
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ЧЕВИЈЕВА ТЕОРЕМА И ПОСЛЕДИЦЕ
Мастер рад

Кандидат:
Рајка Милетић

Ментор:
проф. др Неда Бокан

Београд, 2010.

САДРЖАЈ

Увод	3
I. ЧЕВИЈЕВА ТЕОРЕМА	4
I.1. Доказ Чевијеве теореме	4
I.2. Тригонометријска форма Чевијеве теореме	6
I.3. Изотомична и изогонална кореспонденција	7
I.4. Чевијева теорема за просторни четвороугао	10
I.5. Доказ Чевијеве теореме помоћу Менелајеве теореме	11
I.6. Чевијева теорема – доказ помоћу вектора	12
II. ГЕОМЕТРИЈА МАСА И ЧЕВИЈЕВА ТЕОРЕМА	14
III. ПРОЈЕКТОВАЊЕ И ЧЕВИЈЕВА ТЕОРЕМА	20
IV. ДОДАТАК	28
D1. Менелајева теорема	29
D.1.1. Тригонометријски облик Менелајеве теореме	30
D.1.2. Менелајева теорема за просторни четвороугао	31
D2. Геометрија и уметност	
ЛИТЕРАТУРА	35

УВОД

Чевијева¹ теорема (Ћовани Чева, италијански геометар 17. века, 1647.–1734., теорема публикована 1678.) садржи значајно и дубоко својство троугла и трију конкурентних правих које има свој елегантан алгебарски еквивалент.

Пресеци висина троугла, тежишних линија, симетрала углова, као и других значајних правих троугла се могу извести из Чевијевог теореме, тако да њихова метричка својства падају у други план.

У првом поглављу „Чевијева теорема“ навели смо више доказа Чевијевог теореме. Такође је наведен њен тригонометријски еквивалент, као и неколико задатака као примери у којима се Чевијевом теоремом елегантно добија решење. Дат је и израз за Чевијеву теорему просторног четвороугла и тиме заокружен приступ овој важној теорему.

Друго поглавље „Геометрија маса и Чевијева теорема“ доноси нов механички приступ и примену Чевијевог теореме.

Треће поглавље „Пројектовање и Чевијева теорема“ садржи делове пројективне геометрије (без строгог аксиоматског заснивања, онолико колико може да схвати и прихвати средњошколац, са знацима богатства које постоји у методама пројектовања), којим се добија дубље поимање и повезивање метричких особина. То само говори о богатству садржаја Чевијевог теореме.

Четврто поглавље „Додатак“ садржи доказе Менелајевог теореме, коју смо често цитирали у раду приликом доказивања Чевијевог теореме, као и додатак „Геометрија и уметност“ у коме се може видети трагање ренесансних уметника за методама пројектовања приликом приказивања света који нас окружује.

Аутор је захвалан на сарадњи, помоћи и разумевању ментору проф. др Неди Бокан приликом израде рада.

Београд, 2010.

¹ У математичкој литератури на српском језику влада неуједначеност приликом транскрипције имена Чеве и теореме са његовим именом. Тако, на пример, могу се у збиркама и књигама из геометрије наћи називи: Чевина теорема, Чевијева теорема, Чеваова теорема, теорема Чевија. Ми смо у овом раду изабрали „већински“ назив - Чевијева теорема.

I. ЧЕВИЈЕВА ТЕОРЕМА

Чевијева теорема: Нека су на правама BC, CA, AB страница троугла ABC дате тачке A_1, B_1, C_1 . Да би се праве AA_1, BB_1, CC_1 секле у једној тачки или биле паралелне потребно је и довољно да је

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1 \quad (1.1)$$

I. 1. ДОКАЗ ЧЕВИЈЕВЕ ТЕОРЕМЕ

Услов је потребан. Нека се праве AA_1, BB_1, CC_1 секу у тачки P . Поставимо праву кроз теме A троугла ABC паралелну правој BC (Слика 1.1 и 1.2.) и нека су пресечне тачке те праве са BB_1 и CC_1 редом тачке N и M .

Из Талесове теореме следи:

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{BC}},$$

$$\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}},$$

$$\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{AN}}.$$

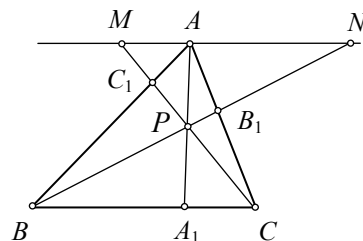
Множећи ове три пропорције добија се тражена једнакост (1.1). $\square$

Нека су праве AA_1, BB_1, CC_1 паралелне (слика 1.3).

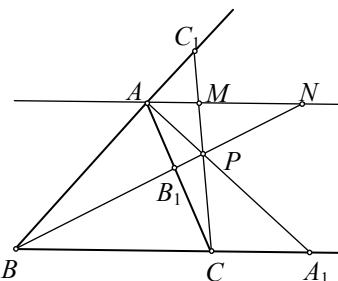
Тада по Талесовој теореме имамо:

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{BC}} \text{ и } \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CA_1}}, \text{ па је једнакост (1.1)}$$

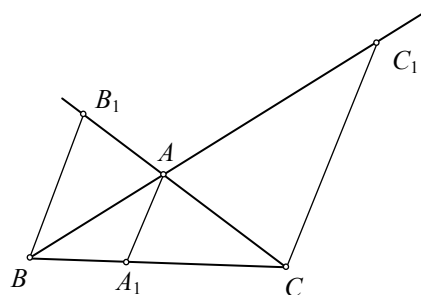
тачна. $\square$



Слика 1.1.



Слика 1.2.



Слика 1.3.

Услов довољан.

Нека је тачна једнакост (1.1). Треба доказати да се праве AA_1, BB_1, CC_1 секу у једној тачки, или да су паралелне. За две праве AA_1, BB_1 су могућа два случаја:

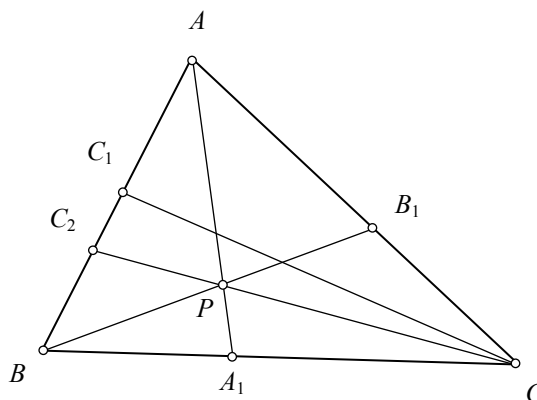
- а) праве AA_1, BB_1 се секу у једној тачки P ,
- б) праве AA_1, BB_1 су паралелне.

Размотримо први случај и докажимо да и CC_1 садржи тачку P . Претпоставимо супротно (Слика 1.4). Нека права CP сече AB у тачки C_2 .

Тада је по услову (1.1) $\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{C_2A}} = 1$.

Како важи и да је $\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$, то добијамо $\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{C_2A}}$. То значи да се тачке C_1 и C_2 поклапају, а то опет значи да тачка P припада правој CC_1 .

б) Ако су праве AA_1, BB_1 паралелне, то ће и права CC_1 бити паралелна, јер ако би CC_1 секла BB_1 , тада би по раније доказаном, и права AA_1 пролазила кроз пресечну тачку, што је у супротности са паралелношћу правих AA_1, BB_1 . $\square$



Слика 1.4.

1.2. ТРИГОНОМЕТРИЈСКА ФОРМА ЧЕВИЈЕВЕ ТЕОРЕМЕ

Ако посматрамо оријентисане углове (оријентација је битна због предзнака синуса угла):

$$\alpha_1 = \angle BAA_1, \alpha_2 = \angle A_1AC, \quad \gamma_1 = \angle ACC_1, \gamma_2 = \angle C_1CB, \quad \beta_1 = \angle CBB_1, \beta_2 = \angle B_1BA,$$

(Слика 1.5.), тада једнакост (1.1.) Чевијеве теореме можемо представити у еквивалентном облику помоћу синуса углова. Како је по синусној теореме:

$$\frac{AB_1}{\sin \beta_2} = \frac{AB}{\sin \angle AB_1B} \quad \text{и} \quad \frac{B_1C}{\sin \beta_1} = \frac{BC}{\sin \angle BB_1C}, \quad \text{а синуси упоредних (једнако}$$

оријентисаних) углова су једнаки па имамо једнакост:

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{AB \sin \beta_2}{BC \sin \beta_1}.$$

$$\text{Аналогно добијамо и једнакости} \quad \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{AC \sin \alpha_2}{AB \sin \alpha_1} \quad \text{и} \quad \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{BC \sin \gamma_2}{AC \sin \gamma_1}.$$

Из последњих једнакости добијамо:

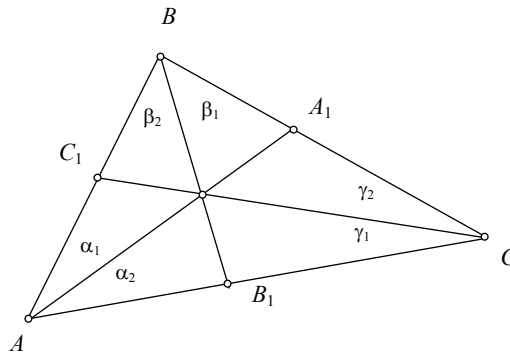
$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \cdot \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_1} = 1, \quad \text{па је тригонометријски облик}$$

Чевијеве теореме:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1. \quad (1.2)$$

Напомена: Ако су праве AA_1, BB_1, CC_1 симетрале углова троугла тада су углови $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$ и $\gamma_1 = \gamma_2$ па је једнакост (1.2), односно (1.1) задовољена и по Чевијевој теореме добијамо да се симетрале углова троугла секу у једној тачки.

Врло елегантан доказ.



Слика 1.5.

Пример 1: Над страницама троугла ABC конструисани су споља једнакостранични троуглови BCA_1, CAB_1, ABC_1 . Доказати да се праве AA_1, BB_1, CC_1 секу у једној тачки (Слика 1.7.).

Решење: Користећемо Чевејеву теорему у тригонометријском облику уз исто означавање углова.

На почетку се ограничимо да су углови троугла мањи од 120° . Из троуглова ABA_1 и CAA_1 по синусној теореме добијамо:

$$\frac{AA_1}{\sin(60^\circ + \angle B)} = \frac{a}{\sin \alpha_1} \quad \text{и} \quad \frac{AA_1}{\sin(60^\circ + \angle C)} = \frac{a}{\sin \alpha_2}.$$

Из ових једнакости добијамо:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin(60^\circ + \angle B)}{\sin(60^\circ + \angle C)}.$$

На исти начин се добија и за остале углове.

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\sin(60^\circ + \angle C)}{\sin(60^\circ + \angle A)} \quad \text{и}$$

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin(60^\circ + \angle A)}{\sin(60^\circ + \angle B)}.$$

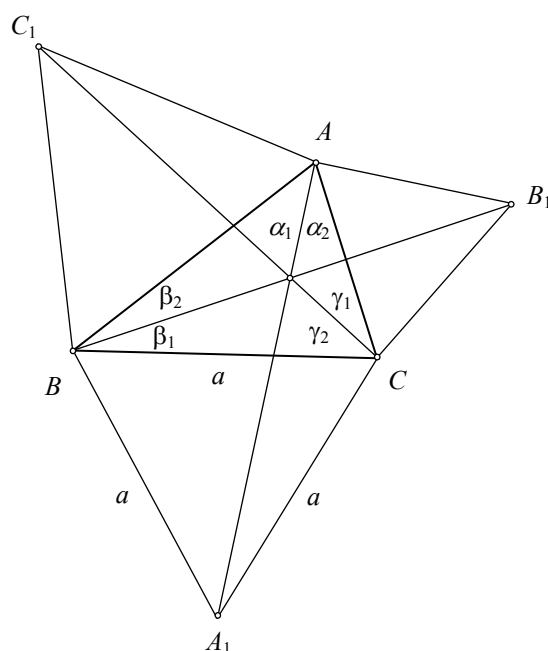
Множећи ове три једнакости добија се $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1$,

што је једнакост Чевејеве теореме у тригонометријском облику, а то значи да се праве AA_1, BB_1, CC_1 секу у једној тачки.

Ако је угао $\angle ACB = 120^\circ$, тада су тачке B, C, B_1 колинеарне, као и тачке A, C, A_1 . Дакле, посматране праве се секу у тачки C .

А ако је угао $\angle ACB > 120^\circ$, у горњи доказ треба унети исправке:

Праве AA_1 и BB_1 се секу ван троугла ABC , па угао $60^\circ + \angle C$ треба заменити углом $360^\circ - (60^\circ + \angle C)$, што неће променити резултат.



Слика 1.6.

Пример 2. Из тачке M повучене су тангенте MA и MB на круг k и две произвољне сечице CD и EF (Слика 1.7.). Доказати да се праве CF и DE секу на правој AB која спаја тачке додир тангенти и круга.

Решење: Применом Чевијеве теореме у тригонометријском облику на праве AB, CF, DE које секу стране троугла AEF добићемо жељени резултат.

Дате праве AB, CF, DE се секу у једној тачки ако је испуњен услов

$$\frac{\sin \angle EAB}{\sin \angle BAF} \cdot \frac{\sin \angle FED}{\sin \angle DEA} \cdot \frac{\sin \angle AFC}{\sin \angle CFE} = 1. \quad (1.3.)$$

Сви углови који фигуришу у претходном изразу (1.3.) су периферијски углови круга k те су њихови синуси пропорционални наспрамним сечицама, на пример, $\sin \angle EAB = \frac{|BE|}{2R}$, где је R полупречник круга, па се једнакост (1.3.) своди на доказивање једнакости:

$$\frac{|BE|}{|BF|} \cdot \frac{|DF|}{|DA|} \cdot \frac{|CA|}{|CE|} = 1. \quad (1.4.)$$

Из сличних троуглова MAC и MDA ($\angle MAC = \angle MDA$ - угао између тетиве и тангенте једнак је периферијском углу над том тетивом, $\angle AMC$ заједнички за оба троугла) следи:

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AM|}{|MD|}.$$

Из сличности троуглова MCE и MDF ($\angle MCE = \angle MFD$, $\angle CMF$ заједнички за оба троугла) следи:

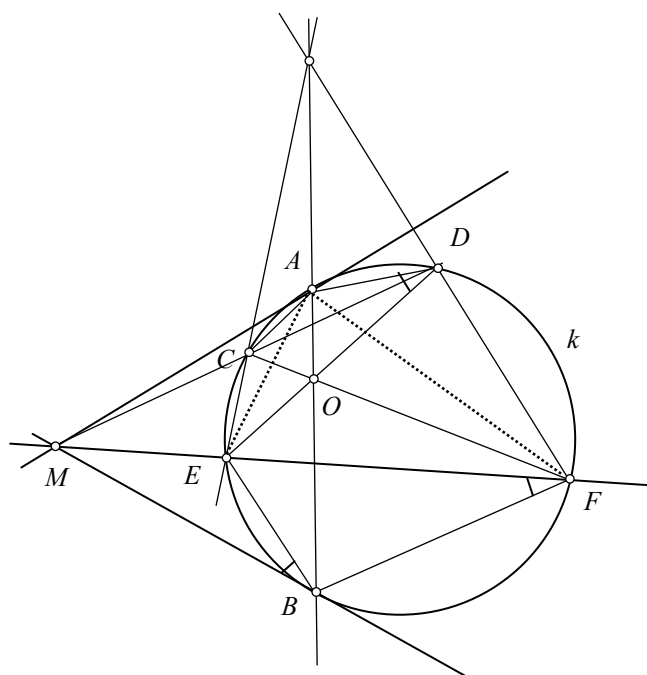
$$\frac{|DF|}{|CE|} = \frac{|MD|}{|ME|}$$

Из сличности троуглова MEB и MBF ($\angle MBE = \angle MFB$ - угао између тетиве и тангенте једнак је периферијском углу над том тетивом, $\angle BME$ заједнички за оба троугла) следи:

$$\frac{|BE|}{|BF|} = \frac{|ME|}{|MB|}, |MB| = |MA| -$$

једнакост тангентних одсечака из исте тачке.

При множењу датих односа на десној страни ће бити 1, па је самим тим испуњена једнакост (1.3.).



Слика 1.7.

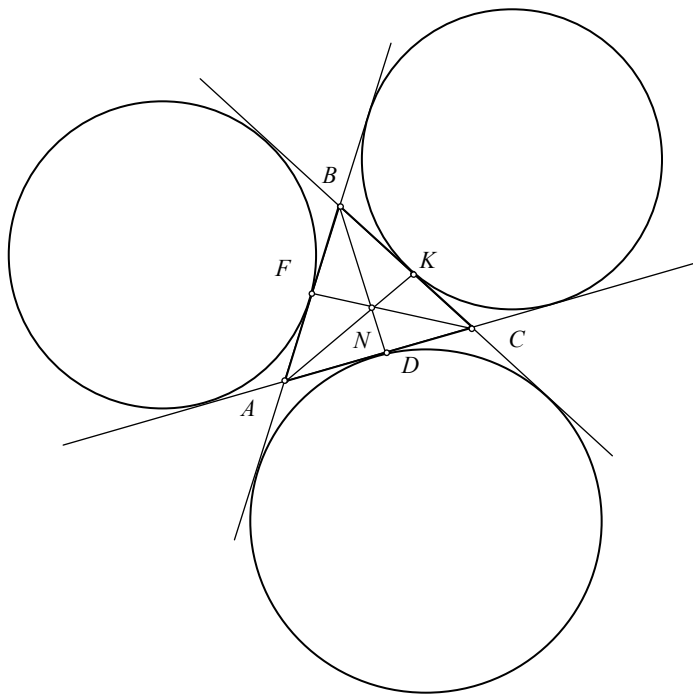
Пример 3: Дужи које спајају темена троугла са тачкама додира страница и споља описаних кругова троугла се секу у једној тачки (слика 1.8.).

Доказ: Нека споља описани кругови додирују странице AB , BC и CA у тачкама F , K , D .

Како је $AD = BK = p - c$, $CD = BF = p - a$, $CK = AF = p - b$ ², то се добија:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CD}{DA} = \frac{p-b}{p-a} \cdot \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} = 1.$$

И поново по Чевијевој теореме следи да се дужи AK , BD и CF секу у једној тачки N . □

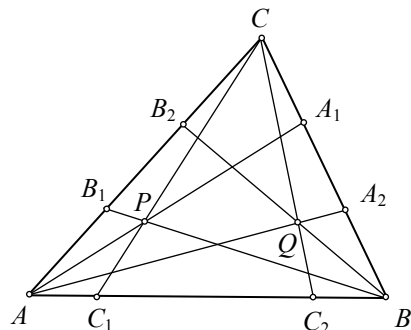


Слика 1.8.

² Ове једнакости се врло често користе као готове и наведене су у оквиру Великог задатка из предмета Основи геометрије који почиње: „Конструисати троугао ако је дато ...“.

1.3. ИЗОТОМИЧНА И ИЗОГОНАЛНА КОРЕСПОДЕНЦИЈА

За било коју тачку троугла ABC (изузев тачака на страницама истог) посебну пажњу привлачи њена изотомично, као и изогонално спрегнута тачка.



Слика 1.9.

Нека се праве AA_1, BB_1, CC_1 које садрже темена троугла ABC секу у тачки P и секу праве BC, CA, AB у тачкама A_1, B_1, C_1 .

Конструиримо тачке A_2, B_2, C_2 симетричне тачкама A_1, B_1, C_1 редом, у односу на средишта дужи BC, CA, AB . Тада се и праве AA_2, BB_2, CC_2 такође секу у једној тачки Q (Слика 1.9.).

Докажимо то.

Ако су тачке C_1 и C_2 симетричне у односу на средиште E дужи AB , тада очигледно важи $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BC_2}{C_2A}$. Аналогно закључујемо и за остале односе

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CA_2}{A_2B} \text{ и } \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AB_2}{B_2C}.$$

Ако је испуњена Чевијева једнакост (1.1) за тачке A_1, B_1, C_1 , то ће она бити такође важећа и за тачке A_2, B_2, C_2 из претходних односа.

Кажемо тачке P и Q су **изотомично спрегнуте** у односу на дати троугао.

Нека су даље AA_1 и AA_2 симетричне у односу на симетралу угла код темена A , троугла ABC , а праве BB_1 и BB_2 симетричне у односу на симетралу угла темена B и праве CC_1 и CC_2 симетричне у односу на симетралу угла код темена C . Тада ако прва тројка правих AA_1, BB_1, CC_1 има заједничку тачку P , онда ће и друга тројка правих AA_2, BB_2, CC_2 имати заједничку тачку M .

Доказ се добија из тригонометријског облика Чевијеве теореме (1.2.).

Заиста, ако права AA_1 образује са правама AB и AC оријентисане углове α_1 и α_2 , тада ће права AA_2 са правама AB и AC образовати оријентисане углове α_2 и α_1 . Исто важи и за остале праве BB_1, BB_2 , CC_1 и CC_2 . Како Чевијева теорема важи за праве AA_1, BB_1, CC_1 , важиће и за праве AA_2, BB_2, CC_2 .

Кажемо тачке P и M су **изогонално спрегнуте** у односу на троугао ABC .

Може се показати да су центар O описаног круга око троугла и ортоцентар H изогонално спрегнути у односу на дати троугао.

1.4. ЧЕВИЈЕВА ТЕОРЕМА ЗА ПРОСТОРНИ ЧЕТВОРОУГАО

Чевијева теорема је изворно дата у облику (1.1.). Теорема која важи за просторни четвороугао када уместо правих узимамо равни које садрже странице просторног четвороугла и секу мимоилазну страницу просторног четвороугла има елегантан алгебарски еквивалент и носи Чевијево име.

Нека је страницама AB, BC, CD, DA одређен просторни четвороугао $ABCD$ и на њима дате тачке A_2, B_2, C_2, D_2 . Да би се равни $A_2CD, B_2DA, C_2AB, D_2BC$ секле у једној тачки P потребно је и довољно да важи:

$$\frac{\overrightarrow{AA_2}}{\overrightarrow{A_2B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB_2}}{\overrightarrow{B_2C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC_2}}{\overrightarrow{C_2D}} \cdot \frac{\overrightarrow{DD_2}}{\overrightarrow{D_2A}} = 1 \quad (1.5.)$$

Доказ. Услов је потребан. Нека праве PA, PB, PC, PD секу равни BCD, CDA, DAB, ABC у тачкама A_1, B_1, C_1, D_1 . По Чевијевој теореме за троугао ABC и тачку D_1 (слика 1.10.) имамо:

$$\frac{\overrightarrow{AA_2}}{\overrightarrow{A_2B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB_2}}{\overrightarrow{B_2C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CK}}{\overrightarrow{KA}} = 1.$$

По истој теореме за троугао ACD и тачку B_1 имамо

$$\frac{\overrightarrow{DD_2}}{\overrightarrow{D_2A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC_2}}{\overrightarrow{C_2D}} = 1.$$

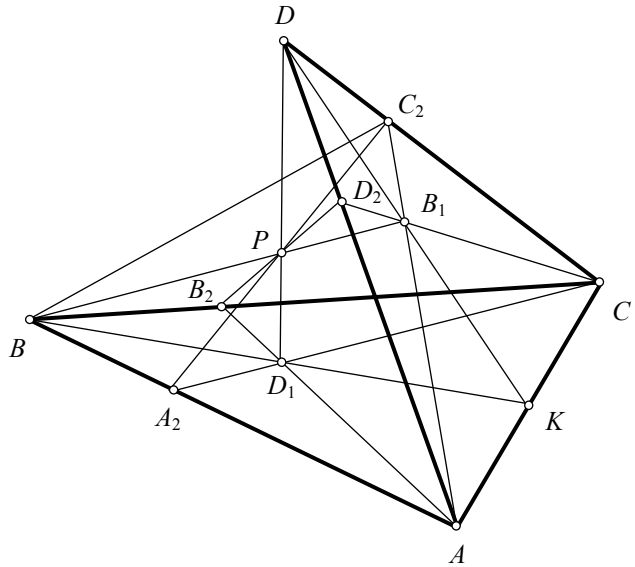
Множећи дате односе добијамо тражену Чевијеву једнакост (1.5.).

Услов је довољан. Нека је задовољена једнакост (1.5.)

Тада по Менелајевој теореме (4.3.) за просторни четвороугао $ABCD$ тачке A_2, B_2, C_2, D_2 леже у једној равни. То значи да се праве A_2C_2 и B_2D_2 секу у некој тачки P или су паралелне.

То значи да и равни $A_2CD, B_2DA, C_2AB, D_2BC$ садрже тачку P . $\square$

Последица: Ако тачке A_2, B_2, C_2, D_2 које припадају редом правим AB, BC, CD, DA , леже у истој равни, тада се равни $A_2CD, B_2DA, C_2AB, D_2BC$ секу у једној тачки и обрнуто.



Слика 1.10.

1.5. ДОКАЗ ЧЕВИЈЕВЕ ТЕОРЕМЕ ПОМОЋУ МЕНЕЛАЈЕВЕ ТЕОРЕМЕ

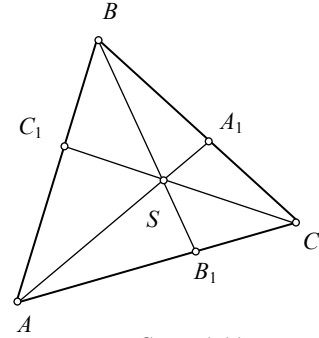
Менелајева теорема (Менелај, први век нове ере): Нека је у равни дат троугао ABC . Тачке P, Q, R које се налазе редом на правама BC, CA, AB и различите су од темена троугла, припадају једној правој АКО И САМО АКО је: $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.

Нека је у равни E^2 дат троугао ABC . Праве одређене теменима A, B, C и тачкама A_1, B_1, C_1 које се налазе на правама BC, CA, AB припадају једном прамену ако и само ако је:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1. \quad (1.6.)$$

Доказ: Претпоставимо најпре да се праве AA_1, BB_1, CC_1 секу у некој тачки S (Слика 1.11). Применом Менелајеве теореме најпре за троугао $\triangle AA_1B$ и праву C_1C , а затим и на троугао $\triangle A_1CA$ и праву BB_1 налазимо:

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{A_1S}}{\overrightarrow{SA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SA_1}} = -1.$$



Слика 1.11.

Множењем одговарајућих страна ових једнакости добија се једнакост Чевијевог теореме.

Обрнуто, ако важи релација (1.6.) и ако права одређена тачкама A и $S = BB_1 \cap CC_1$ сече праву BC у тачки A_2 , према доказаном делу ове теореме имамо да је

$$\frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{A_2C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1. \quad (1.7.)$$

Из (1.6.) и (1.7.) следи $A_1 = A_2$.

С обзиром да Менелајева теорема важи и када је неки од односа на левој страни једнак -1 , Чевијева теорема важи и за случај када су праве AA_1, BB_1, CC_1 паралелне. □

1.6. ЧЕВИЈЕВА ТЕОРЕМА – ДОКАЗ ПОМОЋУ ВЕКТОРА

Векторски рачун је новијег доба и није био познат математичарима 17. века. Данас се елементи векторског рачуна уче у средњој школи. Истраживања особина векторских простора у 19. веку су убрзали развој, не само математике, већ и механике, физике и других природних наука. Доказ Чевијеве теореме преузет из [2, стр. 87-88.]

Нека су P, Q, R тачке редом на правама BC, AC и AB троугла ABC .

Доказати да је:

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1 \text{ ако и само ако се праве } AP, BQ \text{ и}$$

CR секу у једној тачки или су паралелне.

Доказ:

Нека је $\nu = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}, \lambda = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}, \mu = \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}$. Постоје два случаја

а) када се праве AP и BQ секу;

б) када су праве AP и BQ паралелне.

Ако је $AP \cap BQ = \{S\}$ тада се лако доказује да је

$$1 + \lambda + \lambda\mu \neq 0 \text{ и}$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{1 + \lambda + \lambda\mu} \overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{1 + \lambda + \lambda\mu} \overrightarrow{AC}.$$

У случају када је $1 + \lambda + \lambda\mu = 0$, следи $\lambda \neq 0$, $\mu = -\frac{1 + \lambda}{\lambda}$ и

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{1 + \lambda} \overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{1 + \mu} \overrightarrow{BC} + \frac{\mu}{1 + \mu} \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1 + \mu} \overrightarrow{AC} = -(1 + \lambda) \overrightarrow{AP}, \text{ па су вектори } \overrightarrow{AP} \text{ и}$$

$\overrightarrow{BQ}$ колинеарни.

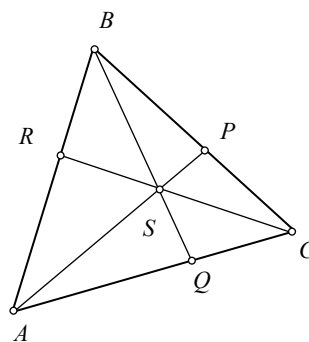
То значи да су у овом случају праве AP и BQ паралелне.

На овај начин је доказано да се праве AP и BQ секу ако и само ако је

$$1 + \lambda + \lambda\mu \neq 0.$$

На исти начин се доказује да се праве AP и CR секу ако је и само ако

$$1 + \nu + \lambda\nu \neq 0.$$



Слика 1.12.

Уколико је тачка S' пресек ових правих $AP \cap CR = \{S'\}$, тада је

$$\overrightarrow{AS'} = \frac{1}{1+v+\lambda v} \overrightarrow{AB} + \frac{v}{1+v+\lambda v} \overrightarrow{AC}.$$

а) У случају када се праве AP и BQ секу, односно када је $1+\lambda+\lambda\mu \neq 0$,
Чевина теорема гласи:

$\lambda v \mu = 1$ ако и само ако се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки (прамен конкуретних правих).

Нека је прво $\lambda v \mu = 1$. У том случају $v = \frac{1}{\lambda \mu}$, па је $1+v+\lambda v = \frac{\lambda \mu + 1 + \lambda}{\lambda \mu} \neq 0$.

Због тога се и праве AP и CR секу у некој тачки $AP \cap CR = \{S'\}$. Лако се доказује да је у овом случају $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AS'}$, па је $S \equiv S'$ и праве AP, BQ и CR се секу у једној тачки.

Обрнуто: Нека се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки. Тада је $S \equiv S'$ ($AP \cap CR = \{S'\}$), па је $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AS'}$. Изједначавањем претходно добијених израза за ове векторе и коришћењем линеарне независности вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ добија се $\frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu} = \frac{v}{1+v+\lambda v}$, то јест $\lambda v \mu = 1$. $\square$

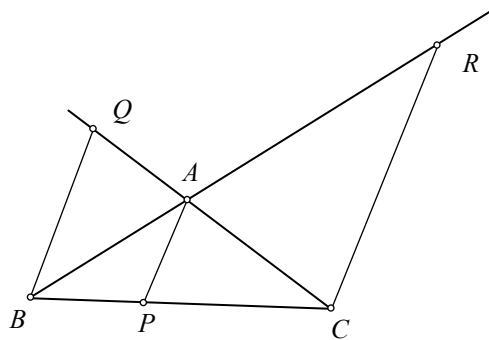
б) Ако су праве AP и BQ паралелне, тада је $1+\lambda+\lambda\mu = 0$, следи да је $\lambda \neq 0$ и $\mu = -\frac{1+\lambda}{\lambda}$.

Теорема у овом случају гласи: $\lambda v \mu = 1$ ако и само ако су праве AP, BQ и CR паралелне.

Нека је $\lambda v \mu = 1$, Тада је $v = \frac{1}{\lambda \mu} = -\frac{1}{1+\lambda}$, па је $v + v\lambda + 1 = 0$. Одавде следи да су праве AP и CR паралелне.

Обрнуто: Нека су праве AP, BQ и CR паралелне (слика 1.13).

Тада је $v + v\lambda + 1 = 0$ и $1+\lambda+\lambda\mu = 0$, одакле се лако проверава да је $\lambda v \mu = 1$. $\square$



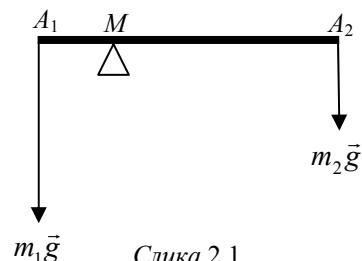
Слика 1.13.

II. ГЕОМЕТРИЈА МАСА И ЧЕВИЈЕВА ТЕОРЕМА

Посматрајмо познати Архимедов закон полуге (слика 2.1). На слици су приказане две тачке A_1 и A_2 оптерећене масама m_1 и m_2 . Нека је тачка M равнотежна тачка.

Тада је систем у равнотежи ако важи $\frac{m_2}{m_1} = \frac{MA_1}{MA_2}$,

што се може записати $m_1 \cdot MA_1 = m_2 \cdot MA_2$, или у векторском облику $m_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} = \vec{0}$. Тачка M се у механици назива центар масе система материјалних тачака A_1 и A_2 .



За даље разматрање су нам потребне дефиниције новоуведених појмова.

Дефиниција: Материјалном тачком називамо пар $(A; m)$, где је A нека тачка равни, а m позитиван број (маса тачке A)³.

Дефиниција: Систем материјалних тачака је скуп који се састоји из коначног броја материјалних тачака.

Дефиниција: Центар масе система материјалних тачака $(A_1; m_1)$, $(A_2; m_2)$, ..., $(A_k; m_k)$ је тачка M за коју важи једнакост:

$$m_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \dots + m_k \cdot \overrightarrow{MA_k} = \vec{0}.$$

(За посматрани систем од две тачке на слици 1, тачка M је центар масе.)

Даље ћемо сматрати да је у равни задат правоугли координатни систем.

Теорема 1: За задати систем материјалних тачака постоји центар масе и притом је јединствен.

Доказ: Нека тачке датог система материјалних тачака имају координате:

$A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_k(x_k, y_k)$ и нека су у њима распоређене редом масе $m_1, m_2, \dots, m_k$.

Одредимо координате тачке $M(x, y)$ која задовољава дефиницију центра масе система материјалних тачака.

Вектори $\overrightarrow{MA_i}$, где је $i = 1, 2, \dots, k$ имају координате $\overrightarrow{MA_i} = (x_i - x, y_i - y)$.

Тада вектор $m_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \dots + m_k \cdot \overrightarrow{MA_k}$ има координате:

³ У неким књигама, као на пример, у [1] материјална тачка се обележава са mA .

$$\left(\sum_{i=1}^k m_i (x_i - x); \sum_{i=1}^k m_i (y_i - y) \right).$$

Услов да је тачка $M(x, y)$ центар масе је еквивалентан систему једначина:

$$m_1(x_1 - x) + m_2(x_2 - x) + \dots + m_k(x_k - x) = 0,$$

$$m_1(y_1 - y) + m_2(y_2 - y) + \dots + m_k(y_k - y) = 0, \text{ из кога добијамо координате}$$

центра маса M :

$$x = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i}{\sum_{i=1}^k m_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^k m_i y_i}{\sum_{i=1}^k m_i}.$$

Тиме је доказано постојање центра маса $M(x, y)$ и притом је центар маса јединствен. $\square$

Примедба: Ако имамо систем материјалних тачака који је разложен на комплементне подсистеме материјалних тачака, тада сваки од подсистема можемо заменити његовим центром масе и поједноставити даље тражење центра маса целокупног система. Другим речима, важи следећа:

Теорема 2: Нека су дата два комплементна система материјалних тачака $(A_1; m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_k, m_k)$ и $(B_1; n_1), (B_2, n_2), \dots, (B_t, n_t)$. Тада се центар масе тог система поклапа са центром маса система

$$\left(M, \sum_{i=1}^k m_i \right), (B_1; n_1), (B_2, n_2), \dots, (B_t, n_t).$$

Доказ: Нека тачке $A_i, i = 1, \dots, k$ имају координате

$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_k(x_k, y_k)$, а тачке $B_j, j = 1, \dots, t$ координате

$B_1(a_1, b_1), B_2(a_2, b_2), \dots, B_t(a_t, b_t)$.

Тада ако је $M_1(u_1, v_1)$ центар масе целокупног система биће:

$$u_1 = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i + \sum_{j=1}^t n_j a_j}{\sum_{i=1}^k m_i + \sum_{j=1}^t n_j}, \quad v_1 = \frac{\sum_{i=1}^k m_i y_i + \sum_{j=1}^t n_j b_j}{\sum_{i=1}^k m_i + \sum_{j=1}^t n_j}.$$

Са друге стране нека је $M_2(u_2, v_2)$ центар масе система материјалних тачака

$$\left(M, \sum_{i=1}^k m_i \right), (B_1; n_1), (B_2, n_2), \dots, (B_t, n_t). \text{ Тада ће бити:}$$

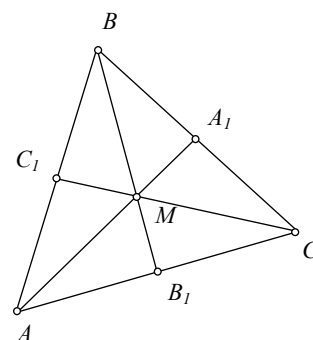
$$u_2 = \frac{(\sum_{i=1}^k m_i)x + \sum_{j=1}^t n_j a_j}{\sum_{i=1}^k m_i + \sum_{j=1}^t n_j}, \quad v_2 = \frac{(\sum_{i=1}^k m_i)y + \sum_{j=1}^t n_j b_j}{\sum_{i=1}^k m_i + \sum_{j=1}^t n_j}, \text{ одакле добијамо:}$$

$$u_2 = \frac{(\sum_{i=1}^k m_i)x + \sum_{j=1}^t n_j a_j}{\sum_{i=1}^k m_i + \sum_{j=1}^t n_j} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i \cdot \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_k} + \sum_{j=1}^t n_j a_j}{\sum_{i=1}^k m_i + \sum_{j=1}^t n_j} = u_1.$$

Аналогно се показује да је $v_2 = v_1$, то јест тачке M_1 и M_2 се поклапају. $\square$

Примедба: Може се увести још строже и апстрактније заснивање геометрије маса (погледати: [1]). За наше даље истраживање је сасвим довољно претходно речено.

Посматрајмо троугао ABC у чијим су теменима распоређене једнаке масе m (слика 2.2.). По претходној теорими центар маса M датог троугла можемо заменити са центром маса система $(C; m)$ и $(C_1; 2m)$, где је C_1 центар маса система $(A; m)$ и $(B; m)$ и C_1 је средина дужи AB . По дефиницији центра масе биће $2m \cdot \overrightarrow{MC_1} + m \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, одакле добијамо $CM = 2MC_1$. Тако смо доказали да тачка M лежи на медијани CC_1 троугла



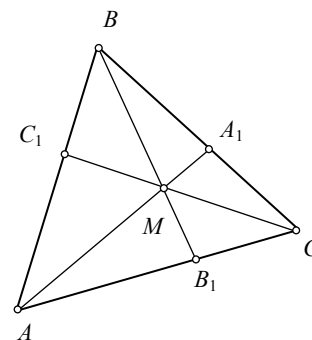
Слика 2.2

ABC и дели је у односу 2:1 почев од темена. Како је по претходном разматрању центар маса јединствен, можемо тврдити да се центар маса троугла чија су темена оптерећена једнаким масама поклапа са тачком пресека медијана тог троугла. У том погледу има смисла такву тачку назвати тежиштем, а медијане тежишним линијама. На тај начин је доказана важна теорема из геометрије троугла:

Тежишне линије троугла се секу у једној тачки, тежишту троугла, и притом тежиште дели тежишну дуж у размери 2:1 почев од темена троугла.

Обратимо пажњу на Чевијеву теорему у светлу претходних чињеница.

Чевијева теорема: Нека тачке A_1, B_1, C_1 леже на страницама BC, CA, AB троугла ABC . Одсечци AA_1, BB_1, CC_1 се секу у једној тачки M тада и само тада када је $\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$. (слика 2.3.)



Слика 2.3.

Доказ: Уведимо ознаке $\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = k, \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = l, \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = n$.

Нека је:

$$k \cdot l \cdot n = 1. \quad (2.1.)$$

Докажимо да се тада одсечци AA_1, BB_1, CC_1 секу у једној тачки. Оптеретимо темена троугла A, C, B тежинама $1, k, kl$. Тада је очигледно:

$1 \cdot \overrightarrow{B_1A} + k \cdot \overrightarrow{B_1C} = \vec{0}$ и $k \cdot \overrightarrow{A_1C} + kl \cdot \overrightarrow{A_1B} = \vec{0}$, то јест тачке B_1 и A_1 су центри маса система материјалних тачака респективно $(A;1), (C;k)$ и $(C;k), (B;kl)$. Тада по теореме 2. центар масе M троугла ABC лежи на дужима AA_1 и BB_1 , другим речима речено - дати одсечци се секу у тачки M .

Затим докажимо да је $kl \cdot \overrightarrow{C_1B} + 1 \cdot \overrightarrow{C_1A} = \vec{0}$. Заиста, претходна једнакост одговара следећој:

$$\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{1}{kl}. \text{ Како је према (2.1) } \frac{1}{kl} = n, \text{ добијамо } \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = n. \text{ То значи да је } C_1$$

центар маса система тачака $(A;1), (B;kl)$, па је тачка M на основу теореме 2., такође на одсечку CC_1 .

Обрнуто: Нека се одсечци AA_1, BB_1, CC_1 секу у једној тачки M . Докажимо да важи (2.1.).

Поново означимо $\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = k, \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = l$ и нека је n такво да важи $k \cdot l \cdot n = 1$.

Претпоставимо супротно. Нека је $\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} \neq n$, то јест $\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} \neq 1$.

Изаберимо на дужи BA тачку C_2 , такву да је $\frac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{C_2A}} = n$. Тада из претходно доказаног следи да одсечак CC_2 садржи тачку M . То значи да се дуж CC_2 поклапа са дужи CC_1 , па се и тачке C_1 и C_2 поклапају.

То значи да важи једнакост Чевијеве теореме $\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$. □

Чевијева теорема омогућава доказе значајних теорема везаних за троугао о пресеку висина, симетрала углова и других значајних правих троугла.

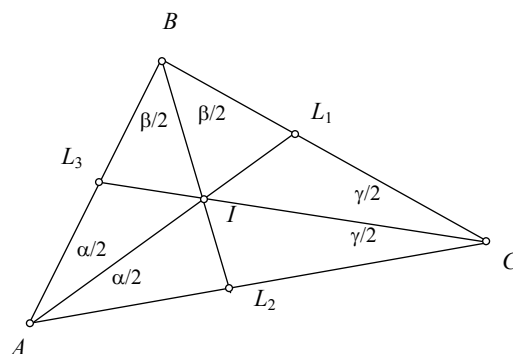
Неким од њих даћемо механичку интерпретацију, иако се оне могу доказати (и доказују се) чисто геометријски.

Теорема: Три симетрале угла троугла ABC се секу у тачки I , која је центар маса система материјалних тачака $(A;a), (B;b), (C;c)$ (слика 2.4.).

Доказ: Како по познатој теореме симетрале угла деле наспрамне странице у односу суседних страница имамо:

$$\frac{AL_3}{L_3B} = \frac{b}{a}; \frac{BL_1}{L_1C} = \frac{c}{b}; \frac{CL_2}{L_2A} = \frac{a}{c}.$$

Множећи дате једнакости добијамо $\frac{AL_3}{L_3B} \cdot \frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$.



Слика 2.4.

По Чевијевој теореме следи да се дужи AL_1 , BL_2 , CL_3 секу у једној тачки I .

Даље, посматрајмо систем материјалних тачака $(A;a)$, $(B;b)$, $(C;c)$. Центар масе тог система се налази на дужи CK_3 , при чему је тачка K_3 на страници AB и важи да је $\frac{AK_3}{K_3B} = \frac{b}{a}$. То значи да се тачка K_3 поклапа са тачком L_3 , па је центар масе датог троугла на дужи CL_3 , односно симетрали угла. На исти начин се показује да се центар масе датог троугла налази на симетралама AL_1 , BL_2 . $\square$

Теорема: Три висине оштроуглог троугла ABC се секу у тачки H , која је центар масе система материјалних тачака $(A;tg\angle A)$, $(B;tg\angle B)$, $(C;tg\angle C)$

Доказ: Нека су AH_a , BH_b , CH_c висине троугла ABC (слика 2.5.).

Из троугла CH_cA имамо $AH_c = h_c \operatorname{ctg}\angle A$.

Аналогно је и:

$$BH_a = h_a \operatorname{ctg}\angle B; BH_c = h_c \operatorname{ctg}\angle B; CH_a = h_a \operatorname{ctg}\angle C;$$

$$CH_b = h_b \operatorname{ctg}\angle C; AH_b = h_b \operatorname{ctg}\angle A$$

Тада је:

$$\frac{AH_c}{H_cB} \cdot \frac{BH_a}{H_aC} \cdot \frac{CH_b}{H_bA} = \frac{h_c \cdot \operatorname{ctg}\angle A}{h_c \cdot \operatorname{ctg}\angle B} \cdot \frac{h_a \cdot \operatorname{ctg}\angle B}{h_a \cdot \operatorname{ctg}\angle C} \cdot \frac{h_b \cdot \operatorname{ctg}\angle C}{h_b \cdot \operatorname{ctg}\angle A} = 1,$$

па се по Чевијевој теореме висине секу у једној тачки.

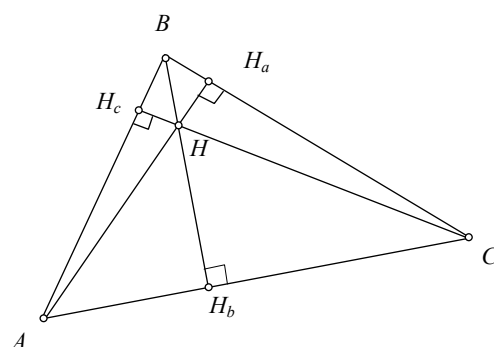
Даље, посматрајмо систем материјалних тачака $(A;tg\angle A)$, $(B;tg\angle B)$, $(C;tg\angle C)$. Центар масе датог система тачака лежи на дужи која садржи C и тачку X на страници AB која страницу дели у односу $\frac{AX}{XB} = \frac{tg\angle B}{tg\angle A} = \frac{\operatorname{ctg}\angle A}{\operatorname{ctg}\angle B}$.

И за тачку H_c важи исти однос

$$\frac{AH_c}{H_cB} = \frac{\operatorname{ctg}\angle A}{\operatorname{ctg}\angle B}.$$

Значи тачке H_c и X се поклапају.

Такође се и одсечци CX и CH_c поклапају, па центар масе система тачака се налази на висини CH_c . Аналогно се доказује да центар масе датог система тачака лежи и на другим двема висинама (слика 2.5.). $\square$



Слика 2.5.

III. ПРОЈЕКТОВАЊЕ И ЧЕВИЈЕВА ТЕОРЕМА

Пројектовање се врло често и успешно користи у науци и техници. Тако су сви цртежи просторних фигура (зграде, механизми, машине) инжењера и архитеката конструисани по правилима нацртне геометрије, и увек је резултат пројектовања слика просторног lika у равни. Даље, ђачки цртеж на табли, или у свесци на часовима геометрије (стереометрије) није ништа друго него пројекција просторне фигуре у равни свеске или табле. Ђак цртеж прави по интуицији не знајући правила пројектовања и његова дубока својства. Слика - уметник, радећи своје дело, такође, врши пројекцију на раван свога платна⁴.

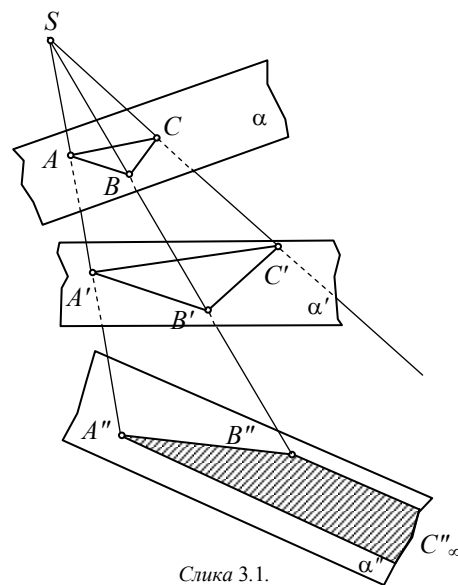
Ми у овом приказу нећемо ићи за строгим заснивањем метода пројектовања као што се то ради и изучава на факултетима из нацртне геометрије или пројективне геометрије, већ ћемо се задржати на једном слободнијем и интуитивнијем приступу пројектовања које може да прихвати и разуме ђак у средњој школи.

Пројектовање омогућава сазнавања значајних својстава геометријских фигура, много више него што су симетрије, транслација и хомотетија.

Својства која има фигура и све њене пројекције су дубља и више повезана са датом фигуром него својства која се чувају при разним „кретањима“ - изометријским трансформацијама.

Пример 1: Ако узмемо троугао ABC у равни α и пројектујемо га из неке тачке S која није у равни троугла добијемо такође троугао $A'B'C'$. Ако је једна од пројектујућих правих, на пример SC паралелна равни α'' , теме C ће бити без своје пројекције (односно биће у бесконачности), па ће се троугао $A''B''C''_\infty$ „отворити“ у тачки C''_∞ . (Видећемо касније да и од тога имамо користи)

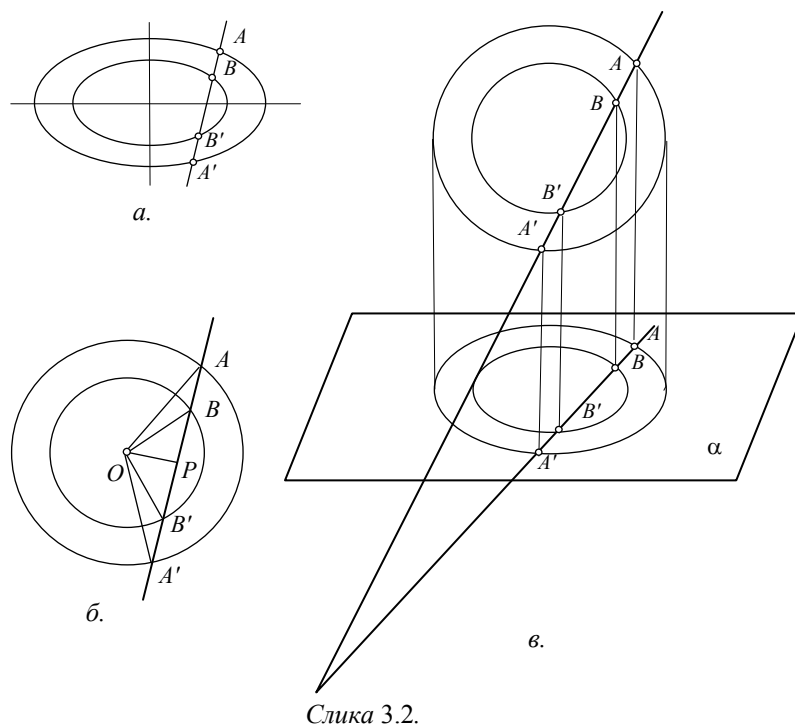
Посматрајмо како метода пројектовања у многим случајевима упрошћава доказе теорема. Пројектујући неки лик са једне равни на другу, можемо добити лаке доказе појединих теорема. Добивши закључке у пројекцији можемо их пренети и на оригинални лик и обрнуто.



Слика 3.1.

⁴ Погледати поглавље „Геометрија и уметност“.

Теорема: Ако су дате две елипсе са заједничким центром и пропорционалним полуосама a, b и $\lambda a, \lambda b$, при чему велике осе леже на једној правој (такође и мале осе) то ће одсечци AB и $A'B'$ између елипси одређени било којом сечицом бити једнаки.



Слика 3.2.

Елементаран доказ ове чињенице није могуће спровести зато што се у школи не уче особине елипсе (у 3. години средњих школа се особине елипсе изучавају преко аналитичке геометрије).

Врло просто и једноставно је доказати теорему методом паралелног пројектовања.

1. Ако је таква теорема тачна за кругове, то је могуће очекивати да ће доказ за кругове бити лакши него за елипсу.

2. Ако докажемо теорему за кругове, покушајмо утврдити методом пројектовања исту теорему и за елипсе.

За кругове је теорема тачна. Довољно је посматрати подударне троуглове $\triangle OPA \cong \triangle OPA'$ и $\triangle OPB \cong \triangle OPB'$, одакле добијамо:

$$AB = AP - PB = A'B' = PA' - PB', \text{ што даје тражену једнакост. } \square$$

Како је теорема важећа за кругове пројектујмо круг (слика 3.2.б) на неку раван α (слика 3.2, в) паралелним пројектовањем. Кругови ће се пресликати у елипсе и сечица кругова у сечицу елипсе. Из теореме (Талесове) закључујемо да паралелне праве одсецају на странама угла пропорционалне одсечке, добијамо тврђење теореме.

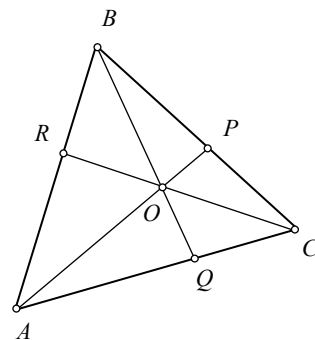
Чевијева теорема: Нека су у равни троугла ABC на страницама троугла BC, CA, AB дате тачке P, Q, R . Праве AP, BQ, CR се секу у једној тачки O ако и само ако је:

$$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}} = 1 \quad (3.1.)$$

Примедба

1: Како смо раније видели при пројектовању троугла, пројекција може бити дегенерисана, то јест, неко његово теме или страница може „отићи у бесконачност“.

Ми ћемо Чевијеву теорему доказати у случајевима када се троугао у свим пројектовањима преводи у троугао и ниједан његов елемент не одлази у бесконачност⁵.



Слика 3.3.

2. У сваком односу бројиоци и имениоци тврђења Чевијеве теореме су колинеарни вектори, па су њихови односи позитивни или негативни сматрајући да је $\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{QA}$.

Пре доказа Чевијеве теореме запазимо следеће:

У тврђењу (3.1.) на десној страни једнакости је вредност 1, што није очигледно и потребно је доказати. Али то што је производ односа на левој страни једнакости позитивна величина је очигледно. Запазимо ако је тачка пресека O у унутрашњости троугла, тада су сви односи у (3.1.) позитивни.

Ако се тачка O не налази у унутрашњости, то ће у једнакости (3.1.) негативна бити само два односа, тако да две од тачака P, Q, R деле странице троугла у спољашњој размери, па је њихов производ односа такође позитиван.

Доказ Чевијеве теореме:

Услов је потребан. Посматрајмо троуглове у пару $\triangle ABQ$ и $\triangle QBC$ и $\triangle AOQ$ и $\triangle QOC$ као и однос њихових површина:

$$\frac{P_{\triangle ABQ}}{P_{\triangle QBC}} = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}}, \text{ (имају исте висине). Такође је } \frac{P_{\triangle AOQ}}{P_{\triangle QOC}} = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}}. \quad (3.2.)$$

Па можемо записати

$$\frac{P_{\triangle ABQ}}{P_{\triangle QBC}} = \frac{P_{\triangle AOQ}}{P_{\triangle QOC}} \text{ или } \frac{P_{\triangle ABQ}}{P_{\triangle AOQ}} = \frac{P_{\triangle QBC}}{P_{\triangle QOC}}.$$

Одузимајући од обе једнакости по 1 и доводећи их на исти именилац добијамо:

$$\frac{P_{\triangle ABQ} - P_{\triangle AOQ}}{P_{\triangle AOQ}} = \frac{P_{\triangle QBC} - P_{\triangle QOC}}{P_{\triangle QOC}} \text{ или } \frac{P_{\triangle ABO}}{P_{\triangle AOQ}} = \frac{P_{\triangle BCO}}{P_{\triangle QOC}}.$$

⁵ Треба приметити да се при паралелном пројектовању троугла увек добија пројекција троугла, па Чевијева теорема има смисла.

Користећи (3.2.) имамо $\frac{P_{\Delta ABO}}{P_{\Delta BCO}} = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}}$.

Аналогно, за парове других тоуглова имамо:

$$\frac{P_{\Delta CAO}}{P_{\Delta ABO}} = \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} \text{ и } \frac{P_{\Delta BCO}}{P_{\Delta CAO}} = \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}}.$$

Множећи леве и десне стране у последње три једнакости добијамо:

$$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}} = 1.$$

Услов је довољан:

Претпоставимо супротно. Нека се три праве AP, BQ, CR не секу у једној тачки и нека важи (3.1.). Ако се праве AP, CR секу у тачки O , то ће права BQ која не садржи O сећи праву AC у некој тачки Q , а права BO праву AC у некој тачки Q' .

Докажимо да је то немогуће и да ће се тачке Q и Q' поклопити.

Имамо:

$$1) \text{ Услов (3.1.) } \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}} = 1$$

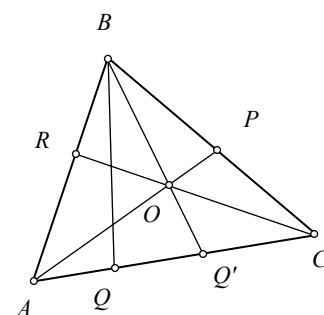
2) По услови конструкције праве BO праве AP, BQ', CR се секу у тачки, па за њих важи Чевијева теорема тј.,

$$\frac{\overrightarrow{AQ'}}{\overrightarrow{Q'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}} = 1. \quad (3.2)$$

Изједначавајући (3.1.) и (3.2.) добијамо $\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} = \frac{\overrightarrow{AQ'}}{\overrightarrow{Q'C}}$. Додајући 1 левој и

десној страни претходне једнакости следи $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{QC}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{Q'C}}$, одакле је $\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{Q'C}$, то

јест тачке Q и Q' се поклапају. $\square$



Слика 3.4.

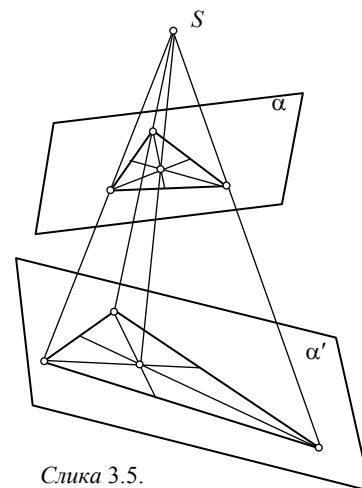
Примедба 1: Чевијева теорема карактерише Чевијеву конфигурацију: геометријској чињеници о три трансверзале троугла које садрже заједничку тачку одговара алгебарски израз (3.1.). И обрнуто: алгебарском изразу (3.1.) одговара геометријски Чевијева конфигурација.

Чевијева теорема остаје сачувана при било ком броју централног или паралелног пројектовања са једне равни на другу.

За доказ те чињенице приметимо да у поставци теореме се говори о било ком произвољном троуглу и произвољној тачки O (само да не буде на страницама троугла).

Пројекција једне Чевијеве конфигурације са равни α на другу раван α' такође је Чевијева конфигурација (Слика 3. 5).

Заиста, при пројектовању се троугао пресликава у троугао, а прамен правих са заједничком тачком такође у прамен правих са заједничком тачком.



Слика 3.5.

Последице Чевијеве теореме

Знамо да Чевијева теорема важи за било који троугао и за било које три праве које садрже темена троугла са заједничком пресечном тачком и да за њих важи (3.1.).

То значи да важи (3.1) и за три висине троугла, три тежишне линије, три симетрале угла. Та чињеница нас доводи до занимљивог резултата. У свим теоремама (три висине, три тежишне линије, три симетрале угла) у питању је тројка трансверзала које се секу у једној тачки.

У резултату пројектовања троугао са његовим висинама, тежишним линијама или симетралама углова се пресликава у троугао код кога пројекције нису исте природе (висине, тежишне линије, симетрале угла) и „губе свој метрички смисао“.

Опште језгро са тако изгубљеним смислом и даље остаје, тако да Чевијева теорема исказује једно дубоко својство које се не губи пројектовањем.

Природно се поставља питање:

Користећи Чевијеву теорему да ли је могуће применити је на специјалне праве и доказати теореме о значајним тачкама троугла.

Показује се да је то могуће. У поглављу „Чевијева теорема и геометрија маса“ ми смо доказали следеће теореме:

Теорема: Три тежишне линије троугла се секу у једној тачки.

Теорема: Три симетрале унутрашњих углова троугла се секу у једној тачки.

Теорема: Праве које садрже висине троугла се секу у једној тачки.

Запажање: Као што је представљено добијен је занимљив резултат.

У елементарној геометрији све три теореме би се доказивале као различите теореме на различите начине немајући међусобно ничег заједничког које је „сакривено“ метричким својствима објеката. Ми смо доказали све три теореме јединственом методом и то као парцијалне случајеве једне опште теореме (Чевијева теорема).

У чему је унутрашња природа тог резултата?

Из предходног је одговор врло јасан. У све три теореме се садржало једно заједничко језгро – чињеница пресека трију конкурентних правих које изражава услов (3.1.).

Када дужи сваке од тројки правих окарактеришемо неким својством (бити тежишна линија, симетрала угла или висина троугла, итд), у сваком случају добијамо да праве имају заједничку пресечну тачку. Одатле можемо доћи на идеју да исто важи и за друге тројке трансверзала са другим својствима и добити нове теореме о заједничком пресеку у једној тачки као део Чевијевог теореме.

Ево пример:

Теорема: Нека је у произвољни троугао ABC уписан круг. Тачке додира круга и страница BC, CA, AB означимо са P, Q, R . Тада се праве AP, BQ, CR секу у једној тачки O (Жергонова тачка)⁶. (Слика 3.6.)

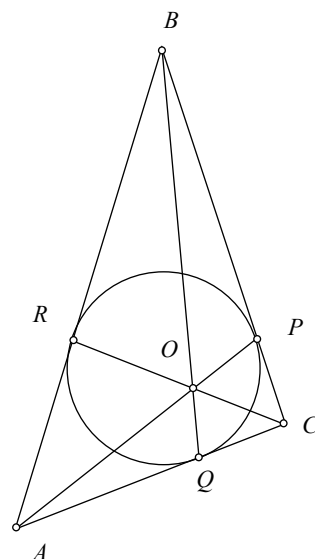
Доказ: На основу једнакости тангентних одсецака добијамо:

$$|AQ| = |RA|, |QC| = |CP|, |PB| = |BR|$$

На основу добијених једнакости:

$$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}} = \frac{|AQ|}{|CP|} \cdot \frac{|CP|}{|BR|} \cdot \frac{|BR|}{|AQ|} = 1. \text{ Како је испуњен}$$

услов (3.1.), то се по Чевијевој теореме три праве секу у једној тачки. $\square$

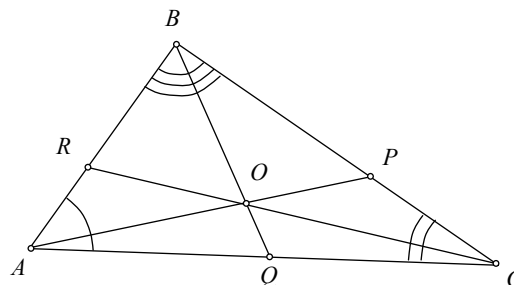


Слика 3.6.

Теорема: Праве које садрже темена троугла и деле наспрамне странице пропорционално налеглим угловима се секу у једној тачки.

Доказ: По услови теореме (слика 3.7.) имамо:

$$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} = \frac{\angle \alpha}{\angle \gamma}, \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{\angle \gamma}{\angle \beta}, \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}} = \frac{\angle \beta}{\angle \alpha}.$$



Слика 3.7.

⁶ Ж. Жергон (1771–1859) француски математичар.

Множећи добијене једнакости добијамо да важи $\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}} = 1$, тј важи

(3.1), па се по Чевијевој теореми праве AP, BQ, CR секу у једној тачки. $\square$

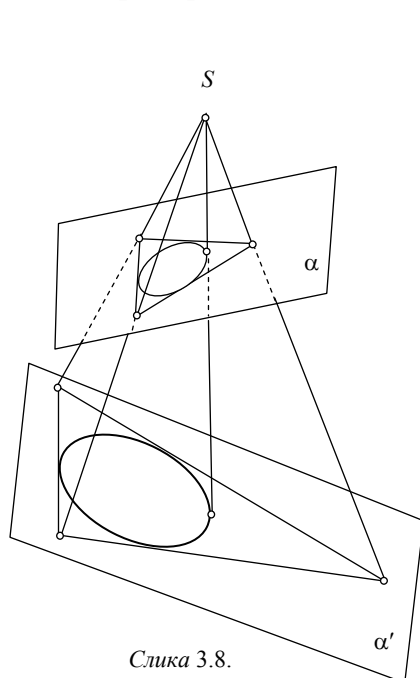
Чевијева теорема нас је снабдела унутрашњим јединством низа теорема елементарне геометрије и општом методом њиховог доказа. Чевијева теорема нам убедљиво говори о смислу и користи изучавања метода пројектовања.

Изучавање пројектовања нас не обогаћује само знањем нових теорема и нових својстава, већ служи и продубљивању врло познатих питања.

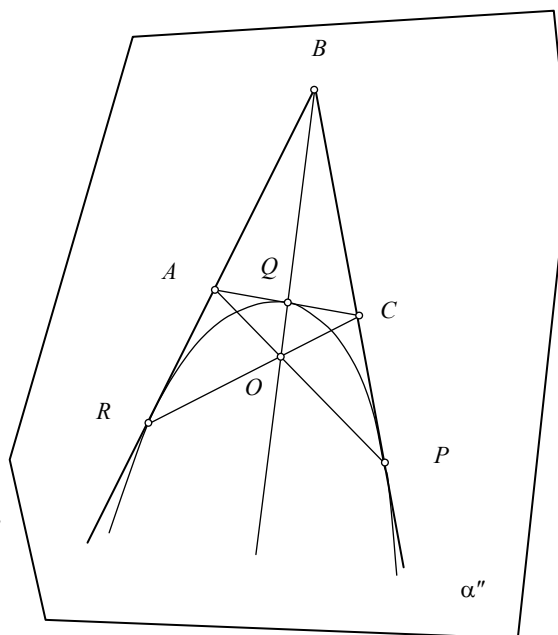
То је нов и свеж поглед и приступ питањима елементарне геометрије.

И не само то.

Нека у једној равни α имамо неку од доказаних конфигурација. Пројектујмо дату конфигурацију равни α из неког центра S која није у равни α , на неке друге равни α', α'' и тако даље (Слика 3.8. и 3.9.).



Слика 3.8.



Слика 3.9.

Тада при пројектовању круг прелази у једну од кривих (елипса у равни α' , парабола у равни α'' , хипербола у α''' ... Тангенте круга прелазе у тангенте кривих у равнима $\alpha', \alpha'', \alpha'''$. Све праве које садрже темена сваког од тих тангентних троуглова се секу у заједничкој тачки O', O'', O''' , па можемо да искажемо теорему:

Теорема: Ако је троугао образован трима тангентама елипсе, параболе или хиперболе, то ће се праве AP, BQ, CR које садрже темена A, B, C и тачке додира супротних страница P, Q, R сећи у једној тачки O .

Непосредан доказ такве теореме је тежак. Али је доказ за круг релативно лак.

Јасно се види снага и моћ методе пројектовања.

Примедба: За потпуност доказа би требало установити да се сваки троугао састављен од тангената круга пројектује у тангентни троугао поменутих кривих.

Ми то сматрамо очигледним зато што мењајући положај тачке S (центра пројектовања) и тангенте на кругу (за које је теорема доказана) можемо тангентном троуглу било које криве дати било коју форму.

Није нам био циљ да у овом приказу идемо даље у пројективну геометрију и њено строго заснивање.

Враћајући се на почетак излагања, тек сад можемо уочити да приликом пројектовања троугла са једне равни на другу, чак и када нам у пројекцији неко од темена „побегне у бесконачност“ – од тога имамо и те како корист.

Само да назначимо: једна таква „бесконачна тачка“ обезбеђује дубоку повезаност геометријских објеката и њихових особина и надилази интуитивно поимање простора.

У том смислу је Пројективна геометрија као нова дисциплина одговор Еуклида цару Птолемеју.

Еуклид би данас, наком два и више миленијума, вероватно могао рећи:

„Царски пут у геометрији је пут пројективне геометрије.“

IV. ДОДАТАК

У доказу Чевијеве теореме често смо користили друге познате теореме из геометрије. Неке од њих смо наводили у фуснотама да не бисмо реметили основни текст.

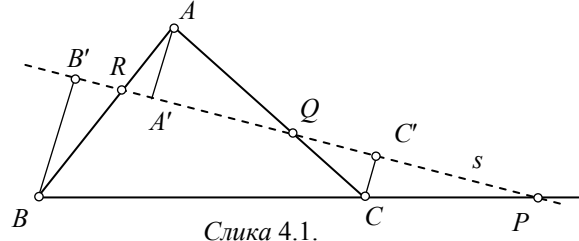
У оквиру овог додатка наводимо доказе Менелајеве теореме.

Такође наводимо и кратак историјски осврт развоја идеја пројективности код ренесансних сликара.

D.1. МЕНЕЛАЈЕВА ТЕОРЕМА

Нека је у равни E^2 дат троугао ABC . Тачке P, Q, R које се редом налазе на правама BC, CA, AB и различите су од темена троугла ABC припадају једној правој ако и само ако је:

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1. \quad (4.1)$$



Слика 4.1.

Доказ: Претпоставимо да тачке P, Q, R припадају некој правој s (Слика 4.1.) Будући да права s не садржи ниједно теме троугла ABC , тачке P, Q, R су на продужењима страница BC, CA, AB или се две налазе на страницама, а трећа на продужењу. Стога су сва три односа на левој страни релације Менелајеве теореме негативна или су два позитивна док је трећи негативан, па је производ тих односа негативан. Ако обележимо са A', B', C' подножја нормала из темена на праву s биће:

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -\frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{CC'}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{AA'}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{BB'}} = -1.$$

Обрнуто, претпоставимо да важи релација (4.1) и да права PQ сече праву AB у тачки R' .

Тада према доказаном делу важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} = -1$.

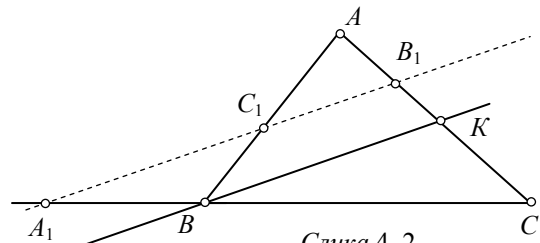
Како важи и $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$ добија се $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}}$ и према томе је $R \equiv R'$. $\square$

Други начин доказивања Менелајеве теореме

Услов је потребан. Нека су

A_1, B_1, C_1 колинеарне тачке. Кроз теме B поставимо праву $BK \parallel A_1B_1$. По теореме о пропорционалним одсечцима на крацима угла имамо:

$$\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1K}}, \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{KB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}.$$



Слика 4.2.

Множењем једнакости се добија тврђење Менелајеве теореме. Други део доказа је исти као у претходном доказу, па га изостављамо. $\square$

D.1.1. ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ОБЛИК МЕНЕЛАЈЕВЕ ТЕОРЕМЕ

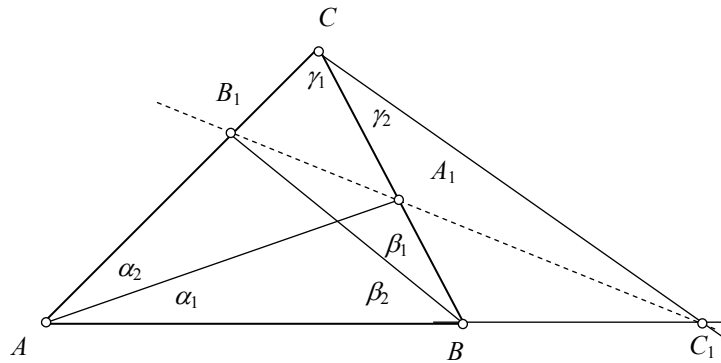
Ако посматрамо оријентисане углове:

$$\alpha_1 = \angle BAA_1, \alpha_2 = \angle A_1AC, \quad \gamma_1 = \angle ACC_1, \gamma_2 = \angle C_1CB, \quad \beta_1 = \angle CBB_1, \beta_2 = \angle B_1BA,$$

(Слика 4.3.), тада једнакост Менелајеве теореме (4.1.) можемо представити у еквивалентном облику помоћу синуса углова.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = -1 \quad (4.2.)$$

Доказ је као и доказ Чевијеве теореме у тригонометријском облику, па га изостављамо. $\square$



Слика 4.3.

D.1.2. МЕНЕЛАЈЕВА ТЕОРЕМА ЗА ПРОСТОРНИ ЧЕТВОРОУГАО

Нека су на страницама AB, BC, CD, DA просторног четвороугла $ABCD$ дате тачке A_1, B_1, C_1, D_1 . Да би те тачке биле компланарне потребно је и довољно да је:

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1D}} \cdot \frac{\overrightarrow{DD_1}}{\overrightarrow{D_1A}} = 1. \quad (4.3.)$$

Доказ. Услов је потребан. Нека задане тачке леже у равни γ и $\gamma \cap BD = \{M\}$. По Менелајевој теореме за троугао ABD и праву A_1D_1 имамо:

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MD}} \cdot \frac{\overrightarrow{DD_1}}{\overrightarrow{D_1A}} = -1.$$

По Менелајевој теореме за троугао BCD и праву B_1C_1 имамо:

$$\frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1D}} \cdot \frac{\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{MB}} = -1.$$

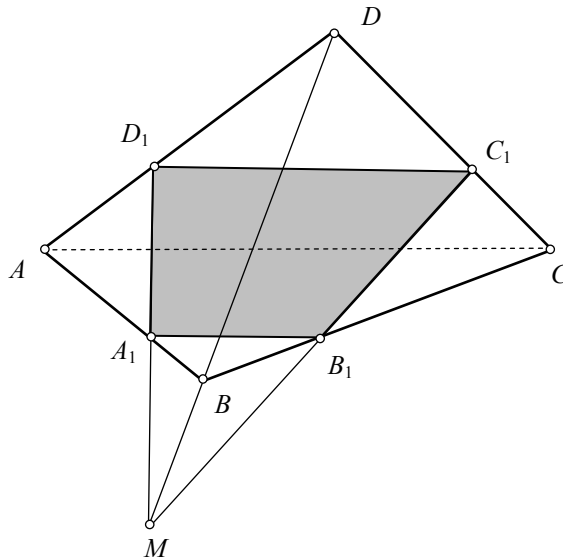
Множећи леве стране једнакости добијамо тражену једнакост

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1D}} \cdot \frac{\overrightarrow{DD_1}}{\overrightarrow{D_1A}} = 1.$$

Услов је довољан. Претпоставимо супротно. Ако раван $A_1B_1C_1$ сече праву AD у тачки D_2 то по потребном услову важи:

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1D}} \cdot \frac{\overrightarrow{DD_1}}{\overrightarrow{D_1A}} = 1 \text{ и } \frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1D}} \cdot \frac{\overrightarrow{DD_2}}{\overrightarrow{D_2A}} = 1$$

Из ове две једнакости следи $\frac{\overrightarrow{DD_1}}{\overrightarrow{D_1A}} = \frac{\overrightarrow{DD_2}}{\overrightarrow{D_2A}}$, а то значи да је $D_1 \equiv D_2$. $\square$



Слика 4.4.

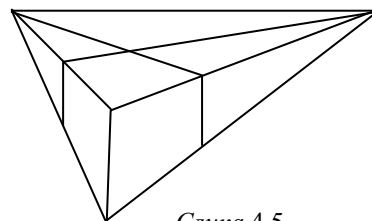
D.2. ГЕОМЕТРИЈА И УМЕТНОСТ

„Нека се нико, ко није математичар, не дрзне да чита моје радове“, Леонардо да Винчи, **Трактат о сликарству**. Београд, 1998,

Још у 14. веку многе уметнике је привукла идеја према којој се слика посматра као својеврсни прозор, кроз који посматрач види овај или онај део света (стварности). Нацртати посматране објекте је сасвим лако. По мери удаљености од посматрача размере предмета се смањују, а паралелни крајеви поља се стичу у даљем делу собе.

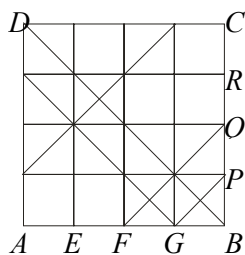
Значајан напредак је постигнут око 1420. године када су ивице коцке које нису нормалне на раван слике биле нацртане тако да се стичу у две тачке хоризонта, коју називамо линија недогледа (слика 4.5.).

Средином века дошло се до тога да све нормале, а не само нормале које леже у једној равни треба сликати тако да се стичу у једну тачку недогледа и знање још једне такве тачке је довољно за установљење хоризонта, као хоризонталне линије која пролази на слици кроз познату тачку недогледа.

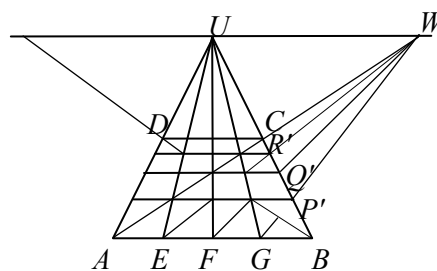


Слика 4.5.

Нешто раније, уметнике је интересовао проблем еквидистантних трансферзала. Представимо себи да смо поставили слику у соби, чији је под обложен квадратним плочицама. Једна страница плочица је нормална на раван слике, а друге образују једнако удаљене паралелне праве, које секу под у попречном правцу – еквидистантне трансферзале.



Слика 4.6.



Слика 4.7.

Око средине 15. века у моди је био неправилни „метод палца“, по којем је растојање на слици међу суседним трансферзалама требало сваки пут умањити за једну трећину. Око педесетих година пронађено је правилно оштроумно решење проблема (слика 4.6.). Квадрат $ABCD$ – то је изглед пода одозго.

Дијагонали свих квадрата је могуће поделити у две групе, тако да су све дијагонале једне групе међусобно паралелне. Ако кроз тачку U нацртамо праву v , паралелну одсечку AB , тада ће права v бити линија хоризонта. И група

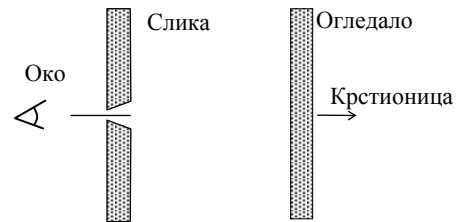
дијагонала паралелних правој FQ биће нацртана на слици у виду правих које се секу у тачки W на линији хоризонта.

За разлику од данас, таква конструкција је у 15. веку била епохална.

Обратимо посебну пажњу на занимљиви експеримент који је извео Филипо Бруналески.

У биографији Филипа Бруналескија Антонио Манети, пријатељ и обожаваалац великог градитеља, даје следећи извештај о догађају који се десио 1425. године у Фиренци:

„Овај случај перспективе он је први пут показао на табли од око пола лакта у квадрату, на којој је начинио приказ спољашњег изгледа храма Сан Ђовани (тј. Баптистеријума) у Фиренци. Овај храм нацртао је онако како се види споља обухваћен једним погледом. Како изгледа, приликом цртања он је стајао око три



лакта унутар средњих врата Санта Мариа дел Фиоре. Слика је урађена са толико труда и лепоте и тако прецизно у бојама белог и црног мермера да ниједан сликар минијатура то не би могао боље учинити... Узео је полирано огледало као позадину тако да је оно рефлектовало ваздух и природно небо и, такође, облаке који су падали на то огледало и били ношени ветром када је он дувао. Код ове слике је сликар настојао да утврди само једно место са кога ће се она моћи посматрати. Да не би дошло до грешке при посматрању, пошто на сваком месту појава за око мора бити другачија, он је на табли на којој је била та слика направио отвор који се у одразу храма Сан Ђовани налазио тачно на оном месту куда је гледало око са трга унутар средњих врата Санта Мариа дел Фиоре, где је он приликом цртања стајао. Овај отвор је био мали као сочиво на страни слике, а ширио се пирамидално на полеђини, слично женском сламном шеширу, све до величине дуката или нешто више. Он је замислио да око посматрача буде на полеђини где је био велики отвор и да једном руком принесе слику до ока, а да у другој руци, наспрам табле, држи равно огледало са кога се рефлектовала слика. Удаљеност огледала од друге руке износила је отприлике онолико малих лаката колико је износило растојање правих лаката од трга, на коме је он стајао при цртању, до храма Сан Ђовани. Заједно са другим споменутих околностима, полираним огледалом, тргом итд., изгледало је, при посматрању са те тачке, као да човек стварно и уистину види Баптистеријум. Ја сам то држао у рукама и својевремено више пута гледао, те то могу посведочити.“ (Цитирано према Eugenio Battistini, *Filipo Brunelleschi*, Stuttgart - Zürich, 1979.)

Прво, догађај је имао све особине *nau~nog eksperimen t a*. Дато је поређење између предмета који је произвео човек, Бруналескијеве слике, и „стварности“.

Друго, поређење није препуштено самовољи експериментатора; он не посматра ствар једноставно, већ је истражује под строгим условима: упућује се на тачно прорачунато место, отприлике девет стопа од улаза у катедралу, држи апарат око пет стопа високо, гледа кроз отвор у центру слике, поставља огледало на сасвим одређеном растојању.

Огледало рефлектује на доњој половини слику, у горњој половини облаке, а посматрач види комбинацију уметности и стварности. Огледало се уклања, али се поглед не мења, мада је сада пред нама само „стварност“.

Треће, предмет који се оцењује, дакле слика, није напросто насликан, већ је *kons t ruisan po pravil ima*.

Четврто, ова правила потичу из *prakse* хоризонталне и вертикалне пројекције која је Бруналескију била позната. Али сама пракса не објашњава зашто конструкција води ка идентичном утиску слике и стварности. Она се зато мора комбиновати са одређеним схватањем природе процеса гледања. То гледање повезује процес гледања према обрасцу средњовековне оптике, са пирамидом видних зрака. Делотворни су само они зраци који улазе у око водоравно у односу на његову површину. Они стварају дводимензиону слику оне стране предмета која је окренута према оку.

У расправи „**О сликарству**“ Леон Баптисте Албертија налази се следећа дефиниција:

„Слика је пресек оптичке пирамиде“.

Израда слике тако постаје геометријски проблем.

Проблем се може решити, каже Алберти, јер:

„... постоје нови принципи који нам допуштају да представимо односе на површи из којих пирамида произилази.

Функција сликара је (међутим) следећа: раван обележити линијама и изнијансирати бојама тако да она, посматрана са одређене удаљености и одређеног положаја, у потпуности личи на приказане предмете.

Наша упутства (наставља Алберти, почетак треће књиге „О сликарству“) у којима је изложена савршена и апсолутна уметност сликања, може лако да схвати геоматар, али не и човек који није упознат са геометријом.

Зато наглашавам да је нужно да сликар учи геометрију.“ (Према [11]).

Сликарство је, дакле, наука која се глатко уклапа у структуру других наука.

То ново схватање сликарства се често користи ради задобијања већег угледа у области наука и уметности.

Од старог доба све до ренесансе сликари, скулптори и архитекте сматрани су за обичне занатлије.

И данас најразличитије струке покушавају да увећају свој углед тиме што доказују академске везе или, како се то каже, своју научност.

Научност је подизала углед још у време Албертија.

Он је, дакле, покушавао да покаже да сликарство и архитектура имају научну - математичку основу.

Његови напори су успели – Вазари ускоро у Фиренци оснива прву уметничку академију.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Балк, М. Б., Болтянский, **Геометрия масс**, Библиотека „Квант“, выпуск 61, Москва, 1987.
- [2] Ђорић Мирјана, Миленковић Оливера, **Збирка задатака из аналитичке геометрије**, Математички факултет, Београд, 2000.
- [3] Кечкић, Д. Јован, **Математика 1 са збирком задатака**, Агенција „Кечкић“, Београд, 2005.
- [4] Курант Р. , **Шта је то математика**, Просвета, Београд, 1973.
- [5] Лопандић Д., **Геометрија за 3. разред усмереног образовања**, Научна књига, Београд, 1981.
- [6] Marjanovic Milosav, **Metric euclidian projective and topological properties**, The teaching of mathematics, Vol IV, 1, 2001, pp. 41-70.
- [7] Никулин А.В., А. Г. Кукуш, Ю. С. Татаренко, **Геометрия на плоскости**, Алфа, Москва, 1996.
- [8] Понарин Я. П. , **Элементарная геометрија, том 1**, Москва, МЦНМО, 2008.
- [9] Понарин Я. П., **Элементарная геометрија, том 3**, Москва, МЦНМО, 2008.
- [10] Потоцкий М.В., **Что изучает проективная геометрия**, Просвещение, Москва, 1982.
- [11] Фајерабенд, Паул, **Наука као уметност**, Матица српска, Нови Сад, 1984.