УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
Математички факултет

Марко Милатовић

ГРАФОВИ СА ОГРАНИЧЕНОМ ДРУГОМ СОПСТВЕНОМ ВРЕДНОШЋУ

мастер рад

Београд, септембар 2010.

Комисија за преглед, оцјену и одбрану мастер рада:

др Зоран Станић(ментор)
Математички факултет Београд

др Ђорђе М. Дугошија
Математички факултет Београд

др Слободан К. Симић
Математички институт САНУ

Садржај

Увод

Теорија графова представља област математике која у посљедњим деценијама доживљава велику експанзију. Велики број истраживања у теорији графова резултат је велике примјенљивости теорије графова. Графови су се показали као изузетно згодни модели за описивање најразличитијх феномена у математици, техници и природним наукама. Уз нова истраживања настајале су и развијале се сопствене и оригиналне методе и још свестраније остваривале везе са појединим математичим дисциплинама, тако да данас теорија графова представља главни алат у рјешавању многих проблема у рачунарству, биоинформатици, хемији, електротехници, економији, итд.

Матрична репрезентација графова омогућава примјене резултата линеарне алгебре, а посебно теорије матрица и полинома, у теорији графова. На томе се темељи *спектрална теорија графова*. Спектри и карактеризација графова на основу њихових спектралних особина најчешћи су предмети изучавања спектралне теорије графова, а карактеристични полиноми графова, сопствене вриједности, сопствени вектори и сопствени (пот)простори том приликом играју веома важну улогу.

Развој хардвера и софтвера допринио је и појави различитих програмских пакета, између осталих и програма који су дали заначајан допринос у добијању неких резултата из теорије графова. У овом раду је коришћен програмски пакет *NewGraph*, аутора проф. др. Драгоша Цветковића, проф. др. Слободана Симића, Драгана Стевановића и Владимира Бранкова, који даје изванредне резултате при изучавању спектралних особина графа.

Један од интересантних проблема спектралне теорије је и изучавање графова који имају ограничену неку сопствену вриједност из спектра сопствених вриједности графа. Посебно су у литератури изучавани графови код којих је друга по реду сопствена вриједност није већа од неког задатог броја. Изучавања на овој проблематици су започета са радом [7] и током година је одређен извјестан број графова са поменутом својством, а такође су испитиване и различите класе графова у оквиру којих су описани сви графови са поменутим својством. У овом раду је представљен преглед познатих резултата код графова са ограниченом другом сопственом вриједношћу и дат оригиналан допринос изучавању посебне класе графова, NSG–ова, тиме што су одређени сви графови из поменуте класе са својством да имају другу сопствену вриједност која је једнака 1.
Преглед познатих резултата је дат у другој и трећој глави као и првом поглављу четврте главе, док је оригинални допринос дат у другом поглављу четврте главе.

Мастер рад се састоји из увода, четири главе и закључка.

У првој глави су дати основни појмови спектралне теорије графова и наведена тврђења која ће имати есенцијалну улогу при презентовању досадашњих резултата из области спектралне теорије графова које су интересантне за овај рад. Теорема о преплитању са посљедицама и Курант-Вејлове неједнакости важне инструменте при испитивању појединих својстава графа.

У другој глави су представљени резултати који се односе на графове чије је друга сопствена вриједност ограничена релативно малим бројем. У првом поглављу је разматрано ограничење $\frac{1}{3}$, у другом $\sqrt{2}-1$, у трећем $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, у четвртом 1 (овдје су посебно описани бипартитни графови, линијски графови, уопштени линијски графови, затим уницикличкi, бициклички, регуларни графови и короне), док је у посљедњем, петом поглављу, дат преглед појединих резултата код рефлексивних графова, одн. графова код којих је друга сопствена вриједност у спектру графа ограничена са 2.

Трећа глава је посвећена једној релативно новој методи у конструкцији графова. То је техника којим се одређују графови на основу њихових подграфова који се зову *звијезда комплименти.* У првом поглављу су дати резултати за звијезда комплименте за графове код којих је $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ друга сопствена вриједност, док су у другом посебно разматрани уницикличкi графови, коктелски графови и повезани графови до пет чворова, као зијезда комплементи за графове чија је 1 друга сопствена вриједност графа. Сви презентовани резултати су добијени уз употребу програмског пакета *SCL* (*StarComplementLibrary*), аутора доц. др. Зорана Станића и Недељка Стефановића, који омогућава брзу имплементацију технике звијезда комплимента.

У четвртој глави су описани NSG–ови, као посебна класа кографова. У првом поглављу су дати резултати који описују све NSG–ове код којих је друга сопствена вриједност у графу мања од 1, док је другом поглављу дат оригиналан резултат тиме што су одређени сви NSG–ови са другом сопственом вриједношћу 1.

Важно је напоменути да су у овом раду, код појединих појмова, коришћени њихови енглески називи или скраћенице, а у недостатку адекватних и погодних ријечи за превод на српски језик.

Желим да се захвалим ментору, доц. др. Зорану Станићу, на великој подршци приликом израде овог рада.

Глава 1

Основне дефиниције и теореме

У овој глави се наводе дефиниције основних појмова из теорије графова и спектралне теорије графова, као и нека основна тврђења која су од посебног интереса у спектралној теорији графова: Теорема о преплитању (Теорема 1.2) са посљедицама и Курант-Вејлове неједнакости (Теорема 1.3).

Граф G је уређени пар (X, U) гдје је X непразан скуп, а U бинарна релација на скупу X. Елементи скупа X се називају **чворови** (или тјемена), а елементи скупа U **гране** (или ивице) графа. Скуп чворова графа G се означава са $V(G)$, а скуп грана графа G са $E(G)$.
Ако су x_i и x_j чворови, такви да је $u = (x_i, x_j) \in U$, каже се да је грана u **инцидентна** чворовима x_i и x_j, као и да су чворови x_i и x_j **сусједни**. Чвор који нема сусједних чворова се назива **изоловани** чвор. За чворове x_i и x_j који су сусједни, тј. такви да је $u = (x_i, x_j) \in U$, кажемо и да су спојени граном u, односно да су крајње тачке гране u. Грана (x_i, x_j) означава се и само $x_i x_j$. Двије гране су **сусједне** ако имају заједнички чвор. Двије или више грана које су инцидентне са истим паром чворова се зову **паралелне** гране.
Степен чвора је број грана инцидентних том чвору, тј. број чворова са којим је дати чвор спојен граном. За дати чвор x степен чвора се означава са $deg(x)$ или $d(x)$.
Максималан степен графа $\triangle(G)$ је највећи степен чвора у графу. Чвор степена један се назива **терминални чвор** или **лист**. Грана која је инцидентна са чвором степена 1 се назива **висећа грана**.

Регуларан граф степена r је граф чији су сви чворови степена r.

Граф $G = (X, U)$ је **неоријентисан** ако је релација U симетрична, а **оријентисан** ако је релација U антисиметрична.

Граф се геометријски представља тако што се скупу чворова графа $x_1, \ldots, x_n \in X$ придруже међусобно различите тачке у равни (или простору), а свакој грани лнија или лук који спаја одговарајуће чворове. Ако $u = (x_i, x_j) \in U$, тачку која представља чвор x_i спајамо непрекидном глатком линијом са тачком која представља чвор x_j. Ова се линија оријентише на цртежу стрелицом у смјеру од x_i до x_j и она не пролази кроз неки трећи чвор графа (тада кажемо и да грана u излази из чвора x_i и улази у чвор x_j). Ако $u = (x_i, x_j) \notin U$ чворови x_i и x_j нису на

цртежу директно повезани. Ако пару чворова (x_i, x_j) одговарају двије гране (x_i, x_j) и (x_j, x_i) на цртежу се понекад не повлаче двије линије између чворова x_i и x_j него се јединствена линија двострано оријентише или се уопште не оријентише. Грана која спаја чвор са самим собом се назива **петља**.
Граф је **прост** ако нема ни петљи ни паралелних грана. У противном је **мултиграф**.

У овом раду се подразумијева да је граф G: *коначан* (одн. да је скуп X коначан), *неоријентисан* (одн. да је релација U симетрична) и да је *без петљи* (одн. да је релација U антирефлексивна), осим ако другачије није наглашено.

Два графа $G_1 = (X_1, U_1)$ и $G_2 = (X_2, U_2)$ су **изоморфна** (у ознаци $G_1 \cong G_2$ или $G_1 = G_2$) ако постоји бијективно пресликавање f скупа X_1 у скуп X_2 које чува особину сусједства чворова. Изоморфизам је релација еквиваленције и истој класи еквиваленције припадају сви графови који су међусобно изоморфни. Теорија графова се бави класама еквиваленције и с тог становишта графови исте класе се не разликују без обзира што имају различите геометријске репрезентације.

Индуковани подграф $H = (Y, V)$ графа $G = (X, U)$ је граф за који важи $Y \subset X$ и $V \subset U \cap (Y \times Y)$. То значи да он настаје тако што се из графа G удаље сви чворови из скупа $X \setminus Y$, као и све њима инцидентне гране (каже се и да је подграф $H = (Y, V)$ је индукован скупом чворова Y). Граф G се тада назива и **надграф** графа H. Ако је $Y \neq X$, H се назива прави индуковани подграф графа G, а G прави надграф графа H. Ако је подграф H графа G индукован скупом чворова $X \setminus X_1$, то означавамо $G - X_1$. Специјално, за $X_1 = \{x_1\}$ пишемо $G - x_1$ и тај граф називамо **први подграф**[1] графа G.
Умјесто термина индуковани подграф користи се и термин **подграф**.

Комплетан граф[2] (потпуни граф) K_n је граф са n чворова чија су свака два чвора сусједна, одн. свака два чвора су повезана граном. Другим ријечима, то је регуларан граф са n чворова степена $n-1$ и $\binom{n}{2}$ грана.
Празан граф $\overline{K}_n$ је граф са n чворова у којем никоја два чвора нису сусједна тј. сви чворови су изоловани.

Комплемент графа $G = (X, U)$ је граф $\overline{G} = (X, \overline{U})$ који има исти скуп чворова као и G али су они сусједни у G ако и само ако нису сусједни у $\overline{G}$. Граф који је самом себи комплемент назива се **самокомплементаран**.
Унија (Директна сума) $G_1 \cup G_2$ графова $G_1 = (X_1, U_1)$ и $G_2 = (X_2, U_2)$, гдје је $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, је граф $G = (X, U)$ такав да је $X = X_1 \cup X_2$ и $U = U_1 \cup U_2$. На аналоган начин се дифинише и унија више графова, као и граф $nG = G \cup G \cup \ldots \cup G$ (n копија графа G).
Потпуни производ $G_1 \nabla G_2$ графова $G_1 = (X_1, U_1)$ и $G_2 = (X_2, U_2)$ настаје из графа $G_1 \cup G_2$ тако што се сваки чвор из G_1 повеже са по једном граном са сваким од чворова из G_2. Слично као и за унију, дефинишемо и $\bigtriangledown_n G = G \nabla G \nabla G \ldots \nabla G$ (n пута).
Корона $G_1 \circ G_2$ графова G_1 и G_2 се добија узимањем графа G_1 (са n_1 чворова) и графа $n_1 G_2$ (n_1 копија графа G_2) и придруживањем i–том чвору графа G_1 свих чворова у i–тој копији графа $G_2 (i = 1, 2, \ldots, n_1)$.

Бипартитни граф $G = (X, U)$ је граф код кога се скуп чворова може подијелити на два дисјунктна подскупа X_1 и X_2, таква да свака грана графа спаја неки чвор из X_1 са неким чвором из X_2.

[1] engl. *first subgraph.*
[2] engl. *complete graph.*

Потпуни бипартитни граф (бикомплетан граф) K_{n_1,n_2} је бипартитни граф код кога је $|X_1| = n_1$ и $|X_2| = n_2$ и у коме је сваки чвор из X_1 сусједни са свим чворовима из X_2 (то је, дакле, максимални бипартитни граф за $|X_1| = n_1$ и $|X_2| = n_2$ и број грана у том графу је $n_1 n_2$).
k**-партитни граф** ($k \geq 2$) је граф чији се скуп чворова X може подијелити на k дисјунктних непразних подскупова $X_1, X_2, \ldots, X_k$ и такав да свака грана графа спаја два чвора који припадају различитим скуповима X_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$.
Потпуни k**-партитни граф** (k-комплетан граф) $K_{n_1,\ldots,n_k}$ је k-партитан граф код кога је $|X_k| = n_k$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ и у којем су свака два чвора из различитих подскупова сусједна. Важи сљедеће: $K_{n_1,\ldots,n_k} = \overline{K}_{n_1} \nabla \ldots \nabla \overline{K}_{n_k}$.
k-партитни, односно потпуни k-партитни графови, гдје је $k \geq 2$, се називају и **мултипартитни** односно **потпуни мултипартитни графови**.

Пут дужине $\boldsymbol{n}$ (шетња дужине n) у графу G је сваки низ $x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots, x_n, u_n, x_{n+1}$ у коме се наизмјенично смјењују чворови и гране и у коме грана u_i спаја чворове x_i и x_{i+1}, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. У путу се и чворови и гране могу понављати. Пут који се завршава у истом чвору у коме почиње назива се **кружни** или **затворени** пут.
Елементарни пут (у даљем тексту **пут**) је пут у коме су сви чворови $x_1, x_2, \ldots, x_n$ међусобно различити. Граф који представља пут са n чворова (дужине $n-1$ одн. има $n-1$ грану) се означава са P_n.
Кограф[3] је граф који не садржи пут P_4 као индуковани подграф.

Граф је **повезан** ако се свака два његова различита чвора могу повезати путем. Ако постоје чворови који се не могу повезати путем, граф је **неповезан** и у том случају он има два или више одвојених дјелова, тзв. компоненти повезаности. **Компонента повезаности** графа G која садржи неки чвор x_i је подграф графа G који садржи све чворове који се могу спојити путем са x_i, као и сам чвор x_i. Дакле, граф је повезан ако има тачно једну компоненту повезаности. Чвор чијим се уклањањем из графа повећава број компоненти повезаности назива се **артикулациони чвор**. Грана чијим се уклањањем из графа повећава број компоненти повезаности графа назива се **мост**.

Растојање $d(x, y)$ између чворова x и y графа G је дужина најкраћег пута у G између x и y. Ако нема пута између x и y у G, тј. ако су x и y у различитим компонентама повезаности, тада се ставља $d(x, y) = \infty$. По дефиницији је $d(x, x) = 0$ за свако $x \in X$.
Дијаметар графа $G = (X, U)$ се дефинише као $diam(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.

Контура је повезан, регуларан граф степена 2. Ако контура има n чворова каже се да је **дужине** $\boldsymbol{n}$ и означава се са C_n. Контура је **парна**, односно **непарна**, уколико је парне односно непарне дужине. За $n = 3, 4, \ldots$ контуре се називају и троугао, четвороугао, итд. Ако граф садржи контуре као своје подграфове, дужина најкраће контуре се назива **струк графа** и означава се са $g(G)$.

Граф који нема контура је **ацикличан**. Повезан граф се назива **уницикличкi** (једноконтурни), ако садржи тачно једну контуру, тј. ако му је број грана m једнак броју чворова n. Ако граф садржи више независних контура назива се **мултициклички**, специјално **бициклички** ако садржи двије контуре (тј. ако важи $m = n+1$, гдје је m број грана а n број чворова), **трициклички** ако садржи три контуре (тј. ако важи $m = n+2$, гдје је m број грана а n број чворова), итд. Ако контуре графа садрже један заједнички чвор, каже се да образују **сноп контура**.

[3] engl. *cograph*.

Кактус или **стаблолики граф** је граф у коме сваке двије контуре имају највише један заједнички чвор.

Стабло[4] T је повезан ацикличан граф, тј. повезан граф који има n чворова и $n-1$ грану. Стабло је бипартитни граф и свака два чвора у стаблу су повезана јединственим путем. Очигледно, пут је стабло код кога је максималан степен чвора није већи од 2.
Стабло у којем је један чвор посебно означен назива се **коријенско стабло**, а означени чвор се назива **коријен стабла**.
Звијезда је стабло са n чворова гдје је један чвор степена $n-1$ а $n-1$ чворова су листови (тј. то је граф $K_{1,n-1}$).
Шума је граф чије су све компоненте повезаности стабла (одн. шума је унија стабала).

Проширење графа G је додавање нових чворова и грана графу G тако да се добије његов прави надграф. **Проширење** графа G је у **класи** $\boldsymbol{C}$ је такво проширење графа G које припада одређеној класи C повезаних графова, тако да и добијени надграф припада истој класи.

Линијски граф[5] (граф грана) $L(G)$ графа G представља такав граф да између скупа његових чворова и скупа грана графа G постоји 1–1 кореспонденција, при чему су два чвора у $L(G)$ сусједна ако и само ако су њима одговарајуће гране у G сусједне.
Ако за граф G постоји граф H такав да је $G = L(H)$, онда се H назива **коријени граф** графа G.
Регуларан граф са $2k$ чворова степена $2k-2$ се назива **коктелски граф**[6] и означава се са $CP(k)$. Он се добија од комплетног графа реда $2k$ уклањањем k грана од којих никоје двије нису сусједне. Важи да је $CP(k) = k\overline{K}_2$.

Нека је H граф са n чворова $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ненегативни цијели бројеви. **Уопштени линијски граф** (уопштени граф грана) $L(H; a_1, \ldots, a_n)$ је граф који се састоји од дисјунктних копија $L(H)$, $CP(a_1)$,..., $CP(a_n)$ и грана које повезују чворове у $CP(a_i)$ са свим чворовма из $L(H)$ који одговарају гранама које су инцидентне са x_i. За $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ добијамо граф $L(H)$, док за $n = 1$ и $a_1 = k$ добијамо $CP(k)$.

Ако граф G има одређено својство P које има и сваки његов подграф, такво својство се назива **насљедно**. Граф H је **забрањени граф** за својство P ако H нема својство P. Ако граф G садржи забрањени граф H за својство P као индуковани подграф, онда граф G нема својство P и граф H се назива **забрањени подграф** за својство P. Ако сваки подграф забрањеног подграфа H има својство P, онда се граф H назива **минимални забрањени подграф** за својство P. Ако важи да ниједан надграф графа G нема својство P, граф G се назива **максималан забрањени граф** за својство P.

Матрица сусједства[7] $A(G)$ графа $G = (X, U), |X| = n$, је (симетрична) матрица реда n дефинисана са: $a_{ij} = 1$ ако $(x_i, x_j) \in U$, а $a_{ij} = 0$ ако $(x_i, x_j) \notin U$, за $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Она није јединствена, јер изоморфни графови могу имати различите матрице сусједства (чворови се могу нумерисати на различите начине). Међутим, ако су графови G_1 и G_2 изоморфни, матрице сусједства $A(G_1)$ и $A(G_2)$ су сличне, тј. $A(G_1) = P^{-1}A(G_2)P$, гдје је P пермутациона матрица (регуларна квадратна матрица реда n која у свакој врсти и свакој колони има тачно један елемент који је једнак јединици, док су остали елементи једнаки нули).

[4]engl. *tree.*
[5]engl. *line graph.*
[6]engl. *coctail party graph.*
[7]engl. *adjacency matrix.*

Спектар графа $G = (X, U), X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ је спектар његове матрице сусједства $A(G)$, тј. фамилија сопствених вриједности матрице $A(G)$. Сопствене вриједности матрице $A(G)$ су нуле карактеристичног полинома

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A(G)) = \lambda^n + a_{n-1}(G)\lambda^{n-1} + \cdots + a_1(G)\lambda + a_0(G).$$

Како су све матрице сусједства $A(G)$ изоморфних графова међусобно сличне, оне имају исти карактеристични полином, који се назива **карактеристични полином графа** G. Карактеристични полином графа се означава са $P_G(\lambda)$, док се спектар графа G означава са $S_P(G)$. Степен карактеристичног полинома једнак је броју чворова графа G и познато је да је $a_n(G) = 1$. Коефицијент $a_{n-1}(G)$ је са обратним знаком једнак трагу матрице сусједства, тј. броју петљи графа, а како ми разматрамо графове без петљи и паралелних грана важи $a_{n-1}(G) = 0$. Уопште, коефицијенти карактеристичног полинома имају вриједности које се могу одредити из структуре графа, што показује и сљедећа теорема.

Теорема 1.1 *Нека је*

$$P_G(\lambda) = \det(\lambda I - A(G)) = \lambda^n + a_{n-1}(G)\lambda^{n-1} + \cdots + a_1(G)\lambda + a_0(G)$$

карактеристични полином графа G.
Елементарне фигуре су граф са два чора повезан једном неоријентисаном граном и контура C_p *са* $p \geq 3$ *чворова. Основна фигура* U_i *је сваки граф са тачно i чворова, чије су све компоненте повезаности елементарне фигуре. Нека је* $n(U_i)$ *број компонената за* U_i *и* $c(U_i)$ *број контура које се као компоненте садрже у* U_i*. Тада је*

$$a_{n-i}(G) = \sum_{U_i \subset G} (-1)^{n(U_i)} 2^{c(U_i)} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

За симетричне матрице сусједтва, сопствене вриједности су реалне, па се спектар може представити као уређена n-торка $S_p(G) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, гдје је $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.
Ако је λ сопствена вриједност графа G, вектор представљен матрицом колоном x се зове **сопствени вектор** графа G придружен сопственој вриједности λ ако важи $Ax = \lambda x, (x \neq 0)$. Ако сопствене вриједноси графа поређамо у нерастући низ, онда i–ти члан тог низа, λ_i, називамо ***i*–та сопствена вриједност графа**, док прву сопствену вриједност λ_1 назвамо и **индекс графа**. Из теорије матрица је познато да цио спектар графа G припада сегменту $[-\lambda_1, \lambda_1]$. Корисно је напоменути да за сваки повезан граф важи $\lambda_1 > \lambda_2$.

За повезан граф кажемо да је **изузети граф**[8] уколико он није (уопштени) линијски граф и уколико његова најмања сопствена вриједност није мања од -2.

Граф није једнозначно одређен својим спектром, јер може да постоји матрица слична матрици сусједства $A(G)$ графа G која сама није матрица сусједства графа G. Неизоморфни графови чији се спектри поклапају зову се **коспектрални** или **изоспектрални** графови.

Скуп свих сопствених вектора који одговарају истој сопственој вриједности λ заједно са нула-вектором чине **сопствени потпростор** који одговара λ.
Димензија овог простора (геометријска вишеструкост[9] λ) код неоријентисаног графа једнака је реду (вишеструкости) сопствене вриједности λ као нуле карактеристичног полинома (алгебарској вишеструкости λ).
Ако је ред нуле сопствене вриједности λ као нуле карактеристичног полинома графа G једнак

[8]engl. *exceptional graph.*
[9]engl. *multiplicity*

1, онда је та сопствена вриједност **проста** сопствена вриједност графа G.

Матрица A се назива **редуцибилна** ако постоји пермутациона матрица P таква да је

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$$

гдје су B и C квадратне матрице. У супротном, матрица A је **иредуцибилна**. Матрице сусједства повезаног графа су иредуцибилне, а неповезаног редуцибилне.

Ако је G неповезан граф са компонентама повезаности $G_1, G_2, \ldots, G_k$ и A_1 и $A_1, A_2, \ldots, A_k$ њихове матрице сусједства, онда матрица сусједства A графа G има облик

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & \ddots & O \\ O & O & A_k \end{pmatrix}$$

Примјеном Лапласовог развоја детерминанти може се показати да за карактеристичне полином важи

$$P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda)P_{G_2}(\lambda)\cdots P_{G_k}(\lambda)$$

а одавде слиједи да се спектар графа G унија спектара његових компоненти повезаности $G_1, G_2, \ldots, G_k$.

Индекс повезаног графа је сопствена вриједност реда 1 и већи је од индекса сваког његовог правог подграфа. Код неповезаног графа спектар графа представља унију спектара његових компоненти повезаности, па је индекс неповезаног графа једнак индексу бар једне компоненте, и може бити реда већег од 1 (ако више компоненти има тај исти индекс).
Такође, пошто индекс иредуцибилне матрице расте ако се повећа било који од њених елемената, додавање нове гране повезаном графу доводи до повећања његовог индекса, док ако је граф неповезан, индекс може да остане исти.
Индекс регуларног графа степена r је једнак r, а ред му је једнак броју компоненти. Њему одговара сопствени вектор чије су све координате 1.
Сљедећа теорема, тзв. Теорема о преплитању[10], једна је од основних теорема које се односе на спектар графа. Овдје се наводи заједно са најважнијим посљедицама.

Теорема 1.2 *Ако је A симетрична матрица са сопственим вриједностима $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а B једна њена главна субматрица са сопственим вриједностима $\mu_1, \ldots, \mu_m$ онда важи*
$\lambda_{n-m+1} \leq \mu_i \leq \lambda_i$, *за* $i = 1, \ldots, m$.

Посљедица 1.1 *Нека је G граф чије су сопствене вриједности $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ и нека је G' (било који) први подграф графа G чије су сопствене вриједности $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{n-1}$. Тада важи $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1},\ i = 1, ..., n-1$.*
Ако је нека сопствена вриједност графа G, нпр. λ_i реда $k > 1$, онда је μ_i, сопствена вриједност сваког првог подграфа графа G, најмање реда $k-1$.

[10]engl. *Interlacing Theorem.*

Претходна посљедица указује на то да се уклањањем чворова графа смањује ред било које његове произвољне сопствене вриједности за највише 1. Такође, ако произвољни први подграф графа G има сопствену вриједност μ_1 реда $k > 1$, онда то имплицира да за сопствене вриједности графа G важи $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_{k-1} = \mu_1$.
У теорији графова су веома важна својства која су насљедна, а нека од тих својстава слиједе из Теореме о преплитању.

Посљедица 1.2 *Ако граф G има сопствене вриједности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ за које важи $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, онда су особине $\lambda_1 \leq \lambda$ (тј. $\lambda_1 < \lambda$), $\lambda_n \geq -\lambda$ (тј. $\lambda_n > -\lambda$) гдје је λ произвољан позитиван реалан број, насљедна својства.*

Такође, особина графа да има највише p позитивних, односно највише p негативних сопствених вриједности ($p \in \mathbb{N}$), је насљедно својство.
Једна од важних особина графа је да за сопствене вриједности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ графа G важи

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0,$$
$$\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 2m,$$

гдје је m број грана графа G.

Сљедећа важна теорема представља тзв. Курант-Вејлове неједнакости.

Теорема 1.3 *Нека су $\lambda_1(X), \ldots, \lambda_n(X)$, гдје је $\lambda_1(X) \geq \ldots \geq \lambda_n(X)$, сопствене вриједности реалне симетричне матрице X. Ако су A и B реалне симетричне матрице реда n и $C = A+B$, онда важи*

$$\lambda_{i+j+1}(C) \leq \lambda_{i+1}(A) + \lambda_{j+1}(B)$$
$$\lambda_{n-i-j}(C) \leq \lambda_{n-i}(A) + \lambda_{n-j}(B)$$

гдје је $0 \leq i, j, i+j+1 \leq n$.

За $i = j = 0$ се на основу претходне теореме добија: $\lambda_1(C) \leq \lambda_1(A)+\lambda_1(B)$, $\lambda_n(C) \leq \lambda_n(A)+\lambda_n(B)$.

Глава 2

Графови са малом другом сопственом вриједношћу λ_2

У првој глави смо видјели да су коефицијенти карактеристичног полинома одређени структуром графа. Међутим, ствар се може посматрати и обратно, тј. на основу познатог карактеристичног полинома или спектра графа можемо одређивати детаље структуре графа. Јасно је да се сви детаљи структуре не могу у општем случају одредити јер, као што је наведено, постоје графови различите структуре са истим спектром.

У овој глави се представљају досадашњи резултати који се односе на графове са релативно малом другом сопственом вриједношћу λ_2.

Прије свега, познато је да у спектру повезаног графа највећа сопствена вриједност λ_1, тзв. индекс графа, мора бити позитивна, осим ако је граф K_1. Наиме, како је индекс повезаног графа већи од осталих сопствених вриједности графа и како је збир свих сопствених вриједности повезаног графа једнак трагу матрице сусједства, тј. нули, закључујемо да су тада или све сопствене вриједности једнаке нули, одакле слиједи и да је број грана у графу једнак нули, па је због повезаности граф тривијалан, или је $\lambda_1 > 0$.

Теорема 2.1 *Граф G има тачно једну ненегативну сопствену вриједност ако и само ако је G комплетан граф.*

Доказ. Ако је граф G комплетан граф K_n $(n \geq 2)$ биће $\lambda_2(G) = -1$, и G има тачно једну ненегативну сопствену вриједност, док за $n = 1$ имамо само једну сопствену вриједност $\lambda_1 = 0$. Ако граф G није комплетан, онда он садржи граф $2K_1$ (за који важи $\lambda_2(2K_1) = 0$) као свој подграф, па је према Теореми о преплитању $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(2K_1) = 0$, а ово имплицира да G има више од једне ненегативне сопствене вриједности. ■

Теорема 2.2 *Постоји тачно један минимални граф са тачно двије ненегативне сопствене вриједности и то је граф $2K_1$.*

Доказ. Како за граф $2K_1$ важи $\lambda_1(2K_1) = \lambda_2(2K_1) = 0$ и $2K_1$ садржи као индуковани подграф једино K_1 који има само једну сопствену вриједност $\lambda_1 = 0$, закључујемо да је $2K_1$ минимални

граф са тачно двије негативне сопствене вриједности.
Ако претпоставимо да постоји граф G, различит од $2K_1$ такав да је G минимални са горњим својством, онда закључујемо да G не садржи $2K_1$ као свој идуковани подграф. Одавде слиједи да је G комплетан граф, који, према претходној теореми, има тачно једну ненегативну сопствену вриједност, одакле слиједи контрадикција. ■

Лема 2.1 *Графови K_s и $K_{n_1,n_2,\ldots,n_s}$ имају једнак број позитивних и негативних сопствених вриједности.*

Друга сопствена вриједност графа $\lambda_2(G)$ је позитивна, осим у случају описаном у наредној теореми.

Теорема 2.3 *Граф G има тачно једну позитивну сопствену вриједност ако и само ако његови неизоловани чворови формирају потпуни мултипартитни граф.*

Доказ. Ако граф G није потпуни мултипартитни граф, онда он садржи, као индуковани подграф, бар један од графова $2K_2$, P_4, $K_1\nabla(K_1 \cup K_2)$. Како сваки од ових графова има тачно двије позитивне сопствене вриједности, према Теореми о преплитању закључујемо да G има бар двије позитивне сопствене вриједности. Ако је $G = K_{n_1,n_2,\ldots,n_s}$ онда је, према претходној леми, број позитивних вриједности графа G и графа K_s једнак и износи 1. Овим је доказ комплетан. ■

Теорема 2.4 *Постоје тачно три минимална графа са тачно двије позитивне сопствене вриједности и то су графови $2K_2$, P_4, $K_1\nabla(K_1 \cup K_2)$.*

Ако је G потпуни мултипартитни граф, онда на основу Теореме 2.3 слиједи да G има тачно једну позитивну сопствену вриједност, па важи $\lambda_2(G) \leq 0$. Као што је раније наглашено, ако је $G = K_n$ $(n \geq 2)$, онда је $\lambda_2(G) = -1$, док ако G није комплетан граф, онда из доказа Теореме 2.1 слиједи да је $\lambda_2(G) \geq 0$, па закључујемо да је $\lambda_2(G) = 0$.

Ако G није потпуни мултипартитни граф, на основу следеће посљедице претходне теореме постоји доње ограничење за другу сопствену вриједност и оно износи 0.31111.

Посљедица 2.1 *Ако граф G без изолованих чворова не садржи као подграф ни граф $2K_2$, ни P_4 ни $K_1\nabla(K_1 \cup K_2)$, онда је G потпуни мултипартитни граф.*

Наиме, ако G није потпуни мултипартитни граф, он садржи, као свој подграф, бар један од графова $2K_2$, P_4, $K_1\nabla(K_1 \cup K_2)$, па важи $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(2K_2) = 1$, или $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(P_4) = 0.61803$ или $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(P_4) = 0.61803$ или $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(K_1\nabla(K_1 \cup K_2)) = 0.31111$, тј. у сваком случају $\lambda_2(G) \geq 0.31111$.

Из претходног разматрања се може закључити да сви повезани графови, осим комплетних графова и потпуних мултипартитних графова, имају другу сопствену вриједност већу од 0.

Постојање горњег ограничења и то не само за λ_2, него за било коју сопствену вриједност λ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ је насљедна особина, јер, према Теореми опреплитању, важи да уколико је H подграф графа G важи $\lambda_i(H) \leq \lambda_i(G)$ и ако је $\lambda_i(G) \leq a$, онда је и $\lambda_i(H) \leq a$. Зато су од посебног интереса максимални графови за одређено горње ограничење друге сопствене вриједности λ_2.

У наредном разматрању представићемо добијене резултате код графова код којих је друга сопствена вриједност λ_2 ограничена са $\frac{1}{3}, \sqrt{2} - 1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 1, као и преглед неких општијих резултата код графова код којих је $\lambda_2 \leq 2$.

2.1 $\lambda_2 < \frac{1}{3}$

Сви графови са особином $0 < \lambda_2 < \frac{1}{3}$ су описани у [5]. Карактеризација је дата сљедећим тврђењем.

Теорема 2.5 *Нека је G граф без изолованих чворова. Тада је $0 < \lambda_2 < \frac{1}{3}$ ако и само ако је $G = (n-3)K_1\nabla(K_1 \cup K_2)$, $n = 4, 5, \ldots$, гдје је n број чворова графа G.*

2.2 $\lambda_2 \leq \sqrt{2} - 1$

Опис графова са особином $0 < \lambda_2 \leq \sqrt{2} - 1$ дат је у [21] и [26]. У [26] су презентовани сљедећи резултати.

Лема 2.2 $0 < \lambda_2((K_1 \cup K_{r,s})\nabla\overline{K}_q) \leq \sqrt{2} - 1$ $(r \leq s)$ *ако и само ако је испуњен један од сљедећих услова (1-10):*

1. $r > 1,\ s \geq r,\ q = 1$;
2. $r = 1,\ s \geq 1,\ q \geq 2$;
3. $r = 2,\ s \geq 2,\ q = 2$;
4. $r = 2,\ 2 \leq s \leq 3,\ q \geq 3$;
5. $r = 2,\ s = 4,\ 3 \leq q \leq 7$;
6. $r = 2,\ s = 5,\ 3 \leq q \leq 4$;
7. $r = 2,\ 6 \leq s \leq 8,\ q = 3$;
8. $r = 3,\ s = 3,\ 2 \leq q \leq 4$;
9. $r = 3,\ 4 \leq s \leq 7,\ q = 2$;
10. $r = 4,\ s = 4,\ q = 2$.

Лема 2.3 $\lambda_2((K_1 \cup K_{r,s})\nabla K_{p,q}) \leq \sqrt{2} - 1$ $(r \leq s,\ p \leq q)$ *ако и само ако је испуњен један од сљедећих пет услова (1-5.):*

1. $r = 1, s = 1,\ p \geq 1,\ q \geq p$;
2. $r > 1,\ s = 2,\ 1 \leq p \leq 2,\ q \geq p$;

3. $r = 1,\ s = 2,\ p = 3,\ 3 \leq q \leq 7$*;*

4. $r = 1,\ s = 2,\ p = 4,\ q = 4$*;*

5. $r = 1,\ s = 3,\ p = 1,\ q = 1$.

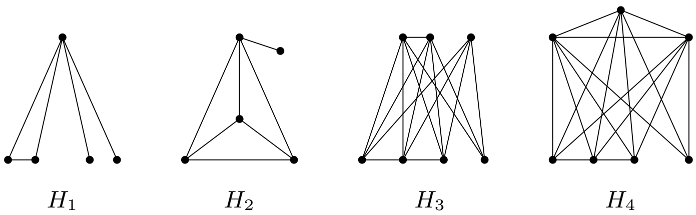
Теорема 2.6 *Нека је G граф без изолованих чворова. Тада је $0 < \lambda_2 \leq \sqrt{2} - 1$ ако и само ако важи један од слједећих услова:*

(1) $G = (\nabla_n(K_1 \cup K_2))\nabla K_{s_1,\ldots,s_m}$*;*

(2) $G = (K_1 \cup K_{r,s})\nabla \overline{K}_q$ *гдје параметри q, r и s испуњавају један од услова 1-10 из Леме 2.2;*

(3) $G = (K_1 \cup K_{r,s})\nabla K_{p,q}$ *гдје параметри p, q, r и s испуњавају један од од услова 1-5 из Леме 2.3.*

Такође, у [21] су описани и сви минимални забрањени подграфови за насљедно својство $\lambda_2 \leq \sqrt{2} - 1$.
Подграфови $H_1 = K_1\nabla(K_2 \cup \overline{K}_2)$, $H_2 = K_1\nabla(K_2 \cup K_3)$, $H_3 = (K_1 \cup K_2)\nabla(K_1 \cup P_3)$, $H_4 = (K_1 \cup P_3)\nabla K_3$ су забрањени подграфови за ову особину, јер је за сваки од њих важи $\lambda_2(H_i) > \sqrt{2} - 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ (Слика 0).



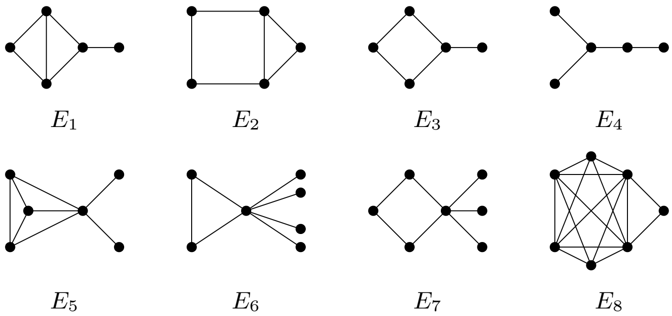
Слика 0

2.3 $\lambda_2 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Граф чија је друга сопствена вриједност мања или једнака од $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ називамо *σ–граф*, а то својство графа називамо σ–својство. Претходно поменута граница је позната као *златни пресјек*. Структура σ–графова изучавана је у [16], [17], и [33], док је у [17] уведена нотација $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ради погодности, граф G за који важи $\lambda_2(G) < \sigma$, $\lambda_2(G) > \sigma$, односно $\lambda_2(G) = \sigma$

зваћемо σ^-–граф, σ^+–граф, односно σ^0–граф. Познато је да ниједан σ^-–граф не садржи P_4 као индуковани подграф, то јест сваки σ^-–граф је кограф.
Како је својство $\lambda_2(G) \leq \sigma$ насљедно својство, проблем карактеризације свих σ–графова је сведен на проналажење свих минималних забрањених подграфова за σ својство.

Показано је да је скуп свих минималних забрањених подграфова σ– својство је коначан ([17]), али тај скуп није у потпуности описан. У [11] је доказано да су сви повезани графови са највише 4 чвора σ–графови, док од свих неповезаних графова са највише 4 чвора једино $2K_2$ није σ–граф, тако да је овај граф минимални забрањени подграф за σ–својство (штовише, то је једини неповезан минимални забрањени подграф за σ–својство међу неповезаним графовима). У [8], [11], и [13] је показано да међу 21, 112, и 853 повезаних графова са 5, 6, 7 чворова постоји тачно 8 минималних забрањених подграфова за σ–својство (Графови $E_1 - E_8$, Слика 1а), а у [33] је показано је да постоји тачно шест графова који су минимални забрањени подграфови за σ^- својство (за графове до 7 чворова) и то су графови $2K_2$, P_4, $(K_3 \cup 2K_1)\nabla K_1$, $(K_3 \cup 4K_1)\nabla K_1$, $(K_{1,2} \cup 3K_1)\nabla K_1$, $(K_4 \cup K_1)\nabla K_2$. У [33] је такође доказано да постоји и минимални забрањени подграфови за σ^-–својство за графове који имају више од 7 чворова, као и да је скуп свих минималних забрањених подграфова за σ^-–својство коначан.



Слика 1а

Сљедеће три леме описују неке особине σ–графова, док је Лема 2.11 послужила као основа за даље описивање σ^-–графова.

Лема 2.4 *Ако је G σ–граф, онда G има највише једну нетривијалну компоненту, одн. највише једну компоненту различиту од графа који се састоји од само једног чвора.*

Доказ. Ако претпоставимо супротно, тј. да σ–граф G садржи двије нетривијалне компоненте, онда G садржи, као свој индуковани подграф, граф $2K_2$. Како је $2K_2$ забрањени подграф за σ–својство, добијамо контрадикцију. ■

С обзиром на претходну лему, у даљим разматрањима можемо сматрати да су σ–графови повезани.

Лема 2.5 *Пут P_4 има сопствену вриједност σ којој одговара сопствени вектор* $(1, \sigma, -\sigma, -1)$.

Лема 2.6 *Ако граф G садржи пут P_4 као индуковани подграф, а не садржи ниједан од графова $2K_2$, и $E_1 - E_4$ (Слика 1а) као индуковани подграф, онда G има сопствену вриједност која је једнака σ.*

Лема 2.7 *Нека је G минимални забрањени подграф за σ–својство који садржи пут P_4 као индуковани подграф. Онда је G један од графова $E_1 - E_4$ (Слика 1a).*

Лема 2.8 *Ако је G σ–граф и стабло, онда је $G = K_{1,n}$ или $G = P_4$.*

Лема 2.9 *Ако је G повезан σ–граф који није стабло и ако за струк графа $g(G)$ важи $g(G) \geq 5$, онда је $G = C_5$.*

Лема 2.10 *Ако је G повезан σ–граф и ако важи да је $g(G) = 5$, онда је $G = K_{m,n}$ $(m, n \geq 2)$.*

Сљедећа лема омогућава дефинисање класе графова која садржи све σ^- графове.

Лема 2.11 *Ако је G граф без изолованих чворова, а његов комплемент $\overline{G}$ повезан граф, онда G садржи $2K_2$ или P_4 као пдграфове.*

На основу претходне леме може се закључити да ако је G σ^-–граф и ако је његов комплемент $\overline{G}$ повезан граф, онда G садржи бар један изоловани чвор (у противном би G садржао $2K_2$ или P_4 као индуковане подграфове, па не би био σ^-–граф). Са друге стране, ако његов комплемент $\overline{G}$ није повезан граф, онда је G потпуни производ бар два графа. Користећи ове особине, у [33] је уведен појам класе φ - на сљедећи начин:

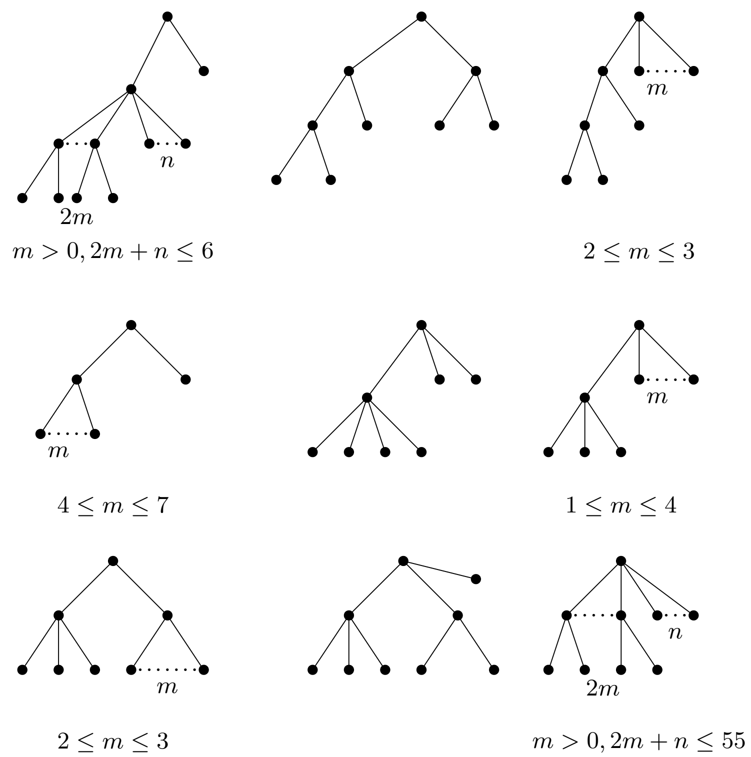
(1) $\emptyset \in \varphi$;

(2) Ако $G \in \varphi$ онда $G \cup nK_1 \in \varphi$, за $n \in N$;

(3) Ако $G_1, G_2 \in \varphi$ онда и $G_1 \nabla G_2 \in \varphi$;

(4) Сви графови из φ се могу добити једино коришћењем правила (1) – (3) коначно много пута.

Алтернативни начин дефинисања класе φ је преко минималних забрањених подграфова – φ је класа графова који не садрже индуковане подграфове који су изоморфни графовима $2K_2$ и P_4. Показује се да сваки σ^-–граф припада овој класи, док обратно не важи. Штовише, сви минимални забрањени подграфови за σ^- својство, осим $2K_2$ и P_4, припадају класи φ. Проучавањем класе φ представљен је коначан број (структурних) типова у које могу сврстати сви σ^-–графови (Слика 1б).



Слика 1б

Takoђе су показана и сљедећа својства класе φ.

Теорема 2.7 *Забрањени подграфови за E_5–E_8 за σ–својство (Слика 1а) припадају класи φ и такође су забрањени подграфови за σ^- својство.*

Теорема 2.8 *Једини забрањени подграфови за σ^-–својство облика $H \cup K_1$ су графови $(K_3 \cup 2K_1)\nabla K_1 = E_5$, $(K_2 \cup 4K_1)\nabla K_1 = E_6$, $(K_{1,2} \cup 3K_1)\nabla K_1 = E_7$, $(K_{2,4} \cup 2K_1)\nabla K_1$, $(K_{3,3} \cup 2K_1)\nabla K_1$.*

Графови који су забрањени за σ^-–својство су такође забрањени и за σ–својство, осим графа P_4, а могуће је да исто важи и за остале σ^0 графове. Додатни минимални забрањени подграфови који садрже P_4 су $E_1 - E_4$, према Леми 2.7.
У раду [17] су детаљније анализирани σ–графови и презентирани сљедећи резултати.

Теорема 2.9 *σ–граф има највише једну нетривијалну компоненту G и за њу важи један од сљедећих услова:*

(1) G је потпуни мултипартитни граф;

(2) G је подграф графа C_5;

(3) G садржи троугао.

σ–графови са нетривијалном компонентом G која садржи троугао описани су детаљније у наредној теореми. Прије навођења теореме уводимо нове ознаке. Нека је G σ–граф са скупом чворова V и нека је T троугао у G који је одређен чворовима x, y и z. Нека су скупови чворова $A, B, C \in V \setminus \{x, y, z\}$ такви да су чворови из A сусједни са тачно једним од чворова x, y, z, чворови из B сусједни са тачно два од чворова x, y, z, а чворови из C сусједни са сва три чвора троугла. На крају нека су G_A, G_B, и G_C компоненте које садрже троугао T оних подграфова графа G који су одређени скуповима чворова $V \setminus (B \cup C)$, $V \setminus (A \cup C)$, $V \setminus (A \cup B)$, респективно.

Теорема 2.10 *Нека је G повезан σ–граф који садржи троугао. За сваки троугао T из G, и подграфове G_A, G_B, и G_C важи слеђеће:*

(1) G_A је подграф једног од графов са Слике 2;

(2) За G_B важи један од слеђеćих услова:

(i) G_B је један од подграфова са Слике 3;

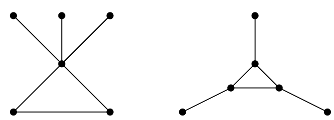
(ii) $G_B = P_4 \nabla (H \cup P_4)$ за неки σ–граф H;

(iii) $G_B = H_1 \nabla H_2 \nabla H_3$ за неке σ–графове H_1, H_2 и H_3.

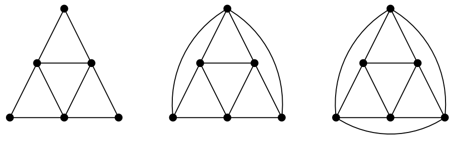
(3) За G_C важи један од слеђеćих услова:

(i) G_C подграф графа $(K_3 \cup K_1)\nabla H$ за неки σ–граф H;

(ii) G_C је добијен од графа $K_n \nabla K_3 \nabla H$ додавањем висеће гране на сваки чвор графа K_n, гдје је $n \geq 2$, а H σ–граф који не садржи ниједан подграф изоморфан неком од графова $K_3 \cup K_1$, $K_2 \cup 3K_1$, $K_{1,2} \cup 2K_1$, $K_{2,4} \cup K_1$, $K_{3,3} \cup K_1$.



Слика 2



Слика 3

Карактеризација минималних забрањених графова за $\sigma-$својство је није потпуна, али је доказана сљедећа теорема.

Теорема 2.11 *Ако је H минимални забрањени подграф за $\sigma-$својство, онда:*

(1) H је један од подграфова $2K_1$, E_1, E_2, E_3, E_4 (Слика 1а) или

(2) H припада класи φ.

2.4 $\lambda_2 \leq 1$

Један дио проблема карактеризације графова са другом сопственом вриједношћу $\lambda_2 \leq 1$ је ријешен у [7], довођењем у везу сопствене вриједности λ_2 графа G са најмањом сопственом вриједношћу његовог комплимента $\overline{G}$, тако што је показано да су неки од графова са својством $\lambda_2 \leq 1$ комплементи графова код којих најмања сопствена вриједност није мања од -2, док са друге стране важи да су комплементи графова са најмањом сопственом вриједношћу која није мања од -2 увијек графови код којих је $\lambda_2 \leq 1$.

На основу Курант-Вејлових неједнакости прво је доказана Теорема 2.12. Ознаке $\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \ldots, \overline{\lambda_n}$ ($\overline{\lambda_1} \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \overline{\lambda_n}$) користе се за сопствене вриједности графа $\overline{G}$ који је комплимент графа G са сопственим вриједностима $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Теорема 2.12 *За сваки граф важе неједнакости:*

(1) $\lambda_i + \overline{\lambda_j} \geq -1 + n\delta_{2,i+j}$

(2) $\lambda_{n-i+1} + \overline{\lambda_{n-j+1}} \geq -1 + n\delta_{n+1,i+j}$

гдје је $2 \leq i + j \leq n + 1$, а $\delta_{p,q}$ је Кронекеров $\delta-$ симбол.

Посљедица 2.2 *Ако у претходној теореми, у неједнакостима (1) и (2) ставимо $i = j = 1$ добијамо неједнакост $\lambda_1 + \overline{\lambda_1} \geq n - 1$.*

На основу претходне теореме добијен је сљедећи важан резултат.

Теорема 2.13 *Нека је G граф са другом сопственом вриједношћу $\lambda_2 \leq 1$. Тада за $\overline{G}$ важи један од сљедећих услова:*

(1) $\overline{\lambda_n} \geq -2$

(2) тачно једна сопствена вриједност графа $\overline{G}$ је мања од -2.

Ако $\overline{G}$ испуњава услов (1), онда је $\lambda_2 \leq 1$.

Доказ. Стављајући $i = 2$, $j = n-1$ у (1) у Теореми 2.12 добијамо $\lambda_2 + \overline{\lambda_{n-1}} \geq -1$. Из овога слиједи да $\lambda_2 \leq 1$ имплицира да је $\overline{\lambda_{n-1}} \geq -2$, чиме су доказана тврђења (1) и (2).
Стављајући $i = n-1$, $j = 1$ у (2) у Теореми 2.12 добијамо $\lambda_2 + \overline{\lambda_n} \leq -1$. Стога $\overline{\lambda_n} \geq -2$ имплицира $\lambda_2 \leq 1$, чиме је доказан други дио тврђења. ■

У [11] је показано да не постоје повезани графови са највише пет чворова са особином $\lambda_2 > 1$, док од укупно 112 повезаних графова са шест чворова, тачно 23 имају особину $\lambda_2 > 1$. Сви ти графови су комплементи графова који имају тачно једну сопствену вриједност мању од -2. Са друге стране постоје и графови који имају другу сопствену вриједност која је мања или једнака 1, а који су комплементи графова који имају тачно једну сопствену вриједност мању од -2.
Према претходној теореми, ако граф $\overline{G}$ има све сопствене вриједности веће или једнаке од -2, онда је $\lambda_2(G) < 1$ или $\lambda_2(G) = 1$. Показује се да су графови G са особином $\lambda_n(G) \geq -2$ или уопштени линијски графови или изузети графови (графови који се могу представити помоћу корјеног система E_8, видјети [4]).
Сопствена вриједност графа је *главна сопствена вриједност* ако сопствени потпростор који јој одговара садржи вектор чија сума координата није нула.
Детаљнија анализа раздваја случајеве када је $\lambda_2 < 1$ или $\lambda_2 = 1$.

Теорема 2.14 *Комплементи графова који имају најмању сопствену вриједност λ_n већа од -2 имају другу сопствену вриједност $\overline{\lambda_2}$ мању од 1.*

Сви графови чија је најмања сопствена вриједност већа од -2 су описани у[18]. Познато је да за повезан граф G са најмањом сопственом вриједношћу већом од -2 важи један од услова:

(1) $G = L(T; 1, 0, \ldots, 0)$, гдје је T стабло,

(2) $G = L(H)$, гдје је H уницикличан граф са непарном контуром,

(3) G је један од 573 графа који је настао из коријеног система E_8.

Посљедица 2.3 *Ако свака компонента графа задовољава неки од претходна три услова, комплемент тог графа има другу сопствену вриједност мању од 1.*

Нека је $\overline{G}$ граф чија је најмања сопствена вриједност -2. Онда важи да је $\lambda_2(G) < 1$ ако и само ако је сопствена вриједност -2 проста главна сопствена вриједност графа $\overline{G}$. У супротном важи да је $\lambda_2(G) = 1$.

Уопштене графове грана са простом главном сопственом вриједношћу -2 описује наредна теорема.

Теорема 2.15 *Нека је $G = L(H; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ повезан уопштен граф грана чија је најмања сопствена вриједност -2. Комплемент $\overline{G}$ графа G има другу сопствену вриједност мању од 1 ако је испуњен један од услова:*

1) H је стабло, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2$ и постоје чворови i и j из H на непарном растојању, за које је $a_i \neq 0$, $a_j \neq 0$,

2) H садржи непарну контуру и важи $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

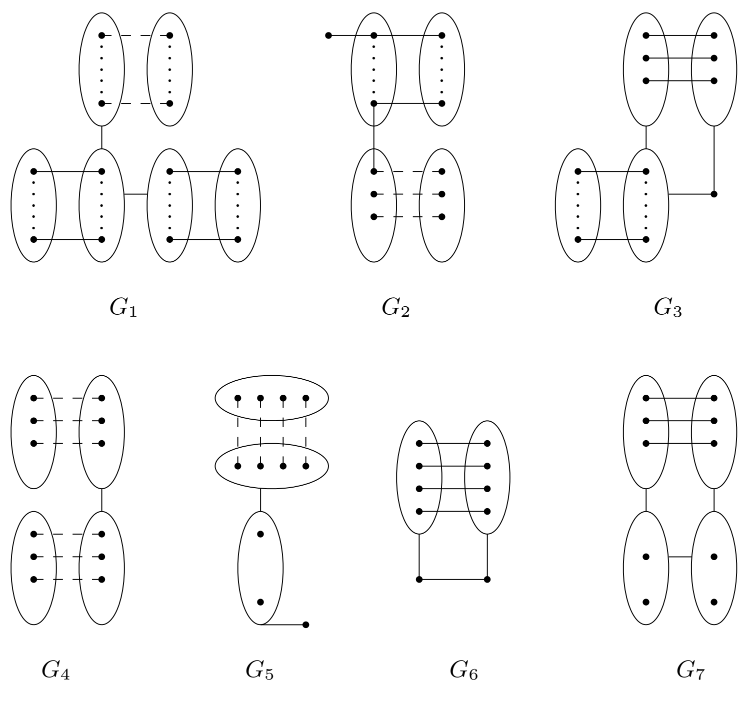
Ако није испуњен ниједан од услова (1) *и* (2), *онда важи да је* $\overline{\lambda_2} = 1$.

Ако је $\overline{G}$ изузети граф са најмањом сопственом вриједношћу -2, тада, као што је наглашено, важи $\lambda_2(G) \leq 1$ и притом је $\lambda_2(G) < 1$ ако и само ако је -2 проста главна сопствена вриједност графа $\overline{G}$. Повезан изузети граф са простом сопственом вријдношћу -2 има 7, 8 или 9 чворова, па стога постоји коначан број таквих графова. Остаје да се утврди који од њих имају -2 као главну сопствену вриједност.
Такође је показано да ако за граф G важи да је $\lambda_2(G) \leq 1$, онда G има струк дужине највише 6 или је G шума и дијаметар графа G је највише 4.

Сада наводимо карактеризацију графова са својством $\lambda_2 \leq 1$ са посебним акцентом на бипартитне графове, графове грана, уопштене графове грана, бицикличке, уницикличке, регуларне графове и короне.

2.4.1 Бипартитни графови

Повезани бипартитни графови са особином $\lambda_2 \leq 1$ су описани у [27]. Најприје је одређена фамилија графова $G_1 - G_7$ (Слика 4).



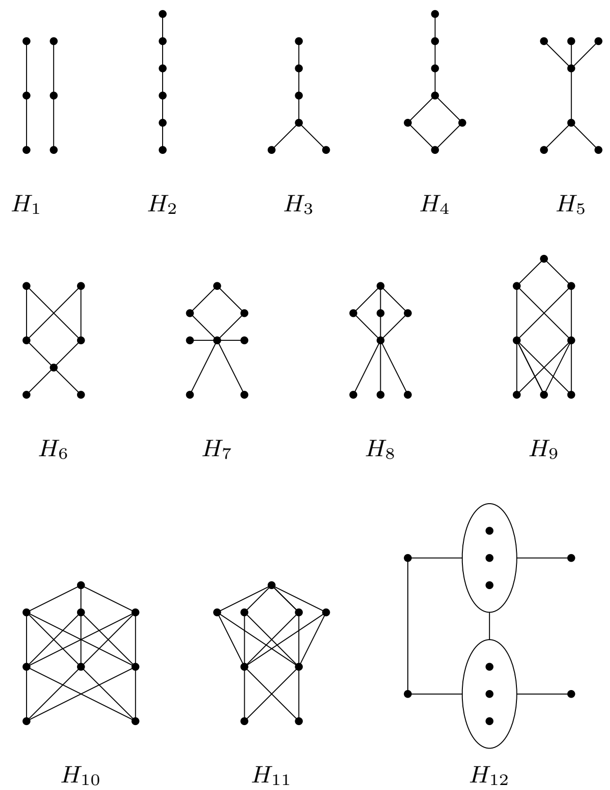
Слика 4

На сликама елипса представља граф који се састоји само од изолованих чворова. Ако су двије елипсе повезане једном линијом представљају потпуни бипартитни граф. Ако су двије елипсе повезане са k ($k \geq 1$) пуних линија, онда оне представљају бипартитни граф са $k + k$ чворова у коме су два чвора сусједна ако и само ако су повезана пуном линијом. Ако су двије елипсе повезане са k ($k \geq 1$) испрекиданих линија, онда оне представљају потпуни бипартитни граф из кога је уклоњено тачно k међусобно независних грана.

Теорема 2.16 *Графови $G_1 - G_7$ имају особину $\lambda_2 \leq 1$ (Слика 4).*

Пошто је својство $\lambda_2(G) \leq 1$ насљедно својство, постоје минимални забрањени подграфови за то својство. Графови $H_1 - H_{12}$ (Слика 5) су минимални забрањени бипартитни подграфови са особином $\lambda_2(G) > 1$ и показано је да су то једини бипартитни графови са том особином. Дакле, важи сљедећа теорема.

Теорема 2.17 *Постоји тачно 12 минималних бипартитних графова са особином $\lambda_2(G) > 1$. То су графови $H_1 - H_{12}$ (Слика 5).*



Слика 5

Помоћу ове двије фамилије графова одређени су сви повезани бипартитни графови са особином $\lambda_2 \leq 1$.

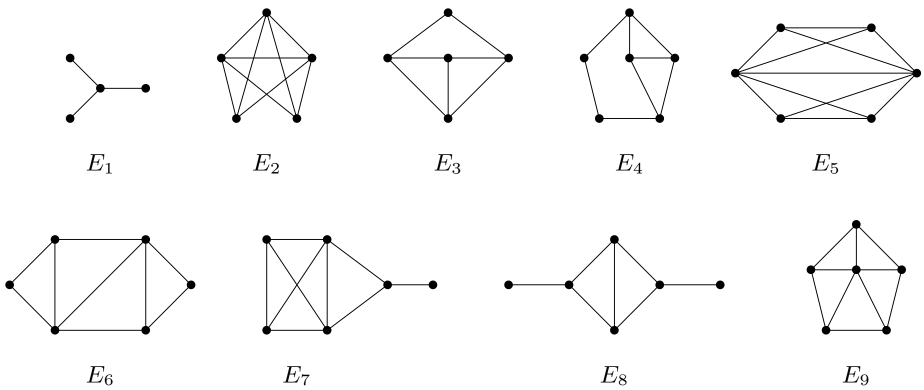
Теорема 2.18 *Ако повезан бипартитни граф G не садржи као подграф ниједан од графова $H_1 - H_{12}$ (Слика 5), онда је G подграф неког графова $G_1 - G_7$ (Слика 4).*

Теорема 2.19 *Повезан бипартитни граф G има особину $\lambda_2(G) \leq 1$ ако и само ако је G подграф неког од графова $G_1 - G_7$ (Слика 4).*

2.4.2 Линијски графови

Карактеризација линијских графова је дата у [1] тако што је показано да постоји тачно девет минималних графова који нису линијски графови, док су у [28] су описани сви повезани линијски графови са особином $\lambda_2(G) \leq 1$, као и сви минимални линијски графови са особином $\lambda_2(G) > 1$.

Теорема 2.20 *Граф G је линијски граф ако и само ако не садржи као свој индуковани подграф ниједан од графова ($E_1 - E_9$) (Слика 6а).*

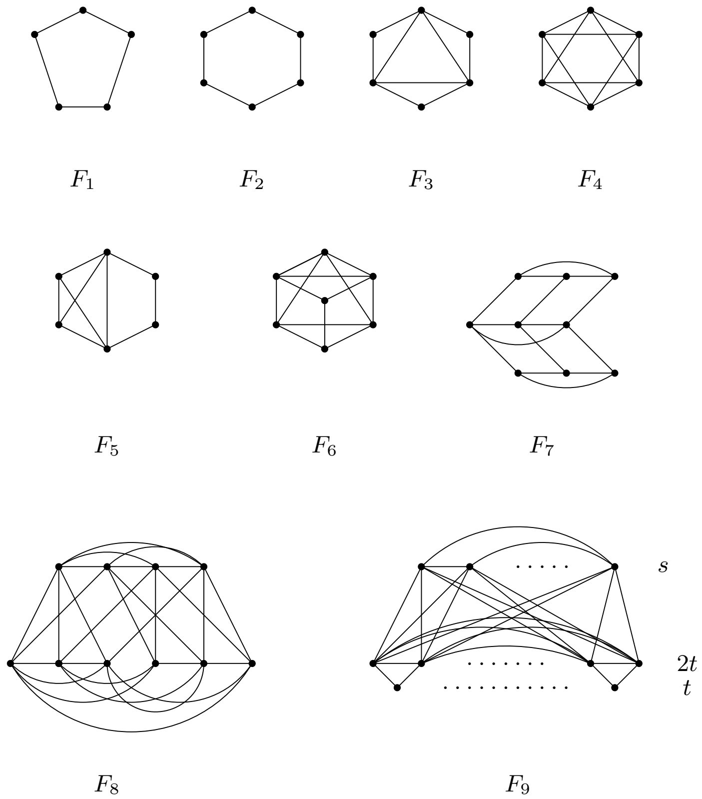


Слика 6а

Теорема 2.21 *Графови $F_1, \ldots, F_9$ (Слика 6б) имају својство $\lambda_2(F_i) \leq 1$ ($i = 1, \ldots, 9$).*

Граф F_9 има $s + 3t$ ($s, t \geq 1$) чворова и садржи као подграф комплетан граф K_{s+2t}. Приликом одређивања свих повезаних линијских графова са својством $\lambda_2(G) \leq 1$ наприје је показано да у скупу свих линијских графова са највише шест чворова постоји тачно 16 забрањених подграфова за поменуто својство (Слика 7), од којих су тачно три графа неповезани графови.

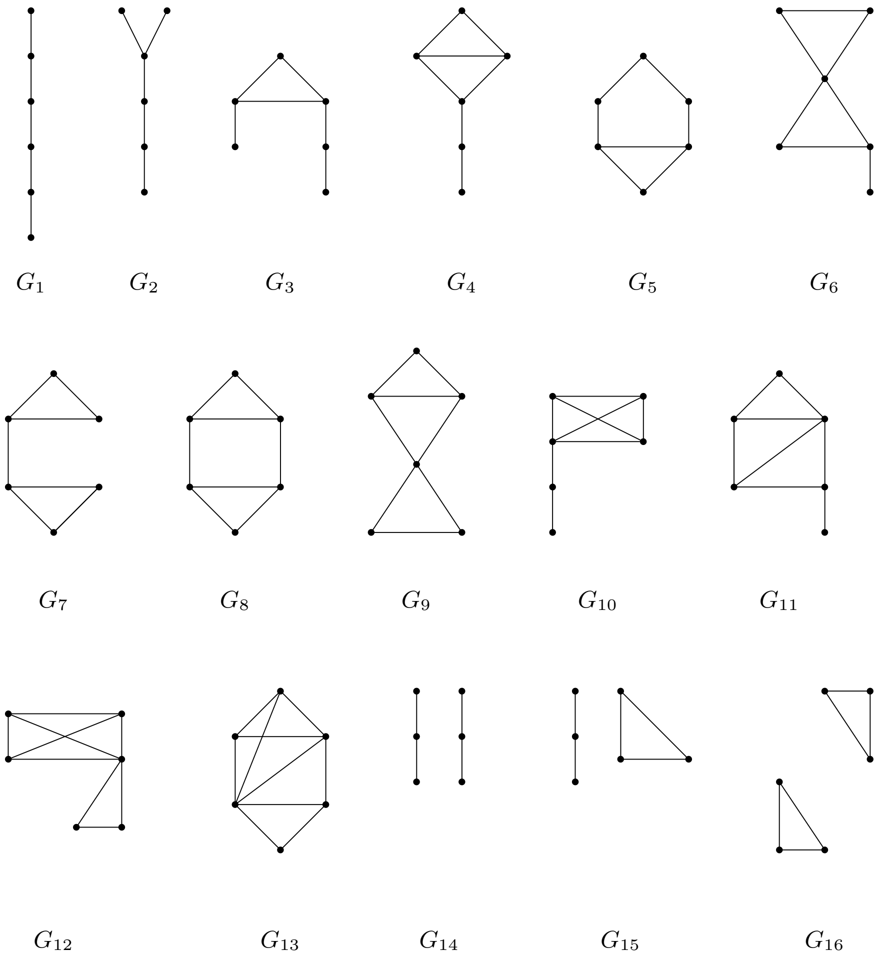
Теорема 2.22 *Ако повезан линијски граф не садржи као свој индуковани подграф ниједан од графова $G_1 - G_{16}$ (Слика 7), онда је G индуковани подграф неког од графова $F_1 - F_9$ (Слика 6б).*



Слика 6б

Теорема 2.23 *За повезан линијски граф G важи да је $\lambda_2(G) \leq 1$ ако и само ако је он подграф једног од графова $F_1 - F_9$ (Слика 6б).*

Доказ. Претпоставимо да је G повезан линијски граф са својством $\lambda_2(G) \leq 1$. Из Теореме о преплитању слиједи да G не садржи као индуковани подграф ниједан од графова $G_1 - G_{16}$ на Слици 7, па онда, на основу претходне теореме, слиједи да G мора бити индуковани подграф неког од графова $F_1 - F_9$ (Слика 6а). Обратно, ако је је повезан линијски граф G индуковани подграф неког од графова $F_1 - F_9$ на Слици 6б, онда је према Теореми о преплитању $\lambda_2(G) \leq 1$. Доказ је комплетан. ■



Слика 7

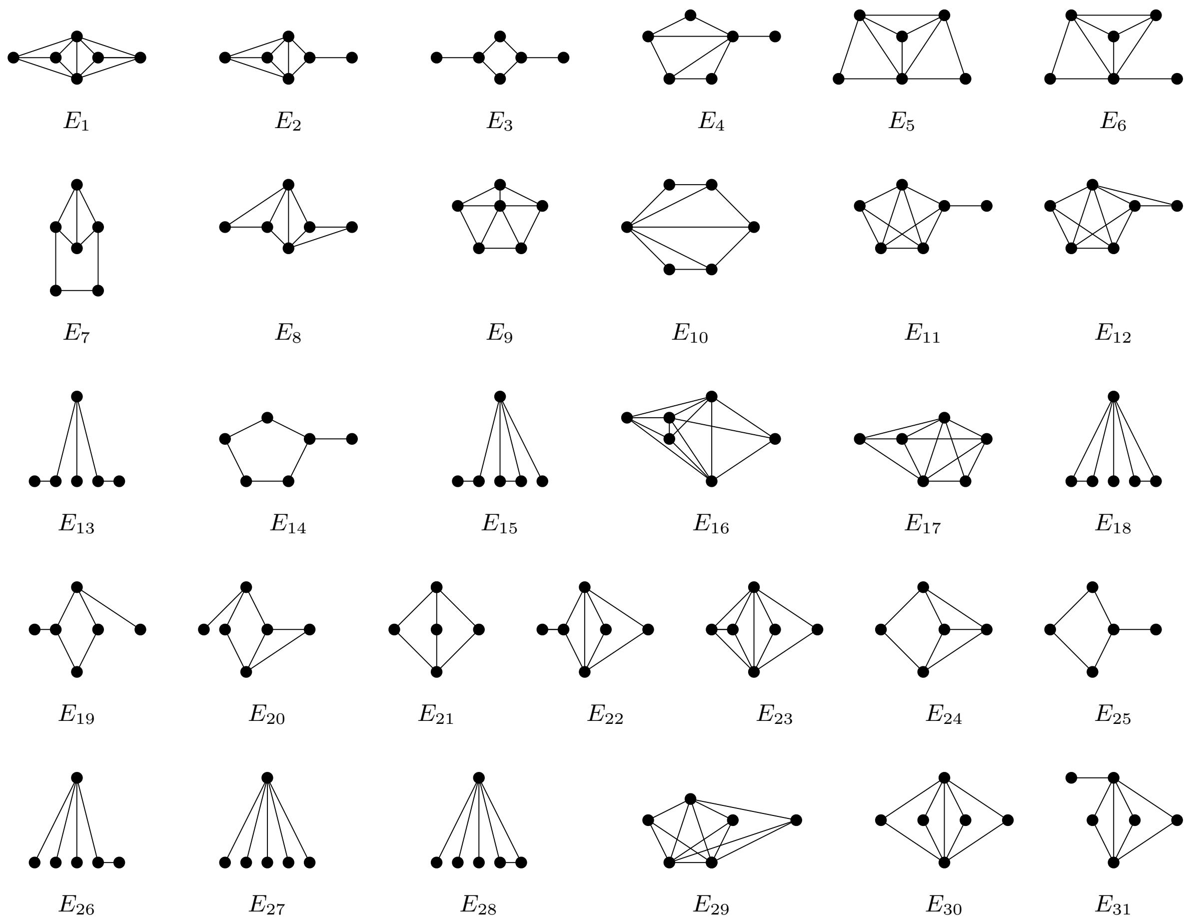
У [28] су такође одређени сви минимални линијски графови са својством $\lambda_2 > 1$. Важи сљедећа теорема.

Теорема 2.24 *Графови $G_1 - G_{16}$ (Слика 7) су сви минимални графови грана за које важи да је $\lambda_2 > 1$.*

2.4.3 Уопштени линијски графови

Уопштени линијски графови су описани у [9] и [10] тиме што је показано да постоји тачно 31 минимални граф који није уопштени линијски граф (Слика 8а), док су у [29] описани сви повезани уопштени линијски графови са особином $\lambda_2(G) \leq 1$, као и сви минимални уопштени линијски графови са особином $\lambda_2(G) > 1$.

Теорема 2.25 *Граф G је уопштени линијски граф ако и само ако не садржи као свој индуковани подграф ниједан од графова $E_1 - E_{31}$ (Слика 8а).*



Слика 8а

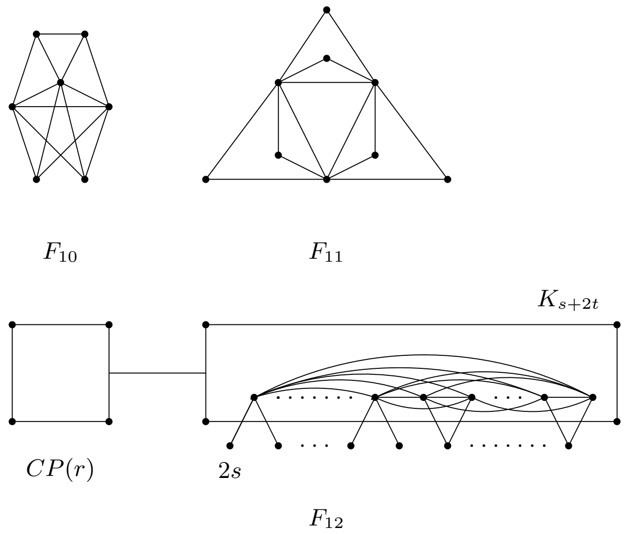
Повезани уопштени графови грана G са својством $\lambda_2(G) \leq 1$ могу описати сљедећим теоремама ([28] и [29]).

Теорема 2.26 *Графови F_{10}, F_{11} и F_{12} (Слика 8б) имају својство $\lambda_2(F_i) \leq 1$ $(i = 10, 11, 12)$.*

Код графа F_{12}, линија између $CP(r)$ и K_{s+2t} означава потпуни производ ова два графа, тј. у овом графу имамо све могуће гране између $CP(r)$ и K_{s+2t}.
Како је својство $\lambda_2(G) \leq 1$ насљедно, слично као и у претходним разматрањима оно имплицира егзистенцију минималних уопштених лнијских графова који не задовољавају то својство, тј. егзистенцију минималних забрањених подграфова за то својство.
У [29] је показано да у скупу свих уопштених линијских графова са највише 7 чворова постоји тачно 21 забрањени граф (18 повезаних и 3 неповезана). Тачно 5 од ових графова нису линијски графови и они су приказани на Слици 9. Остали графови из поменутог скупа забрањених

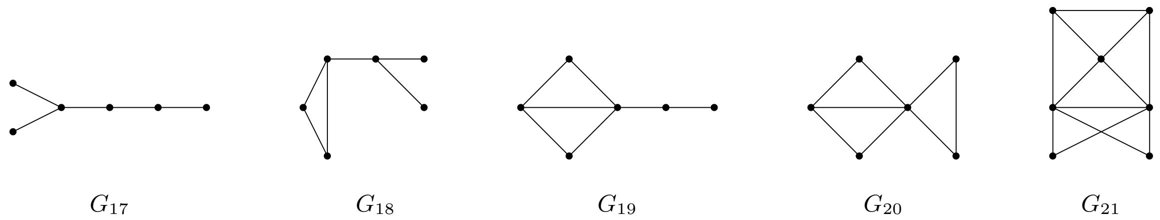
графова $\{G_1, G_2, \ldots, G_{21}\}$ су приказани на Слици 7.

Теорема 2.27 *Ако повезан уопштени линијски граф G не саджи као индуковани подграф ниједан од графова $G_1 - G_{21}$ (Слика 7 и Слика 9), онда је G индуковани подграф неког од графова $F_1 - F_{12}$ (Слика 6б и Слика 8б).*



Слика 8б

Теорема 2.28 *Повезан уопштени граф грана G има својство $\lambda_2(G) \leq 1$ ако и само ако је он подграф једног од графова $F_1 - F_{12}$ (Слика 6б и Слика 8б).*



Слика 9

Такође су познати и сви минимални уопштени линијски графови са особином $\lambda_2 > 1$. Важи сљедећа теорема.

Теорема 2.29 *Постоји тачно 21 минимални уопштени линијски граф са особином $\lambda_2 > 1$. То су графови $G_1 - G_{21}$ (Слика 7 и Слика 9).*

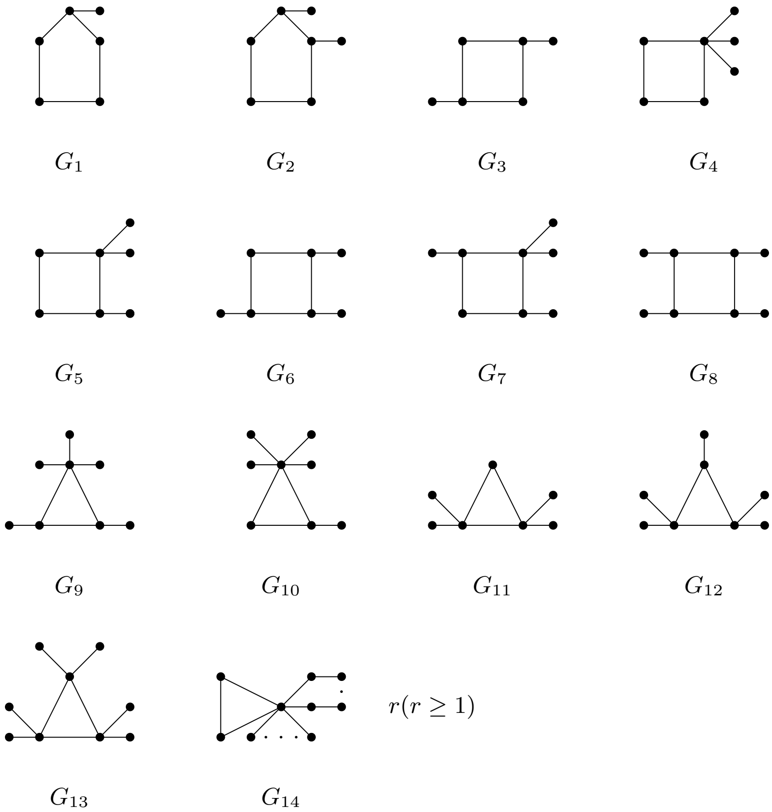
2.4.4 Унициклички графови

Сви унициклички графови чија друга сопствена вриједност није већа од 1 су описани у [19]. Са C_3^{n-3} означен је унициклички граф формиран тако што су граном повезана два чвора степена 1 графа $K_{1,n-1}$. Сљедеће три теореме у потпуности одређују дату фамилију графова.

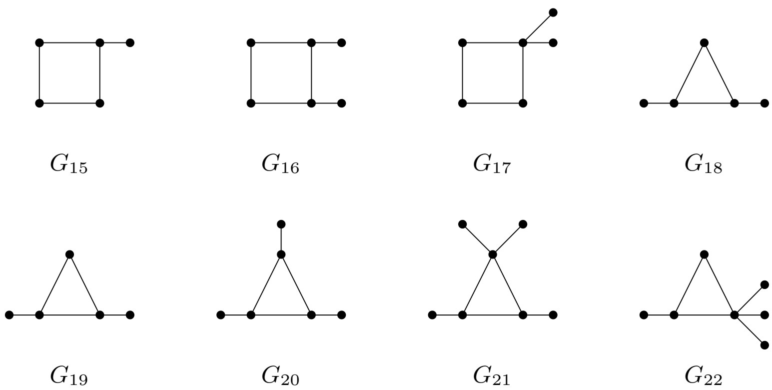
Теорема 2.30 *За унициклички граф G важи $\lambda_2(G) < 1$ ако и само ако је G или један од графова C_3^{n-3} ($n \geq 3$), C_4, C_5 или један од графова $G_{15} - G_{22}$ (Слика 11).*

Теорема 2.31 *За унициклички граф G важи $\lambda_2(G) = 1$ ако и само ако је G или контура C_6 или један од графова $G_1 - G_{14}$ (Слика 10).*

Посљедица 2.4 *За унициклички граф G важи $\lambda_2(G) \leq 1$ ако и само ако је G или контура C_6 или један од графова $G_1 - G_{14}$ (Слика 10), или неки њихов индуковани унициклички подграф.*



Слика 10



Слика 11

2.4.5 Бициклички графови

Бициклички графови са особином $\lambda_2 \leq 1$ одређени су у [20]. Постоје два типа бицикличких графова, и они су овдје детаљније описани.

Нека су C_p и C_q двије контуре без заједничких чворова и нека је v_1 чвор који припада контури C_p, а v_l чвор који припада контури C_q.
Граф који се добија повезивањем чвора v_1 са чвором v_l путем дужине $l-1(l \geq 1)$, гдје се под повезивањем путем дужине 0 (за $l = 1$) подразумијева идентификација чворова v_1 и v_l, назива се ∞–граф и означава се са $B(p,l,q)$. Без смањења општости, овдје се претпоставја да је $p \leq q$. Са $\mathbf{B}(p,l,q)$ се означава скуп свих бицикличких графова који су $B(p,l,q)$ са додатим стаблима. За овакве бицикличке графове каже се да су типа $\mathbf{B}_\infty$.

Нека су P_{l+1}, P_{p+1}, P_{q+1} три пута без заједничких чворова, гдје је $1 \leq l \leq p \leq q$, при чему p и q нису исовремено једнаки 1. Граф који се добија додавањем чвора u који је инцидентан само са три почетна чвора ова три пута и чвора v који је инцидентан само са три крајња чвора ова три пута назива се θ–граф и означава се са $\theta(p,l,q)$. Са $\Theta(p,l,q)$ означава се скуп свих бцикличких графова који су $\theta(p,l,q)$ са додатим стаблима. За овакве бицикличке графове се каже да су типа $\mathbf{B}_\theta$.

Сљедећим теоремама су описани бициклички графови са својством $\lambda_2 \leq 1$.

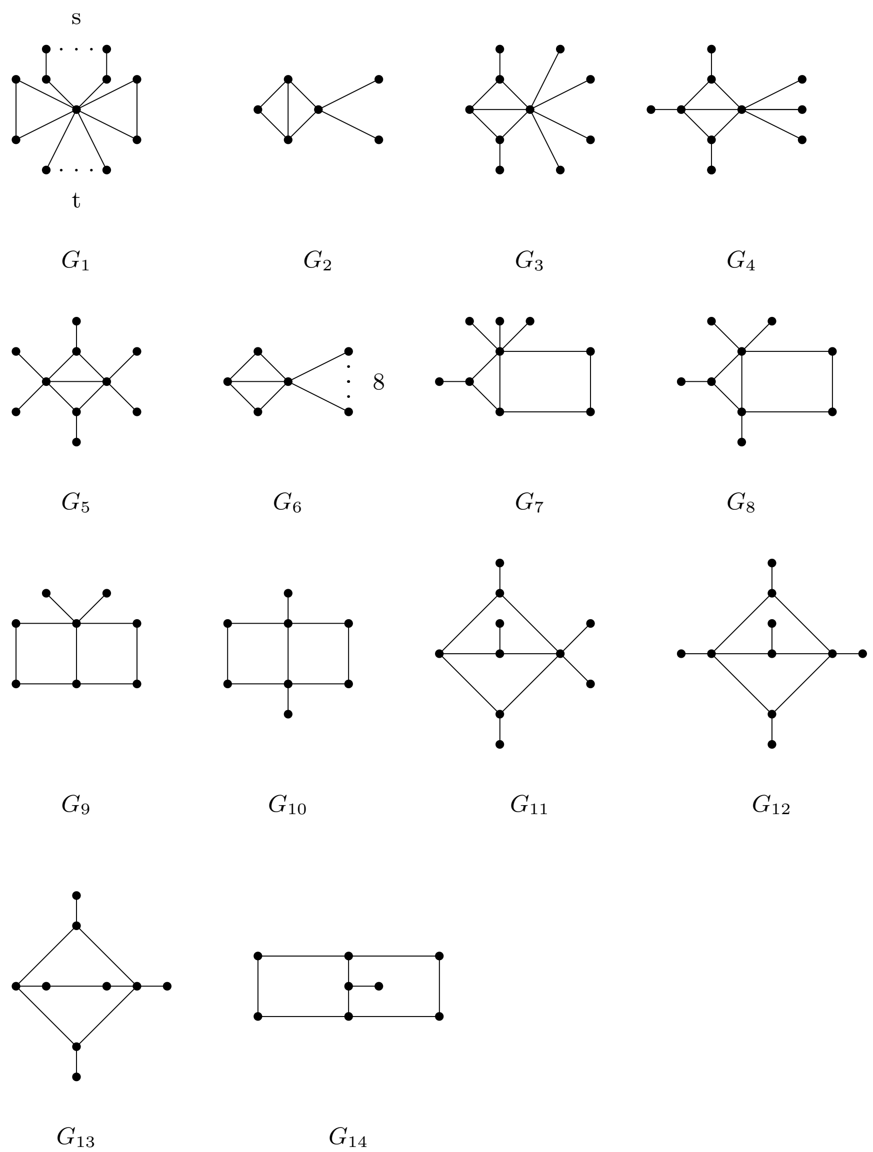
Теорема 2.32 *Бициклички граф G има својство $\lambda_2(G) \leq 1$ ако и само ако је G индуковани бициклички подграф једног од графова $G_1 - G_{14}$ (Слика 12), за $s,\ t \geq 0$.*

Доказ претходне теореме непосредно слиједи из наредне двије теореме.

Теорема 2.33 *Нека је граф G типа $\boldsymbol{B}_\infty$. Тада је $\lambda_2(G) \geq 1$, а једнакост важи само ако је G граф G_1 (Слика 12), за $s,\ t \geq 0$.*

Теорема 2.34 *За бициклички граф G типа $\boldsymbol{B}_\theta$ важи $\lambda_2(G) \leq 1$ ако и само ако је G индуковани бициклички подграф једног од графова $G_2 - G_{14}$ (Слика 12).*

Из претходних теорема добијамо сљедеће посљедице.



Слика 12

Посљедица 2.5 *Ако је G бициклички граф са бројем чворова $n > 12$, онда је $\lambda_2(G) \geq 1$. Притом је $\lambda_2(G) = 1$ ако и само ако је G граф G_1 (Слика 12), за $s,\ t \geq 0$.*

Посљедица 2.6 *Ако је G бициклички граф са бројем чворова $n > 12$, код кога је број независних грана q, онда је $\lambda_2(G) \geq 1$. Притом је $\lambda_2(G) = 1$ ако и само ако је G граф G_1 (Слика 12), гдје је $s = q - 3,\ t \geq 1$ или $s = q - 2,\ t = 0$.*

2.4.6 Регуларни графови

Регуларни графови чија са својством $\lambda_2(G) \leq 1$ су описани у [38].
Двијема теоремама које слиједе се дају неке особине регуларних графова.

Теорема 2.35 *Нека је G повезан регуларан граф, такав да је $\lambda_2(G) \leq 1$. Тада је $diam(G) \leq 3$.*

Теорема 2.36 *Нека су G и H регуларни графови. Тада важи:*

(1) $\lambda_2(G \nabla H) \leq 1$ *ако и само ако је* $\lambda_2(G) \leq 1$ *и* $\lambda_2(H) \leq 1$*,*

(1) $\lambda_2(\overline{G}) \leq 1$ *ако и само ако најмања сопствена вриједност графа G није мања од -2.*

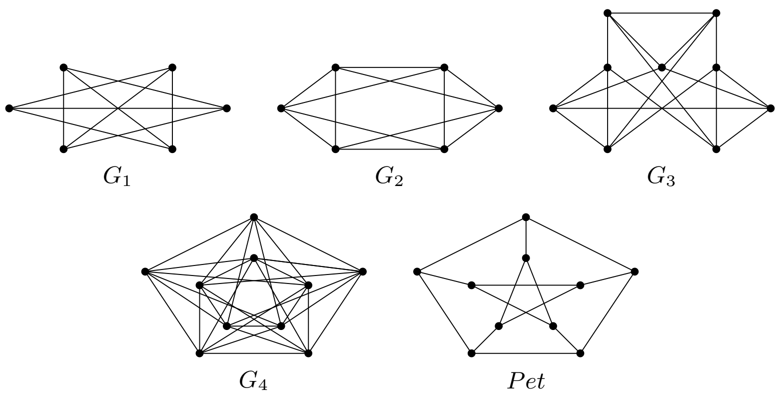
Наредна два тврђења дају неке опште резултате за регуларне графове као и опис свих регуларних графова графова G таквих да је $\lambda_2(G) \leq 1$ и $\lambda_2(\overline{G}) \leq 1$.

Теорема 2.37 *Ако је G повезан регуларан граф са n чворова за који важи $\lambda_2(G) \leq 1$ и $\lambda_n(G) \geq -2$, онда је испуњен један од сљедећих услова:*

(1) G је повезан регуларан линијски граф за који важи $\lambda_2(G) \leq 1$ (овдје спадају графови $C_n(3 \leq n \leq 6)$, K_n $(n \geq 1)$ и графови $G_1 - G_4$ са Слике 13),

(2) G је коктелски граф,

(3) G је Петерсенов граф (граф Pet на слици 13).



Слика 13

Посљедица 2.7 *Нека је G повезан регуларан граф. Тада G и $\overline{G}$ имају другу сопствену вриједност која није већа од 1 ако и само ако је G један од три типа графова описаних у претходној теореми.*

Наредна теорема даје карактеризацију свих регуларних графова чија друга сопствена вриједност није већа од 1.

Теорема 2.38 *Сваки повезан регуларан граф са n чворова за који важи $\lambda_2(G) \leq 1$ је комплемент (не обавезно повезаног) регуларног графа чија је свака компонента:*

(1) повезан регуларан линијски граф или

(2) коктелски граф или

(3) један од 187 повезаних регуларних изузетих графова.

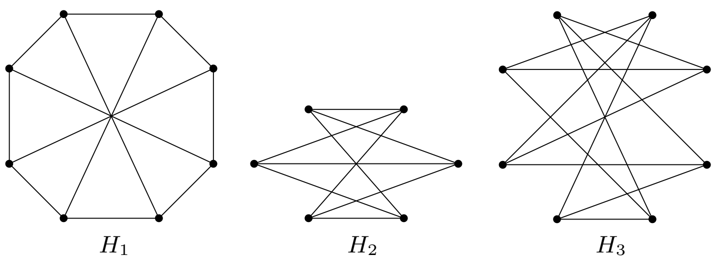
Наредне теореме дају опис регуларних графова са особином $\lambda_2(G) \leq 1$ у неким посебним случајевима.

Теорема 2.39 *Сваки повезан регуларан граф (са n чворова) степена $n-1$ ($n \geq 1$) или степена $n-2$ ($n \geq 4$) има другу сопствену вриједност која није већа од 1.*

Теорема 2.40 *(i) За повезан регуларан граф G (са $n \geq 3$ чворова) степена 2 важи $\lambda_2(G) \leq 1$ ако и само ако је G контура C_n $(3 \leq n \leq 6)$.*

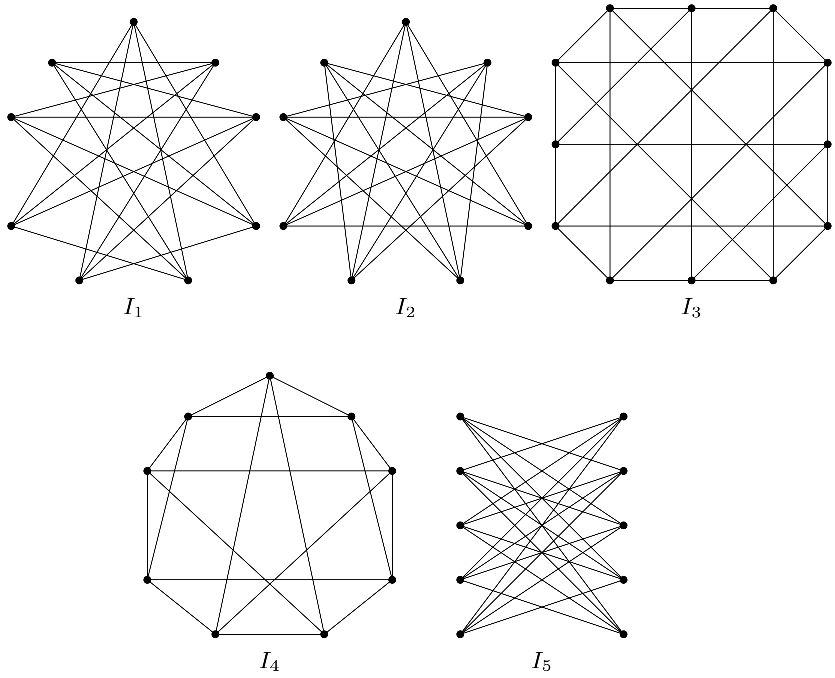
(ii) За повезан регуларан граф G (са $n \geq 5$ чворова) степена $n-3$ важи $\lambda_2(G) \leq 1$ ако и само ако је његов комплимент $\overline{G}$ контура C_n $(n \geq 5)$ или неповезан граф чије су све компоненте повезаности контуре.

Теорема 2.41 *Нека је G повезан регуларан граф (са n чворова) степена 3 за који важи $\lambda_2(G) \leq 1$. Онда је G: K_4, Петерсенов граф (граф Pet, Слика 13), G_1 (Слика 13) или један од графова $H_1 - H_3$ (Слика 14).*



Слика 14

Теорема 2.42 *Нека је G повезан регуларан граф (са n чворова) степена 4 за који важи $\lambda_2(G) \leq 1$. Онда је G један од сљедећих графова: K_5, $\overline{2K_4}$, $\overline{C_7}$, $\overline{C_3 \cup C_4}$, G_2, G_3 (Слика 13) или $I_1 - I_5$ (Слика 15).*



Слика 15

2.4.7 Короне

Подсјетимо се да се корона $G_1 \circ G_2$ графова G_1 и G_2 добија од графова G_1 (са n_1 чворова) и графа $n_1 G_2$ (n_1 копија графа G_2) тако што сваки i–ти чвор у G_1 повежемо граном са сваким чвором i–те копије графа G_2 ($i = 1, 2, \ldots, n_1$). Посебно, ако је $n_1 = 1$ добијамо да је сваки конус корона.

У наредним теоремама се дају описи свих корона $G_1 \circ G_2$, различитих од конуса (тј. таквих да је $G_1 \neq K_1$) за које важи $\lambda_2(G_1 \circ G_2) \leq 1$, као и одређена спектрална својства и примјери конуса $K_1 \circ G_2$ за које такође важи $\lambda_2(K_1 \circ G_2) \leq 1$ [38].

Теорема 2.43 *Нека граф G_1 има бар два чвора. Ако је $G_2 = 2K_1$, онда је $\lambda_2(G_1 \circ G_2) \leq 1$ ако и само ако је G_1 комплетан граф.*

Теорема 2.44 *Нека су $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ сопствене вриједности произвољног графа G. Онда су све сопствене вриједности графа $G \circ K_1$ одређене једначинама*

$$\lambda^2 + \mu_i \lambda - 1 = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Посљедица 2.8 *Ако граф G има бар једну грану, онда је $\lambda_2(G \circ K_1) \leq 1$ ако и само ако сви чворови графа G који нису изоловани формирају потпуни мултипартитни граф.*

У наредним тврђењима се разматра случај када је $G_1 = K_1$, тј. када имамо конус над G $Cone(G) = K_1 \circ G$.

Теорема 2.45 *Нека је G граф са n чворова за који важи $\lambda_2(G) \leq 1$. Онда је $\lambda_2(Cone(G)) \leq 1$ ако и само ако је $P_{\overline{G}}(-2) \leq 1 - 2P_G(1)$, кад год је n парно и $P_{\overline{G}}(-2) \geq 2P_G(1) - 1$, кад год је n непарно.*

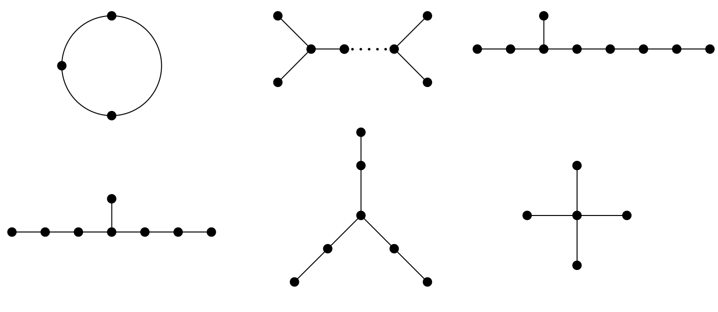
Теорема 2.46 *Ако је G регуларан граф за који важи $\lambda_2(G) \leq 1$, онда је $\lambda_2(Cone(G)) \leq 1$.*

Посљедица 2.9 *Нека је G граф са n чворова за који важи $\lambda_2(G) \leq 1$ и нека је $\lambda_n(\overline{G}) \geq -2$. Тада важи да је $\lambda_2(Cone(G)) \leq 1$.*

Користећи претходну посљедицу добија се да ако је $\lambda_2(G) \leq 1$ и $\overline{G}$ уопштени линијски граф, онда је $\lambda_2(Cone(G)) \leq 1$.

2.5 $\lambda_2 \leq 2$

Рефлексивни графом се назива граф G за који важи $\lambda_2(G) \leq 2$. Ови графови имају примјену у теорији група рефлексије, одакле и потиче њихов назив. Ако за рефлексивни граф важи да је индекс графа већи од 2, овакав граф се назива хиперболички.
Рефлексивна стабла су проучавана у [22], док су [25] дати неки општији резултати који се могу примијенити на дато λ_2.
Као што је и раније указано, код повезаних графова друга сопствена вриједност графа је увијек мања од индекса графа, док се код неповезаног графа друга сопствена вриједност и индекс неке компоненте повезаности могу да буду исти.
Код рефлексивних графова посебно су интересантни *Смитови графови*, тј. графови код којих је $\lambda_1 \leq 2$. Показано је да је скуп максималних графова за насљедно својство $\lambda_1 \leq 2$ коначан (Слика 16).



Слика 16

Неке важне особине Смитових графова дате су преко нередне теореме и наредне леме.

Теорема 2.47 *Нека је $\lambda_1(G)$ индекс графа G. Тада је $\lambda_1 \leq 2$ ($\lambda_1 < 2$) ако и само ако је свака компонента повезаности графа G подграф (прави подграф) једног од графова са Слике 16, који сви имају индекс 2.*

Лема 2.12 *Нека је G повезан граф који се добија проширивањем било ког Смитовог графа чвором произвољног степена. Онда је $P_G(2) < 0$.*

Да би презентовали резултате, потребно је увести неке нове појмове и ознаке.
Граф (G_1, x_1, x_2, G_2) означава граф који се састоји од два дисјунктна графа G_1 и G_2 и једне гране која је инцидентна са чворовима $x_1 \in G_1$ и $x_2 \in G_2$.
Граф G се назива *λ–критичним* у чвору x ако је $\lambda_1(G - x) < \lambda < \lambda_1(G)$.
Граф (G_1, x_1, x_2, G_2) се назива *λ–близанац* ако је граф G_1 λ–критичан у x_1 и граф G_2 λ–критичан у x_2.
За стабло T се каже да је *λ–тривијално* ако постоји чвор $x \in T$ такав да је $\lambda_1(T - x) \leq \lambda$.
Подстабло T_1 стабла T се назива *екстремално* ако је T_1 компонента графа $T - x$ за неки чвор $x \in T$.
У [25] су доказане сљедеће теореме (Теорема 2.46–2.48).

Теорема 2.48 *Ако стабло T са особином $\lambda_2(T) \leq \lambda$ садржи екстремално подстабло са сопственом вриједношћу λ, онда је стабло T λ–тривијално.*

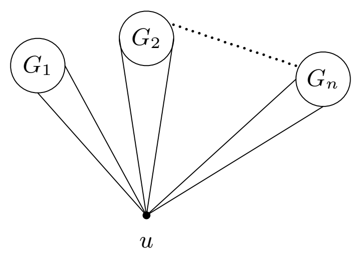
Теорема 2.49 *Стабло T са особином $\lambda_2(T) \leq \lambda$ је или λ–тривијално или је λ–близанац.*

Теорема 2.50 *Нека је T λ–тривијално стабло и $x \in T$ чвор такав да је $\lambda_1(T - x) \leq \lambda$. Онда је $\lambda_2(T) = \lambda$ ако и само ако k компоненти ($k \geq 2$) графа $T - x$ имају највећу сопствену вриједност λ; у том случају је x специјални чвор стабла T а λ је сопствена вриједност стабла T реда $k + 1$.*

Стављајући $\lambda = 2$ у Теоремама 2.46 и 2.47 добијамо сљедећу посљедицу.

Посљедица 2.10 *Ако рефлексивно стабло садржи екстремално подстабло које је Смитово стабло, онда је оно 2-тривијално.*
Рефлексивно стабло је или 2-тривијално или 2-близанац.

Општији случај је презентован у наредној теореми [32]. Овдје се разматра граф G са артикулационим чвором u, при чему су компоненте $G_1, G_2, \ldots, G_n$ компоненте од $G - u$ (Слика 17). Притом, термини "граф је позитиван, нула или негативан" значе да је индекс графа већи од 2, једнак 2, или је мањи од 2.



Слика 17

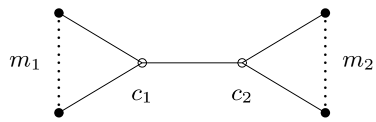
Теорема 2.51 *Нека је G граф са Слике 17, гдје је u артикулацони чвор. Тада важи:*

(a) *ако су двије компоненте графа $G - u$ позитивне или ако је само једна позитивна а нека од преосталих нула, онда је $\lambda_2 > 2$;*

(б) *ако су бар двије компоненте графа $G - u$ нула и било која од преосталих није позитивна, онда је $\lambda_2 = 2$;*

(в) *ако је најмање једна компонента графа $G - u$ нула, а било која од преосталих негативна, онда је $\lambda_2 < 2$.*

Ова теоремом је обухваћен велики број графова за које даје одговор да ли су рефлексивни. Међутим, овим тврђењем нису обухваћени графови код којих је један од графова $G_1, G_2, \ldots, G_n$ позитиван, док су преостали негативни. У тој ситуацији имамо велики број случајева када је $\lambda_2 < 2$ и такође када је $\lambda_2 > 2$.
Управо ови случајеви су предмет даљих истраживања, која су започета у раду [32]. Прва класа која се показала подесном за рјешавање овог проблема је једна посебна класа бицикличких графова. Ови графови се састоје из "централног дијела" (који остаје након што се из графа сукцесивно уклоне сви чворови степена 1) и додатих стабала. У [32] су разматрани графови код којих централни дио садржи двије дисјунктне контуре повезане путем. Ако је дужина таквог пута најмање 2 онда, према Теореми 2.49, одговарајући граф није рефлексивни граф, осим ако се састоји само од двије контуре које су повезане јединственим путем дужине 2.
Стога су једини графови (из поменуте класе графова) на које се не може примијенити теорема 2.49 управо они који се састоје из двије дисјунктне контуре, њима додатих стабала и једне гране који повезује чвор c_1 са чвором c_2, гдје чвор c_1 припада контури дужине $n_1 = m_1 + 2$, а чвор c_2 контури дужине $n_2 = m_2 + 2$ (c_1c_2 је мост) (Слика 18).



Слика 18

Наравно, интересантни су само случајеви када Теорема 2.49 не даје одговор на питање да ли је граф рефлексиван, а то су случајеви када свака контура има додато бар по једно стабло. Дакле, у раду су разматрани бициклички графови G са мостом c_1c_2 између контура за које су обје компоненте $G - c_1c_2$ 2-критичне у c_1 и c_2 респективно, тј. такви графови да послије уклањања било којег од артикулационих чворова c_1 одн. c_2 добијамо тачно једну позитивну компоненту, док су остале негативне.
Главни резултат у раду [32] је сљедећа теорема.

Теорема 2.52 *Ако је G бициклички граф са мостом између контура и ако се на њега не може примијенити Теорема 2.49, онда је он рефлексиван ако и само ако је он индуковани подграф једног од 99 графова (из фамилије графова чија је комплетна листа дата у [32]).*
Ако би се умјесто бициклчки рекло најмање бициклички, закључак би обухватио још један граф који је трициклички.

Такође, поред трицикличког графа који је добијен приликом испитивања класе бицикличких графова са мостом, добијена је и једна класа трицикличких рефлексивних графова у оквиру

разматрања графова са четири контуре (видјети [31]).
На основу досадашњих разматрања могу се издвојити четири карактеристичне класе стаблоликих трицикличких рефлексивних графова на које се не може примијенити теорема 2.49 и чије контуре не чине сноп (видјети [23]).
У структури таквог графа могу се уочити двије тзв. спољашње контуре, које имају само по један заједнички чвор са трећом, тзв. централном контуром. Додирни чворови на централној контури могу бити несусједни, али у том случају контура мора бити четвороугао. Наиме, ако би дужина ове контуре била бар 5, уклањањем једног њеног чвора могао би да се добије граф на који се може примијенити теорема 2.49 (а), па би слиједило да је и за почетни граф $\lambda_2 > 2$. Разликујемо класу трицикличких графова код којих је централна контура дужине 4 и на којој су додирни чворови несусједни, док ако су додирни чворови на централној контури јесу сусједни, она може бити дужине k, $k \geq 3$. Ови графови се према дужини централне контуре могу подијелити у три класе: класа гдје је $k = 3$, $k = 4$ или $k \geq 5$. Ове класе су посебно проучаване, нарочито посљедња класа за коју су пронађени сви максимални рефлексивни графови тог типа.

Глава 3

Техника звијезда комплимената

Техника звијезда комплемената[1] је апарат спектралне теорије графова којим се, најопштије говорећи, графови реконструишу на основу њихових индукованих подграфова званих звијезда комплементи и унапријед прецизираних спектралних особина.

Ако је μ сопствена вриједност графа G реда k, онда је *звијезда скуп* (који ћемо означавати са $*$*–скуп*) за сопствену вриједност μ графа G скуп X од k чворова графа G таквих да μ није сопствена вриједност графа $G - X$.
Граф $H = G - X$ називамо *звијезда комплемент* (и означавамо са $*$*–комплемент*) за сопствену вриједност μ графа G.
Звијезда скуп и звијезда комплемент постоје за било коју сопствену вриједност и за произвољни граф и не морају бити јединствени. Поред тога, показано је да за сваку сопствену вриједност μ повезаног графа G важи да је звијезда комплимент за μ повезан граф.

H*–сусједство* произвољног чвора x у X је скуп који садржи све чворове из H који су сусједни са чвором x. H*–сусједства* чворова из скупа X су непразна и различита уколико важи $\mu \notin \{-1, 0\}$ ([14]).
Ако означимо $t = |V(H)|$, онда важи $|X| \leq \binom{t}{2}$ ([15]), што је и најбоља могућа процјена. У случају повезаних регуларних графова претходна граница се може умањити за 1 – видјети [3] или [15];

Може се доказати да уколико је Y прави подскуп скупа X, онда је $X - Y$ $*$–скуп за сопствену вриједност μ графа $G - Y$, а тиме је и граф H $*$–комплемент за сопствену вриједност μ графа $G - Y$.

Ако граф G има $*$–комплемент H за сопствену вриједност μ и ако G није прави индуковани подграф неког другог графа који има исти $*$–комплемент H за исту сопствену вриједност μ, онда за G кажемо да је *максималан граф* који има $*$–комплемент H за сопствену вриједност μ (или да је граф G један H*-максималан граф* за сопствену вриједност μ).
Постоји коначно много максималних графова који имају унапријед задати $*$–комплемент за сопствену вриједност μ под условом да је испуњено $\mu \notin \{-1, 0\}$.
У општем случају, постоје различити максимални графови (за унапријед задате H и μ), али

[1]engl. *the star complement technique.*

у неким (посебно интересантним) ситуацијама максималан граф је јединствен. Такав максималан граф је јединствено одређен $*$–комплементом и сопственом вриједношћу μ.

Важи и сљедећа теорема, позната у литератури као Теорема о реконструкцији [2] ([14]).

Теорема 3.1 *Нека је G произвољан граф чија је матрица сусједства*

$$\begin{pmatrix} A_X & B^T \\ B & C \end{pmatrix},$$

где је A_X матрица сусједства подграфа графа G индукованог скупом чворова X. Тада је X $*$–скуп за сопствену вриједност μ графа G ако и само ако μ није сопствена вриједност графа C и уколико важи $\mu I - A_X = B^T(\mu I - C)^{-1}B$.

Из претходне теореме закључујемо да уколико су задати μ, C и B, онда је матрица A_X јединствено одређена. Другим ријечима, уколико је задата сопствена вриједност μ, $*$–комплемент H за μ и H–суседства чворова из скупа X, онда је граф G јединствено одређен.

Након овога, поставља се питање, до које мјере је граф G одређен само $*$–комплементом H и сопственом вриједношћу μ? Имајући у виду претходна разматрања, довољно је узети у обзир само графове G који су H–максимални за сопствену вредност μ (јер је свако друго проширење $*$–комплемента H за исту сопствену вриједност један индуковани подграф неког (не обавезно јединственог) максималног проширења, то јест H–максималног графа).

Нека је дат произвољан граф H, нека је U подскуп скупа $V(H)$ и нека је u чвор који не припада скупу $V(H)$. Означимо са $H(U)$ граф који се добија од графа H спајањем чвора u са свим чворовима из скупа U.
Кажемо да су u, U, и $H(U)$ редом *ваљани чвор, ваљан скуп и ваљано проширење*[3] који одговарају сопственој вриједности μ и $*$–комплементу H, уколико је μ сопствена вриједност графа $H(U)$, али није сопствена вриједност графа H.
На основу Теореме о реконструкцији, чвор u и подскуп U су ваљани ако и само ако важи једнакост $\mathbf{b}_u^T(\mu I - C)^{-1}\mathbf{b}_u = \mu$, гдје је $\mathbf{b}_u$ карактеристични вектор чвора u (у односу на $V(H)$), док је C матрица сусједства графа H.

Претпоставимо сада да су U_1 и U_2 (не обавезно ваљани) скупови који одговарају редом чворовима u_1 и u_2. Нека су $H(U_1, U_2; 0)$ и $H(U_1, U_2; 1)$ графови који се добијају додавањем чворова u_1 и u_2 на граф H и то тако да су та два чвора несусједна у првом, а сусједна у другом графу.

Кажемо да су u_1 и u_2 *добри (ваљани) партнери* и да су U_1 и U_2 *компатибилни скупови*, уколико је μ сопствена вредност вишеструкости 2 или у графу $H(U_1, U_2; 0)$ или у графу $H(U_1, U_2; 1)$. Важно је истаћи следећу чињеницу: уколико важи $\mu \notin \{-1, 0\}$, било који ваљан скуп је непразан, а свака два компатибилна ваљана скупа су различита (видјети [14]). У складу са Теоремом о реконструкцији, два чвора u_1 и u_2 су ваљани партнери (то јест, њима одговарајући скупови U_1 и U_2 су компатибилни) ако и само ако важи $\mathbf{b}_{u_1}^T(\mu I - C)^{-1}\mathbf{b}_{u_2} \in \{-1, 0\}$, гдје су $\mathbf{b}_{u_1}$ и $\mathbf{b}_{u_2}$ раније уведене ознаке.

Додатно, слиједи (опет, на основу Теореме о реконструкцији) да било који скуп чворова X у ком су сви чворови ваљани и индивидуално и разматрани у свим могућим паровима, индукује једно *ваљано проширење*, рецимо G, унутар кога скуп X може бити интерпретиран као

[2]engl. *the Reconstruction Theorem.*
[3]engl. *good vertex, good set and good extension.*

$*$–скуп за сопствену вриједност μ са одговарајућим $*$–комплементом H.

Код *технике $*$–комплемената* интересантни су они графови који имају неку унапријед задату сопствену вриједност (најчешће велике вишеструкости). Ако је G граф чија је сопствена вриједност μ вишеструкости $k > 1$, онда је G једно ваљано (k–тјеменско) проширење неког свог $*$–комплемента, рецимо H (у нашим разматрањима, G ће бити искључиво H–максималан граф за сопствену вриједност μ).

Практично, одређивање максималних графова за задати $*$–комплемент и неку сопствену вриједност техником $*$–комплемената се састоји у сљедећем:

(1) Најприје одређујемо све могуће ваљане скупове за задати $*$–комплемент и сопствену вриједност μ ($\neq -1, 0$);

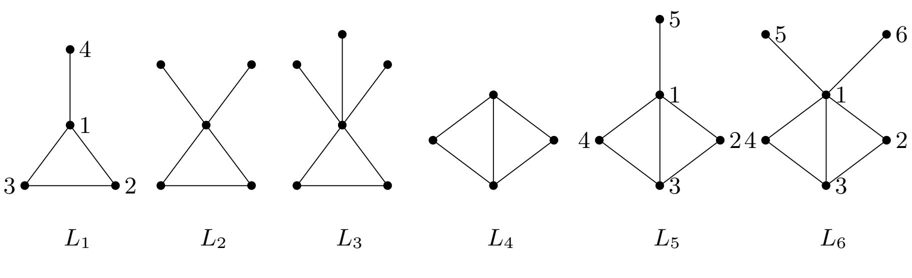
(2) Затим, у циљу одређивања H–максималних графова за сопствену вриједност μ ($\neq -1, 0$), формирамо такозвани *граф проширења*[4] чија су чворови ваљани чворови за сопствену вриједност μ и $*$–комплемент H, а у ком су два чвора сусједна ако и само ако су они ваљани партнери. Једноставно закључујемо да је, на овај начин, одређивање максималних проширења редуковано на одређивање максималних клика у графу проширења ([15]).

Наравно, међу одређеним H–максималним графовима може бити изоморфних, те се напослетку, провјерава изоморфност и задржавају само неизоморфни максимални графови.

3.1 Неки звијезда комплименти за графове чија је друга сопствена вриједност $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Графови чија друга сопствена вриједност није већа од σ ($\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ златни пресјек) су проучавани у, нпр., [16], [17], [30], или [33].
Наредна тврђења из [39] дају неке резултате примјене технике звијезда комплимената код ових графова.

Лема 3.1 *Пут P_3 је једино стабло, док су графови $L_1 - L_6$ (Слика 19) једини уницикличкии бициклички графови који могу бити звијезда комплименти за σ као другу сопствену вриједност.*



Слика 19: Унициклички и бициклички звијезда комплименти за $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ као другу сопствену вриједност.

[4]engl. *extendability graph.*

Теорема 3.2 *Постоји тачно девет неизоморфних максималних проширења звијезда комплимената $L_1 - L_4$ (Слика 19). У листи која слиједи су дати сљедећи подаци: број чворова, спектар, ваљани скупови (ваљани скупови графова 1–3 (респективно 4–6 и 7–9) у односу на одговарајући звијезда комплимент L_1 (респективно L_5 и L_6) – при чему ваљани скупови кореспондирају одговарајућим ознакама чворова).*

1. 6 $[-1.6180^2, -0.4142, 0.6180^2, 2.4142]$ $\{2\}, \{3\}$
2. 6 $[-1.6180^2, -1.2360, 0.6180^2, 3.2360]$ $\{2\}, \{1, 2, 4\}$
3. 6 $[-1.6180^2, -1.4995, 0.6180^2, 3.4495]$ $\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$
4. 7 $[-1.8434, -1.6180^2, 0.3068, 0.6180^2, 3.53663]$ $\{1, 2\}, \{1, 4\}$
5. 7 $[-1.8284, -1.6180^2, 0, 0.6180^2, 3.8284]$ $\{1, 4\}, \{1, 3, 4, 5\}$
6. 8 $[-1.8541, -1.6180^3, 0.6180^3, 4.8541]$ $\{3\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}$
7. 8 $[-2.1413, -1.6180^2, 0, 0.5151, 0.6180^2, 3.6262]$ $\{1, 2\}, \{1, 4\}$
8. 8 $[-2, -1.6180^2, -1, 0.4384, 0.6180^2, 4.5616]$ $\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}$
9. 9 $[-2.1240, -1.6180^3, 0.3985, 0.6180^3, 4.7255]$ $\{1, 4\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 6\}$

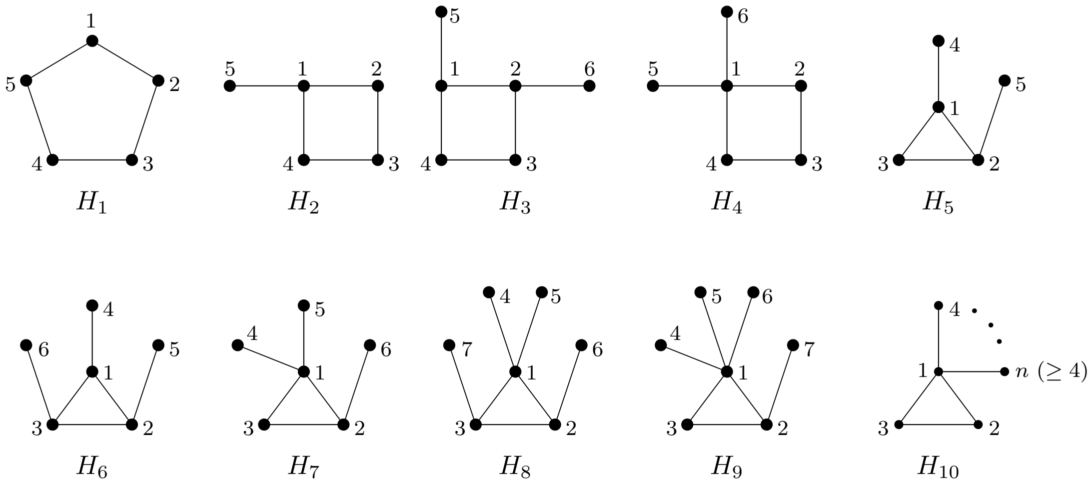
Напомена: L_2 је звијезда комплимент графова 4 и 5, L_3 је звијезда комплемент графова 7 и 9, док је L_4 звијезда комплимент графова 1–5 и 8.

3.2 Неки звијезда комплименти за графове чија је друга сопствена вриједност 1

3.2.1 Унициклички графови

У [37], [39] и [40] аутори користе технику звијезда комплимента да би добили неке од графова чија је друга сопствена вриједност 1. У каснијим радовима одређени су сви уницикличи звијезда комплименти за 1 као другу сопствену вриједност.
Постоји девет таквих графова и још једна бесконачна фамилија (Слика 20). До сада су одређени ваљани скупови и максимална проширења за свих девет графова, док су за графове из бесконачне фамилије одређени сви ваљани скупови.

Теорема 3.3 *[40] Унициклички граф H може бити $*$–комплемент за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$ ако и само ако је изоморфан неком од графова на Слици 20.*



Слика 20: Унициклички $*$–комплементи за сопствену вриједност $\lambda_2 = 1$.

Теорема 3.4 *[40]. За сваки граф H_i $(i = 1, \ldots, 10)$ са Слике 21, одговарајући ваљани скупови дати су у листи која слиједи.*

H_1 : $U_1 = \{1\},\ U_2 = \{2\},\ U_3 = \{3\},\ U_4 = \{4\},\ U_5 = \{5\},\ U_6 = \{1,2,3\},\ U_7 = \{1,2,5\},$
$U_8 = \{1,4,5\},\ U_9 = \{2,3,4\},\ U_{10} = \{3,4,5\};$

H_2 : $U_1 = \{3\},\ U_2 = \{2,5\},\ U_3 = \{4,5\},\ U_4 = \{2,3,4\};$

H_3 : $U_1 = \{1\},\ U_2 = \{2\},\ U_3 = \{3\},\ U_4 = \{4\},\ U_5 = \{1,6\},\ U_6 = \{2,5\},\ U_7 = \{3,5\},$
$U_8 = \{4,6\},\ U_9 = \{1,3,4\},\ U_{10} = \{2,3,4\},\ U_{11} = \{3,5,6\},\ U_{12} = \{4,5,6\},$
$U_{13} = \{1,2,3,6\},\ U_{14} = \{1,2,4,5\};$

H_4 : $U_1 = \{1\},\ U_2 = \{2\},\ U_3 = \{4\},\ U_4 = \{2,5\},\ U_5 = \{2,6\},\ U_6 = \{3,5\},\ U_7 = \{3,6\},$
$U_8 = \{4,5\},\ U_9 = \{4,6\},\ U_{10} = \{1,2,3\},\ U_{11} = \{1,3,4\},\ U_{12} = \{3,5,6\},$
$U_{13} = \{1,2,4,5,6\};$

H_5 : $U_1 = \{3,4\},\ U_2 = \{3,5\},\ U_3 = \{1,4,5\},\ U_4 = \{2,4,5\};$

H_6 : $U_1 = \{1,5\},\ U_2 = \{1,6\},\ U_3 = \{2,4\},\ U_4 = \{2,6\},\ U_5 = \{3,4\},\ U_6 = \{3,5\}, U_7 = \{1,4,5,6\},$
$U_8 = \{2,4,5,6\},\ U_9 = \{3,4,5,6\}$

H_7 : $U_1 = \{2\},\ U_2 = \{3,4\},\ U_3 = \{3,5\},\ U_4 = \{1,4,6\},\ U_5 = \{1,5,6\},\ U_6 = \{2,4,5\},$
$U_7 = \{3,4,6\},\ U_8 = \{3,5,6\},\ U_9 = \{1,2,3,6\},\ U_{10} = \{2,4,5,6\};$

H_8 : $U_1 = \{1\},\ U_2 = \{2\},\ U_3 = \{3\},\ U_4 = \{1,6\},\ U_5 = \{1,7\},\ U_6 = \{2,4\},\ U_7 = \{2,5\},$
$U_8 = \{3,4\},\ U_9 = \{3,5\},\ U_{10} = \{1,6,7\},\ U_{11} = \{2,4,7\},\ U_{12} = \{2,5,7\},\ U_{13} = \{3,4,6\},$
$U_{14} = \{3,5,6\},\ U_{15} = \{1,2,3,6\},\ U_{16} = \{1,2,3,7\},\ U_{17} = \{1,4,6,7\},\ U_{18} = \{1,5,6,7\},$
$U_{19} = \{2,4,5,7\},\ U_{20} = \{3,4,5,6\},\ U_{21} = \{1,2,3,4,5\},\ U_{22} = \{2,4,5,6,7\},$
$U_{23} = \{3,4,5,6,7\};$

H_9 : $U_1 = \{1\},\ U_2 = \{3\},\ U_3 = \{1,7\},\ U_4 = \{2,4\},\ U_5 = \{2,5\},\ U_6 = \{2,6\},\ U_7 = \{3,4\},$
$U_8 = \{3,5\},\ U_9 = \{3,6\},\ U_{10} = \{1,2,3\},\ U_{11} = \{1,4,7\},\ U_{12} = \{1,5,7\},\ U_{13} = \{1,6,7\},$
$U_{14} = \{2,4,5\},\ U_{15} = \{2,4,6\},\ U_{16} = \{2,5,6\},\ U_{17} = \{3,4,5,7\},\ U_{18} = \{3,4,6,7\},$
$U_{19} = \{3,5,6,7\},\ U_{20} = \{2,4,5,6,7\},\ U_{21} = \{3,4,5,6,7\},\ U_{22} = \{1,2,3,4,5,6\};$

H_{10} : $\{j\},\ \{1,j\}\ (4 \leq j \leq n),\ \{2\} \cup T,\ \{3\} \cup T$ (*ако је* $n = 7$, *где је* T *било који скуп (могуће и празан) чворова степена* 1), $\{1,2\} \cup T,\ \{1,3\} \cup T$ (*ако је* $n = 11$, *где је* T *било који скуп (могуће и празан) чворова степена* 1), $\{2,3\} \cup T_{n-5}$ (*где је* T_{n-5} *било који скуп од* $n-5$ $(n \geq 5)$ *чворова степена* 1), $\{1,2,3\} \cup T_{n-7}$ (*где је* T_{n-7} *било који скуп од* $n-7$ $(n \geq 7)$ *чворова степена* 1).

Наредним теоремана су одређени сви H−максимални графови који имају неке од ∗−комплеменaта (за сопствену вриједност $\lambda_2 = 1$) из Теореме 3.3.

Теорема 3.5 *[40] Постоји јединствен максималан граф чији је ∗−комплемент за сопствену вриједност $\lambda_2 = 1$ граф H_5 (или H_6).*

Теорема 3.6 *[40] У листи која слиједи, дати су неизоморфни максимални графови који имају ∗−комплемент H за сопствену вриједност $\lambda_2 = 1$, гдје је граф H изоморфан неком од графова $H_1 - H_4$ и $H_7 - H_9$. Уз сваки граф дати су сљедећи подаци: број чворова, број грана, спектар и ваљани скупови.*

H_1:

G_1: 7, 12, $[3.65, 1^2, -1^2, -1.65, -2]$; $U_7,\ U_8$.
G_2: 8, 11, $[3, 1^3, -1^2, -2^2]$; $U_1,\ U_3,\ U_6$.
G_3: 10, 15, $[3, 1^5, -2^4]$; $U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5$.

H_2:

G_4: 6, 8, $[2.90, 1, 0, -0.60, -1, -2.29]$; U_4.
G_5: 8, 12, $[3, 1^3, -1^3, -3]$; $U_1,\ U_2,\ U_3$.

H_3:

G_6: 10, 20, $[4.37, 1^4, -1^2, -1.37, -2, -3]$; $U_8,\ U_{10},\ U_{11},\ U_{13}$.
G_7: 12, 24, $[4.27, 1^6, -1, -2^3, -3.27]$; $U_4,\ U_5,\ U_6, U_7,\ U_{12},\ U_{14}$.
G_8: 16, 40, $[5, 1^{10}, -3^5]$; $U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ U_6,\ U_7,\ U_8,\ U_{11},\ U_{12}$.

H_4:

G_9: 10, 16, $[3.70, 1^4, -1^3, -2, -2.70]$; $U_6,\ U_7,\ U_{10},\ U_{11}$.
G_{10}: 12, 24, $[4.27, 1^6, -1, -2^3, -3.27]$; $U_4,\ U_5,\ U_8,\ U_9,\ U_{12},\ U_{13}$.
G_{11}: 16, 40, $[5, 1^{10}, -3^5]$; $U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ U_6,\ U_7,\ U_8,\ U_9,\ U_{12}$.

H_7:

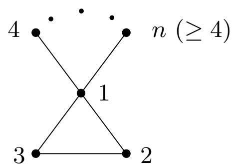
G_{13}: 10, 21, $[4.46, 1^4, -1^3, -2.46, -3]$; $U_7,\ U_8,\ U_9,\ U_{10}$.
G_{14}: 15, 45, $[6, 1^9, -3^5]$; $U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ U_6,\ U_7,\ U_8,\ U_{10}$.

H_8:

G_{15}: 14, 37, $[5.77, 1^7, -1^2, -2^2, -2.77, -4]$; $U_{10},\ U_{11},\ U_{12},\ U_{13},\ U_{14},\ U_{15},\ U_{16}$.
G_{16}: 18, 57, $[6.66, 1^{11}, -1, -3^4, -4.66]$; $U_4,\ U_5,\ U_6,\ U_7,\ U_8,\ U_9,\ U_{17},\ U_{18},\ U_{19},\ U_{20},\ U_{21}$.
G_{17}: 27, 135, $[10, 1^{20}, -5^6]$; $U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ U_6,\ U_7,\ U_8,\ U_9,\ U_{10},\ U_{11},\ U_{12},\ U_{13},\ U_{14}, U_{17},\ U_{18},\ U_{19},\ U_{20},\ U_{22},\ U_{23}$.

H_9:

G_{18}: 18, 57, $[6.66, 1^{11}, -1, -3^4, -4.66]$; $U_7,\ U_8,\ U_9,\ U_{11},\ U_{12},\ U_{13},\ U_{14},\ U_{15},\ U_{16},\ U_{21},\ U_{22}$.
G_{19}: 27, 135, $[10, 1^{20}, -5^6]$; $U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_5,\ U_6,\ U_7,\ U_8,\ U_9,\ U_{11},\ U_{12},\ U_{13},\ U_{14},\ U_{15},\ U_{16},\ U_{17},\ U_{18},\ U_{19},\ U_{20},\ U_{21}$.



K

Слика 21: Бесконачна фамилија уницикличких звијезда комплимената за 1 као другу соопствену вриједност (чворови $4, \ldots, n$ формирају потпуни неповезан граф).

Теорема 3.7 *[39]Нека је K граф са Слике 21 и нека је U подскуп од $V(K)$. Даље, нека T_{n-5} представља скуп од било којих $n-5$ терминалних чворова графа K, а T скуп свих терминалних чворова графа K. Граф $K(U)$ је ваљано проширење ако и само ако U је један од сљедећих скупова:*

1. $\{i\}$ $(4 \leq i \leq n)$;
2. $\{1, i\}$ $(4 \leq i \leq n)$;
3. $\{2, 3\} \cup T_{n-5}$;
4. $\{2\} \cup T$ *и* $\{3\} \cup T$, *када је* $n = 7$;
5. $\{1, 2\} \cup T$ *и* $\{1, 3\} \cup T$, *када је* $n = 11$;
6. $\{2, 3\}$, *када је* $n = 5$;
7. $\{1, 2, 3\}$, *каа је* $n = 7$;
8. $\{2\}$ *и* $\{3\}$, *када је* $n = 7$;
9. $\{1, 2\}$ *и* $\{1, 3\}$, *када је* $n = 11$.

3.2.2 Коктелски графови

У [39] се разматрају коктелски графови као звијезда комплименти за графове код којих је 1 друга сопствена вриједност.

Теорема 3.8 *Нека је $CP(k)$ коктелски граф реда $2k$ и нека је U подскуп $V(CP(k))$. Граф $CP(k)(U)$ је ваљано проширење ако и само ако U је:*

1. *комплемнт било ког троугла у* $CP(k)$ *или*
2. *било који индуковани пут дужине 2 у* $CP(6)$.

Посебно за случај $CP(6)$ важи сљедећа теорема.

Теорема 3.9 *Постоји тачно девет неизоморфних максималних проширења звијезда комплимента* $CP(6)$. *Свако од њих има 26 чворова и садржи сљедеће ваљане скупове (чворови у* $CP(6)$ *су означени са* $1, 2, \ldots, 12$*, тако да чворови* $2i-1$ *и* $2i$ *(*$i = 1, 2, \ldots 6$*) нису сусједни):* $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{3,4,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{1,5,6\}, \{2,5,6\}$. *У доњој листи је дат спектар свих девет поменутих графова заједно са комплементима преосталих ваљаних скупова.*

1. $[-6.4999, -3^4, -2.0660, -2^4, -1.2435, 1^{14}, 15.8094]$ $\{8,10,12\}, \{7,10,12\}, \{8,9,12\}, \{7,9,12\}, \{2,4,6\}, \{1,4,6\}, \{2,3,6\}, \{1,3,6\}$

2. $[-6.3716, -3^4, -2.2731, -2^4, -1.2510, 1^{14}, 15.8956]$ $\{8,10,12\}, \{7,10,12\}, \{8,9,12\}, \{7,9,12\}, \{1,4,6\}, \{2,3,6\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}$

3. $[-5.8856, -3^5, -2^4, -1.2626, 1^{14}, 16.1482]$ $\{8,10,12\}, \{7,10,12\}, \{8,9,12\}, \{7,9,12\}, \{2,4,6\}, \{1,3,6\}, \{1,4,5\}, \{2,3,5\}$

4. $[-6.4172, -3^4, -2.0644, -2^4, -1.4107, 1^{14}, 15.8923]$ $\{8,10,12\}, \{7,10,12\}, \{8,9,12\}, \{7,9,12\}, \{1,4,6\}, \{2,4,6\}, \{1,3,6\}, \{2,3,6\}$

5. $[-6.2877, -3^4, -2.2690, -2^4, -1.4213, 1^{14}, 15.9780]$ $\{8,9,12\}, \{7,10,12\}, \{7,9,12\}, \{7,9,11\}, \{1,4,6\}, \{2,3,6\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}$

6. $[-5.7930, -3^5, -2^4, -1.4360, 1^{14}, 16.2290]$ $\{8,9,12\}, \{7,10,12\}, \{7,9,12\}, \{7,9,11\}, \{2,4,6\}, \{1,3,6\}, \{1,4,5\}, \{2,3,5\}$

7. $[-6.1355, -3^4, -2^6, 1^{14}, 16.1355]$ $\{8,10,12\}, \{7,9,12\}, \{7,10,11\}, \{8,9,11\}, \{1,4,6\}, \{2,4,6\}, \{2,3,6\}, \{1,3,6\}$

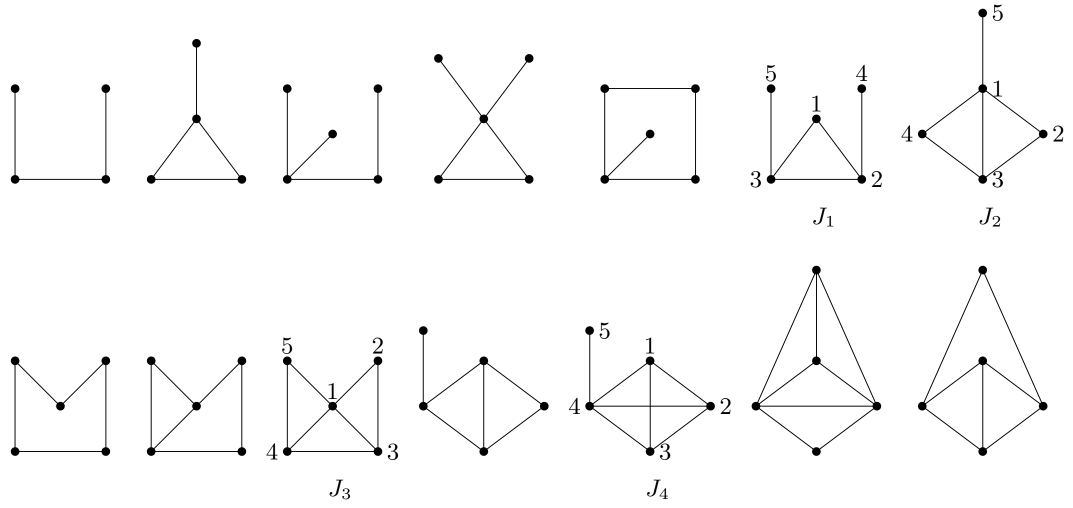
8. $[-6, -3^4, -2.2195, -2^5, 1^{14}, 16.2195]$ $\{8,10,12\}, \{7,9,12\}, \{7,10,11\}, \{8,9,11\}, \{1,4,6\}, \{2,3,6\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}$

9. $[-5.4659, -3^5, -2^5, 1^{14}, 16.4659]$ $\{8,10,12\}, \{7,9,12\}, \{7,10,11\}, \{8,9,11\}, \{2,4,6\}, \{1,3,6\}, \{1,4,5\}, \{2,3,5\}$

3.2.3 Повезани графови са највише пет чворова

Наредном теоремом се дају повезани графови са највише пет чворова који могу бити звијезда комплименти за 1 као другу сопствену вриједност. Ови резултати су дати у [39] и [12].

Теорема 3.10 *[39]Постоји тачно 14 повезаних графова са највише пет чворова који могу бити звијезда комплимент за 1 као другу сопствену вриједност. Ови графови су дати на Слици 22.*



Слика 22: Повезани звијезда комплименти са највише пет чворова за 1 као другу сопствену вриједност.

Неки од графова на Слици 22 се сријећу и раније (Слика 19). Интересантно је да је сваки од графова $J_1 - J_4$ на Слици 22 има јединствено максимално проширење, тј. сви њихови ваљани чворови су међусобно компатибилни. Поред тога, максимална проширења J_2 и J_3 су изоморфна. У листи која слиједи, дата су сва та проширења: број чворова, спектар и ваљани скупови.

J_1: 9 $[-2^4, 1^4, 4]$ $\{1,4\}, \{1,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}$

J_2: 7 $[-2, -1.6458, -1^2, 1^2, 3.6458]$ $\{1,2,5\}, \{1,4,5\}$

J_3: 7 $[-2, -1.6458, -1^2, 1^2, 3.6458]$ $\{1,2\}, \{1,5\}$

J_4: 6 $[-2, -1.2361, -1, 0, 1, 3.2361]$ $\{1,5\}$

Глава 4

NSG

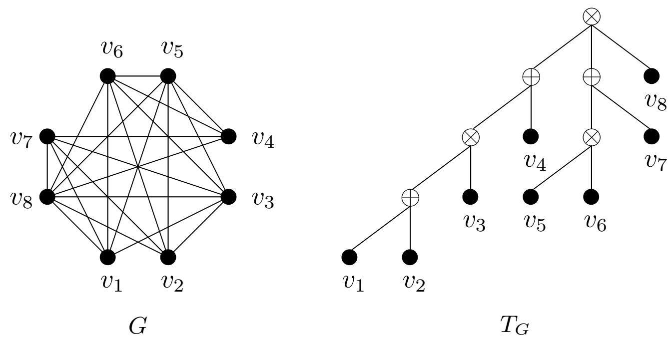
NSG[1]-ови су графови који не садрже $2K_2$, P_4 или C_4 као индуковане подграфове. Ови графови играју важну улогу у истраживањима графова која се односе на *максимални индекс* графа. Наиме, познато је да је граф са максималним индексом који има коначан (фиксиран) броја грана у ствари NSG (видјети, нпр. [34]).
У наредна два поглавља дајемо преглед добијених резултата који се односе на све NSG–ове који имају другу сопствену вриједност мању од 1 и одређујемо све NSG–ове који имају другу сопствену вриједност једнаку 1.

4.1 NSG са другом сопственом вриједношћу λ_2 мањом од 1

Сваки граф који не садржи P_4 као индуковани подграф (тј. ако је кограф) се може представити помоћу *костабла*[2] (Ова презентација је дата у [6] док је модификација дата у [2]). Нека је T_G костабло које репрезентује кограф G. Ако са $\oplus$ и $\otimes$ означимо (дисјунктну) унију и потпуни производ два графа, онда је костабло T_G корјенско стабло у коме сваки унутрашњи чвор w или $\oplus$–типа (што одговара унији графова) или $\otimes$–типа (одговара потпуном производу графова). Терминални чворови (листови) нису ни једног од ова два типа (сваки од њих репрезентује себе у G). Сваки унутрашњи чвор, рецимо w, представља подграф од G који је индукован насљедницима од w, и означава се са G_w. Директни насљедник (или дијете) било ког унутрашњег чвора w има тип који се разликује од оног који има w (или је без типа, ако је у питању терминални чвор). Поред тога, сваки нетерминални чвор бар два директна насљедника. На овај начин, сви унутрашњи чворови на произвољном путу од коријена до било ког терминалног чвора су $(\otimes, \oplus)$–алтернирајући.

[1]engl. *NSG-nested split graphs.*
[2]engl. *cotree.*

Доказано је да је оваква репрезентација јединствена. Као илустрација, на Слици 23 је представљен један кограф G заједно са својим одговарајућим костаблом T_G.



Слика 23

За даље разматрање важан је и појам *дивизора*. Нека је дата $s \times s$ матрица $D = (d_{ij})$, и нека је скуп чворова графа G подијељен на непразне скупове $V_1, V_2, \ldots, V_s$ тако да за свако $i, j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ сваки чвор из V_i је сусједан са тачно d_{ij} чворова у V_j. Мултидиграф H са матрицом сусједства D се зове *предњи дивизор*[3] графа G или кратко *дивизор* графа G ([14]).

Већ је раније речено да је сопствена вриједност λ графа G *главна сопствена вриједност* графа G ако њој одговарајући сопствени потпростор садржи вектор чија сума координата није нула. Ако то не важи λ се назива *споредна сопствена вриједност* графа G.
Главни дио спектра графа G се састоји од свих његових главних сопствених вриједности. Познато је да карактеристични полином дивизора дијели карактеристични полином графа. Штовише, важи да спектар произвољног дивизора H графа G садржи главни дио спектра графа G([14]).

Евидентно је да је сваки NSG је кограф. Стога, имамо репрезентацију NSG (као посебног случаја кографа) преко костабла на начин који је претходно описан.
Важи сљедећа лема.

Лема 4.1 *Нека је G произвољан NSG и нека је T_G његово одговарајуће (јединствено) костабло. Онда сваки нетерминални чвор у T_G има највише једног нетерминалног директног насљедника.*

На основу претходне леме, представљање костабла T_G произвољног NSG–а G има једноставну форму, тако да можемо изоставити цртање стабала у његовој презентацији. Довољно је рећи да ли је G повезан граф или не (важи да је G повезан ако и само ако је коријен T_G $\otimes$–типа) и да се наведе број свих терминалних насљедника од свих нетерминалних чворова у T_G (у природном поретку). $C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ користимо да означимо NSG такав да стабло $T_{C(a_1,a_2,\ldots,a_n)}$ има тачно n нетерминалних чворова, док је његов коријен $\otimes$–типа и има тачно a_1 терминалних насљедника; нетерминални насљедник коријена има тачно a_2 директних терминалних насљедника, итд. Неповезан NSG је означен са $D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Како сваки нетерминални чвор има бар два насљедника, претпостављамо да су $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ природни бројеви, док је $a_n \geq 2$.
Треба напоменути да $X(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1)$ и $X(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} + 1)$ представљају два изоморфна NSG–а, гдје X означава C или D.
Ако за n–торку $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ важи $a_i = a_{i+1} = \cdots = a_{i+k}, 1 \leq i,\ i + k \leq n$, пишемо
$(a_1, a_2, \ldots, a_i^{k+1}, a_{i+k+1}, \ldots, a_n)$.

[3] engl. *front divisor.*

Лема 4.2 *Нека су $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ n–торке природних бројева такве да важи $b_i \leq a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Онда је испуњено сљедеће:*

(i) $\overline{C(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*;*

(ii) NSG $X(b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{l-1}, b_l)$, $1 \leq k \leq l \leq n$, је један индуковани подграф графа $X(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (односно $\overline{X(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$), кад је k паран (односно непаран) број; X представља C или D.

Пошто сваки NSG има највише једну нетривијалну компоненту (која се зове доминантна компонента и која је такође NSG), његова друга сопствена вриједност је једнака другој највећој вриједности доминантне компоненте. Зато је довољно разматрати само повезане NSG-ове, пошто се сваки неповезан NSG добија додавањем изолованих чворова на неки повезан NSG.

Лема 4.3 *Нека је $C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ повезан NSG граф за који важи $\lambda_2 < 1$. Онда је $n \leq 10$.*

Нека је $G = C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ произвољни повезан NSG и нека V_i означава скуп чворова који одговара a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Дакле, $|V_i| = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Партиција скупа G на непразне подскупове $V_1, V_2, \ldots, V_n$ одређује један дивизор H од G. Матрица сусједства D (реда $n \times n$) графа H има сљедећи облик:

$$D = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & 0 & a_3 - 1 & a_4 & \ldots & a_n \\ a_1 & 0 & a_3 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \end{pmatrix} \quad (1)$$

Посебно, добијамо да је $(2k-1)$–та врста (од D) има облик $a_1,\ 0,\ a_3,\ 0,\ \ldots,\ a_{2k-1}-1,\ a_{2k},\ a_{2k+1},\ \ldots,\ a_n$, док $2k$–та врста има облик $a_1,\ 0,\ a_3,\ 0,\ \ldots,\ a_{2k-1},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0$.

Теорема 4.1 *Нека је λ сопствена вриједност произвољног повезаног NSG-а $G = C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ таква да је различита од 0 или -1 и нека је H дивизор од G. Онда λ припада спектру графа H.*

Доказ. Познато је да је ред сопствене вриједности 0 (респ. -1) у спектру кографа G који не садржи изоловане чворове (а тиме и у спекру повезаног NSG–а) једнак $\sum\limits_{\omega \in V_0} (t_\omega - 1)$ (респ. $\sum\limits_{\omega \in V_{-1}} (t_\omega - 1)$), гдје је V_0 (респ. V_{-1}) скуп чворова (у T_G) $\bigoplus$–типа (респ. $\bigotimes$–типа) који имају t_ω директних насљедника који су терминални чворови. Како су 0 и -1 су споредне сопствене вриједности графа G ([2]), онда тачно n сопствених вриједности графа $G = C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ су различите од 0 или -1. Са друге стране спектар H се састоји од тачно n сопствених вриједности и укључује главни дио спектра G. Доказ је комплетан. ∎

Посљедица 4.1 *Нека је G произвољни NSG и нека је H његов дивизор. Онда је $\lambda_2(G) < 1$ ако и само ако је $\lambda_2(H) < 1$.*

Теореме који слиједе су дате у [36] и њима су у потпуности описани сви NSG–ови са особином $\lambda_2(G) < 1$.

Теорема 4.2 *Нека је $G = C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ повезан NSG за који важи $\lambda_2(G) < 1$. Ако је $n \leq 4$ онда је G индуковани подграф неког од сљедећих графова:*

$C(a_1, a_2, a_3)$, гдје је $(a_1, a_2, a_3) = (k, m, 2)$, $(3, 1, 7)$, $(5, 1, 5)$, $(k, 1, 4)$, $(k, 2, 3)$, $(1, 3, 3)$;

$C(a_1, a_2, a_3, a_4)$, *где је* $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, k, l)$, $(2, 1, k, l)$, $(k, 1, 2, l)$, $(k, 2, 1, l)$, $(2^3, l)$, $(3, 2^3)$, $(1, 3, 2, l)$, $(2, 3, 1, l)$, $(3^2, 1, 12)$, $(4, 3, 1, 8)$, $(5, 3, 1, 7)$, $(9, 3, 1, 6)$, $(k, 3, 1, 5)$, $(1, 4, 1, l)$, $(k, 4, 1, 3)$, $(2, 4, 1, 4)$, $(1, 5, 1, 4)$, $(k, 6, 1, 2)$, $(1, 7, 1, 2)$,

за било који избор природних бројева $k,\ m \geq 1$ *и* $l \geq 2$.

Теорема 4.3 *Ако је* $G = C(a_1, a_2, \ldots, a_5)$ *повезан* NSG *за који важи* $\lambda_2(G) < 1$, *онда је он индуковани подграф неког од следећих графова:*

$C(a_1, a_2, \ldots, a_5)$, *где је* $(a_1, a_2, \ldots, a_5) = (1, 3, 1, k, 2)$, $(1, 2, k, 1, 3)$, $(1, 2, k, l, 2)$, $(k, 2, 1, l, 2)$, $(1^4, 7)$, $(1^2, 3, 1, 5)$, $(1^2, k, 1, 4)$, $(1^2, k, 2, 3)$, $(2, 1, k, 1, 3)$, $(3, 1, 3, 1, 3)$, $(5, 1^3, 3)$, $(k, 1, 2, l, 2)$, $(5, 1, 3, l, 2)$, $(3, 1, 5, l, 2)$, $(2, 1, k, l, 2)$,

за било који избор природних бројева $k,\ l \geq 1$.

Теорема 4.4 *Ако је* $G = C(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ *повезан* NSG *за који важи* $\lambda_2(G) < 1$, *онда је он индуковани подграф неког од следећих графова:*

$C = (a_1, a_2, \ldots, a_6)$, *где је* $(a_1, a_2, \ldots, a_6) = (1, 3, 1, 3, 1, 2)$, $(1, 3, 1^3, 4)$, $(1, 2, 1^2, 2, l)$, $(1, 2, k, 5, 1, 2)$, $(1, 2, k, 3, 1, 4)$, $(1, 2, k, 2, 1, l)$, $(2^2, 1, 3, 1, 2)$, $(3, 2, 1^3, 2)$, $(2^2, 1^3, 4)$, $(1^2, k, 6, 1, 2)$, $(2, 1, k, 5, 1, 2)$, $(3, 1, 3, 5, 1, 2)$, $(5, 1^2, 5, 1, 2)$, $(1^2, k, 4, 1, 3)$, $(3, 1, 4^2, 1, 2)$, $(5, 1, 2, 4, 1, 2)$, $(k, 1^2, 4, 1, 2)$, $(1^3, 3, 1, 12)$, $(1^2, 2, 3, 1, 8)$, $(1^2, 3, 3, 1, 7)$, $(1^2, 7, 3, 1, 6)$, $(1^2, k, 3, 1, 5)$, $(2, 1, k, 3, 1, 4)$, $(3, 1, 3^2, 1, 3)$, $(5, 1^2, 3, 1, 3)$, $(3, 1, 5, 3, 1, 2)$, $(4, 1, 3^2, 1, 2)$, $(7, 1, 2, 3, 1, 2)$, $(1^3, 2^3)$, $(3, 1, 4, 2, 1, 4)$, $(3, 1, 3, 2, 1, 6)$, $(3, 1, 2^2, 1, 8)$, $(3, 1^2, 2, 1, 10)$, $(2, 1, k, 2, 1, l)$, $(9, 1, 2^2, 1, 2)$, $(5, 1, 2^2, 1, 3)$, $(k, 1^2, 2, 1, 3)$, $(9, 1^2, 2, 1, 4)$, $(5, 1^2, 2, 1, 5)$, $(4, 1^2, 2, 1, 6)$, $(1^4, 6, l)$, $(1^2, 2, 1, 4, l)$, $(1^2, a_3, 1, 3, a_6)$, *кад је* $a_3(a_6 - 1) - 4a_6 - 4 < 0$, $(3, 1^3, 2^2)$, $(2, 1, k, 1, 2, l)$, $(3, 1, 4, 1^2, l)$, $(4, 1, 3, 1^2, 4)$, $(a_1, 1, 2, 1^2, a_6)$, *кад је* $a_1(3a_6 + 1) - 10a_6 - 14 < 0$ *и* $(a_1, 1^4, a_6)$, *кад је* $a_1(a_6 - 5) - 6a_6 - 2 < 0$,

за било који избор природних бројева $k \geq 1$ *и* $l \geq 2$.

Теорема 4.5 *Ако је* $G = C(a_1, a_2, \ldots, a_7)$ *повезан* NSG *за који важи* $\lambda_2(G) < 1$, *онда је он индуковани подграф неког од следећих графова:*

$C = (a_1, a_2, \ldots, a_7)$, *где је* $(a_1, a_2, \ldots, a_7) = (1, 2, k, 1^2, l, 2)$, $(1^2, k, 2, 1, l, 2)$, $(1^2, 3, 1^3, 3)$, $(1^4, 3, 1, 3)$, $(5, 1^4, k, 2)$, $(3, 1, 3, 1^2, k, 2)$, $(2, 1, k, 1^2, l, 2)$, $(1^2, k, 1, 2, l, 2)$, $(1^2, 3, 1, 3, l, 2)$, $(1^4, 5, k, 2)$,

за произвољан избор природних бројева $k,\ l \geq 1$.

Теорема 4.6 *Ако је* $G = C(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ *повезан* NSG *за који важи* $\lambda_2(G) < 1$, *онда је он индуковани подграф неког од следећих графова:*

$C = (a_1, a_2, \ldots, a_8)$, *где је* $(a_1, a_2, \ldots, a_8) = (1, 2, k, 1^2, 3, 1, 2)$, $(1, 2, k, 1^4, 4)$, $(1^3, 2, 1^3, 2)$, $(1^6, 2^2)$, $(3, 1^6, 2)$, $(2, 1, k, 1^2, 3, 1, 2)$, $(1^4, 5, 3, 1, 2)$, $(1^4, 5, 1^2, 4)$, $(1^4, 4^2, 1, 2)$, $(1^4, 4, 2, 1, 4)$, $(1^4, 4, 1^2, l)$, $(1^2, 2, 1, 3^2, 1, 2)$, $(1^2, 2, 1, 3, 1^2, 4)$, $(1^4, 3, 5, 1, 2)$, $(1^4, 3^2, 1, 3)$, $(1^4, 3, 2, 1, 6)$, $(1^2, 3, 1, 2, 4, 1, 2)$, $(1^2, 5, 1, 2, 3, 1, 2)$, $(1^2, a_3, 1, 2^2, 1, a_8)$, *кад је* $a_3(a_8 - 1) - 8 < 0$, $(1^2, a_3, 1, 2, 1^2, a_8)$, *кад је* $a_3(a_8 - 1) - 2a_8 - 6$, $(1^2, 3, 1^2, 5, 1, 2)$, $(1^2, k, 1^2, 4, 1, 2)$, $(1^2, 3, 1^2, 3, 1, 3)$, $(1^2, a_3, 1^2, 2, 1, a_8)$, *кад је* $a_3(a_8 - 3) - 8 < 0$ *и* $(1^2, a_3, 1^4, a_8)$, *кад је* $a_3(a_8 - 5) - 4a_8 - 12 < 0$,

за било који избор природних бројева $k \geq 1$ *и* $l \geq 2$.

Теорема 4.7 *Ако је $G = C(a_1, a_2, \ldots, a_9)$ повезан NSG за који важи $\lambda_2(G) < 1$ онда је он индуковани подграф неког од сљедећих графова:*

$C = (a_1, a_2, \ldots, a_9)$, гдје је $(a_1, a_2, \ldots, a_9) = (1^4, 3, 1^2, k, 2)$, $(1^2, 3, 1^4, k, 2)$,

за произвољан природан број $k \geq 1$.

Теорема 4.8 *Граф $G = C(1^9, 2)$ је јединствени повезан NSG за који важи $n = 10$ и $\lambda_2(G) < 1$.*

Важи сљедећа теорема.

Теорема 4.9 *Нека је G произвољни NSG. Онда је његова доминантна компонента индуковани подфграф неког од повезаних NSG-ова из Табеле 1. Ови графови су представљени параметрима $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (k и l представљају произвољне природне бројеве). Притом, ако је l вриједност посљедњег параметра, онда је $l \geq 2$. NSG-ови су поређани лексикографски по n.*

G	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	G	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1.	1	3	3				41.	1	1	k	6	1	2		
2.	3	1	7				42.	1	2	1	1	2	l		
3.	5	1	5				43.	1	2	k	2	1	l		
4.	1	3	2	l			44.	1	2	k	3	1	4		
5.	1	4	1	l			45.	1	2	k	5	1	2		
6.	1	5	1	4			46.	1	3	1	1	1	4		
7.	1	7	1	2			47.	1	3	1	3	1	2		
8.	2	2	2	l			48.	2	1	k	1	2	l		
9.	2	3	1	l			49.	2	1	k	2	1	l		
10.	2	4	1	4			50.	2	1	k	3	1	4		
11.	3	2	2	2			51.	2	1	k	5	1	2		
12.	3	3	1	12			52.	2	2	1	1	1	4		
13.	4	3	1	8			53.	2	2	1	3	1	2		
14.	5	3	1	7			54.	3	1	1	1	2	2		
15.	9	3	1	6			55.	3	1	1	2	1	10		
16.	1	1	1	1	7		56.	3	1	2	2	1	8		
17.	1	1	3	1	5		57.	3	1	3	2	1	6		
18.	1	1	k	1	4		58.	3	1	3	3	1	3		
19.	1	1	k	2	3		59.	3	1	3	5	1	2		
20.	1	2	k	1	3		60.	3	1	4	1	1	l		
21.	1	3	1	k	2		61.	3	1	4	2	1	4		
22.	2	1	k	1	3		62.	3	1	4	4	1	2		
23.	3	1	3	1	3		63.	3	1	5	3	1	2		
24.	3	1	5	k	2		64.	3	2	1	1	1	2		
25.	5	1	1	1	3		65.	4	1	1	2	1	6		
26.	5	1	3	k	2		66.	4	1	2	1	1	l		
27.	1	1	1	1	6	l	67.	4	1	3	1	1	4		
28.	1	1	1	2	2	2	68.	4	1	3	3	1	2		
29.	1	1	1	3	1	12	69.	5	1	1	2	1	5		
30.	1	1	2	1	4	l	70.	5	1	1	3	1	3		
31.	1	1	2	3	1	8	71.	5	1	1	5	1	2		
32.	1	1	3	3	1	7	72.	5	1	2	1	1	8		
33.	1	1	4	1	3	l	73.	5	1	2	2	1	3		
34.	1	1	5	1	3	8	74.	5	1	2	4	1	2		
35.	1	1	6	1	3	4	75.	6	1	1	1	1	l		
36.	1	1	7	1	3	3	76.	6	1	2	1	1	4		
37.	1	1	7	3	1	6	77.	7	1	1	1	1	36		
38.	1	1	11	1	3	2	78.	7	1	2	1	1	3		
39.	1	1	k	3	1	5	79.	7	1	2	3	1	2		
40.	1	1	k	4	1	3	80.	8	1	1	1	1	20		

G	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
81.	9	1	1	1	1	15		
82.	9	1	1	2	1	4		
83.	9	1	2	2	1	2		
84.	10	1	1	1	1	12		
85.	11	1	1	1	1	11		
86.	11	1	2	1	1	2		
87.	12	1	1	1	1	10		
88.	13	1	1	1	1	9		
89.	16	1	1	1	1	8		
90.	21	1	1	1	1	7		
91.	37	1	1	1	1	6		
92.	1	1	1	1	3	1	3	
93.	1	1	1	1	5	k	2	
94.	1	1	3	1	1	1	3	
95.	1	1	3	1	3	k	2	
96.	1	1	k	1	2	l	2	
97.	1	1	k	2	1	l	2	
98.	1	2	k	1	1	l	2	
99.	2	1	k	1	1	l	2	
100.	3	1	3	1	1	k	2	
101.	5	1	1	1	1	k	2	
102.	1	1	1	1	1	1	2	2
103.	1	1	1	1	1	2	1	10
104.	1	1	1	1	2	2	1	8
105.	1	1	1	1	3	2	1	6
106.	1	1	1	1	3	3	1	3
107.	1	1	1	1	3	5	1	2
108.	1	1	1	1	4	1	1	l
109.	1	1	1	1	4	2	1	4
110.	1	1	1	1	4	4	1	2
111.	1	1	1	1	5	1	1	4
112.	1	1	1	1	5	3	1	2
113.	1	1	1	2	1	1	1	2
114.	1	1	2	1	1	2	1	6
115.	1	1	2	1	2	1	1	l
116.	1	1	2	1	2	2	1	4

G	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
117.	1	1	2	1	3	1	1	4		
118.	1	1	2	1	3	3	1	2		
119.	1	1	3	1	1	2	1	5		
120.	1	1	3	1	1	3	1	3		
121.	1	1	3	1	1	5	1	2		
122.	1	1	3	1	2	1	1	8		
123.	1	1	3	1	2	2	1	3		
124.	1	1	3	1	2	4	1	2		
125.	1	1	4	1	1	1	1	l		
126.	1	1	4	1	2	1	1	4		
127.	1	1	5	1	1	1	1	36		
128.	1	1	5	1	2	1	1	3		
129.	1	1	5	1	2	3	1	2		
130.	1	1	6	1	1	1	1	20		
131.	1	1	7	1	1	1	1	15		
132.	1	1	7	1	1	2	1	4		
133.	1	1	7	1	2	2	1	2		
134.	1	1	8	1	1	1	1	12		
135.	1	1	9	1	1	1	1	11		
136.	1	1	9	1	2	1	1	2		
137.	1	1	10	1	1	1	1	10		
138.	1	1	11	1	1	1	1	9		
139.	1	1	14	1	1	1	1	8		
140.	1	1	19	1	1	1	1	7		
141.	1	1	35	1	1	1	1	6		
142.	1	1	k	1	1	1	1	5		
143.	1	1	k	1	1	2	1	3		
144.	1	1	k	1	1	4	1	2		
145.	1	2	k	1	1	1	1	4		
146.	1	2	k	1	1	3	1	2		
147.	2	1	k	1	1	3	1	2		
148.	3	1	1	1	1	1	1	2		
149.	1	1	1	1	3	1	1	k	2	
150.	1	1	3	1	1	1	1	k	2	
151.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2

Табела 1

4.2 NSG са другом сопственом вриједношћу λ_2 једнаком 1

У овом поглављу се презентује оригинални резултат на начин што се даје карактеризација свих NSG-ова код којих је друга сопствена вриједност $\lambda_2 = 1$. У раду [36] дат је приказ свих NSG-ова са особином $\lambda_2 \leq 1$, користећи програмске пакете *MATlab* и *NewGraph*. Као што је и раније наглашено, сваки NSG је кограф, па је репрезентација NSG-ова специјалан случај репрезентације кографова која је описана у претходном поглављу. Уз коришћење наведених програмских пакета, на основу репрезентације NSG-ова и коришћењем матрице сусједства графа, добијени су резултати који слиједе.

Лема 4.4 *Нека је* $C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *повезан* NSG *за који важи* $\lambda_2 = 1$. *Тада је* $n \leq 9$.

Доказ. Ако је $n > 10$ онда NSG $C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ садржи NSG $C(1^{10}, 2)$ као свој индуковани подграф. Пошто је друга сопствена вриједност графа $C(1^{10}, 2)$ већа од 1 (ово се може директно израчунати), на основу Теореме о преплитању добијамо да је друга сопствена вриједност графа $C(a_1, \ldots, a_n)$ већа од 1. Ако је $n = 10$ онда је индуковани подграф $C(1^9, 2)$ има другу сопствену вриједност која је мања од 1. Али, пошто индуковани подграфови $C(2, 1^8, 2)$, $C(1, 2, 1^7, 2)$, $C(1^2, 2, 1^6, 2)$, $C(1^3, 2, 1^5, 2)$, $C(1^4, 2, 1^4, 2)$, $C(1^5, 2, 1^3, 2)$, $C(1^5, 2, 1^3, 2)$, $C(1^6, 2, 1^2, 2)$, $C(1^7, 2, 1, 2)$, $C(1^8, 2, 2)$ од $C(a_1, \ldots, a_{10})$ имају другу сопствену вриједност већу од 1, на основу Теореме о преплитању закључујемо да је друга сопствена вриједност од $C(a_1, \ldots, a_{10})$ такође већа од 1. ∎

На основу Теореме 4.1 може се закључити да се налажење друге сопствене вриједности графа G своди на одређивање друге сопствене вриједности његовог дивизора, под условом да је та сопствена вриједност различита од 0 и -1.

Посљедица 4.2 *Нека је G произвољни NSG и нека је H његов дивизор. Онда је $\lambda_2(G) = 1$ ако и само ако $\lambda_2(H) = 1$.*

Доказ. Доказ непосредно слиједи из Теореме 4.1. ∎

Сада одређујемо све NSG-ове са особином $\lambda_2 = 1$. Надаље, нека је $G = C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ произвољан повезан NSG, и нека је D његова матрица сусједства. На основу Леме 4.4, $\lambda_2(G) = 1$ имплицира $n \leq 9$. Даље разматрамо све могуће вриједности n. Због Посљедице 4.2, ако важи једнакост $\det(I - D) = 0$, онда G има другу сопствену вриједност $\lambda = 1$.

Наредне теореме су аналогне одговарајућим теоремама у претходном поглављу и њима су у потпуноти описани сви NSG–ови са особином $\lambda_2 = 1$.

Теорема 4.10 *Нека је $G = C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ повезан NSG за који важи $\lambda_2(G) = 1$. Ако је $n \leq 4$ онда је G неки од сљедећих графова:*
$C(a_1, a_2, a_3)$, гдје је $(a_1, a_2, a_3) = (3, 1, 8)$, $(1, 2, 7)$, $(4, 1, 6)$, $(6, 1, 5)$, $(1, 3, 4)$, $(2^2, 4)$, $(1, 4, 3)$, $(2, 3^2)$;
$C(a_1, a_2, a_3, a_4)$, гдје је $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (14, 1, 3, 2)$, $(10, 1, 3, 3)$, $(8, 1, 3, 5)$, $(7, 1, 3, 9)$, $(5, 1, 4, 2)$, $(4, 2^3)$, $(3, 2^2, 3)$, $(1, 8, 1, 2)$, $(2, 7, 1, 2)$, $(1, 6, 1, 3)$, $(1, 5, 1, 5)$, $(2, 5, 1, 3)$, $(2, 4, 1, 5)$, $(3, 4, 1, 4)$, $(3, 3, 1, 13)$, $(4, 3, 1, 9)$, $(6, 3, 1, 7)$, $(10, 3, 1, 6)$.

Доказ. За $n = 1$ добијамо комплетан граф, а друга сопствена вриједност било ког комплетног графа је мања од 1.
Даље, сваки NSG облика $G = C(a_1,\ a_2)$, $(a_1 \geq 1, a_2 \geq 2)$ је комплетан мултипартитни граф, па због тога има тачно једну позитивну сопствену вриједност (на основу Теореме 2.3). Из овога слиједи да је $\lambda_2(G) < 1$, за све природне бројеве $a_1 \geq 1,\ a_2 \geq 2$.

Претпоставимо да је $n = 3$. Нека је H дивизор од G чија је матрица (1). Добијамо $\det(I - D) = (2 - a_1 a_2)(2 - a_3) - 2a_1$. Сада морамо провјерити за које вриједности параметара $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ је ова детерминанта нула (пошто, у том случају, имамо да је $\lambda_2(G) = 1$, а такође, према Посљедици 4.1 и $\lambda_2(H) = 1$). Прво, ако је $(a_1, a_2) = (1, 2)$ или $(a_1, a_2) = (2, 1)$ детерминанта је негативна за било коју вриједност трећег параметра. Слично, ако је $a_3 = 2$ детерминанта је негативна за било коју вриједност параметара a_1 и a_2. Даље, за $a_3 = 8$ детерминанта (1) се своди на $2(a_1(3a_2 - 1) - 6)$ и она је позитивна за произвољне параметре a_1 и a_2 који задовољавају услове $a_1 + a_2 \geq 4$ и $(a_1, a_2) \neq (3, 1)$. За $(a_1, a_2, a_3) = (3, 1, 8)$ детерминанта је једнака нули, па имамо то рјешење. Преостали случајеви су $a_3 = 3, 4, \ldots, 7$. Рачунањем горње детерминанте и испитивањем када је она једнака нула добијамо преостала рјешења: $(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 7)$, $(4, 1, 6)$, $(6, 1, 5)$, $(1, 3, 4)$, $(4, 2, 2)$, $(1, 4, 3)$, $(2, 3, 3)$.

Коначно, претпоставимо да је $n = 4$. Овдје имамо да је $\det(I - D) = (a_1a_2a_3 - 2(a_1 + a_3))(a_4 + 1)) - 2a_1a_2 + 4$. Прво, ако је $(a_1, a_2) = (1, 2)$ или $(a_1, a_2) = (2, 1)$ детерминанта је негативна за било коју вриједност параметара a_3 и a_4. Слично, ако је $(a_2, a_3) = (1, 2)$ или $(a_2, a_3) = (2, 1)$ детерминанта је негативна за било које вриједности a_1 и a_4. Директним рачунањем добијамо да граф $C(2^2, 3, 2)$ има другу сопствену вриједност већу од 1. Зато, за $a_3 \leq 3$ и $a_1 + a_2 > 3$ и $a_2 \geq 2$ детерминанта је позитивна за произвољну вриједност параметра a_4, а за $a_3 \leq 3$ и $a_1 + a_2 \leq 3$ детерминанта је негативна за било коју вриједност параметра a_4. Преостали случајеви су $a_3 \geq 3$ (када је $a_2 = 1$), $a_3 = 2$ и $a_3 = 1$.

Случај 1 : $a_3 \geq 3$ и $a_2 = 1$. $a_3 \geq 7$ имплицира $a_1 + a_2 \leq 3$ па закључујемо да је у овом случају детерминанта негативна. У случају када је $a_3 = 6$ или $a_3 = 5$ и $a_2 = 1$ такође закључујемо да је детерминанта негативна. Настављамо са $a_3 = 4$ и $a_2 = 1$. Овдје, директним рачунањем, добијамо да је друга сопствена вриједност графа $C(6, 1, 4, 2)$ већа од 1. Због тога важи да је $a_1 \leq 5$. Ако је $a_1 = 5$ рјешење је граф $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (5, 1, 4, 2)$ и за $a_1 = 1,\ 2,\ 3$ или 4 детерминанта је негативна за било коју вриједност преосталог параметра. Коначно, када је $a_3 = 3$ и $a_2 = 1$, слично као и у претходном разматрању, добијамо да је друга сопствена вриједност графа $C(15, 1, 3, 2)$ већа од 1, па стога имамо да је $a_1 \leq 14$. Ако је $a_1 = 1$ рјешење је $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (14, 1, 3, 2)$. Испитивањем преосталих могућности добијамо сљедећа рјешења: $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (10, 1, 3, 3)$, $(8, 1, 3, 5)$, $(7, 1, 3, 9)$.

Случај 2 : $a_3 = 2$. Директним рачунањем, добијамо да је друга сопствена вриједност графа $C(1, 4, 2, 2)$ већа од 1. Ово имплицира да је $a_2 \leq 3$. Сада разликујемо три подслучаја у зависности од a_2.

Подслучај 2.1 : Претпоставимо да је $a_2 = 3$. Пошто је друга сопствена вриједност графа $C(2, 3, 2, 2)$ већа од 1, закључујемо да је $a_1 = 1$. Ако ставимо фиксиране вриједности за a_1, a_2 и a_3 у детерминанту (1), добијамо да је детерминанта негативна за било коју вриједност параметра a_4.

Подслучај 2.2 : Претпоставимо да је $a_2 = 2$. Директним рачунањем добијамо да је друга сопствена вриједност графа $C(5, 2, 2, 2)$ већа од 1. Зато важи да је $a_1 \leq 4$ и једно рјешење је граф $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (4, 2, 2, 2)$. Ако је $a_1 = 3$, стављајући фиксиране вриједности за a_1, a_2 и a_3 у детерминанту (1), добијамо да је детерминанта нула ако је $a_4 = 3$. Стога имамо рјешење $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (3, 2, 2, 3)$. Ако је $a_1 = 2$ стављајући фиксиране вриједности за a_1, a_2 и a_3 у детерминанту (1) добијамо да је детерминанта негативна за било коју вриједност преосталог параметра a_4. Пошто је детерминанта (1) негативна када је $a_2 = 2$, имамо исти закључак и када је $a_2 = 1$.

Подслучај 2.3 : Претпоставимо да је $a_2 = 1$. Пошто је $(a_2, a_3) = (1, 2)$ закључујемо да је детерминанта (1) негативна.

Случај 3 : $a_3 = 1$. Директним рачунањем, добијамо да је друга сопствена вриједност графа $C(1, 9, 1, 2)$ већа од 1. Ово имплицира да је $a_2 \leq 8$, а за $a_2 = 8$ једно рјешење је граф $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 8, 1, 2)$. Сада разликујемо још седам подслучајева у зависности од a_2.

Подслучај 3.1 : Претпоставимо да је $a_2 = 7$. Слично као и раније добијамо да је $a_1 \leq 2$ и $a_4 = 2$, и да је једно рјешење граф $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 7, 1, 2)$. За $a_1 = 1$ и $a_4 = 2$ детерминанта (1) је негативна.

Подслучај 3.2 : Претпоставимо да је $a_2 = 6$. добијамо да је $a_4 \leq 3$, и да је једно рјешење граф $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 6, 1, 3)$. Предпоставимо сада да је $a_4 = 2$. Стављајући фиксиране вриједности за a_2, a_3 и a_4 у детерминанту (1) добијамо да је детерминанта негативна за било који избор параметра a_1.

Подслучај 3.3 : Претпоставимо да је $a_2 = 5$. Добијамо да је $a_4 \leq 5$ и да је једно рјешење граф $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 5, 1, 5)$. Претпоставимо сада да је $a_4 = 4$. Стављајући фиксиране вриједности за a_2, a_3 и a_4 у детерминанту (1) добијамо да је детерминанта различита од нуле за произвољну вриједност параметра a_1. Претпоставимо сада да је $a_4 = 3$. Стављајући фиксиране вриједности за a_2, a_3 и a_4 у детерминанту (1) добијамо да је детерминанта нула када је $a_1 = 2$, па имамо рјешење $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 5, 1, 3)$. Претпоставимо сада да је $a_4 = 2$. Стављајући фиксиране вриједности за a_2, a_3 анд a_4 у детерминанту (1) добијамо да је детерминанта негативна за било који избор параметра a_1.

Подслучај 3.4 : Претпоставимо да је $a_2 = 4$. Ако је $a_1 = 1$, стављајући фиксиране вриједности за a_1, a_2 и a_3 у детерминанту (1) добијамо да је детерминанта негативна за произвољну вриједност параметра a_4. Ако је $a_1 = 2$, добијамо да је $a_4 = 5$ и да је једно рјешење граф $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 4, 1, 5)$. Ако је $a_1 = 3$, добијамо да је $a_4 = 4$ и да је једно рјешење граф $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (3, 4, 1, 4)$. Претпоставимо сада да је $a_4 = 2$. Стављајући фиксиране вриједности за a_2 и a_3 у детерминанту (1), добијамо да је детерминанта негативна за произвољну вриједност параметра a_1. Пошто имамо исти закључак и када претпоставимо да је $a_4 = 3$, закључујемо да немамо других рјешења у овом подслучају.

Подслучај 3.5 : Претпоставимо да је $a_2 = 3$. Ако је $a_1 = 1$ или $a_1 = 2$ добијамо да ј детерминанта (1) негативна за било коју вриједност параметра a_4. Ако је $a_1 = 3$, добијамо да је $a_4 = 13$ и да је једно рјешење граф $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (3, 3, 1, 13)$. Ако је $a_1 = 4$, добијамо да је $a_4 = 9$, и да је једно рјешење граф $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (4, 3, 1, 9)$. Ако је $a_1 = 5$ добијамо да је детерминанта (1) различита од нула за произвољну вриједност параметра a_4. Ако је $a_1 = 6$, добијамо да је $a_4 = 7$ и да је једно рјешење граф $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (6, 3, 1, 7)$. Ако је $a_1 = 7$ добијамо да је детерминанта (1) различита од нуле за било коју вриједност параметра a_4. Овај закључак имамо и када је $a_1 = 8$ и $a_1 = 9$. Ако је $a_1 = 10$, добијамо да је $a_4 = 6$ и да је једно рјешење граф $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (10, 3, 1, 6)$. Претпоставимо сада да је $a_4 = 2$. Стављајући фиксиране вриједности за a_2 и a_3 у детерминанту (1), добијамо да је детерминанта негативна за произвољну вриједност параметра a_1. Пошто имамо и сти овај закључак и када претпоставимо да је $a_4 = 3$, $a_4 = 4$ ор $a_4 = 5$, закључујемо да немамо других рјешења у овом подслучају.

Подслучај 3.6 : Претпоставимо да је $a_2 = 2$. Стављајући фиксиране вриједности за a_2 и a_3 у детерминанту (1), добијамо да је детерминанта (1) негативна за произвољне вриједности параметара a_1 и a_4, па закључујемо да немамо других рјешења у овом подслучају.

Подслучај 3.7 : Претпоставимо да је $a_2 = 1$. Због претходног подслучаја закључујемо да немамо рјешења у овом подслучају. ■

Лема 4.5 *Нека је $C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ повезан NSG за који је $\lambda_2 = 1$. Тада важи:*
(и) Ако је $n = 5$ онда је $a_2 \leq 4$ и $a_5 \leq 8$;
(ии) Ако је $n = 6$ онда је $a_2 \leq 3$, $a_4 \leq 6$ и $a_5 \leq 6$;
(иии) Ако је $n = 7$ онда је $a_1 \leq 6$, $a_2 \leq 2$, $a_4 \leq 2$, $a_5 \leq 6$ и $a_7 \leq 3$;
(ив) Ако је $n = 8$ онда је $a_1 \leq 3$, $a_2 \leq 2$, $a_4 \leq 2$, $a_5 \leq 5$, $a_6 \leq 5$ и $a_7 \leq 3$;
(в) Ако је $n = 9$ онда је $a_1 = a_2 = a_4 = a_6 = a_7 = 1$, $a_3 \leq 4$, $a_5 \leq 4$ и $a_9 = 2$.

Доказ. Директним рачунањем добијамо да граф $C(1, 5, 1^2, 2)$ има другу сопствену вриједност већу од 1. Исто важи и за граф $C(1^4, 9)$. Зато, ако је $n = 5$ имамо да је $a_2 \leq 3$ и $a_5 \leq 8$.

Преостали случајеви се доказују на сличан начин. ■

Теорема 4.11 *Ако је $C(a_1, a_2, \ldots, a_5)$ повезан NSG за који важи $\lambda_2 = 1$ онда је G неки од сљедећих графова:*
$C(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, *гдје је* $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 4, 1, k, 2)$, $(1, 3, 2, k, 2)$, $(2, 3, 1, k, 2)$, $(1, 2, k, 1, 4)$, $(1, 2, k, 2, 3)$, $(2^3, k, 2)$, $(1^4, 8)$, $(1^2, 2, 1, 6)$, $(1^2, 4, 1, 5)$, $(2, 1, k, 1, 4)$, $(2, 1, k, 2, 3)$, $(6, 1^3, 3)$, $(4, 1, 2, 1, 3)$, $(3, 1, 4, 1, 3)$, $(3, 1, 6, k, 2)$, $(4, 1, 4, k, 2)$, $(6, 1, 3, k, 2)$, *за било који природан број* $k \geq 1$.

Доказ. Због леме 4.1 *(i)* имамо да је $a_2 \leq 4$ и $a_5 \leq 8$. Ако је $a_2 = 4$, добијамо да је $a_1 = 1$, $a_4 = 1$ и $a_5 = 2$. Стављајући фиксиране вриједности a_1, a_2, a_4 и a_5 у детерминанту (1), добијамо да је детерминанта нула за произвољну вриједност параметра a_3. Стога су рјешења графови $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 4, 1, k, 2)$, гдје је $k \geq 1$. Разликујемо још три случаја у зависности од параметра a_2.

Случај 1 : $a_2 = 3$. Директним рачунањем добијамо да је друга сопствена вриједност графа $C(3, 3, 1, 1, 2)$ већа од 1. Из овога слиједи да је $a_1 \leq 2$. Такође, директним рачунањем добијамо да је друга сопствена вриједност графова $C(1, 3, 3, 1, 2)$ и $C(1, 3, 1, 1, 3)$ већа од 1. Одавде слиједи да је $a_3 \leq 2$ и $a_5 = 2$. За $a_3 = 2$ добијамо $a_1 = 1$. Стављајући $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ и $a_5 = 2$ у детерминанту (1), добијамо да је детерминанта нула за произвољну вриједност параметра a_3. Стога су рјешења графови $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 3, 2, k, 2)$, гдје је $k \geq 1$. Сада разликујемо још један подслучај у зависности од параметра a_3.

Подслучај 1.1 : Претпоставимо да је $a_3 = 1$. Добијамо $a_1 \leq 2$ и за $a_1 = 2$ имамо рјешење $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 3, 1, k, 2)$, гдје је $k \geq 1$. Ако је $a_1 = 1$ детерминанта (1) је негативна за било који избор параметра a_4, тако да немамо других рјешења у овом подслучају.

Остали случајеви су $a_2 = 2$ и $a_2 = 1$. Разматрајући ове случајеве у зависности од преосталих параметара, слично као у претходној теореми, добијамо преостала рјешења у тврђењу.

Теорема 4.12 *Ако је $C(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ повезан NSG за који важи $\lambda_2 = 1$, тада је G један од сљедећих графова:*
$C(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, *гдје је* $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (1, 3, 1, 4, 1, 2)$, $(1, 3, 1, 2, 1, 3)$, $(1, 3, 1^3, 5)$, $(3, 2, 1, 2, 1, 2)$, $(2^2, 1, 4, 1, 2)$, $(2^2, 1, 2, 1, 3)$, $(2^2, 1^3, 5)$, $(1, 2, k, 6, 1, 2)$, $(1, 2, k, 4, 1, 3)$, $(1, 2, k, 3, 1, 5)$, $(2, 1, k, 6, 1, 2)$, $(6, 1^2, 5, 1, 2)$, $(4, 1, 2, 5, 1, 2)$, $(3, 1, 4, 5, 1, 2)$, $(1^3, 4, 1, 4)$, $(2, 1, k, 4, 1, 3)$, $(3, 1, 5, 4, 1, 2)$, $(4, 1, 3, 4, 1, 2)$, $(6, 1, 2, 4, 1, 2)$, $(1^3, 3, 1, 13)$, $(1^2, 2, 3, 1, 9)$, $(1^2, 4, 3, 1, 7)$, $(1^2, 8, 3, 1, 6)$, $(2, 1, k, 3, 1, 5)$, $(6, 1^2, 3, 1, 3)$, $(4, 1, 2, 3, 1, 3)$, $(3, 1, 4, 3, 1, 3)$, $(8, 1, 2, 3, 1, 2)$, $(1^2, 2^4)$, $(1^3, 2^2, 3)$, $(3, 1^2, 2, 1, 11)$, $(3, 1, 2^2, 1, 9)$, $(3, 1, 3, 2, 1, 7)$, $(3, 1, 4, 2, 1, 5)$, $(3, 1, 5, 2, 1, 3)$, $(4, 1^2, 2, 1, 7)$, $(4, 1, 2^2, 1, 5)$, $(4, 1, 3, 2, 1, 3)$, $(6, 1^2, 2, 1, 5)$, $(6, 1, 2^2, 1, 3)$, $(10, 1^2, 2, 1, 4)$, $(10, 1, 2^2, 1, 2)$, $(1^2, 12, 1, 3, 2)$, $(1^2, 8, 1, 3^2)$, $(1^2, 6, 1, 3, 5)$, $(1^2, 5, 1, 3, 9)$, $(3, 1, 2, 1, 2^2)$, $(12, 1, 2, 1^2, 2)$, $(8, 1, 2, 1^2, 3)$, $(3, 1, 5, 1^2, 5)$, $(4, 1, 3, 1^2, 5)$, $(6, 1, 2, 1^2, 5)$, $(38, 1^4, 6)$, $(22, 1^4, 7)$, $(14, 1^4, 9)$, $(5, 1, 2, 1^2, 9)$, $(10, 1^4, 13)$, $(7, 1^4, 37)$, $(8, 1^4, 21)$ *за произвољан природан број* $k \geq 1$.

Доказ. На основу леме 4.1 *(ii)* имамо да је $a_2 \leq 3$, $a_4 \leq 6$, $a_5 \leq 6$. Сада разликујемо три случаја у зависности од параметра a_2.

Случај 1 : $a_2 = 3$. Овдје добијамо: $a_1 = a_3 = a_5 = 1$, $a_4 \leq 4$, $a_6 \leq 5$. Даље разликујемо четири подслучаја у зависности од a_4.

Подслучај 1.1 : Ако је $a_4 = 4$, добијамо да је $a_6 = 2$, па имамо рјешење $(1,3,1,4,1,2)$.

Подслучај 1.2 : Ако је $a_4 = 3$, стављајући фиксиране вриједности за a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 у детерминанту (1) добијамо да је детерминанта различита од нуле за произвољну вриједност преосталог параметра.

Подслучај 1.3 : Ако је $a_4 = 2$, добијамо да је $a_6 = 3$, па имамо рјешење $(1,3,1,2,1,3)$.

Подслучај 1.4 : Ако је $a_4 = 1$, добијамо да је $a_6 = 5$, па имамо рјешење $(1,3,1^3,5)$.

Случај 2 : $a_2 = 2$. Овдје добијамо да је $a_1 \leq 3$, $a_4 \leq 6$, $a_5 \leq 2$. Даље разликујемо два подслучаја у зависности од a_5 ($a_5 = 2$ и $a_5 = 1$)и слично као у претходним разматрањима добијамо преостала рјешења у тврђењу.

Теорема 4.13 *Ако је $C(a_1, a_2, \ldots, a_7)$ повезан NSG за који важи $\lambda_2 = 1$ онда је G неки од сљедећих графова:*
$C(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$, *гдје је* $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (2,1,k,2,1,l,2)$, $(1,2,k,2,1,l,2)$, $(1,2,k,1,2,l,2)$, $(1^2,4,1^3,3)$, $(1^2,2,1,2,1,3)$, $(1^4,4,1,3)$, $(6,1^4,k,2)$, $(4,1,2,1^2,k,2)$, $(3,1,4,1^2,k,2)$, $(2,1,k,1,2,l,2)$, $(1^4,6,k,2)$, $(1^2,2,1,4,k,2)$, $(1^2,4,1,3,k,2)$ *за произвољне природне бројеве* k, $l \geq 1$.

Доказ. На основу леме 4.1 *(iii)* имамо да је $a_1 \leq 6$, $a_2 \leq 2$, $a_4 \leq 2$, $a_5 \leq 6$ и $a_7 \leq 3$. Сада разликујемо два случаја у зависности од a_4.
Случај 1 : $a_4 = 2$. Ово имплицира да је $a_1 \leq 2$, $a_2 \leq 2$, $a_5 = 1$, $a_7 = 2$. Ако је $a_1 = 2$ добијамо

$a_2 = a_5 = 1$ и $a_7 = 2$. Стављајући фиксиране вриједности за a_1, a_2, a_4, a_5 и a_7 у детерминанту (1), добијамо да је детерминанта једнака нули за произвољну вриједност параметара a_3 и a_6.Стога имамо рјешења $(2,1,k,2,1,l,2)$, гдје су k, $l \geq 1$. Ако је $a_1 = 1$ добијамо да је $a_2 \leq 2$. Ако је $a_2 = 2$, стављајући фиксиране вриједности за a_1, a_2, a_4, a_5 и a_7 у детерминанту (1), добијамо да је детерминанта нула за произвољну вриједност параметара a_3 и a_6. Зато имамо рјешења $(1,2,k,2,1,l,2)$, гдје су k, $l \geq 1$. Ако је $a_2 = 1$, стављајући фиксиране вриједности за a_1, a_2, a_4, a_5 и a_7 у детерминанту (1), добијамо да је детерминанта негативна за произвољну вриједност параметара a_3 и a_6.

Случај 2 : $a_4 = 1$. На основу леме 4.1 *(iii)* имамо да је $a_1 \leq 6$, $a_2 \leq 2$, $a_5 \leq 6$ и $a_7 \leq 3$. Сада разликујемо два подслучаја у зависности од a_2 ($a_2 = 2$ и $a_2 = 1$) слично као у претходним разматрањима, дискутујући, ако је потребно, по преосталим параметрима, добијамо комплетну листу рјешења у тврђењу.

Теорема 4.14 *Ако је $C(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ повезан NSG за који важи $\lambda_2 = 1$ онда је G неки од сљедећих графова:*
$C(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)$, *гдје је* $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)$г $(1,2,k,1^2,4,1,2)$, $(1,2,k,1^2,2,1,3)$, $(1,2,k,1^4,5)$, $(1^3,2,1,2,1,2)$, $(1^4,2,1,2^2)$, $(2,1,k,1^2,4,1,2)$, $(2,1,k,1^2,2,1,3)$, $(2,1,k,1^4,5)$, $(1^2,4,1^2,5,1,2)$, $(1^2,2,1,2,5,1,2)$, $(1^4,4,5,1,2)$, $(1^4,5,4,1,2)$, $(1^2,2,1,3,4,1,2)$, $(1^2,4,1,2,4,1,2)$, $(1^4,4,3,1,3)$, $(1^2,2,1,2,3,1,3)$, $(1^2,6,1,2,3,1,2)$, $(1^2,4,1^2,3,1,3)$, $(1^4,5,2,1,3)$, $(1^4,4,2,1,5)$, $(1^2,2,1,3,2,1,5)$, $(1^4,3,2,1,7)$, $(1^2,8,1,2^2,1,2)$, $(1^2,4,1,2^2,1,3)$, $(1^2,2,1,2^2,1,5)$, $(1^4,2^2,1,9)$, $(1^5,2,1,11)$, $(1^2,2,1^2,2,1,7)$, $(1^2,4,1^2,2,1,5)$, $(1^2,8,1^2,2,1,4)$, $(1^4,5,1^2,8)$, $(1^2,2,1,3,1^2,5)$, $(1^2,3,1,2,1^2,9)$, $(1^2,4,1,2,1^2,5)$, $(1^2,6,1,2,1^2,3)$, $(1^2,10,1,2,1^2,2)$, $(1^2,5,1^4,37)$, $(1^2,6,1^4,21)$, $(1^2,8,1^4,13)$, $(1^2,12,1^4,9)$, $(1^2,20,1^4,7)$, $(1^2,36,1^4,6)$ *за произвољан природан број* $k \geq 1$.

Доказ. На основу леме 4.1 *(iv)* имамо да је $a_1 \leq 3$, $a_2 \leq 2$, $a_4 \leq 2$, $a_5 \leq 5$, $a_6 \leq 5$ и $a_7 \leq 3$. Слично као у претходним теоремама добијамо прва три сета рјешења када претпоставимо да је $a_2 = 2$. Сљедеће рјешење добијамо када узмемо да је $a_2 = 1$ и $a_4 = 2$. Наредно рјешење добијамо када узмемо да је $a_2 = 1$, $a_4 = 1$, $a_7 = 2$ а сљедећа три сета рјешења када узмемо да је $a_2 = 1$, $a_4 = 1$, $a_7 = 1$ и $a_1 = 2$. Преостала рјешења добијамо када је $a_2 = a_4 = a_7 = 1$ и $a_6 = 5$ или $a_6 = 4$ или $a_6 = 3$ или $a_6 = 2$ или $a_6 = 1$. До тих рјешења долазимо разликујући случајеве у зависности од параметра a_5 као и подслучајеве у зависности од параметара a_3 или a_8. ∎

Теорема 4.15 *Ако је $C(a_1, a_2, \dots, a_9)$ повезан NSG за који важи $\lambda_2 = 1$ онда је G неки од сљедећих графова:*
$C(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$, гдје је $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9) = (1^2, 4, 1^5, 2)$, $(1^2, 2, 1, 2, 1^3, 2)$, $(1^4, 4, 1^3, 2)$.

Доказ. На основу леме 4.1 *(v)* имамо да је $a_1 = a_2 = a_4 = a_6 = a_7 = 1$, $a_3 \leq 4$, $a_5 \leq 4$ и $a_9 = 2$. стављајући фиксиране вриједности за a_1, a_2, a_4, a_6, a_7 и a_9 у детерминанту (1) добијамо да је $\det(I - D) = 2(a_3 a_5 - 4)$. Из претходне једнакости закључујемо да је детерминанта једнака нули када је $(a_3, a_5) = (4, 1)$ или $(a_3, a_5) = (2, 2)$ или $(a_3, a_5) = (1, 4)$. ∎

G	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	G	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1.	3	1	8				41.	3	1	6	k	2	
2.	1	2	7				42.	4	1	4	k	2	
3.	4	1	6				43.	6	1	3	k	2	
4.	6	1	5				44.	1	3	1	4	1	2
5.	1	3	4				45.	1	3	1	2	1	3
6.	2	2	4				46.	1	3	1	1	1	5
7.	1	4	3				47.	3	2	1	2	1	2
8.	2	3	3				48.	2	2	1	4	1	2
9.	14	1	3	2			49.	2	2	1	2	1	3
10.	10	1	3	3			50.	2	2	1	1	1	5
11.	8	1	3	5			51.	1	2	k	6	1	2
12.	7	1	3	9			52.	1	2	k	4	1	3
13.	5	1	4	2			53.	1	2	k	3	1	5
14.	4	2	2	2			54.	2	1	k	6	1	2
15.	3	2	2	3			55.	6	1	1	5	1	2
16.	1	8	1	2			56.	4	1	2	5	1	2
17.	2	7	1	2			57.	3	1	4	5	1	2
18.	1	6	1	3			58.	1	1	1	4	1	4
19.	1	5	1	5			59.	2	1	k	4	1	3
20.	2	5	1	3			60.	3	1	5	4	1	2
21.	2	4	1	5			61.	4	1	3	4	1	2
22.	3	4	1	4			62.	6	1	2	4	1	2
23.	3	3	1	13			63.	1	1	1	3	1	13
24.	4	3	1	9			64.	1	1	2	3	1	9
25.	6	3	1	7			65.	1	1	4	3	1	7
26.	10	3	1	6			66.	1	1	8	3	1	6
27.	1	4	1	k	2		67.	2	1	k	3	1	5
28.	1	3	2	k	2		68.	6	1	1	3	1	3
29.	2	3	1	k	2		69.	4	1	2	3	1	3
30.	1	2	k	1	4		70.	3	1	4	3	1	3
31.	1	2	k	2	3		71.	8	1	2	3	1	2
32.	2	2	2	k	2		72.	1	1	2	2	2	2
33.	1	1	1	1	8		73.	1	1	1	2	2	3
34.	1	1	2	1	6		74.	3	1	1	2	1	11
35.	1	1	4	1	5		75.	3	1	2	2	1	9
36.	2	1	k	1	4		76.	3	1	3	2	1	7
37.	2	1	k	2	3		77.	3	1	4	2	1	5
38.	6	1	1	1	3		78.	3	1	5	2	1	3
39.	4	1	2	1	3		79.	4	1	1	2	1	7
40.	3	1	4	1	3		80.	4	1	2	2	1	5

G	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
81.	4	1	3	2	1	3		
82.	6	1	1	2	1	5		
83.	6	1	3	2	1	3		
84.	10	1	1	2	1	4		
85.	10	1	2	2	1	2		
86.	1	1	12	1	3	2		
87.	1	1	8	1	3	3		
88.	1	1	6	1	3	5		
89.	1	1	5	1	3	9		
90.	3	1	2	1	2	2		
91.	12	1	2	1	1	2		
92.	8	1	2	1	1	3		
93.	3	1	5	1	1	5		
94.	4	1	3	1	1	5		
95.	6	1	2	1	1	5		
96.	38	1	1	1	1	6		
97.	22	1	1	1	1	7		
98.	14	1	1	1	1	9		
99.	5	1	2	1	1	9		
100.	10	1	1	1	1	13		
101.	7	1	1	1	1	37		
102.	8	1	1	1	1	21		
103.	2	1	k	2	1	l	2	
104.	1	2	k	2	1	l	2	
105.	1	2	k	1	2	l	2	
106.	1	1	4	1	1	1	3	
107.	1	1	2	1	2	1	3	
108.	1	1	1	1	4	1	3	
109.	6	1	1	1	1	1	2	
110.	4	1	2	1	1	k	2	
111.	3	1	4	1	1	k	2	
112.	2	1	k	1	2	l	2	
113.	1	1	1	1	6	k	2	
114.	1	1	2	1	4	k	2	
115.	1	1	4	1	3	k	2	
116.	1	2	k	1	1	4	1	2
117.	1	2	k	1	1	2	1	3
118.	1	2	k	1	1	1	1	5
119.	1	1	1	2	1	2	1	2
120.	1	1	1	1	2	1	2	2

G	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
121.	2	1	k	1	1	4	1	2	
122.	2	1	k	1	1	2	1	3	
123.	2	1	k	1	1	1	1	5	
124.	1	1	4	1	1	5	1	2	
125.	1	1	2	1	2	5	1	2	
126.	1	1	1	1	4	5	1	2	
127.	1	1	1	1	5	4	1	2	
128.	1	1	2	1	3	4	1	2	
129.	1	1	4	1	2	4	1	2	
130.	1	1	1	1	4	3	1	3	
131.	1	1	2	1	2	3	1	3	
132.	1	1	6	1	2	3	1	2	
133.	1	1	4	1	1	3	1	3	
134.	1	1	1	1	5	2	1	3	
135.	1	1	1	1	4	2	1	5	
136.	1	1	2	1	3	2	1	5	
137.	1	1	1	1	3	2	1	7	
138.	1	1	8	1	2	2	1	2	
139.	1	1	4	1	2	2	1	3	
140.	1	1	2	1	2	2	1	5	
141.	1	1	1	1	2	2	1	9	
142.	1	1	1	1	1	2	1	11	
143.	1	1	2	1	1	2	1	7	
144.	1	1	4	1	1	2	1	5	
145.	1	1	8	1	1	2	1	4	
146.	1	1	1	1	5	1	1	8	
147.	1	1	2	1	3	1	1	5	
148.	1	1	3	1	2	1	1	9	
149.	1	1	4	1	2	1	1	5	
150.	1	1	6	1	2	1	1	3	
151.	1	1	10	1	2	1	1	2	
152.	1	1	5	1	1	1	1	37	
153.	1	1	6	1	1	1	1	21	
154.	1	1	8	1	1	1	1	13	
155.	1	1	12	1	1	1	1	9	
156.	1	1	20	1	1	1	1	7	
157.	1	1	36	1	1	1	1	6	
158.	1	1	4	1	1	1	1	1	2
159.	1	1	2	1	2	1	1	1	2
160.	1	1	1	1	4	1	1	1	2

Табела 2

Важи сљедећа теорема.

Теорема 4.16 *Нека је G повезан NSG за који важи $\lambda_2 = 1$. Онда је он један од графова из Табеле 2. Наведени графови су представљени параметрима $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Овдје су k и l природни бројеви. NSG-ови су поређани лексикографски по n.*

Закључак

У овом раду дат је преглед досадашњих резултата истраживања графова са малом другом сопственом вриједношћу и опис једне новије технике, технике звијезда комплимента, у одређивању појединих класа графова са својством да граф има другу сопствену вриједност σ или 1. Поред тога, посебан акцент је стављен на опис NSG-ова. Дата је карактеризација свих NSG-ова са особином $\lambda_2 < 1$ а у поглављу 4.2 је дат оригинилан допринос у испитивању ове класе графова тиме што су одређени сви NSG-ови са особином $\lambda_2 = 1$. Познати резултати су представљени у другој, трећој као и у првом поглављу четврте главе док је оригинални резултат дат, као што је и претходно наведено, у другом поглављу четврте главе.

Даљи правци истраживања би били да се употпуне наведени резултати, тј. да се пронађу звијезда комплименти за графове са другом сопственом вриједношћу која је σ или 1 и за неке друге класе графова, затим да се одреде сви звијезда комплименти за графове који имају другачије ограничење за другу сопствену вриједност, као и да се одреде и остали NSG-ови са особином да им је сопствена вриједност није већа од неког унапријед задатог броја (различитог од 1) и да се одреде сви NSG-ови који припадају појединим класама графова.

Литература

[1] L.W. Beineke, Chcaracterization of derived graphs, J.Combinatorial Theory, 9(1970), 129–135.

[2] T. Bıyıkoğlu, S.K. Simić, Z. Stanić, *Some notes on spectra of cographs*, Ars Combinatoria, in press.

[3] F.K. Bell, P. Rowlinson, *On the multiplicities of graph eigenvalues*, Bull. London Math. Soc. **35** (2003), 401–408.

[4] P.J. Cameron, J.M. Goethals, J.J. Seidel, E.E. Shult, *Line graphs, root systems and elliptic geometry*, J. Algebra, **43** (1976), 305–327.

[5] D. Cao, J. Hong, *Graphs characterized by the second eigenvalue*, J. Graph Theory, **17** (1993), No. 3, 325–331.

[6] D.G. Corneil, Y. Perl, L.K. Stewart, *A linear recognition algorithm for cographs*, SIAM J. Comput. **14**(1985), 926-934.

[7] D.M. Cvetković, *On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1*, Publ. Inst. Math.(Beograd), **31**(45) (1982), 15–20.

[8] D.M. Cvetković, M. Doob, I. Gutman, *Recent results in theory of graph spectra* (Annals of descrete math. **36**), North Holland, Amsterdam–New York–Oxford–Tokyo, 1988.

[9] D.M. Cvetković, M. Doob, S. Simić, *Some rezults on generilized line graphs* C.R. Math.Rept.Acad.Sci.Canada, 2(1980), No.3, 147–151.

[10] D.M. Cvetković, M. Doob, S. Simić, *Generilized line graphs;* J. Graph Theory, 5(1981), No.4, 385–399.

[11] D.M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs – theory and application,* 3rd edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg–Leipzig, 1995.

[12] D.M. Cvetković, M. Lepović, P. Rowilson, S. K. Simić, *A database of starcompliments of graphs*, Univ.Beograd, Publ.Elektrotehn. Fakul.,Ser.Mat **9** (1998), 103–112.

[13] D.M. Cvetković, M. Petrić, *A table of connected graphs on six vertices*; Discrete Math. **50** (1984), No.1, 37–49.

[14] D.M. Cvetković, P. Rowlinson, S.K. Simić, *Eigenspaces of graphs*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[15] D.M. Cvetković, P. Rowlinson, S.K. Simić, *Spectral generalizations of line graphs – On line graphs with least eigenvalue* -2, London Math. Soc., Lecture Notes Series 314, Cambridge University Press, 2004.

[16] D.M. Cvetković, S.K. Simić, *Minimal graphs whose second largest eigenvalue is not less than* $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, Bull. Acad. Serbe. Sci. Math., **121** (2000), 47–70.

[17] D.M. Cvetković, S.K. Simić, *On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed* $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, Dicsrete Math., **138** (1995), 213–227.

[18] M.Doob, D.M. Cvetković, *On spectral characterization of graphs,* Linear Algebra and Its Appl. 27(1979), 17–26.

[19] Guang–Hui Xu, *On unicyclic graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1*, Discrete Appl. Math., **136** (2004), 117–124.

[20] S.G. Guo, *On bicyclic graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1;* Linear algebra and its applications 407(2005), 201–210.

[21] J. Li, *Phd. Thesis*, University of Manitoba, 1994.

[22] G. Maxvell, *Hyperbolic trees*, J. Algebra, (1978), pp. 46-49.

[23] B. Mihailović , Z. Radosavljević, *On a class of tricyclic reflexive cactuses*, Univ. Beograd, Publ.Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. 16 (2005), 55–63.

[24] M. Milatović, Z. Stanić, *On nested split graphs whose second largest eigenvalue is equal to 1*, (2010), preprint.

[25] A. Neumaier, *The second largest eigenvalue of a tree*, Linear Algebra and its App., 46(1982), 9–25.

[26] M. Petrović, *On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed* $\sqrt{2}-1$, Univ. u Beogradu, Publ. Elektrotehn. fak.,Ser. Mat.**4**(1993), 64-85.

[27] M. Petrović, *On graphs with exactly one eigenvalue less than – 1*, J. Comb., Theory B,**52**(1991), No.1, 102–112.

[28] M. Petrović, B. Milekić, *On the second largest value of line graphs*; J. Graph Theory 27(1998), 61–66.

[29] M. Petrović, B. Milekić, *Generilized line graphs whose second largest eigenvalue at most 1*; Publ. Inst. Math. (Beograd), 68(82) (2000), 37–45.

[30] M. Petrović, Z. Radosavljević, *Spectrally constrained graphs*, Faculty of Science, Kragujevac, Yugoslavia, 2001.

[31] Z. Radosavljević, M. Rašajski, *Decomposition of Smith graphs in maximal reflexive caucteses*, Discrete Math., Vol. 308/2-3 (2008), 355–366.

[32] Z. Radosavljević, M. Simić, *Which byciclic graphs are reflexive?*, Univ. Beograd, Publ.Elektrotehn.Fak., Ser.Mat 7(1996), 90–104.

[33] S.K. Simić, *Some notes on graphs whose second largest eigenvalue not exceeding* $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, Linear and Multilin. Algebra, **39** (1995), 59–71.

[34] S.K. Simić, E.M. Li Marzi, F. Belardo, *Connected graphs of fixed order and size with maximal index: structural considerations*, Le Matematiche, **LIX**(2004) 349–365.

[35] S.K. Simić, Z. Stanić, *On graphs with unicyclic star complement for 1 as the second largest eigenvalue*, In: Proc. of the Conference Contemporary Geometry and Related Topics, Belgrade, June 26–July 2 2005 (N. Bokan, M. Djorić, A.T. Fomenko, Z. Rakić, B. Wegner, J. Wess, eds.), Faculty of Mathematics, Belgrade, (2006), pp. 475–484.

[36] Z. Stanić, *On nested split graphs whose second eigenvalue is less than 1*, Linear Algebra Appl., **430** (2009), 2200–2211.

[37] Z. Stanić, *On graphs whose second largest eigenvalue equals 1–the star complement technique*, Linear Algebra Appl., **420** (2007), 700–710.

[38] Z. Stanić, *On regular graphs and coronas whose second largest eigenvalue does not exceed 1*, Linear and Multilinear algebra, 2007, 201–234.

[39] Z. Stanić, *Some Star Compliments for the Second Largest Eigenvalue of Graph*, Ars Mathematica Contemporanea 1, (2008), 126–136.

[40] Z. Stanć, S.K. Simić, *On graphs with unicyclic star compliment as the second largest eigenvalue;* in Neda Bokan, Mirijana Djorić , Anatoly T. Fomenko, Zoran Rakić, Bernd Wegner, Julius Wess(eds.), *Proceedengs of the Conference contemporary geometry and related topics, Belgrade, June 26-July 2 2005*, Faculty of Mathematics, Belgrade, 2006, 475–484.