Binomni model kretanja cena akcija i Black-Scholes formula

Mladen Stamenković

Beograd, 2010

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Ideja ovog master rada je da predstavi jedan od najosnovnijih teorijskih modela kretanja cena akcija, binomni model i da se fokusira na njegovu primenu u odredjivanju cena opcija. Nakon toga cilj je proširiti celu priču i na neprekidni "pandan" binomnog modela - Black-Scholes formulu što je jedan od najznačajnijih rezultata u finansijskoj matematici. Rad takodje sadrži i program koji računa cene opcija i akcija za binomni model sa proizvoljnim brojem koraka.
Srpska berza je prilično nerazvijena, i svedena je na elementarnu trgovinu akcijama i to u izuzetno malom obimu. Takva situacija svakako onemogućava pojavljivanje finansijskih derivata poput opcija. To je možda i osnovni razlog zbog kojeg na srpskom jeziku ne postoji gotovo ni jedna ozbiljnija knjiga koja se bavi ovom tematikom. Zbog toga za većinu pojmova iz ovog rada ne postoje usvojeni srpski prevodi koji se koriste, tako da će često postojati potreba za slobodnim prevodom odredjenog pojma, dok će njen originalni naziv na engleskom uvek biti naznačen. Takodje, odredjene reči, poput call opcije, biće ostavljene u svom, originalnom, engleskom zapisu jer ne postoji zadovoljavajući ekvivalent u našem jeziku. Kada je reč o imenima ona su uglavnom zapisivana u duhu srpskog jezika, osim naziva "Black-Scholes formula" koja je ostavljena u svom originalnom zapisu.

Poglavlje 2

Opcije

U poslednjih 35 godina u svetu je izuzetno popularna trgovina finansijskim derivatima. *Finansijski derivati* su vrednosni papiri koji su izvedeni iz nekih drugih vrednosnih papira[1], odnosno, čija je cena izvedena iz nekih drugih vrednosnih papira. Najpoznatiji oblik finansijskih derivata su *opcije*.

Definicija 2.1. *Opcija* je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, da kupi ili proda neki vrednosni papir pod odredjenim uslovima.

Ideja trgovinom opcijama datira još od doba Feničana. Poznato je da su oni, kao i kasnije Rimljani, koristili slične ugovore pri trgovini. Tales se proslavio kada je jedne godine predvideo dobar rod maslina. Pre nego što je krenula sezona on je napravio ugovor koji mu je omogućio da po niskoj ceni iznajmi veliki broj presa za masline u toku sezone i, kada se obistinila njegova pretpostavka o izuzetnom rodu, on je iste te prese iznajmljivao po daleko većoj ceni. Početkom XVII veka u Holadiji se javlja prodaja opcija na lale. Prodavci lala su na taj način želeli da obezbede sebi razumne cene koje će dobiti od proizvodjača, dok su proizvodjači želeli da se osiguraju da će prodati ono što su uzgajali.
Opcije su se u Americi pojavile početkom XIX veka, otprilike kad i akcije. Ipak, svaki ugovor koji je sklapan bio je jedinstven, i do njega se dolazilo nakon pregovora dveju strana. Nepraktičnost u pravljenju ovakvih ugovora rezultirali su malom tražnjom za njima. Krajem šezdesetih godina XX veka počela su razmišljanja na temu kako unaprediti i poboljšati trgovinu opcijama. Uvedena su stroga pravila i standardi u pravljenju ugovora tako da više nije bilo potrebe da dve strane pregovaraju pri svakom sklapanju ugovora. Takodje, formirana je regulatorna komisija koja se brinula o sprovodjenju dogovorenih pravila. Nakon četiri godina kreiranja zakonskih regulativa Čikaška

[1]na engleskom underlying asset, najčešce akcija.

berza, The Chicago Board Trade (CBOT) otvorila je Čikašku berzu za trgovinu opcija – Chicago Board Options Exchange (CBOE). Prva trgovina opcijama odigrala se 26. aprila 1973. godine. Tog prvog dana trgovine ostvareno je 911 transakcija. Već naredne godine prosečan dnevni obim iznosio je 20000, što je negde oko 5 miliona ugovora godišnje. U zadnjih deset godina broj ugovora koji se sklopi u toku jedne godine kreće se oko 800 miliona.

2.1 Karakteristike i podele

Svaka opcija ima *ugovorenu cenu* vrednosnog papira za koji je vezana (strike price), kao i *ugovoreno vreme do isteka opcije* (time to maturity, koristi se i termin *ugovoreno vreme*). Ugovorenu cenu ćemo obeležavati sa K, vreme do isteka opcije sa T. Smatraćemo da je početna cena vrednosnog papira u trenutku sklapanja ugovora S_0, dok je u trenutku t, $0 < t \leq T$ cena S_t. Osnovna karakteristika svake opcije je njena cena (ili premija). Oznaka za cenu opcije zavisiće od tipa opcije. Detaljnije o ovome i osobinama opcija videti u [1], [2], [4].
U zavisnosti od toga da li govorimo o mogućnosti da se kupi ili proda vrednosni papir, imamo dve vrste opcija:

- *call opcija* - pravo ali ne i obaveza kupovine vrednosnog papira za unapred dogovorenu cenu K
- *put opcija* - pravo ali ne i obaveza prodaje vrednosnog papira za unapred dogovorenu cenu K

Opcija se može realizovati u trenutku T, ali to nije obavezno, tako da u pogledu vremena izvršenja imamo tri različite vrste opcija:

- *evropske* - mogu da se aktiviraju samo u ugovoreno vreme T
- *američke* [2] - mogu da se aktiviraju u bilo kom trenutku od sklapanja ugovora pa do ugovorenog vremena

Kažemo da je, na primer, evropska call opcija pravo ali ne i obaveza kupovine vrednosnog papira po dogovorenoj ceni K u dogovorenom trenutku vremena T, dok je američka call opcija pravo ali ne i obaveza kupovine vrednosnog papira po ceni K u bilo kom trenutku t, $0 \leq t \leq T$. Cenu američke call opcije obeležavacemo sa C, cenu evropske call opcije sa c, američke put opcije sa P

[2] Nazivi američka i evropska opcija nastali su jer se u Evropi najčešće koriste evropske, kao i u Americi američke, ali su ti nazivi postali ustaljeni bez obzira gde je opcija izdata.

i evropske put opcije sa p.

Kao što smo napomenuli, vrednosni papir na koji se odnosi opcija je najčešće akcija. Ipak, vrednosni papir može biti bilo šta što se može prodati na tržištu, tako da se pored akcija, opcije mogu vezivati za forward ugovore, fjučurse, indekse berzi, kao i za trgovinu stranim valutama, a moguće je vezati ih čak i za nekretnine.[3] Specijalno, opcije koje odstupaju od klasičnih na bilo koji način nazivaju se *egzotične opcije*. Svaka opcija koja nije egzotična takodje se zove i *vanila opcija*.

Pri prodaji svake opcije imamo dve strane. Osoba koja je raspisuje tj. prodaje i kupac. Za osobu koja je raspisala opciju kažemo da je u *kratkoj poziciji (short position)*, dok je osoba koja je kupila obveznicu u *dugoj poziciji (long position)*. Rizici pri sklapanju ugovora su različiti u zavisnosti od pozicije. Jedini rizik kupca opcije je cena koju je platio za tu opciju, dok, sa druge strane, osoba koja je raspisala opciju može pretrpeti značajne gubitke, što i možemo pokazati na sledećem primeru.

Primer 2.1. Pretpostavimo da je raspisana evropska call opcija za kupovinu 1 akcije kompanije City Group. Trenutna cena akcije je 4\$. Opcija ima sledeće karakteristike: ugovorena cena $K = 2,5\$$, opcija je raspisana na šest meseci. Cena opcije iznosi $c = 1,9\$$. Pri sklapanju ugovora o kupovini, rizik kupca je 1,9\$ koje je on uložio u kupovinu opcije. Ako pri isteku tih šest meseci on ne realizuje tu opciju to će biti njegov jedini gubitak. Sa druge strane, osoba koja je raspisala opciju zaradila je pri njenoj prodaji 1,9\$. Njegov rizik je u tome što cena opcije može neograničeno da raste. Ako pretpostavimo da je cena akcije na isteku šest meseci skočila na 10\$ tada će kupac realizovati opciju i kupiti akciju za 2.5\$ tako da je gubitak osobe koja je raspisala opciju $10 - 2,5 - 1,9 = 5,6\$$.

Za opcije koje su isplative, odnosno koje su vredne da se aktiviraju kažemo da su *u novcu (in the money)*, neisplative opcije su *van novca (out of the money)*. Ako je opcija na granici za nju kažemo da je *na novcu (at the money)*

2.2 Osobine

Šest faktora utiču na cenu opcija, neke od njih već smo pomenuli:

[3]Više o raznim vrstama derivata može se naći u [1], [2].

(1) Početna cena akcije[4], S_0

(2) Ugovorena cena, K

(3) Vreme do isteka opcije, T

(4) Volatilnost akcije, σ

(5) Kamatna stopa, r

(6) Očekivane dividende tokom trajanja opcije

Trenutna i ugovorena cena akcije

Da bi call opcija bila aktivirana neophodno je da važi nejednakost $S_T > K$. U suprotnom je besmisleno realizovati tu opciju i kupovati akciju za cenu K kada je na tržištu možemo kupiti za S_T. Ako važi $S_T > K$ tada je naša dobit od opcije jednaka $S_T - K$. Ako spojimo ova dva uslova, imamo da je dobit od call opcije jednaka

$$\max\{S_T - K, 0\}. \tag{2.1}$$

Sada je jasno da smo u novcu ako je $S_T > K$, van novca ako je $S_T < K$, a na novcu za $S_T = K$. Takodje, vidimo da vrednost call opcije raste sa porastom cene akcije.
Što se tiče put opcije, naše ponašanje će biti obrnuto. Put opcija je bezvredna ako je $S_T > K$ jer nema smisla prodavati akciju po ceni K ako to možemo uraditi na tržištu za S_T. Kada se opcija aktivira njena dobit će iznositi $K - S_T$. Ukupno, imamo da je dobit od put opcije:

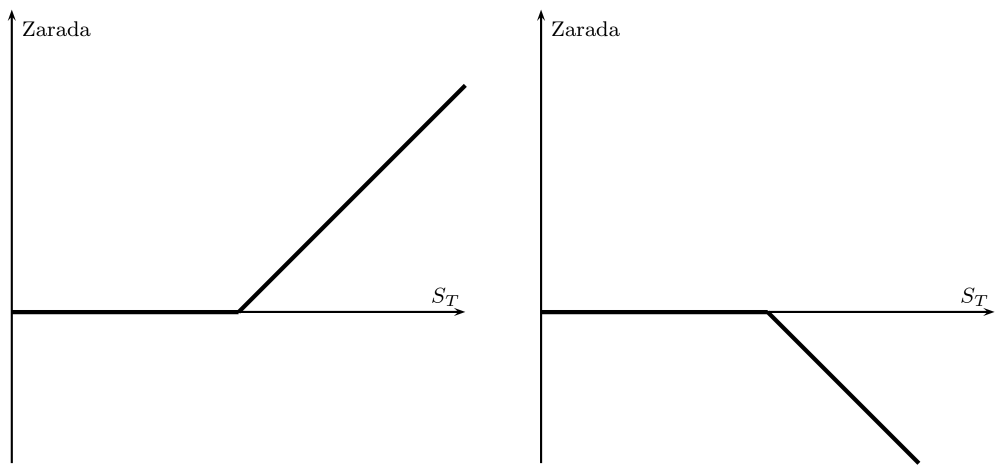
$$\max\{K - S_T, 0\}. \tag{2.2}$$

U ovom slučaju, u novcu smo za $S_T < K$, van novca za $S_T > K$ i na novcu za $S_T = K$. Kada je reč o put opcijama, cena opcije gubi na vrednosti kada cena akcije raste. Na slikama 2.1 i 2.2 možemo videti vrednosti evropskih call i put opcija u zavisnosti od cene akcije.

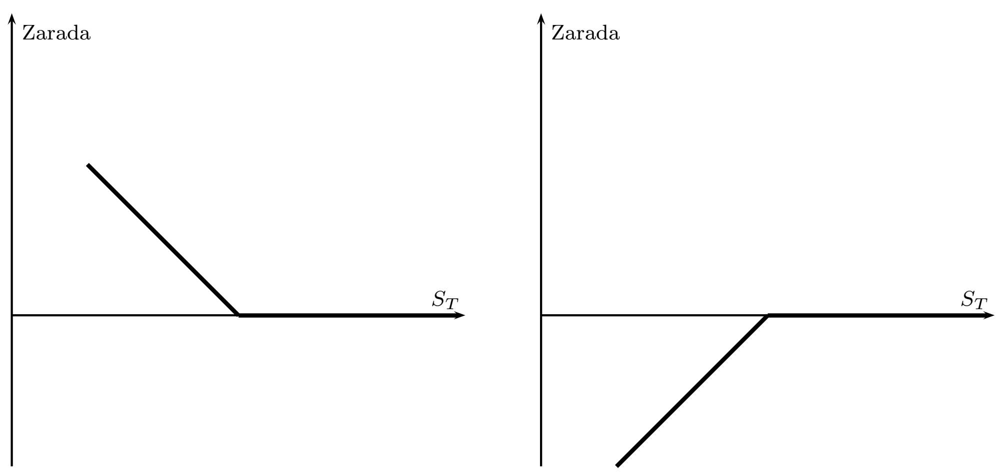
Vreme do isteka opcije

Kada je reč o uticaju vremena do isteka opcije na njenu cenu razlikovaćemo da li je reč o američkim ili evropskim opcijama. Kod američkih, i put i call

[4]Od sada pa na dalje pretpostavljamo da je akcija taj vrednosni papir na koji se odnosi opcija.



Slika 2.1: Duga i kratka pozicija za evropsku call opciju



Slika 2.2: Duga i kratka pozicija za evropsku put opciju

opcija, cena raste zajedno sa porastom vremena. Intuitivno je to jasno, vlasnik dugoročnije opcije ima sve mogućnosti kao i vlasnik opcije koja će ranije isteći, i uz to, dodatno vreme u kojem je može aktivirati.
Sa druge strane, uobičajeno je da cena evropskih put i call opcija raste sa porastom vremena do isteka opcije. Ipak, to nije uvek slučaj. Pretpostavimo da posedujemo dve evropske call opcije, jednoj je vreme do isteka jedan mesec, drugo dva meseca. Pretpostavimo, takodje, da se za šest nedelja očekuje velika isplata dividende. Ta isplata će prouzrokovati pad cene akcija što dovodi do pada cene druge opcije i na kraju rezultira većom cenom kratkoročnije opcije.

Volatilnost akcije

Volatilnost je pojam o kojem će u nastavku biti više reči. Uopšteno govoreći volatilnost je mera neodredjenosti o budućem kretanju akcija. Porastom volatilnosti raste šansa da će cena akcija značajno izgubiti ili dobiti na svojoj vrednosti. Vlasnik call opcije je na dobitku ako akcija poraste, dok mu je rizik u slučaju pada cene akcija, kao što smo već rekli, ograničen. Slično, vlasnik put opcije zaradjuje pri velikom padu cene akcija i ima ograničen rizik u slučaju njihovog rasta. Zbog toga, vrednosti put i call opcija rastu sa porastom volatilnosti. Na tržištu se volatilnost uglavnom kreće negde izmedju 20 i 50 procenata na godišnjem nivou.

Kamatna stopa

Uticaj kamatnih stopa na cenu opcija nije uvek isti, kao što je bio slučaj sa do sada pomenutim faktorima. Kada kamatne stope na tržištu rastu, očekivani prinos investitora od akcija raste. Takodje, sadašnja vrednost bilo kog budućeg toka novca koji će vlasnik opcije dobiti opada. Kombinovani uticaj ova dva efekta smanjuje vrednost put opcije i povećava vrednost call opcije.
Ovde je bitno naglasiti da mi pretpostavljamo rast kamatnih stopa, dok svi ostali parametri ostaju nepromenjeni. U realnosti, tako nešto se nikad neće dogoditi. Pri rastu kamatnih stopa, cene akcija padaju, kao i obrnuto. Povećanje kamatnih stopa, praćeno padom cena akcija može prouzrokovati pad cena call opcija i rast put opcija, i obrnuto, pad kamatnih stopa zajedno sa rastom akcija, može dovesti do rasta cena call opcija i pada cena put opcija.

Dividende

Dan nakon isplaćenih dividendi (ex-dividend date) cene akcija padaju. Prema tome, cene call opcija odmah gube na svojoj vrednosti, dok cene put opcija rastu.

U sledećoj tabeli prikazaćemo šta se dešava sa cenom akcije pri rastu odredjenog faktora. Ovde "+" označava rast cene opcije, "−" njen pad, dok "?" označava da ne znamo šta se dešava u tom slučaju.

Faktor	Evropski call	Evropski put	Američki call	Američki put
Početna cena akcije	+	−	+	−
Ugovorena cena	−	+	−	+
Vreme do isteka opcije	?	?	+	+
Volatilnost	+	+	+	+
Kamatna stopa	+	−	+	−
Dividende	−	+	−	+

Napomena

Važno je naglasiti da smo do sada koristili pretpostavke koje izgledaju kao nerealne i neosnovane:

- Pretpostavljali smo da ne postoje nikakve naplate prilikom transakcija akcija i opcija.

- Postojala je jedinstvena kamatna stopa, bez obzira da li smo pozajmili ili uložili novac.

Ipak, ovakve pretpostavke imaju smisla kada je reč o velikim bankama i investicionim fondovima gde zaista ne postoji provizija pri kupovini ili prodaji, i kamatna stopa se može računati kao jedinstvena. Iz tog razloga ćemo ove pretpostavke zadržati i ubuduće.

2.3 Put-call paritet

Jedna od najvažnijih osobina za evropske opcije je takozavni put-call paritet koji predstavlja vezu izmedju cena put i call opcija koje imaju istu ugovorenu cenu, vreme do isteka i odnose se na istu akciju. Imamo dva tvrdjenja koja se razlikuju po tome da li se radi o opcijama sa dividendama ili bez njih.

Tvrdjenje 2.1. *Za evropske put i call opcije bez dividendi, koje imaju istu ugovorenu cenu, odnose se na istu opciju, imaju istu kamatnu stopu i vreme do isteka opcije, važi put-call paritet:*

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0. \tag{2.3}$$

Dokaz I. Razmotrićemo 2 portfolia, portfolio A i B:
portfolio A: 1 call opcija i keš u iznosu od Ke^{-rT};
portfolio B: 1 put opcija i 1 akcija.
Zanimaju nas vrednosti ovih opcija u trenutku dospeća. Vrednost portfolia će zavisiti od toga da li je $S_T < K$ ili $S_T > K$.
Za $S_T < K$:
portfolio A: call opcija je bezvredna, dok je vrednost keša narasla[5] do K;
portfolio B: aktivira se opcija, tako da prodajemo akciju koju posedujemo i za to dobijamo K dolara.
Ako pretpostavimo da je $S_T > K$, tada imamo:
portfolio A: aktiviramo call opciju i kupujemo po ceni K akciju koja vredi S_T. Zarada od call opcije je $S_T - K$, dok je u isto vreme keš narastao do K. Ukupna dobit portfolia je S_T;
portfolio B: put opcija je bezvredna, ali nam ostaje akcija vrednosti S_T.
Ako spojimo ova dva slučaja dobijamo da je u trenutku dospeća vrednost oba portfolia jednaka $\max\{S_T, K\}$. Kako je njihova vrednost jednaka u trenutku dospeća, sledi da oni imaju istu vrednost i u početnom trenutku, dakle, važi put-call paritet. □

Navešćemo i drugi dokaz gde ćemo iskoristiti jednu važnu pretpostavku za rad sa opcijama,koja se uvek pretpostavlja u finansijskoj matematici, a to je da ne postoji mogućnost arbitraže. *Arbitraža* je mogućnost odredjenog lica da ostvari sigurnu zaradu bez ikakvog rizika.

Dokaz II. U ovom dokazu pokazaćemo da, ako ne postoji put-call paritet, postoji mogućnost arbitraže. Pretpostavimo da ne važi put-call paritet, i krenimo prvo od pretpostavke da je $S_0 + p - c < Ke^{-rT}$. Pretpostavimo da smo postupili na sledeći način: kupujemo jednu akciju, jednu put opciju i prodajemo jednu call opciju. Trošak koji smo napravili iznosi $S_0 + p - c$. To su pare koje nemamo na samom početku, tako da ćemo ih pozajmiti iz banke po kamatnoj stopi r. U trenutku dospeća T, moguće su dve varijante:

1. $S_T \leq K$
   Tada je call opcija je bezvredna, dok se put opcija aktivira i akciju prodajemo po ceni K.

[5]Koristimo neprekidno kamaćenje: jedna novčana jedinica za vreme T pri kamatnoj stopi r, naraste do e^{rT} (detaljnije u [2], [4]).

2. $S_T > K$
   Ovde je put opcija bezvredna, dok će call opcija da se aktivira i moraćemo da prodamo akciju po ceni K.

Kao što vidimo u oba slučaja dobijamo svotu K. Kako smo pretpostavili da je $K > (S_0 + p - c)e^{rT}$ sada smo u mogućnosti da vratimo dug banci i napravimo siguran profit bez rizika, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je nemoguća arbitraža.
Neka je sada $S_0 + p - c > Ke^{-rT}$. U tom slučaju postupamo na sledeći način: prodajemo jednu akciju, prodajemo jednu put opciju i kupujemo jednu call opciju. Početna dobit našeg portfolia je $S_0 + p - c$. Opet imamo dva slučaja:

1. $S_T < K$
   Put opcija se aktivira, i prodajemo akciju po ceni K, dok je call opcija bezvredna.

2. $S_T \geq K$
   Call opcija se aktivira i kupujemo akciju po ceni K, a put opcija je bezvredna.

U trenutku T dobit portfolia je $(S_0 + p - c)e^{rT}$, i po pretpostavci je $(S_0 + p - c)e^{rT} > K$ pa opet dolazi do mogućnosti arbitraže. □

Tvrdjenje 2.2. *Za evropske put i call opcije sa dividendom koje imaju istu ugovorenu cenu, odnose se na istu opciju, imaju istu kamatnu stopu i vreme do isteka opcije važi put-call paritet:*

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0.$$

Dokaz. Dokaz je identičan prethodnom, jedina razlika je u tome da, kada bi pravili naša dva portfolia, portfolio A bi sadržao keš u iznosu od $D + Ke^{-rT}$. □

2.4 Gornje i donje granice za cene opcija

Za evropske opcije bez dividendi važe sledeće nejednakosti:

- $c \leq S_0$
- $p \leq K$
- $c \geq S_0 - Ke^{-rT}$
- $p \geq Ke^{-rT} - S_0$.

Slično, za opcije sa dividendama je:

- $c \geq S_0 - D - Ke^{-rT}$
- $p \geq D + Ke^{-rT} - S_0$.

Put-call paritet ne važi za američke opcije. Ipak, i njihovu vrednost možemo proceniti pomoću nejednakosti koje važe za cene opcija. Kada je reč o američkim opcijama imamo sledeće nejednakosti:

- $C \leq S_0$
- $P \leq K$
- $C \geq S_0 - Ke^{-rT}$
- $P \geq K - S_0$
- $S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$
- $S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$.

Poglavlje 3

Braunovo kretanje

Definicija 3.1. Klasa $\mathcal{A}$ podskupova prostora ishoda Ω koja ima sledeća svojstva

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(A2) ako $A \in \mathcal{A}$, onda $A^c \in \mathcal{A}$,

(A3) ako $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, onda $A \cup B \in \mathcal{A}$,

naziva se *algebra* dogadjaja.

Definicija 3.2. Klasa $\mathcal{A}$ podskupova prostora ishoda Ω koja ima sledeća svojstva

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(A2) ako $A \in \mathcal{A}$, onda $A^c \in \mathcal{A}$,

(A4) ako $A_1 \in \mathcal{A}$, $A_2 \in \mathcal{A}$, $A_3 \in \mathcal{A}$..., onda $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$,

naziva se *σ-algebra* dogadjaja.

Tvrdjenje 3.1. *Presek $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ σ-algebri $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$,.. takodje je σ-algebra.*

Definicija 3.3. Neka je data kolekcija $\mathcal{K}$ podskupova prostora ishoda Ω koja, pri tom, nije σ-algebra. Presek svih σ-algebri koje sadrže kolekciju $\mathcal{K}$ naziva se *minimalna σ-algebra generisana kolekcijom* $\mathcal{K}$ i obeležavamo je sa $\sigma[K]$.

Neka je prostor ishoda jednak skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ i neka je kolekcija $\mathcal{K}$ data sa $\mathcal{K} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$. Minimalnu σ-algebru koja sadrži kolekciju $\mathcal{K}$ označavaćemo sa $\mathcal{B}_0$. Ovakva minimalna σ-algebra zove se *Borelova σ-algebra* podskupova realne prave, i označavamo je sa $\mathcal{B}$ ili $\mathcal{B}^1$. Njeni elementi zovu se *Borelovi skupovi* na realnoj pravoj. Primeri ovakvih skupova su $\{a\}$, (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$. [1]

Definicija 3.4. Neka je Ω prostor ishoda slučajnog eksperimenta, $\mathcal{A}$ σ-algebra dogadjaja. Uredjeni par $(\Omega, \mathcal{A})$ zove se *merljiv prostor*.

Definicija 3.5. Funkcija $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ je *verovatnoća* (ili *verovatnosna mera*) na merljivom prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ ako ima sledeća svojstva:

(P1) $P(\Omega) = 1$;

(P2) $P(A) \geq 0$ za svaki dogadjaj $A \in \mathcal{A}$;

(P3) Ako su A_1, A_2, A_3,... dogadjaji iz $\mathcal{A}$, takvi da za različite i i j važi $A_i \cap A_j = \emptyset$, onda važi jednakost

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{n} P(A_n).$$

Definicija 3.6. Uredjena trojka $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gde je
Ω – prostor ishoda slučajnog eksperimenta,
$\mathcal{A}$ – σ-algebra podskupova skupa Ω,
P – verovatnoća definisana na σ-algebri $\mathcal{A}$,
naziva se *prostor verovatnoća* ili *verovatnosni model* razmatranog slučajnog eksperimenta. Elementi σ-algebre $\mathcal{A}$ zovu se *slučajni dogadjaji*.

Definicija 3.7. Neka je dat prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, i neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ par čije su komponente skup realnih brojeva i Borelova σ-algebra podskupova skupa realnih brojeva. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ zove se *slučajna veličina*, ako je ona merljiva u odnosu na σ-algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, tj. ako za svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}$ važi

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}. \tag{3.1}$$

Teorema 3.1. *Neka je X slučajna veličina definisana na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Tada je familija*

$$\sigma[X] = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

[1] Konstrukcija Borelovih σ-algebri preuzeta je iz [6], gde je i opisano kako dokazati da ovi skupovi zaista jesu Borelovi skupovi. Za kompletan dokaz i više detalja pogledati još i [10], [11].

σ-algebra. Ta σ-algebra je podalgebra σ-algebre $\mathcal{A}$ i zove se σ-algebra generisana slučajnom veličinom X.

Dokaz. [6] Koristeći definiciju slučajne veličine i jednakost (3.1) dobijamo:
(A1) $\Omega = X^{-1}(\mathbb{R}) \in \sigma(X)$.
(A2) Neka $A \in \sigma(X)$. Tada postoji skup $B \in \mathcal{B}$ takav da je $A = X^{-1}(B)$. Dalje dobijamo $B^c \in \mathcal{B}$ i $A^c = (X^{-1}(B))^c = X^{-1}(B^c) \in \sigma(X)$.
(A4) Neka je (A_n) niz dogadjaja iz familije $\sigma(X)$. Tada postoji niz Borelovih skupova (B_n), takav da za svaki indeks n važi $A_n = X^{-1}(B_n)$. Koristeći činjenicu da važi $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$, dobijamo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n) = X^{-1}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) \in \sigma\,[X]\,.$$

$\square$

Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prostor verovatnoća. $\mathcal{F}$ je σ-algebra tako da je $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ i neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna veličina.

Definicija 3.8. *Uslovno matematičko očekivanje nenegativne slučajne veličine X u odnosu na σ-algebru* $\mathcal{F}$ je nenegativna proširena (definisana na $\{\mathbb{R} \cup \infty\}$) slučajna veličina $E(X|\mathcal{F})$ takva da je:

1. $E(X|\mathcal{F})$ je $\mathcal{F}$-merljiva slučajna veličina;

2. za svaki dogadjaj $A \in \mathcal{F}$ važi:

$$\int_A X \,\mathrm{d}P = \int_A E(X|\mathcal{F}) \,\mathrm{d}P.$$

Definicija 3.9. Uslovno matematičko očekivanje $E(X|\mathcal{F})$ proizvolne slučajne veličine X u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}$ pd uslovom da je $E(X^+|\mathcal{F}) < \infty$ sa verovatnoćom 1 ili $E(X^-|\mathcal{F}) < \infty$ sa verovatnoćom 1, definiše se na sledeći način:

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X^+|\mathcal{F}) - E(X^-|\mathcal{F}) < \infty,$$

pri čemu na skupu verovatnoće 0 elementarnih dogadjaja za koje važi

$$E(X^+|\mathcal{F}) = E(X^-|\mathcal{F}) = \infty$$

razliku $E(X^+|\mathcal{F}) - E(X^-|\mathcal{F})$ definišemo na proizvoljan način, na primer da je jednaka nuli.

Definicija 3.10. Neka je $B \in \mathcal{F}$. Uslovno matematičko očekivanje $E(I_B|\mathcal{F})$ zove se *uslovna verovatnoća dogadjaja B u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}$* i označava se sa $P(B|\mathcal{F})$, gde je $P(B|\mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-merljiva i za svako $A \in \mathcal{F}$ važi $P(AB) = \int_A P(B|\mathcal{F})\,\mathrm{d}P$.

Definicija 3.11. Neka su X, Y slučajne veličine, $\mathcal{F}_Y$ σ-algebra generisana slučajnom veličinom Y. Ako je $E(X|\mathcal{F}_Y)$ definisano, onda se to uslovno očekivanje označava sa $E(X|Y)$ i zove se uslovno matematičko očekivanje slučajne veličine X u odnosu na slučajnu veličinu Y.

Definicije vezane za slučajno matematičko očekivanje kao i dokaz naredne teoreme mogu se naći u [6].

Teorema 3.2 (Svojstva uslovnog matematičkog očekivanja)**.** *Pretpostavimo da su na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definisane slučajne promenljive X i Y, i neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra tako da je $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Tada važi:*

1. *Ako je $c = const.$ i $X = c$ s.s. onda važi*
$$E(X|\mathcal{F}) = c.$$

2. *Ako je $X \leq Y$ s.s. onda je $E(X|\mathcal{F}) \leq E(Y|\mathcal{F})$ s.s.*

3. $|E(X|\mathcal{F})| \leq E(|X|\,|\mathcal{F})$.

4. *Ako je $\mathcal{F}_* = \{\emptyset, \Omega\}$, onda je $E(X|\mathcal{F}_*) = E(X)$ s.s.*

5. $E(X|\mathcal{A}) = X$ *s.s.*

6. *Neka su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ σ-algebre koje su podalgebre od $\mathcal{A}$. Ako je $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ onda je*
$$E\left(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1\right) = E(X|\mathcal{F}_1)\, s.s.$$
Ako je $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$ onda je
$$E\left(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1\right) = E(X|\mathcal{F}_2)\, s.s.$$

7. $E\left(E(X|\mathcal{F})\right) = EX$.

8. *Neka slučajna promenljiva X ne zavisi od σ-algebre $\mathcal{F}$ (tj. ne zavisi od slučajnih veličina I_B, $B \in \mathcal{F}$). Tada je*
$$E(X|\mathcal{F}) = E(X)\, s.s.$$

9. *Neka je Y $\mathcal{F}$-merljiva slučajna veličina, $E|X| < \infty$, $E|XY| < \infty$. Tada važi*
$$E(XY|\mathcal{F}) = YE(X|\mathcal{F}) s.s.$$

Definicija 3.12. Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prostor verovatnoća i T skup vrednosti parametra t. Realan slučajni proces $X(t, \omega)$ na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sa faznim prostorom $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ i indeksnim skupom T je familija

$$X = \{X(t), t \in T\}$$

merljivih funkcija
$$X(t) : \Omega \to \mathbb{R}.$$

To znači da je slučajni proces jedna familija slučajnih veličina koje zavise od parametra t i sve su definisane na istom prostoru verovatnoća. Za svako fiksirano t iz skupa T, $X(t)$ je jedna slučajna promenljiva, tj. jedna $\mathcal{A}$-merljiva funkcija. Skup T svih vrednosti parametra t često zovemo i *oblast definisanosti procesa*. Umesto $X(t, \omega)$ slučajni proces se najčešće obeležava sa $X(t)$ ili sa $(X_t)_{t \in T}$. Preslikavanje $t \to X(t, \omega)$ za fiksirano ω naziva se *trajektorija* slučajnog procesa.

Definicija 3.13. *Filtracija* $(\mathcal{F}_t)$ je rastuća familija σ-algebri za koje važi $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ i $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ ako je $s \leq t$.

Pretpostavljamo da je familija $(\mathcal{F}_t)$ kompletna i neprekidna sdesna. Kažemo da je familija $\mathcal{F}_t$ *kompletna* ako se svaki skup mere nula iz $\mathcal{F}$ nalazi u $\mathcal{F}_0$, a samim tim i u $\mathcal{F}_t$. Filtracija je *neprekidna sdesna* ako važi $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$. Ova dva uslova se zovu standardni uslovi za koje se uvek pretpostavlja da važe.

Definicija 3.14. Neka je $\big(X(t)\big)_{t \geq 0}$ slučajni proces. Tada je

$$\mathcal{F}_t = \sigma[X_s, s \leq t]$$

kanonička filtracija.

Definicija 3.15. Filtrirani prostor verovatnoća je uredjeni skup $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ gde je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prostor verovatnoća, a $(\mathcal{F}_t)$ filtracija.

Definicija 3.16. Slučajan proces $\big(X(t, \omega)\big)_{t \geq 0}$ je $\mathcal{F}_t$-adaptiran ako je, za svako t, slučajna promenljiva X_t $\mathcal{F}_t$-merljiva.

Definicija 3.17. Neka je dat prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i filtracija $(\mathcal{F}_t)$. Slučajan proces $\big(X_t\big)_{t \geq 0}$ je *martingal* u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_t)$ ako

(M1) $(X_t)_{t\geq 0}$ je $\mathcal{F}_t$-adaptiran

(M2) $E(|X_t|) < \infty$

(M3) za svako $s < t$ $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$

Ako u (M3) važi $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$, proces se naziva *submartingal*, dok je pri $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$ proces *supermartingal*.
Slučajan proces $(X_t)_{t\geq 0}$ koji je martingal u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_t)$ obeležavamo još i sa $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Naziv martingal se prvi put pojavljuje u matematičkoj literaturi 1939. godine, a postaje poznat tokom četrdesetih i pedesetih godina XX veka u radovima Duba[2]. Teorija martingala vuče svoje korene iz kockarskih problema. U prilog tome govori i naziv. Martingal je reč koja se, po oksfordskom rečniku negde do polovine XIX veka, koristila za kockarsku strategiju dupliranja uloga nakon svakog gubitka. Vezu ćemo pokušati da predstavimo i sledećim primerom.

Primer 3.1. Pretpostavimo da se kladimo u kazinu u trenucima $n = 1, 2, ...$ i da nema igre u trenutku 0. Neka je $X_n - X_{n-1}$ dobit po jedinici uloga u trenucima $n = 1, 2, ...$ Tada, ako je igra fer

$$E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$$

tj. $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ je martingal. $\mathcal{F}_n$ predstavlja sve informacije vezane za naše kladjenje do trenutka n, i bazirano na dotadašnjoj istoriji odlučujemo da li ćemo nastaviti sa kockanjem. Jasno je da u kazinu nemamo fer igru, i da je igra nefer na uštrb igrača, odnosno

$$E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1},$$

te je $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ supermartingal!

Definicija 3.18. Nenegativna slučajna promenljiva τ je *vreme zaustavljanja* u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_t)$ ako je

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \text{za svako}\, t \geq 0.$$

Škotski botaničar Braun[3] uočio je krajem 1828. godine fenomen danas poznat kao *Braunovo kretanje*. On je posmatrajući čestice polena u vodi primetio pojavu njihovog neprekidnog, neregularnog kretanja pri ubacivanju

[2]Joseph Leo Doob (1910-2004).
[3]Robert Brown (1773-1858).

kapi nafte u vodu. On nije prvi koji je ovo uočio, mnogi njegovi prethodnici su pominjali ovaj fenomen, počev od Lejvenhuka [4] u XVII veku. Ipak Braunova istraživanja su privukla pažnju naučnika i iz tog razloga ova pojava nosi njegovo ime.
Prvo objašnjenje fenomena Braunovog kretanja dao je Albert Ajnštajn 1905. godine. On je pokazao da se Braunovo kretanje može objasniti tako što pretpostavimo da su čestice bombardovane molekulima "stranog tela". Matematičku konstrukciju Braunovog kretanja dao je Viner [5] nizom svojih radova od 1918. godine. 1923. je prezentovao definiciju koju i danas koristimo i dokazao skoro sigurnu neprekidnost, dok je 1933. zajedno sa još dvojicom kolega objavio dokaz da su skoro sve trajektorije Braunovog kretanja nigde diferencijabilne. Zbog njegovog velikog doprinosa često se u literaturi za Braunovo kretanje koristi i termin *Vinerov proces*. Upravo iz ovih razloga se ovaj proces obeležava sa $B(t)$ ili $W(t)$.

Definicija 3.19. Neka je dat filtrirani prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$. Slučajni proces $(B_t)_{t\geq 0}$ je *standardno Braunovo kretanje* (ili *standardni Vinerov proces*) ako

(B1) $B_0 = 0$ s.s.

(B2) B ima nezavisne priraštaje, tj. za $n = 1, 2, ...$ i $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$ B_0, $B_{t_1} - B_{t_0}$,...,$B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ su nezavisne slučajne veličine.

(B3) Za $0 \leq s < t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

(B4) Sa verovatnoćom 1 proces B ima neprekidne priraštaje.

Ako bi umesto (B2) stavili:
(B2') Za $0 \leq s < t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2(t-s))$,
tada se proces (B_t) naziva Braunovo kretanje sa parametrom drifta μ i disperzijom σ^2. Ako je (X_t) Braunovo kretanje sa parametrom drifta μ i disperzijom σ^2, a (B_t) standardno Braunovo kretanje tada je

$$X_t = \mu t + \sigma B_t.$$

Tvrdjenje 3.2. *Neka je $(B_t)_{t\geq 0}$ standardno Braunovo kretanje. Tada je*

$$E(B_t B_s) = \min\{s, t\}.$$

[4] Antonie van Leeuwenhoek (1632-1723).
[5] Norbert Wiener (1894-1964).

Dokaz. Pretpostavimo da je $s < t$. Tada imamo

$$\begin{aligned} E(B_t B_s) &= E\big((B_t - B_s + B_s)B_s\big) \\ &= E\big((B_t - B_s)B_s\big) + E(B_s^2). \end{aligned}$$

Koristeći nezavisnost priraštaja

$$E(B_t B_s) = E(B_t - B_s)E(B_s) + E(B_s^2).$$

Iz (B3) vidimo da je $E(B_t - B_s) = E(B_s) = 0$ i da je $D(B_s) = s$ te je

$$\begin{aligned} E(B_t B_s) &= E(B_s^2) \\ &= E(B_s)^2 + D(B_s) = s. \end{aligned}$$

Slično, za $t < s$ imamo da je $E(B_t B_s) = t$, tako da je ukupno

$$E(B_t B_s) = \min\{s, t\}.$$

□

Teorema 3.3. *Skoro sve trajektorije Braunovog kretanja su nigde diferencijabilne, tj.*

$$P\left((\forall t > 0) \limsup_{h \to 0} \left| \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \right| = \infty \right) = 1$$

Dokaz. Dokaz koji su izveli Dvorecki, Erdos i Kakutani može se naći u [18].

□

Definicija 3.20. Slučajna promenljiva Y ima *log-normalnu raspodelu* sa parametrima μ i σ^2 ako je $Y = e^X$ gde X ima $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ raspodelu.

Za ovako definisanu raspodelu računamo matematičko očekivanje i disperziju:

$$E(Y) = E(e^X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x.$$

Uvodimo smenu

$$\begin{gathered} \tfrac{x-\mu}{\sigma} = y \\ x = \sigma y + \mu \\ \mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}y \end{gathered}$$

Dobijamo

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma e^{\sigma y+\mu} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y = \\
&= \frac{e^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2-2\sigma y+\sigma^2-\sigma^2)} \mathrm{d}y = \\
&= \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma)^2} \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Smenom $z = y - \sigma$ dobijamo lako da je vrednost ovog integrala jednaka 1, tako da je

$$E(Y) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \tag{3.2}$$

Gotovo identičnim postupkom dobijamo

$$E(Y^2) = e^{2(\mu+\sigma^2)}.$$

Odatle

$$
\begin{aligned}
D(Y) &= e^{2(\mu+\sigma^2)} - (e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}})^2 = \\
&= e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).
\end{aligned}
$$

Definicija 3.21. Ako je slučajni proces $(B_t)_{t\geq 0}$ Braunovo kretanje, tada se proces $(Y_t)_{t\geq 0}$ definisan kao

$$Y_t = e^{B_t}$$

naziva *geometrijsko Braunovo kretanje.*

Jedan od najznačajnijih rezultata vezanih za modeliranje kretanje cena akcija s početka XX veka nalazi se u Bašeljeovoj[6] doktorskoj disertaciji. Njegova pretpostavka se zasnivala na tome da, ako je data kolekcija cena $S(y)$, $0 \leq y < \infty$, tada ona zadovoljava uslov da razlika $S(t+y) - S(y)$ ne zavisi od cena do trenutka y i ima normalnu $\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$ raspodelu. Njegova disertacija doživela je velike kritike jer je po ovom modelu cena akcija mogla da bude negativna. Takodje, ako pretpostavimo da imamo dve akcije, prva se prodaje po ceni od 20 novčanih jedinica a druga po ceni od 10 n.j. tada je verovatnoća da će se cene obeju akcija smanjiti za 5 n.j. jednaka, iako je jasno da to nije istina jer bi to značilo da je verovatnoća da prva akcija izgubi 25% vrednosti ista kao verovatnoća da druga izgubi 50 % vrednosti.

[6]Louis Bachelier (1870-1946).

Iz ovih razloga Bašeljeova disertacija je brzo pala u zaborav. Ipak, malom modifikacijom Bašeljeove ideje može se doći do mnogo preciznijeg modela kretanja cena akcija, koji će otkloniti uočene mane. Sve što je potrebno jeste da pretpostavimo da se cena akcija ponaša kao geometrijsko Braunovo kretanje.

Definicija 3.22. Kolekcija cena $S(y)$, $0 \leq y < \infty$ predstavlja proces geometrijskog Braunovog kretanja sa parametrom drifta μ i parametrom volatilnosti σ ako za $y, t \geq 0$ važi:

1. $\frac{S(t+y)}{S(y)}$ ne zavisi od cena do trenutka y;

2. $\log\bigl(\frac{S(t+y)}{S(y)}\bigr) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.

Sledeća teorema nam pokazuje vezu izmedju Braunovog kretanja i martingala.

Teorema 3.4. *Neka je $(B_t)_{t\geq 0}$ standardno Braunovo kretanje u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, tj. $(B_t)_{t\geq 0}$ je definisan na filtriranom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$. Tada su sledeći procesi $\mathcal{F}_t$-martingali:*

(a) $(B_t)_{t\geq 0}$;

(b) $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$;

(c) za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ $(M_t^\lambda)_{t\geq 0}$, *gde je* $M_t^\lambda = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}$.

Dokaz. (a) B_t je $\mathcal{F}_t$-adaptiran. Imamo da je $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ i važi

$$E(|B_t|) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty.$$

Dakle, važe osobine (M1) i (M2) iz definicije (3.17).
(M3) Za svako $s \leq t$

$$\begin{aligned} E(B_t|\mathcal{F}_s) &= E\bigl((B_t - B_s + B_s)|\mathcal{F}_s\bigr) \\ &= E\left((B_t - B_s)|\mathcal{F}_s\right) + E(B_s|\mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

$B_t - B_s$ su nezavisne u odnosu na $\mathcal{F}_s$ za svako $s \leq t$ i koristimo osobinu 9. iz Teoreme 3.2 za uslovno matematičko očekivanje

$$E(B_t|\mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s) + B_s = B_s.$$

(b) B_t je $\mathcal{F}_t$-adaptiran, tada je i $B_t^2 - t$ $\mathcal{F}_t$-adaptiran.
(M2) $E|B_t^2 - t| \leq E|B_t^2| + E|t| = 2t < \infty$.
(M3) Za svako $s \leq t$

$$\begin{aligned} E(B_t^2|\mathcal{F}_s) &= E\big((B_t - B_s + B_s)^2|\mathcal{F}_s\big) \\ &= E\big((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s\big) + 2E\big(B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s\big) + E(B_s^2|\mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

Koristeći ponovo da su $B_t - B_s$ nezavisne u odnosu na $\mathcal{F}_s$ za svako $s \leq t$, iz Teoreme (3.2) imamo:

$$\begin{aligned} E(B_t^2|\mathcal{F}_s) &= E(B_t - B_s)^2 + 2B_sE\big((B_t - B_s)|\mathcal{F}_s\big) + B_s^2 = \\ &= E(B_t - B_s)^2 + 2B_sE(B_t - B_s) + B_s^2 = \\ &= t - s + 0 + B_s^2. \end{aligned}$$

Odatle je
$E\big((B_t^2 - t)|\mathcal{F}_s\big) = t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s$.
(c) M_t^λ je $\mathcal{F}_t$-adaptiran.
(M2) $E|M_t^\lambda| = E(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}E(e^{\lambda B_t})$.
Koristimo jednačinu (3.2) i dobijamo
$E|M_t^\lambda| = e^{\frac{\lambda^2}{2}t - \frac{\lambda^2}{2}t} = 1$.
(M3) Za svako $s \leq t$
$E(M_t^\lambda|\mathcal{F}_s) = E(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}|\mathcal{F}_s) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}E(e^{\lambda B_t}|\mathcal{F}_s)$.
Za ovo očekivanje imamo

$$\begin{aligned} E(e^{\lambda B_t}|\mathcal{F}_s) &= E(e^{\lambda(B_t - B_s) + \lambda B_s}|\mathcal{F}_s) = \\ &= e^{\lambda B_s}E(e^{\lambda(B_t - B_s)}|\mathcal{F}_s) = \\ &= e^{\lambda B_s}E\big(e^{\lambda(B_t - B_s)}\big) = \\ &= e^{\lambda B_s}e^{\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)}. \end{aligned}$$

Zaključujemo
$E(M_t^\lambda|\mathcal{F}_s) = e^{\frac{-\lambda^2}{2}t} \cdot e^{\lambda B_s} \cdot e^{\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)} = M_s^\lambda$. $\square$

Poglavlje 4

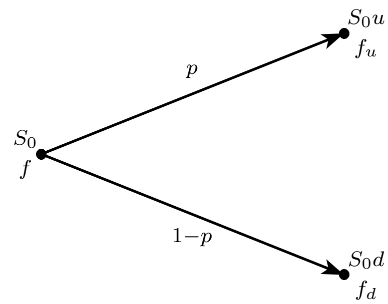
Binomni model odredjivanja cena akcija

Nalaženje modela koji opisuju kretanje cena akcija i njima odgovarajućih opcija jedan je od najčešćih problema kojim se bave finansijski eksperti, pogotovo u Americi. Velike finansijske institucije koriste opcije ne bi li se zaštitile od budućih rizika, promena kamatnih stopa ili drugih fluktuacija na tržištu. Obezbedjivanje od rizika ili *hedžing* je osnovni problem svakog velikog investitora, svake velike finansijske institucije. Svetska ekonomska kriza je samo potvrdila neophodnost obezbedjivanja od rizika i ukazala na njegov značaj. Da se ovakvi trendovi prate i u Srbiji potvrdjuju i planovi novog guvernera Narodne Banke Srbije koji u hedžingu vidi potencijalno rešenje za velike oscilacije kursa dinara.
Binomni model je jedan od prvih načina odredjivanja cena opcija. Model je prvi put predstavljen u radu Koksa, Rosa i Rubinštajna [5], 1979. godine.

4.1 Binomni model sa jednim korakom

Pretpostavimo da posedujemo Δ akcija odredjene kompanije čija je trenutna cena S_0. Prodajemo jednu evropsku call opciju na tu akciju po ceni f. Neka je opcija raspisana na period T. Pretpostavimo da su do isteka opcije moguće samo dve situacije: cena akcije može da poraste za faktor $u > 1$ i iznosi S_0u, ili da opadne do S_0d za faktor $d < 1$. Dobit od opcije pri rastu cene akcije iznosi f_u, a pri padu cene akcije dobit je f_d, što možemo videti na sledećoj slici.

Cilj nam je da odredimo cenu opcije u ovakvom modelu, kao i da vidimo koliko treba da iznosi vrednost Δ tako da naš portfolio bude bezrizičan, odnosno, da ne zavisi od toga da li će cena akcije da poraste ili opadne. Pret-



Slika 4.1: Binomni model sa jednim korakom

postavimo još jednu važnu stvar, a to je da se sve ovo dešava u bezrizičnom okruženju, odnosno da važi:

- Očekivana dobit od opcije jednaka je dobiti pri bezrizičnoj kamatnoj stopi r.
- Sadašnje vrednosti tokova novca se dobijaju diskontovanjem sa bezrizičnom kamatnom stopom.

Vratimo se na binomni model. Cilj nam je da napravimo bezrizični portfolio u kojem se nalazi Δ akcija i kratka pozicija na evropsku call opciju. Vrednost opcije pri porastu cene akcije iznosi $S_0u\Delta - f_u$, a pri padu cene akcije $S_0d\Delta - f_d$. Želimo da smo nezavisni od promene cene akcije, tako da mora da važi:

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d.$$

Odatle dobijamo

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}. \tag{4.1}$$

U ovom slučaju portfolio je bezrizičan i on treba da zaradi po bezrizičnoj kamatnoj stopi r, dakle isto i kao kada bi početna uložena sredstva bila oročena u banci. Sadašnja vrednost tog portfolia je

$$(S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}.$$

Nas je pravljenje ovog portfolia koštalo $S_0\Delta - f$ pa sledi da je

$$S_0\Delta - f = (S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

ili

$$f = S_0\Delta - (S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

Zamenjujući Δ iz formule (4.1) dobijamo

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d] \tag{4.2}$$

gde je

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}. \tag{4.3}$$

Vrednost p definišemo kao verovatnoću rasta cene akcije u bezrizičnom okruženju. Pomoću jednačina (4.2) i (4.3) dobijamo cenu opcije u ovom modelu što ćemo i videti u sledećem primeru.

Primer 4.1. Neka je cena akcije u početnom trenutku $S_0 = 20$[1]. Cena akcije može da poraste na 22 ili da opadne na 18 do kraja ugovorenog tromesečnog perioda na koji je opcija raspisana, tako da imamo $T = \frac{3}{12} = 0,25$. Dogovorena cena evropske call opcije je $K = 21$. Bezrizična kamatna stopa iznosi 12%.
Cena opcije, f_u, pri porastu cene akcije jednaka 1, dok je opcija bezvredna ako cena akcije opadne, f_d. Imamo da je $S_0u = 22$, odakle je $u = 1,1$, i slično, $d = 0,9$. Koristeći formulu (4.1) dobijamo da je $\Delta = 0,25$ te se naš bezrizični portfolio sastoji od $0,25$ akcija i jednom call opcijom. Iz formule (4.3) imamo da je

$$p = \frac{e^{0,12 \cdot 0,25} - 0,9}{1,1 - 0,9} = 0,6523.$$

Vrednost opcije dobijamo pomoću formule (4.2)

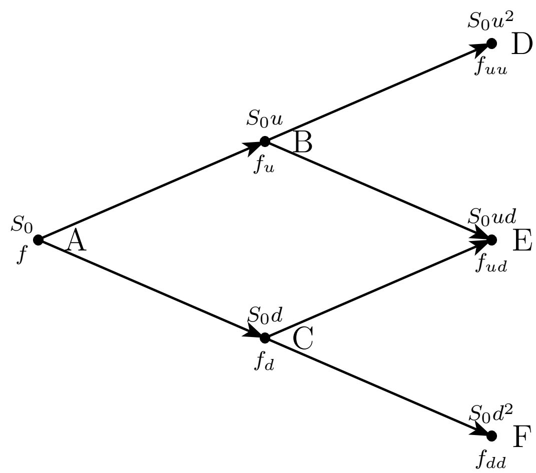
$$f = 0,6523e^{-0,12 \cdot 0,25} = 0,633.$$

4.2 Binomni model sa dva koraka

Sledeća faza predstavlja proširivanje binomnog modela na još jedan korak. Pretpostavićemo da se cena akcija menja na identičan način kao i u binomnom modelu sa jednim korakom, može da poraste za faktor $u > 1$ ili da opadne za $d < 1$. Cena akcija nakon dve promene može biti S_0u^2, S_0ud ili S_0d^2, dok je dobit respektivno f_{uu}, f_{ud}, f_{dd} što se može videti i na slici 4.2. Cilj nam je da nadjemo vrednost opcije f pri ovakvom modelu.

Prvi korak će predstavljati nalaženje f_u i f_d nakon prve promene cena akcija. To ćemo uraditi tako što ćemo pretpostaviti da čvorovi B,D,E i C,E,F obrazuju binomni model sa jednim korakom, a nakon toga rešiti i binomni

[1]Dolara ili bilo koje druge novčane jedinice.



Slika 4.2: Binomni model sa dva koraka

model sa jednim korakom koji čine cvorovi A,B i C. Verovatnoću p računamo pomoću formule (4.3). Promene cena se dešavaju u vremenskim intervalima $\frac{T}{2}$. Imamo da je:

$$f_u = e^{-r\frac{T}{2}}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}] \tag{4.4}$$

$$f_d = e^{-r\frac{T}{2}}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \tag{4.5}$$

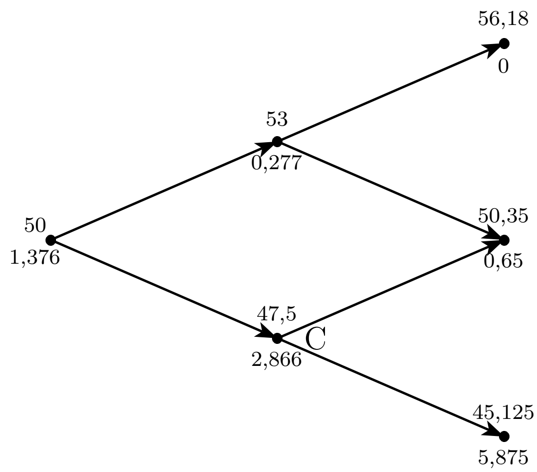
$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]. \tag{4.6}$$

Iz formula (4.4), (4.5) i (4.6) sledi da je

$$f = e^{-rT}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]. \tag{4.7}$$

Primer 4.2. Cena akcije je trenutno 50\$. Tokom sledeća dva tromesečna perioda očekuje se da će porasti 6% ili opasti 5%. Bezrizična kamatna stopa je 5% pri neprekidnom kamaćenju. Koja je vrednost šetomesečne evropske call opcije sa ugovorenom cenom od 51\$? Izračunati i vrednost evropske put opcije izdate pri identičnim uslovima.

Rešenje. Vidimo da je ovde reč o binomnom modelu sa dva koraka u kojem imamo date sledeće vrednosti: $S_0 = 50$, $T = 0,5$, $r = 0,05$, $K = 51$, $u = 1,06$ i $d = 0,95$. Vrednosti f_{uu}, f_{ud} i f_{dd} nalazimo veoma jednostavno koristeći (2.1). Pomoću formule (4.3) nalazimo da je verovatnoća rasta cene akcija $p = 0,569$. Zadatak završavamo pomoću (4.7) i dobijamo da je vrednost evropske call opcije $f = 1,635$\$. Kada je reč o evropskoj put opciji sve



Slika 4.3: Binomni model sa dva koraka iz primera 4.2

što treba da uradimo jeste da primenimo put-call paritet, tj. formulu (2.3) i imamo odmah da je $p = 1,376\$$. Sledeća slika predstavlja skicu ovog modela, koja će nam biti od interesa i u sledećem primeru.

□

4.2.1 Binomni model sa dva koraka za američke opcije

Videli smo u prethodna dva primera kako binomni model funkcioniše kada je reč o evropskim opcijama. Postavlja se pitanje šta se dešava sa američkim opcijama. Razlika je jasna, američke opcije se mogu realizovati u svakom trenutku tako da je potrebno razmotriti dodatni problem: "Da li treba realizovati opciju nakon prve promene cene akcija"? Američku call opciju nikad nije optimalno aktivirati pre ugovorenog vremena o čemu i govori sledeće tvrdjenje koje se može naći u [3].

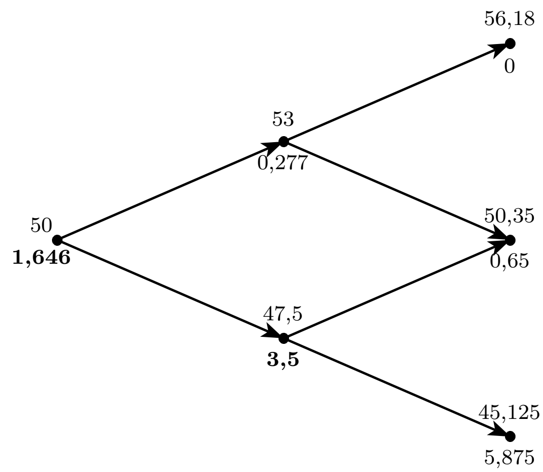
Tvrdjenje 4.1. *Nije optimalno realizovati američku call opciju bez dividendi pre isteka ugovorenog vremena.*

Dokaz. Razmotrimo dva portfolia zadata na sledeći način:

1. potrfolio A: jedna američka call opcija i keš u iznosu od $Ke^{-r(T-t)}$;

2. potrfolio B: jedna akcija.

Pretpostavimo da smo u trenutku t aktivirali opciju. Akcija vredi S_t. Portfolio A je u tom slučaju vredan $S_t - K + Ke^{-r(T-t)} < S_t$. Ovo očigledno važi jer nema smisla realizovati opciju ako je $S_t < K$. Odavde vidimo da



Slika 4.4: Binomni model sa dva koraka iz primera 4.3

je vrednost portfolia A manja od portfolia B u slučaju rane aktivacije. Da smo zadržali opciju do njenog isteka, portfolio A bi vredeo $\max\{S_T, K\}$ te bi važila relacija $A \geq B$. Zaključujemo da portfolio nije optimalno aktivirati pre isteka ugovorenog vremena. $\square$

Kada je reč o put opcijama, njih možemo aktivirati i pre isteka ugovorenog vremena, i to ćemo raditi u slučaju kada je dobit od opcije veća od cene opcije u tom trenutku. Vrednosti f_{uu}, f_{ud} i f_{dd} i dalje nalazimo pomoću (2.1), dok su f_u i f_d jednaki:

$$f_u = \max\left\{e^{-r\frac{T}{2}}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}], K - S_0u\right\} \tag{4.8}$$

$$f_d = \max\left\{e^{-r\frac{T}{2}}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}], K - S_0d\right\}. \tag{4.9}$$

Princip aktiviranja američkih put opcija videćemo u sledećem primeru.

Primer 4.3. Neka su dati isti podaci kao i u primeru 4.2. Naći vrednost američke call i put opcije.

Rešenje. Pozivajući se na tvrdjenje 4.1 odmah zaključujemo da je cena američke call opcije $C = 1,635$. Put-call paritet ovde ne važi, tako da uz pomoć formula (4.8) i (4.9) dobijamo da je $f_u = 0,277$, isto kao i u prethodnom primeru, dok je $f_d = 3,5$. Ako pogledamo sliku uz primer 4.3 vidimo da je razlika sa slikom iz primera 4.2 u čvoru C i da ona i rezultira različitom cenom opcije u trenutku 0.

Cena put opcije je $P = 1,646$. Kao što je i bilo očekivano, vrednost američke put opcije veća je od evropske put opcije. Vrednost u čvoru C u

stvari znači da je u tom trenutku optimalna strategija rana aktivacija opcije!
□

4.3 Binomni model sa n koraka

Neka je data opcija sa ugovorenim vremenom T i pretpostavimo da je Δ priraštaj vremena na čijem kraju dolazi do promene cene akcija. Smanjivanjem Δ povećava se broj koraka našeg binomnog modela. Postavlja se pitanje: "Šta se dešava ako pretpostavimo da $\Delta \to 0$"? Za dokaz teoreme 4.2 koja sledi i koja će dati odgovor na to pitanje biće nam potrebna centralna granična teorema čiji dokaz nećemo navoditi, već se može naći u [6].

Teorema 4.1 (Centralna granična teorema)**.** *Neka je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, matematičkim očekivanjem $E(X_1) = m$ i konačnom disperzijom $D(X_1) = \sigma^2 > 0$. Ako je $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, onda za svako $x \in \mathbb{R}$ pri $n \to \infty$ važi*

$$P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}x. \tag{4.10}$$

Teorema 4.2. *Za dobro odabrane u, d i p binomni model konvergira ka geometrijskom Braunovom kretanju, kada $\Delta \to 0$.*

Dokaz. Vrednosti za ove promenljive dali su Koks, Ros i Rubinštajn u [5], a ceo dokaz se može naći i u [8], [9]. Neka su $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$, $p = \frac{1}{2}(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta})$. Uočimo niz nezavisnih slučajnih promenljivih (Y_i) zadatih na sledeći način:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{ako cena akcije poraste u trenutku } i\Delta \\ 0, & \text{ako cena akcije padne u trenutku } i\Delta \end{cases}.$$

U binomnom modelu cena akcija raste sa verovatnoćom p, tako da slučajne promenljive Y_i imaju raspodelu:

$$Y_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Kada smo definisali ovakve slučajne promenljive jasno je da se broj rasta cena akcija do n-te promene cena može izraziti kao $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$, dok je broj pada cena akcija jednak $n-\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$. Neka se u trenutku t dogodilo n promena cena akcije, odnosno važi $t = n\Delta$. Tada je cena akcije u tom trenutku jednaka:

$$S_t = S_{n\Delta} = S_0 u^{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i} d^{n-\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i} = S_0 d^n \left(\frac{u}{d}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i}.$$

Deljenjem jednačine sa S_0 i iz relacije $t = n\Delta$ dobijamo da je

$$\frac{S_t}{S_0} = d^{\frac{t}{\Delta}} \left(\frac{u}{d}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} Y_i}.$$

Logaritmovanjem dobijamo sledeću jednakost:

$$\log \frac{S_t}{S_0} = \frac{t}{\Delta} \log d + \log\left(\frac{u}{d}\right) \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} Y_i. \tag{4.11}$$

U jednačinu (4.11) sada uvrštavamo vrednosti za u, d i p:

$$\log \frac{S_t}{S_0} = -\frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} Y_i. \tag{4.12}$$

Primećujemo da su $-\frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta}}$ i $2\sigma\sqrt{\Delta}$ konstante, a kako $\Delta \to 0$, tada $\sum\limits_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} Y_i$ ima graničnu normalnu raspodelu zbog centralne granične teoreme, pa imamo da $\log \frac{S_t}{S_0}$ ima normalnu raspodelu. Imamo:

$$\begin{aligned}
E(\log \frac{S_t}{S_0}) &= -\frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} E(Y_i) \\
&= -\frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \cdot \frac{t}{\Delta} \cdot p \\
&= -\frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \cdot \frac{t}{\Delta} \cdot \frac{1}{2}(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}) \\
&= -\frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + \frac{\sigma t}{\sqrt{\Delta}} + \mu t,
\end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$E(\log \frac{S_t}{S_0}) = \mu t. \tag{4.13}$$

$$
\begin{aligned}
D(\log \frac{S_t}{S_0}) &= 4\sigma^2 \Delta \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta}} D(Y_i) \\
&= 4\sigma^2 \Delta \cdot \frac{t}{\Delta} p(1-p).
\end{aligned}
$$

Pri $\Delta \to 0$ imamo da $p \to \frac{1}{2}$

$$
D(\log \frac{S_t}{S_0}) \approx \sigma^2 t. \tag{4.14}
$$

Iz (4.13) i (4.14) dobijamo

$$
\log \frac{S_t}{S_0} \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t). \tag{4.15}
$$

$\square$

U Dodatku se nalazi kod programa u programskom jeziku C# koji računa cenu akcija i evropske call opcije za binomni model sa n koraka. Naravno, princip je isti kao i kod binomnog modela sa 2 koraka. Kreće se od trenutka T, izračunava se vrednost akcije i opcije, i zatim se unazad računaju vrednosti za sve ostale čvorove.

Poglavlje 5

Itova formula

Cilj ovog poglavlja je da definišemo pojam stohastičkog integrala oblika

$$I = \int_a^b \varphi(t)\, \mathrm{d}X_t, \tag{5.1}$$

gde je φ neslučajna funkcija, a X slučajan proces. Naravno, nema nikakvog smisla razmatrati (5.1) za slučaj diferencijabilnih procesa, jer je tada

$$I = \int_a^b \varphi(t) X_t' \, \mathrm{d}t \,. \tag{5.2}$$

Nama će biti najinteresantniji, i na njih ćemo se i fokusirati, integrali u kojima je proces $X(t)$ u stvari Braunovo kretanje, a zbog Teoreme 3.3 imamo da ovakav integral ne možemo svesti na (5.2). Kako je stohastički integral važan aparat u finansijskoj matematici, ovde cemo navesti najvažnije teoreme, a njihovi dokazi mogu se naći u [15], [13], [21].

Definicija 5.1. Neka je dat filtrirani prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$.*Prost proces* definisan na $[0, T]$ je funkcija H za koju

(a) postoji podela $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$,

(b) $H_{t_0} = H_0(\omega)$ i $H_t = H_i(\omega)$ za svako $t \in (t_i, t_{i+1}]$, gde je $H_i(\cdot)$ $\mathcal{F}_{t_i}$-merljiva funkcija i pripada $L^2(\Omega)$. Pišemo

$$H_t = H_0(\omega) + \sum_{i=0}^{n-1} H_i(\omega) I_{(t_i, t_{i+1}]}, \quad t \in [0, T].$$

Definicija 5.2. Ako je H prost proces tada je *stohastički integral* tog procesa u odnosu na Braunovo kretanje (W_t) proces definisan za $t \in (t_k, t_{k+1}]$ sa

$$\int_0^t H_s \, \mathrm{d}W_s = \sum_{i=0}^{k-1} H_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + H_k (W_t - W_{t_k}).$$

Ovo možemo zapisati i kao

$$\int_0^t H_s \,\mathrm{d}W_s = \sum_{i=0}^{n} H_i (W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i \wedge t}),$$

gde je $m \wedge n = \min\{m, n\}$.

Teorema 5.1. *Pretpostavimo da je H slučajan proces. Tada je*

(i) $\left(\int_0^t H_s \,\mathrm{d}W_s\right)$ *neprekidni $\mathcal{F}_t$-martingal.*

(ii) $E\left(\left[\int_0^t H_s \,\mathrm{d}W_s\right]^2\right) = E\left(\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}s\right)$.

Označimo sada sa $\mathcal{H}$ prostor procesa adaptiranih na $(\mathcal{F}_t)$ tako da zadovoljavaju $E\left(\int_0^T H_s^2 \,\mathrm{d}s\right) < \infty$.

Lema 5.2. *Pretpostavimo da $\{H_s\} \in \mathcal{H}$. Tada postoji niz prostih slučajnih procesa $\{H_s^n\}$ za koje je*

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T |H_s - H_s^n|^2 \,\mathrm{d}s\right) = 0.$$

Teorema 5.3. *Pretpostavimo da je $(W_t)_{t\geq 0}$ Braunovo kretanje u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_t)$. Tada postoji jedinstveno linearno preslikavanje I iz $\mathcal{H}$ u prostor neprekidnih $\mathcal{F}_t$-martingala na $[0, T]$ tako da važi*

(i) ako je H prost slučajni proces u $\mathcal{H}$

$$I(H)_t = \int_0^t H_s \,\mathrm{d}W_s;$$

(ii) ako je $t \leq T$,

$$E\left((I(H)_t)^2\right) = E\left(\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}s\right).$$

Drugo svojstvo nazivamo *izometrijskim svojstvom* integrala.

Uvedimo notaciju

$$\widehat{\mathcal{H}} = \left\{ \{H_s\} : H_s \, je (\mathcal{F}_s) - adaptiran \, i \int_0^T H_s^2 \,\mathrm{d}s < \infty \, s.s. \right\}.$$

Teorema 5.4. *Postoji jedinstveno preslikavanje $\widehat{I}$ iz $\widehat{\mathcal{H}}$ u prostor neprekidnih procesa definisanih na $[0, T]$ tako da* *(i) ako* $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ *pripada* $\mathcal{H}$*, tada su, za svako* $t \in [0,T]$ *procesi* $\widehat{I}(H)_t$ *i* $I(H)_t$ *ekvivalentni.*

(ii) Ako je $\{H^n\}_{n\ge 0}$ *niz u* $\widehat{\mathcal{H}}$ *takav da* $\int_0^T (H_s^n)^2\,\mathrm{d}s \xrightarrow{P} 0$*, tada*

$$\sup_{0\le t\le T} |\widehat{I}(H^n)_t| \xrightarrow{P} 0,$$

i pišemo $\widehat{I}(H)_t = \int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s$.

Definicija 5.3. Pretpostavimo da je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća sa filtracijom $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$, (W_t) standardno $(\mathcal{F}_t)$-Braunovo kretanje. Slučajni proces $(X_t)_{t\ge 0}$ je *Itov proces* ako je oblika

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\,\mathrm{d}s + \int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s,$$

gde je

(a) X_0 $\mathcal{F}_0$-merljiva,

(b) K i H su adaptirani u odnosu na $\mathcal{F}_t$,

(c) $\int_0^T |K_s|\ \mathrm{d}s < \infty$ s.s. i $\int_0^T |H_s^2|\ \mathrm{d}s < \infty$ s.s.

Itov proces često pišemo i u obliku

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = K_t\mathrm{d}t + H_t\mathrm{d}W_t \\ \qquad\qquad X_0 = x \end{cases}$$

Teorema 5.5 (Itova formula)**.** *Pretpostavimo da je* $(X_t)_{t\ge 0}$ *Itov proces, i neka je* f *dvaput diferencijabilna funkcija. Tada je*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)H_s^2\,\mathrm{d}s. \tag{5.3}$$

Prethodnu jednakost često zapisujemo i kao

$$\mathrm{d}f(X_t) = \frac{1}{2}f''(X_t)H_t^2\mathrm{d}t + f'(X_t)\mathrm{d}t \tag{5.4}$$

ili

$$\mathrm{d}f(X_t) = \left[f'(X_t)K_t + \frac{1}{2}f''(X_t)H_t^2\right]\mathrm{d}t + f'(X_t)H_t\mathrm{d}W_t. \tag{5.5}$$

Teorema 5.6. *Ako je* $F : [0, \infty] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neprekidno diferencijabilna po prvoj komponenti i dvaput diferencijabilna po drugoj, tada je*

$$\begin{aligned} F(t, X_t) = F(0, X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s)\,H_s^2\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Poglavlje 6

Black-Scholes formula

Itova formula je, uz stohastičke diferencijalne jednačine, bila glavni alat pri dokazivanju Black-Scholes formule koja predstavlja jedan od najvažnijih matematičkih rezultata u vezi sa finansijskim tršištima. Prezentovana je 1973. u radu [22], a prvi kompletan dokaz ove formule pružio je Merton, koji je ovu formulu i nazvao Black-Scholes formulom. Zbog velikog značaja ove formule, 1997. godine Majron Scholes i Robert Merton dobili su Nobelovu nagradu, koja bi, nesumnjivo, pripala i Bleku koji je preminuo 1995. godine.

6.1 Finansijsko tržište

U modelu koji su razmatrali Black i Scholes finansijsko tržište se sastojalo od:

1. prostora verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
2. vremena do isteka opcije, T
3. Braunovog kretanja na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ koje ćemo obeležavati sa $(W_t)_{t\geq 0}$
4. filtracije $(\mathcal{F}_t)$ Braunovog kretanja
5. rizičnog vrednosnog papira, akcije, trenutne vrednosti S_t
6. bezrizičnog vrednosnog papira, obveznice, sa cenom B_t.

Model se, takodje, sastoji i iz sledećih pretpostavki:

1. postoji sell-short mogućnost tj. podela vrednosnog papira koji se ne poseduje
2. ne postoji mogućnost arbitraže

3. ne postoje troškovi prilikom transakcija
4. bezrizična kamatna stopa je konstantna
5. kretanje cena akcija je neprekidno u vremenu.

Već pomenuti Bašeljeov model možemo zapisati i na sledeći način

$$S_t = x + \mu t + \sigma W_t$$

ili

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \\ S_0 = x \end{cases}$$

Mnogo bolji model od Bašeljeovog je sledeći

$$S_t = xe^{at+\sigma W_t} \tag{6.1}$$

koji, korišćenjem Itovog kalkulusa, možemo zapisati i kao

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t \\ S_0 = x \end{cases} \tag{6.2}$$

gde je $\mu = a + \frac{1}{2}\sigma^2$. Ovako opisan model predstavlja geometrijsko Braunovo kretanje definisano u trećem poglavlju, i kao što ćemo sada pokazati, kolekcija cena (S_t) predstavlja proces geometrijskog Braunovog kretanja iz definicije 3.22.
Neka je $f = \log S_t$.
Tada je

$$f'(S_t) = \frac{1}{S_t}, \qquad f''(S_t) = -\frac{1}{S_t^2}.$$

Koristeći jednačinu (5.5) dobijamo da je

$$\mathrm{d}f = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t.$$

Kako su μ i σ konstante sledi da je $f = \log S_t$ Braunovo kretanje sa parametrom drifta $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ i disperzijom σ^2. Promena logaritma cena od trenutka 0 do trenutka T, $\log S_T - \log S_0$ tada ima normalnu raspodelu sa parametrima $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$ i $\sigma^2 T$, odnosno,

$$\log \frac{S_T}{S_0} \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right). \tag{6.3}$$

Kada je reč o obveznicama, bezrizičnim vrednosnim papirima, na njima uvek možemo zaraditi po bezrizičnuoj kamatnoj stopi r, tako da važi $B_t = e^{rt}$ ili

$$\begin{cases} \mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t \\ B_0 = 1 \end{cases}$$

Ranije smo već definisali neke od pretpostavki modela poput arbitraže. Sada želimo da uvedemo strogu matematičku definiciju za ovaj pojam.

Mogućnost arbitraže

Definicija 6.1. *Strategija za trgovanje* je uredjeni par (ψ, φ) adaptiranih procesa tako da je

(i) $\int_0^T |\psi_t| \,\mathrm{d}t < \infty$ s.s.

(ii) $E\left(\int_0^T \varphi_t^2 \mathrm{d}t\right) < \infty$

(iii) $\int_0^T \varphi_t^2 S_t^2 \mathrm{d}t < \infty$ s.s.

Broj vrednosnih papira B_t i S_t, u trenutku t, je redom ψ_t i φ_t. Vrednost portfolia je data sa

$$X_t^{\psi,\varphi} = \psi_t B_t + \varphi_t S_t.$$

Pretpostavka (i) garantuje postojanje integrala $\int_0^T \psi_t \mathrm{d}B_t$, dok (ii) i (iii) obezbedjuju postojanje stohastičkog integrala

$$\int_0^T \varphi_t \mathrm{d}S_t = \int_0^T \varphi_t \mu S_t \mathrm{d}t + \int_0^T \varphi_t \sigma S_t \mathrm{d}W_t.$$

Definicija 6.2. Strategija za trgovanje je *samofinansirajuća* ako je

$$\mathrm{d}X_t^{\psi,\varphi} = \psi_t \mathrm{d}B_t + \varphi_t \mathrm{d}S_t. \tag{6.4}$$

Ova jednačina ne proističe iz Itovog kalkulusa, ona označava da promena vrednosti portfolia nastaje usled promene vrednosti vrednosnih papira.

Definicija 6.3. Mogućnost za arbitražu je moguća ako postoji samofinansirajuća strategija (ψ, φ) tako da je

(i) $X_0^{\psi,\varphi} = 0$

(ii) $X_T^{\psi,\varphi} \geq 0$ s.s.

(iii) $E(X_t^{\psi,\varphi}) > 0$.

6.2 Black-Scholes formula

Teorema 6.1 (Black-Scholes formula)**.** *Cena call opcije u trenutku 0 sa ugovorenom cenom K, vremenom do isteka opcije T, bezrizičnom kamatnom stopom r iznosi*

$$c = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2), \tag{6.5}$$

gde je

$$d_1 = \frac{\log\frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\log\frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

a $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ *je funkcija raspodele standardizovane normalne slučajne promenljive.*

Dokaz. Pretpostavićemo da se cena akcija kreće po binomnom modelu sa n koraka, odnosno, u trenucima $\frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, \ldots, \frac{nT}{n} = T$ cena akcije raste za faktor $u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \approx 1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{\sigma^2 T}{2n}$ ili opada za $d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \approx 1 - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{\sigma^2 T}{2n}$, dok je $\frac{rT}{n}$ kamatna stopa u svakom od tih n koraka. Za svaki korak verovatnoću rasta cene akcije dobijamo kao

$$p = \frac{1 + \frac{rT}{n} - d}{u - d} \approx \frac{\frac{rT}{n} + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} - \frac{\sigma^2 T}{2n}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} = \frac{1}{2} + \frac{r\sqrt{\frac{T}{n}}}{2\sigma} - \frac{\sigma}{4}\sqrt{\frac{T}{n}}. \tag{6.6}$$

U dokazu teoreme 4.2 uveli smo sledeću slučajnu promenljivu:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{ako cena akcije raste} \\ 0, & \text{ako cena akcije padne} \end{cases}$$

za koju važi

$$Y_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

i rekli smo da $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ predstavlja broj rasta cena akcija, dok je broj pada cena akcija jednak $n - \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$. Vrednost akcije u trenutku T je tada

$$S_T = S_0 u^{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i} d^{\,n - \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i} = S_0 d^n \left(\frac{u}{d}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i},$$

a znamo da je dobit od opcije u trenutku T iz formule (2.1) jednaka

$$\max\left(S_0\left(\frac{u}{d}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i} d^n - K, 0\right) = \max\left(S_0 e^{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i} e^{-\sigma\sqrt{nT}} - K, 0\right). \tag{6.7}$$

Cena opcije predstavlja diskontovanu vrednost pri neprekidnom kamaćenju matematičkog očekivanja dobiti u trenutku T, tj.

$$\begin{aligned} c &= e^{-rT} E\left(\max\left(S_0 e^{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i} e^{-\sigma\sqrt{nT}} - K, 0\right)\right) = \\ &= e^{-rT} E\left(\max\left(S_0 e^{W} - K, 0\right)\right), \end{aligned}$$

gde je $W = 2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i - \sigma\sqrt{nT}$. Kako, zbog centralne granične teoreme, raspodela $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ teži ka normalnoj raspodeli, sledi da i slučajna promenljiva W ima približno normalnu raspodelu, a odmah ćemo videti i sa kojim parametrima. Imamo da je

$E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right) = np$ i $D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right) = np(1-p)$ te je odatle

$$\begin{aligned} E(W) &= 2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} \cdot np - \sigma\sqrt{nT} = \\ &= 2\sigma\sqrt{nT} \cdot p - \sigma\sqrt{nT} = \\ &= 2\sigma\sqrt{nT}\left(p - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Koristimo jednačinu (6.6) i dobijamo

$$E(W) = 2\sigma\sqrt{nT}\left(\frac{r\sqrt{\frac{T}{n}}}{2\sigma} - \frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{4}\right).$$

Dakle,

$$E(W) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T. \tag{6.8}$$

$$D(W) = 4\sigma^2\frac{T}{n}D(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = 4\sigma^2\frac{T}{n} \cdot np(1-p).$$

Za dovoljno veliko n imamo da je $p \approx \frac{1}{2}$ pa je

$$D(W) = \sigma^2 T. \tag{6.9}$$

Sada smo na elementaran način dobili isti rezultat kao što je (6.3). Da bi dobili cenu call opcije c neophodno je da pronadjemo matematičko očekivanje $E\left(\max\left(S_0e^W - K, 0\right)\right)$. Do tog očekivanja ne možemo doći direktno, i prva stvar koja će nam biti potrebna jeste gustina slučajne promenljive $Y = S_0e^W$. Jasno je da ova slučajna promenljiva uzima samo pozitivne vrednosti, i tražimo sada njenu funkciju raspodele.

$$\begin{aligned}
G(x) &= P\left(S_0e^W \le x\right) = P\left(W \le \log\frac{x}{S_0}\right) = \\
&= P\left(\frac{W-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \le \frac{\log\frac{x}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{\log\frac{x}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Gustina slučajne veličine Y je tada

$$g(x) = G'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\log\frac{x}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T\right)^2}{2\sigma^2T}} \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}. \tag{6.10}$$

U sledećem koraku želimo da nadjemo raspodelu slučajne promenljive

$$\max\left(Y-K,0\right),$$

gde ćemo radi jednostavnijeg zapisa koristiti da je funkcija raspodele slučajne veličine Y data sa $G(y) = \int_{-\infty}^{y} g(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= P\left(\max(Y-K,0) \le x\right) \\
&= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ P(Y \le K), & x = 0 \\ P(Y \le K) + P(K \le Y \le K + x), & x > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

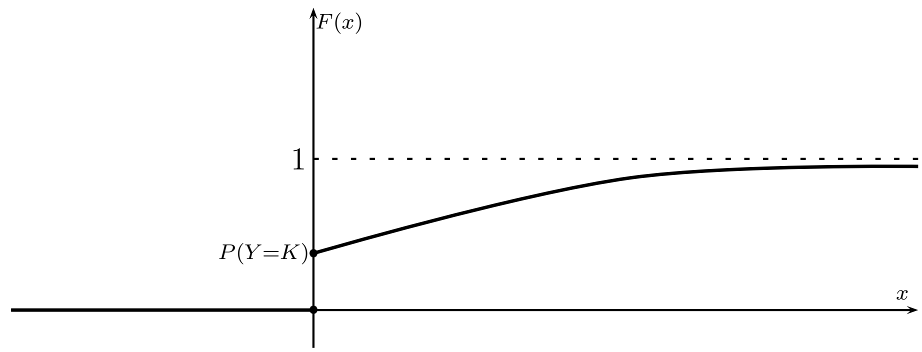
Ako nacrtamo grafik ove funkcije raspodele videćemo, u stvari, da je ova slučajna veličina zbir dve slučajne veličine.

$$F(x) = \alpha F_1(x) + (1-\alpha)F_2(x),$$

gde je

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

$$\alpha = P(Y \le K), \quad 1-\alpha = P(Y > K),$$



$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{P(K \le Y \le K+x)}{P(Y>K)}, & x > 0 \end{cases}.$$

Date verovatnoće možemo izračunati kao

$$P\left(Y \le K\right) = \int_{-\infty}^{K} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$P\left(K \le Y \le K+x\right) = \int_{K}^{K+x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} g(z+K)\,\mathrm{d}z.$$

Zbog ovoga imamo da je

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\int_0^x g(z+K)\,\mathrm{d}z}{P(Y>K)}, & x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I = E\left(\max(Y-K,0)\right) = \int_0^\infty x\,\mathrm{d}F(x) = \int_0^\infty x\,\mathrm{d}(\alpha F_1(x) + (1-\alpha)F_2(x)) = \\ = \int_0^\infty x g(x+K)\,\mathrm{d}x = \int_K^\infty (y-K)g(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Poslednju jednakost smo dobili nakon smene $x+K=y$. Sada ćemo gustinu g zameniti sa vrednošću iz (6.10):

$$I = \int_K^\infty (x-K)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\log\frac{x}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T\right)^2}{2\sigma^2 T}}\cdot\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\,\mathrm{d}x. \tag{6.11}$$

Uvodimo smenu

$$z = \frac{\log\frac{x}{S_0} - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x\sigma\sqrt{T}},$$
$$x = S_0 e^{z\sigma\sqrt{T} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}.$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log\frac{K}{S_0} - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} \left(S_0 e^{z\sigma\sqrt{T} + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K\right) e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z.$$

Podelićemo ovaj intergral na dva integrala, odnosno $I = I_1 - I_2$ gde je

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log\frac{K}{S_0} - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} \left(S_0 e^{z\sigma\sqrt{T} + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}\right) e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z,$$

$$I_2 = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log\frac{K}{S_0} - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z.$$

Drugi integral izračunavamo jednostavno,

$$\begin{aligned} I_2 &= K \cdot \Phi\left(-\frac{\log\frac{K}{S_0} - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \\ &= K\Phi\left(\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})T - \log\frac{K}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \\ &= K\Phi\left(\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \log\frac{S_0}{K}}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Vrednost u zagradi jednaka je konstanti d_2 definisanoj u formulaciji teoreme tako da je

$$I_2 = K\Phi(d_2). \tag{6.12}$$

Podintegralnu funkciju integrala I_1 možemo zapisati kao

$$e^{z\sigma\sqrt{T} + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T - \frac{z^2}{2}} = e^{-\frac{z^2 - 2z\sigma\sqrt{T} + \sigma^2 T}{2} + rT} = e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{T})^2} \cdot e^{rT}.$$

$$I_1 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} e^{rT} \int_{\frac{\log\frac{K}{S_0} - (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{T})^2}\,\mathrm{d}z.$$

Nakon smene

$$\begin{aligned} y &= z - \sigma\sqrt{T}, \\ \mathrm{d}y &= \mathrm{d}z, \end{aligned}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} I_1 &= S_0 e^{rT} \int_{\frac{\log\frac{K}{S_0} - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \, \mathrm{d}y = \\ &= S_0 e^{rT} \Phi\left(\sigma\sqrt{T} - \frac{\log\frac{K}{S_0} - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \\ &= S_0 e^{rT} \Phi\left(\sigma\sqrt{T} + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})T - \log\frac{K}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Jednostavnim sredjivanjem izraza u zagradi dobijamo

$$I_1 = S_0 e^{rT} \Phi\left(\frac{\log\frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = S_0 e^{rT} \Phi\left(d_1\right). \tag{6.13}$$

Oduzimanjem integrala I_1 i I_2 dobijamo traženi integral, odnosno matematičko očekivanje slučajne promenljive $\max(Y - K, 0)$, pa je sada

$$\begin{aligned} c &= e^{-rT}\left[S_0 e^{rT}\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\right] = \\ &= S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2). \end{aligned}$$

□

Posledica 6.1. *Cena evropske put opcije u trenutku 0 sa ugovorenom cenom K, vremenom do isteka opcije T, bezrizičnom kamatnom stopom r iznosi*

$$p = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1), \tag{6.14}$$

gde su d_1 i d_2 konstante definisane u formulaciji teoreme 6.1.

Dokaz. Cena put opcije se lako dobija koristeći put-call paritet

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0.$$

□

Pored cene opcije u trenutku 0, nas može da zanima i njena cena u nekom trenutku t, $0 < t < T$.

Posledica 6.2. *Cena call opcije u trenutku t, $0 < t < T$ sa ugovorenom cenom K, vremenom do isteka opcije T, bezrizičnom kamatnom stopom r je data sa*

$$c = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \tag{6.15}$$

gde je

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}.$$

Primer 6.1. Kolika je vrednost call opcije ako znamo da je trenutna cena akcije 69 n.j. ugovorena cena je 70, bezrizična kamatna stopa iznosi 5% na godišnjem nivou, volatilnost je 35% godišnje, dok je vreme do isteka opcije 6 meseci?

Rešenje. Poznate su nam sledeće vrednosti:

$$\begin{aligned} S_0 &= 69, \\ K &= 70, \\ r &= 0,05, \\ \sigma &= 0,35, \\ T &= 0,5. \end{aligned}$$

Primećujemo da su ovo svi podaci potrebni kako bi primenili formulu (6.5). Dobijamo da je $d_1 = 0,166$, $d_2 = -0,081$, kao i da je vrednost call opcije $c = 7,13$. Primenom put-call pariteta lako možemo izračunati i da je vrednost evropske put opcije sa istim parametrima jednaka $p = 6,4$ novčanih jedinica.

□

Poglavlje 7

Dodatak, C# program, binomni model

```
\begin{small}
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Globalization;
using System.IO;
using NPOI.HSSF.UserModel;
using NPOI.HSSF.Util;

namespace BinomniModel
{

    class Program
    {


        static void Main(string[] args)
        {
            //stilovi
            HSSFCellStyle headerStil;
            HSSFCellStyle headerStilPotamljeno;
            HSSFCellStyle headerStilRotirano;
            HSSFCellStyle crven;


            double So;
```

```
            double u;
            double d;
            double T;
            double r;
            double K;
            //broj koraka
            int n;
            //verovatnoca rasta cena akcije
            double pi;

            System.Console.WriteLine("Unesite So:");
            So = Double.Parse(System.Console.ReadLine());

            System.Console.WriteLine("Unesite u:");
            u = Double.Parse(System.Console.ReadLine());

            System.Console.WriteLine("Unesite d:");
            d = Double.Parse(System.Console.ReadLine());

            System.Console.WriteLine("Unesite T:");
            T = Double.Parse(System.Console.ReadLine());

            System.Console.WriteLine("Unesite r:");
            r = Double.Parse(System.Console.ReadLine());

            System.Console.WriteLine("Unesite K:");
            K = Double.Parse(System.Console.ReadLine());

            System.Console.WriteLine("Unesite broj koraka:");
            n = Int32.Parse(System.Console.ReadLine())+1;

System.Console.WriteLine("Unesite pi (u slucaju da ne znate, unesite d)");
            string pstr=System.Console.ReadLine();
               if (pstr== "d")
               {
                       pi = (Math.Exp(r * T/(n-1)) - d) / (u - d);
               }
               else
               {
                   pi = Double.Parse(pstr);
               }

//niz sa terminalnim tackama, u slucaju da ima n koraka,
```

```
//bice n terminalnih tacki
            double[] terminalpoints = new double[n];

 #region punjenje excel fajla
 CultureInfo oldCl = System.Threading.Thread.CurrentThread.CurrentCulture;
 System.Threading.Thread.CurrentThread.CurrentCulture = new CultureInfo("en-US");
 FileStream fs = null;
    try
            {


                //pravimo novi excel fajl
 fs = new FileStream("bm_" + DateTime.Now.ToString("ddMMyyyHHmmss") +
 ".xls", FileMode.OpenOrCreate, FileAccess.ReadWrite);
                HSSFWorkbook book = new HSSFWorkbook();

 #region stilovi
 HSSFFont font = book.CreateFont();
 font.FontHeight = 10 * 20;
 font.Boldweight = HSSFFont.BOLDWEIGHT_BOLD;

 headerStil = book.CreateCellStyle();
 headerStil.SetFont(font);
 headerStil.Alignment = HSSFCellStyle.ALIGN_LEFT;
 headerStil.VerticalAlignment = HSSFCellStyle.VERTICAL_CENTER;
 headerStil.WrapText = true;


 headerStilRotirano = book.CreateCellStyle();
 headerStilRotirano.SetFont(font);
 headerStilRotirano.Alignment = HSSFCellStyle.ALIGN_LEFT;
 headerStilRotirano.VerticalAlignment = HSSFCellStyle.VERTICAL_CENTER;
 headerStilRotirano.WrapText = true;
 headerStilRotirano.Rotation = 90;

 headerStilPotamljeno = book.CreateCellStyle();
 headerStilPotamljeno.SetFont(font);
 headerStilPotamljeno.FillBackgroundColor = HSSFColor.GREY_25_PERCENT.index;
 headerStilPotamljeno.FillForegroundColor = NPOI.HSSF.Util.HSSFColor.BLACK.index;
 headerStilPotamljeno.FillPattern = HSSFCellStyle.FINE_DOTS;
 headerStilPotamljeno.FillBackgroundColor =
 NPOI.HSSF.Util.HSSFColor.GREY_25_PERCENT.index;
 headerStilPotamljeno.Alignment = HSSFCellStyle.ALIGN_LEFT;
```

```
headerStilPotamljeno.VerticalAlignment = HSSFCellStyle.VERTICAL_CENTER;
headerStilPotamljeno.WrapText = true;


               HSSFFont fontCrven = book.CreateFont();
               fontCrven.FontHeight = 10 * 20;
               fontCrven.Color = HSSFColor.RED.index;

               crven = book.CreateCellStyle();
               crven.SetFont(fontCrven);
               crven.Alignment = HSSFCellStyle.ALIGN_LEFT;
               crven.VerticalAlignment = HSSFCellStyle.VERTICAL_CENTER;
               #endregion

               //popunjavamo parametrima u prvom sheet-u

               #region parametri
               HSSFSheet sheet = book.CreateSheet("Parametri");
               HSSFRow rowpars=sheet.CreateRow(0);
               HSSFCell cellpars = rowpars.CreateCell(0);
               cellpars.SetCellValue("So");
               cellpars = rowpars.CreateCell(1);
               cellpars.SetCellValue(So);

               rowpars = sheet.CreateRow(1);
               cellpars = rowpars.CreateCell(0);
               cellpars.SetCellValue("u");
               cellpars = rowpars.CreateCell(1);
               cellpars.SetCellValue(u);

               rowpars = sheet.CreateRow(2);
               cellpars = rowpars.CreateCell(0);
               cellpars.SetCellValue("d");
               cellpars = rowpars.CreateCell(1);
               cellpars.SetCellValue(d);

               rowpars = sheet.CreateRow(3);
               cellpars = rowpars.CreateCell(0);
               cellpars.SetCellValue("T");
               cellpars = rowpars.CreateCell(1);
               cellpars.SetCellValue(T);

               rowpars = sheet.CreateRow(4);
```

```
cellpars = rowpars.CreateCell(0);
cellpars.SetCellValue("r");
cellpars = rowpars.CreateCell(1);
cellpars.SetCellValue(r);

rowpars = sheet.CreateRow(5);
cellpars = rowpars.CreateCell(0);
cellpars.SetCellValue("K");
cellpars = rowpars.CreateCell(1);
cellpars.SetCellValue(K);

rowpars = sheet.CreateRow(6);
cellpars = rowpars.CreateCell(0);
cellpars.SetCellValue("n");
cellpars = rowpars.CreateCell(1);
cellpars.SetCellValue(n-1);

rowpars = sheet.CreateRow(7);
cellpars = rowpars.CreateCell(0);
cellpars.SetCellValue("pi");
cellpars = rowpars.CreateCell(1);
cellpars.SetCellValue(pi);
#endregion

//kreiramo sheet za model
sheet = book.CreateSheet("Model");

//broj redova = broj koraka * 2
for (int i = 0; i < 2*n+1; i++)
    sheet.CreateRow(i);

HSSFRow row;
HSSFCell cell;

//trenutna kolona
int colnum = 0;
//pocetni red je na vrednosti n, zato sto idemo
//n iznad i n ispod
int startrow = n;

//cena za upis
double price;
//u ovoj prvoj duploj petlji se vrsi forward induction, tj.
```

```
            //upis vrednosti cena
            for (int i = 0; i < n; i++)
            {
                int k = 0;
                for (int m = startrow - i; m <= startrow + i; m=m+2)
                {
                    //racunamo sve koeficijente

                    //ispisujemo samo prvih i poslednjih 10
                    if (i < 10 || i > n - 10)
                    {
                        //ispisujemo u redu n/2-m
                        row = sheet.GetRow(m);
                        cell = row.CreateCell(colnum);
                        cell.CellStyle = headerStil;
                        price = So * Math.Pow(u, i - k) * Math.Pow(d, k);
                        cell.SetCellValue(Math.Round(price,3));


                        if (m == startrow+i)
                        {
                            colnum++;
                        }

//ako smo stigli do kraja, tj. do posl. koraka, upisujemo terminalne tacke
//u preth. kreirani niz, posto nam one trebaju za backward induction
                        if (i == n - 1)
                        {
                            //terminalne tacke pamtimo
                            terminalpoints[k] = price;
                        }
                    }

                    if (i == 10)
                    {
                        //crtamo 3 tacke
                        row = sheet.GetRow(m);
                        cell = row.CreateCell(colnum);
                        cell.CellStyle = headerStil;
                        cell.SetCellValue("...");
                        if (m == startrow+i)
                        {
                            colnum++;
```

```
                            }
                        }
                        k++;

                    }
                }


 //u drugom koraku algoritma, na osnovu terminalnih tacki, vracamo binomni model unaz
 //i racunamo cene opcije

 //ovo su preth. vrednosti, tj. iz preth. koraka (pomocni niz)
                double[] currentfvalues = new double[n];
 //ovo su vredn. iz novog koraka i one imaju za 1 manje promenljivu
                double[] newfvalues=new double[n-1];

 //idemo po terminalnim tackama i racunamo vrednosti opcija za n-ti korak max(Sn-K,0)
                for (int i = 0; i < n; i++)
                {
                    currentfvalues[i] = Math.Max(terminalpoints[i] - K, 0);
                }

                colnum--;

                //idemo unazad i primenjujemo formulu za binomni model sa n koraka
                for (int i = n-1; i >=0; i--)
                {
                    int k = 0;
                    //svaki put newfvalues ce imati za jedan manje promenljivih
                    newfvalues = new double[i];

                    for (int m = startrow - i+1; m <= startrow + i+1; m = m + 2)
                    {
                        //racunamo nove vrednosti za f
                        if (k < i)
                        {
  newfvalues[k] = Math.Exp(-r * T / (n-1)) * (pi * currentfvalues[k] +
                  (1 - pi) * currentfvalues[k + 1]);
                        }
                   //ispisujemo ih ako treba da se prikazu u excel fajlu
                        if (i < 10 || i > n - 10)
                        {
                            //ispisujemo u redu n/2-m
```

```
                row = sheet.GetRow(m);
                cell = row.CreateCell(colnum);

                cell.SetCellValue(Math.Round(currentfvalues[k],3));

                if (m == startrow + i+1)
                {
                    colnum--;
                }
            }
            if (i == 10)
            {
                //crtamo 3 tacke
               row = sheet.GetRow(m);
                cell = row.CreateCell(colnum);

               cell.SetCellValue("...");
                if (m == startrow + i+1)
                {
                    colnum--;
                }
            }
            k++;
        }
        currentfvalues = newfvalues;
    }

#endregion


    book.Write(fs);

}
catch (Exception ex)
{
    throw new Exception(ex.Message);
}
finally
{
    if (fs != null)
        fs.Close();
    System.Threading.Thread.CurrentThread.CurrentCulture = oldCl;
}
```

```
        }

    }
}

\end{small}
```

Poglavlje 8

Zaključak

Kao što smo mogli da vidimo, matematika koja se nalazi u osnovi i najprostijeg modela finansijske matematike prevazilazi gradivo osnovnih studija. Samu srž čine teorija martingala i stohastičke diferencijalne jednačine, a tu se takodje pojavljuje i analiza vremenskih serija i naravno teorija verovatnoće i slučajnih procesa. O atraktivnosti ove oblasti izlišno je i govoriti, ona, uz aktuarsku matematiku, trenutno spada u red najpopularnijih matematičkih disciplina u svetu. Kada je reč o Black-Scholes formuli, iako ona ima svoje mane vezane za njene pretpostavke, o njenom značaju govori podatak da se i danas, posle gotovo 40 godina i dalje koristi, iako je razvoj kompjuterske tehnologije značajno doprineo razvoju i drugih tehnika. *Greeks*, nastale iz Black-Scholes formule danas se koriste kao jedan od važnih instrumenata za obezbedjivanje od rizika, i rad o njihovoj primeni u hedžingu bio bi sjajni nastavak ove teme.

Naravno, proširivanje ove tematike moguće je u mnogim pravcima. Zbog malog obima tržišta, kao što je napomenuto, malo je verovatno da će se opcije pojaviti kod nas, ipak srpsku, kao i druge berze u okruženju, moguće je poprilično kvalitetno opisati preko jump procesa. Volatilnost i procena volatilnosti je jedna od najinteresantnijih tema, koriščenje ARCH i GARCH metoda u njenoj proceni pokazuje tesnu povezanost finansijske matematike sa analizom vremenskih serija.

Literatura

[1] John C. Hull, 2003. *Options, Futures and Other Derivatives, 5th Edition*, Prentice Hall, New Jersey.

[2] Lionel Martellini, Philippe Priaulet, Stephane Priaulet, 2003. *Fixed-Income Securities*, John Wiley & Sons, New York.

[3] Alison Etheridge, 2002. *A Course in Financial Calculus*, Cambridge University Press.

[4] David G. Luenberger, 1998. *Investment Science*, Oxford University Press.

[5] J. Cox, Sheldon Ross, Mark Rubinstein, October 1979. *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Mathematics, 229-264.

[6] Pavle Mladenović, 2002. *Verovatnoća i statistika*, Matematički fakultet, Beograd.

[7] Zdizistaw Brzeźniak, Tomasz Zastawniak, 1999. *Basic Stohastic Processes*, Springer, London.

[8] Sheldon Ross, 1999. *An Introduction to Mathematical Finance*, Cambridge University Press.

[9] Steven Shreve, 2004. *Stohastic Calculus in Finance II, Continous-Time Models*, Springer, London.

[10] Miloš Arsenović, Danko Jocić, Ratko Dostanić, 1998. *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora*, Matematički fakultet, Beograd.

[11] Patrick Billingsley, 1986. *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, New York.

[12] David WIlliams, 1991. *Probability with Martingales*, Cambridge University Press.

[13] Ioannis Karatzas, Steven Shreve, 1988. *Brownian Motion and Stohastic Calculus*, Springer, New York.

[14] Rama Cont, Peter Tankov, 2004. *Financial Modelling With Jump Processes*, Chapman & Hall, London.

[15] Robert Elliott, Ekkehard Kopp, 2005. *Mathematics on Financial Markets*, Springer, New York.

[16] Robert Ash, 2000. *Probability and Measure Theory*, Academic Press, San Diego.

[17] Michel Loéve, 1978. *Probability Theory II*, Springer, New York.

[18] Zoran Pop-Stojanović, *Construction of Brownian Motion* (poglavlje iz još neobjavljene knjige).

[19] Zoran Pop-Stojanović, *Theory of Martingales* (poglavlje iz još neobjavljene knjige).

[20] Jovan Mališić, 1989. *Slučajni procesi*, Gradjevinska knjiga, Beograd.

[21] Robert Elliott, 1982. *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, Berlin.

[22] Fischer Black, Myron Scholes, 1973. *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economics 81, 635-654.

[23] Racho Denchev, *Mathematical Market Models* (rukopis još neobjavljene knjige).