Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Olivera Janković

Mentor: Prof. dr Đorđe Dugošija

Metode rešavanja transportnog problema

Master rad

Beograd

2011.

PREDGOVOR

Rad se sastoji iz pet poglavlja i spiska literature.

U prvom poglavlju je postavljen i definisan model transportnog problema,dok je u drugom poglavlju definisan problem protoka sa minimalnom cenom i pokazana je njegova veza sa transportnim problemom.U trećem i četvrtom poglavlju su opisani algoritmi za rešavanje problema protoka sa minimalnom cenom, a samim tim i transportnog problema.Zaključak je izložen u poslednjem poglavlju zajedno sa spiskom literature.

1. Transportni problem

1.1 Razvoj transportnog problema

Transportne probleme je prvi proučavao ruski matematičar L.V. Kantorovich , u radu „Mathematical Methods of Organizing and Planning Production “ (1939). Zbog ignorisanja njegovih savremenika, rad je ostao nepoznat sve do 1960. godine, dugo nakon što je na ovom polju postignut pomak na Zapadu. Međutim, njegova vrednost bila je priznata 1975.godine, kada je dobio Nobelovu nagradu u oblasti ekonomije. Nagradu je dobio i T.C.Koopmans za doprinos razvitka teorije optimalnosti raspodele resursa. Kantorovich (1939) je izučavao devet različitih tipova problema sa ciljem da dobije najveće korišćenje postojećih industrijskih resursa. Glavni među tim problemima su :

(1) raspodela posla između pojedinačnih mašina,
(2) raspodela porudžbina među preduzećima,
(3) distribucija sirovina , goriva i faktora proizvodnje,
(4) minimizacija otpada,
(5) nalaženje najboljeg plana isporuke robe.

Na Zapadu, sličan rad u ovoj oblasti je imao F.Hitchcock (1941), koji je prvi opisao standardni oblik transportnog problema. Predložio je $m \times n$ dimenzionalnu geometrijsku interpretaciju transporta robe od m proizvođača do n potrošača, i konstruisao „region mogućnosti“ na čijoj granici mora postojati optimalno rešenje. Predložio je metod za nalaženje fiksnih tačaka na ovoj granici (temena) i pokazao iterativno generisanje boljeg rešenja pomoću funkcije cilja. Hitchcock je takođe primetio pojavu višestrukih optimalnih rešenja.

Otprilike u isto vreme, T.C.Koopmans, počeo je istraživanje o smanjenju vremena isporuke tereta. U radu „Optimum Utilisation of the Transportation System“ (1947) izučavao je transportni problem, razvijajući ideju o čvornim potencijalima i kriterijuma optimalnosti. Upravo zbog rada ova dva istraživača, klasičan transportni problem je često nazivan Hitchcock-Koopmans transportni problem. [12]

Klasični transportni problem glasi:

Dato je m skladišta i n potrošača. Na i-tom skladištu postoji nenegativna količina a_i neke robe, a j-ti potrošač potražuje nenegativnu količinu b_j te robe. Cena transporta jedinične količine robe od i-tog skladišta do j-tog potrošača je c_{ij} , za svako i=1,2,...,m i j=1,2,...,n. Cilj je prevesti svu robu od skladišta do potrošača tako da se zadovolje sve potražnje uz minimalne ukupne transportne troškove.

Matematički model ovog zadatka je

$$(\min) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , j=1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,m; \; j=1,2,\ldots,n$$

gde je sa x_{ij} označena nepoznata količina robe koju treba transportovati od i-tog skladišta do j-tog potrošača, za i=1,2,...,m i j=1,2,...,n.

Matematička formulacija upravo opisanog transportnog problema ima za cilj da se od svih mogućih scenarija dodele transportnih transakcija odabere ona koja će obezbediti minimalne transportne troškove poštujući data ograničenja.

Ovo je očigledno problem linearnog programiranja u kanonskom obliku.

Teorema 1.1 Transportni zadatak ima optimalno rešenje akko je ukupna ponuda jednaka ukupnoj potražnji.

Dokaz:

Ako transportni zadatak ima optimalno rešanje, onda za optimalne x_{ij} vredi

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad .$$

Pretpostavimo sada da je ponuda jednaka potražnji tj. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Da bi dokazali da se optimalno rešenje dostiže, dovoljno je dokazati da je dopustivi skup matematičkog modela neprazan, jer je tada on neprazan kompakt na kome neprekidna funkcija cilja dostiže minimum. Proverimo da je $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i}$, i=1,2,...,m ; j=1,2,...,n jedno dopustivo rešenje:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = a_i \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = a_i , \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = b_j \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = b_j , \quad j = 1, \ldots, n$$

Očigledno je da su $x_{ij} \geq 0$. Time je tvrđenje dokazano.

U praksi se često događa da ponuda nije jednaka potražnji. U slučaju da je ponuda veća od potražnje, potražnja se može zadovoljiti , ali će na nekim skladištima ostati robe. Uvođenjem fiktivnog potrošača kome će se sva preostala roba isporučiti po nultoj ceni problem se može modelirati na predloženi način, ne menjajući pri tom optimalnu vrednost. Slično, ako je ukupna ponuda manja od ukupne potražnje, uvodimo fiktivnog snabdevača koji ima nedostajuću količinu robe i od njega potrošačima trnsportujemo robu po nultoj ceni. Tako se i u ovom slučaju dobija takozvan „zatvoren" problem.

Svojstva matrice sistema

Matrica sistema linearnih jednačina transportnog problema ima specijalna svojstva:

- Matrica sistema je formata $(m + n) \times mn$ i svi njeni elementi su nule ili jedinice;
- Kolona koja odgovara nepoznatoj x_{ij} ima tačno dve jedinice (jedna je iz jednačine sa desnom stranom a_i , a druga iz jednačine sa desnom stranom b_j);
- Rang matrice je $m + n$ - 1. Rang je manji od $m + n$, jer je zbir a-vrsta jednak zbiru b-vrsta (i jednak e_{mn}^T). Podmatrica čiji su dijagonalni elementi oni koji se nalaze u preseku vrste koja odgovara a_i i kolone koja

odgovara x_{i1}, za i=1,...,m, kao i vrste koja odgovara b_j i kolone koja odgovara x_{mj}, j=2,...,n je jednačina reda $m+n-1$. Time je tvrđenje dokazano. Može se pokazati da je bilo kojih $m+n-1$ vrsta matrice linearno nezavisno.

- Svaki minor matrice ima jednu od vrednosti 0,1 ili -1 (kaže se „matrica je totalno unimodularna“);
  Ovo se dokazuje indukcijom po formatu minora.
  Tvrđenje je tačno za minore reda 1. Pretpostavimo da je tačno za minore reda manjeg od k. Uočimo minor reda k. Ako on ima kolonu od samih nula, vrednost mu je nula. Ako ima neku jediničnu kolonu, razvojem po toj koloni vrednost mu se do na znak svodi na vrednost minora $k-1$ reda, pa je, zbog induktivne hipoteze, i sam vrednosti 0,1 ili -1. U slučaju da svaka kolona minora ima dve jedinice, zbir vrsta čije jedinice odgovaraju a jednačinama (ponuđačima) jednak je zbiru vrsta čije jedinice odgovaraju b jednačinama (potrošačima), pa je minor jednak nuli. Time je unimodularnost dokazana.

Zbog ovog svojstva važi

Teorema 1.2 Zatvoren transportni problem sa celobrojnim ponudama a_i , i=1,...,m i celobrojnim potražnjama b_j , j=1,...,n ima celobrojno optimalno rešenje.

Dokaz:

Problem ima bazisno dopustivo rešenje a ono je , zbog totalne unimodularnosti matrice sistema i celobrojnosti ponuda i potražnji, celobrojno, jer se bazisne promenljive računaju Kramerovim pravilom kao količnici celobrojnog minora i minora vrednosti 1 ili -1. Tvrđenje je dokazano.

Grafovi i mreže

Graf je uređen par (N,A), gde je N konačan neprazan skup (čiji se elementi zovu čvorovi), a A je jedan skup dvoelementnih podskupova skupa N (elementi skupa A nazivaju se grane). Slično tome, digraf je uređenen par (N,A), gde je N konačan neprazan skup, a A jedan skup uređenih parova elemenata skupa N (ovi uređeni parovi nazivaju se orijentisane grane). Ako je $G=(N,A)$, koriste se i sledeće oznake : $N=N(G)$, $A=A(G)$. Kao što je uobičajeno, graf ili digraf se predstavlja geometrijskom figurom sastavljenom od tačaka i linija koje spajaju pojedine parove tačaka. Tačke predstavljaju čvorove grafa, dok linije predstavljaju grane grafa ili orijentisane grane digrafa. U prvom slučaju linije su neorijentisane, dok se u drugom slučaju linije orijentišu(na crtežu strelicom).

Za dve čvora grafa kažemo da su susedna ako su spojena granom. Dva susedna čvora su krajnje tačke svake grane koja ih spaja. Ako je neki čvor jedna od krajnjih tačaka izvesne grane, kaže se da se ta grana stiče u ovom čvoru. U ovom slučaju se takođe kaže da su čvor i grana incidentni ili susedni.Broj susednih čvorova za čvor x zove se stepen čvora x. Dve grane su susedne ako imaju zajednički čvor.

Def. Put dužine k u digrafu je svaki niz grana u_1,u_2,...u_n koji ima sledeće osobine:

1^o grana u_1 polazi iz proizvoljnog čvora digrafa;

2^o grana u_i (i=2,...k) počinje u onom čvoru u kojem se završava grana u_{i-1}.

Alternativno, put može da se definiše kao niz čvorova kroz koje prolazi.

Put može više puta da prolazi istom granom ili kroz isti čvor.Elementarni put je put koji prolazi kroz svaki čvor grafa najviše jedanput.

Put koji se završava u istom čvoru u kojem i počinje naziva se kružni ili zatvoreni put.

Def. Graf je povezan ako se proizvoljna dva njegova čvora mogu povezati putem. Ako postoje čvorovi koji se ne mogu povezati putem, graf je nepovezan.

Težinsi graf (digraf) je graf (digraf) u kojem je svakoj grani dodeljen neki broj. Drugim rečima, grafu (ili digrafu) $G = (N, A)$ pridruženo je preslikavanje ω: $A \rightarrow R$ koje svakoj grani $u \in A$ dodeljuje broj ω(u) kao težinu. Funkciju ω nazivamo težinska funkcija grafa (digrafa). U raznim interpretacijama težina grane predstavlja njenu dužinu, propusnu moć (ili kapacitet), pouzdanost, cenu koštanja, prenos itd. Inače,težine grana su u kombinatornoj optimizaciji, po pravilu, celi ili realni brojevi.

Težinski graf (ili digraf) $G = (N, A)$ sa težinskom funkcijom ω,tj. uređen par (G, ω) često se naziva i mreža. Kada se govori o mreži (G, ω) često se, radi jednostavnosti izražavanja kaže „mreža G“ pri čemu se ne ističe težinska funkcija ω, ali se podrazumeva da je ona definisana.

2.Problem protoka sa minimalnom cenom na mreži G

Ovaj problem se može definisati na sledeći način : treba odrediti cenu isporuke robe kroz mrežu a da pri tom budu zadovoljene potrebe na određenim čvorovima iz dostupnih zaliha na drugim čvorovima. U praksi, ovaj problem se često sreće u skoro svim granama industrije, uključujući poljoprivredu, komunikacije, odbranu, energiju, medicinu, proizvodnju i transport, jer za rešavanje najvećeg broja praktičnih problema, odlučujući značaj imaju troškovi neophodni za realizaciju posmatranih protoka. Primera radi, ako se radi o transportnoj mreži, onda je jasno da uz poštovanje svih ograničenja koja postoje u posmatranoj transportnoj mreži, odlučujući značaj za realizaciju transporta (protoka) imaju troškovi transporta i da se uvek zahteva njihova minimalizacija uz unapred data ograničenja.

2.1 Matematički model problema i osnovne definicije

Neka je $G = (N, A)$ usmerena mreža , gde je N skup od n čvorova, a A skup od m usmerenih grana. Promenljivu x_{ij} koja odgovara grani (i, j) sa početkom u čvoru i i krajem u čvoru j interpretiramo kao protok kroz tu granu, a odgovarajuće c_{ij} kao cenu tog protoka.

Takođe svakoj grani $(i, j) \in A$ pridružujemo kapacitete u_{ij} (koji označava maksimalni mogući protok na grani) i l_{ij}(koji označava minimalni neophodni protok na grani). Neka je b_i, $i \in N$, količina protoka koja prolazi kroz čvor $i \in N$ (tj. b_i predstavlja ponudu ili potražnju). Čvor i koji odgovara b_i >0 zovemo izvor snage(ponude) b_i; čvor i koji odgovara b_i <0 zovemo ponor snage (potražnje); čvorove koji odgovaraju nultim komponentama b_i, zovemo pretovarna mesta.Funkcija cilja predstavlja ukupnu cenu protoka kroz mrežu. Matematički model ovog zadatka je

$$\text{(min)} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \qquad (2.1.a)$$

$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} = b_i \text{ za sve } i \in N \qquad (2.1.b)$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \text{ za sve } (i,j) \in A \qquad (2.1.c)$$

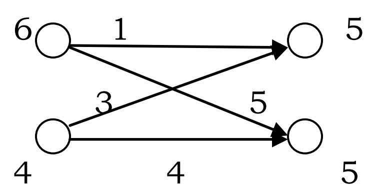
Ograničenja (2.1.b) se nazivaju „mass balance“ ogranicenja.
$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij}$ predstavlja ukupan odliv iz čvora , a $\sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji}$ predstavlja ukupan priliv u čvor.

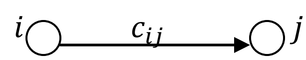
U vecini slučajeva je l_{ij} =0, pa ako se drugačije ne zahteva, smatraćemo $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$.

Takođe, neka je C najveća količina troškova bilo koje grane, a U najveci obim bilo koje ponude/potražnje.

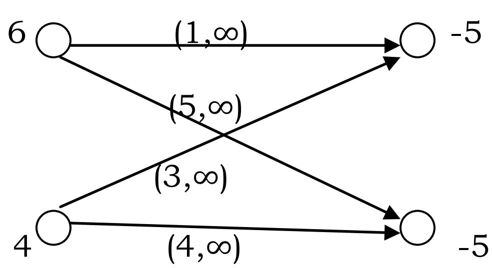
Možemo primetiti da je transportni problem specijalni slučaj ove klase problema za l_{ij} =0, u_{ij}= ∞. Mreža G je pri tom bipartitni digraf sa m izvora i n ušća. Poznata je ponuda a_i svakog izvora i potražnje b_j svakog ponora kao i cena transporta c_{ij} jedinične količine robe od izvora i do ponora j, za svako i=1,2,...m, j=1,2,...n. Cilj je prevesti svu ponuđenu robu i zadovoljiti potražnje uz minimalne ukupne transportne troškove.

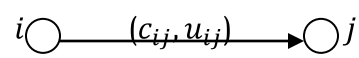
Primer: Pretpostavimo da je data mrežna reprezentacija transportnog problema sa 2 čvora ponude, 2 čvora potražnje i datim cenama na granama (pri tom je ponude=potražnji).Mreža može da izgleda ovako





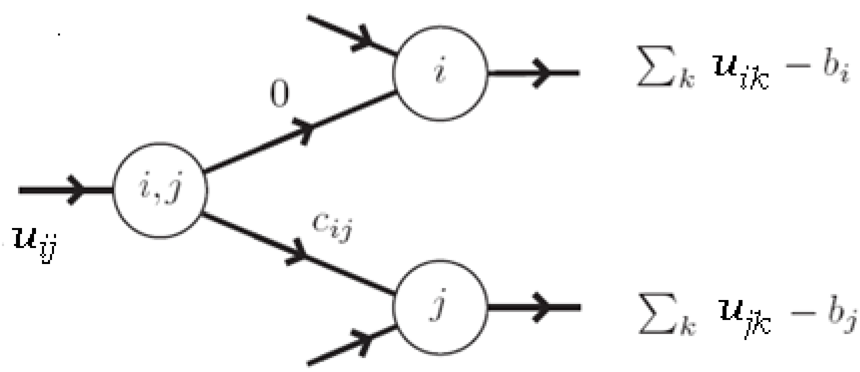
Isti primer za problem protoka sa minimalnom cenom izgleda ovako



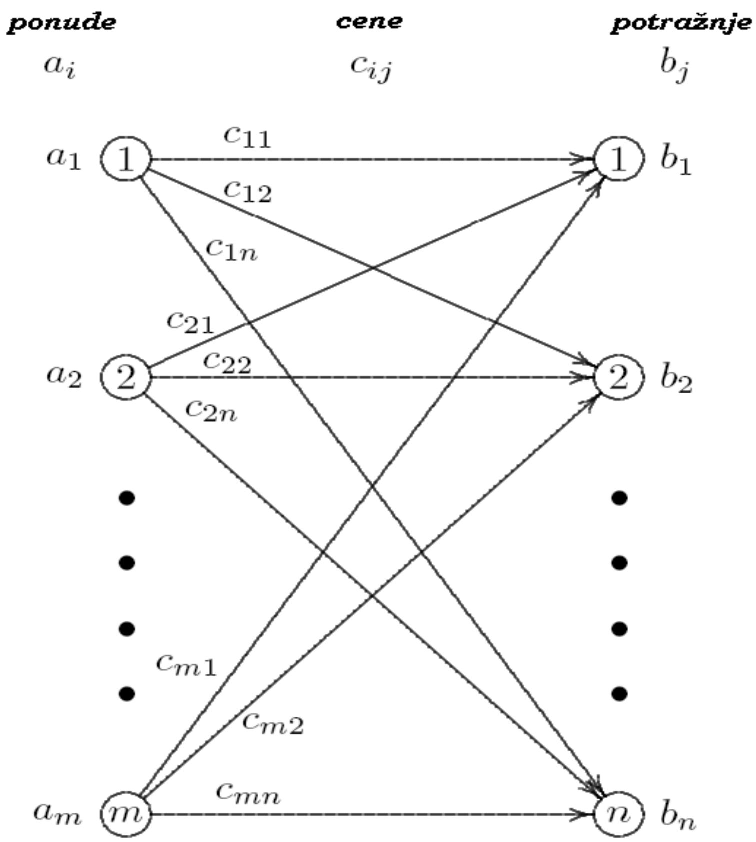


Lema 2.1 Svaki problem protoka sa minimalnom cenom je ekvivalentan transportnom problemu.

Dokaz: Posmatrajmo problem protoka sa minimalnom cenom za koji su l_{ij} =0, $u_{ij} < \infty$, i podaci $G = (N, A)$, c_{ij}, b_i definisani kao ranije. Želimo da ovaj problem svedemo na transportni praveći bipartitni graf snabdevača i potrošača. Za svaku granu (i, j) ∈A konsruišemo čvor i, j koji predstavlja snabdevača sa ponudom u_{ij}. Potrošači će biti čvorovi $i \in N$,sa potražnjom $\sum_{k:(i,k)\in A} u_{ik} - b_i$. Zatim povežemo svakog snabdevača i, j sa potrošačima i i j granama neograničenog kapaciteta. I neka je cena transporta koz grane definisana na sledeći način $c_{ij,i}$ =0 i $c_{ij,j} = c_{ij}$.



Pokažimo da postoji „1-1“ preslikavanje između dopustivih protoka ova dva problema i da su cene protoka iste. Da bismo ovo pokazali, neka je f_{ij} protok od čvora i,j do j, a $u_{ij} - f_{ij}$ protok od i, j do i. Očigledno je da razmatramo problem (min) $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} f_{ij}$. Ukupan iznos protoka kroz čvor i iznosi $\sum_{i:(i,j)\in A}(u_{ij} - f_{ij}) + \sum_{j:(j,i)\in A} f_{ji}$. Ovaj protok mora biti jednak $\sum_{j:(i,j)\in A} u_{ij} - b_i$. Očigledno je i 0≤ $f_{ij} \le u_{ij.}$ Ovim smo dobili ograničenje za problem protoka sa minimalnom cenom,čime je lema dokazana.



Mrežna reprezentacija transportnog problema

U nastavku ćemo opisati metode za nalaženje rešenja problema protoka sa minimalnom cenom (a samim tim i transportnog problema).
Neka važe pretpostavke:

1. Svi podaci (cena,ponuda,potražnja,kapacitet) su celi brojevi.
2. Mreža je usmerena.
3. Ponuda/potražnja u čvorovima zadovoljava uslov $\sum_{i \in N} b_i = 0$ i problem protoka sa minimalnom cenom ima dopustivo rešenje.
4. Mreža G sadrži usmeren put u kome svaka grana ima beskonačni kapacitet, između svakog para čvora.
5. Sve cene na granama su nenegativne.

Pojam rezidualne mreže

Naši algoritmi će se oslanjati na koncept rezidualne mreže. Rezidualnu mrežu $G(x)$ koja odgovara protoku x, definišemo na sledeći način: granu $(i, j) \in A$ zamenjujemo sa dve grane, (i, j) i (j, i). Grana (i, j) ima cenu c_{ij} i rezidualni kapacitet $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, a grana (j,i) ima cenu $c_{ji} = -c_{ij}$ i rezidualni kapacitet $r_{ij} = x_{ij}$. Rezidualna mreža se sastoji samo od grana sa pozitivnim rezidualnim kapacitetom.

2.2 Dualni problem

Za svaki problem linearnog programiranja (primalni problem) postoji njemu blisko povezan dualni problem. Za problem protoka sa minimalnom cenom , promenljiva $\pi(i)$ je povezana sa „mass balance" ograničenjima čvora i, a promenljiva $\alpha(i)$ sa ograničenjima kapaciteta grane (i,j). U odnosu na ove promenljive, dualni problem se može definisati na sledeći način :

$$(\max)\ \omega(\pi,\alpha) = \sum_{i\in N} b(i)\pi(i) - \sum_{(i,j)\in A} u_{ij}\alpha_{ij} \quad (2.2.a)$$

$$\pi(i) - \pi(j) - \alpha_{ij} \le c_{ij} \quad \text{za sve (i,j)} \in \text{A} \quad (2.2.b)$$

$$\alpha_{ij} \ge 0 \text{ za sve (i,j) } \in \text{A i } \pi(j) \text{ je neograničen za sve } j \in N \text{ (2.2.c)}$$

2.3 Varijante problema protoka sa minimalnom cenom

Transportni problem

Transportni problem je definisan pomoću dvodelnog grafa , gde je N_1 skup izvor čvorova, a N_2 skup ponor čvorova, tako da je $N = N_1 \cup N_2$. Skup grana je definisan sa $A = \{(i,j) \mid i \in N_1, j \in N_2\}$. Cilj je da se pronađe najmanja cena prevoza od izvora snabdevanja (N_1) do ponor destinacija (N_2). Ponude i potražnje u izvorima i ponorima označene su sa $b(i)$. Ne postoje gornje granice protoka. LP formulacija ovog problema je:

$$(\min) \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} = b(i) \quad \text{za sve } i \in N_1$$

$$\sum_{\{i:(i,j)\in A\}} x_{ij} = -b(j) \quad \text{za sve } j \in N_2$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad \text{za sve } (i,j) \in A$$

Postoje razne varijante transportnog problema, koje se mogu svesti na osnovni oblik, npr. 1) " The bottleneck transportation problem" se može definisati na sledeći način: skupovi ponuda i skupovi potražnji su dati tako da je ukupna ponuda jednaka ukupnoj potražnji.Postoji transportno vreme koje povezuje svaku tačku ponude i svaku tačku potražnje.Potrebno je da se pronađe dopustiva raspodela (zaliha ponude) koja minimizuje maksimalno transportno vreme između tačaka ponude i potražnje, ali tako da je raspodela između dve tačke pozitivna.[13], 2) „The dynamic transportation problem“ je transportni problem kroz vreme. Tj, problem određivanja optimalnog protoka robe od različitih izvora do različitih ušća u datoj mreži, uz minimizaciju ukupnih troškova prevoza, u svakom trenutku vremena t.[14] , 3) „Fixed-charge transportation problem “(FCTP) je još jedna varijacija transportnog problema u kojoj je odredjen fiksni trošak za svaki put koji se koristi u rešenju. Zato je funkcija cilja stepena. Svaki put kad otvorimo ili zatvorimo put ,funkcija cilja „skoči“ za korak.„The step fixed-charge transportation problem“(SFCTP) je varijanta ovog problema u kojoj je fiksna cena u formi stepene funkcije i zavisi od tereta na datom putu. Funkcija cilja je i ovde stepena funkcija, ali sa mnogo više koraka nego u FCTP.Ovi problemi se uglavnom rešavaju korišćenjem savremenih kompjuterskih softvera.[15], „The production-transportation problem“ se može definisati na sledeći način : neka postoji nekoliko postrojenja na različitim lokacijama (rafinerija nafte, na primer) i veliki broj kupaca. Svaki proizvođač želi da proizvede maksimalno moguće, koristeći više načina proizvodnje, dobijajući različite količine proizvoda kao i promenljive troškove proizvodnje. Pretpostavimo da kupac za svaki proizvod zahteva sto kraći rok dostave i poznate jedinične troškove transporta. Svaki kupac može da zadovolji svoje potrebe za određenim proizvodom iz bilo koje kombinacije postrojenja. „The production-transportation problem“ se sastoji od određivanja proizvodnog programa proizvođača, kao i transporta proizvoda do kupaca sa minimalnim troškovima,a da pri tome sve potražnje budu zadovoljene.[16]

Problem pretovara

Ovo je uopštenje transportnog problema sa dodatim nula-snabdevenim čvorovima, nazvanim čvorovi pretovara. Čvorovi se dele na tri skupa: N_1 −čvorovi snabdevanja, N_2 −čvorovi potražnje, N_3 −čvorovi pretovara. U svakom drugom smislu, problem je ekvivalentan transportnom problemu. LP formulacija ovog problema je:

$$(\min) \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} = b(i) \quad \text{za sve } i \in N_1, N_2$$

$$\sum_{\{i:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} = 0 \quad \text{za sve } j \in N_3$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{za sve } (i,j) \in A$$

Jedina razlika između ovog i problema protoka sa minimalnom cenom je što ovaj drugi uključuje gornje i donje granice protoka na granama.

Problem najkraćeg puta

Za ovaj problem želimo da nađemo put najmanje cene (ili dužine) od određenog izvor čvora s do ponor čvora t, pretpostavljajući da svaka grana $(i,j) \in A$ ima cenu (ili dužinu) c_{ij}. Ako postavimo $b(s) = 1$, $b(t) = -1$ i $b(i) = 0$ za sve ostale čvorove u problemu protoka sa minimalnom cenom, rešenje problema će slati jednu jedinicu protoka od čvora s do čvora t duž najkraćeg puta. Dakle, problem najkraćeg puta od čvora s do svih ostalih čvorova, može biti formulisan kao problem protoka sa minimalnom cenom, postavljajući $b(s) = n - 1$, $b(i) = -1$ za sve $i \neq s$, $l_{ij} = 0$ i $u_{ij} = n - 1$ za sve $(i,j) \in A$, c_{ij} kao dužinu grane (i,j) za sve $(i,j) \in A$. LP formulacija ovog problema je:

$$(\min) \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

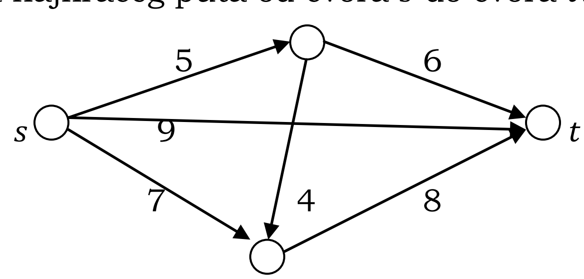
$$\sum_{\{j:(s,j)\in A\}} x_{sj} - \sum_{\{j:(j,s)\in A\}} x_{js} = n - 1$$

$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} = -1 \quad \text{za sve } i = 2,3,\dots,n$$

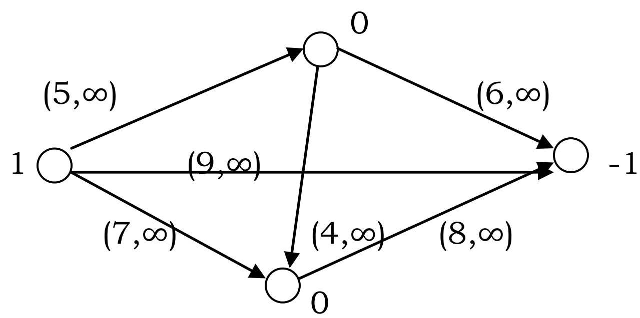
$$0 \leq x_{ij} \leq n - 1 \quad \text{za sve } (i,j) \in A$$

Optimalno rešenje ovog problema šalje jedinicu protoka od izvora do svih ostalih čvorova duž najkraćeg puta.

Primer grafa najkraćeg puta od čvora s do čvora t:



Ovaj problem može biti formulisan kao problem protoka sa minimalnom cenom i tada graf izgleda ovako :



Problem maksimalnog protoka

Ovaj problem se može posmatrati kao komplementaran model problemu najkraćeg puta. Dok se kod problema najkraćeg puta prikazuje situacija u kojoj protok predstavlja cenu koja nije ograničenog kapaciteta, kod problema maksimalnog protoka, protok je ograničen. Problem maksimalnog protoka je problem određivanja maksimalne količine protoka od određenog izvor čvora s do ponor čvora t. Ovaj problem možemo formulisati kao problem protoka sa minimalnom cenom postavljajući $b(i) = 0$ za sve $i \in N$, $c_{ij} = 0$ za sve $(i,j) \in A$, i uvođenjem dodatne grane (t,s) sa cenom $c_{ts} = -1$ i maksimalnim protokom $u_{ts} = \infty$. Tada problem protoka sa minimalnom cenom maksimizira protok na grani (t,s) , ali pošto svaki protok na grani (t,s) mora „putovati“ od čvora s do čvora t kroz grane iz A ($b(i) = 0$), rešenje problema protoka sa minimalnom cenom će maksimizovati protok od čvora s do čvora t u originalnoj mreži. Pretpostavimo, bez gubitka opštosti da je 1 izvor čvor, a n ponor čvor. Grana $(n,1)$ je dodata sa $c_{n1} = -1$, $l_{n1} = 0$ i $u_{n1} = \infty$. Neka je $b(i) = 0$ za sve $i \in N$. LP formulacija ovog problema je:

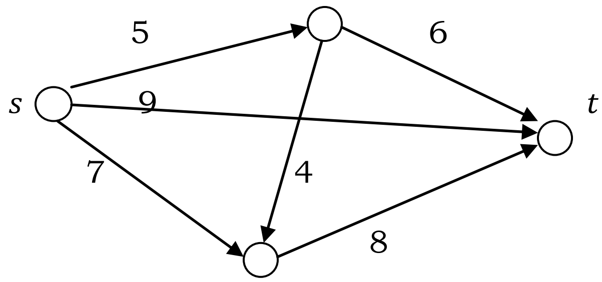
$$(\min) \quad -x_{n1}$$

$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} = 0 \quad \text{za sve } i \in N$$

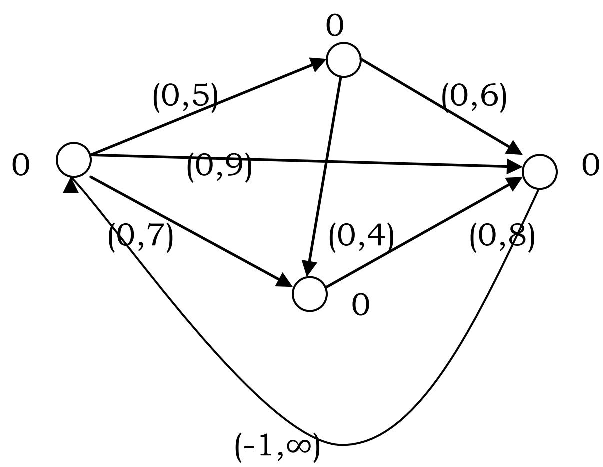
$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{za sve } (i,j) \in A$$

$$0 \leq x_{n1} \leq \infty$$

Primer grafa maksimalnog protoka od čvora s do čvora t :



Ovaj problem može biti formulisan kao problem protoka sa minimalnom cenom i tada graf izgleda ovako :



Problem pridruživanja

Neka je graf $G(N, A)$ definisan pomoću dva disjunktna skupa N_1 i N_2 sa jednakim brojem čvorova. Problem je kako svakom elementu iz N_1 pridružiti jedan element iz N_2 uz minimalne troškove. Ako je elementu $i \in N_1$ pridružen element $j \in N_2$, tada je $x_{ij} = 1$. Inače je $x_{ij} = 0$. Za svaki $i \in N_1$, $b(i) = 1$, za svaki $j \in N_2$, $b(j) = -1$. Sve donje granice su 0, gornje 1. LP formulacija ovog problema je:

$$(\min) \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} = 1 \quad \text{za sve } i \in N_1$$

$$\sum_{\{i:(i,j)\in A\}} -x_{ij} = 1 \quad \text{za sve } j \in N_2$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{za sve } (i,j) \in A$$

3.Osnovni algoritmi za rešavanje problema protoka sa minimalnom cenom

U ovom poglavlju ćemo opisati tri pseudopolinomijalna algoritma za rešavanje problema protoka sa minimalnom cenom sa celobrojnim podacima. To su „cycle-canceling algorithm“, „the successive shortest path algorithm“ i „primal-dual algorithm“.

3.1 Uslovi optimalnosti

U problemu najkraćeg puta, oznake $d(i)$ definišu najkraća rastojanja od određenog čvora s do svih preostalih čvorova u mreži akko predstavljaju dužine puteva od čvora s i zadovoljavaju sledeće uslove optimalnosti

$$d(j) \leq d(i) + c_{ij} \quad \text{za sve } (i, j) \in A \tag{3.1}$$

Ovi uslovi optimalnosti nam omogućavaju da proverimo da li dati skup rastojanja zaista definiše najkraće puteve. Takođe, omogućavaju i proveru da li dati skup puteva od čvora s do ostalih čvorova u mreži predstavlja skup najkraćih puteva, jednostavnim izračunavanjem dužina tih puteva i proverom uslova optimalnosti. U oba slučaja, uslovi optimalnosti pružaju uverenje da je skup rastojanja ili skup puteva optimalan. Pre nego što pokrenemo diskusiju o algoritmima za rešavanje problema protoka sa minimalnom cenom, opisaćemo tri ekvivalantna uslova optimalnosti. To su: „negative cycle optimality conditions“ (uslovi optimalnosti negativnog ciklusa), „reduced cost optimality conditions“ (uslovi optimalnosti smanjene cene) i „complementary slackness optimality conditions“ (uslovi optimalnosti dodatne labavosti).

3.1.1 Uslovi optimalnosti negativnog ciklusa

Teorema 3.1.1 (Uslovi optimalnosti negativnog ciklusa)

Dopustivo rešenje x^* je optimalno rešenje problema protoka sa minimalnom cenom ako i samo ako zadovoljava uslove optimalnosti negativnog ciklusa, odnosno, rezidualna mreža $G(x^*)$ ne sadrži negativan (usmeren) ciklus.

Dokaz:

Pretpostavimo da je x neki dopustivi protok i $G(x)$ sadrži negativan ciklus. Možemo da poboljšamo objektivnu vrednost funkcije širenjem pozitivnog protoka po ciklusu. Zato, ako je x^* optimalan protok,$G(x^*)$ ne može sadržati negativan ciklus.

Sada pretpostavimo da je x^* dopustivi protok i $G(x^*)$ ne sadrži negativan ciklus. Neka je x' optimalan protok i $x^* \neq x'$. Teorija dekompozicije protoka pokazuje da razlika vektora $x' - x^*$ može da se razloži na m pojačanih ciklusa u odnosu na protok x^* i zbir cena protoka na ovim ciklusima je jednaka cx'- cx^*. Pošto su dužine svih ciklusa u $G(x^*)$ nenegativne, cx'- cx^* ≥0, tj. c$x' \geq$ cx^*. Ali, pošto je x' optimalan protok c$x' \leq$ cx^*. Zato je c$x' =$cx^*, pa je x^*, sto je u suprotnosi sa pretpostavkom. Dakle, ako $G(x^*)$ ne sadrži negativan ciklus, x^* mora biti optimalan. Teorema je dokazana.

3.1.2 Uslovi optimalnosti smanjene cene

Primetimo da se uslovi optimalnosti problema najkraćeg puta mogu zapisati kao

$$c_{ij}^d = c_{ij} + d(i) - d(j) \text{ za sve grane } (i,j) \in A \qquad (3.2)$$

gde je c_{ij}^d optimalna smanjena cena za granu (i,j) u smislu da meri cenu ove grane u odnosu na najkraća rastojanja $d(i)$ i $d(j)$.

Primetimo da u odnosu na optimalna rastojanja, svaka grana u mreži ima nenegativnu smanjenu cenu. Štaviše,ako grana (i,j) povezuje izvor čvor s i bilo koji drugi čvor na najkraćem putu, pošto je $d(j)$= $d(i)$+c_{ij}, najkraći put sadrži samo grane sa nulom smanjenim cenama.

Pretpostavimo da je realan broj $\pi(i)$, neograničenog znaka, povezan sa svakim čvorom $i \in N$. $\pi(i)$ se naziva potencijal čvora i. Kao što je već ranije napomenuto, $\pi(i)$ je dualna promenljiva koja odgovara „mass balance“

ograničenjima čvora i. Za dati skup čvorova potencijala π, smanjena cena za granu (i, j) se definiše

$$c_{ij}^{\pi} = c_{ij} - \pi(i) + \pi(j) \quad .$$

Ovo smanjenje cene se može primeniti i na rezidualnu mrežu kao i na originalnu, ali se tada koristi c_{ij}^{π} umesto c_{ij} . Sledeća svojstva će biti korisna u nastavku poglavlja.

Svojstvo 3.1.2

a) Za svaki usmeren put P od čvora k do čvora l,

$$\sum_{(i,j)\in P} c_{ij}^{\pi} = \sum_{(i,j)\in P} c_{ij} - \pi(k) + \pi(l)$$

b) Za svaki usmeren ciklus W

$$\sum_{(i,j)\in W} c_{ij}^{\pi} = \sum_{(i,j)\in W} c_{ij} \quad .$$

Ovo svojstvo znači da potencijali čvora ne menjaju najkraći put između bilo koja dva čvora k i l, jer potencijali povećavaju dužinu svake putanje konstantom $\pi(l) - \pi(k)$. Ovo svojstvo takođe podrazumeva da ako je W negativan ciklus u odnosu na c_{ij} kao cenu grane, to je takođe negativan ciklus u odnosu na c_{ij}^{π} kao cenu grane. Sada smo obezbedili i alternativni oblik za uslove optimalnosti negativnog ciklusa koji se izražava u terminima smanjenih cena grana.

Teorema 3.1.3 (Uslovi optimalnosti smanjene cene)

Dopustivo rešenje x^* je optimalno rešenje problema protoka sa minimalnom cenom ako i samo ako neki skup čvorova potencijala π zadovoljava sledeće uslove optimalnosti smanjene cene

$$c_{ij}^{\pi} \geq 0 \text{ za svaku granu } (i, j) \text{ iz } G(x^*) \; . \qquad (3.3)$$

Dokaz:

Ovo tvrđenje možemo dokazati koristeći teoremu 3.1.1, ako pokažemo da su uslovi optimalnosti negativnog ciklusa ekvivalentni uslovima optimalnosti smanjene cene.
Pretpostavimo da rešenje x^* zadovoljava uslove optimalnosti smanjene cene. Tada imamo

$$\sum_{(i,j)\in W} c_{ij}^{\pi} \geq 0$$

za svaki usmeren ciklus W u $G(x^*)$.
Zatim, iz svojstva 3.1.2b) sledi

$$\sum_{(i,j)\in W} c_{ij}^{\pi} = \sum_{(i,j)\in W} c_{ij} \geq 0$$

za svaki usmeren ciklus W, pa $G(x^*)$ ne sadrži negativan ciklus. Dakle, po teoremi 3.1.1, x^* je optimalno rešenje.

Suprotno, pretpostavimo da za rešenje x^*, $G(x^*)$ ne sadrži negativan ciklus. Neka $d(\cdot)$ označava najkraće rastojanje od čvora 1 do svih ostalih čvorova u $G(x^*)$. Mora biti zadovoljen uslov optimalnosti

$$d(j) \leq d(i) + c_{ij} \quad \text{za sve } (i,j) \in G(x^*) .$$

Ovu nejednakost možemo zapisati $c_{ij} - \left(-d(i)\right) + (-d(j)) \geq 0$ ili $c_{ij} \geq 0$, ako definišemo $\pi = -d$. dakle, rešenje x^* zadovoljava uslove optimalnosti smanjene cene. Teorema je dokazana.

3.1.3 Uslovi optimalnosti dodatne labavosti

Uslovi optimalnosti iz teorema 3.1.1 i 3.1.3 su se odnosili na rezidualnu mrežu, a sada ćemo ih prilagoditi originalnoj mreži.

Teorema 3.1.4 (Uslovi optimalnosti dodatne labavosti)

Dopustivo rešenje x^* je optimalno rešenje problema protoka sa minimalnom cenom ako i samo ako za neki skup čvorova potencijala π, smanjene cene i vrednosti protoka zadovoljavaju sledeće uslove optimalnosti dodatne labavosti za svaku granu $(i,j) \in A$:

1. Ako je $c_{ij}^{\pi} > 0$, tada je $x_{ij}^* = 0$. (3.4.a)
2. Ako je $0 < x_{ij} < u_{ij}$, tada je $c_{ij}^{\pi} = 0$. (3.4.b)

3. Ako je $c_{ij}^{\pi} < 0$, tada je $x_{ij}^{*} = u_{ij}$. (3.4.c)

Dokaz:

Tvrđenje možemo dokazati pokazujući da su uslovi optimalnosti smanjene cene ekvivalentni (3.4). Pretpostavimo da čvor potencijala π i vektor protoka x zadovoljavaju uslove optimalnosti smanjene cene. Želimo da pokažemo da takođe zadovoljavaju i (3.4). Razmotrimo tri mogućnosti za svaku granu $(i, j) \in A$.

1. Ako je $c_{ij}^{\pi} > 0$, rezidualna mreža ne može sadržati granu (i, j), jer je $c_{ji}^{\pi} = -c_{ij}^{\pi} < 0$ (kontradikcija sa (3.3)). Zato je $x_{ij}^{*} = 0$.
2. Ako je $0 < x_{ij}^{*} < u_{ij}$, tada rezidualna mreža sadrži obe grane (i, j) i (j, i) . Iz uslova optimalnosti smanjene cene sledi da je $c_{ij}^{\pi} \geq 0$ i $c_{ji}^{\pi} \geq 0$. Pošto je $c_{ji}^{\pi} = -c_{ij}^{\pi}$, sledi da je $c_{ij}^{\pi} = c_{ji}^{\pi} = 0$.
3. Ako je $c_{ij}^{\pi} < 0$, rezidualna mreža ne može da sadrži granu (i, j) , jer je $c_{ij}^{\pi} < 0$ u kontradikciji sa (3.3). Zato je $x_{ij}^{*} = u_{ij}$.

Dakle,ako čvor potencijala π i vektor protoka x zadovoljavaju uslove optimalnosti smanjene cene, onda zadovoljavaju i uslove optimalnosti dodatne labavosti. Suprotno, ako par (x, π) zadovoljava uslove optimalnosti dodatne labavosti, takođe zadovoljava i uslove optimalnosti smanjene cene. Teorema je dokazana.

3.2 Veza između optimalnih protoka i optimalnih potencijala

Znajući optimalan protok možemo izračunati optimalne potencijale čvora i obrnuto. Ovi problemi se mogu rešiti preko problema najkraćeg puta ili maksimalnog protoka. I to ukazuje na vezu između problema protoka sa minimalnom cenom, problema maksimalnog protoka i problema najkraćeg puta.

3.2.1 Izračunavanje optimalnog potencijala čvora

Ako imamo dat optimalan protok x^*, možemo dobiti potencijal čvora rešavajući problem najkraćeg puta (sa mogućim negativnim dužinama grana). Neka je $G(x^*)$ rezidualna mreža u odnosu na protok x^*. Jasno je da $G(x^*)$ ne sadrži negativan ciklus, jer bi to bilo u suprotnosti sa optimalnošću rešenja x^*. Neka $d(\cdot)$ označava najkraće rastojanje od čvora 1 do svih ostalih čvorova u rezidualnoj mreži i neka su c_{ij} dužine grana. Rastojanja $d(\cdot)$ su dobro definisana, jer rezidualna mreža ne sadrži negativan ciklus. Uslovi optimalnosti najkraćeg puta podrazumevaju da

$$d_j \leq d_i + c_{ij} \text{ za sve } (i,j) \text{ iz } G(x^*) \tag{3.5}$$

Neka je $\pi = -d$. Tada se (3.5) može predstaviti kao

$$c_{ij}^{\pi} = c_{ij} - \pi(i) + \pi(j) \quad \geq 0 \text{ za sve } (i,j) \text{ iz } G(x^*) \text{ .}$$

Pozivajući se na teoremu 3.1.3 očigledno je da π pretstavlja optimalan skup potencijala čvora.

3.2.2 Nalaženje optimalnih protoka

Imajući u vidu optimalne potencijale π , možemo dobiti optimalno rešenje x^* rešavajući problem maksimalnog protoka. Najpre izračunamo smanjenu cenu c_{ij}^{π} za svaku granu $(i,j) \in A$,pa razmotrimo sve grane , jednu po jednu. Svaka grana (i,j)je klasifikovana na jedan od sledećih načina .

Slučaj1: $c_{ij}^{\pi} > 0$
Uslov (3.4.a) podrazumeva da x_{ij}^* mora biti nula. Primenjujemo ovo ograničenje postavljajući $x_{ij}^* = 0$ i brisanjem (i,j) iz mreže.

Slučaj2: $c_{ij}^{\pi} < 0$
Uslov (3.4.c) podrazumeva da $x_{ij}^* = u_{ij}$ i brisanje ove grane iz mreže. Pošto smo poslali u_{ij} jedinica protoka duž grane (i,j), moramo smanjiti $b(i)$ za u_{ij} i povećati $b(j)$ za u_{ij} .

Slučaj3: $c_{ij}^{\pi} = 0$
U ovom slučaju, pretpostavimo da su vrednosti protoka na grani (i,j) između 0 i u_{ij}.

Zatim, neka $G' = (N, A')$ označava rezultirajuću mrežu i neka b' označava modifikovane ponude/potražnje čvorova. Sada se problem svodi na nalaženje protoka u mreži G' koji zadovoljava modifikovane ponude/potražnje čvorova. Takav protok se može naći rešavanjem problema maksimalnog protoka. Uvedimo izvor čvor s i ponor čvor t. Za svaki čvor i sa $b'(i) > 0$ dodajemo granu (s, i) sa kapacitetom $b'(i)$, a za svaki čvor i sa $b'(i) < 0$ dodajemo granu (i, t) sa kapacitetom $-b'(i)$. Nadalje rešavamo problem maksimalnog protoka od čvora s do t u transformisanoj mreži, da bismo dobili maksimalni protok x^* . Ovo rešenje x_{ij}^* za sve $(i, j) \in A$ je optimalan protok za problem protoka sa minimalnom cenom u G.

3.3 „Cycle-canceling algorithm“ (Algoritam ciklus-poništavanja)

Ovaj algoritam je pvi predložio Klein , 1967.godine, pa se ponekad naziva i Klein-ov algoritam. [18] Uslovi optimalnosti negativnog ciklusa tvrde da je dopustivi protok x optimalan ako i samo ako rezidualna mreža $G(x)$ ne sadrži negativan ciklus . Ovaj uslov ukazuje na algoritamski pristup rešavanja problema protoka sa minimalnom cenom, nazvanog „cycle-canceling algorithm“. Algoritam najpre nalazi dopustivo rešenje x rešavanjem problema maksimalnog protoka, a zatim pokušava da nađe negativan ciklus u svakoj iteraciji i eliminiše ga povećavajući protok na njemu,maksimalno moguće. Algoritam se završava kada mreža ne sadrži negativan ciklus. Tada je , prema teoremi 3.1.1, protok optimalan. Sledi formalan opis ovog algoritma.

algorithm „cycle-canceling“ ;

begin

  uspostaviti dopustivi protok x u mreži;

  while G(x) sadrži negativan ciklus **do**

  begin

    koristiti neki algoritam za nalaženje negativnog ciklusa W;

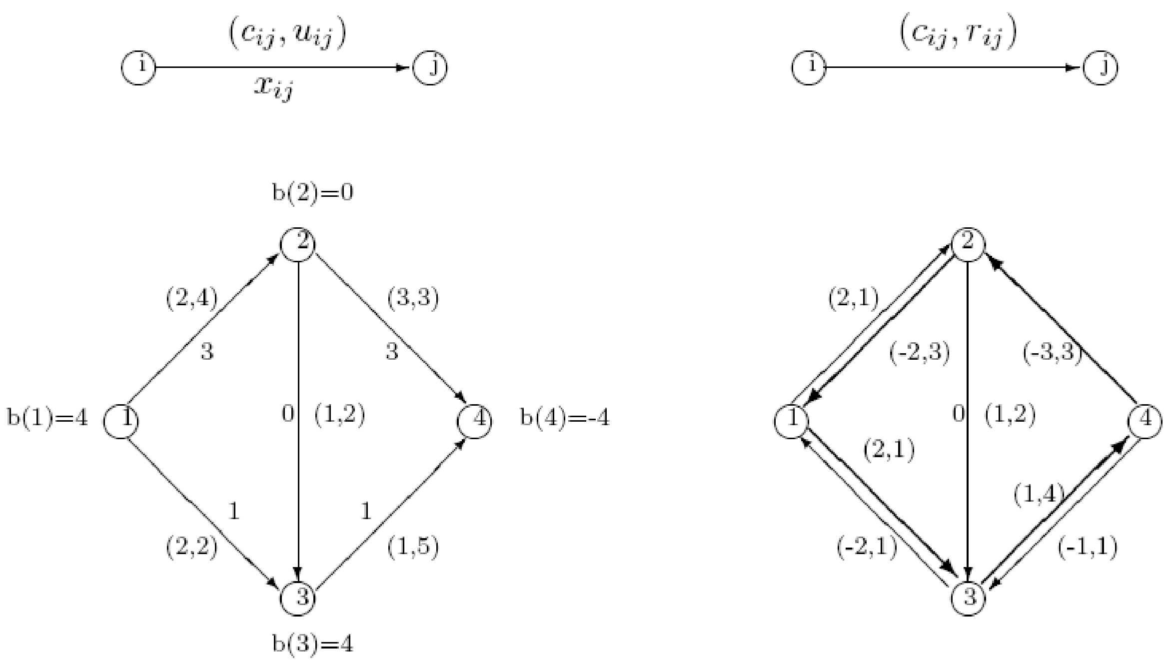
    $\delta := min\{r_{ij}: (i, j) \in W\}$;

povećati δ jedinica protoka u ciklusu W i ažurirati G(x) ;

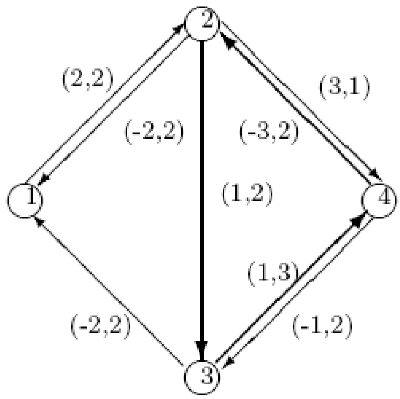
end;

end;

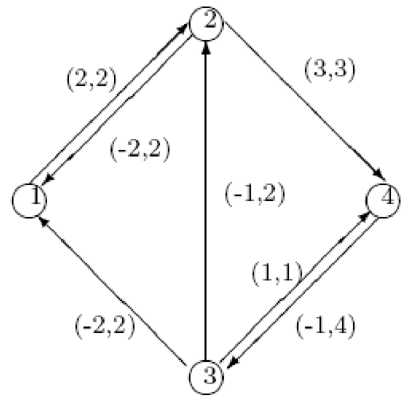
Za ilustraciju ovog algoritma razmotrićemo sledeći primer:



(a) primer mreže sa dopustivim protokom x (b) rezidualna mreža $G(x)$



(c) rezidualna mreža nakon povećanja 1 jedinice protoka duž ciklusa 4-2-1-3-4



(d) rezidualna mreža nakon povećanja 2 jed. protoka duž ciklusa 4-2-3-4

Slika 3.1.a) prikazuje primer mreže sa protokom x, a slika 3.1.b) odgovarajuću rezidualnu mrežu. Pretpostavimo da algoritam počinje izborom ciklusa 4-2-1-3-4 , čija je cena -2 i minimalni rezidualni kapacitet 1. Algoritam poboljšava 1 jedinicu protoka duž ovog ciklusa i slika 3.1.c) prikazuje modifikovanu rezidualnu mrežu. Dalje, pretpostavimo da algoritam bira ciklus 4-2-3-4 ,čija je cena -1 i minimalni rezidualni kapacitet 2. Algoritam poboljšava 2 jedinice protoka duž ovog ciklusa i slika 3.1.d) prikazuje modifikovanu rezidualnu mrežu. Pošto ova rezidualna mreža ne sadrži negativan ciklus, algoritam se završava.

Kako mnoge metode rešavanja problema sa minimalnom cenom uključuju nalaženje najkraćeg puta ili maksimalnog protoka, potrebno je odrediti red složenosti ovih algoritama. Neka $S(\cdot)$ označava složenost problema nalaženja najkraćeg puta,a $M(\cdot)$ odgovarajuće vreme rešavanja problema maksimalnog protoka. Sledeće granice su odredili Ahuja, Magnanti i Orlin , 1989.godine.Polinomijalne granice:

$S(n,m,C) = min\{mloglogC, m + n\sqrt{logC}\}$, $M(n,m,U) = mnlog(\frac{n\sqrt{logU}}{m} + 2)$

Jake polinomijalne granice : $S(n,m) = m + nlogn$, $M(n,m) = nmlog(n^2/m)$ [12]

Sada ćemo razmotriti broj iteracija koje ovaj algoritam obavlja. Kako je $c_{ij} \leq C$ i $x_{ij} \leq U$ za sve $(i,j) \in A$, mcU je gornja granica početne cene protoka, a kako je $c_{ij} \geq -C$ i $x_{ij} \leq U$ za sve$(i,j) \in A$, $-mcU$ je donja granica za optimalnu cenu protoka problema protoka sa minimalnom cenom. U svakoj iteraciji, algoritam menja vrednost funkcije cilja za vrednost $\left(\sum_{(i,j)\in W} c_{ij}\right)\delta$, koja je strogo negativna. Pošto pretpostavljamo da su svi podaci celi brojevi, algoritam se završava u roku od $O(mCU)$ iteracija. Obratimo pažnju da u algoritmu treba pronaći negativne cikluse za šta postoje mnogi algoritmi. Jedan od algoritama se naziva „FIFO label-correcting“ algoritam za problem najkraćeg puta. On je trenutno najbolji jako polinomijalan algoritam za rešavanje problema najkraćeg puta sa negativnim dužinama grana i zahteva $S(n,m) = O(mn)$ vremena. Znači, algoritam „cycle-canceling“ se izvršava u $O(mCU)$ iteracija i zahteva $O(nm^2CU)$ vremena.

3.4 „Successive shortest path algorithm“ (Algoritam uzastopnih najkraćih puteva)

Ovaj algoritam za problem protoka sa minimalnom cenom se razlikuje od „cycle-canceling“ algoritma jer održava optimalnost rešenja (kao što je definisano u teoremi 3.1.3) na svakom koraku i pokušava da postigne dopustivost. Dok algoritam „cycle-canceling“ održava dopustivost rešenja na svakom koraku i pokušava da postigne optimalnost. Algoritam uzastopnih najkraćih puteva održava rešenje x koje zadovoljava nenegativnost i ograničenja kapaciteta, ali narušava „mass balance“ ograničenja. Na svakom koraku, algoritam poboljšava protok duž najkraćeg puta u rezidualnoj mreži od čvora s do čvora t sa neispunjenim potražnjama. Algoritam se završava kada rešenje x zadovoljava sva „mass balance“ ograničenja.Ovaj algoritam su, nezavisno jedni od drugih, razvijali Jewell (1958), Iri (1960) i Busaker i Gowan (1961).

Pre nego što opišemo algoritam, potrebno je da uvedemo pojam pseudoprotoka. Preudoprotok je funkcija $x: A \rightarrow R^+$ koja zadovoljava samo nenegativnost i ograničenja kapaciteta (ne mora da zadovoljava „mass balance“ ograničenja). Za bilo koji pseudoprotok x , neravnoteža čvora i je definisana :

$$e(i) = b(i) + \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} - \sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij}$$

za sve $i \in N$.

Ako je $e(i) > 0$, $e(i)$ se naziva višak čvora i ; ako je $e(i) < 0$, $-e(i)$ se naziva deficit čvora ; ako je $e(i) = 0$, za čvor i se kaže da je uravnotežen. Neka E i D označavaju skupove višaka i deficita čvorova u mreži. Primetimo ,

$$\sum_{i\in N} e(i) = \sum_{i\in N} b(i) = 0$$

$$\sum_{i\in E} e(i) = -\sum_{i\in D} e(i)$$

Kao rezultat toga, ako u mreži postoji višak čvor, mora postojati i deficit čvor. Rezidualna mreža za pseudoprotok je definisana na isti način kao i rezidualna mreža za protok. Koristeći pojam pseudoprotok i uslove optimalnosti smanjene cene, dobijeni su sledeći rezultati :

Lema 3.4.1 Pretpostavimo da pseudoprotok (ili protok) x zadovoljava uslove optimalnosti smanjene cene u odnosu na neke čvorne potencijale π. Neka vektor d predstavlja najkraće rastojanje od čvora s do svih ostalih čvorova u rezidualnoj mreži $G(x)$ sa c_{ij}^{π} kao dužinama grana (i,j). Tada važi :

a) Pseudoprotok x takođe zadovoljava uslove optimalnosti smanjene cene u odnosu na potencijal $\pi' = \pi - d$.
b) Smanjene cene c_{ij}^{π} su nula za sve grane (i,j) na najkraćem putu od čvora s do svakog drugog čvora.

Dokaz:

Pošto x zadovoljava uslove optimalnosti smanjene cene u odnosu na π , $c_{ij}^{\pi} > 0$ za sve (i,j) iz $G(x)$. Štaviše, pošto vektor d predstavlja najkraće rastojanje sa c_{ij}^{π} kao dužinom grane(i,j), on zadovoljava uslove optimalnosti najkraćeg puta, pa je

$$d(j) \le d(i) + c_{ij}^{\pi} \quad \text{za sve } (i,j) \text{ iz } G(x) \tag{3.6}$$

Zamenimo $c_{ij}^{\pi} = c_{ij} - \pi(i) + \pi(j)$ u (3.6). Dobijamo $d(j) \le d(i) + c_{ij} - \pi(i) + \pi(j)$. Sada je $c_{ij} - \big(\pi(i) - d(i)\big) + (\pi(j) - d(j)) \ge 0$, tj. $c_{ij}^{\pi} \ge 0$. Odavde sledi deo a) leme.

Dalje, posmatrajmo najkraći put od čvora s do nekog čvora l . Za svaku granu (i, j) na ovom putu, $d(j) = d(i) + c_{ij}$. Zamenimo $c_{ij}^{\pi} = c_{ij} - \pi(i) + \pi(j)$ u ovu jednačinu i dobićemo $c_{ij}^{\pi} = 0$. Dokaz je završen.

Sledeća lema je direktna posledica leme 3.4.1

Lema 3.4.2 Pretpostavimo da pseudoprotok (ili protok) x zadovoljava optimalne uslove smanjene cene i neka je x' dobijen iz x slanjem protoka duž najkraćeg puta od čvora s do nekog drugog čvora k. Tada i x' takodje zadovoljava optimalne uslove smanjene cene.

Dokaz:

Definišimo potencijale π i π' kao u lemi 3.4.1. Iz te leme znamo i da je za svaku granu (i, j) na najkraćem putu P od čvora s do čvora k , $c_{ij}^{\pi} = 0$. Povećanje protoka na bilo kojoj grani $(i, j) \in P$ može dodati (j, i) rezidualnoj mreži. Pošto je $c_{ij}^{\pi} = 0$ za bilo koju takvu granu, $c_{ji}^{\pi} = 0$ i grane (j, i) takodje zadovoljavaju optimalne uslove smanjene cene.Time je lema dokazana.

Sada ćemo opisati algoritam uzastopnih najkraćih puteva. Primetimo da u ovom algoritmu, potencijali čvora imaju veoma važnu ulogu. Sledi formalan opis.

algorithm „successive shortest path“;

begin

$x \coloneqq 0 \ i \ \pi \coloneqq 0;$

$e(i) \coloneqq b(i) \ za \ sve \ \ i \in N;$

$definisati \ E \coloneqq \{i : e(i) > 0\} \ i \ D \coloneqq \{i : e(i) < 0\} \ ;$

while $E \neq \emptyset$ **do**

begin

$izabrati \ k \in E \ i \ l \in D$

$utvrditi \ najkraće \ rastojanje \ d(j) od \ čvora \ s \ do \ svih \ ostalih \ čvorova \ u \ G(x)$

$u\ odnosu\ na\ smanjene?\ cene\ c_{ij}^{\pi}$;

$neka\ P\ označava\ najkraći\ put\ od\ čvora\ k\ do\ čvora\ l$;

$ažurirati\ \pi \coloneqq \pi - d$;

$\delta \coloneqq min\big[e(k), -e(l), min\{r_{ij}: (i,j) \in P\}\big]$;

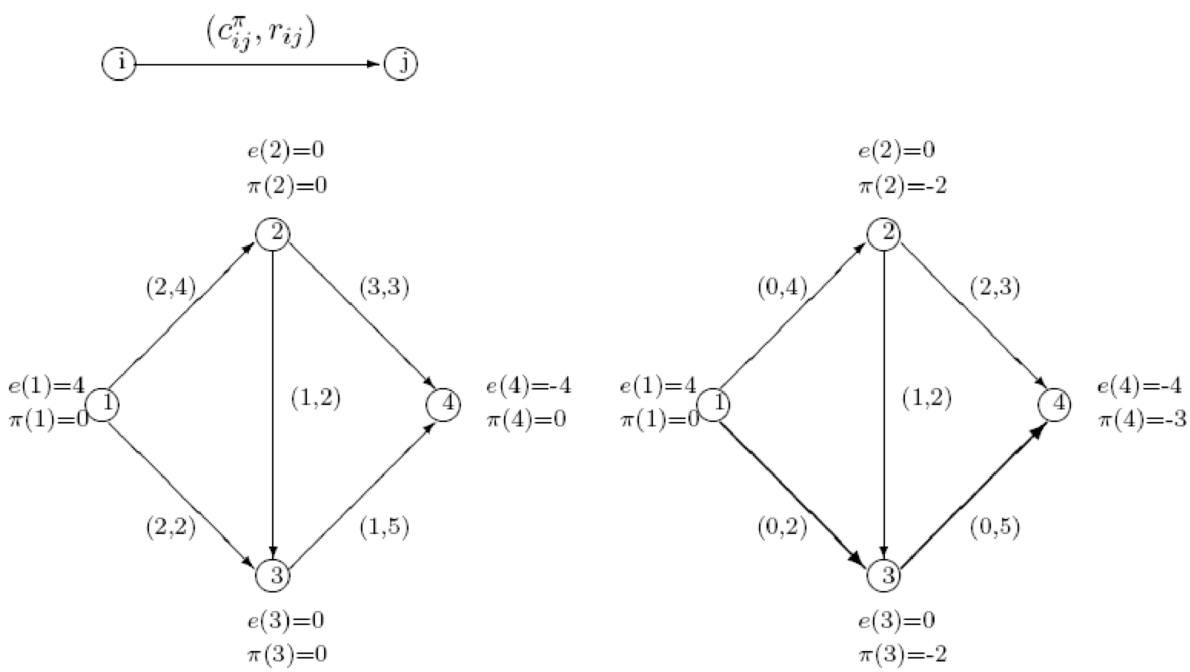
$povećati\ \delta\ jedinica\ protoka\ duž\ staze\ P$;

$ažurirati\ x, G(x), E, D, i\ smanjene\ cene?$;

end;

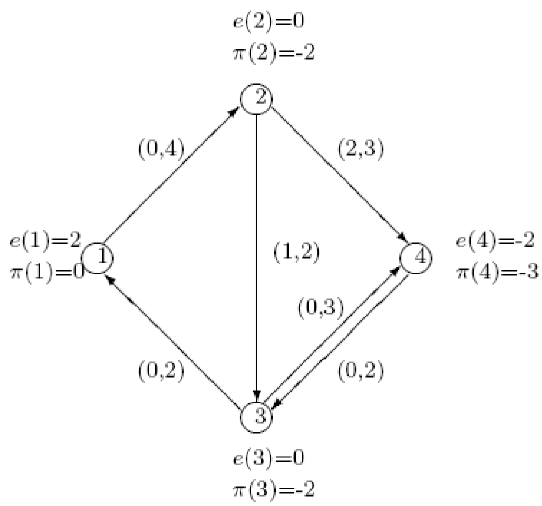
end;

Za ilustraciju ovog algoritma, razmotrićemo sledeći primer.

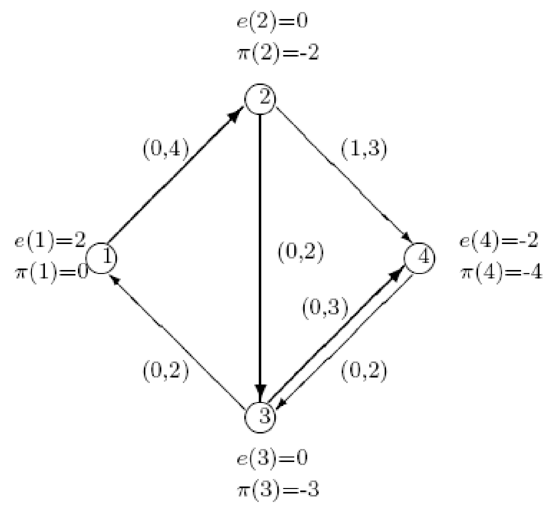


(a) početna rezidualna mreža za $x = 0$

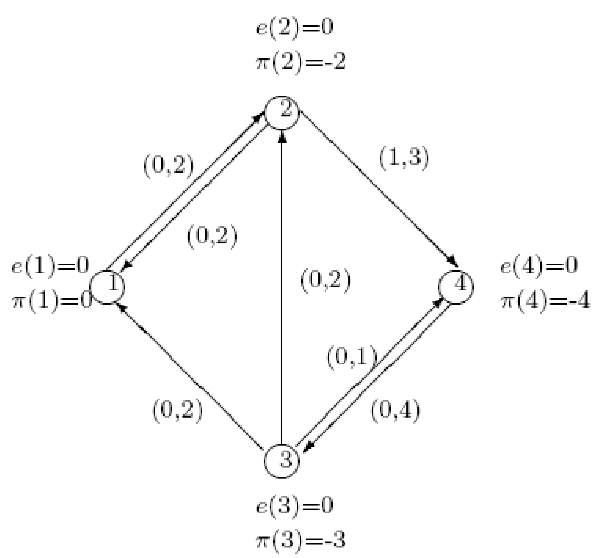
(b) mreža nakon ažuriranja potencijala π



(c) mreža nakon povećanja 2 jedinice protoka duž puta 1-3-4



(d) mreža nakon ažuriranja potencijala π



(e) mreža nakon povećanja 2 jedinice duž puta 1-3-4

Slika 3.4a) prikazuje početnu rezidualnu mrežu. Na početku, E={1} i D={4} . Zato je u prvoj iteraciji, s=1, t=4. Najkraća rastojanja d u odnosu na smanjene troškove su d = (0,2,2,3) i najkraći put od čvora 1 do čvora 4 je 1-3-4. Slika 3.4.b) pokazuje ažurirane potencijale i smanjene cene. Slika 3.4.c) prikazuje mrežu nakon povećanja $min\{e(1), -e(4), r_{13}, r_{34}\} = min\{4,4,2,5\} = 2$ jedinice protoka duž puta 1-3-4. U sledećoj iteraciji, $k = 1, l = 4, d = (0,0,1,1)$ i najkraći put od čvora 1 do čvora 4 je 1-2-3-4 . Slika 3.4d) pokazuje ažurirane potencijale čvora i smanjene cene. Slika 3.4e) prikazuje mrežu nakon povećanja $min\{e(1), e(4), r_{12}, r_{23}, r_{34}\} = min\{2,2,4,2,3\} = 2$ jedinice protoka duž puta 1-2-3-4. Na kraju ove iteracije , sve neravnoteže postaju 0 i algoritam se završava.

Sada ćemo opravdati uspešnost ovog algoritma. Na početku smo postavili $x = 0$, sto je dopustivi pseudoprotok. Za 0 pseudoprotok x , $G(x)$=G. Primetimo da ovo rešenje zajedno sa $\pi = 0$ zadovoljava uslove optimalnosti smanjene cene ,jer je $c_{ji}^{\pi} = c_{ij} \geq 0$ za svaku granu (i, j) u rezidualnoj mreži $G(x)$ (setimo se pretpostavke 5.koja navodi da su sve cene nenegativne). Dalje, primetimo da sve dok neki čvor ima neravnotežu različitu od nule, algoritam uvek uspeva da pronađe višak čvor k i deficit čvor l, pošto je ukupna suma viškova jednaka ukupnoj sumi deficita, pa E i D moraju biti neprazni. Najkraće rastojanje $d(\cdot)$ je dobro definisano jer pretpostavka 4. podrazumeva da rezidualna mreža sadrži smeren put od čvora k do svakog drugog čvora. U svakoj iteraciji, algoritam rešava problem najkraćeg puta sa nenegativnim dužinama grana i strogo smanjuje višak nekog čvora i deficit nekog drugog čvora. Prema tome, ako je U gornja granica najveće ponude bilo kog čvora, algoritam se završava u roku od $O(nU)$ iteracija. Ako $S(n, m, C)$ označava vreme potrebno za rešavanje problema najkraćeg puta sa n čvorova, m grana i nenegativnim cenama čije vrednosti nisu veće od C, ukupna složenost ovog algorutma je $O(nU \cdot S(n, m, nC))$. (Razlog zbog kojeg je vreme izvršavanja $S(n, m, nC)$ umesto $S(n, m, C)$ je zato što su cene u rezidualnoj mreži smanjene, a smanjena cena grane može biti veličine nC.)

3.5 Primal-dual algoritam

Ovaj algoritam su opisali Ford i Fulkerson (1962). Primal-dual algoritam za problem protoka sa minimalnom cenom sličan je algoritmu uzastopnih najkraćih puteva u smislu da takođe održava pseudoprotok x zadovoljavajući uslove optimalnosti i da poboljšava protok duž najkraćih puteva. Ali, umesto da povećava protok duž jednog najkraćeg puta u svakoj iteraciji, on poboljšava protok duž svih najkraćih puteva. Uvođenjem izvor čvora s i ponor čvora t, primal-dual algoritam opisuje problem protoka sa minimalnom cenom sa jednim višak čvorom i jednim deficit čvorom. Ako je $b(i) > 0$ za čvor i, dodajemo granu (s, i) sa cenom nula i kapacitetom $b(i)$; ako je $b(i) < 0$ za čvor i, dodajemo granu (i,t) sa cenom nula i kapacitetom - $b(i)$. Zatim postavimo $b(s) = \sum_{\{i\in N:b(i)>0\}} b(i), b(t) = -b(s)$ i $b(i)$=0 za sve $i \in N$. Lako je videti da problem protoka sa minimalnom cenom na transformisanoj mreži pretstavlja problem protoka sa minimalnom cenom na originalnoj mreži. Zbog jednostavnosti zapisa, i transformisanu mrežu ćemo označavati kao originalnu, $G = (N, A)$.

Primal-dual algoritam rešava problem maksimalnog protoka na podgrafu rezidualne mreže $G(x)$, zvanom „admissible network“ (prihvatljiva mreža), koji obeležavamo G°. Definišimo prihvatljivu mrežu G° u odnosu na pseudoprotok x koji zadovoljava uslove optimalnosti smanjene cene za neke čvorne potencijale π; G° sadrži samo one grane iz $G(x)$ sa nulom smanjenom cenom. Primetimo da je rezidualni kapacitet grene u G° isti kao u $G(x)$ i da je svaki usmereni put od čvora s do čvora t u G° najkraći put u $G(x)$ između istog para čvora.

Sledi formalan opis primal-dual algoritma na transformisanoj mreži.

algorithm primal-dual;

begin

$x \coloneqq 0 \ i \ \pi \coloneqq b(t);$

$e(s) \coloneqq b(s) \ i \ e(t) \coloneqq b(t);$

while $e(s) > 0$ **do**

begin

odrediti najkraće rastojanje $d(\cdot)$ *od čvora s do svih ostalih čvorova u* $G(x)$

u odnosu na smanjene cene c_{ij}^{π};

ažurirati $\pi \coloneqq \pi - d$;

odrediti prihvatljivu mrežu G°;

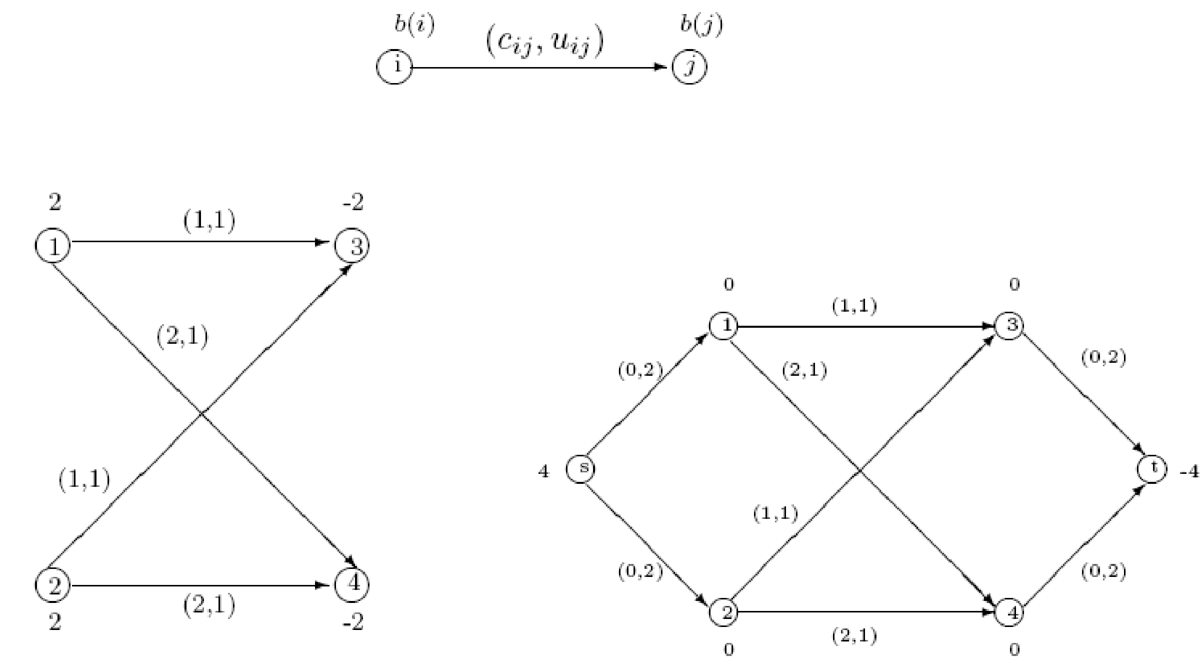
uspostaviti maksimalni protok od čvora s do čvora t u G° ;

ažurirati $e(s), e(t), G(x)$;

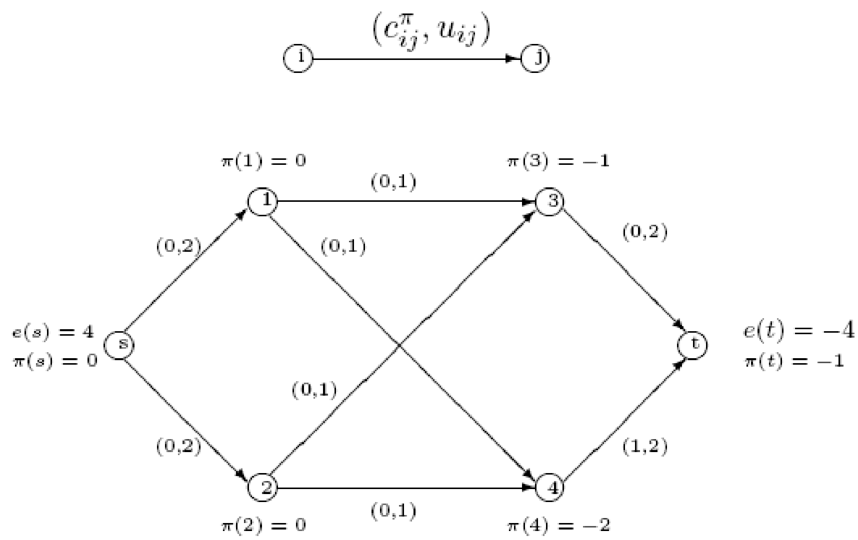
end;

end;

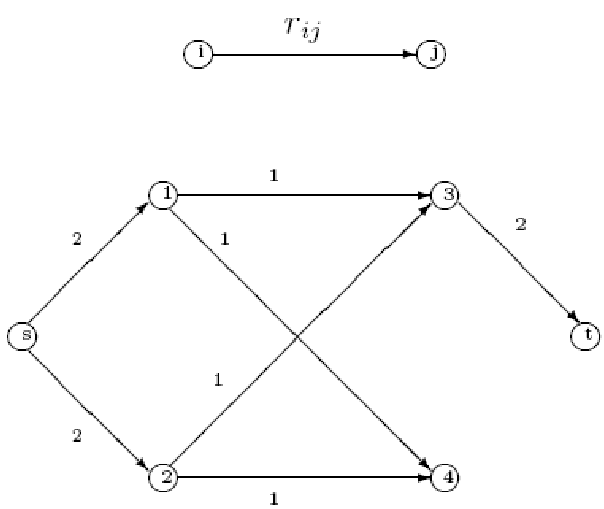
Za ilustraciju ovog algoritma, razmotrićemo sledeći primer.



(a) primer mreže (b) transformisana mreža



(c) rezidualna mreža nakon ažuriranja potencijala



(d) dopustiva mreža

Slika 3.6a) prikazuje primer mreže, a slika 3.6b) transformisanu mrežu. Dužine najkraćih puteva su d = (0,0,0,1,2,1) čije su komponente redom s,1,2,3,4,t. Slika 3.6c) prikazuje ažurirane čvorne potencijale i smanjene cene , a slika 3.6d) prihvatljivu mrežu u ovoj fazi izračunavanja. Zatim se primenjuje algoritam maksimalnog protoka na prihvatljivoj mreži i on šalje 2 jedinice protoka od čvora s do čvora t. Jednu jedinicu protoka duž puta s-1-3-t, a drugu duž

s-2-3-t. Algoritam uzastopnih najkraćih puteva bi iskoristio dve iteracije za slanje 2 jedinice protoka. Nakon toga, ažuriramo čvorne potencijale i smanjenu cenu u originalnoj mreži. Može se proveriti da druga iteracija primal-dual algoritma takođe šalje 2 jedinice protoka od čvora s do čvora t ,čime pretvara pseudoprotok u protok i time se algoritam završava.

Primal-dual algoritam garantuje da višak čvora s strogo opada u svakoj iteraciji i takođe obezbeđuje da potencijal ponor čvora strogo opada iz jedne iteracije do sledeće. Drugo zapažanje sledi iz činjenice da kada uspostavimo maksimalan protok u G° , rezidualna mreža $G(x)$ ne sadrži usmereni put od čvora s do čvora t koji se u potpunosti sastoji od grana sa nulom smanjenim cenama. Zato, u sledećoj iteraciji, kada rešavamo problem najkraćeg puta, $d(t) \geq 1$. Ova zapažanja daju granicu $min\{nU, nC\}$ za broj iteracija, jer u početku, $e(s) \leq nU$, vrednost čvornog potencijala ne može pasti ispod $-nC$. Ova granica broja iteracija je bolja nego kod algoritma uzastopnih najkraćih puteva, ali zato algoritam ostvaruje dodatni trošak prilikom rešavanja problema maksimalnog protoka u svakoj iteraciji. Ako $S(n, m, C)$ i $M(n, m, C)$ označavaju vremena rešavanja algoritama najkraćeg puta i maksimalnog protoka respektivno, primal-dual algoritam ima ukupnu složenost $O(\min(nUS(n, m, C), nCM(n, m, U))$.

4.Polinomijalni algoritmi za problem protoka sa minimalnom cenom

Problem protoka sa minimalnom cenom nije NP-težak za rešavanje, jer postoje polinomijalni algoritmi koji ga rešavaju.U ovom poglavlju ćemo opisati dva polinomijalna algoritma , „The capacity scaling algorithm“ (algoritam kapacitet skaliranja) i „Minimum mean cycle- canceling algorithm“ (minimalno srednje ciklus-poništavanje). „The capacity scaling algorithm“ je modifikovana verzija „Successive shortest path“ algoritma i spada u slabo polinomijalne algoritme dok je „Minimum mean cycle-canceling algorithm“ specijalna verzija „Cycle-canceling“ algoritma i spada u jako polinomijalne algoritme. Jako polinomijalni algoritmi imaju jednu važnu teorijsku prednost jer rešavaju probleme sa iracionalnim podacima.

4.1 Skaliranje

Edmonds i Karp su 1972.godine predložili prvi polinomijalan algoritam za resavanje problema protoka sa minimalnom cenom, koristeći skaliranje.[19] To je moćna ideja koja je doprinela poboljšanju mnogih algoritama kombinatorne optimizacije. Opisaćemo je. Počinjemo sa uslovima optimalnosti za problem protoka na mreži koji ispitujemo,ali umesto potpunog sprovođenja ovih uslova, generišemo „približno " rešenje koje dozvoljava da se krši jedan (ili više) uslova za veličinu Δ .

U početku,ako izaberemo dovoljno veliko Δ , na primer kao C ili U, moći ćemo da nađemo početno rešenje koje lako zadovoljava opuštene uslove optimalnosti. Zatim ,promenimo parametar Δ na $\Delta/2$ i reoptimizujemo tako da približno rešenje sada krši uslove optimalnosti za najviše $\Delta/2$ .Ponavljamo postupak, promenimo $\Delta/2$ na $\Delta/4$ i tako dalje.

Ova strategija nalaženja rešenja je prilično fleksibilna i dovodi do različitih algoritama u zavisnosti od toga koji od uslova optimalnosti smo „opustili" i kako obavljamo reoptimizaciju.

Sa teoretske tačke gledišta, ideja skaliranja za rešavanje problema protoka sa minimalnom cenom je veoma važna.Ova ideja je osnova gotovo svih polinomijalnih algoritama za rešavanje pomenutog problema. Među najbržim je jedan koji su razvili Gabow i Tarjan 1987.godine, sa granicom $O(nm\ logn\ logU\ lognC)$. Drugi, dobijen iste godine od strane Goldberg-a i Tarjan-a ima granicu $O(nm\ logn\ lognC)$. Najzad, algoritam koji su dobili Ahuja, Goldberg, Orlin i Tarjan, 1988.godine, je ograničen sa $O(nm\ loglogU\ lognC)$. Skaliranje takođe ima važno mesto u razvoju jako polinomijalnih algoritama za problem protoka sa minimalnom cenom. Prvi jako polinomijalan algoritam je opisala Eva Tardos 1985.godine, čija je granica $O(m^4)$. A najbrži algoritam skaliranja do sada, opisao je Orlin (1988), sa granicom $O(m\ logn\ S(n,m))$. [12]

4.2 „Capacity Scaling Algorithm"

Ovaj algoritam je jedna varijanta algoritma uzastopnih najkraćih puteva i primenjuje se na uopšteni problem protoka sa minimalnom cenom.Koristi koncepte pseudoprotoka i neravnoteže $e(i)$,definisane u odeljku 3.4. Algoritam tvrdi da pseudoprotok x zadovoljava uslove optimalnosti smanjene cene i poboljšavanjem protoka duž najkraćih puteva od višak do deficit čvorova , postepeno pretvara ovaj pseudoprotok u protok. Broj faza skaliranja zavisi od vrednosti parametra Δ (Δ-faze skaliranja). U početku, Δ= $2^{[logU]}$. U Δ-fazi skaliranja ,algoritam omogućava da svako uvećanje nosi tačno Δ jedinica protoka. Kada nijedan čvor nema višak od najmanje Δ , ili deficit najmanje Δ , algoritam smanjuje vrednost Δ dva puta i ponavlja proces. Konačno, Δ=1 i na kraju ove faze skaliranja, rešenje postaje protok. Ovaj protok mora biti optimalan jer zadovoljava uslove optimalnosti smanjene cene.

Za datu vrednost Δ , definišemo dva skupa S(Δ) i T(Δ) na sledeći način :

S(Δ)= $\{i: e(i) \geq \Delta\}$,

T(Δ)= $\{i: e(i) \leq -\Delta\}$.

U Δ-fazi skaliranja , svako uvećanje mora početi na čvoru iz S(Δ) i završiti na čvoru iz T(Δ). Pošto se uvećanje mora odvijati na putu čija svaka grana ima rezidualni kapacitet od najmanje Δ , uvodimo Δ-rezidualnu mrežu $G(x, \Delta)$ koja je definisana kao podgraf od $G(x)$ koji se sastoji od onih grana čiji je rezidualni kapacitet najmanje Δ. U Δ-fazi skaliranja, algoritam uvećava protok čvora iz S(Δ) do čvora iz T(Δ) duž najkraće putanje u $G(x, \Delta)$. Imamo na umu da svaka grana u $G(x, \Delta)$ zadovoljava uslove optimalnosti smanjene cene ,ali grane iz $G(x)$ (ali ne i iz G(x, Δ)) mogu prekršiti ove uslove. Sledi formalan opis „Capacity scaling“ algoritma.

algorithm „capacity scaling“;

begin

$x \coloneqq 0 \; i \; \pi \coloneqq 0$;

$\Delta \coloneqq 2^{[logU]}$;

while $\Delta \geq 1$

begin $\Delta - \boldsymbol{faza\ skaliranja}$

for $svaku\ granu\ (i, j) u\ rezidualnoj\ mreži\ G(x)$ **do**

if $r_{ij} \geq \Delta \ i \ c_{ij}^{\pi} < 0$ **then** $poslati\ r_{ij}\ jedinica\ protoka\ duž\ grane\ (i, j),$

$ažurirati\ x\ i\ disbalans\ e(\cdot)$;

$S(\Delta) \coloneqq \{i \in N: e(i) \geq \Delta\}$;

$T(\Delta) := \{i \in N: e(i) \leq -\Delta\}$;

while $S(\Delta) \neq \emptyset$ i $T(\Delta) \neq \emptyset$ **do**

begin

$izabrati$ $čvor$ $k \in S(\Delta)$ i $čvor$ $l \in T(\Delta)$;

$utvrditi$ $dužinu$ $najkraćeg$ $puta$ $d(\cdot)$ od $čvora$ k do $svih$ $ostalih$ $čvorova$ u $\Delta -$ $rezidualnoj$ $mreži$ $G(x, \Delta)$ u $odnosu$ na $smanjene$ $cene$ c_{ij}^{π}

$neka$ P $označava$ $najkraći$ put od $čvora$ k do $čvora$ l u $G(x, \Delta)$;

$ažuriramo$ $\pi := \pi - d$;

$povećanje$ Δ $jedinica$ $protoka$ $duž$ $puta$ P ;

$ažuriramo$ x , $S(\Delta), T(\Delta)$ i $G(x, \Delta)$;

end ;

$\Delta := \Delta/2$;

end;

end;

Obratimo pažnju na to da „Capacity Scaling Algorithm“ povećava tačno Δ jedinica protoka u Δ –fazi skaliranja, čak i ako je mogao da poveća više.

Za određivanje tačnosti ovog algoritma primetimo da se 2Δ –faza skaliranja završava kada je S(2Δ)=∅ ili T(2Δ)=∅ . U tom momentu, ili je $e(i) < 2\Delta$ ili $e(i) > -2\Delta$ za sve $i \in N$. Ovi uslovi podrazumevaju da je zbir viškova (koji je jednak zbiru deficita) ograničen sa $2n\Delta$. Na početku Δ – faze skaliranja , algoritam prvo proverava da li svaka grana u $G(x, \Delta)$ zadovoljava uslove optimalnosti smanjene cene , $c_{ij}^{\pi} \geq 0$. Pošto grane (i, j) sa $\Delta \leq r_{ij} < 2\Delta$ iz $G(x, \Delta)$ na početku Δ –faze skaliranja možda ne zadovoljavaju uslove optimalnosti,algoritam odmah izbacuje ove grane iz rezidualne mreže;obrt ovih grana (i,j) ima cenu $c_{ji}^{\pi} = -c_{ij}^{\pi} > 0$, one zadovoljavaju uslove optimalnosti. Primetimo da zbog $r_{ij} < 2\Delta$, popravljanje svake takve grane menja neravnotežu svoje krajnje tačke za najviše 2Δ.Kao rezultat, nakon što popravimo sve grane koje krše uslove optimalnosti smanjene cene, suma viškova je ograničena sa $2n\Delta + 2m\Delta = 2(n+m)\Delta$.

U $\Delta-$fazi skaliranja , svako uvećanje počinje u čvoru $k \in S(\Delta)$, završava u čvoru $l \in T(\Delta)$ i nosi tačno Δ jedinica protoka. Primetimo da pretpostavka 2.4 podrazumeva da $\Delta-$rezidualna mreža sadrži usmereni put od čvora k do čvora l , tako da je uvek moguće pronaći najkraći put od čvora k do čvora l. Kada je $S(\Delta)$ ili $T(\Delta)$ prazan, $\Delta-$faza skaliranja se završava; tada se Δ dodeli vrednost $\Delta/2$ i počinje nova faza skaliranja. U O(logU) faza skaliranja ,$\Delta = 1$, i zbog celobrojnosti podataka, svaka neravnoteža čvora će biti nula na kraju faze. U ovoj fazi $G(x,\Delta) \equiv G(x)$ i svaka grana u rezidualnoj mreži zadovoljava uslove optimalnosti smanjene cene. Kao posledica toga, algoritam dobija minimalnu cenu protoka , na kraju ove faze skaliranja.

Kao što smo ranije primetili, suma viškova u $\Delta-$fazi skaliranja je ograničena sa $2(n+m)\Delta$. Pošto svako uvećanje u ovoj fazi nosi tačno Δ jedinica protoka od čvora iz $S(\Delta)$ do čvora iz $T(\Delta)$, svako uvećanje smanjuje sumu viškova za tačno Δ jedinica. Zato faza skaliranja može da obavlja najviše $2(n+m)$ uvećanja. Utvrdili smo sledeći rezultat.

Teorema 4.2.1 „Capacity Scaling Algorithm“ rešava problem protoka sa minimalnom cenom u vremenu $O(m \log U\, S(n,m,nC))$.

4.3 „Minimum Mean Cycle-Canceling Algorithm“

„Capacity Scaling Algorithm“ za problem protoka sa minimalnom cenom, o kome je bilo reči u prethodnom poglavlju, je slabo polinomijalan algoritam jer njegovo vreme izvršavanja zavisi od $logU$. U ovom odeljku ćemo razmatrati jako polinomijalan algoritam za rešavanje bilo kog problema protoka sa minimalnom cenom , uključujući i one sa iracionalnim podacima.Ovaj algoritam su prvi predložili Tarjan i saradnici.[20]

Najpre ćemo opisati koncept *približne optimalnosti.*

4.3.1 Približna optimalnost

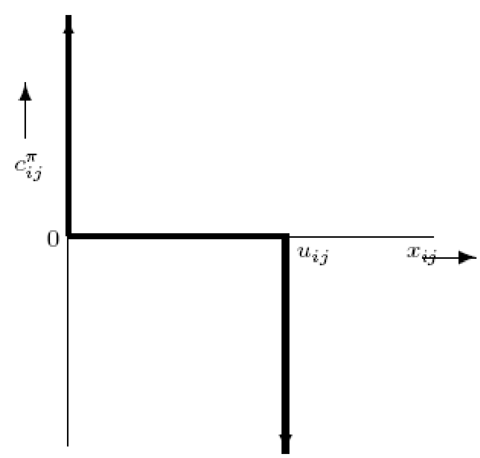
Za protok x ili pseudoprotok x se kaže da je $\varepsilon -$ optimalan , za $\varepsilon > 0$, ako za neki potencijal čvora π, par (x, π) zadovoljava sledeće ε –optimalne uslove:

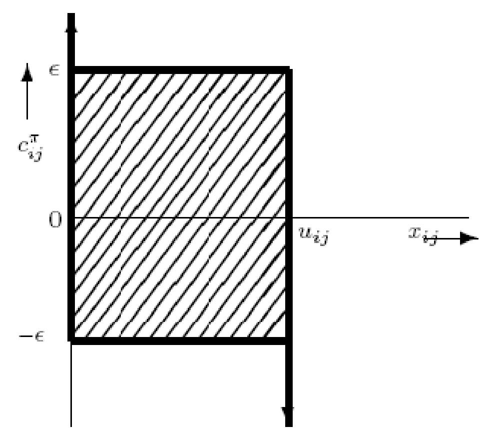
Ako je $c_{ij}^{\pi} > \varepsilon$, tada je $x_{ij} = 0$, (4.1.a)

Ako je $-\varepsilon \leq c_{ij}^{\pi} \leq \varepsilon$, tada je $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$, (4.1.b)

Ako je $c_{ij}^{\pi} < -\varepsilon$, tada je $x_{ij} = u_{ij}$. (4.1.c)

Ovi uslovi su olakšice za „complementary slackness optimality“ (3.4), o kojima smo govorili u odeljku 3.1; primetimo da se ovi uslovi redukuju do „complementary slackness optimality conditions“ kada je $\varepsilon = 0$. Tačni uslovi optimalnosti (3.4) podrazumevaju da je bilo koja kombinacija (x_{ij}, c_{ij}^{π}) sa podebljane linije slike 4.2(a), optimalna. ε –optimalni uslovi (4.1) podrazumevaju da je bilo koja kombinacija (x_{ij}, c_{ij}^{π}) sa podebljane linije ili šrafirane oblasti sa slike 4.1(b), ε –optimalna.





(a) tačan uslov optimalnosti granu (i, j)

(b) ε –optimalan uslov za granu (i, j)

U terminima rezidualne mreže $G(x)$, ε –optimalni uslovi imaju jednostavniju formu : Za protok x ili pseudoprotok x se kaže da je $\varepsilon -$ optimalan , za $\varepsilon > 0$, ako x , zajedno sa nekim potencijalom čvora π, zadovoljava sledeće ε –uslove optimalnosti:

$c_{ij}^{\pi} \geq -\varepsilon$ za svaku granu (i, j) u rezidualnoj mreži $G(x)$. (4.2)

Lema 4.3.1 Za problem protoka sa minimalnom cenom sa celobrojnim troškovima , svaki dopustivi protok je ε −optimalan kad god je $\varepsilon \geq C$. Pored toga, ako je $\varepsilon < 1/n$, onda je svaki ε −optimalan dopustivi protok, optimalan.

Dokaz:

Neka je x dopustivi protok i $\pi = 0$. Tada je $c_{ij}^{\pi} = c_{ij} \geq -C$ za svaku granu (i, j) u rezidualnoj mreži $G(x)$.Zato, x je ε −optimalan za $\varepsilon = C$. Sada razmotrimo ε −optimalanost za $\varepsilon < 1/n$. Pretpostavimo da je x ε −optimalan u odnosu na potencijal čvora π i da je W usmeren ciklus u $G(x)$. Uslov (4.2) podrazumeva da

$\sum_{(i,j)\in W} c_{ij}^{\pi} \geq -\varepsilon n > -1$ za $\varepsilon < 1/n$. Iz celobrojnosti troškova sledi da je $\sum_{(i,j)\in W} c_{ij}^{\pi}$ nenegativno. Primetimo da je

$\sum_{(i,j)\in W} c_{ij}^{\pi} = \sum_{(i,j)\in W} \left(c_{ij} - \pi(i) + \pi(j)\right) = \sum_{(i,j)\in W} c_{ij}$.

Zbog toga, W ne može biti negativan ciklus. Kako $G(x)$ ne može sadržati nijedan negativan ciklus, x mora biti optimalno (teorema 3.1.1). Lema je dokazana.

Sada ćemo opisati „Minimum Mean Cycle-Canceling Algorithm“.

Ovaj algoritam je specijalna verzija „Cycle-canceling algorithm“-a, o kome smo diskutovali u delu 3.3. Pošto ovaj algoritam iterativno poništava cikluse sa minimalnom srednjom vrednošću cene u rezidualnoj mreži (povećavanjem protoka duž ciklusa), poznat je kao „Minimum Mean Cycle-Canceling Algorithm“. Primetimo da je srednja vrednost cene usmerenog ciklusa W, $(\sum_{(i,j)\in W} c_{ij})/|W|$ i da minimalni srednji ciklus jeste ciklus sa najmanjim srednjim cenama u mreži.

„Minimum Mean Cycle-Canceling Algorithm“ najpre uspostavlja dopustivi protok x u mrežama. U svakoj iteraciji, algoritam nalazi minimalni srednji ciklus W u $G(x)$. Ako je srednja vrednost cene ciklusa negativna, algoritam maksimalno moguće uvećava protok na W, ažurira $G(x)$ i ponavlja proces. Ako je srednja vrednost troška na W nenegativna, $G(x)$ ne sadrži negativne cikluse, onda je x minimalna cena protoka i algoritam se završava.

Da bismo uvideli složenost ovog algoritma u najgorem slučaju, koristićemo svojstvo 3.1.2 (b), koje navodi da za bilo koji usmereni ciklus W važi $\sum_{(i,j)\in W} c_{ij}^{\pi} = \sum_{(i,j)\in W} c_{ij}$ i sledeće svojstvo.

Svojstvo 4.3.2 Neka je α prirodan broj i neka je $y_1, y_2, y_3, \ldots$ niz realnih brojeva koji zadovoljava uslov $y_{k+1} \leq (1-1/\alpha)y_k$ za svako k. Tada za svaku vrednost k važi $y_{k+\alpha} \leq y_k/2$.

Dokaz:

Primetimo da se $y_{k+1} \leq (1-1/\alpha)y_k$ može zapisati kao $y_k \geq y_{k+1} + y_{k+1}/(\alpha-1)$. Koristeći ovaj izraz potreban broj puta dobijamo

$$y_k \geq y_{k+1} + \frac{y_{k+1}}{\alpha-1} \geq y_{k+2} + \frac{y_{k+2}}{\alpha-1} + \frac{y_{k+1}}{\alpha-1} \geq y_{k+2} + \frac{2y_{k+2}}{\alpha-1} \geq y_{k+3} + \frac{3y_{k+3}}{\alpha-1} \geq \cdots$$

$$\ldots \geq y_{k+\alpha} + \frac{\alpha y_{k+\alpha}}{\alpha-1} \geq 2y_{k+\alpha}.$$

Svojstvo je pokazano.

Prvo ćemo pokazati da je algoritam slabo polinomijalan, a zatim i jako polinomijalan. ε −optimalnost igra ključnu ulogu u ovoj analizi. Pokazaćemo da su protoci dobijeni „Minimum mean cycle-canceling“ algoritmom ε −optimalni i da zadovoljavaju uslove:

(1)između bilo koje dve uzastopne iteracije vrednost ε ostaje ista ili se smanjuje,
(2)vrednost ε strogo opada,
(3)na kraju, $\varepsilon < 1/n$ i algoritam se završava. (videti lemu 4.3.1)

Sada ćemo uspostaviti vezu između ε −optimalnosti protoka x i srednje vrednosti cene minimalnog srednjeg ciklusa od $G(x)$.Prisetimo se da je ε −optimalan protok takođe i ε' −optimalan,za sve $\varepsilon' \geq \varepsilon$. Za neki određeni skup potencijala π, neka je $\varepsilon^{\pi}(x)$ negativ od minimalne vrednosti bilo koje smanjene cene , tj. $\varepsilon^{\pi}(x) = -min\left[c_{ij}^{\pi} : (i,j) \in G(x)\right]$. Dakle, $c_{ij}^{\pi} \geq -\varepsilon^{\pi}(x)$ i $c_{ij}^{\pi} = -\varepsilon^{\pi}(x)$ za neku granu (i,j). Na taj način x je ε −optimalno za $\varepsilon = \varepsilon^{\pi}(x)$. Eventualno, mogli bismo naći manju vrednost za ε koristeći druge vrednosti potencijala i $\varepsilon(x) = min_{\pi}\varepsilon^{\pi}(x)$. Primetimo da je $\varepsilon(x)$ najmanja vrednost od ε za koju je protok x ε −optimalan. Kao dodatna notacija, neka $\mu(x)$ označava srednju vrednost cene minimalnog srednjeg ciklusa u $G(x)$.

Primetimo da kako je x ,$\varepsilon(x)$ −optimalan,uslovi (4.2) podrazumevaju da je

$\sum_{(i,j)\in W} c_{ij} = \sum_{(i,j)\in W} c_{ij}^{\pi} \geq -\varepsilon^{\pi}(x)|W|$ za sve $\varepsilon^{\pi}(x)$. Ako izaberemo W kao minimalni srednji ciklus i podelimo prethodni izraz sa $|W|$, imaćemo $\mu(x) \geq -\varepsilon(x)$. Ova nejednakost je jednostavna posledica definicija ε −optimalnosti i minimalne srednje vrednosti cene ciklusa ; koristi se činjenica da ako možemo ograničiti smanjenu cenu svake grane u ciklusu , ovom istom granicom možemo ograničiti i prosečne cene u ciklusu. Takođe možemo uspostaviti i suprotan rezultat : uvek možemo naći skup potencijala čvorova tako da svaka grana minimalnog srednjeg ciklusa ima istu smanjenu cenu $-\varepsilon(x)$. Sledeća dva rezultata su zasnovana na ovom svojstvu.

Lema 4.3.3 Neka x nije optimalan protok. Tada je $\varepsilon(x) = -\mu(x)$.

Dokaz:

Ranije smo pokazali smo da je $\varepsilon(x) \geq -\mu(x)$, tako da sada treba samo dokazati da je $\varepsilon(x) \leq -\mu(x)$. Neka je W minimalni srednji ciklus u rezidualnoj mreži $G(x)$ i neka je $\mu(x)$ srednja vrednost cene ovog ciklusa. Pretpostavimo da smo zamenili svaku cenu na grani c_{ij} sa ${c_{ij}}' = c_{ij} - \mu(x)$, što smanjuje srednju vrednost cene svakog usmerenog ciklusa u $G(x)$ za $\mu(x)$ jedinica.Shodno tome, minimalna srednja vrednost cene ciklusa W postaje nula, što znači da rezidualna mreža ne sadrži negativnu cenu ciklusa. Neka je $d'(\cdot)$ dužina najkraćeg puta u $G(x)$ od određenog čvora s do svih ostalih čvorova sa ${c_{ij}}'$ dužinom grane. Iz optimalnosti najkraćeg puta sledi

$d'(j) \leq d'(i) + {c_{ij}}' = d'(i) + c_{ij} - \mu(x)$ za svaku granu (i,j) u $G(x)$ (4.3)

Ako je $\pi(j) = -d'(j)$, tada (4.3) postaje
$c_{ij}^{\pi} \geq \mu(x)$ za svaku granu (i,j) u $G(x)$ (4.4)
što znači da je x $(-\mu(x))$- optimalan. Zato je $\varepsilon(x) \leq -\mu(x)$. Lema je dokazana.

Lema 4.3.4 Neka je x neki optimalan protok. Tada za neke skupove potencijala čvorova π , $c_{ij}^{\pi} = \mu(x) = -\varepsilon(x)$ za svaku granu (i,j) u minimalnom srednjem ciklusu W u $G(x)$.

Dokaz:

Neka je π definisano kao u dokazu prethodne leme i neka važi (4.4). Važi da je $\sum_{(i,j)\in W} c_{ij}^{\pi} = \mu(x)|W|$. Iz ove jednačine i (4.4) sledi $c_{ij}^{\pi} = \mu(x)$ za svaku granu $(i,j) \in W$. Lema 4.3.3 tvrdi da je $c_{ij}^{\pi} = -\varepsilon(x)$ za svaku granu iz W, čime je lema dokazana.

Sada ćemo pokazati da se tokom izvršavanja „Minimum mean cycle-canceling" algoritma, $\varepsilon(x)$ nikada ne povećava; štaviše, u toku m uzastopnih iteracija, $\varepsilon(x)$ se smanjuje najmanje $(1 - 1/n)$ puta.

Lema 4.3.5 Ako se minimalni srednji ciklus u G(x) prekine, pri čemu x nije optimalan protok, onda se $\varepsilon(x)$ ne može povećati ($\mu(x)$ se ne može smanjiti).

Dokaz:

Neka je W minimalni srednji ciklus u G(x). Iz leme 4.3.4 sledi da za neki skup čvorova potencijala π , $c_{ij}^{\pi} = -\varepsilon(x)$ za svaku granu $(i,j) \in W$. Neka je x' protok dobijen nakon prekida ciklusa W. Ovo povećanje protoka briše nekoliko grana u W iz rezidualne mreže i dodaje neke druge grane,koje su suprotne granama u W. Posmatrajmo neku granu (i,j) iz $G(x')$. Ako je (i,j) iz $G(x)$ onda, po pretpostavci, $c_{ij}^{\pi} \geq -\varepsilon(x)$. Ako (i,j) nije u $G(x)$, onda je (i,j) suprotna nekoj grani (j,i) u $G(x)$ za koju je $c_{ji}^{\pi} = -\varepsilon(x)$; zato je $c_{ij}^{\pi} = -c_{ji}^{\pi} = \varepsilon(x) > 0$. U svakom slučaju, $c_{ij}^{\pi} \geq -\varepsilon(x)$ za svaku granu (i,j) u $G(x')$. Zato će minimalna srednja vrednost cene za bilo koji ciklus biti najmanje $-\varepsilon(x)$. Iz ovoga i leme 4.3.3 sledi $-\varepsilon(x') = \mu(x') \geq -\varepsilon(x) = \mu(x)$. Lema je dokazana.

Lema4.3.6 Posle niza od m minimalnih srednjih ciklus prekida počev sa protokom x, vrednost parametra $\varepsilon(x)$ se najviše smanjuje na vrednost $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\varepsilon(x)$.

Dokaz:

Neka je π skup potencijala koji zadovoljavaju uslove $c_{ij}^{\pi} \geq -\varepsilon(x)$ za sve grane (i,j) u $G(x)$. Iz praktičnih razloga grane u $G(x)$ sa negativnim smanjenim cenama nazvaćemo negativnim granama. Grupisaćemo prekide ciklusa u dve grupe : 1) sve grane u prekinutom ciklusu su negativne (tip 1 prekida) i 2) najmanje jedna grana u prekinutom ciklusu ima nenegativnu smanjenu cenu (tip 2 prekida). Tvrdimo da će algoritam raditi na najviše m tipova 1 pre prekida ili izvršavanja tipa 2. Ova tvrdnja proizilazi iz zapažanja da svaki tip 1 briše bar jednu negativnu granu iz (trenutne) rezidualne mreže . Sve grane koje prekidanje dodaje rezidualnoj mreži imaju pozitivnu sniženu cenu u odnosu na π (kao što je pokazano u dokazu leme 4.3.5). Prema tome, ako u roku od m iteracija algoritam nema tip 2, sve grane u rezidualnoj mreži će imati pozitivne smanjene cene u odnosu na π i algoritam će se prekinuti sa optimalnim protokom.

Sada uzmimo u obzir da algoritam prvi put izvodi tip 2. Pretpostavimo da algoritam prekida ciklus W, koji sadrži najmanje jednu granu sa nenegativnom sniženom cenom. Neka su x' i x'' protoci neposredno pre i posle prekida, respektivno. Tada je $c_{ij}^{\pi} \geq -\varepsilon(x)$ za svako $(i,j) \in W$ i $c_{kl}^{\pi} \geq 0$ za neku granu $(k,l) \in W$. Kao rezultat toga, pošto je $c(W) = \sum_{(i,j)\in W} c_{ij}^{\pi}$, cena $c(W)$ u odnosu na protok x'zadovoljava uslov $c(W) \geq \left[(|W|-1)\left(-\varepsilon(x')\right)\right]$. Iz leme 4.3.5 prekid ne može smanjiti minimalnu srednju vrednost cene i zato je $\mu(x'') \geq \mu(x')$. Ali pošto je $\mu(x')$ srednja vrednost cene od W u odnosu na x' , $\mu(x'') \geq \mu(x') \geq \left(1-\frac{1}{|W|}\right)\left(-\varepsilon(x')\right) \geq \left(1-\frac{1}{n}\right)(-\varepsilon(x'))$. Ova nejednakost implicira $-\mu(x'') \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)(\varepsilon(x'))$. Koristeći činjenicu da je $\mu(x'') = -\,\varepsilon(x'')$,imamo $\varepsilon(x'') \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)(\varepsilon(x'))$. Lema je dokazana.

Kao što će biti prikazano u sledećoj teoremi, prethodne dve leme podrazumevaju da se „minimum mean cycle canceling“ algoritam izvršava u polinomijalnom broju iteracija.

Teorema 4.3.7 Ako su sve cene na granama celi brojevi, „minimum mean cycle canceling“ algoritam izvršava $O(nmlog(nC))$ iteracija za $O(n^2m^2\log(nC))$ vremena.

Dokaz:

Neka je x protok u nekom trenutku za vreme izvršavanja algoritma. U početku je $\varepsilon(x) \leq C$, jer je svaki protok C −optimalan (lema 4.3.1). U svakoj od m uzastopnih iteracija algoritam smanjuje $\varepsilon(x)$, $(1-1/n)$ puta. Kada postane $\varepsilon(x) \leq 1/n$, algoritam se završava sa optimalnim protokom (lema 4.3.1). Dakle, algoritam treba da smanjuje $\varepsilon(x)$ za faktor nC u svim iteracijama. Po lemi 4.3.6, srednja vrednost cene ciklusa postaje manja najmanje $(1-1/n)$ puta u svakoj od m iteracija. Svojstvo 4.3.2 podrazumeva da se minimalna srednja vrednost cene ciklusa smanjuje 2 puta u svakoj od nm iteracija, tako da se u roku od $nmlog(nC)$ iteracija , minimalna srednja vrednost cene ciklusa smanjuje od C do $1/n$. U ovom trenutku se algoritam završava sa optimalnim protokom.Kako se u svakoj iteraciji nalazi minimalni srednji ciklus, sto zahteva $O(nm)$ vremena,teorema je dokazana.

Nakon što smo pokazali da se „minimum mean cycle-canceling“ algoritam izvršava u polinomijalnom vremenu, sledeće ćemo dobiti jako polinomijalnu granicu broja iteracija koje algoritam obavlja. Analiza se zasniva na sledećem korisnom rezultatu: Ako je apsolutna vrednost snižene cene na grani (k,l) "značajno veća" od trenutne vrednosti parametra $\varepsilon(x)$, protok na grani (k,l) u nekom optimalnom rešenju je isti kao i trenutni protok na ovoj grani. Drugim rečima, protok na grani postaje "fiksiran". Kao što ćemo pokazati, u svakoj od $O(nmlogn)$ iteracija , algoritam će fiksirati najmanje jednu dodatnu granu na njenoj donjoj ili gornjoj granici. Kao rezultat toga, u toku od $O(nm^2logn)$ iteracija , algoritam će fiksirati sve grane i prekinuti sa optimalnim protokom.

Def. Grana je ε −fiksirana ako je protok na ovoj grani isti za svaki ε' −optimalni protok, kad god je $\varepsilon' \leq \varepsilon$.

Lema 4.3.8 Pretpostavimo da je x ε −optimalan protok u odnosu na potencijale π , kao i da je za neku granu $(k,l) \in A$, $|c_{kl}^{\pi}| \geq 2n\varepsilon(x)$ .Tada je grana (k,l) ε −fiksirana grana.

Dokaz:

Neeka je $\varepsilon = \varepsilon(x)$. Najpre ćemo dokazati lemu za $c_{kl}^{\pi} \geq 2n\varepsilon$. $\varepsilon -$ uslov optimalnosti (4.1.a) podrazumeva da je $x_{kl} = 0$. Pretpostavimo da neki $\varepsilon(x')$ −optimalan protok x', za $\varepsilon(x') \leq \varepsilon(x)$, zadovoljava uslov $x_{kl}' > 0$.Teorema o dekompoziciji protoka podrazumeva da možemo izraziti x' kao x i plus protok duž najviše m povećanih ciklusa u $G(x)$. Pošto je $x_{kl} = 0$ i $x_{kl}' > 0$, jedan od ovih ciklusa, recimo W mora da sadrži granu (k,l) kao prednju granu. Pošto je svaka grana $(i,j) \in W$ u rezidualnoj mreži $G(x)$ i tako zadovoljava uslov $c_{ij}^{\pi} \geq -\varepsilon$, smanjena cena (ili cena) ciklusa W je najmanje

$$c_{kl}^{\pi} - \varepsilon(|W| - 1) \geq 2n\varepsilon - \varepsilon(n-1) > n\varepsilon \ .$$

Sada razmotrimo ciklus W^r dobijen od suprotnih grana iz W. On mora biti usmeren u rezidualnoj mreži $G(x')$. Cena ciklusa W^r je negativ od cene ciklusa W i zato mora biti manja od $-n\varepsilon \leq -n\varepsilon(x')$. Prema tome, srednja vrednost cene W^r je manja od $-\varepsilon(x')$.Lema 4.3.3 podrazumeva da x' nije $\varepsilon(x')$ −optimalan, što je kontradikcija.
Dalje, posmatrajmo slučaj kada je $c_{kl}^{\pi} \leq -2n\varepsilon$. U ovom slučaju, ε −optimalnost (4.1.c) podrazumeva da je $x_{kl} = u_{kl}$. Koristeći analizu sličnu onoj koja se koristi

u prethodnom slučaju, može se pokazati da ε −optimalni protok x' ne može zadovoljiti uslov $x_{kl}' < u_{kl}$. Lema je dokazana.

Sada smo u poziciji da dobijemo jako polinomijalnu granicu broja iteracija koje vrši „minimum mean cycle-canceling“ algoritam.

Teorema 4.3.9 Za proizvoljne realne vrednosti cena, „minimum mean cycle-canceling“ algoritam vrši $O(nm^2 logn)$ iteracija i radi u $O(n^2m^3 logn)$ vremenu.

Dokaz:

Neka je $K = nm([logn] + 1)$. Razdvojimo iteracije koje algoritam vrši po grupama od K uzastopnih iteracija. Tvrdimo da svaka grupa iteracija fiksira protok na dodatnoj grani (k, l). Teorema sledi neposredno iz ove tvrdnje , jer algoritam može fiksirati najviše m grana i svaka iteracija zahteva $O(nm)$ vremena.
Razmotrimo bilo koju grupu iteracija. Neka je x protok pre prve iteracije i neka je x' protok posle poslednje iteracije u grupi. Neka je $\varepsilon = \varepsilon(x)$, $\epsilon' = \varepsilon'(x)$ i π' potencijal čvora za koji x' zadovoljava , ϵ' −optimalne uslove. Pošto svaka od nm iteracija smanjuje ε najmanje 2 puta, $nm([logn] + 1)$ iteracija između x i x' smanjuje ε najmanje $2^{[logn]+1}$ puta . Zato je $\epsilon' \leq (\varepsilon/2^{[logn]+1}) \leq \varepsilon/2n$.
Tj. $-\varepsilon \leq -2n\varepsilon'$.
Neka je W prekinut ciklus za vrednost protoka x. Iz leme 4.3.3 i činjenice da je suma cena i smanjenih cena svakog ciklusa ista, sledi da za bilo koju vrednost potencijala čvora, prosečna smanjena cena u ciklusu W iznosi $\mu(x) = -\varepsilon$ .Zato, u odnosu na potencijale π' , bar jedna grana (k, l) u W mora imati smanjenu cenu malu kao $-\varepsilon$, pa je $c_{kl}^{\pi'} = -\varepsilon \leq -2n\varepsilon'$ za neku granu (k, l) u W. Po lemi 4.3.8, protok na grani (k, l) se neće promeniti u nekoj sledećoj iteraciji. Dalje primećujemo da je u prvoj iteraciji grupe,algoritam promenio vrednost x_{kl} . Dakle, svaka grupa fiksira protok na najmanje jednoj dodatnoj grani, što upotpunjuje dokaz teoreme.

5.Zaključak

Pokazano je da je transportni problem specijalni slučaj problema protoka sa minimalnom cenom. Samim tim, svaki algoritam za rešavanje problema protoka sa minimalnom cenom, rešava i transportni problem.Takođe, izvedeni su i uslovi optimalnosti, koji su poslužili za konstrukciju algoritama problema protoka sa minimalnom cenom. To su: „Cycle-canceling algorithm“ , „Successive shortest path algorithm“, „Primal-dual algorithm“, „Capacity scaling algorithm“ i „Minimum mean cycle-canceling algorithm“. Prva tri nalaze optimalno rešenje u pseudopolinomijalnom vremenu, a poslednja dva u polinomijalnom vremenu.

LITERATURA

[1] Đ.Dugošija- Transportni problem(radni materijal)

[2] D.Cvetković, M.Čangalović, V. Kovačević-Vujičić, Đ.Dugošija, S.Simić, J. Vuleta, “Kombinatorna optimizacija”, DOPIS,1996.

[3] Lavoslav Čaklović, Matematičko modeliranje(transportni problem, transportne mreže, osnove teorije grafova)

[4] Mathematics of Operational Research R.R. Weber, UNIVERSITY OF CAMBRIDGE

[5] M.S. Bazaran, J.J.Harvis and H.D.Shara, Linear Programming and Network Flows, Wiley(1988)

[6] Dantzig G. , Thapa M. Linear Programming Vol1, Introduction (Springer, 1997)

[7] Dantzig G. , Thapa M. Linear Programming Vol2, Theory and extensions (Springer, 2003)

[8] Andrew V. Goldberg and Robert E. Tarjan (1989). "Finding minimum-cost circulations by canceling negative cycles". Journal of the ACM 36 (4): 873–886.

[9] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin (1993). Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice-Hall, Inc.. ISBN 0-13-617549-X.

[10] Morton Klein (1967). "A primal method for minimal cost flows with applications to the assignment and transportation problems". Management Science 14: 205–220.

[11] A.V. Goldberg. An Efficient Implementation of a Scaling Minimum-Cost Flow Algorithm. In Proc. 3rd int. Prog. and Comb. Opt. Conf., page 251-266, 1993

[12] Damian J.Kelly, B.Comm, Garrett M. O'Neill, The Minimum Cost Flow Problem and The Network Simplex Solution Method

[13] Garfinkel, R. S. and Rao, M. R. (1971), The bottleneck transportation problem. Naval Research Logistics Quarterly, 18: 465–472

[14] Bookbinder, J. H. and Sethi, S. P. (1980), The dynamic transportation problem: A survey. Naval Research Logistics Quarterly, 27: 65–87

[15] Krzysztof Kowalski , Benjamin Lev, On step fixed-charge transportation problem, Omega 36(5) 2008, 913-917

[16] ARONOFSKY, J.S., J.M. DUTTON and M.T. TOYYABKHAN (1978.):Managerial Planning with Linear Programming: In Process Industry Operations. John Wiley&Sons

[17] ALGORITHMS FOR MINIMUM-COST FLOWS, Jingping Liu, Computer Science Department, The University of Western Ontario 2003

[18] M. Klein, A Primal Method For Minimal Cost Flows With Applications To the Assignment And Transportation Problems, Management Science, 14, 205-220(1967).

[19] J. Edmonds and R. Karp, *Theoretical Improvements In Algorithmic Efficiency For Network Flow Problems*, Journal of ACM, 248-264 (1972).

[20] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan, *Solving Minimum-cost Flow Problems By Successive Approximation*, Journal of ACM (1987).