Универзитет у Београду

Математички факултет

ГРАДУИСАНЕ СЛОБОДНЕ РЕЗОЛВЕНТЕ

Мастер рад

Студент: Маја Рославцев
Ментор: проф. др Александар Липковски

Београд, 2011

С а д р ж а ј

Захваљујем се свом ментору, професору др Александру Липковском на пруженој помоћи током писања рада.

Такође се захваљујем доценту др Зорану Петровићу на помоћи при избору литературе, као и на корисним сугестијама.

Увод

Теме представљене у овом раду су део комутативне алгебре, са елементима хомолошке алгебре. Комутативна алгебра је у блиској вези са алгебарском геометријом, која представља мотивацију за развој неких објеката комутативне алгебре, али и област у којој се могу применити резултати остварени изучавањем тих објеката.

Иако је однос геометријских објеката и једначина којима се представљају био испитиван још од давнина, веза две области на коју се овде мисли била је примећена тек средином деветнаестог века. Хилбертови[1] резултати: теорема о бази, теорема о нулама, полиномска структура онога што називамо Хилбертовом функцијом и теорема о сизигијама, доказани у том периоду, имају значајну улогу у стварању основа комутативне алгебре.

Водећи проблем алгебарске геометрије је класификација њених објеката изучавања - алгебарских варијетета. Такви објекти и њихова веза са алгебром грубо се могу објаснити на следећи начин: за почетак се успостави веза између n-димензионог афиног простора $\mathbb{A}^n$ и прстена полинома S са n променљивих. Подскуп афиног простора је алгебарски скуп, ако је облика

$$\{P \in \mathbb{A}^n \,|\, f(P) = 0 \text{ за све полиноме } f \in T\},$$

за неки подскуп прстена полинома $T \subseteq S$. Топологију Зариског[2] на $\mathbb{A}^n$ добијамо као колекцију комплемената алгебарских скупова, и коначно, несводљиви затворени подскупови од $\mathbb{A}^n$ у односу на ову топологију су афини варијетети. Насупрот дефиницији алгебарског скупа, где заправо подскупу прстена полинома додељујемо подскуп афиног простора, идеал скупа $X \subseteq \mathbb{A}^n$ је

$$I(X) = \{f \in S \,|\, f(P) = 0 \text{ за све } P \in X\},$$

и то јесте идеал прстена полинома. Најзад, за алгебарски скуп $X \subseteq \mathbb{A}^n$, његов афини координатни прстен $S(X)$ је количник $S/I(X)$. Ако афини простор заменимо пројективним, добијамо појмове пројективни варијетет и хомогени координатни прстен.

На овај начин смо добили могућност да објекту алгебарске геометрије - варијетету, доделимо алгебарски појам - прстен. Као што је споменуто, циљ алгебарске геометрије је класификација варијетета. Разликовање варијетета може се остварити посматрањем њихових инваријанти. Комутативна алгебра, кроз изучавање координатних прстена, даје информације о нумеричким инваријантама варијетета, у чему се огледа њена улога и значај у алгебарској геометрији.

Набројимо неке од тих инваријанти. Једна је димензија варијетета,

[1] David Hilbert (1862-1943), немачки математичар

[2] Oscar Zariski (1899-1986), амерички математичар

која је и Крулова[3] димензија његовог координатног прстена. Затим, степен и род криве, алгебарског варијетета димензије 1, који се могу одредити из Хилбертовог полинома њеног координатног прстена. У раду ће, поред Хилбертовог полимома, бити изложени и појмови минималне слободне резолвенте, Бетијевог[4] дијаграма, регуларности, који такође могу да дају податке о полазним објектима. Један од познатијих резултата овог типа је Гринова[5] хипотеза, која тврди да се Клифордов[6] индекс криве са одређеним особинама може одредити из Бетијевог дијаграма хомогеног координатног прстена криве.

Један занимљив пример повезаности две наведене области је пример седам тачака тродимензионог пројективног простора. Наиме, може се доказати да је Хилбертов полином уније седам тачака у општем линеарном положају у $\mathbb{P}^3$ једнак константи 7, као и да постоје само две могућности за Бетијеве дијаграме скупова тачака. Главна геометријска разлика између различитих скупова од седам тачака лежи у питању да ли се те тачке налазе на уврнутој кубној кривој. Показује се да је то питање еквивалентно питању који од два могућа Бетијева дијаграма одговара унији тачака.

У овом раду биће дефинисани и објашњени следећи појмови: градација, Хилбертова функција, резолвенте, Бетијеви бројеви, сизигије, Хилбертов и Поенкареов[7] ред, пројективна димензија, Хилбертов полином, Ојлеров[8] полином и Ојлерова карактеристика, регуларност, као и Косулов[9] и Тејлорин[10] комплекс. Остали појмови из комутативне и хомолошке алгебре који нису у директној вези са темом неће бити дефинисани.

Од литературе, за израду рада највише је коришћена књига [1], и то у смислу избора садржаја и редоследа излагања. За додатна објашњења појмова коришћене су књиге [2] и [3]. Књиге [6] и [3] су послужиле за израду увода.

[3] Wolfgang Krull (1899-1971), немачки математичар
[4] Enrico Betti (1823-1892), италијански математичар
[5] Mark Green, амерички математичар
[6] William Kingdon Clifford (1845-1879), енглески математичар
[7] Jules Henri Poincaré (1854-1912), француски математичар
[8] Leonhard Euler (1707-1783), швајцарски математичар
[9] Jean-Louis Koszul, француски математичар
[10] Diana Taylor, америчка математичарка

1 Основни појмови

Нека је k поље и $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ прстен полинома над тим пољем. Основне алгебарске структуре које ће бити коришћене су управо наведени прстен полинома, његови идеали, количнички прстени добијени факторисањем по тим идеалима, као и модули над S или над наведеним количничким прстенима. Напоменимо да је S комутативни прстен са јединицом.

Градуисане структуре ће овде бити од велике важности. Испитивање особина датог градуисаног објекта биће поспешено испитивањем особина његових градуисаних компоненти. Такође, при пресликавањима таквих објеката, омогућено је лакше праћење догађања на елементима. Више пута у тексту, а први пут после дефиниције 1.7, користићемо чињеницу да се елемент модула може представити као сума производа генератора и елемената прстена који имају посебне особине, што је последица градације.

Овде ће бити коришћена градација помоћу природних и целих бројева, мада се градуисане структуре могу дефинисати над било којим моноидом.

Дефиниција 1.1. *Прстен R је градуисан* ако се може представити као директна сума $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$ својих адитивних подгрупа, тако да $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$, за свако $i, j \in \mathbb{N}$.

Елемент u из R је *хомоген*, ако припада некој од група R_i, и тада кажемо да је u степена i и пишемо $\deg(u) = i$. Како сваки елемент $u \in R$ може на јединствен начин да се представи као коначна сума $u = u_{i_1} + \cdots + u_{i_j}$, то ће се елементи u_{i_l} звати *хомогеним компонентама* елемента u, *степена* i_l.

Дефиниција 1.2. Нека је I идеал градуисаног прстена R. Кажемо да је *идеал I градуисан*, ако за свако $u \in I$ важи да је свака хомогена компонента од u у I.

Дефиниција градуисаног идеала I је еквивалентна тврђењу да је $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} I_i$, где је $I_i = R_i \cap I$, као и услову да I има систем хомогених генератора.

Дефиниција 1.3. Ако је $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$ градуисан прстен, тада је *R-модул M градуисан* ако је директна сума $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ својих адитивних подгрупа, тако да $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$, за свако $i, j \in \mathbb{Z}$.

Елемент m из M је *хомоген*, ако припада некој од група M_i, и тада кажемо да је m степена i и пишемо $\deg(m) = i$. Хомогене компоненте одређеног степена елемента m дефинишу се аналогно.

Дефиниција 1.4. Нека је N подмодул градуисаног модула M. Кажемо да је *подмодул N градуисан*, ако за свако $m \in N$ важи да је свака хомогена компонента од m у N.

Напомена 1.5. Под скупом природних бројева $\mathbb{N}$ подразумевамо скуп $0, 1, 2, \ldots$

Градација се на прстен полинома $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ уводи на следећи начин: $S = S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots$, где је S_i k-векторски простор генерисан мономима степена i. Наравно, $\deg(x_i) = 1$, за свако $i \in 1, \ldots, n$ и $\deg(x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}) = c_1 + \cdots + c_n$, за све $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{N}$. Приметимо да је $S_0 = k$ и да је 0 хомогени елемент произвољног степена.

Ако је I градуисани идеал у S, тада је количнички прстен $R = S/I$ такође градуисан, са градацијом наслеђеном из S. Наиме, $R_i = S_i/I_i$.

Напомена 1.6. Ознаке S и R ће имати исто значење у наставку текста, и сем у последњем одељку, подразумеваћемо градацију која је горе описана.

Хилбертова функција нам даје величину градуисаних компоненти модула и један је од фундаменталних појмова у овој области.

Дефиниција 1.7. Нека је U коначно генерисани градуисани R-модул. *Хилбертова функција* модула U је $i \mapsto \dim_k(U_i)$ и представља се *Хилбертовим редом*

$$\mathrm{Hilb}_U(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_k(U_i) t^i.$$

Како је $R_0 = S_0/I_0 = k$, јер је $I_0 = S_0 \cap I = \{0\}$ и $R_0 U_i \subseteq U_i$, то су U_i k-векторски простори. Докажимо да су коначно димензиони.

Сваки градуисани модул има систем хомогених генератора, који се добија као колекција свих хомогених компоненти елемената фиксиране генератрисе. Како је U коначно генерисан, систем хомогених генератора од U је коначан, па се сваки елемент $u \in U_i$ може представити као коначна сума $u = \sum_j f_j u_j$, са $f_j \in R$. Нека је g_j хомогена компонента од f_j степена $i - \deg(u_j)$. Тада је

$$u = (\sum_j f_j u_j)_i = \sum_j (f_j)_{i - \deg(u_j)} u_j = \sum_j g_j u_j.$$

Елемент g_j је у $U_{i-\deg(u_j)}$, па је збир коначно много монома h_r истог степена. Тако да су елементи $h_r u_j \in R_{i-\deg(u_j)} U_{\deg(u_j)} \subseteq U_i$ коначна генератриса за U_i над k. Дакле, $\dim_k(U_i) < \infty$, па је Хилбертова функција добро дефинисана. Такође, из чињенице да је U коначно генерисан и да је R позитивно градуисан, следи да је $U_i \neq 0$ за коначно много $i < 0$.

Дефиниција 1.8. *Померени модул* градуисаног R-модула U је модул $U(-p)$ такав да $U(-p)_i = U_{i-p}$, за свако $i \in \mathbb{N}$. Број $p \in \mathbb{N}$ се зове померај, и кажемо да је $U(-p)$ модул U померен за p степени.

Став 1.9. Модул $R(-p)$ је слободни R-модул, генерисан једним елементом у степену p. $\square$

Дефиниција 1.10. Нека су N и T градуисани R-модули. Кажемо да хомоморфизам модула $\phi : N \to T$ има *степен* i ако је $\deg(\phi(m)) = i+\deg(m)$, за сваки хомоген елемент $m \in N$, који није у $Ker(\phi)$. Означимо са $\mathrm{Hom}_i(N,T)$ простор свих хомоморфизама степена i из N у T. Кажемо да је хомоморфизам ϕ градуисан, или да је ϕ *хомоморфизам градуисаних модула*, ако $\phi \in \mathrm{Hom}_i(N,T)$, за неко i.

Биће нам важни хомоморфизми степена нула. Ако је $\phi : N \to T$ хомоморфизам градуисаних модула степена i, можемо га посматрати и као пресликавање из $N(-i)$ у T степена нула, што објашњава увођење померених модула.

Следећи једноставни резултат је техничког карактера, и биће коришћен више пута у даљем тексту.

Став 1.11. Нека је $\alpha : N \to T$ хомоморфизам градуисаних R-модула. Тада су $\mathrm{Ker}(\alpha), \mathrm{Im}(\alpha), \mathrm{Coker}(\alpha)$ такође градуисани модули.

Доказ. Нека је $f \in \mathrm{Ker}(\alpha)$. Како је $\mathrm{Ker}(\alpha) \subseteq N$, можемо представити f као коначну суму хомогених компоненти $f = \sum_i f_i$. Ако је $\alpha(f_i) \neq 0$ за неко i, онда је то и хомогена компонента од $\alpha(f)$, јер је α хомоморфизам градуисаних модула. Пошто је $\alpha(f) = 0$, мора бити $\alpha(f_i) = 0$. Дакле, свака хомогена компонента од $f \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ је такође у $\mathrm{Ker}(\alpha)$, па према дефиницији 1.4, $\mathrm{Ker}(\alpha)$ јесте градуисани подмодул.

Нека је $g \in \mathrm{Im}(\alpha)$ и нека је $f \in N$ такав да $\alpha(f) = g$ и да су све хомогене компоненте од f ван $\mathrm{Ker}(\alpha)$. Важи да је $f = \sum_i f_i$, где су f_i хомогене компоненте од f. Тада су $\alpha(f_i)$ хомогене компоненте од $\alpha(f) = g$, па је свака хомогена компонента од g такође у $\mathrm{Im}(\alpha)$.

Пошто је $\mathrm{Coker}(\alpha) = T/\mathrm{Im}(\alpha)$, онда наслеђује градацију као количнички простор преко $\mathrm{Coker}(\alpha)_i = T_i/\mathrm{Im}(\alpha)_i$. $\square$

Дефиниција 1.12. Нека је $\mathcal{U}$ хомоген систем генератора градуисаног R-модула U. Кажемо да је $\mathcal{U}$ *минимални систем генератора*, ако ниједан прави подскуп од $\mathcal{U}$ не генерише U.

Накајамина[11] лема 1.13. Нека је J прави, градуисани идеал у R, а U коначно генерисани градуисани R-модул. Ако је $U = JU$, тада је $U = 0$.

Доказ. Претпоставимо супротно, $U \neq 0$. Нека је $\mathcal{U}$ коначни систем хомогених генератора за U. Нека је $m \neq 0$ елемент из $\mathcal{U}$ минималног степена. Тада је $U_j = 0$ за све $j < \deg(m)$. Како је $J_0 = 0$, сви хомогени елементи у JU су степена строго већег од $\deg(m)$. Према претпоставци, $U = JU$, па је $m \in JU$, што је контрадикција. $\square$

[11] Tadasi Nakayama (1912-1964), јапански математичар

Последица 1.14. Нека је J прави, градуисани идеал у R, а U коначно генерисани R-модул. Ако је W градуисани R-подмодул од U тако да $U = W + JU$, тада је $U = W$.

Доказ. Примена Накајамине леме на модул U/W даје тражени резултат. $\square$

Накајамина лема је један од резултата у коме градација остварује суштинску улогу, кроз избор генератора минималног степена.

Појам минималног система генератора, Накајамина лема и наредна теорема 1.16, која детаљно описује како изгледа минимални систем генератора коначно генерисаног R-модула, чине основу за изградњу теорије која следи.

Напомена 1.15. Максимални идеал $(x_1, \dots, x_n)$ у S јесте градуисан, и у даљем тексту ћемо га означавати са $\mathcal{M}$.

Теорема 1.16. Нека је U коначно генерисани градуисани R-модул. Структура $\overline{U} = U/\mathcal{M}U$ је градуисани модул над R, који је као k-векторски простор коначно димензион. Нека је p његова димензија.
(1) Нека је $\{\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_p\}$ база за $\overline{U}$ над k. Ако су елементи $u_1, \dots, u_p$ такви да $u_i \mapsto \overline{u}_i$ при канонском пресликавању $U \to \overline{U}$, тада је $u_1, \dots, u_p$ минимални систем хомогених генератора за U.
(2) Сваки минимални систем хомогених генератора за U добија се на наведени начин и има p елемената. Ако је $q_i = \dim_k(\overline{U}_i)$ за свако i, тада сваки минимални систем хомогених генератора за U садржи q_i елемената степена i.
(3) Нека су $\{u_1, \dots, u_p\}$ и $\{v_1, \dots, v_p\}$ два минимална система хомогених генератора за U, и $v_s = \sum_j a_{sj} u_j$, за $a_{sj} \in R$. Нека су c_{sj} хомогене компоненте елемената a_{sj} степена $\deg(v_s) - \deg(u_j)$, за све s, j. Тада је $v_s = \sum_j c_{sj} u_j$ за све s, $\det([c_{sj}]) \in k$, и $[c_{sj}]$ је инвертибилна матрица.

Доказ. (1) Како је $U = \mathcal{M}U + Ru_1 + \cdots Ru_p$, применом последице Накајамине леме добијамо да је $U = Ru_1 + \cdots + Ru_p$. Претпоставимо да систем генератора $u_1, \dots, u_p$ није минималан. Без умањења општости, важи да је $u_1 = \sum_{2 \leq i \leq p} \alpha_i u_i$, за неке $\alpha_i \in R$. Следи да је $\overline{u}_1 = \sum_{2 \leq i \leq p} \overline{\alpha}_i \overline{u}_i$, где су $\overline{\alpha}_i$ слике елемената α_i при наведеном количничком пресликавању, а заправо су елементи самог поља k. Како је $\{\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_p\}$ база, добили смо контрадикцију.

(2) Нека је $\{u_1, \dots, u_p\}$ минимални систем хомогених генератора за U. Тада је систем $\{\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_p\}$ генератриса за $\overline{U}$ над k. Претпоставимо да је линеарно зависан и нека је $\{u'_{i_1}, \dots, u'_{i_p}\}$ његов подскуп који је линеарно независан. Нека су елементи $u_{j_1}, \dots, u_{j_p}$ такви да $u_{j_i} \mapsto u'_{j_i}$ при наведеном канонском пресликавању. Тада систем $u_{j_1}, \dots, u_{j_p}$ генерише U. Тиме смо добили прави подскуп система генератора који генерише U, што је контрадикција са чињеницом да је $\{u_1, \dots, u_p\}$ минимални систем. Следи да сваки минимални систем мора имати елемената колико и база за $\overline{U}$ над

k, а како је пресликавање $U \to \overline{U}$ степена нула, важи и део тврђења који се односи на степене елемената.

(3) Нека су елементи c_{sj} као у формулацији теореме. Тада је

$$v_s = \Big(\sum_j a_{sj}u_j\Big)_{\deg(v_s)} = \sum_j (a_{sj})_{\deg(v_s)-\deg(u_j)}u_j = \sum_j c_{sj}u_j.$$

Даље, нека је $C = [c_{sj}]$ и нека су B_i блокови димензија $q_i \times q_i$ који се налазе на дијагонали матрице C. Можемо претпоставити да су елементи у оба скупа генератора поређани тако да им се степени повећавају. Према (2), сваки минимални систем хомогених генератора садржи q_i елемената степена i, па је $\deg(u_j) \geq \deg(v_s)$ за $j > s$. Елемент v_s се изражава као сума елемената степена $\deg(v_s)$, па коефицијенти c_{sj} који стоје уз елементе u_j степена $\deg(v_s)$ припадају пољу $k = R_0$. Коефицијенти уз елементе u_j степена строго већег од $\deg(v_s)$ су 0. Дакле, блокови B_i су са елементима у k, а део матрице изнад блокова B_i је 0. То значи да је $\det(C) = \prod_i \det(B_i) \in k$.

Да бисмо доказали да је матрица C инвертибилна, довољно је доказати да је $\det(C)$ инвертибилан, то јест да је $\det(C) \neq 0$. Означимо са $\overline{C}$ матрицу насталу од C када се елементи c_{sj} пресликају у елементе $\overline{c}_{sj}$ на већ поменути начин. При том пресликавању, елементи c_{sj} који су у k се не мењају, а они који нису, постају 0. Матрица $\overline{C}$ има на дијагонали блокове B_i, а свуда остало су нуле. Како су системи $\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_p\}$ и $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_p\}$ базе векторског простора $\overline{U}$, и матрица $\overline{C}$ је та која преводи једну базу у другу, то је $\overline{C}$ инвертибилна, а тиме и $\det(C) = \prod_i \det(B_i) = \det(\overline{C}) \neq 0$. □

2 Резолвенте

При испитивању особина модула, имамо могућност да му доделимо низ модула и хомоморфизама, чије особине су лакше за испитивање. Такав низ називаћемо резолвентом, и као што ће се показати у наредним одељцима, кроз испитивање резолвенте модула добијаћемо важне податке о њему самом.

Дефиниција 2.1. *Градуисани ланчасти комплекс* модула је ланчасти комплекс

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \longrightarrow \cdots,$$

при чему су сви модули F_i градуисани и пресликавања d_i су хомоморфизми степена нула.

Дефиниција 2.2. *Пројективна резолвента* модула M над произвољним прстеном P је тачан ланчасти комплекс

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0$$

пројективних P-модула, тако да је $M \cong F_0/\mathrm{Im}(d_1)$. Ако су модули F_i слободни коначног ранга за свако i, кажемо да је резолвента *слободна*. *Градуисана слободна резолвента* модула је слободна резолвента која је и градуисани ланчасти комплекс, и изоморфизам $M \cong F_0/\mathrm{Im}(d_1)$ је степена нула.

Дакле, низ модула и хомоморфизама

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0$$

је градуисана слободна резолвента модула M ако је ланчасти комплекс који је тачан, модули F_i су градуисани и слободни коначног ранга, хомоморфизми d_i су степена нула и $M \cong F_0/\mathrm{Im}(d_1)$ је изоморфизам степена нула.

Резолвенту модула M можемо означити и са

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0,$$

и то јесте тачан низ.

Пројективна резолвента је, очигледно, општији појам од слободне, али у случају прстена полинома, пројективни модули су слободни, тако да ће у тексту који следи бити речи само о слободним резолвентама.

Ако фиксирамо базу модула F_i која се састоји од хомогених елемената, тада су пресликавања d_i задата матрицама чије компоненте су хомогени елементи, и такве матрице називамо *диференцијалне матрице*. Наравно, матрице зависе од изабране базе.

Може се доказати да сваки модул има слободну резолвенту. За модул F_0 узмимо слободан модул чији генератори су генератори модула M и нека пресликавање ϵ слика генераторе у саме себе. Како M није слободан, $\mathrm{Ker}(\epsilon)$ није тривијалан и не мора бити слободан. Поновимо поступак за $\mathrm{Ker}(\epsilon)$. Нека је F_1 слободан модул чији генератори су генератори за $\mathrm{Ker}(\epsilon)$ и дефинишимо пресликавање $d_1 : F_1 \to \mathrm{Ker}(\epsilon)$ аналогно. Тада је $\mathrm{Ker}(\epsilon) = \mathrm{Im}(d_1)$ и $M \cong \mathrm{Im}(\epsilon) \cong F_0/\mathrm{Ker}(\epsilon) \cong F_0/\mathrm{Im}(d_1)$. Понављањем поступка добијамо слободну резолвенту за M.

Нека је сада U коначно генерисани градуисани R-модул. Претходни доказ може се лако подесити тако да добијемо и градацију. Знамо да је слободан R-модул директна сума копија прстена R. У градуисаном случају те копије ће бити померени модули $R(-p)$, јер на тај начин можемо одредити ког степена је генератор.

Конструкција градуисане слободне резолвенте модула U ће бити представљена индуктивно.

Нека су $m_1, \ldots, m_r$ хомогени генератори модула U, и нека су $a_1, \ldots, a_r$ њихови степени. Нека је $F_0 = R(-a_1) \oplus \cdots \oplus R(-a_r)$ и нека је f_i генератор модула $R(-a_i)$, за свако i. Тада је $\deg(f_i) = a_i$. Дефинишимо пресликавање $d_0 : F_0 \to U$, тако да $f_j \mapsto m_j$, за $1 \leq j \leq r$. Пресликавање чува степен, па јесте хомоморфизам степена нула.

Претпоставимо да су дефинисани F_i и d_i. Како је F_i коначно генерисан над R, који је Нетерин, онда је и F_i Нетерин као модул, па је $\mathrm{Ker}(d_i)$ коначно генерисан. Нека су $l_1, \ldots, l_s$ хомогени генератори за $\mathrm{Ker}(d_i)$, који јесте градуисани модул према ставу 1.11, и нека су $b_1, \ldots, b_s$ степени генератора. Нека је $F_{i+1} = R(-b_1) \oplus \cdots \oplus R(-b_s)$, и g_i генератор модула $R(-b_i)$, за свако i. Како је $\deg(g_i) = b_i$, пресликавање $d_{i+1} : F_{i+1} \to \mathrm{Ker}(d_i) \subseteq F_i$, дефинисано са $g_j \mapsto l_j$, за $1 \leq j \leq s$, јесте степена нула и сурјективно је на $\mathrm{Ker}(d_i)$. Према конструкцији, добијени низ модула је тачан.

На наредном примеру ћемо илустровати до сад уведене појмове, а користићемо га и даље кроз рад.

Пример 2.3. Нека је $S = k[x, y]$ и $I = (x^3, xy, y^5)$. Тада је S/I коначно генерисани модул над S, са једним генератором степена нула. Одредимо Хилбертову функцију и градуисану слободну резолвенту за S/I.

Важи да је $(S/I)_0 = k$, па је база за $(S/I)_0$ над k $\{1\}$, а тиме и $\dim_k((S/I)_0) = 1$. База за $(S/I)_1$ над k је $\{x, y\}$, а за $(S/I)_2$ је $\{x^2, y^2\}$, јер је $xy \in I$. Заправо, како је I генерисан мономима, можемо приметити да базу за $(S/I)_i$ добијамо као скуп монома степена i који не припадају идеалу I. Тако да је база у степену 3 $\{y^3\}$, а у степену 4 $\{y^4\}$. Како I може да изгенерише све полиноме степена 5 и више, то је $(S/I)_j = 0$ за $j \geq 5$, па је у том случају $\dim_k((S/I)_j) = 0$. Дакле, Хилбертов ред је $\mathrm{Hilb}_{S/I}(t) = 1 + 2t + 2t^2 + t^3 + t^4$.

Сада ћемо одредити градуисану слободну резолвенту за S/I над S. Према изведеној конструкцији, за F_0 узимамо слободни модул над S са једним генератором степена нула, то јест $F_0 = S$. Пресликавање d_0 слика тај генератор у генератор модула S/I. Хомогени генератори за $\mathrm{Ker}(d_0)$ су очигледно x^3, xy, y^5. Њихови степени су 3, 2 и 5. Тада је $F_1 = S(-3) \oplus S(-2) \oplus S(-5)$, генератори су f_1, f_2, f_3, а пресликавање d_1 такво да

$$f_1 \mapsto x^3,\ f_2 \mapsto xy,\ f_3 \mapsto y^5.$$

Према томе, добијамо почетак резолвенте

$$S(-3) \oplus S(-2) \oplus S(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^3 & xy & y^5 \end{pmatrix}} S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0.$$

Даље, треба одредити $\mathrm{Ker}(d_1)$. Нека је $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 \in \mathrm{Ker}(d_1)$, за $\alpha, \beta, \gamma \in S$. Дакле, треба решити једначину $\alpha x^3 + \beta xy + \gamma y^5 = 0$. Можемо је написати и у следећим облицима:

$$\alpha x^3 = -y(\beta x + \gamma y^4),\ \gamma y^5 = -x(\alpha x^2 + \beta y),$$

одакле добијамо да y дели α и x дели γ. Ставимо $\alpha = y\tilde{\alpha}$ и $\gamma = x\tilde{\gamma}$. Полазна једначина је поједностављена: $\tilde{\alpha}x^2 + \beta + \tilde{\gamma}y^4 = 0$. Видимо да β можемо записати као $\beta = \beta' y^4 + \beta'' x^2 + \bar{\beta} x^2 y^4$, где ниједан моном у β'' није дељив са y^4, и ниједан моном у β' није дељив са x^2. Слично је:

$\tilde{\alpha} = \alpha' y^4 + \alpha''$, где ниједан моном у α'' није дељив са y^4; $\tilde{\gamma} = \gamma' + \gamma'' x^2$, где ниједан моном у γ' није дељив са x^2. Добијамо једнакост

$$(\alpha' + \bar{\beta} + \gamma'')x^2y^4 + (\alpha'' + \beta'')x^2 + (\beta' + \gamma')y^4 = 0,$$

одакле следи да је $\alpha'' + \beta'' = 0$ и $\beta' + \gamma' = 0$, а тиме и $\alpha' + \bar{\beta} + \gamma'' = 0$. Свако решење полазне једначине можемо записати

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta, \gamma) &= (\alpha' y^5 + \alpha'' y, \beta' y^4 + \beta'' x^2 + \bar{\beta} x^2 y^4, \gamma' x + \gamma'' x^3) = \\ &= (\alpha' y^5 + \alpha'' y, -\gamma' y^4 - \alpha'' x^2 - \alpha' x^2 y^4 - \gamma'' x^2 y^4, \gamma' x + \gamma'' x^3) = \\ &= \alpha'(y, -x^2, 0) + \alpha''(0, -y^4, x) + \gamma'(y^5, -x^2y^4, 0) + \gamma''(0, -x^2y^4, x^3),\end{aligned}$$

па је скуп решења генерисан са

$$\sigma_1 = (y, -x^2, 0), \sigma_2 = (0, -y^4, x), \sigma_3 = (y^5, -x^2y^4, 0), \sigma_4 = (0, -x^2y^4, x^3).$$

Можемо приметити да је $\sigma_3 = y^4\sigma_1$ и $\sigma_4 = x^2\sigma_2$, па σ_1 и σ_2 представљају минималну генератрису за скуп решења наведене једначине.

Дакле, имамо да су $yf_1 - x^2f_2, -y^4f_2 + xf_3$ хомогени генератори за $\mathrm{Ker}(d_1)$. Њихови степени су $\deg(yf_1) = \deg(y) + \deg(f_1) = 1 + 3 = 4$ и $\deg(-y^4f_2) = \deg(-y^4) + \deg(f_2) = 4 + 2 = 6$. Имамо да је $F_2 = S(-4) \oplus S(-6)$, генератори су g_1, g_2, а пресликавање d_2 такво да

$$g_1 \mapsto yf_1 - x^2f_2, \ g_2 \mapsto -y^4f_2 + xf_3.$$

Сада је резолвента

$$S(-4) \oplus S(-6) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & 0 \\ -x^2 & -y^4 \\ 0 & x \end{pmatrix}} S(-3) \oplus S(-2) \oplus S(-5) \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{\begin{pmatrix} x^3 & xy & y^5 \end{pmatrix}} S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0.$$

Треба наћи хомогене генераторе за $\mathrm{Ker}(d_2)$. Нека је $\mu g_1 + \nu g_2 \in \mathrm{Ker}(d_2)$, за $\mu, \nu \in S$. Тражимо решења једначине

$$\mu y f_1 + (-\mu x^2 - \nu y^4) f_2 + \nu x f_3 = 0.$$

Како су f_1, f_2, f_3 слободни генератори, мора бити

$$\mu y = 0, \ \ -\mu x^2 - \nu y^4 = 0, \ \nu x = 0.$$

Закључујемо да је $\mu = \nu = 0$, па је $\mathrm{Ker}(d_2) = 0$, а тиме и тачан низ

$$0 \longrightarrow S(-4) \oplus S(-6) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & 0 \\ -x^2 & -y^4 \\ 0 & x \end{pmatrix}} S(-3) \oplus S(-2) \oplus S(-5) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\begin{pmatrix} x^3 & xy & y^5 \end{pmatrix}} S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0,$$

који представља градуисану слободну резолвенту за S/I. $\triangle$

Проналажење генератора за модуле $\mathrm{Ker}(d_1)$ и $\mathrm{Ker}(d_2)$ било је еквивалентно решавању једне једначине $\alpha x^3+\beta xy+\gamma y^5=0$ и решавању система од три једначине $\mu y=0$, $-\mu x^2-\nu y^4=0$, $\nu x=0$, респективно. У питању су једначине линеарне над S и тражили смо решења над истим прстеном.

Можемо уопштити претходно објашњење на следећи начин: ако су R^p и R^q слободни R-модули, и B матрица пресликавања $R^p \xrightarrow{B} R^q$, тада је описивање структуре $\mathrm{Ker}(B)$ еквивалентно решавању система R-линеарних једначина $BX=0$ над R. Дакле, конструисање слободне резолвенте

$$\ldots \longrightarrow R^s \xrightarrow{B_2} R^t \xrightarrow{B_1} R^p \xrightarrow{B_0} R^q$$

еквивалентно је узастопном решавању система R-линеарних једначина

$$B_0X=0,\ B_1Y=0,\ B_2Z=0,\ldots.$$

Битно је питање како наћи минимални број елемената који генеришу језгро, као што је разматрано за случај $\mathrm{Ker}(d_1)$. Тиме ћемо се бавити у следећем одељку. Напоменимо још да се у случају минималне генератрисе одговарајућа језгра називају сизигије.

Следећи резултати су техничке природе и омогућиће нам да, у последњој теореми овог одељка, објаснимо неке везе између различитих слободних резолвенти фиксираног R-модула.

Дефиниција 2.4. Нека су U и W коначно генерисани R-модули и $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ланчасти комплекси над U и W. Кажемо да је хомоморфизам ланчастих комплекса $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *подизање* хомоморфизма $\sigma : U \to W$, ако је комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\phi_i"] & F_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{i-1}"] & \ldots \arrow[r] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0"] & W \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & G_i \arrow[r, "\delta_i"] & G_{i-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & G_0 \arrow[r] & U \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Лема 2.5. Нека су U и W коначно генерисани R-модули и $\sigma : U \to W$ хомоморфизам. Нека су дати ланчасти комплекси

$$\mathcal{F} : \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} U \longrightarrow 0$$

и

$$\mathcal{G} : \cdots \longrightarrow G_i \xrightarrow{\delta_i} G_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\delta_1} G_0 \xrightarrow{\delta_0} W \longrightarrow 0,$$

тако да су F_i слободни модули коначног ранга, d_0 сурјективно, и $\mathcal{G}$ слободна резолвента за W.
(1) Постоји подизање $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ за σ.
(2) Свака два подизања за σ су хомотопна.
Ако су наведени модули градуисани и хомоморфизми степена p, тада се ϕ и хомотопија могу изабрати да буду степена p.

Д о к а з. (1) Конструкција подизања се изводи индуктивно. Пресликавање δ_0 је сурјекција, јер је низ $\mathcal{G}$ тачан. Како је F_0 слободан, постоји хомоморфизам $\phi_0 : F_0 \to G_0$, тако да $\delta_0\phi_0 = \sigma d_0$.

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[d, "\phi_0"] \arrow[dr, "\sigma d_0"] & \\ G_0 \arrow[r, "\delta_0"] & U \end{tikzcd}$$

Пошто је $\mathcal{F}$ ланчасти комплекс, композиције суседних пресликавања су нуле, важи да је

$$\delta_0\phi_0(\mathrm{Im}(d_1)) \subseteq \delta_0\phi_0(\mathrm{Ker}(d_0)) = \sigma d_0(\mathrm{Ker}(d_0)) = 0.$$

Дакле, $\phi_0(\mathrm{Im}(d_1)) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta_0) = \mathrm{Im}(\delta_1)$, што омогућава правилно извођење индукције, то јест дефинисање наредног пресликавања.

Претпоставимо да постоји $\phi_{i-1} : F_{i-1} \to G_{i-1}$, тако да $\phi_{i-1}(\mathrm{Im}(d_i)) \subseteq \mathrm{Im}(\delta_i)$. Како је F_i слободан и пресликавање $G_i \xrightarrow{\delta_i} \mathrm{Im}(\delta_i)$ је сурјективно, постоји хомоморфизам $\phi_i : F_i \to G_i$, тако да $\delta_i\phi_i = \phi_{i-1}d_i$.

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[d, "\phi_i"] \arrow[dr, "\phi_{i-1}d_i"] & \\ G_i \arrow[r, "\delta_i"] & \mathrm{Im}(\delta_i) \end{tikzcd}$$

Такође је

$$\delta_i\phi_i(\mathrm{Im}(d_{i+1})) \subseteq \delta_i\phi_i(\mathrm{Ker}(d_i)) = \phi_{i-1}d_i(\mathrm{Ker}(d_i)) = 0,$$

па имамо $\phi_i(\mathrm{Im}(d_{i+1})) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta_i) = \mathrm{Im}(\delta_{i+1})$.

(2) Ако су ϕ_1 и ϕ_2 два подизања за σ, тада су $\phi_1 - \phi_2$ и 0 два подизања за нула пресликавање. Дакле, довољно је показати да ако је α подизање нуле, тада је α хомотопно нули. Конструкција се поново изводи индуктивно.

Због комутативности дијаграма је $\delta_0\alpha_0 = 0$, па и $\alpha_0(F_0) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta_0) = \mathrm{Im}(\delta_1)$. Пошто је F_0 слободан, постоји хомоморфизам $h_0 : F_0 \to G_1$ тако да $\alpha_0 = \delta_1 h_0$.

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[d, "h_0"] \arrow[dr, "\alpha_0"] & \\ G_1 \arrow[r, "\delta_1"] & \mathrm{Im}(\delta_1) \end{tikzcd}$$

Приметимо да је

$$\delta_1(\alpha_1 - h_0 d_1) = \delta_1\alpha_1 - \delta_1 h_0 d_1 = \alpha_0 d_1 - \delta_1 h_0 d_1 = (\alpha_0 - \delta_1 h_0) d_1 = 0,$$

па и $\mathrm{Im}(\alpha_1 - h_0 d_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta_1) = \mathrm{Im}(\delta_2)$.

Претпоставимо да постоји хомоморфизам h_i тако да $\alpha_i = h_{i-1}d_i + \delta_{i+1}h_i$ и $\mathrm{Im}(\alpha_{i+1} - h_i d_{i+1}) \subseteq \mathrm{Im}(d_{i+2})$. Постоји хомоморфизам $h_{i+1} : F_{i+1} \to G_{i+2}$ тако да $\delta_{i+2}h_{i+1} = \alpha_{i+1} - h_i d_{i+1}$.

$$\begin{tikzcd}
F_{i+1} \arrow[d, "h_{i+1}"'] \arrow[dr, "\alpha_{i+1}-h_i d_{i+1}"] & \\
G_{i+2} \arrow[r, "\delta_{i+2}"] & \mathrm{Im}(\delta_{i+2})
\end{tikzcd}$$

Како је

$$\delta_{i+2}(\alpha_{i+2} - h_{i+1}d_{i+2}) = \delta_{i+2}\alpha_{i+2} - \delta_{i+2}h_{i+1}d_{i+2} =$$

$$= \alpha_{i+1}d_{i+2} - \delta_{i+2}h_{i+1}d_{i+2} = (\alpha_{i+1} - \delta_{i+2}h_{i+1})d_{i+2} = (h_i d_{i+1})d_{i+2} = 0,$$

имамо да је $\mathrm{Im}(\alpha_{i+2} - h_{i+1}d_{i+2}) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta_{i+2}) = \mathrm{Im}(\delta_{i+3})$. $\square$

Следећа теорема каже да су сваке две слободне резолвенте коначно генерисаног модула хомотопски еквивалентне.

Теорема 2.6. Ако су $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ слободне резолвенте коначно генерисаног R-модула U, тада постоје хомоморфизми $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ и $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$, тако да је $\phi\varphi$ хомотопно $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$, а $\varphi\phi$ хомотопно $\mathrm{id}_{\mathcal{G}}$. Ако су наведени модули градуисани, сва пресликавања могу се изабрати да буду степена нула.

Доказ. Према леми 2.5(1) постоје подизања $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ и $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ идентичног пресликавања $\mathrm{id} : U \to U$. Тада су $\varphi\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ и $\mathrm{id} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ два подизања идентичног пресликавања $\mathrm{id} : U \to U$. Према леми 2.5(2), пресликавања су хомотопна. Слично се доказује да је $\phi\varphi$ хомотопно пресликавању $\mathrm{id}_{\mathcal{G}}$. $\square$

3 Минимална резолвента

Свака резолвента модула даје нам одређене нумеричке податке о самом модулу. Иако су сваке две слободне резолвенте коначно генерисаног модула хомотопски еквивалентне, неки нумерички подаци које добијамо тим путем се мењају са променом резолвенте. Дефинисаћемо специјални тип резолвенте, који не само да даје исте податке при промени резолвенти, него ће и сами подаци које добијемо из ње најбоље описивати структуру полазног модула.

Дефиниција 3.1. Кажемо да је градуисана слободна резолвента коначно генерисаног R-модула *минимална*, ако је

$$d_{i+1}(F_{i+1}) \subseteq \mathcal{M}F_i, \text{ за свако } i.$$

Дефиниција заправо каже да, ако је резолвента минимална, у диференцијалним матрицама нема инвертибилних елемената.

Минимална резолвента је најмања у смислу да су рангови њених слободних модула мањи или једнаки од рангова одговарајућих слободних модула у произвољној резолвенти. То ћемо и доказати.

Теорема 3.2. Градуисана слободна резолвента коначно генерисаног R-модула U конструисана у претходном одељку је минимална ако и само ако у сваком кораку конструкције бирамо минимални хомогени систем генератора језгра пресликавања d_i.

Доказ. Претпоставимо да је резолвента минимална, и претпоставимо да је у i-том кораку изабран хомогени систем генератора $l_1, \dots, l_s$ за $\mathrm{Ker}(d_i)$ који није минимални. Без умањења општости, постоје $r_2, \dots, r_s \in R$, тако да $l_1 = \sum_{2 \le j \le s} r_j l_j$. Нека су $g_1, \dots, g_s$ генератори модула F_{i+1}. Према конструкцији, важи да је $d_{i+1}(g_j) = l_j$, за $1 \le j \le s$, па је $d_{i+1}(g_1) = l_1 = \sum_{2 \le j \le s} r_j d_{i+1}(g_j)$. Дакле,

$$g_1 - \sum_{2 \le j \le s} r_j g_j \in \mathrm{Ker}(d_{i+1}) = \mathrm{Im}(d_{i+2}) \subseteq \mathcal{M}F_{i+1}.$$

Коефицијенти уз генераторе g_j морају бити у $\mathcal{M}$, па је $1 \in \mathcal{M}$, што је контрадикција.

Претпоставимо да је у сваком кораку конструкције изабран минимални хомогени систем генератора, и претпоставимо да је за неко i $d_{i+1}(F_{i+1}) \nsubseteq \mathcal{M}F_i$. Како је $d_{i+1}(F_{i+1}) = \mathrm{Im}(d_{i+1}) = \mathrm{Ker}(d_i)$, постоји елемент $g \in \mathrm{Ker}(d_i) \backslash \mathcal{M}F_i$. Ако су $g_1, \dots, g_s$ генератори модула F_i, тада се g може изразити преко наведених генератора, при чему неки од коефицијената мора бити инвертибилан елемент. Без губљења општости можемо претпоставити да су генератори изабрани тако да је $g = g_1 - \sum_{2 \le j \le s} r_j g_j$, за неке $r_j \in R$. Даље, важи $g = g_1 - \sum_{2 \le j \le s} r_j g_j \in \mathrm{Ker}(d_i)$, па је $d_i(g_1) = \sum_{2 \le j \le s} r_j d_i(g_j)$. Ако су $l_1, \dots, l_s$ генератори за $\mathrm{Ker}(d_{i-1}) \subseteq F_{i-1}$, према томе како је конструисана резолвента, важи $l_1 = \sum_{2 \le j \le s} r_j l_j$. Ово је контрадикција са чињеницом да је у сваком кораку биран минимални систем генератора. □

Дефиниција 3.3. Ланчасти комплекс облика

$$0 \longrightarrow R(-p) \xrightarrow{\mathrm{id}} R(-p) \longrightarrow 0$$

се назива *кратки тривијални комплекс*. Директна сума кратких тривијалних комплекса назива се *тривијални комплекс*.

Ако је $\mathcal{F}$ резолвента модула U, а $\mathcal{G}$ тривијални комплекс, тада је и $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ такође резолвента за U. То је последица чињенице да тривијални комплекс има тривијалну хомологију. У теореми 3.9 ћемо доказати да се све резолвенте модула U разликују до на директну суму са тривијалним комплексима, то јест, да минималну резолвенту можемо добити уклањањем кратких тривијалних комплекса. За доказ ове важне теореме, која говори о егзистенцији и јединствености минималне резолвенте, неопходни су нам следећи резултати техничке природе.

Дефиниција 3.4. Нека су T и N коначно генерисани R-модули. Кажемо да се низ $N \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} N$ *цепа*, ако је $\beta\alpha = \mathrm{id}$.

Лема 3.5. Нека су T и N коначно генерисани R-модули.
(1) Ако се низ $N \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} N$ цепа, тада је $T = \mathrm{Ker}(\beta) \oplus \mathrm{Im}(\alpha)$. Ако су додатно T и N градуисани, а α и β степена нула, тада директна сума поштује градацију.
(2) Ако је пресликавање $T \xrightarrow{\beta} N$ сурјективно и N слободан, тада је $T \cong \mathrm{Ker}(\beta) \oplus N$. Такође, ако су T и N градуисани, а β степена нула, тада директна сума поштује градацију.

Доказ. (1) Нека је $f \in T$. Како је $\beta(\alpha(\beta(f))) = \beta(f)$, то је $f - \alpha(\beta(f)) \in \mathrm{Ker}(\beta)$, па је $f \in \mathrm{Ker}(\beta) + \mathrm{Im}(\alpha)$. Такође, $\mathrm{Ker}(\beta) \cap \mathrm{Im}(\alpha) = 0$.

Према ставу 1.11 $\mathrm{Ker}(\beta), \mathrm{Im}(\alpha)$ јесу градуисани. Ако бисмо у претходном доказу изабрали хомоген елемент f, и како су α и β степена нула, градација би очигледно била испоштована.

(2) Нека је $l_1, \dots, l_s$ база модула N. Како је β сурјекција, можемо изабрати елементе $f_1, \dots, f_s$ тако да $\beta(f_i) = l_i$. Нека је $\alpha : N \to T$ задато са $\alpha(l_i) = f_i$. Тада је $\beta\alpha = \mathrm{id}$, па према (1) важи $T = \mathrm{Ker}(\beta) \oplus \mathrm{Im}(\alpha)$. Из $\alpha(f) = \alpha(g)$ следи $\beta(\alpha(f)) = \beta(\alpha(g))$, а због цепања и $f = g$, па је α инјекција. Дакле, $\mathrm{Im}(\alpha) \cong N$. □

Лема 3.6. Нека је T градуисан R-модул и директни сабирак градуисаног слободног R-модула коначног ранга. Тада је T слободан.

Доказ. T јесте коначно генерисан, па нека је тад $l_1, \dots, l_s$ минимални систем хомогених генератора за T, а $a_1, \dots, a_s$ њихови степени. Дефинишимо пресликавање $\alpha : N \to T$, са $r_i \mapsto l_i$, за $1 \leq i \leq s$, где је $N = R(-a_1) \oplus \cdots \oplus R(-a_s)$ слободни R-модул са базом $r_1, \dots, r_s$. Докажимо да је α изоморфизам. Очигледно је сурјекција.

Нека је $q \in \mathrm{Ker}(\alpha) \subseteq N$. Тада је $q = \sum_i c_i r_i$, за $c_i \in R$. Даље је $\sum_i c_i l_i = 0$. Ако би неки од c_i био инвертибилан, онда би било $l_1 = \sum b_j l_j$, што је немогуће, јер је $l_1, \dots, l_s$ минимални систем хомогених генератора. Значи, $c_i \in \mathcal{M}$ и $\mathrm{Ker}(\alpha) \subseteq \mathcal{M}N$. Нека је $G = F \oplus T$ наведени слободни модул, и $g_1, \dots, g_s$ његова база. Пројекција $\pi : G \to T$ мора бити степена нула. Како је α сурјективно, за свако $\pi(g_i)$ постоји $f_i \in N$ тако да $\alpha(f_i) = \pi(g_i)$. Можемо дефинисати хомоморфизам $\gamma : G \to N$ са $\gamma(g_i) = f_i$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ N \arrow[r, "\alpha"] & T \end{tikzcd}$$

Нека је $\beta = \gamma_{|T}$. Низ $T \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\alpha} T$ се цепа, јер је $\alpha\beta = \mathrm{id}$. Користећи лему 3.5(1), закључујемо да је $N = \mathrm{Im}(\beta) \oplus \mathrm{Ker}(\alpha)$, а на основу претходног и да је $N = \mathrm{Im}(\beta) + \mathcal{M}N$. Применом последице Накајамине леме 1.14 добијамо $\mathcal{M}N = 0$, а како је $\mathrm{Ker}(\alpha) \subseteq \mathcal{M}N$, имамо и $\mathrm{Ker}(\alpha) = 0$.□

Лема 3.7. Ако је

$$\mathcal{T} : \cdots \longrightarrow T_i \xrightarrow{d_i} T_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_1 \xrightarrow{d_1} T_0 \longrightarrow 0$$

тачан градуисан ланчасти комплекс слободних R-модула коначног ранга, тада је то тривијални комплекс.

Доказ. Такође је T_0 слободан и d_1 сурјективно, према леми 3.5(2) је $T_1 \cong \mathrm{Ker}(d_1) \oplus T_0$. Важи да је T_1 слободан, па је према леми 3.6 и $\mathrm{Ker}(d_1)$ слободан. Комплекс

$$\mathcal{T}_1 : \cdots \longrightarrow T_i \xrightarrow{d_i} T_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_2 \xrightarrow{d_2} \mathrm{Ker}(d_1) \longrightarrow 0$$

је тачан и важи $\mathcal{T} \cong \mathcal{T}_1 \oplus \{0 \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_0 \longrightarrow 0\}$. Сада, исти аргумент можемо применити на комплекс $\mathcal{T}_1$. На тај начин добијамо да је $\mathcal{T}$ директна сума кратких тривијалних комплекса, а тиме и тривијални комплекс. □

Лема 3.8. Нека је $[c_{ij}]$ матрица хомоморфизма степена нула $\alpha : F \to F'$, у односу на хомогене базе $f_1, \dots, f_s \subset F$ и $g_1, \dots, g_p \subset F'$, где су F и F' градуисани слободни R-модули коначног ранга. Нека је a_{ij} хомогена компонента елемента $c_{ij} \in R$ степена $\deg(f_j) - \deg(g_i)$. За матрицу $[a_{ij}]$ важи да је $\alpha(f_j) = \sum_i a_{ij} g_i$. Ако је $F = F'$ и степени елемената у одговараућим базама се повећавају, тада $[a_{ij}]$ има квадратне блокове на дијагонали чије компоненте су у k, и нуле испод блокова на дијагонали.

Доказ. Слично као доказ теореме 1.16(3). □

Теорема 3.9. Нека је U градуисани коначно генерисани R-модул.
(1) Постоји минимална градуисана слободна резолвента од U.
(2) Ако је $\mathcal{F}$ минимална, а $\mathcal{G}$ било која градуисана слободна резолвента од U, тада је $\mathcal{G} \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{T}$, за неки тривијални комплекс $\mathcal{T}$.
(3) Минимална градуисана слободна резолвента од U је јединствена, до на изоморфизам.

Доказ. (1) Следи из теореме 3.2.

(3) Следи из (2).

(2) Према теореми 2.6, постоје хомоморфизми $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ и $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ степена нула, као и хомотопија h тако да

$$\mathrm{id}_i - \varphi_i \phi_i = d_{i+1} h_i + h_{i-1} d_i : F_i \to F_i.$$

Нека је $f_1, \dots, f_t$ хомогена база за F_i, састављена од елемената чији степени се повећавају. Нека је $A = [a_{ij}]$ матрица пресликавања $\varphi_i \phi_i$ у тој бази, добијена као у леми 3.8. Матрица A има квадратне блокове на дијагонали чије компоненте су у k и нуле испод блокова на дијагонали. Матрица за $\mathrm{id}_i - \varphi_i \phi_i$ је $E - A$. Како је $\mathcal{F}$ минимална резолвента, важи

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_i - \varphi_i\phi_i) = \mathrm{Im}(d_{i+1}h_i + h_{i-1}d_i) \subseteq \mathrm{Im}(d_{i+1}) + h_{i-1}\mathrm{Im}(d_i) \subseteq$$

$$\subseteq \mathcal{M}F_i + h_{i-1}(\mathcal{M}F_{i-1}) \subseteq \mathcal{M}F_i + \mathcal{M}h_{i-1}(F_{i-1}) \subseteq \mathcal{M}F_i.$$

То значи да су компоненте матрице $E - A$ у $\mathcal{M}$. Важи $k \cap \mathcal{M} = \{0\}$. Следи да је $1 - a_{jj} = 0$, за свако j, па и $a_{jj} = 1$. Такође имамо да су у матрици A нуле испод дијагонале. Дакле, A је горње троугаона матрица и $\det(A) = \prod a_{jj} = 1$, што значи да је A инвертибилна, а самим тим, и пресликавање $\varphi\phi$ изоморфизам.

Нека је ξ инверзно пресликавање за $\varphi\phi$. Тада се $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\xi\varphi} \mathcal{F}$ цепа, јер је $(\xi\varphi)\phi = \mathrm{id}$. Нека је $\mathcal{T} = \mathrm{Ker}(\xi\varphi)$. Према леми 3.5 и како сва пресликавања можемо изабрати да буду степена нула, важи да је $\mathcal{G} = \phi(\mathcal{F}) \oplus \mathcal{T}$ као сума градуисаних модула.

Треба још доказати да је $\mathcal{G} = \phi(\mathcal{F}) \oplus \mathcal{T}$ директна сума ланчастих комплекса. Нека је d диференцијал на $\mathcal{F}$, а δ диференцијал на $\mathcal{G}$. Треба доказати да је δ ланчасто пресликавање на $\phi(\mathcal{F})$ и на $\mathcal{T}$. Пошто је ϕ пресликавање ланчастих комплекса, онда је $\delta\phi = \phi d$, па је $\delta(\phi(\mathcal{F})) \subseteq \phi(\mathcal{F})$. Доказаћемо да важи и $\delta(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$. Нека је $u \in T_{i+1} = \mathrm{Ker}(\xi_{i+1}\varphi_{i+1}) \subseteq G_{i+1}$, па је $\delta(u) \in G_i = \phi(F_i) \oplus T_i$. Дакле, постоји $f \in F_i$ и $v \in T_i$ тако да $\delta_{i+1}(u) = \phi(f) + v$. Важи да је

$$(\xi\varphi)\delta(u) = \xi\varphi(\phi(f) + v) = \xi\varphi(\phi(f)) = \mathrm{id}(f) = f,$$

а с друге стране је

$$(\xi\varphi)\delta(u) = \xi(\varphi\delta)(u) = \xi d\varphi(u) = d(\xi\varphi)(u) = d(0) = 0,$$

па је $\delta_{i+1}(u) = v$.

Дакле, $\mathcal{G} = \phi(\mathcal{F}) \oplus \mathcal{T}$ је директна сума ланчастих комплекса. Како је $\varphi\phi$ изоморфизам, то је ϕ инјекција, па и $\mathcal{G} \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{T}$. Доказаћемо да је $\mathcal{T}$ тривијални комплекс.

Пошто су $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ слободне резолвенте, онда су и тачни низови, па су им хомологије тривијалне. Самим тим, и $\mathcal{T}$ има тривијалну хомологију, па је тачан низ. Модул T_i је директни сабирак од G_i, који је слободан, па је према леми 3.6 и сам T_i слободан. Комплекс $\mathcal{T}$ је тачан градуисани комплекс слободних модула, па је према леми 3.7 тривијалан. $\square$

Теорема каже да градуисани коначно генерисани модул има минималну градуисану слободну резолвенту, која је јединствена до на изоморфизам. Кључна претпоставка која је довела до овог резултата је градација. Накајамина лема за градуисане модуле обезбеђује нам, кроз теорему 1.16, да сваки минимални систем хомогених генератора R-модула има исти број елемената, као и исти број елемената одређеног степена у сваком минималном систему. А као што је познато, минималну резолвенту добијамо бирајући минимални систем генератора у сваком кораку конструкције резолвенте.

Локални прстени задовољавају другу верзију Накајамине леме, и појам минималне резолвенте, као и теорија индукована тим, се може увести и у том случају. Наиме, ова два појма обједињује појам генералисаних локалних прстена, али о томе овде неће бити речи.

Један од неиспитаних проблема везаних за ову област је следећи: конструисати експлицитну минималну градуисану слободну резолвенту за неке класе градуисаних модула, при чему се под експлицитном резолвентом мисли на ону описану формулама, не алгоритмима.

Сем значајних нумеричких инваријанти о којима ће бити речи у следећем одељку, минимална резолвента описује структуру модула и на следећи начин: даје нам минимални систем генератора за полазни модул, затим минимални систем релација међу тим генераторима, затим минимални систем релација на структуру генерисану претходним релацијама и тако даље.

4 Бетијеви бројеви

У овом одељку биће уведени појмови Бетијевих бројева, пројективне димензије и Поенкареовог реда, који дају нумерички опис структуре модула.

Дефиниција 4.1. Нека је $\mathcal{F}$ минимална градуисана слободна резолвента коначно генерисаног R-модула U. За $i \geq 1$ подмодул

$$\mathrm{Im}(d_i) = \mathrm{Ker}(d_{i-1})$$

модула F_{i-1} назива се i-ти *модул сизигија* од U и означава се $\mathrm{Syz}_i^R(U)$. Његови елементи се називају *сизигије*.

Теорема 4.2. Нека је $\mathcal{F}$ минимална градуисана слободна резолвента R-модула U. Ако је $f_1, \ldots, f_s$ база од F_i, тада је $d_i(f_1), \ldots, d_i(f_s)$ минимални систем генератора за $\mathrm{Syz}_i^R(U)$.

Доказ. Како је $\mathrm{Syz}_i^R(U) = \mathrm{Im}(d_i)$, то за сваки елемент $g \in \mathrm{Syz}_i(U)$ постоји $h \in F_i$ тако да $d_i(h) = g$. За неке $r_j \in R$ је $h = \sum r_j f_j$, а тиме и $g = \sum r_j d_i(f_j)$, па $d_i(f_1), \ldots, d_i(f_s)$ јесте систем генератора. Како је $\mathcal{F}$ минимална резолвента, то је $d_i(F_i) \subseteq \mathcal{M}F_{i-1}$, па ни за једно j не може бити $d_i(f_j) = \sum_{p \neq j} l_p d_i(f_p)$, што значи да је систем $d_i(f_1), \ldots, d_i(f_s)$ минималан. $\square$

Дефиниција 4.3. Нека је $\mathcal{F}$ минимална градуисана слободна резолвента градуисаног коначно генерисаног R-модула U. *Бетијеви бројеви* од U над R су

$$b_i^R(U) = \operatorname{rang}(F_i).$$

Минималне градуисане слободне резолвенте модула U су изоморфне, па су рангови одговарајућих слободних модула различитих резолвенти исти, а самим тим и бројеви b_i^R не зависе од конкретне резолвенте.

Теорема 4.4. Бетијев број $b_i^R(U)$ је једнак броју минималних генератора за $\operatorname{Syz}_i^R(U)$ и такође је $b_i^R(U) = \dim_k(\operatorname{Tor}_i^R(U,k)) = \dim_k(\operatorname{Ext}_R^i(U,k))$.

Доказ. Први део следи из теореме 4.2.

Како је $F_i \otimes_R k = R^{b_i^R(U)} \otimes_R k \cong k^{b_i^R(U)}$, то је комплекс

$$\mathcal{F} \otimes_R k : \cdots \longrightarrow k^{b_i^R(U)} \longrightarrow k^{b_{i-1}^R(U)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow k^{b_1^R(U)} \longrightarrow k^{b_0^R(U)}.$$

Резолвента је минимална, па је $\operatorname{Im}(d) \subseteq \mathcal{M}\mathcal{F}$, а тиме је $d \otimes_R k = 0$, и пресликавања у комплексу $\mathcal{F} \otimes_R k$ су нула. Дакле, $\operatorname{Tor}_i^R(U,k) = H_i(\mathcal{F} \otimes_R k) = k^{b_i^R(U)}$.

Доказ за Ext ће бити прескочен. □

Дефиниција 4.5. *Дужина* градуисане слободне резолвенте $\mathcal{G}$ је

$$\max\{i \,|\, G_i \neq 0\}.$$

Ако је дужина резолвенте коначна, кажемо да је резолвента *коначна*, у супротном, кажемо да је *бесконачна*. *Пројективна димензија* од U је

$$\operatorname{pd}_R(U) = \max\{i \,|\, b_i^R(U) \neq 0\}.$$

Поенкареов ред за U над R је

$$\mathrm{P}_U^R(t) = \sum_{i \geq 0} b_i^R(U) t^i.$$

Пројективна димензија pd_R је заправо дужина минималне слободне резолвенте за U. Поенкареов ред и његове особине се обично изучавају када је слободна резолвента бесконачна.

Приметимо да дефиниција Бетијевих бројева није повезана са градацијом. Градуисани Бетијеви бројеви, који ће сада бити уведени, представљају прецизнију верзију ових инваријанти.

Дефиниција 4.6. *Градуисани Бетијеви бројеви* за U над R представљају број сабирака у F_i облика $R(-p)$, и означавамо их са $b_{i,p}^R(U)$. *Градуисан Поенкареов ред* за U над R је

$$\mathrm{P}_U^R(t,z) = \sum_{i \geq 0, p \in \mathbb{Z}} b_{i,p}^R(U) t^i z^p.$$

Приметимо да је $b_i^R(U) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} b_{i,p}^R(U)$. Сума је, наравно, коначна, јер су у питању слободни модули коначног ранга.

Може се доказати, као у теореми 4.4, да је $b_{i,p}^R(U) = \dim_k(\mathrm{Tor}_i^R(U,k)_p) = \dim_k(\mathrm{Ext}_R^i(U,k)_p)$.

Теорема 4.7. Ако је c минимални степен елемента у минималмном хомогеном систему генератора за U, онда је $b_{i,p}^R(U) = 0$, за $p < i + c$.

Доказ. Биће изведен индукцијом по i. Како U има систем хомогених генератора чији степени нису мањи од c, и како је $U \cong F_0/\mathrm{Im}(d_1)$ изоморфизам степена нула, то и F_0 има систем хомогених генератора чији степени нису мањи од c, па тврђење важи за $i = 0$.

Претпоставимо да важи за i, то јест да је $b_{i,p}^R(U) = 0$, за $p < i + c$. Докажимо да је $b_{i+1,p}^R(U) = 0$, за $p < i+1+c$. Елементи система хомогених генератора за F_i су степена не мањег од $i + c$. У питању је минимална резолвента, па је $\mathrm{Im}(d_{i+1}) \subseteq \mathcal{M}F_i$. Елементи у $\mathcal{M}$ су позитивних степена, па су елементи минималног система хомогених генератора за $\mathrm{Im}(d_{i+1})$ степена не мањег од $i + 1 + c$. Ако се сетимо да смо у конструкцији минималне резолвенте формирали $i + 1$-ви модул помоћу генератора за $\mathrm{Ker}(d_i) = \mathrm{Im}(d_{i+1})$, јасно је да и за F_{i+1} важи да је минимални систем хомогених генератора степена не мањег од $i + 1 + c$. □

Бетијеви бројеви се обично представљају у табелама облика:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
-1 & b_{0,-1} & b_{1,0} & b_{2,1} & \cdots \\
0 & b_{0,0} & b_{1,1} & b_{2,2} & \cdots \\
1 & b_{0,1} & b_{1,2} & b_{2,3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Прва врста садржи Бетијеве бројеве, прва колона ознаке врста, а у остатку табеле налазе се градуисани Бетијеви бројеви. Оваква табела се назива *Бетијев дијаграм.*

Приметимо да се у i-тој колони и j-тој врсти не налази $b_{i,j}$, већ $b_{i,j+i}$. Теорема 4.7 даје делимично објашњење за ову, наизглед необичну дефиницију. Наиме, доказали смо да ако је $b_{i,p}^R(U) = 0$, за $p < i + c$, тада је и $b_{i+1,p}^R(U) = 0$, за $p < i+1+c$. Ако i-та колона Бетијевог дијаграма има нуле изнад j-те врсте, тада, према теореми, и $(i + 1)$-ва колона такође има нуле изнад j-те врсте. На овај начин добијамо компактнији приказ Бетијевих бројева. Дефиниција регуларности ће дати додатно разјашњење.

Приметимо да се пројективна димензија може интерпретирати као дужина Бетијевог дијаграма.

Пример 4.8. Израчунајмо пројективну димензију, Бетијеве бројеве и Поенкареов ред за модул из примера 2.3.

Одабиром минималног система генератора у сваком кораку конструкције резолвенте за S/I над S, добили смо да је

$$0 \longrightarrow S(-4) \oplus S(-6) \longrightarrow S(-3) \oplus S(-2) \oplus S(-5) \longrightarrow S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0$$

минимална резолвента. Ако уведемо ознаке

$$F_0 = S,\ F_1 = S(-3) \oplus S(-2) \oplus S(-5),\ F_2 = S(-4) \oplus S(-6),$$

можемо приметити да је $\mathrm{pd}_R(S/I) = 2$. Бетијеви бројеви су

$$b_0 = 1,\ b_1 = 3,\ b_2 = 2,$$

а Поенкареов ред $\mathrm{P}^S_{S/I}(t) = 1 + 3t + 2t^2$. У градуисаном случају имамо

$$b_{0,0} = 1,\ b_{1,2} = 1,\ b_{1,3} = 1,\ b_{1,5} = 1,\ b_{2,4} = 1,\ b_{2,6} = 1$$

и

$$\mathrm{P}^S_{S/I}(t, z) = 1 + tz^2 + tz^3 + tz^5 + t^2z^4 + t^2z^6.$$

Бетијев дијаграм је:

	1	3	2
0	1	–	–
1	–	1	–
2	–	1	1
3	–	–	–
4	–	1	1

$\triangle$

5 Косулов комплекс

Појам Косуловог комплекса имаће значајну примену у теорији слободних резолвенти.

Нека су $f_1, \ldots, f_q \in R$, и E спољна алгебра над k са базним елементима $e_1, \ldots, e_q$, то јест

$$E = k\langle e_1, \ldots, e_q \rangle / (\{e_i^2 \,|\, 1 \le i \le q\}, \{e_ie_j + e_je_i \,|\, 1 \le i < j \le q\}).$$

Означимо са $\wedge$ множење у E. Формирајмо комплекс $\mathcal{K}(f)$ на следећи начин: нека је $K_0 = R$, $K_i = 0$, за $i > q$. За $0 \le i \le q$, нека је K_i слободни R-модул ранга $\binom{q}{i}$ са базом

$$\{e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \,|\, 1 \le j_1 < \cdots < j_i \le q\}.$$

Дефинишимо пресликавања $d_i : K_i \to K_{i-1}$ са

$$d_i(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}) = \sum_{1 \le p \le i} (-1)^{p+1} f_{j_p} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{j_p} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}.$$

Као и у другим сличним конструкцијама, јасно је $d_{i+1} \circ d_i = 0$.

Дефиниција 5.1. Конструисани ланчасти комплекс $\mathcal{K}(f)$ називамо *Косулов комплекс на елементима* $f_1, \ldots, f_q$ и означавамо га са

$$0 \longrightarrow K_q \longrightarrow \ldots \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0.$$

Ако ставимо $\deg(e_i) = 1$ и $\deg(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}) = i$, тада је $\mathcal{K}(f)$ и градуисани ланчасти комплекс.

Лема 5.2. Нека је $\bar{f} = \{f_1, \ldots, f_{q-1}\}$, $f_q \in R$ и f је низ $\bar{f}, f_q$. Постоји кратак тачан низ комплекса

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\bar{f}) \longrightarrow \mathcal{K}(f) \longrightarrow \mathcal{K}(\bar{f})[-1] \longrightarrow 0.$$

Доказ. Ознака $\mathcal{K}(\bar{f})[-1]$ представља хомолошки померен комплекс. Јасно је да је $\mathcal{K}(f)_i = \mathcal{K}(\bar{f})_i \oplus \mathcal{K}(\bar{f})_{i-1} \wedge e_q$. Прво пресликавање дефинишемо као инклузију, а друго као пројекцију. Тада низ јесте тачан. □

Дуги тачан низ у хомологији који се добија из овог кратког тачног низа је

$$\ldots \longrightarrow H_i(\mathcal{K}(\bar{f})) \longrightarrow H_i(\mathcal{K}(f)) \longrightarrow H_{i-1}(\mathcal{K}(\bar{f})) \xrightarrow{(-1)^{i+1} f_q} H_{i-1}(\mathcal{K}(\bar{f})) \longrightarrow \ldots,$$

што је последица цик-цак леме.

Дефиниција 5.3. Нека је W коначно генерисан R-модул и нека је R-модул $\mathcal{K}(f, W) = \mathcal{K}(f) \otimes_R W$. Хомологија овог комплекса се назива *Косулова хомологија* на W.

Став 5.4. Нека је W коначно генерисан R-модул. Тада важи да је $(f)H_i(\mathcal{K}(f, W)) = 0$, за све $i \ge 0$.

Доказ. Нека је f низ $f_1, \ldots, f_q$. Због ознака је најлакше доказати да је $f_q H_i(\mathcal{K}(f, W)) = 0$, мада је доказ исти за све f_i. Према леми 5.2, елемент у $\mathcal{K}(f, W)_i$ је облика $c \wedge e_q + a$, где је $a \in \mathcal{K}(\bar{f}, W)_i$, а $c \wedge e_q \in \mathcal{K}(\bar{f}, W)_{i-1} \wedge e_q$. Претпоставимо да је $c \wedge e_q + a$ цикл. Према дефиницији диференцијала у Косуловом комплексу важи

$$0 = d(c \wedge e_q + a) = d(c) \wedge e_q + (-1)^{i+1} f_q c + d(a).$$

Како e_q није елемент $\mathcal{K}(\bar{f}, W)$, а $(-1)^{i+1} f_q c + d(a)$ јесте, никако не може доћи до скраћивања у претходном изразу, па мора бити $d(c) = 0$ и $d(a) = (-1)^i f_q c$. Даље, како је

$$d((-1)^i a \wedge e_q) = (-1)^i \big(d(a) \wedge e_q + (-1)^{i+2} f_q a\big) =$$

$$= (-1)^i\big((-1)^i f_q c \wedge e_q + (-1)^i f_q a\big) = f_q(c \wedge e_q + a),$$

поменути елемент је у слици. Дакле, доказали смо да је умножак сваког цикла елементом f_q граница, а то управо значи да је $f_q H_i(\mathcal{K}(f, W)) = 0.\square$

Дефиниција 5.5. Нека је U коначно генерисани R-модул. Кажемо да елемент $r \in R \setminus k$ *није делитељ нуле* или да је U-регуларан, ако је $ru \neq 0$ за сваки $u \in U \setminus \{0\}$. Кажемо да је низ елемената $f_1, \dots, f_q \in R$ *U-регуларан*, ако је $(f_1, \dots, f_q)U \neq U$ и за свако $1 \leq i \leq q$ f_i није делитељ нуле у модулу $U/(f_1, \dots, f_{i-1})U$.

Теорема 5.6. Нека је W коначно генерисан градуисани R-модул и $f = \{f_1, \dots, f_q\} \in R$ низ хомогених елемената чији степени су позитивни. Следећи услови су еквивалентни:
(1) f је W-регуларан низ.
(2) $H_i(\mathcal{K}(f, W)) = 0$, за $i > 0$ и $H_0(\mathcal{K}(f, W)) = W/(f)W$.
(3) $H_1(\mathcal{K}(f, W)) = 0$.

Доказ. Докажимо импликацију (1) $\Rightarrow$ (2). Важи $H_0(\mathcal{K}(f, W)) = W/(f)W$. Користићемо индукцију по q. За $q = 1$ је

$$\mathcal{K}(f_1) : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{f_1} R \longrightarrow 0,$$

па и

$$\mathcal{K}(f_1, W) : 0 \longrightarrow W \xrightarrow{f_1} W \longrightarrow 0,$$

јер је $W \cong R \otimes_R W$. Пошто је f W-регуларан, онда је $\{m \in W \mid f_1 m = 0\} = \{0\}$, а тиме и $H_1(\mathcal{K}(f_1, W)) = 0$.

Претпоставимо да тврђење важи за $q-1$, то јест за низ $\bar{f} = \{f_1, \dots, f_{q-1}\}$. Као у леми 5.2, постоји кратак тачан низ

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\bar{f}) \longrightarrow \mathcal{K}(f) \longrightarrow \mathcal{K}(\bar{f})[-1] \longrightarrow 0,$$

а тиме и дуги тачан низ у хомологији

$$H_1(\mathcal{K}(\bar{f}, W)) \longrightarrow H_1(\mathcal{K}(f, W)) \longrightarrow H_0(\mathcal{K}(\bar{f}, W)) \xrightarrow{f_q} H_0(\mathcal{K}(\bar{f}, W)).$$

Користили смо да је $H_0(\mathcal{K}(\bar{f}, W)) = H_1(\mathcal{K}(\bar{f}, W)[-1])$. Према индуктивној претпоставци добијамо

$$0 \longrightarrow H_1(\mathcal{K}(f, W)) \longrightarrow W/(\bar{f})W \xrightarrow{f_q} W/(\bar{f})W.$$

Како је f_q регуларан елемент, језгро последњег пресликавања је тривијално, па је $H_1(\mathcal{K}(f, W)) \longrightarrow W/(\bar{f})W$ нула пресликавање. То значи да је хомологија $H_1(\mathcal{K}(f, W)) = 0$. За $i > 1$, имамо тачан низ

$$H_i(\mathcal{K}(\bar{f}, W)) \longrightarrow H_i(\mathcal{K}(f, W)) \longrightarrow H_i(\mathcal{K}(\bar{f}, W)),$$

што је према индуктивној претпоставци $0 \longrightarrow H_i(\mathcal{K}(f, W)) \longrightarrow 0$, па је $H_i(\mathcal{K}(f, W)) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) је очигледно.

Импликацију (3) $\Rightarrow$ (1) доказаћемо индукцијом по q. Прво, претпоставимо да је $W/(f)W = 0$. Степени елемената из f су позитивни, па је (f) прави идеал. Модул W је коначно генерисан и градуисан, па је према Накајаминој леми $W = 0$. То је контрадикција, па мора бити $W/(f)W \neq 0$.

За $q = 1$: $H_1(\mathcal{K}(f_1, W)) = 0$ у низу

$$\mathcal{K}(f_1, W) : 0 \longrightarrow W \xrightarrow{f_1} W \longrightarrow 0.$$

$\mathrm{Ker} f_1 = 0$, па је f_1 регуларан.

Претпоставимо да је тврђење тачно за $q-1$. Треба доказати импликацију $H_1(\mathcal{K}(f, W)) = 0 \Rightarrow f$ је W-регуларан. Као и малопре, низ

$$H_1(\mathcal{K}(\bar{f}, W)) \xrightarrow{f_q} H_1(\mathcal{K}(\bar{f}, W)) \longrightarrow H_1(\mathcal{K}(f, W)) = 0$$

је тачан. Дакле, $H_1(\mathcal{K}(\bar{f}, W)) = (f_q)H_1(\mathcal{K}(\bar{f}, W))$, и добијамо $H_1(\mathcal{K}(\bar{f}, W)) = 0$ применом Накајамине леме. Према индуктивној претпоставци $\bar{f} = \{f_1, \ldots, f_{q-1}\}$ је W-регуларан низ. Тачан је низ

$$H_1(\mathcal{K}(f, W)) \longrightarrow H_0(\mathcal{K}(\bar{f}, W)) \xrightarrow{f_q} H_0(\mathcal{K}(\bar{f}, W)),$$

а то је даље $0 \longrightarrow W/(\bar{f})W \xrightarrow{f_q} W/(\bar{f})W$, што значи да је језгро последњег пресликавања тривијално, па је f_q регуларан елемент у $W/(\bar{f})W$. $\square$

Једна од битнијих примена Косуловог комплекса у теорији слободних резолвенти је одређивање резолвенте поља k. Наиме, поље k над којим посматрамо прстен полинома S можемо посматрати као S-модул:
$k \cong S/(x_1, \ldots, x_n)$. Очигледно је $(x_1, \ldots, x_n)$ S-регуларан низ. Задовољен је услов (1) теореме 5.6, па је према услову (2) исте теореме у ланчастом комплексу

$$\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_n) : 0 \longrightarrow K_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_0$$

$H_i(\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_n)) = 0$, за $i > 0$ и $H_0(\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_n)) = S/(x_1, \ldots, x_n)S$. То значи да је претходни низ тачан и да је

$$K_0/\mathrm{Im}(d_1) = H_0(\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_n)) = S/(x_1, \ldots, x_n) = k.$$

Како су наведени S-модули градуисани и слободни, задовољени су сви услови да $\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_n)$ буде градуисана слободна резолвента за k. Ако се сетимо како су дефинисани диференцијали у Косуловом комплексу, јасно је да су компоненте у диференцијалним матрицама елементи идеала $(x_1, \ldots, x_n)$, па је резолвента и минимална. Дакле, минимална градуисана слободна резолвента за k над S је

$$\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_n) : 0 \longrightarrow K_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_0,$$

са слободним S-модулима K_i ранга $\binom{n}{i}$. Тако да су Бетијеви бројеви $b_i^S(k) = \binom{n}{i}$, а пројективна димензија је $\mathrm{pd}_S(k) = n$.

Теорема 5.7. Нека је V градуисани коначно генерисани S-модул, а $\mathcal{K}$ ознака за минималну градуисану слободну резолвенту S-модула k. Важи да је $b_{i,p}^S(V) = \dim_k H_i(\mathcal{K} \otimes V)_p$, за $p \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}$.

Доказ. Знамо да је $b_{i,p}^S(V) = \dim_k(\mathrm{Tor}_i^S(V,k)_p)$, а према дефиницији Tor функтора $\mathrm{Tor}_i^S(k,V) = H_i(\mathcal{K} \otimes V)$. Како је $\mathrm{Tor}_*^S(W,V) \cong \mathrm{Tor}_*^S(V,W)$ за било која два S-модула, тада је $\dim_k(H_i(\mathcal{K} \otimes V)_p) = \dim_k(\mathrm{Tor}_i^S(V,k)_p)$. $\square$

Актуелно је питање одређивања граница за Бетијеве бројеве S-модула. Како су за све S-модуле бројеви $b_i^S(k)$, одређени уз помоћ Косуловог комплекса, исти, претпоставља се да управо ти бројеви учествују у проценама за Бетијеве бројеве разних S-модула.

Хипотеза 5.8. Ако је V Артинов градуисани коначно генерисани S-модул, тада је $b_i^S(V) \geq b_i^S(k)$, за $i \geq 0$.

У случају S-модула S/M, где је M идеал генерисан мономима, тврђење важи. Постоји и општија претпоставка:

Хипотеза 5.9. Ако је V Артинов градуисани коначно генерисани R-модул, тада је $b_i^R(V) \geq b_i^R(k)$, за $i \geq 0$.

6 Коначна пројективна димензија

До сада је изложено све што је неопходно за представљање следећих важних резултата.

Теорема 6.1. Нека је V градуисани коначно генерисани R-модул. Тада је $\mathrm{pd}_R(V) \leq \mathrm{pd}_R(k)$.

Доказ. Нека је $\mathcal{F}$ минимална градуисана слободна резолвента за k над R. Према теореми 4.4 је $b_i^R(V) = \dim_k(\mathrm{Tor}_i^R(V,k)) = \dim_k H_i(\mathcal{F} \otimes V)$. За $i > \mathrm{pd}_R(k)$, $F_i = 0$, па је и одговарајућа хомологија 0. $\square$

Теорема 6.2. (Хилбертова теорема о сизигијама) Минимална градуисана слободна резолвента градуисаног коначно генерисаног S-модула је коначна, са дужином не већом од n.

Доказ. Како је $\mathrm{pd}_S(k) = n$, резултат следи из теореме 6.1. $\square$

Теорема је позната и у следећем облику: постоји градуисана слободна резолвента градуисаног коначно генерисаног S-модула, чија дужина је не већа од n. Теорема нам даје ограничење за број корака у конструкцији минималне слободне резолвенте и каже до које дужине највише су сизигије, то јест релације међу генераторима, нетривијалне. Одатле и њен назив. Следећа теорема даје и прецизнији резултат.

Теорема 6.3. **(Ауслендер[12]-Бухсбаумова[13] формула)** Нека је V градуисани коначно генерисани S-модул. Тада је $\mathrm{pd}_S(V) = n - \mathrm{depth}(V)$.

Доказ. Извешћемо доказ индукцијом по $j = \mathrm{depth}(V)$. Дубина S-модула V, у ознаци $\mathrm{depth}(V)$, је максимална дужина V-регуларног низа, који је садржан у $\mathcal{M}$.

Нека је $j = 0$. Како V нема регуларних елемената, постоји $u \in V \setminus \{0\}$ тако да је $\mathcal{M} \cdot u = 0$. Такође, елемент $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \otimes u$ се при диференцијалу d_n слика у нулу, па је $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \otimes u \in H_n(\mathcal{K} \otimes V)$. Према претходном, $\mathrm{pd}_S(V) = \max\{i \mid H_i(\mathcal{K} \otimes V) \neq 0\}$, где је $\mathcal{K}$ Косулова резолвента за k. Дакле, мора бити $\mathrm{pd}_S(V) = n$.

Претпоставимо да тврђење важи за све модуле W за које $\mathrm{depth}(W) < j$. Нека је V модул тако да $\mathrm{depth}(V) = j$. Нека је $r \in \mathcal{M}$ V-регуларан елемент, и $W = V/(r)V$. Очигледно је тачан низ

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{r} V \longrightarrow W \longrightarrow 0,$$

а из особина Tor функтора следи да постоји дуги тачан низ

$$\ldots \longrightarrow H_{i+1}(\mathcal{K} \otimes W) \longrightarrow H_i(\mathcal{K} \otimes V) \xrightarrow{r} H_i(\mathcal{K} \otimes V) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_i(\mathcal{K} \otimes W) \longrightarrow H_{i-1}(\mathcal{K} \otimes V) \xrightarrow{r} \ldots.$$

Према ставу 5.4 $r \cdot H_i(\mathcal{K} \otimes V) = 0$, за $i \geq 0$. Дакле, имамо кратак тачан низ

$$0 \longrightarrow H_i(\mathcal{K} \otimes V) \longrightarrow H_i(\mathcal{K} \otimes W) \longrightarrow H_{i-1}(\mathcal{K} \otimes V) \xrightarrow{r} 0.$$

Следи да је

$$\max\{i \mid H_i(\mathcal{K} \otimes W) \neq 0\} = 1 + \max\{i \mid H_i(\mathcal{K} \otimes V) \neq 0\}.$$

Дакле, $\mathrm{pd}_S(W) = \mathrm{pd}_S(V) + 1$, и пошто је $\mathrm{depth}(W) = \mathrm{depth}(V) - 1$, следи да је

$$\mathrm{pd}_S(V) = \mathrm{pd}_S(W) - 1 = n - \mathrm{depth}(W) - 1 = n - \mathrm{depth}(V).$$

□

Последица 6.4. Нека је V градуисани коначно генерисани S-модул. Тада је $\mathrm{pd}_S(V) \geq \mathrm{codim}(V)$. Ако је V Артинов, онда је $\mathrm{pd}_S(V) = n$.

Доказ. Димензија модула V је димензија прстена $S/\mathrm{ann}V$, што је супремум дужина ланаца простих идеала у $S/\mathrm{ann}V$. Може се доказати да је $\mathrm{depth}(V) \leq \dim(V)$, па је према претходном

$$\mathrm{pd}_S(V) = n - \mathrm{depth}(V) \geq n - \dim(V) = \mathrm{codim}(V).$$

Ако је V Артинов, онда је $\dim(V) = 0$, па добијамо да је $\mathrm{pd}_S(V) \geq n$, а како обрнута неједнакост важи увек, имамо и доказ другог дела тврђења. □

[12]Maurice Auslander (1926-1994), амерички математичар

[13]David Alvin Buchsbaum, амерички математичар

Под пројективном димензијом идеала I у S мисли се на пројективну димензију од S/I над S. Проналажење граница за пројективну димензију неких класа идеала је један од отворених проблема у овој области. Познат је и следећи проблем.

Проблем 6.5. Нека је $\mathrm{char}(k) = 0$ и нека су дати $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{N}$. Да ли постоји број p тако да $\mathrm{pd}_S(S/J) \leq p$, где је J градуисани идеал са минималним системом хомогених генератора чији степени су $a_1, \ldots, a_s$, а број променљивих у S није фиксиран?

Ако степени генератора нису фиксни, следећа теорема указује да нема горње границе за пројективну димензију.

Теорема 6.6. Пројективна димензија градуисаног идеала генерисаног са три елемента може бити произвољно велика.

Наредна теорема потпуно одговара на питање какав треба да буде прстен R, па да сваки градуисани коначно генерисани модул над њим има коначну пројективну димензију.

Серова[14] теорема 6.7. Следећа тврђења су еквивалентна:
(1) Сваки градуисани коначно генерисани R-модул има коначну пројективну димензију.
(2) $\mathrm{pd}_R(k) < \infty$.
(3) $R = S/I$, где је I идеал генерисан линеарним формама.

7 Хилбертова функција

Став 7.1. Ако је $0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow W \longrightarrow 0$ кратак тачан низ градуисаних коначно генерисаних R-модула и хомоморфизама степена нула, тада је $\mathrm{Hilb}_N(t) = \mathrm{Hilb}_K(t) + \mathrm{Hilb}_W(t)$.

Доказ. Како су хомоморфизми степена нула, имамо кратак тачан низ k-векторских простора $0 \longrightarrow K_i \longrightarrow N_i \longrightarrow W_i \longrightarrow 0$ за свако i, па је $\dim_k(N_q) = \dim_k(K_q) + \dim_k(W_q)$. □

Теорема 7.2. Нека је $\mathcal{F}$ градуисана слободна резолвента коначно генерисаног R-модула U, тако да $F_i = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} R(-p)^{c_{i,p}}$. Нека за свако p важи $c_{i,p} = 0$ за $i \gg 0$. Тада је

$$\mathrm{Hilb}_U(t) = \mathrm{Hilb}_R(t) \sum_{i\geq 0} \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^i c_{i,p} t^p.$$

[14] Jean-Pierre Serre, француски математичар

Ако је $R = S$, онда је

$$\mathrm{Hilb}_U(t) = \frac{\sum_{i\geq 0}\sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^i c_{i,p}t^p}{(1-t)^n}.$$

Доказ. Како је сваки F_i градуисан, важи $F_i = \oplus_j F_{i,j}$. Низ k-векторских простора

$$0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_{i,j} \longrightarrow F_{i-1,j} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_{0,j} \longrightarrow U_j \longrightarrow 0$$

је тачан, и за $i \gg 0$ важи $F_{i,j} = 0$. То значи да је сума у изразу за димензију модула $\dim_k(U_j) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_k(F_{i,j})$ коначна, па је

$$\mathrm{Hilb}_U(t) = \sum_j \dim_k(U_j)t^j = \sum_j \big(\sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_k(F_{i,j})t^j\big) =$$

$$= \sum_{i\geq 0}(-1)^i\big(\sum_j \dim_k(F_{i,j})t^j\big) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \mathrm{Hilb}_{F_i}(t).$$

Како је

$$\mathrm{Hilb}_{F_i}(t) = \sum_p c_{i,p}\mathrm{Hilb}_{R(-p)}(t) = \sum_p c_{i,p}t^p \mathrm{Hilb}_R(t) = \mathrm{Hilb}_R(t)\sum_p c_{i,p}t^p,$$

добијамо

$$\mathrm{Hilb}_U(t) = \mathrm{Hilb}_R(t)\sum_{i\geq 0}\sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^i c_{i,p}t^p.$$

Важи да је $\mathrm{Hilb}_S(t) = \frac{1}{(1-t)^n}$, па ако је $R = S$, директно се добија тврђење другог дела теореме. $\square$

Два важна случаја када је теорема задовољена су:
1) Резолвента је коначна. Тада се претходни доказ може извести индукцијом по дужини резолвенте.
2) Резолвента је минимална. Тада су $c_{i,p}$ Бетијеви бројеви и може се применити теорема 4.7.

Последица 7.3. Нека је V градуисани коначно генерисани S-модул. Тада постоји полином $g(i) \in \mathbb{Q}[i]$ степена строго мањег од n, тако да $g(j) = \dim_k(V_j)$, за $j \gg 0$.

Доказ. Минимална резолвента за V је коначна према Хилбертовој теореми 6.2, па је сума у бројиоцу у изразу за Хилбертов ред из теореме 7.2 коначна. То значи да је Хилбертов ред облика $\mathrm{Hilb}_V(t) = \frac{w(t)}{(1-t)^n}$, где је $w(t) = w_0 + w_1 t + w_2 t^2 + \cdots w_k t^k$ полином. Ако развијемо израз $\frac{1}{(1-t)^n}$, добијамо да је коефицијент уз t^i једнак

$$\binom{n-1+i}{i} = \frac{(i+n-1)(i+n-2)\cdots(i+1)i!}{i!(n-1)!} = \frac{(i+n-1)(i+n-2)\cdots(i+1)}{(n-1)!}.$$

Претпоставимо, записа ради, да полином $w(t)$ није дељив са $1-t$. Детаљније објашњење се може наћи у доказу теореме 7.9. Тада је Хилбертов ред

$$\mathrm{Hilb}_V(t) =$$

$$(w_0+w_1t+w_2t^2+\cdots w_kt^k)\cdot\left(1+\binom{n-1+1}{1}t+\binom{n-1+2}{2}t^2+\binom{n-1+3}{3}t^3+\cdots\right).$$

Видимо да за неко $j \gg 0$ важи да за свако $i \geq j$ израз уз t^i, што је $\dim_k(V_i)$, може бити представљен формулом која зависи од константи n и w_s и од самог коефицијента i. Тако да постоји полином по i који задовољава тражене услове и може се записати као сума призвода коефицијената w_s и наведених биномних коефицијената. Због израза $(n-1)!$ у развоју полином је са коефицијентима у $\mathbb{Q}$, а како у бројиоцу истог биномног развоја има највише $n-1$ множилаца који зависе од i, полином је степена не већег од $n-1$. □

Дефиниција 7.4. Полином g из последице 7.3 назива се *Хилбертов полином.*

Важност Хилбертовог полинома је у чињеници да се бесконачно много података, колико их носи Хилбертов ред, може представити преко коначно много вредности.

Пример 7.5. Нека су ознаке као у примеру 2.3. Можемо одредити Хилбертов ред за S/I над S и на други начин, помоћу теореме 7.2. Како су, према примеру 4.8, градуисани Бетијеви бројеви

$$b_{0,0}=1,\ b_{1,2}=1,\ b_{1,3}=1,\ b_{1,5}=1,\ b_{2,4}=1,\ b_{2,6}=1,$$

то је

$$\mathrm{Hilb}_{S/I}(t) = \frac{1-(t^2+t^3+t^5)+(t^4+t^6)}{(1-t)^2} = 1+2t+2t^2+t^3+t^4.$$

Хилбертов полином је нула полином. △

Следећа теорема ће нам бити важна за друге резултате и биће наведена без доказа.

Теорема 7.6. Нека је V градуисани коначно генерисани S-модул. Његов Хилбертов полином полином је степена $\dim(V)-1$.

Дефиниција 7.7. Нека је V градуисан коначно генерисани S-модул. Полином

$$\mathrm{E}_V(t) = \sum_{i\geq 0}\sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^i b_{i,p}^S t^p$$

се назива *Ојлеров полином* модула V. Број

$$\mathrm{E}_V(1) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i b_i^S(V)$$

назива се *Ојлерова карактеристика* модула V.

Како су модули у минималној резолвенти за V слободни коначног ранга, сума по p у изразу за Ојлеров полином је увек коначна. С друге стране, и сума по i је коначна, јер V има коначну минималну резолвенту, према теореми 6.2. Тако да је Ојлеров полином добро дефинисан, са коефицијентима у $\mathbb{Z}$.

Приметимо да смо могли да дефинишемо Ојлеров полином и преко резолвенте која није минимална. Наиме, нека је $\mathcal{F}$ фиксирана коначна слободна градуисана резолвента за V, и нека су $c_{i,p}$ као у теореми 7.2. Већ смо напоменули да се од сваке резолвенте може добити минимална уклањањем кратких тривијалних комплекса, па ако дефинишемо Ојлеров полином резолвенте $\mathcal{F}$ као $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}(t) = \sum_{i \geq 0} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^i c_{i,p} t^p$, тада је $\mathrm{E}_{\mathcal{F}} = \mathrm{E}_V$, јер се у алтернирајућој суми за $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}$ скрате они коефицијенти који одговарају кратким тривијалним комплексима. Дакле, Ојлеров полином можемо израчунати из било које слободне градуисане резолвенте чија дужина је коначна.

Исто важи за Ојлерову карактеристику. Ако је $c_i = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_{i,p}$ ранг слободног модула у коначној резолвенти $\mathcal{F}$, тада је $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}(1) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i = \mathrm{E}_V(1)$.

Важи да је $\mathrm{Hilb}_V(t) = \frac{\mathrm{E}_V(t)}{(1-t)^n}$. Нека је $h(t) = \frac{\mathrm{E}_V(t)}{(1-t)^q}$, где је q максимални степен тако да $(1-t)^q$ дели $\mathrm{E}_V(t)$. Тада је $h(1) \neq 0$.

Дефиниција 7.8. Број $h(1)$ се назива *вишеструкост* модула V и означава са $\mathrm{mult}(V)$.

Теорема 7.9. Нека је V градуисани коначно генерисани S-модул. Ако је V Артинов, онда је $\mathrm{Hilb}_V(t) = h(t)$ и $h(1)$ је његова дужина. Ако V није Артинов, тада је:
(1)

$$\mathrm{Hilb}_V(t) = \frac{h(t)}{(1-t)^{\dim(V)}}.$$

(2) Водећи коефицијент Хилбертовог полинома $g(i)$ је

$$\frac{h(1)}{(\dim(V) - 1)!}.$$

(3) Ако је $h(t) = h_r t^r + \cdots + h_1 t + h_0$, тада је

$$g(i) = \sum_{0 \leq j \leq r} h_j \binom{\dim(V) - 1 + i - j}{\dim(V) - 1}.$$

(4) За $i \geq \deg(h(t))$ важи $\dim_k(V_i) = g(i)$.

Доказ. Важи да је $\mathrm{Hilb}_V(t) = \frac{h(t)}{(1-t)^s}$, за $s = n - q$ у претходним ознакама. Претпоставимо прво да V није Артинов. Тада је $\dim(V) \neq 0$. Ако би било $s = 0$, онда би Хилбертова функција била полином, а тиме би Хилбертов полином био нула полином. Због теореме 7.6, то је немогуће, па мора бити $s \geq 1$. Нека је $h(t) = h_r t^r + \cdots + h_1 + h_0$. Тада је

$$\mathrm{Hilb}_V(t) = h(t) \sum_{i \geq 0} \binom{s-1+i}{s-1} t^i =$$

$$= \sum_{i \geq 0} \left(h_r \binom{s-1+i}{s-1} + h_{r-1} \binom{s-1+i+1}{s-1} + \cdots + h_0 \binom{s-1+i+r}{s-1} \right) t^{i+r} + A,$$

где је A сума сабирака са степенима мањим од r. Хилбертов полином је

$$g(i+r) = h_r \binom{s-1+i}{s-1} + h_{r-1} \binom{s-1+i+1}{s-1} + \cdots + h_0 \binom{s-1+i+r}{s-1}.$$

Приметимо да је овде i променљива, а r константа. Дакле,

$$g(i) = \sum_{0 \leq j \leq r} h_j \binom{s-1+i-j}{s-1},$$

и степена је $s-1$, па имамо (4). Према теореми 7.6, важи да је $s - 1 = \dim(V) - 1$, па је $s = \dim(V)$. Дакле, доказано је (1) и (3). Водећи коефицијент за $g(i)$ је $(h_r + \cdots + h_0)\frac{1}{(s-1)!} = \frac{h(1)}{(\dim(V)-1)!}$, одакле следи (2).

Ако претпоставимо да V јесте Артинов, онда је $\dim(V) = 0$, па је Хилбертов полином нула полином. Последица је да је Хилбертова функција полином, па је $s = 0$ и $\mathrm{Hilb}_V(t) = h(t)$. Сада је $h(1) = \mathrm{Hilb}_V(1) = \sum_{i \geq 0} \dim_k(V_i)$, за шта се, уз помоћ теорије коју нећемо наводити, може доказати да је дужина од V. $\square$

Последица 7.10. Нека је V градуисани коначно генерисани S-модул. Ако је $\dim(V) \neq n$, онда је његова Ојлерова карактеристика 0.

Доказ. Како је $\mathrm{Hilb}_V(t) = \frac{\mathrm{E}_V(t)}{(1-t)^n}$ и $\dim(V) \neq n$, према теореми 7.9(1) $1-t$ дели $\mathrm{E}_V(t)$. Дакле, Ојлерова карактеристика $\mathrm{E}_V(1)$ је једнака нули. $\square$

Претпоставимо да су нам дати градуисани Бетијеви бројеви за S-модул V. Тада можемо да израчунамо и следеће инваријанте:

1. Хилбертов ред за V (на основу теореме 7.2), а тиме и Ојлеров полином, Ојлерову карактеристику и вишеструкост за V.
2. Димензију за V (на основу теореме 7.9(1))
3. Хилбертов полином за V (на основу теореме 7.9(3))

Градуисани Бетијеви бројеви нам потпуно омогућавају одређивање многих инваријанти модула, иако смо их дефинисали независно једни од других.

8 Чисте резолвенте

Као што ће се видети у наредној дефиницији, чисте резолвенте су једноставног облика. Та чињеница је дала мотивацију идеји да се било који Бетијев дијаграм може добити комбинацијом Бетијевих дијаграма чистих резолвенти. Доказано је да је сваки Бетијев дијаграм градуисаног коначно генерисаног S-модула линеарна комбинација Бетијевих дијаграма градуисаних коначно генерисаних модула са чистим резолвентама, при чему су коефицијенти позитивни рационални бројеви.

Дефиниција 8.1. Кажемо да је градуисана слободна резолвента $\mathcal{F}$ градуисаног коначно генерисаног R-модула *чиста*, ако је облика

$$\ldots \longrightarrow R(-p_i)^{c_{i,p_i}} \xrightarrow{d_i} R(-p_{i-1})^{c_{i-1,p_{i-1}}} \longrightarrow \ldots .$$

Кажемо да је q-*линеарна*, ако је $p_i = q + i$ за свако i, то јест

$$\ldots \longrightarrow R(-q-i)^{c_{i,q+i}} \longrightarrow R(-q-i+1)^{c_{i-1,q+i-1}} \longrightarrow \ldots$$

$$\longrightarrow R(-q-1)^{c_{1,q+1}} \longrightarrow R(-q)^{c_{0,q}}.$$

Ако је $q = 0$, кажемо да је $\mathcal{F}$ *линеарна*:

$$\ldots \longrightarrow R(-i)^{c_{i,i}} \longrightarrow R(-i+1)^{c_{i-1,i-1}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow R(-1)^{c_{1,1}} \longrightarrow R(0)^{c_{0,0}}.$$

Може се рећи да је чиста резолвента она код које су све диференцијалне матрице са компонентама истог степена, а у случају линеарних резолвенти, компоненте матрице су линеарне форме.

Дефиниција 8.2. Прстен R је *Косулов*, ако R-модул k има линеарну резолвенту.

Следећи став представља само практичнију верзију дефиниције 8.1.

Став 8.3. Нека је $\mathcal{F}$ градуисана слободна резолвента коначно генерисаног градуисаног R-модула U.
(1) $\mathcal{F}$ је чиста ако и само ако за свако i постоји број p_i тако да $c_{i,r} = 0$ за $r \neq p_i$.
(2) $\mathcal{F}$ је q-линеарна ако и само ако за свако i важи $c_{i,r} = 0$ за $r \neq q + i$.
(3) $\mathcal{F}$ је линеарна ако и само ако за свако i важи $c_{i,r} = 0$ за $r \neq i$. □

Последица 8.4. Ако постоји чиста, q-линеарна или линеарна градуисана слободна резолвента за U, тада је и минимална градуисана слободна резолвента за U чиста, q-линеарна или линеарна.

Доказ. Према теореми 3.9(2), важи да је $b^R_{i,r}(U) \leq c_{i,r}$, за свако i, r. Дакле, градуисани Бетијеви бројеви задовољавају услове става. □

Видели смо у претходном одељку да, ако знамо Бетијеве бројеве, можемо одредити и Хилбертов ред. Обрнуто не важи у општем случају, али ипак имамо неки резултат.

Став 8.5. Ако коначно генерисан градуисан R-модул U има q-линеарну минималну слободну резолвенту, тада су градуисани Бетијеви бројеви од U одређени Хилбертовим редом.

Доказ. Према теореми 7.2 важи

$$\mathrm{Hilb}_U(t) = \mathrm{Hilb}_R(t) \sum_{i \geq 0} (-1)^i b^R_{i,i+q}(U) t^{i+q}.$$

Како је R коначно генерисани модул над S, из теореме 7.2 следи да је Хилбертов ред тог модула облика $\mathrm{Hilb}_R(t) = \frac{w(t)}{(1-t)^n}$, за неки полином $w(t)$. Претпоставимо да су нам познати $\mathrm{Hilb}_U(t)$ и $\mathrm{Hilb}_R(t)$. Тада имамо израз

$$(1-t)^n \mathrm{Hilb}_U(t) = w(t) \sum_{i \geq 0} (-1)^i b^R_{i,i+q}(U) t^{i+q}.$$

Број $b^R_{i,i+q}$ је одређен са $\mathrm{Hilb}_U(t)$,$w(t)$ и бројевима $\{b^R_{j,j+q} \mid j < i\}$. Индукцијом по i се може показати да је могуће одредити све Бетијеве бројеве.$\square$

Наредна теорема представља још једну занимљиву везу између инваријанти S-модула.

Теорема 8.6. Нека је V градуисани коначно генерисани S-модул чији генератори су у степену 0. Нека је $t_i = \min\{p \mid c_{i,p} \neq 0\}$, $T_i = \max\{p \mid c_{i,p} \neq 0\}$, $q = \mathrm{codim}(V)$ и $r = \mathrm{pd}(V)$. Тада важи

$$b^S_0(V) \frac{\prod_{i=1}^r t_i}{r!} \leq \mathrm{mult}(V) \leq b^S_0(V) \frac{\prod_{i=1}^q T_i}{q!}.$$

Дефиниција 8.7. Нека је $q = \min(U)$ минимални степен елемента у минималном хомогеном систему генератора за U. Подкомплекс

$$L(\mathcal{F}) : \ldots \longrightarrow R(-q-i)^{b_{i,q+i}} \longrightarrow R(-q-i+1)^{b_{i-1,q+i-1}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow R(-q)^{b_{0,q}}$$

минималне градуисане слободне резолвенте назива се *линеарни штранд* за U. *Дужина линеарног штранда* је $\max\{i \mid b^R_{i,i+q}(U) \neq 0\}$.

Линеарни штранд је још једна значајна инваријанта модула R-модула U, и актуелно питање је како је дужина линеарног штранда повезана са осталим инваријантама модула U.

9 Регуларност

Дефиниција 9.1. *Кастелнуово*[15]*-Мамфорд*[16] *регуларност* градуисаног коначно генерисаног R-модула U је

$$\operatorname{reg}_R(U) = \max\{j \mid b^R_{i,i+j}(U) \neq 0 \text{ за неко } i\}.$$

Приметимо да ако је модул U слободан коначног ранга, $\operatorname{reg}(U)$ је максимум степена хомогених минималних генератора за U. Овде је дата дефиниција за коначно генерисане модуле, а ако ранг није коначан, у претходном објашњењу бисмо користили супремум. Како бисмо хтели да знамо степене у којима се Бетијеви бројеви налазе, а то су прецизне информације до којих је тешко доћи, регуларност је значајна, јер нам даје горњу границу за степене ненула Бетијевих бројева.

Сетимо се да смо Хилбертов полином $g(i)$ дефинисали тако да се за неко довољно велико j поклапа са Хилбертовом функцијом, то јест $g(j) = \dim_k(V_j)$, за $j \gg 0$. У терминима полинома $h(t)$, питање колико је то j даје нам теорема 7.9(4). Може се доказати да се Хилбертова функција коначно генерисаног S-модула V поклапа са Хилбертовим полиномом за све вредности $j \geq 1 + \operatorname{reg}(V)$, или и јачи резултат:
$j \geq 1 - \operatorname{depth}(V) + \operatorname{reg}(V)$.

У односу на Бетијев дијаграм, регуларност је број последње врсте у којој се јавља ненула Бетијев број. Као што се пројективна димензија може представити као дужина Бетијевог дијаграма, тако је регуларност његова ширина.

Пример 9.2. У примеру 4.8 регуларност модула S/I је 4. △

Став 9.3. (1) Ако U има q-линеарну резолвенту, тада је $\operatorname{reg}(U) = q$.
(2) R је Косулов ако и само ако $\operatorname{reg}(k) = 0$.

Доказ. (1) Следи из става 8.3(2).
(2) Следи из дефиниције 8.2 и (1). □

Став 9.4. Ако је $0 \longrightarrow U \longrightarrow U' \longrightarrow U'' \longrightarrow 0$ кратак тачан низ градуисаних коначно генерисаних R-модула са хомоморфизмима степена нула, тада важи:
(1) Ако је $\operatorname{reg}(U') > \operatorname{reg}(U'')$, онда је $\operatorname{reg}(U) = \operatorname{reg}(U')$.
(2) Ако је $\operatorname{reg}(U') < \operatorname{reg}(U'')$, онда је $\operatorname{reg}(U) = \operatorname{reg}(U'') + 1$.
(3) Ако је $\operatorname{reg}(U') = \operatorname{reg}(U'')$, онда је $\operatorname{reg}(U) \leq \operatorname{reg}(U'') + 1$.

Доказ. Кратак тачан низ $0 \longrightarrow U \longrightarrow U' \longrightarrow U'' \longrightarrow 0$ индукује дуги тачан низ

$$\ldots \longrightarrow \operatorname{Tor}^R_{i+1}(U'', k)_j \longrightarrow \operatorname{Tor}^R_i(U, k)_j \longrightarrow \operatorname{Tor}^R_i(U', k)_j \longrightarrow \operatorname{Tor}^R_i(U'', k)_j \longrightarrow \ldots.$$

[15]Guido Castelnuovo (1865-1952), италијански математичар
[16]David Bryant Mumford, амерички математичар

(1) Нека је i такво да $\mathrm{Tor}_i^R(U',k)_{i+\mathrm{reg}(U')} \neq 0$ и ставимо $j = i + \mathrm{reg}(U')$. Имамо тачан низ

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(U,k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(U',k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(U'',k)_j = 0,$$

и једнакост важи јер је $\mathrm{reg}(U') > \mathrm{reg}(U'')$. Како је $\mathrm{Tor}_i^R(U',k)_j \neq 0$, мора бити $\mathrm{Tor}_i^R(U,k)_j \neq 0$. Дакле, $\mathrm{reg}(U) \geq \mathrm{reg}(U')$.

Претпоставимо да је $\mathrm{reg}(U) > \mathrm{reg}(U')$. Изаберимо индекс i тако да $\mathrm{Tor}_i^R(U,k)_{i+\mathrm{reg}(U)} \neq 0$ и нека је $j = i + \mathrm{reg}(U)$. Из дугог тачног низа и претпоставке $\mathrm{reg}(U) > \mathrm{reg}(U')$ добијамо тачан низ

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{i+1}^R(U'',k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(U,k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(U',k)_j = 0.$$

Како је $\mathrm{reg}(U) > \mathrm{reg}(U') > \mathrm{reg}(U'')$, онда је $\mathrm{reg}(U'') < \mathrm{reg}(U) - 1$, па је $\mathrm{Tor}_{i+1}^R(U'',k)_j = 0$. Пошто је $\mathrm{Tor}_i^R(U,k)_j \neq 0$, добијамо контрадикцију. Дакле, мора бити $\mathrm{reg}(U) = \mathrm{reg}(U')$.

Даље, докажимо да ако је $\mathrm{reg}(U') \leq \mathrm{reg}(U'')$, онда је $\mathrm{reg}(U) \leq \mathrm{reg}(U'')+1$. Тада важи (3).

Претпоставимо супротно. Нека је $\mathrm{reg}(U) > \mathrm{reg}(U'') + 1$. Нека је i тако да $\mathrm{Tor}_i^R(U,k)_{i+\mathrm{reg}(U)} \neq 0$ и нека је $j = i + \mathrm{reg}(U)$. Имамо да је низ

$$0 = \mathrm{Tor}_{i+1}^R(U'',k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(U,k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(U',k)_j$$

тачан. Како је $\mathrm{reg}(U) > \mathrm{reg}(U'') + 1 \geq \mathrm{reg}(U') + 1$, онда је $\mathrm{Tor}_i^R(U',k)_j = 0$, па и $\mathrm{Tor}_i^R(U,k)_j = 0$, што је немогуће. Дакле, $\mathrm{reg}(U) \leq \mathrm{reg}(U'') + 1$.

(2) Фиксирајмо сада i тако да $\mathrm{Tor}_{i+1}^R(U'',k)_{i+1+\mathrm{reg}(U'')} \neq 0$ и нека је $j = i + 1 + \mathrm{reg}(U'')$. Тачан је низ

$$\mathrm{Tor}_{i+1}^R(U',k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}_{i+1}^R(U'',k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(U,k)_j.$$

Први модул је 0 јер је $\mathrm{reg}(U') < \mathrm{reg}(U'')$, а други је различит од 0. Следи да је $\mathrm{Tor}_i^R(U,k)_j \neq 0$, па је $\mathrm{reg}(U) \geq \mathrm{reg}(U'') + 1$. Доказали смо и обрнуту неједнакост, па важи $\mathrm{reg}(U) = \mathrm{reg}(U'') + 1$. □

Последица 9.5. Ако је $0 \longrightarrow U \longrightarrow U' \longrightarrow U'' \longrightarrow 0$ кратак тачан низ градуисаних коначно генерисаних R-модула са хомоморфизмима степена нула, тада важи:
(1) $\mathrm{reg}(U') \leq \max\{\mathrm{reg}(U), \mathrm{reg}(U'')\}$.
(2) $\mathrm{reg}(U) \leq \max\{\mathrm{reg}(U'), \mathrm{reg}(U'') + 1\}$.
(3) $\mathrm{reg}(U'') \leq \max\{\mathrm{reg}(U'), \mathrm{reg}(U) - 1\}$.

Резултати везани за процене регуларности идеала у S су актуелне у овој области. Траже се градуисани идеали чија регуларност је "велика", у смислу да је експоненцијална или дупло експоненцијална у односу на број променљивих у S.

Једна од најзначајнијих хипотеза у области градуисаних слободних резолвенти је следећа:

Хипотеза 9.6. Ако је $P \subset (x_1, \ldots, x_n)^2$ прост градуисан идеал у S, тада је $\mathrm{reg}(P) \leq \mathrm{mult}(S/P) - \mathrm{codim}(P) + 1$.

10 Мултиградација и Тејлорина резолвента

До сада смо користили $\mathbb{N}$-градуисане и $\mathbb{Z}$-градуисане структуре. У исте сврхе користићемо моноид $\mathbb{N}^n$.

Ако са S_m означимо векторски простор над пољем k генерисан мономом $m \in S$, тада прстен полинома S можемо представити као директну суму $S = \oplus_{m \text{ је моном}} S_m$. Такође важи да је $S_m S_{m'} = S_{mm'}$.

Елемент $x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$ је моном у S, и сваком таквом можемо доделити вектор $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{N}^n$. Важи и обрнуто: сваком вектору $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{N}^n$ одговара моном $x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$. Ако је $m = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$, тада су елементи у S_m облика $\alpha x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$, за $\alpha \in k$.

Дефиниција 10.1. Кажемо да је вектор $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{N}^n$ *мултистепен* елемента $\alpha x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n} \in S_m$ или да је елемент $\alpha x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n} \in S_m$ мултистепена m и пишемо $\mathrm{mdeg}(\alpha x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}) = c$. Такође, кажемо да је прстен S $\mathbb{N}^n$-градуисан или *мултиградуисан*.

S-модул T је *мултиградуисан* ако је директна сума $T = \oplus_{m \text{ је моном}} T_m$ својих адитивних подгрупа, тако да $S_m T_{m'} \subseteq T_{mm'}$, за све мономе m, m'.

Дефиниција 10.2. Нека је T коначно генерисани мултиградуисани S-модул. *Мултиградуисана Хилбертова функција* модула T је $m \mapsto \dim_k(T_m)$ и представља се *мултиградуисаним Хилбертовим редом*

$$\mathrm{hilb}_T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_m m \, \dim_k(T_m).$$

Јасно је да се уобичајени Хилбертов ред добија из мултиградуисаног реда на следећи начин: $\mathrm{Hilb}_T(t) = \mathrm{hilb}_T(t, \ldots, t)$, као и да је мултиградуисани Хилбертов ред за прстен S $\mathrm{hilb}_S(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(1-x_1)\cdots(1-x_n)}$.

Многи од појмова уведених у почетним одељцима могу се аналогно дефинисати и у случају мултиградуисаних S-модула. Неки од битнијих су појмови слободне резолвенте и Бетијевих бројева.

Иначе, од значаја су модули S/I над S, где је I идеал у S. Ако је M мономни идеал, онда је и мултиградуисан, па је и S-модул S/M мултиградуисан. Овај модул има слободну резолвенту, која је мултиградуисана, а конструише се аналогно конструкцији градуисане слободне резолвенте која је изведена у другом одељку. Једино је битно нагласити да се померени модули дефинишу као $S(m^{-1})_{m'} = S_{m^{-1}m'}$, то јест $S(m^{-1})$ је слободни S-модул са једним генератором у мултистепену m. Као векторски простор над k је једнодимезион ако m дели m', у супротном је тривијалан. Иначе је сва нотација везана за ову тему мултипликативна.

Постоји и минимална слободна резолвента за S/M над S, која је мултиградуисана, и може се представити

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \oplus_m S(m^{-1})^{b_{i,m}} \longrightarrow \oplus_m S(m^{-1})^{b_{i-1,m}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0,$$

где су $b_{i,m}$ мултиградуисани Бетијеви бројеви.

Нека је M мономни идеал у S, и претпоставимо да је његова минимална генератриса $\{m_1, \dots, m_q\}$. Конструисаћемо резолвенту за S/M, која се дефинише врло слично Косуловом комплексу.

Нека је E спољна алгебра над k са базним елементима $e_1, \dots, e_q$, $T_0 = S$, $T_i = 0$, за $i > q$. За $0 \leq i \leq q$, нека је T_i слободни S-модул ранга $\binom{q}{i}$ са базом

$$\{e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i} \,|\, 1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq q\}.$$

Дефинишимо пресликавања $d_i : T_i \to T_{i-1}$ са

$$d_i(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}) = \sum_{1 \leq p \leq i} (-1)^{p+1} \frac{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, m_{j_i})}{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, \hat{m}_{j_p}, \dots, m_{j_i})} e_{j_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{j_p} \wedge \dots \wedge e_{j_i}.$$

Теорема 10.3. Са претходним ознакама је $d_i \circ d_{i-1} = 0$, за свако i.

Доказ.

$$d^2(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}) = \sum_{1 \leq p < s \leq i} \gamma_{p,s} e_{j_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{j_p} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{j_s} \wedge \dots \wedge e_{j_i},$$

где је

$$\gamma_{p,s} = (-1)^{p+1} \frac{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, m_{j_i})}{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, \hat{m}_{j_p}, \dots, m_{j_i})} (-1)^s \frac{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, \hat{m}_{j_p}, \dots, m_{j_i})}{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, \hat{m}_{j_p}, \dots, \hat{m}_{j_s}, \dots m_{j_i})} +$$

$$+ (-1)^{s+1} \frac{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, m_{j_i})}{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, \hat{m}_{j_s}, \dots, m_{j_i})} (-1)^{p+1} \frac{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, \hat{m}_{j_s}, \dots, m_{j_i})}{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, \hat{m}_{j_p}, \dots, \hat{m}_{j_s}, \dots m_{j_i})} =$$

$$= (-1)^{p+1}(-1)^s \left(\frac{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, m_{j_i})}{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, \hat{m}_{j_p}, \dots, \hat{m}_{j_s}, \dots m_{j_i})} + \right.$$

$$\left. + (-1) \frac{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, m_{j_i})}{\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, \hat{m}_{j_p}, \dots, \hat{m}_{j_s}, \dots m_{j_i})} \right) = 0.$$

□

Дефиниција 10.4. Конструисани ланчасти комплекс називамо *Тејлорин комплекс* S-модула S/M и означавамо га са

$$\mathcal{T}_M : 0 \longrightarrow T_q \longrightarrow \dots \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow 0.$$

Ако ставимо $\deg(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}) = \deg(\mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, m_{j_i}))$, добијамо стандардну градацију на $\mathcal{T}_M$. Мултиградација је дата са $\mathrm{mdeg}(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}) = \mathrm{nzs}(m_{j_1}, \dots, m_{j_i})$.

Теорема 10.5. $\mathcal{T}_M$ је слободна резолвента за S/M.

Доказ. Треба доказати да је низ $0 \longrightarrow T_q \longrightarrow \dots \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0$ тачан, а како је $\mathcal{T}_M$ мултиградуисан, довољно је доказати тачност у сваком мултистепену $0 \longrightarrow T_{q,m} \longrightarrow \ldots \longrightarrow T_{1,m} \longrightarrow T_{0,m}$, где је m моном у S. Елементи у $T_{i,m}$ су облика

$$\frac{m}{\mathrm{nzs}(m_{j_1},\ldots,m_{j_i})} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i},$$

при чему је $\frac{m}{\mathrm{nzs}(m_{j_1},\ldots,m_{j_i})} \in S$. Ако је $m \notin M$, тада ниједан од генератора $\{m_1,\ldots,m_q\}$ идеала M не дели m, па је $T_{i,m} = 0$, сем за $i = 0$: тада је $T_{0,m} = S_m$. Тако да је низ тачан.

Нека је сада $m \in M$. Нека су елементи скупа $\{e_i \,|\, m_i \text{ дели } m\}$ темена симплекса Γ_m. Пресликавање

$$\frac{m}{\mathrm{nzs}(m_{j_1},\ldots,m_{j_i})} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \mapsto \text{ страна симплекса } \Gamma_m \text{ са теменима } e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}$$

је изоморфизам комплекса $0 \longrightarrow T_{q,m} \longrightarrow \ldots \longrightarrow T_{1,m} \longrightarrow T_{0,m}$ и ланчастог комплекса формираног од симплекса Γ_m, чије стране димензије i су генератори комплекса на i-том нивоу. Како је хомологија симплекса Γ_m заправо хомологија наведеног ланчастог комплекса, и тривијална је у димензијама већој од 0, то је и полазни комплекс у мултистепену m тачан.

Диференцијали d сликају елемент мултистепена m или у ненула елемент истог мултистепена или у 0, која припада S_m, за свако m. Дакле, пресликавања d су хомоморфизми који чувају мултистепен. Како је још и $S/M \cong S/\mathrm{Ker}(d_0) = S/M$, то је тврђење теореме доказано. $\square$

Приметимо да се у случају $m_i = x_i$, за свако i, Тејлорина резолвента и Косулова резолвента поља k поклапају.

Пример 10.6. Израчунајмо Тејлорину резолвенту модула из примера 2.3. Наиме, $S = k[x,y]$, и $M = (x^3, xy, y^5)$.

Слика базног елемента $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ је

$$d(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = \frac{x^3y^5}{xy^5} e_2 \wedge e_3 - \frac{x^3y^5}{x^3y^5} e_1 \wedge e_3 + \frac{x^3y^5}{x^3y} e_1 \wedge e_2 = y^4 e_1 \wedge e_2 + x^2 e_2 \wedge e_3 - e_1 \wedge e_3.$$

Слично се израчуна и да је

$$d(e_1) = x^3,\ d(e_2) = xy,\ d(e_3) = y^5$$
$$d(e_1 \wedge e_2) = -ye_1 + x^2 e_2$$
$$d(e_2 \wedge e_3) = -y^4 e_2 + xe_3$$
$$d(e_1 \wedge e_3) = -y^5 e_1 + x^3 e_3.$$

Дакле, Тејлорина резолвента модула S/M је

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^4 \\ x^2 \\ -1 \end{pmatrix}} S^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & 0 & -y^5 \\ x^2 & -y^4 & 0 \\ 0 & x & x^3 \end{pmatrix}} S^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^3 & xy & y^5 \end{pmatrix}} S \longrightarrow S/M \longrightarrow 0.$$

Упоређивањем са резолвентом добијеном у примеру 2.3 видимо да Тејлорина резолвента не мора бити минимална. $\triangle$

Закључак

Иако смо установили да сваки градуисани коначно генерисани модул над R има минималну градуисану слободну резолвенту, њено одређивање је следећи важни аспект целе теорије. Наиме, у пракси је некад врло тешко наћи резолвенту модула, па ипак, има резултата и на ту тему.

Теорија Гребнерових[17] база омогућила је прављење алгоритама за израчунавање слободних резолвенти, који су имплементирани у пар компјутерских програма: CoCoA, Macaulay2, Singular.

Постоји низ резултата о слободним резолвентама одређених класа модула. Најчешће су и питању количнички модули настали од мономних идеала, али и идеала чији су генератори безквадратни или квадратни мономи. Неке такве резолвенте су далеко од минималних, као што је Тејлорина резолвента, а неке и јесу минималне, али само за модуле са специјалним особинама.

Новији приступ проблему представља покушај да се пронађу комбинаторни или тополошки објекти, у чијој структури би на неки начин могла да се огледа структура минималне слободне резолвенте неке класе модула, најчешће мономних. Реч је о симплицијалним резолвентама и резолвентама ћелијских комплекса. Још једна веза са комбинаториком је Стенли[18]-Рајзнеров[19] идеал, који је генерисан мономима облика $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$, тако да $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ није страна неког фиксираног симплицијалног комплекса Δ чија темена су означена симболима неодређених прстена полинома. Како је сваки мономни безквадратни идеал Стенли-Рајзнеров за неки симплицијални комплекс Δ, то се одређивање Бетијевих бројева полазног идеала може извести уз помоћ ове додатне теорије.

Слободна резолвента носи обиље података о самом модулу, ако је минимална - још више. Наиме, знајући минималну градуисану слободну резолвенту модула, знамо и градуисане Бетијеве бројеве, а тиме и Хилбертов ред и полином, Ојлеров полином, Ојлерову карактеристику, вишеструкост, димензију, пројективну димензију, регуларност полазног модула. Наравно, чињеница да посматрамо модуле над прстеном полинома, који као прстен има лепе особине, нам омогућава да тих инваријанти буде тако много.

У сваком случају може се рећи да је теорија градуисаних слободних резолвенти значајна алатка у испитивању особина модула.

Битно је напоменути још једном важност градације у целој теорији: неке од лепих особина природних и целих бројева преносе се, на неки начин, и на градуисане структуре које посматрамо.

---

[17]Wolfgang Gröbner (1899-1980), аустријски математичар

[18]Richard Stanley, амерички математичар

[19]Gerald Reisner, амерички математичар

Литература

[1] Irena Peeva:
Graded Syzygies, Springer-Verlag, London (2011)

[2] David Eisenbud:
Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York (1995)

[3] David Eisenbud:
The Geometry of Syzygies, Springer, New York (2005)

[4] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald:
Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1969)

[5] Hideyuki Matsumura:
Commutative ring theory, Cambridge University Press, Cambridge (1986)

[6] Robin Hartshorne:
Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York (1977)