opadajuća i ima graničnu vrednost kada $x \to \infty$, tj važi

$$\lim_{x\to\infty} F^{(A)}(x) = \frac{q}{EX_1}\int_0^\infty e^{Ay}\, \overline{F}_{X_1}(y)dy = 1,$$

što se može pokazati na osnovu definicije Lundbergovog koeficijenta A, i korišćenjem metode parcijalne integracije.
Dalje, množenjem prve jednakosti (za $\psi(u)$) sa obe strane sa e^{Ay} dobijamo

$$e^{Ay}\psi(u) = qe^{Ay}\overline{F}_{X_1,I}(u) + \int_0^u e^{A(u-x)}\, \psi(u-x)e^{Ax} d\left(qF_{X_1,I}(x)\right)$$
$$= qe^{Ay}\overline{F}_{X_1,I}(u) + \int_0^u e^{A(u-x)}\, \psi(u-x)dF^{(A)}(x), \tag{2.3}$$

što odgovara drugoj jednakosti (izrazu za $R(t)$) za $F = F^{(A)}, K(t) = qe^{Ay}\overline{F}_{X_1,I}(t)$,
i nepoznatu funkciju $R(t) = e^{At}\psi(t)$.
Dalje, osobina Riman-integrabilnosti daje asimptotski rešenje za (2.3) kada $u \to \infty$,

$$C = \lim_{u\to\infty} e^{Ay}\psi(u) = \lambda q\int_0^\infty e^{Ay}\overline{F}_{X_1,I}(y)dy,$$

i još bi trebalo proveriti direktno da li je $K(t) = qe^{Ay}\overline{F}_{X_1,I}(t)$ Riman-integrabilna.

Daljim računom se dobija

$$C=\left[\frac{A}{\rho EX_1}\int_0^{\infty}xe^{Ax}\overline{F}_{X_1}(x)dx\right]^{-1}.$$

$\square$

Primer_5: Neka je F funkcija raspodele definisana sa

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{\beta}x}, x\geq 0\\ \quad 0 \qquad , x<0.\end{cases}$$

U pitanju je negativna eksponencijalna funkcija raspodele.
Inverznim Lapolasovim transformacijama dobija se

$$\varphi(u)=1-\frac{\lambda\beta}{c}e^{-\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\lambda}{c}\right)u}$$

odnosno,

$$\psi(u)=\frac{\lambda\beta}{c}e^{-\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\lambda}{c}\right)u},$$

pri čemu od ranije znamo da važi sledeće:

$$\frac{\lambda}{c}=\frac{1}{1+\rho}\frac{1}{\beta}.$$

Uvrštavanjem c, datog ovom relacijom, u prethodni izraz dobijamo

$$\psi(u)=\frac{1}{1+\rho}e^{-\frac{\rho}{1+\rho}\frac{u}{\beta}}.$$

Sada verovatnoća razaranja zavisi samo od β i ρ, a ne i od λ. Drugim rečima, ukoliko posmatramo dve osiguravajuće kompanije pri čemu obe zadovoljavaju uslov $c>\lambda\beta$, redom sa parametrima (λ_1,β) i (λ_2,β), onda te kompanije imaju istu verovatnoću razaranja ukoliko koriste isti zaštitni dodatak ρ.
U ovom slučaju, posmatrano sa stanovišta teorije razaranja, kompanija koja ima najveći parametar λ nije rizičnija od druge pod uslovom da obe kompanije imaju istu očekivanu vrednost veličine odšteta kao i zaštitni dodatak.

PREDSTAVLJANJE VEROVATNOĆE RAZARANJA KAO SLOŽENE GEOMETRIJSKE VEROVATNOĆE

Podrazumevaćemo Kramer-Lundbergov model za koji pretpostavljamo da važi uslov čistog profita. Dalje će od koristi biti jednakost iz Leme_1, kojom se izražava verovatnoća opstanka, tj.

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{1}{(1+\rho)EX_1} \int_0^u \overline{F}_{X_1}(y)\, \varphi(u-y) d(y). \qquad (3.0)$$

U skladu sa uslovima iz pomenute leme, kako bi gore navedena jednakost važila potrebno je da veličine odšteta X_i imaju apsolutno neprekidnu funkciju raspodele, i konačno očekivanje. Takođe, uslov čistog profita mora biti zadovoljen.
Prvo ćemo desnu stranu date jednakosti (3.0) predstaviti kao funkciju raspodele složenog geometrijskog reda. Kako za slučajnu veličinu X sa geometrijskom funkcijom raspodele važi

$$P(X = n) = pq^n\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,, \qquad za\, neko\; p = 1 - q \in (0,1),$$

sledeća direktna suma ima složenu geometrijsku raspodelu, pod uslovom da su X i niz (X_i) međusobno nezavisni.

$$S_V = \sum_{i=1}^{V} X_i$$

Jednostavnim računom dobija se funkcija raspodele, tj.

$$P(S_V \le x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n\, P(X_1 + \dots + X_n \le x)$$

$$= p + p \sum_{n=1}^{\infty} q^n P(X_1 + \dots + X_n \le x).$$

Tvrđenje:*(Predstavljanje verovatnoće opstanka preko složene geometrijske verovatnoće)*

Podrazumevamo Kramer-Lundbergov model za koji je zadovoljen uslov čistog profita i važi $\mathrm{EX}_1 < \infty$. Takođe, podrazumevamo da veličine odšteta X_i imaju apsolutno neprekidnu funkciju raspodele. Neka je $(\mathrm{X}_{\mathrm{I},n})$ niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnihm veličina sa funkcijom raspodele $F_{X_1,I}$. Tada je verovatnoća opstanka data sa :

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\, P\big(\mathrm{X}_{\mathrm{I},1} + \cdots + \mathrm{X}_{\mathrm{I},n} \le u\big)\right], u > 0. \quad (3.1)$$

Svakako, prethodna jednakost, (3.1) zadovoljava jednakost (3.0), što će biti i dokazano na samom početku dokaza. Takođe, ispostavlja se da je korisna, jer se u posebnim slučajevima može proceniti sa desne strane.

Dokaz: Uvedimo sledeće oznake $q = (1+\rho)^{-1}, \quad i \quad p = 1 - q = \rho(1+\rho)^{-1}$.
Tada,

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= p + qp\left[F_{X_1,I}(u) + \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1}\int_0^u P\big(y + \mathrm{X}_{\mathrm{I},2} + \cdots + \mathrm{X}_{\mathrm{I},n} \le u\big)dF_{X_1,I}(y)\right] \\ &= p + q\int_0^u p\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}\, P\big(\mathrm{X}_{\mathrm{I},1} + \cdots + \mathrm{X}_{\mathrm{I},n} \le u - y\big)dF_{X_1,I}(y)\right] \\ &= p + q\int_0^u \varphi(u-y)dF_{X_1,I}(y).\end{aligned}$$

Dakle, uz prethodno uvedene oznake, pokazuje se da je zadovoljena jednakost (3.0). Ostaje još pokazati da je (3.1) jedino rešenje jednakosti (3.0) u klasi funkcija *f,* koje su neprekidne sa desne strane, ne-rastuće, ograničene, i takve da $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty), \; f(x) = 0 \; za \; x < 0.$

□

VEROVATNOĆA RAZARANJA U SLUČAJU VELIKIH ODŠTETA

Teorema_3: *(Verovatnoća razaranja u slučaju raspodela sa teškim repovima)*
Podrazumevamo Kramer-Lundbergov model koji zadovoljava uslov čistog profita, i kod koga je $EX_1 < \infty$. Takođe, pretpostavimo da postoji gustina raspodele veličine odšteta X_i i da je integrisana funkcija raspodele veličina odšteta, $F_{X_1,I}$, subeksponencijalna. Tada za verovatnoću razaranja $\psi(u)$ važi sledeća asimptotika:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F}_{X_1,I}(u)} = \rho^{-1}.$$

U svom radu, Embrechts i Veraverbeke su pokazali da važi i suprotan smer, odnosno da je prethodna jednakost ekvivalentna sa oba od uslova da $F_{X_1,I}(u)$ i $\psi(u)$ pripadaju familiji subeksponencijalnih raspodela.

Dokaz: Ovde će biti predstavljena skica dokaza, dok se ceo dokaz može naći u pomenutom radu (Embrechts i Vereverbeke).
Ideja je predstaviti verovatnoću opstanka kao složenu geometrijsku raspodelu, što je pokazano u prethodnom poglavlju. Prethodni izraz se moze predstaviti preko verovatnoće razaranja na sledeći način:

$$\frac{\psi(u)}{\overline{F}_{X_1,I}(u)} = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\ \frac{P\left(X_{I,1}+\cdots+X_{I,n}>u\right)}{\overline{F}_{X_1,I}(u)}.$$

Dalje, zbog subeksponencijalnosti funkcije $F_{X_1,I}$,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P\left(X_{I,1}+\cdots+X_{I,n}>u\right)}{\overline{F}_{X_1,I}(u)} = n,\ \ n \geq 1.$$

Zamenom mesta limesa kad $u \to \infty$ i beskonačnog reda, dobija se tražena jednakost, tj.

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F}_{X_1,I}(u)} = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\, n = \rho^{-1}\,.$$

Dakle, prethodna jednakost pokazuje da je verovatnoća razaranja u suštini istog reda kao i $\overline{F}_{X_1,I}(u)$ koja je ne-zanemarljiva čak i u slučaju kada je vrednost početnog kapitala velika.

Primer_6 :Verovatnoća razaranja u slučaju kada veličine odšteta imaju Pareto raspodelu.

S' obzirom da je očekivanje slučajne veličine sa Pareto raspodelom konačno za $\alpha > 1$, posmatraćemo slučaj Pareto raspodele sa parametrom $\alpha = 2$ i $\alpha = 3$.
Funkcija raspodele veličine odšteta u ovom slučaju je data sa:

$$F_{X_1}(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x_0 + x}\right)^2,$$

a integrisana funkcija raspodele sa:

$$F_{X_1,I}(u) = \frac{1}{EX_1}\int_0^u \left(\frac{x_0}{x_0 + x}\right)^2 dx = \frac{{x_0}^2}{2x_0}\int_{x_0}^{x_0+u} t^{-2}\, dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{u + x_0} \ ,$$

gde je $EX_1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}x_0$. Dalje, važi

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{\overline{F}_{X_1,I}(u)} = \lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{1 - \frac{u}{2(u + x_0)}} = \rho^{-1}$$

odnosno

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{u}{2(u + x_0)}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x_0}{u + x_0}\right) = \frac{1}{2\rho}\left(1 + \frac{x_0}{u + x_0}\right).$$

Slično, kada je raspodela veličina odšteta Pareto raspodela sa parametrom α =3, integrisana funkcija raspodele je:

$$F_{X_1,I}(u) = \frac{2}{3x_0}{x_0}^3\int_{x_0}^{x_0+u} t^{-3}dt = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{x_0}{u + x_0}\right)^2\right),$$

a verovatnoća razaranja:

$$\psi(u) \sim \frac{1}{3\rho}\left(2 + \left(\frac{x_0}{u + x_0}\right)^2\right).$$

□

Primer_7: Posmatrajmo slučaj osiguravajuće kompanije koja ima očekivani iznos odšteta od dve milijarde, očekivani broj odšteta od 50 hiljada, na godišnjem nivou. Početni kapital ove kompanje iznosi 8 miliona.

Koristeći poznate oznake, za opisanu kompaniju važi

$$\lambda = 50\,000, \qquad \lambda\beta = 2\,000\,000\,000, \qquad u = 8\,000\,000.$$

te je

$$\beta = 40\,000.$$

Dakle, verovatnoća razaranja je data sa:

$$\psi(8\,000\,000) = \frac{1}{1+\rho} e^{-200\frac{\rho}{1+\rho}}.$$

Posmatrajmo vrednosti ove verovatnoće razaranja kao funkcije zaštitnog dodatka, koje su date u sledećoj tabeli.

ZAŠTITNI DODATAK	VEROVATNOĆA RAZARANJA
0.01	0.1366752
0.03	0.0028661
0.05	0.0000696
0.07	0.0000019
0.1	0.000000011544

Sada pretpostavimo da je zaštitni dodatak fiksan i iznosi 7%. Želimo da ispitamo uticaj na verovatnoću razaranja ukoliko:

1) se menja vednost početnog kapitala
2) početni kapital iznosi 8 000 000, a očekivani iznos odšteta 25 000 i 100 000.
3) očekivani godišnji broj odšteta uzima redom vrednosti od 70 000, 20 000, dok je vrednost početnog kapitala i dalje 8 000 000.

1) Neka početni kapital uzima sledeće vrednosti redom
4 000 000, 2 000 000, 1 000 000, 500 000.

Važi $\psi(u) = \frac{1}{1.07} e^{-\frac{0.07}{1.07}\frac{u}{40\,000}}$.

Rezultati su prikazani u tabeli:

POČETNI KAPITAL	VEROVATNOĆA RAZARANJA
4 000 000	0.0073472
2 000 000	0.0354835
1 000 000	0.1821047
500 000	0.4125424

2) Ovde imamo sledeću situaciju

$$\psi(8\,000\,000) = \frac{1}{1.07} e^{-\frac{0.07}{1.07}\frac{8000000}{\beta}}.$$

OČ.VR.ODŠTETA	VEROVATNOĆA RAZARANJA
25 000	0.00000000075655
150 000	0.0285312

3) U slučaju kada očekivani godišnji broj odšteta uzima redom vrednosti od 70 000 i 20 000, dok je vrednost početnog kapitala 8 000 000, očekivani iznos odšteta na godišnjem nivou iznosi 2.8 milijardi, odnosno 800 miliona. Međutim, verovatnoća razaranja ostaje ista i to 0.0000019.

LITERATURA:

Thomas Mikosch ***Non-Life Insurance Mathematics***
David C. M. Dickson ***Insurance Risk and Ruin***
P.Embrechts, C.Klüppelberg, T.Mikosch ***Modelling extremal events for insurance and finance***
Jacques Janssen, Raimondo Manca ***Semi-Markov risk models for finance, insurance and reliability***