УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ДИПЛОМСКИ МАСТЕР РАД

ДУШИЦА РАДИЧЕВИЋ

СЕПТЕМБАР 2010.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Уопштења Борел-Кантелијеве леме и примене

Душица Радичевић

Чланови комисије:
др Павле Н. Младеновић, ментор
др Слободанка Јанковић
мр Јован Д. Вукмировић

Садржај

Глава 1

Увод

1.1 Случајни догађаји

Најчешћа основна полазишта при конструкцији неке теоријске научне дисциплине јесу одређене експерименталне чињенице на основу којих се формирају одговарајући апстрактни појмови. Тако је и са теоријом вероватноће.

Полазни појмови у теорији вероватноће су: стохастички експеримент, случајни догађај и вероватноћа случајног догађаја. Њима ћемо управо и посветити мало пажње на самом почетку овог рада.

Под *стохастичким експериментом (случајним експериментом)* подразумевамо комплекс услова и радњи који се могу понављати (макар и мисаоно!) неограничено много пута, али понављања експеримента не доводе увек до једнозначно одређеног исхода. Другачије речено, у случајним експериментима није могуће унапред тачно предвидети резултат; при испуњењу истих услова експериментисања могући су разни резултати (исходи). (Насупрот таквим експериментима су *детерминистички експерименти*. Код њих је карактеристично то да услови експериментисања једнозначно одређују да ли ће се неки догађај појавити или не).

Сваком случајном експерименту се придружује непразан скуп исхода Ω, који даје потпуне информације о резултатима експеримента. Елементи ω скупа Ω се интерпретирају као исходи експеримента и они се даље не могу разлагати и међусобно се искључују.

Скуп Ω мора имати бар два елемента (у случају једног јединог исхода ради се о детерминистичком експерименту), а може их бити како коначно тако и бесконачно много (пребројиво или непребројиво). Скуп Ω тада зовемо *простор елементарних исхода или простор елементарних случајних* *догађаја.* Његове елементе ω називамо *елементарним исходима* или *елементарним случајним догађајима.*

Подскупове $A, B, \ldots$ из Ω зовемо *случајним догађајима.* То, између осталог, значи и да ћемо елементарне исходе сматрати случајним догађајима (једночланим). (Касније ћемо видети да се не морају сви подскупови скупа Ω сматрати случајним догађајима).

Сваки елементарни исход даје потпуну информацију о резултатима експеримента. Знајући да се у експерименту појавио конкретан исход ω, ми можемо рећи да ли се остварио случајни догађај A или не. На тај начин, скуп Ω се разбија на два подскупа A и $\overline{A}$. Значи, ако се експеримент описује исходом ω, онда $\omega \in A$ значи да се остварио догађај A, а $\omega \notin A$ значи да се није остварио догађај A већ $\overline{A}$. Тада за све исходе $\omega \in A$ кажемо да су *повољни* за остварење догађаја A. За догађај $\overline{A}$ се тада каже да је *супротан (комплементаран) догађај* догађају A. Наравно, и A је тада супротан догађај догађају $\overline{A}$.

Унија догађаја A и B (у ознаци: $A \cup B$) је догађај који се остварује ако и само ако се остварује бар један (најмање један) од та два догађаја. *Пресек догађаја A и B* (у ознаци: $A \cap B$) је догађај који се остварује ако и само ако се остварују оба догађаја - и A и B. Догађај $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ је *разлика догађаја A и B.*

Догађај Ω је *сигуран догађај*, а догађај $\varnothing$ (празан скуп) је *немогућ догађај.* Догађаји A и B су *дисјунктни* ако је $A \cap B = \varnothing$. За њих тада често пишемо $A + B$ уместо $A \cup B$.

Кажемо да догађај A *повлачи* догађај B ако из $\omega \in A$ следи $\omega \in B$ за сваки исход повољан за остварење догађаја A. Јасно је да важи:

$$\varnothing \in (A \cap B) \subset A \subset (A \cup B) \subset \Omega,$$

(при чему $\subset$ дозвољава и једнакост догађаја).

Аналогно наведеном дефинишу се уније и пресеци више догађаја: Нека је I непразан скуп индекса и нека имамо фамилију догађаја $\{A_i, i \in I\}$ из Ω. Унија тих догађаја $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ је догађај који се остварује ако и само ако се остварује бар један догађај A_i, $i \in I$.

Пресек $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ тих догађаја је догађај који се остварује ако и само ако се остварују сви догађаји A_i, $i \in I$.

Важе Де Морганова правила:

$$\overline{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)} = \bigcap_{i\in I} \left(\overline{A_i}\right) \qquad ; \qquad \overline{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)} = \bigcup_{i\in I} \left(\overline{A_i}\right).$$

1.2 Аксиоматика теорије вероватноће

Нека је Ω простор исхода неког експеримента. Нека је $\mathcal{A}$ класа подскупова скупа Ω. Размотримо следеће услове:

1° $\Omega \in \mathcal{A}$.

2° Ако $A \in \mathcal{A}$, онда $\overline{A} \in \mathcal{A}$.

3° Ако $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{A}$, онда $A \cup B \in \mathcal{A}$.

4° Ако $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$, онда $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Класа $\mathcal{A}$ зове се *алгебра догађаја*, ако важе услови 1°, 2° и 3°, а класа $\mathcal{A}$ која има својства 1°, 2° и 4° зове се *σ-алгебра догађаја*. Само елементе алгебре, односно σ-алгебре зваћемо догађајима.

Лако је закључити да важи следеће: свака σ-алгебра је истовремено и алгебра догађаја (али обрнуто не мора бити). Из тих разлога, у даљем ћемо, углавном, говорити само о σ-алгебрама.

Пресек произвољно много σ-алгебри је σ-алгебра.

За сваку непразну колекцију $\mathcal{K}$ подскупова простора Ω, постоји минимална σ-алгебра $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ која је садржи. Тада се каже да је σ-алгебра $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ генерисана колекцијом $\mathcal{K}$.

Нека је $\Omega = \mathbb{R}$ и нека је $\mathcal{K} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Минимална σ-алгебра која садржи $\mathcal{K}$ зове се *Борелова σ-алгебра* на $\mathbb{R}$ $\left(\mathcal{B}^1\right)$. Њени елементи су *Борелови скупови* на реалној правој. Иста σ-алгебра $\mathcal{B}^1$ може бити генерисана и разним другим колекцијама. На пример: $\mathcal{K}_1 = \{(-\infty, b];\ b \in \mathbb{R}\}; \mathcal{K}_2 = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, итд.

Постоји σ-алгебра $\mathcal{B}^2$ генерисана, нпр. колекцијом подскупова $\{(-\infty, a_1] \times(-\infty, a_2]; a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. То је Борелова σ-алгебра на $\mathbb{R}^2$. Слично је и у случају простора $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Постоје скупови на $\mathbb{R}$ који нису Борелови скупови. Исто важи и за $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Нека је Ω простор исхода случајног експеримента и $\mathcal{A}$ σ-алгебра на њему. Тада се уређени пар $(\Omega, \mathcal{A})$ зове *мерљив простор*.

Функција $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ је вероватноћа на мерљивом простору $(\Omega, \mathcal{A})$ ако има следећа својства:

(A$_1$) $P(\Omega) = 1$,

(A$_2$) $P(A) \geq 0$ за сваки догађај $A \in \mathcal{A}$,

(A$_3$) ако су $A_1, A_2, A_3, \ldots$ догађаји из $\mathcal{A}$ такви да је $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ онда важи једнакост: $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Наведене особине функције P зову се, редом, *нормираност, ненегативност и пребројива адитивност или σ-адитивност.* То су *аксиоме теорије вероватноће.* Та аксиоматика се назива *Колмогоровљева аксиоматика* теорије вероватноће.

Број $P(A)$, који се придружује случајном догађају A, зове се *вероватноћа догађаја A.*

Ипак, аксиоматика не даје правило по коме бисмо за дати догађај A из $\mathcal{A}$ одредили његову вероватноћу.

Запазимо и то да је аксиоматика Колмогорова *непотпуна*, тј. постоји више начина избора вероватноће за догађаје A из $\mathcal{A}$.

Нека је, нпр. дато Ω, нека је $\mathcal{A} = \left\{A, \overline{A}, \Omega, \phi\right\}$, где је $A \subset \Omega$ и нека је: $P(A) = \lambda$, $0 < \lambda < 1$, $P\left(\overline{A}\right) = 1 - \lambda$, $P(\Omega) = 1$ и $P(\varnothing) = 0$. Види се да тада важе све три аксиоме. Ипак, за $P(A)$ и $P\left(\overline{A}\right)$ имамо бесконачно много избора.

Уређена тројка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ зове се *простор веороватноћа.* Он служи као основни модел за изучавање случајних експеримената.

Из дефиниције вероватноће лако се доказују њене основне особине:

1° $P(\varnothing) = 0$.

2° Коначна адитивност: ако су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ дисјунктни догађаји, онда важи једнакост $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)$.

3° $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

4° Ако је $A \subset B$, онда је $P(A) \leq P(B)$.

5° $P\left(\bigcup\limits_{k} A_k\right) \leq \sum\limits_{k} P(A_k)$, како за коначне тако и за пребројиве уније.

6° $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

7° Непрекидност одозго: Ако је $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

8° Непрекидност одоздо: Ако је $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(A_n\right) = P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

9° Непрекидност "у нули": Ако је $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, онда важи једнакост $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(A_n\right) = 0$.

1.3 Случајне величине

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ Борелова права, тј. $\mathcal{B}$ је Борелова σ-алгебра подскупова скупа реалних бројева $\mathbb{R}$. Функција

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

је *случајна величина* ако за сваки Борелов скуп $B \in \mathcal{B}$ важи

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

То значи да је X функција из Ω у $\mathbb{R}$ која је *мерљива* (или мерљива у Бореловом смислу) у односу на σ-алгебре $\mathcal{A}$ у Ω и $\mathcal{B}$ у $\mathbb{R}$, тј. инверзна слика мерљивог скупа B у простору вредности функције X је мерљив скуп у области дефинисаности функције X.

Може се показати да је у дефиницији случајне величине X *довољно* захтевати да је $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ за све интервале у $\mathbb{R}$, на пример, за све интервале облика $(a, b]$ или $(-\infty, b]$ или $(-\infty, b)$ или $(a, +\infty)$ итд. Врло често се ово и узима за дефиницију случајне величине. Но, дате дефиниције случајне величине су међусобно еквивалентне.

Случајна величина X индукује *вероватноћу* или *вероватносну меру* P_X на $\mathcal{B}$ дефинисану са:

$$P_X(B) = P\{\omega : X(\omega) \in B\} = P\left(X^{-1}(B)\right), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Функција F_X тачке $x \in \mathbb{R}$ дефинисана са

$$F_X(x) = P_X\left((-\infty, x]\right) = P\left\{\omega : \omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\right\} \equiv P\left(X \leq x\right)$$

зове се *функција расподеле* случајне величине X.

Најпростији пример случајне величине је *индикатор I_A случајног догађаја A* из $\mathcal{A}$ дефинисан са

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Случајне величине X, одређене са $X(\omega) = \sum\limits_k x_k I_{A_k}(\omega)$, где је $\sum\limits_k A_k = \Omega$ (унија дисјунктних скупова) и свако $A_k \in \mathcal{A}$ су дискретне случајне величине.

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, $n \geq 2$, Борелов n-димензионални простор. Функција

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

која је мерљива у односу на σ-алгебре $\mathcal{A}$ у Ω и $\mathcal{B}^n$ у $\mathbb{R}^n$, тј. таква је да за сваки Борелов скуп $B \in \mathcal{B}^n$

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

зове се *n-димензионална случајна величина* или *n-димензионални случајни вектор*. Вектор X је тада n-торка једнодимензионалних случајних величина $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Функција $F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дефинисана са

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$$

је *функција расподеле случајног вектора* X.

Функција

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \lim_{X_n \to \infty} F_{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

је маргинална функција расподеле вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$.

Уопште, заједничка расподела било ког подскупа $\left\{X_{k_1}, \ldots, X_{k_j}\right\}$ јесте његова маргинална расподела.

Нека је $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ мерљива (Борелова) функција у односу на σ-алгебре $\mathcal{B}^n$ у $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{B}$ у $\mathbb{R}$, тј. таква да за сваки Борелов скуп $B \in \mathcal{B}$ је $h^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$. Тада и $h(X)$ *јесте* случајна величина.

1.4 Независност случајних догађаја и независност случајних величина

Један од важнијих појмова у теорији вероватноће јесте појам независности. За све догађаје који се у даљем тексту помињу, сматраћемо да су из исте σ-алгебре $\mathcal{A}$, а за све случајне величине сматраћемо да су дефинисане на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Даћемо прво дефиниције независности случајних догађаја, а затим дефиниције независности случајних величина.

Догађаји A и B су *независни* ако важи једнакост

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Приметимо да у случају $P(A) = 0$ ова једнакост важи за сваки случајни догађај B из $\mathcal{A}$. Исто важи и у случају $P(A) = 1$.

Догађаји $A_1, A_2, \ldots, A_n$ су (потпуно) *независни* ако за сваки број $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ и сваки избор индекса $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$ важи једнакост

$$P\left(A_{j_1} A_{j_2} \cdots A_{j_k}\right) = P\left(A_{j_1}\right) P\left(A_{j_2}\right) \cdots P\left(A_{j_k}\right).$$

Догађаји из низа (A_n) су (потпуно) *независни* ако за свако $n \geq 2$ и сваки избор индекса $j_1, j_2, \ldots, j_k$ догађаји $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ јесу потпуно независни.

Уколико за сваки пар (A_j, A_k) важи $P\left(A_j \cap A_k\right) = P\left(A_j\right) \cdot P\left(A_k\right)$, онда су догађаји $A_1, A_2, \ldots$ *независни у паровима.* Наравно, ако су догађаји из неког низа (коначног или бесконачног) потпуно независни, онда су они независни и у паровима; обрнуто не важи у општем случају.

Случајне величине $X_1, X_2, \ldots, X_n$ су *независне* ако за произвољне Борелове скупове $B_1, B_2, \ldots, B_n$ са реалне праве, догађаји $(X_1 \in B_1)$, $(X_2 \in B_2)$, $\ldots, (X_n \in B_n)$ су независни, тј.

$$P\left(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n\right) = P\left(X_1 \in B_1\right) \cdot P\left(X_2 \in B_2\right) \cdots P\left(X_n \in B_n\right).$$

Низ (X_n) је *низ независних случајних величина* ако за сваки природан број n и произвољан избор индекса $j_1, \ldots, j_n$, случајне величине $X_{j_1}, \ldots, X_{j_n}$ су независне.

Важи следећи закључак:

Случајне величине $X_1, \ldots, X_n$ су независне ако и само ако важи

$$F_{X_1, \ldots, X_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = F_{X_1}\left(x_1\right) \cdots F_{X_n}\left(x_n\right),$$

где је $F_{X_1,\ldots,X_n}$ *функција расподеле вектора* $(X_1, \ldots, X_n)$, *а* $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ *су функције расподела његових координата.*

Приметимо на крају и то да се дефиниција независности случајних величина може пренети и на произвољне фамилије случајних величина. Међутим, нама то у овом раду неће бити потребно.

Глава 2

Борел-Кантелијева лема

2.1 Лимес супериор, лимес инфериор и лимес низа догађаја

Нека је (A_n) низ случајних догађаја из $\mathcal{A}$. Тада дефинишемо *limes superior* тог низа као догађај

$$\lim_{n\to\infty}\sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

и *limes inferior* тог низа као догађај

$$\lim_{n\to\infty}\inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Догађај $\limsup A_n$ се састоји у томе да се оствари бесконачно много догађаја из низа (A_n). Исто тако догађај $\liminf A_n$ значи да се из низа (A_n) остваре скоро сви догађаји - сви догађаји, осим можда њих коначно много.

Из горњих дефиниција директно следи да су $\limsup A_n$ и $\liminf A_n$ случајни догађаји из $\mathcal{A}$ и

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n.$$

Штавише, оба догађаја припадају σ-алгебри генерисаној низом (A_n). За $\limsup A_n$ $\liminf A_n$ важе следећа тврђења (1)-(5):

(1) $\overline{(\liminf A_n)} = \limsup\left(\overline{A_n}\right)$,

$\overline{(\limsup A_n)} = \liminf \left(\overline{A_n} \right)$.

(2) За растући низ догађаја (A_n) (прецизније речено: за неопадајући низ догађаја), тј. за низ у коме је $A_k \subset A_{k+1}$ за свако k је

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

а за опадајући низ догађаја (B_n) (прецизније речено: за нерастући низ догађаја), тј. низ у коме је $B_k \supset B_{k+1}$ за свако k је

$$\liminf B_n = \limsup B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

(3) За дата два низа (A_n) и (B_n) догађаја из $\mathcal{A}$ важи следеће:

1° $\liminf (A_n \cap B_n) = (\liminf A_n) \cap (\liminf B_n)$,

2° $\limsup (A_n \cup B_n) = (\limsup A_n) \cup (\limsup B_n)$,

3° $(\liminf A_n) \cap (\limsup B_n) \subset \limsup (A_n \cap B_n) \subset (\limsup A_n) \cap (\limsup B_n)$.

Ако за низ догађаја (A_n) из $\mathcal{A}$ важи

$$\liminf A_n = \limsup A_n \equiv A,$$

тада кажемо да је низ (A_n) *конвергентан*.

Догађај A онда зовемо *гранична вредност* низа (A_n). Тада пишемо

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \liminf A_n = \limsup A_n.$$

Из (2) следи да монотони низови јесу конвергентни и за растуће (неопадајуће) низове (A_n) је

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

а за опадајуће (нерастуће) низове (B_n) је

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

(4) За растуће (неопадајуће) низове (A_n) важи:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right),$$

а за опадајуће (нерастуће) низове (B_n) важи:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(B_n\right).$$

(5) За произвољне низове догађаја (A_n) из $\mathcal{A}$ важи:

1° $P\left(\liminf A_n\right) \leq \liminf P\left(A_n\right) \leq \limsup P\left(A_n\right) \leq P\left(\limsup A_n\right)$,

2° $P\left(\limsup A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$,

3° $P\left(\liminf A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$.

2.2 Борел-Кантелијева лема

Доказаћемо важну теорему, која има велику примену у теорији вероватноће, а посебно код испитивања скоро сигурне конвергенције и јаких закона великих бројева. У литератури је она позната као Борел-Кантелијева лема.

Теорема 2.2.1. (Борел-Кантелијева лема)

(а) Ако је (A_n) произвољан низ догађаја и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) < +\infty$, онда важи једнакост

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0.$$

(б) Ако је (A_n) низ независних догађаја и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = +\infty$, онда важи једнакост

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1.$$

Доказ. (a) Нека је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$. Означимо са $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Тада је B_1 унија свих догађаја, B_2 унија догађаја почевши од другог па надаље, ... , дакле $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$, тј. B_n је опадајући низ у односу на инклузију догађаја, па добијамо

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} P(B_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \overset{(2)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \overset{(3)}{=} 0.$$

(Једнакост (1) важи на основу својства непрекидности вероватноће одоздо; неједнакост (2) на основу леме о покривању, а једнакост (3) из полазне претпоставке да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ конвергира, због чега је гранична вредност "репа"тог реда једнака нули.)

(б) Довољно је доказати да је $P\left(\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k}\right) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0$, односно довољно је доказати да за сваки природан број n важи $P\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0$, јер ће тада и вероватноћа њихове уније бити једнака нули.

Из независности догађаја $A_1, A_2, A_3, \dots$ следи независност догађаја $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \dots$. Зато за свако $m \geq n$ важи $P\left(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right) = \prod\limits_{k=n}^{m} P\left(\overline{A_k}\right)$. На основу ове чињенице и на основу својства непрекидности вероватноће одоздо, добијамо

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} P\left(\overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^{\infty} P\left(\overline{A_k}\right). \qquad (1)$$

Како за $0 < x < 1$ важи неједнакост $\ln(1-x) \leq -x$, то је

$$\ln \prod_{k=n}^{\infty} P\left(\overline{A_k}\right) = \ln \prod_{k=n}^{\infty} \left(1 - P(A_k)\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \ln\left(1 - P(A_k)\right) \leq -\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = -\infty.$$

Дакле, $\ln \prod\limits_{k=n}^{\infty} P\left(\overline{A_k}\right) = -\infty$, што значи да је

$$\prod_{k=n}^{\infty} P\left(\overline{A_k}\right) = 0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи да је $P\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0$, па је $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0$, тј. $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$.

□

Наведимо сада неке закључке у вези са Борел-Кантелијевом лемом.

1° С обзиром на то да догађај $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ значи да се из низа догађаја (A_n) реализује њих бесконачно много, први део Борел-Кантелијеве леме може се интерпретирати на следећи начин:

Ако је ред вероватноћа $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ *конвергентан, тада се из низа догађаја* (A_n) *реализује њих бесконачно много са вероватноћом* 0 *(тј.* $\limsup A_n$ *је стохастички немогућ догађај).*

2° Слично важи за други део Борел-Кантелијеве леме:

Ако је (A_n) *низ независних случајних величина и ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ *дивергира, тада се из низа* (A_n) *реализује бесконачно много догађаја са вероватноћом* 1.

3° У првом делу Борел-Кантелијеве леме говори се о произвољном низу (A_n) случајних догађаја. Није, дакле, било претпоставке о независности (која постоји у другом делу Борел-Кантелијеве леме). Ако се уведе претпоставка о независности, први део леме и даље остаје на снази. И закључак остаје исти.

4° Када повежемо оба дела Борел-Кантелијеве леме код низова случајних догађаја (A_n), тада можемо изрећи следећа два тврђења:

I *Нека је* (A_n) *низ независних случајних догађаја. Тада важи*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty.$$

II *Ако је (A_n) низ независних случајних догађаја, тада се из тог низа реализује бесконачно много догађаја са вероватноћом 0 или 1 зависно од тога да ли је ред $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ конвергентан или дивергентан.*

2.3 Примери примена Борел-Кантелијеве леме

Навешћемо сада неколико примера "класичне"примене Борел-Кантелијеве леме. Примене код закона великих бројева биће дате касније.

Пример 1.

Нека је (X_n) низ независних случајних величина апсолутно непрекидног типа са истом расподелом. Дефинишимо низ (Y_n) на следећи начин

$$Y_n = \begin{cases} 1, & \text{ако је } X_n > X_j \text{ за свако } j = 1, 2, 3, \ldots, n-1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и нека је $A_n = \{\omega : Y_n(\omega) = 1\}$. Назовимо Y_n "рекордном вредношћу"или "вредношћу већом од свих претходних вредности".

Лако се запажа да важе следећа два закључка:

1° $P(Y_n = 1) = P(A_n) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$, па је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$ дивергентан.

2° Случајни догађаји $A_1, A_2, \ldots$ су независни. То можемо закључити на следећи начин: Нека је k произвољан природан број такав да је $k \geq 2$ и нека за природне бројеве $j_1, j_2, \ldots, j_k$ важи $j_1 < j_2 < \ldots < j_{k-1} < j_k$. Тада је

$$P\left(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_{k-1}} \cap A_{j_k}\right) = \frac{1}{j_1 \cdot j_2 \cdots j_{k-1} \cdot j_k},$$

$$P(A_{j_k}) \cdot P\left(A_{j_{k-1}}/A_{j_k}\right) \cdot P\left(A_{j_{k-2}}/A_{j_{k-1}} \cap A_{j_k}\right) \cdots P(A_{j_1}/A_{j_2} \cap A_{j_3} \cap \ldots \cap A_{j_k}) =$$

$$= \frac{1}{j_k} \cdot \frac{1}{j_{k-1}} \cdots \frac{1}{j_1},$$

а то значи да је $A_1, A_2, \ldots$ низ независних догађаја.

Испуњење услова 1° и 2° значи да можемо применити други део Борел-Кантелијеве леме. Дакле,

$$P\left(\limsup A_n\right) = 1,$$

односно са вероватноћом 1 се у низу $X_1, X_2, \ldots$ реализује бесконачно много рекордних вредности.

Дефинишимо низ случајних величина (Z_n) на следећи начин:

$$Z_n = Y_n Y_{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

и назовимо Z_n "дуплим узастопним рекордима". Случајна величина Z_n има расподелу

$$Z_n : \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 - \dfrac{1}{n(n+1)} & \dfrac{1}{n(n+1)} \end{array} \right),$$

и ако је $B_n = \{\omega : Z_n(\omega) = 1\}$, тј. ако је Z_n индикатор догађаја B_n, налазимо да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < +\infty. \quad \text{(ред је конвергентан)}$$

Испуњени су услови за примену првог дела Борел-Кантелијеве леме. Дакле,

$$P\left(\limsup B_n\right) = 0,$$

тј. у низу $X_1, X_2, \ldots$ са вероватноћом 0 реализује се бесконачно много дуплих рекордних вредности.

Пример 2.

Нека је $X_1, X_2, \ldots$ низ ненегативних независних случајних величина апсолутно непрекидног типа са истом расподелом, густином g и функцијом расподеле F.

Налазимо

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot g(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} [1 - F(x)]\, \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} P\left(X > x\right)\, \mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} P\left(X > x\right)\, \mathrm{d}x.$$

Зато је

$$E\left(X_1\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}P\left(X_1>x\right)\,\mathrm{d}x\leq\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}P\left(X_1>n\right)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\left(X_1>n\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X_1>n\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X_n>n\right),$$

као и

$$E\left(X_1\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}P\left(X_1>x\right)\,\mathrm{d}x\geq\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}P\left(X_1>n+1\right)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\left(X_1>n+1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X_1>n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X_n>n\right).$$

Према томе имамо

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X_n>n\right)\leq E(x)\leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X_n>n\right).$$

Претпоставимо да је математичко очекивање $E\left(X_1\right)$ коначно. Тада је $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\left(X_n>n\right)$ конвергентан ред. Примена првог дела Борел-Кантелијеве леме даје

$$P\left(\limsup A_n\right)=0,$$

где је $A_n=\{\omega : X_n(\omega)\geq n\}$. Значи, тада се са вероватноћом 0 реализује бесконачно много "прескока"$[X_n>n]$. Даље, имамо

$$0=P\left(\limsup A_n\right)=P\left(\overline{\liminf\overline{A_n}}\right)=1-P\left(\liminf\overline{A_n}\right),$$

односно $P\left(\liminf\overline{A_n}\right)=1$. То значи да са вероватноћом 1 скоро све случајне величине X_n (све осим њих коначно много) постижу вредности мање или једнаке n.

Нека је, пак, $E\left(X_1\right)=+\infty$. Тада је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\left(A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\left(X_n>n\right)$ дивергентан. Када узмемо у обзир и претпоставку о независности низа случајних величина $X_1,X_2,\ldots$, закључујемо да примена другог дела Борел-Кантелијеве леме даје следеће:

Са вероватноћом 0 се из низа (A_n) реализује бесконачно много догађаја. Другим речима, са вероватноћом 1 јавља се бесконачно много "прескока"$[X_n > n]$.

Нека је, даље, $\alpha > 0$ произвољно. Извршимо поделу интервала $(0, \infty)$ тачкама $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$. Применом претходног поступка добијамо:

$$\alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_n > n \cdot \alpha\right) \leq E\left(X_1\right) \leq \alpha + \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_n > n \cdot \alpha\right).$$

Ако је $E\left(X_1\right)$ коначно, онда то заједно са претпостављеном независношћу случајних величина $X_1, X_2, \ldots$ значи да се може применити Борел-Кантелијева лема. Дакле,

$$P\left(\limsup B_n\right) = 0,$$

где је $B_n = \{\omega : X_n(\omega) > n\alpha\}$. Зато се са вероватноћом 0 појављује бесконачно много прескакања $[X_n > n\alpha]$, $\alpha > 0$.

Обрнуто, ако је $E\left(X_1\right) = +\infty$, тада је

$$P\left(\limsup B_n\right) = 1,$$

па се са вероватноћом 1 остварује бесконачно много прескакања $[X_n > n\alpha]$, $\alpha > 0$.

Пример 3.

Опит је низ бацања коцке. Нека догађај A_n значи да се у n-том и $(n+1)$-ом бацању добијају страна 3 или 6 (догађај D_n значи да се у n-том бацању добија 3 или 6, а догађај D_{n+1} значи да се у $(n+1)$-ом бацању добија 3 или 6). Значи,

$$P\left(A_n\right) = P\left(D_n \cap D_{n+1}\right) = P\left(D_n\right) P\left(D_{n+1}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$P\left(A_n A_{n+1}\right) = P\left(D_n\right) P\left(D_{n+1}\right) P\left(D_{n+2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27},$$

$$\frac{1}{27} = P\left(A_n A_{n+1}\right) \neq P\left(A_n\right) P\left(A_{n+1}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9},$$

па догађаји $A_1, A_2, \ldots$ нису независни. Дакле, како је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = +\infty$, не може се применити Борел-Кантелијева лема.

Посматраћемо догађаје $B_1, B_2, \ldots$, где B_n значи да се у $(2n)$-ом и $(2n+1)$-ом бацању појављује догађај D. За њега имамо

$$P(B_n) = P(D_{2n})\, P(D_{2n+1}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$P(B_n B_{n+1}) = [P(D_{2n})\, P(D_{2n+1})] \left[P\left(D_{2(n+1)}\right) P\left(D_{2(n+1)+1}\right)\right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3},$$

$$P(B_n B_{n+1}) = P(B_n)\, P(B_{n+1}),$$

као и, уопште,

$$P(B_n B_{n+k}) = P(B_n)\, P(B_{n+k}), \quad k \geq 1,$$

што води закључку о независности догађаја $B_1, B_2, \ldots$.

С обзиром на то да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(B_n) = +\infty$, примена другог дела Борел-Кантелијеве леме даје:

$$P(\limsup B_n) = 1.$$

2.4 Анализа важности претпоставке о независности у Борел-Кантелијевој леми

Позабавимо се сада испитивањем колико је услов независности низа догађаја, у другом делу Борел-Кантелијеве леме, битан. Односно, проучићемо шта се све може добити ако тај услов изоставимо. Све ће то бити илустровано на следећа два примера.

Пример 1.

Нека је $\Omega = [0, 1]$, нека је $\mathcal{A}$ σ-алгебра Борелових скупова из $[0, 1]$ и нека је P Лебегова мера на $[0, 1]$. Тада је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ тзв. Лебегов јединични простор вероватноћа.

Дефинишимо низ догађаја (A_n) на следећи начин:

$$A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

Тада је (за $k \geq 1$)

$$A_n \cap A_{n+k} = \left(0, \frac{1}{n}\right) \cap \left(0, \frac{1}{n+k}\right) = A_{n+k},$$

$$P(A_n \cap A_{n+k}) = P(A_{n+k}) = \frac{1}{n+k},$$

$$P(A_n)\,P(A_{n+k}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+k},$$

дакле

$$P(A_n \cap A_{n+k}) \neq P(A_n)\,P(A_{n+k}),$$

па су догађаји $A_1, A_2, \ldots$ зависни.

Осим тога, имамо

$$P(\limsup A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m\right) =$$

$$= P\left[\left(\bigcup_{m \geq 1} A_m\right) \cap \left(\bigcup_{m \geq 2} A_m\right) \cap \left(\bigcup_{m \geq 3} A_m\right) \cap \ldots\right] = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

(где је у закључивању коришћено и то да је низ $A_1, A_2, \ldots$ монотоно опадајући).

Дакле, ако изоставимо претпоставку о независности низа (A_n), а услов дивергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ и даље важи, онда вероватноћа лимес супериора не само да не мора бити једнака 1, већ може бити и једнака 0. Значи, из наведеног низа догађаја у датом примеру се са вероватноћом 0 реализује бесконачно много догађаја.

Пример 2.

Посматрајмо и даље Лебегов јединични простор вероватноћа. Дефинишимо низ догађаја (B_n) на следећи начин:

$$B_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \cup [1-\alpha, 1], \quad n \geq 1,\ 0 < \alpha < 1.$$

Тај низ је монотоно опадајући:

$$B_n \cap B_{n+1} = \left[\left(0, \frac{1}{n}\right) \cup [1-\alpha, 1]\right] \cap \left[\left(0, \frac{1}{n+1}\right) \cup [1-\alpha, 1]\right] =$$

$$= \left(0, \frac{1}{n+1}\right) \cup [1-\alpha, 1] = B_{n+1},$$

и важи

$$P(B_n) = \frac{1}{n} + \alpha,$$

$$P(B_{n+1}) = \frac{1}{n+1} + \alpha,$$

$$P(B_n \cap B_{n+1}) = P(B_{n+1}) = \frac{1}{n+1} + \alpha \neq P(B_n) \cdot P(B_{n+1}).$$

Дакле, низ (B_n) није низ независних догађаја. Одговарајући ред вероватноћа је дивергентан:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \alpha\right) = +\infty.$$

Други део Борел-Кантелијеве леме се не може применити.
Међутим,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} B_k\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \alpha\right) = \alpha.$$

Када узмемо у разматрање оба претходно дата примера, можемо закључити следеће:

Ако за низ догађаја (A_n) изоставимо претпоставку о независности, тада иако је ред вероватноћа $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ дивергентан, вероватноћа реализације бесконачно много догађаја из низа (A_n), не само да не мора бити једнака 1, већ може бити било који број из сегмента $[0, 1]$.

Глава 3

Независност у паровима и прва уопштења Борел-Кантелијеве леме

3.1 Ердеш-Ренијево уопштење Борел-Кантелијеве леме

Лако је запазити да због врло слабих услова при којима важи први део Борел-Кантелијеве леме, покушаји њених уопштавања нису од великог интереса.

Са другим делом Борел-Кантелијеве леме ствари стоје сасвим другачије. Постоје интересантни радови у којима се услов потпуне независности случајних догађаја замењује неким слабијим условима. Исто тако, поставља се питање да ли су могућа нека уопштења у којима вероватноћа $P(\limsup A_n)$ може бити и мања од 1. У та два правца су, управо, најчешће и вршена истраживања и уопштавања.

Први значајни резултати на плану уопштавања другог дела Борел-Кантелијеве леме јављају се у раду Ердеша и Ренија из 1959. године. Они су прво извели један општи закључак, не уводећи никакве претпоставке везане са потпуном независношћу или независношћу у паровима. Затим су одатле, уводећи претпоставку о независности у паровима уместо потпуне независности, извели као специјалан случај једно уопштење Борел-Кантелијеве леме.

Ти резултати се огледају у следећим двема теоремама.

Теорема 3.1.1. [Erdös, Rényi (1959)] *Нека је* (A_n) *низ догађаја такав да је* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ *и*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j,k=1}^{n} P(A_j A_k)}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2} = 1. \tag{3.1}$$

Тада је

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

Доказ. Означимо са I_n индикатор догађаја A_n. Тада је

$$I_n : \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 - P(A_n) & P(A_n) \end{array} \right),$$

$$E(I_n) = 0 \cdot (1 - P(A_n)) + 1 \cdot P(A_n) = P(A_n),$$

и нека је $S_n = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$, тада је

$$E(S_n) = E\left(\sum_{j=1}^{n} I_j\right) = \sum_{j=1}^{n} E(I_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j),$$

$$E\left({S_n}^2\right) = E\left(\sum_{j=1}^{n} I_j\right)^2 = E\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} I_j I_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E(I_j I_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j A_k),$$

$$D(S_n) = E\left({S_n}^2\right) - [E(S_n)]^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j A_k) - \left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2.$$

Применом Чебишевљеве неједнакости имамо

$$P\{|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon \cdot E(S_n)\} \leq \frac{D(S_n)}{\varepsilon^2 \cdot [E(S_n)]^2},$$

тј.

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} I_k - \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right| \geq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right\} \leq \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_j A_k) - \left[\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2}{\varepsilon^2 \cdot \left[\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2},$$

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} I_k - \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right| \geq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left\{\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_j A_k)}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2} - 1\right\}.$$

На основу претпоставке (3.1) следи да је

$$\lim_{n\to\infty} \inf P\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} I_k - \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right| \geq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right\} = 0.$$

Одавде је

$$\lim_{n\to\infty} \inf P\left\{\sum_{k=1}^{n} I_k < \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right\} = 0.$$

То значи да постоји низ природних бројева $n_1 < n_2 < \ldots$ такав да

$$\sum_{j=1}^{\infty} P\left\{\sum_{k=1}^{n_j} I_k < \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n_j} P(A_k)\right\} < +\infty.$$

На основу првог дела Борел-Кантелијеве леме закључујемо да са вероватноћом 1 важи

$$\sum_{k=1}^{n_j} I_k \geq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n_j} P(A_k).$$

На основу претпоставке да је $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$ следи да $\sum\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ дивергира са вероватноћом 1.

Према томе, $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n\right) = 1$, што је и требало доказати.

$\square$

Теорема 3.1.2. [Erdös, Rényi (1959)] *Нека су догађаји из низа* (A_n) *независни у паровима и нека је* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$. *Тада важи услов (3.1) из Теореме 3.1.1. и зато је*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = 1.$$

Доказ. На основу претпоставке о независности догађаја у паровима имамо да је $P(A_j A_k) = P(A_j)\,P(A_k)\ \forall j,k,\ j \neq k$. Због тога је

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_j A_k)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\right]^2} = \frac{\sum\limits_{j\neq k} P(A_j)\,P(A_k) + \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\right]^2} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{j\neq k} P(A_j)\,P(A_k) + \sum\limits_{k=1}^{n} [P(A_k)]^2\right) - \sum\limits_{k=1}^{n} [P(A_k)]^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\right]^2} =$$

$$= \frac{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\right]^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} [P(A_k)]^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\right]^2} = 1 + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\,[1 - P(A_k)]}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\right]^2} <$$

$$< 1 + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\cdot 1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\right]^2} = 1 + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)} \longrightarrow 1, n \to \infty,$$

јер по претпоставци $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$.

Доказали смо да важи $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \frac{\sum\limits_{j,k=1}^{n} P(A_j A_k)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\right]^2} = 1$, па на основу Теореме 3.1.1. закључујемо да је $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n\right) = 1$.

$\square$

3.2 Доказ Павла Младеновића

Видели смо да су Ердеш и Рени до својих резултата уопштавања Борел-Кантелијеве леме дошли путем замене претпоставке о независности низа случајних догађаја претпоставком о независности у паровима. То су постигли доказом једне довољно опште леме, а затим су одатле као специјалан случај добили свој главни резултат. Доказ професора Павла Младеновића изводи се директно (без доказивања неких претходних помоћних теорема).

Прецизније, важи следећа теорема:

Теорема 3.2.1. *Ако је $A_1, A_2, A_3, \dots$ низ у паровима независних догађаја за које важи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, онда је $P(\limsup A_n) = 1$.*

Ако са I_n означимо индикатор догађаја A_n, тада је

$$I_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - P(A_n) & P(A_n) \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$E(I_n) = 0 \cdot (1 - P(A_n)) + 1 \cdot P(A_n) = P(A_n) = p_n,$$

$$E\left({I_n}^2\right) = P(A_n) = p_n,$$

$$D(I_n) = E\left({I_n}^2\right) - [E(I_n)]^2 = p_n - {p_n}^2 = p_n(1 - p_n).$$

Зато ћемо прећи на преформулацију горе дате теореме:

Ако за низ $A_1, A_2, A_3, \dots$ у паровима независних догађаја важи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E(I_n) = +\infty$, онда је $P\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_n = +\infty\right\} = 1$.

Доказ. Посматрајмо суме $S_n = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$, $n \geq 1$. Тада је

$$E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} I_k\right) = \sum_{k=1}^{n} p_k,$$

$$D(S_n) = E[S_n - E(S_n)]^2 = E\left[\sum_{k=1}^{n}(I_k - p_k)\right]^2 = E\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(I_k - p_k)(I_j - p_j)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\left(I_k - p_k\right)^2 + 2 \cdot \sum_{1 \le j < k \le n} E\left[\left(I_j - p_j\right)\left(I_k - p_k\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k (1 - p_k) + 2 \cdot \sum_{1 \le j < k \le n} \left[E\left(I_j - p_j\right)\right]\left[E\left(I_k - p_k\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k\left(1 - p_k\right) + 2 \cdot \sum_{1 \le j < k \le n} 0 \cdot 0 = \sum_{k=1}^{n} p_k\left(1 - p_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{n} {p_k}^2 \le \sum_{k=1}^{n} p_k = E\left(S_n\right),$$

$$\sigma\left(S_n\right) = \sqrt{D\left(S_n\right)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k\left(1 - p_k\right)} \le \sqrt{E\left(S_n\right)}.$$

Лако је запазити да важи следеће

$$0 < \sigma\left(S_n\right) < D\left(S_n\right) < E\left(S_n\right) \longrightarrow \infty, \quad n \to \infty.$$

$$\frac{1}{\sigma\left(S_n\right)} = \frac{\sigma\left(S_n\right)}{D\left(S_n\right)} > \frac{\sigma\left(S_n\right)}{E\left(S_n\right)}, \quad n \to \infty.$$

Применом неједнакости Чебишева, за $M > 0$ добијамо

$$P\left\{\left|S_n - E\left(S_n\right)\right| \ge M \cdot \sigma\left(S_n\right)\right\} \le \frac{1}{M^2}$$

и за довољно велико n и $0 < c < 1$ важи:

$$0 \le P\left\{S_n \le c \cdot E\left(S_n\right)\right\} = P\left\{S_n - E\left(S_n\right) \le (c-1)\, E\left(S_n\right)\right\} \le$$

$$\le P\left\{\left|S_n - E\left(S_n\right)\right| \ge (1-c)\, E\left(S_n\right)\right\} =$$

$$= P\left\{\left|S_n - E\left(S_n\right)\right| \ge \frac{(1-c) \cdot E\left(S_n\right)}{\sigma\left(S_n\right)} \sigma\left(S_n\right)\right\} \le$$

$$\le \left[\frac{\sigma\left(S_n\right)}{(1-c)\, E\left(S_n\right)}\right]^2 = \frac{1}{(1-c)^2} \cdot \left[\frac{\sigma\left(S_n\right)}{E\left(S_n\right)}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{(1-c)^2} \cdot \frac{D\,(S_n)}{E\,(S_n)} \cdot \frac{1}{E\,(S_n)} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Дакле, ако је

$$q_n \equiv P\,\{\omega : S_n \leq c \cdot E\,(S_n)\}\,, \quad 0 < c < 1,$$

тада $q_n \to 0$, $n \to \infty$.
(Напоменимо да је у раду професора Павла Младеновића узето $c = \frac{1}{2}$).

На основу учињених претпоставки, ми не знамо да ли је ред $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ конвергентан или дивергентан. Међутим, знамо да из низа $q_1, q_2, \ldots$ можемо изабрати подниз $q_{n_1}, q_{n_2}, \ldots$ за који је $\sum_{k=1}^{\infty} q_{n_k} < +\infty$.

На основу првог дела Борел-Кантелијеве леме добијамо

$$P\,\{\limsup\,[S_{n_k} \leq c \cdot E\,(S_{n_k})]\} = 0, \quad 0 < c < 1,$$

односно

$$P\,\{\liminf\,[S_{n_k} > c \cdot E\,(S_{n_k})]\} = 1, \quad 0 < c < 1.$$

Дакле, са вероватноћом 0 реализује се бесконачно много од догађаја $[S_{n_k} \leq c \cdot E\,(S_{n_k})]$, $0 < c < 1$, односно, са вероватноћом 1 реализују се сви сем коначно много од догађаја $[S_{n_k} > c \cdot E\,(S_{n_k})]$, $0 < c < 1$.

Запазимо, на крају, да је низ (S_n) са вероватноћом 1 монотоно растући (неопадајући)

$$S_{n+1} = S_n + I_{n+1},$$

па следи да је

$$P\,\{S_n \to +\infty, n \to \infty\} = P\left\{\sum_{n=1}^{\infty} I_n = +\infty\right\} = 1.$$

$\square$

Глава 4

Даља уопштења Борел-Кантелијеве леме

4.1 Преглед неких уопштења

Видели смо да се у оригиналној поставци другог дела Борел-Кантелијеве леме користи услов потпуне независности догађаја. У првим варијантама њеног уопштавања тај услов је замењен независношћу у паровима, што представља услов који је знатно слабији од услова потпуне независности.

Сада ћемо приказати и нека уопштења која користе услове који су још слабији од услова независности у паровима.

Прве резултате у овом смеру налазимо већ код Ердеша и Ренија у њиховом раду из 1959. године. Они су показали да се услов независности у паровима може заменити слабијим условом

$$P\left(A_k A_j\right) \leq P\left(A_k\right) \cdot P\left(A_j\right),$$

за све k и j такве да је $k \neq j$. Показали су да је и тада

$$P\left(\limsup A_n\right) = 1.$$

Касније, Ламперти је 1963. године показао да ако се услов независности у паровима замени условом

$$P\left(A_k A_j\right) \leq C \cdot P\left(A_k\right) P\left(A_j\right),$$

за $k, j > N$ и неке константе C и N, тада ће бити

$$P\left(\limsup A_n\right) > 0.$$

Још једно интересантно уопштење другог дела Борел-Кантелијеве леме дали су Коен и Стоун (и истовремено и независно од њих Спицер) 1964. године. У њиховом уопштењу услови су нешто измењени и ослабљени у односу на оне дате у раду Ердеша и Ренија из 1959. године. Прецизније речено, ради се о следећој теореми:

Теорема 4.1.1. [Kochen, Stone (1964); Spitzer (1964)] *Ако за низ* (A_n) *важи* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = +\infty$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}\inf \frac{\sum\limits_{j,k=1}^{n} P\left(A_j A_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2} = L,$$

онда је

$$P\left(\limsup A_n\right) \geq \frac{1}{L}.$$

Лако је доказати да је $L \geq 1$.
Нека је I_n индикатор догађаја A_n. Означимо $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$. Очигледно, $E\left(I_n\right) = P\left(A_n\right)$, $E\left(S_n\right) = E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} I_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} E\left(I_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)$ и $E\left({S_n}^2\right) = E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} I_k\right)^2 = E\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} I_j I_k\right) = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} E\left(I_j I_k\right) = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_j A_k\right) = \sum\limits_{j,k=1}^{n} P\left(A_j A_k\right)$.

Из неједнакости Коши-Буњаковског (Коши-Шварцове) или из особине дисперзије збира случајних величина следи

$$D\left(S_n\right) = E\left({S_n}^2\right) - \left[E\left(S_n\right)\right]^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P\left(A_j A_k\right) - \left[\sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2 \geq 0,$$

тј. $\sum\limits_{j,k=1}^{n} P\left(A_j A_k\right) \geq \left[\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2 \geq 0$, односно $\dfrac{\sum\limits_{j,k=1}^{n} P\left(A_j A_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2} \geq 1.$

Зато је и

$$L \equiv \lim_{n\to\infty} \inf \frac{\sum\limits_{j,k=1}^{n} P\left(A_j A_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2} \geq 1.$$

Ортега и Шебор су 1983. године доказали следећу теорему:

Теорема 4.1.2. [Ortega, Wshebor (1983)] *Ако за низ догађаја* (A_n) *важи* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} = +\infty$ *и*

$$\liminf \frac{\sum\limits_{1\leq j<k\leq n} \left(P\left(A_j A_k\right) - P\left(A_j\right) P\left(A_k\right)\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2} \leq 0,$$

тада је $P\left(\limsup A_n\right) = 1$.

Из претходног текста се види да су се прва уопштења односила на замену услова независности случајних догађаја $A_1, A_2, \ldots$ слабијим условом - независношћу у паровима. Даља истраживања односила су се на две врсте уопштења. *Први тип* уопштења би се могао сврстати у групу уопштења где се услов независности у паровима $\left(P\left(A_j A_k\right) = P\left(A_j\right) P\left(A_k\right)\right)$ замењује нешто слабијим условом $\left(P\left(A_j A_k\right) \leq C \cdot P\left(A_j\right) P\left(A_k\right)\right.$ за неко $\left.C \geq 0\right)$. *Други тип* уопштења односио се на замену услова

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_j A_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2} = 1$$

констатацијом да уместо 1 на десној страни може стајати и неки други позитиван број.

Најважнији (и свакако најопштији) резултати су добијени у радовима В.В. Петрова из 2002. и 2004. године. Но, да бисмо њих могли да изложимо, потребна нам је једна лема Чунга и Ердеша.

4.2 Чунг-Ердешова лема

Лема. [Chung, Erdös (1952)] *Ако је* (A_n) *произвољан низ догађаја, онда је*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \frac{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2}{\sum\limits_{k,j=1}^{n} P\left(A_k A_j\right)}$$

Доказ. Нека је I_k индикатор случајног догађаја A_k, $k = 1, 2, \ldots$, нека је $S_n = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$ и $Y = I_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}$. Тада применом Коши-Шварцове неједнакости имамо

$$\left[E\left(S_n Y\right)\right]^2 \leq E\left({S_n}^2\right) \cdot E\left(Y^2\right).$$

Како је

$$S_n Y = \sum_{k=1}^{n} I_k Y = \sum_{k=1}^{n} I_k = S_n,$$

$$\left[E\left(S_n Y\right)\right]^2 = \left[E\left(S_n\right)\right]^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2,$$

$$E\left({S_n}^2\right) = E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} I_k\right)^2\right] = E\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} I_k I_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\left(I_k I_j\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P\left(A_k A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right) + 2 \cdot \sum_{1 \leq k < j \leq n} P\left(A_k A_j\right),$$

$$E\left(Y^2\right) = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right).$$

Ови резултати дају

$$\left[\sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2 \leq \sum_{k,j=1}^{n} P\left(A_k A_j\right) \cdot P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right),$$

односно

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \frac{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2}{\sum\limits_{k,j=1}^{n} P\left(A_k A_j\right)}.$$

□

4.3 Резултати В.В. Петрова у уопштењима првог типа

Основни резултат огледа се у његовој теореми у раду из 2002. године.

Теорема 4.3.1. [Валентин В. Петров (2002)] *Нека је* (A_n) *низ случајних догађаја за који је* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ *и* $P(A_k A_j) \leq C \cdot P(A_k) P(A_j)$ *за све* $k, j > M$*, такве да је* $k \neq j$ *и за неке константе* $C \geq 1$ *и* M*. Тада је*

$$P(\limsup A_n) \geq \frac{1}{C}.$$

Доказ. На основу Чунг-Ердешове неједнакости из 1952. године је

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2}{\sum\limits_{k,j=1}^{n} P(A_k A_j)}.$$

Применимо ову неједнакост на одсечак $\bigcup\limits_{k=n}^{N} A_k$. То даје

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{N} P(A_k)\right)^2}{\sum\limits_{k,j=n}^{N} P(A_k A_j)} = \frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{N} P(A_k)\right)^2}{\sum\limits_{k=j=n}^{N} P(A_k A_k) + \sum\limits_{\substack{k,j=n \\ k\neq j}}^{N} P(A_k A_j)} \geq$$

$$\Rightarrow (\text{за } n \geq M) \qquad \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{N} P(A_k)\right)^2}{\sum\limits_{k=n}^{N} P(A_k) + \sum\limits_{\substack{k,j=n \\ k\neq j}}^{N} C \cdot P(A_k) P(A_j)} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{N} P(A_k)\right)^2}{\sum\limits_{k=n}^{N} P(A_k) + C \cdot \sum\limits_{\substack{k,j=n \\ k\neq j}}^{N} P(A_k) P(A_j) \pm C \cdot \sum\limits_{k=j=n}^{N} P(A_k) P(A_k)} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{N} P\left(A_k\right)\right)^2}{\left[C \cdot \sum\limits_{\substack{k,j=n \\ k \neq j}}^{N} P\left(A_k\right) P\left(A_j\right) + C \cdot \sum\limits_{k=n}^{N} \left(P\left(A_k\right)\right)^2\right] + \left[\sum\limits_{k=n}^{N} P\left(A_k\right) - C \cdot \sum\limits_{k=n}^{N} \left(P\left(A_k\right)\right)^2\right]} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{N} P\left(A_k\right)\right)^2}{\left[C \cdot \left(\sum\limits_{k=n}^{N} P\left(A_k\right)\right)^2\right] + \left[\sum\limits_{k=n}^{N} C \cdot P\left(A_k\right)\left(1 - P\left(A_k\right)\right)\right]} \geq$$

$$\geq \frac{1}{C \cdot \left\{1 + \frac{\sum\limits_{k=n}^{N} P\left(A_k\right)\left(1 - P\left(A_k\right)\right)}{\left(\sum\limits_{k=n}^{N} P\left(A_k\right)\right)^2}\right\}} \geq \frac{1}{C \cdot \left\{1 + \frac{\sum\limits_{k=n}^{N} P\left(A_k\right) \cdot 1}{\left(\sum\limits_{k=n}^{N} P\left(A_k\right)\right)^2}\right\}} =$$

$$= \frac{1}{C \cdot \left\{1 + \frac{1}{\sum\limits_{k=n}^{N} P\left(A_k\right)}\right\}}.$$

Значи, добили смо

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \geq \frac{1}{C \cdot \left\{1 + \frac{1}{\sum\limits_{k=n}^{N} P\left(A_k\right)}\right\}},$$

па ако пустимо да $N \to \infty$, n је фиксирано, имаћемо $\sum\limits_{k=n}^{\infty} P\left(A_k\right) = +\infty$, као одсечак дивергентног реда, и добијамо

$$\lim_{N \to \infty} \inf P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \geq \frac{1}{C},$$

тј. $P\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \dfrac{1}{C} \in (0,1]$ јер је $C \geq 1$.

Низ $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ је монотоно опадајући $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ и зато постоји $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ тј. $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P(\limsup A_n) \geq \dfrac{1}{C}$.

С обзиром на то да лимес не зависи од понашања (првих) коначно много чланова у њему, у нашем случају биће

$$P(\limsup A_n) \geq \frac{1}{C}.$$

Тиме је доказ теореме завршен. □

4.4 Резултати В.В. Петрова у уопштењима другог типа

Теорема 4.4.1. [Валентин В. Петров (2004)] *Нека је (A_n) низ случајних догађаја за који је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$. Нека је H произвољан реалан број и нека је*

$$2\alpha_H = \lim_{n\to\infty}\inf \frac{2\cdot \sum\limits_{i\leq j<k\leq n} \left[P(A_jA_k) - H\cdot P(A_j)\,P(A_k)\right]}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\right]^2}.$$

Тада је

$$P(\limsup A_n) \geq \frac{1}{H+2\alpha_H}.$$

Напомена: У оригиналној верзији, ради се без множења са 2, тј. посматра се само израз α_H, али се то, ипак, касније мора урадити.

Доказ. Доказ се састоји из неколико корака.
I корак

Прерачунавамо бројилац у изразу за $2\alpha_H$. Добијамо:

$$2\cdot \sum_{1\leq j<k\leq n} \left[P(A_jA_k) - H\cdot P(A_j)\,P(A_k)\right] = \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} P(A_jA_k) - H\cdot \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} P(A_j)\,P(A_k) =$$

$$= \left[\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j A_k\right) \pm \sum_{k=j=1}^{n} P\left(A_j A_j\right) \right] - H \cdot \left[\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right) \pm \sum_{k=j=1}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_j\right) \right] =$$

$$= \left\{ \left[\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j A_k\right) + \sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right) \right] - \sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right) \right\} -$$

$$-H \cdot \left\{ \left[\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right) + \sum_{k=j=1}^{n} \left(P\left(A_j\right)\right)^2 \right] - \sum_{k=j=1}^{n} \left(P\left(A_j\right)\right)^2 \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{j,k=1}^{n} P\left(A_j A_k\right) - \sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right) \right\} - H \cdot \left\{ \sum_{j,k=1}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right) \right\} + H \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(P\left(A_j\right)\right)^2 .$$

Зато израз за $2\alpha_H$ постаје

$$\frac{2 \cdot \sum\limits_{1 \leq j < k \leq n} \left[P\left(A_j A_k\right) - H \cdot P\left(A_j\right) P\left(A_k\right)\right]}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} = \frac{\sum\limits_{j,k=1}^{n} P\left(A_j A_k\right)}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} - \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} -$$

$$-H \cdot \frac{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} + H \cdot \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \left[P\left(A_j\right)\right]^2}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j,k=1}^{n} P\left(A_j A_k\right)}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} - \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)} - H \cdot 1 + H \cdot \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \left[P\left(A_j\right)\right]^2}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2},$$

како је $\sum\limits_{j=1}^{\infty} P\left(A_j\right) = +\infty$, то значи да је

$$2\alpha_H = \lim_{n\to\infty}\inf \frac{2\cdot \sum\limits_{1\le j<k\le n}\left[P\left(A_jA_k\right) - H\cdot P\left(A_j\right)P\left(A_k\right)\right]}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\inf \frac{\sum\limits_{j,k=1}^{n} P\left(A_jA_k\right)}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} - 0 - H\cdot 1 + H\cdot 0,$$

тј. $2\alpha_H \ge L - H$, односно $2\alpha_H + H \ge L$, где је $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j,k=1}^{n} P\left(A_jA_k\right)}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2}$.

У параграфу 4.1 доказали смо да је $L \ge 1$. Самим тим биће и

$$2\alpha_H + H \ge 1.$$

Посебно, $\alpha_0 \ge \frac{1}{2}$ и $\alpha_1 \ge 0$.

II корак

Лема. *За сваки природан број $m \ge 1$ и свако фиксирано реално H је (при $m < n$)*

$$2\cdot {\beta_H}^{(m)} = \lim_{n\to\infty}\inf \frac{2\cdot \sum\limits_{m\le j<k\le n}\left[P\left(A_jA_k\right) - H\cdot P\left(A_j\right)P\left(A_k\right)\right]}{\left[\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\inf \frac{2\cdot \sum\limits_{1\le j<k\le n}\left[P\left(A_jA_k\right) - H\cdot P\left(A_j\right)P\left(A_k\right)\right]}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} \equiv 2\alpha_H,$$

под претпоставком да важи услов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = +\infty$.

То се доказује прерачунавањем израза из бројиоца за $2{\beta_H}^{(m)}$ и коришћењем чињенице да је $m < n$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{m-1} a_j\right).$$

III корак

Из неједнакости Чунг-Ердеша из 1952. године имамо

$$(\text{при } m < n) \qquad P\left(\bigcup_{j=m}^{n} A_j\right) \geq \frac{\left[\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2}{\sum\limits_{j,k=m}^{n} P\left(A_j A_k\right)}.$$

Прерачунавање имениоца у овој неједнакости даје

$$\sum_{k,j=m}^{n} P\left(A_j A_k\right) = \sum_{\substack{j,k=m \\ j\neq k}}^{n} P\left(A_j A_k\right) + \sum_{j=m}^{n} P\left(A_j A_j\right) =$$

$$= \sum_{\substack{j,k=m \\ j\neq k}}^{n} P\left(A_j A_k\right) + \sum_{j=m}^{n} P\left(A_j\right) \mp H \cdot \sum_{\substack{j,k=m \\ j\neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right) =$$

$$= \left\{\sum_{\substack{j,k=m \\ j\neq k}}^{n} P\left(A_j A_k\right) - H \cdot \sum_{\substack{j,k=m \\ j\neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right)\right\} + \left\{\sum_{j=m}^{n} P\left(A_j\right) + \right.$$

$$\left. + H \cdot \sum_{\substack{j,k=m \\ j\neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right)\right\} =$$

$$= \left\{\sum_{\substack{j,k=m \\ j\neq k}}^{n} P\left(A_j A_k\right) - H \cdot \sum_{\substack{j,k=m \\ j\neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right)\right\} + \left\{\sum_{j=m}^{n} P\left(A_j\right) + \right.$$

$$\left. + H \cdot \left[\sum_{\substack{j,k=m \\ j\neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right) \pm \sum_{j=k=m}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_j\right)\right]\right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{\substack{j,k=m \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j A_k\right) - H \cdot \sum_{\substack{j,k=m \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right) \right\} + \left\{ \sum_{j=m}^{n} P\left(A_j\right) + \right.$$

$$\left. + H \cdot \left[\sum_{\substack{j,k=m \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right) + \sum_{j=k=m}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_j\right) \right] - H \cdot \sum_{j=k=m}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_j\right) \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{\substack{j,k=m \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j A_k\right) - H \cdot \sum_{\substack{j,k=m \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right) \right\} + \left\{ \sum_{j=m}^{n} P\left(A_j\right) + H \cdot \left[\sum_{j,k=m}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right) \right] - \right.$$

$$\left. - H \cdot \sum_{j=m}^{n} \left[P\left(A_j\right)\right]^2 \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{\substack{j,k=m \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j A_k\right) - H \cdot \sum_{\substack{j,k=m \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right) \right\} + \sum_{j=m}^{n} P\left(A_j\right) +$$

$$+ H \cdot \left[\sum_{j=m}^{n} P\left(A_j\right) \right]^2 - H \cdot \sum_{j=m}^{n} \left[P\left(A_j\right)\right]^2 .$$

Када се вратимо са овим резултатом у неједначину Чунг-Ердеша, имаћемо

$$P\left(\bigcup_{j=m}^{n} A_j \right) \geq \frac{\left[\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right) \right]^2}{\sum\limits_{j,k=m}^{n} P\left(A_j A_k\right)} = \frac{1}{\dfrac{\sum\limits_{j,k=m}^{n} P\left(A_j A_k\right)}{\left[\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right) \right]^2}} =$$

$$= \left\{ \frac{\sum\limits_{\substack{j,k=m \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j A_k\right) - H \cdot \sum\limits_{\substack{j,k=m \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right)}{\left[\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} + \frac{\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right)}{\left[\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} + \right.$$

$$\left. + H \cdot \frac{\left[\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2}{\left[\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} - H \cdot \frac{\sum\limits_{j=m}^{n} \left[P\left(A_j\right)\right]^2}{\left[\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} \right\}^{-1} =$$

$$= \left\{ \frac{\sum\limits_{\substack{j,k=m \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j A_k\right) - H \cdot \sum\limits_{\substack{j,k=m \\ j \neq k}}^{n} P\left(A_j\right) P\left(A_k\right)}{\left[\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} + \frac{1}{\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right)} + \right.$$

$$\left. + H \cdot 1 - H \cdot \frac{\sum\limits_{j=m}^{n} \left[P\left(A_j\right)\right]^2}{\left[\sum\limits_{j=m}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} \right\}^{-1} .$$

Први сабирак у последњој једнакости тежи $2\alpha_H$ (кад $n \to \infty$, а m је фиксирано). Други и четврти сабирак теже нули на основу полазне претпоставке да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = +\infty$. Зато је

$$P\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\right) \geq \frac{1}{2\alpha_H + 0 + H \cdot 1 - H \cdot 0} = \frac{1}{2\alpha_H + H}.$$

IV корак

Низ $B_m = \bigcup\limits_{j=m}^{\infty} A_j$ је монотоно опадајући када m расте. Зато постоји

$$\lim_{n \to \infty} P\left(B_m\right) = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m\right) = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\right) = P\left(\limsup A_n\right).$$

Дакле, следи да је

$$P(\limsup A_n) \geq \frac{1}{2\alpha_H + H}.$$

Тиме је доказ теореме завршен. □

4.5 Коментари везани за резултате В.В. Петрова

Показаћемо сада како су првобитно добијена уопштења заправо специјални случајеви резултата В.В. Петрова.

1°

Теорема 4.5.1. *Нека је (A_n) низ случајних догађаја за који је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ и $P(A_k A_j) \leq P(A_k) P(A_j)$ за довољно велике k и j такве да је $k \neq j$. Тада је*

$$P(\limsup A_n) = 1.$$

Овај резултат Ердеша и Ренија из 1959. године је специјалан случај Теореме 4.3.1. В.В. Петрова и добија се за $C = 1$, јер у том случају имамо да је

$$P(\limsup A_n) \geq \frac{1}{C} = \frac{1}{1} = 1,$$

а како вероватноћа било ког догађаја не може бити већа од 1, закључујемо да је $P(\limsup A_n) = 1$.

Приметимо да је неједнакост $P(\limsup A_n) \geq \dfrac{1}{H + 2\alpha_H}$, у теореми В.В. Петрова из 2004. године, јасна. То показује следећи пример. Нека је $A_n = A$, $\forall n$ и $P(A) = p > 0$. Тада је

$$2\alpha_H = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{2 \cdot \sum\limits_{1 \leq j < k \leq n} [P(A_j A_k) - H \cdot P(A_j) P(A_k)]}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\right]^2},$$

$$2\alpha_H = \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \frac{2 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot \left(p - Hp^2\right)}{n^2 p^2} \right\},$$

$$2\alpha_H = \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \frac{\left(n^2 - n\right)\left(p - Hp^2\right)}{n^2p^2} \right\},$$

$$2\alpha_H = \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{p} - H\right) \right\} = \frac{1}{p} - H, \quad H + 2\alpha_H = \frac{1}{p}.$$

Како је $P\left(\limsup A_n\right) = P\left(A\right) = p$, добијамо

$$P\left(\limsup A_n\right) = \frac{1}{H + 2\alpha_H}.$$

У свим наредним разматрањима подразумеваћемо да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = +\infty. \tag{1}$$

2° Нека је $H = 0$. $P\left(\limsup A_n\right) \geq \frac{1}{2\alpha_0}$ представља већ поменути резултат Коена и Стоуна из 1964. године као и Спицера, јер при услову (1) неједнакости $P\left(\limsup A_n\right) \geq \frac{1}{L}$ и $P\left(\limsup A_n\right) \geq \frac{1}{2\alpha_0}$ су еквивалентне.

3° Нека је $H = 1$. При услову (1) је $P\left(\limsup A_n\right) \geq \frac{1}{\gamma}$, где је $\gamma = 1 + 2\alpha_1$. Ово представља уопштење резултата Ортеге и Шебора из 1983. године. На основу доказа В.В. Петрова из 2004. године

$$H + 2\alpha_H \geq 1,$$

то значи да је $\gamma \geq 1$, због чега је $\alpha_1 \geq 0$.

То заправо значи да је услов

$$\liminf \frac{\sum\limits_{1\leq j<k\leq m}^{n} P\left(A_j A_k\right) - P\left(A_j\right) P\left(A_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2} \leq 0$$

(што можемо записати као $\alpha_1 \leq 0$) еквивалентан услову $\alpha_1 = 0$, с обзиром на то да смо имали и услов $\alpha_1 \geq 0$.

4°

Теорема 4.5.2. *Ако је* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = +\infty$ *и* $P(A_j A_k) \leq H P(A_j) P(A_k)$ *за све* $k, j > N$ *такве да је* $k \neq j$ *и неке константе* $H \geq 1$ *и* N*, онда је* $P(\limsup A_n) \geq \dfrac{1}{H}$.

У доказу В.В. Петрова из 2004. године показали смо да је $H+2\alpha_H \geq 1$, а како је $H \geq 1$ и $2\alpha_H \geq 1 - H$, закључујемо да је $\alpha_H \leq 0$, па ће самим тим и $H + 2\alpha_H \leq H$.

Доказали смо да је $P(\limsup A_n) \geq \dfrac{1}{H + 2\alpha_H} = \dfrac{1}{H+0} = \dfrac{1}{H}$, тј. дошли смо до резултата В.В. Петрова из 2002. године.

Значи, уопштење из 2002. године је само специјалан случај уопштења из 2004. године.

Глава 5

Примене Борел-Кантелијеве леме у разним врстама конвергенције

5.1 Скоро сигурна конвергенција

У овом делу рада бавићемо се питањима неких конвергенција низова случајних величина. Зато ћемо одмах констатовати да скуп оних ω за које низ (X_n) конвергира припада σ-алгебри $\mathcal{A}$. Заиста, ако користимо *Кошијев критеријум конвергенције* за низове, имамо:

$$\left\{\omega : \text{постоји} \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\right\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq n_0} \bigcap_{m\geq n_0} \{\omega : |X_n(\omega) - X_m(\omega)| < \varepsilon\} =$$

$$= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq n_0} \bigcap_{m\geq n_0} \left\{\omega : |X_n(\omega) - X_m(\omega)| < \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{A}.$$

Уколико, пак, знамо случајну величину X којој низ (X_n) конвергира, тада имамо:

$$\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq n_0} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\} =$$

$$= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq n_0} \left\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{A}.$$

Дакле, и скуп оних ω за које $X_n(\omega)$ конвергира ка $X(\omega)$ када $n \to \infty$ је случајни догађај из σ-алгебре $\mathcal{A}$.

За скоро сигурну конвергенцију имамо следећу дефиницију.

Низ случајних величина (X_n) *конвергира скоро сигурно (конвергира са вероватноћом 1)*, ка случајној величини X ако важи

$$P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1.$$

Еквивалентно томе је

$$P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\} = 0.$$

За скоро сигурну конвергенцију користи се ознака $X_n \xrightarrow{\text{с.с.}} X$, $n \to \infty$.

Ако $X_n \to X$, $n \to \infty$, то значи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји број (индекс) n_0 тако да за свако $n \geq n_0$ је $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$. Зато скуп D оних ω за које ово важи можемо изразити као

$$D = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\},$$

односно као

$$D = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \left\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Зато у случају скоро сигурне конвергенције имамо

$$P(D) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \left\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\right\}\right) = 1,$$

што је еквивалентно са тим да за свако $k \in \mathbb{N}$ је

$$P\left(\bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \left\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0.$$

С обзиром на то да је низ

$$A_n = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \left\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\right\}$$

монотоно опадајући, следи да је последњи услов еквивалентан за свако k са

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty}\left\{\omega : |X_n(\omega)-X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0,$$

а то значи да је еквивалентан за свако k са условом

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\omega : \sup_{n\geq n_0} |X_n(\omega)-X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\right\} = 0.$$

То доводи до следећег тврђења:

Теорема 5.1.1. *Низ случајних величина (X_n) конвергира скоро сигурно ка случајној величини X ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ важи*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\omega : \sup_{n\geq n_0} |X_n(\omega)-X(\omega)| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

Из наведеног потребног и довољног услова скоро сигурне конвергенције следи:

$$P\left\{\omega : \sup_{n\geq n_0} |X_n(\omega)-X(\omega)| \geq \varepsilon\right\} =$$

$$= P\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega)-X(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=n_0}^{\infty} P\{\omega : |X_n(\omega)-X(\omega)| \geq \varepsilon\}.$$

Запазимо да последња добијена сума представља остатак реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega : |X_n(\omega)-X(\omega)| \geq \varepsilon\}. \tag{5.1}$$

То значи да можемо формулисати следеће тврђење:

Теорема 5.1.2. *Ако је за свако $\varepsilon > 0$ ред (5.1) конвергентан, онда низ случајних величина (X_n) скоро сигурно конвергира ка случајној величини X.*

Такође, важи и следеће тврђење:

Теорема 5.1.3. *Ако је (ε_n) низ позитивних бројева који монотоно опадајуће тежи нули када $n \to \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega : |X_n(\omega)-X(\omega)| \geq \varepsilon\} < +\infty$, тада*

$$X_n \xrightarrow{c.c.} X, \quad n \to \infty.$$

Заиста, ако је $A_n = \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon_n\}$ и горњи ред конвергира, тада из првог дела Борел-Кантелијеве леме следи да је

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = 0,$$

односно

$$P\left(\overline{\bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq n_0} A_n}\right) = P\left(\bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq n_0} \overline{A_n}\right) =$$

$$= P\left(\bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq n_0} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon_n\}\right) = 1$$

Значи, за скоро свако $\omega \in \Omega$ постоји n_0 тако да је $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon_n$ за све $n \geq n_0$.

Како $\varepsilon_n \downarrow 0$, $n \to \infty$, следи да $X_n(\omega) \to X(\omega)$ за скоро свако $\omega \in \Omega$.

Следећа теорема даје потребан и довољан услов скоро сигурне конвергенције низа независних случајних величина ка нули.

Теорема 5.1.4. *Нека је (X_n) низ независних случајних величина. Тада важи*

$$X_n \xrightarrow{c.c.} 0, \ \ n \to \infty \quad \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geq \varepsilon\} < +\infty.$$

Доказ једноставно следи из Теореме 5.1.2 и закључка $4°-$II (страна 18).

□

Низ случајних величина (X_n) је *Кошијев скоро сигурно (или фундаментален скоро сигурно)* ако важи:

$$P\{\omega : |X_m(\omega) - X_n(\omega)| \to 0, \ m, n \to \infty\} = 1,$$

тј.

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{m\geq n_0} \bigcap_{n\geq n_0} \left\{\omega : |X_m(\omega) - X_n(\omega)| < \frac{1}{k}\right\}\right) = 1.$$

Важи следеће тврђење:

Низ случајних величина је Кошијев скоро сигурно ако и само ако је конвергентан скоро сигурно.

5.2 Конвергенција у вероватноћи

Напоменимо и то да се Борел-Кантелијева лема може примењивати и у неким другим конвергенцијама, на пример, у конвергенцији у вероватноћи. Наведимо прво одговарајуће дефиниције.

Низ случајних величина (X_n) *конвергира у вероватноћи* ка случајној величини X, ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad \lim_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

За конвергенцију у вероватноћи користи се ознака $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$.

Низ (X_n) је *Кошијев у вероватноћи* или *фундаменталан у вероватноћи*, ако

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad P\{|X_m - X_n| \geq \varepsilon\} \to 0, \qquad m, n \to \infty.$$

Важи следеће тврђење:

Теорема 5.2.1. *Низ случајних величина (X_n) конвергира у вероватноћи ако и само ако је фундаменталан у вероватноћи.*

Доказ. Нека $X_n \xrightarrow{P} X$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ важи $P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \to 0$. Како за $\varepsilon > 0$ важи инклузија

$$\{|X_m - X_n| \geq \varepsilon\} \subset \left\{|X_m - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

а вероватноћа догађаја на десној страни те инклузије тежи нули кад $m, n \to \infty$, то добијамо $P\{|X_m - X_n| \geq \varepsilon\} \to 0$, $m, n \to \infty$, тј. низ (X_n) је фундаменталан у вероватноћи.

Обрнуто, нека је низ (X_n) фундаменталан у вероватноћи. Тада можемо изабрати растући низ (n_k) природних бројева, тако да је

$$P\left\{\left|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\right| \geq \frac{1}{2^k}\right\} < \frac{1}{2^k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\left|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\right| \geq \frac{1}{2^k}\right\} < +\infty.$$

На основу првог дела Борел-Кантелијеве леме добијамо да догађај

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \left\{\left|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\right| \geq 2^{-k}\right\}$$

има верововатноћу 0.

То значи да за свако $\omega \in \Omega \setminus A$ постоји природан број $k_0 = k_0(\omega)$ такав да за свако $k \geq k_0$ важи неједнакост

$$\left|X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)\right| \leq 2^{-k}.$$

Одатле следи да је низ бројева $(X_{n_k}(\omega))$ конвергентан. Тада је са

$$X(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} X_{n_k}(\omega), & \text{ако } \omega \in \Omega \setminus A, \\ 0, & \text{ако } \omega \in A, \end{cases}$$

одређена случајна величина за коју важи $X_{n_k} \xrightarrow{\text{c.c.}} X$, $n \to \infty$. Како је

$$\{|X_n - X| > \varepsilon\} \subset \left\{|X_n - X_{n_k}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|X_{n_k} - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

то следи да је низ (X_n) конвергентан у вероватноћи.

□

Докажимо још и следеће тврђење:

Теорема 5.2.2. *Ако $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$, онда постоји низ (n_k), такав да важи $X_{n_k} \xrightarrow{c.c} X$, $n \to \infty$.*

Доказ. Из $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$, следи да за свако $\varepsilon > 0$ можемо наћи k тако да је

$$P\{|X_{n_k} - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Зато је $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P\{|X_{n_k} - X| \geq \varepsilon\} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$.

Дакле, на основу Борел-Кантелијеве леме следи да се остварује само коначно много догађаја $|X_{n_k} - X| \geq \varepsilon$. Дакле, постоји k_0 тако да за свако $k \geq k_0$ је $|X_{n_k} - X| < \varepsilon$, а то значи да за скоро свако k је $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$, па зато са вероватноћом 1 важи

$$X_{n_k} \xrightarrow{\text{c.c}} X, \quad k \to \infty.$$

□

5.3 Јаки закони великих бројева

Нека је (X_n) низ случајних величина са коначним математичким очекивањима $E(X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Посматрајмо n-ту парцијалну суму

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

аритметичку средину првих n случајних величина

$$\frac{1}{n} S_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

и аритметичку средину првих n математичких очекивања

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)}{n}.$$

У законима великих бројева посматрају се низови

$$Y_n = \frac{1}{n} S_n - \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

У случају конвергенције у вероватноћи:

$$Y_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty,$$

тј.

$$P\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) \right| \geq \varepsilon \right\} \to 0, \quad \text{када } n \to \infty,$$

ради се о *слабим законима великих бројева.*

У случају скоро сигурне конвергенције:

$$Y_n \xrightarrow{\text{с.с}} 0, \quad n \to \infty,$$

тј.

$$P\left\{ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k)) \to 0, n \to \infty \right\} = 1,$$

ради се о *јаким законима великих бројева.*

Ми ћемо се, управо, овде позабавити јаким законима великих бројева.

Када се у уџбеницима из теорије вероватноће излажу закони великих бројева, обично се прво доказује неједнакост Колмогорова, о којој се говори у следећој теореми.

Теорема 5.3.1. *Нека су* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *независне случајне величине, такве да за* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ *важи* $E(X_j) = 0$, $D(X_j) < +\infty$ *и нека је* $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} X_j$. *Тада за свако* $\varepsilon > 0$ *важи*

$$P\left\{\max_{1 \le k \le n} |S_k| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{E\left({S_n}^2\right)}{\varepsilon^2}.$$

После тода доказују се следеће две теореме (тзв. *Колмогоровљев јаки закон великих бројева* и *Хинчинов јаки закон великих бројева*).

Теорема 5.3.2. (Колмогоровљев јаки закон великих бројева) *Нека је* (X_n) *низ независних случајних величина такав да важи* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < +\infty$, *тада је*

$$P\left\{\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} (X_k - E(X_k)) = 0\right\} = 1,$$

тј.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} (X_k - E(X_k)) \xrightarrow{c.c.} 0, \quad n \to \infty.$$

Теорема 5.3.3. (Хинчинов јаки закон великих бројева) *Нека је* (X_n) *низ случајних величина са истом расподелом и коначним математичким очекивањем једнаким* m. *Тада са вероватноћом 1 важи*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \longrightarrow m, \quad n \to \infty,$$

$$\frac{1}{k} S_k \xrightarrow{c.c.} m, \quad k \to \infty.$$

Из Хинчинове теореме се као специјалан случај изводи *Борелов јаки закон великих бројева*:

Теорема 5.3.4. *Ако је S_n број успеха у n независних експеримената, при чему је вероватноћа успеха у сваком експерименту једнака p, онда са вероватноћом 1 важи $\frac{S_n}{n} \to p$, $n \to \infty$:*

$$P\left\{\frac{1}{n}\,S_n \to p,\ n \to \infty\right\} = 1.$$

Ми ћемо овде поступити нешто другачије. Доказаћемо директним начином прво Борелов, а затим и Хинчинов закон.

5.4 Доказ Бореловог јаког закона великих бројева

Можемо посматрати низ независних индикатора успеха догађаја A у серији n независних експеримената, тј.

$$I_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \qquad p = P\,(A).$$

Тада је

$$E\,(I_n) = p, \quad D\,(I_n) = p(1-p),$$

$$E\,(S_n) = E\,(I_1) + E\,(I_2) + \ldots + E\,(I_n) = n \cdot E\,(I_1) = n \cdot p,$$

$$D\,(S_n) = D\,(I_1) + D\,(I_2) + \ldots + D\,(I_n) = n \cdot D\,(I_1) = n \cdot p \cdot (1-p).$$

На основу неједнакости Чебишева у овом случају добијамо:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\,S_n - \frac{1}{n}E\,(S_n)\right| \geq \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{1}{n}\,S_n - p\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot D\left(\frac{S_n}{n}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p \cdot (1-p) = \frac{p \cdot (1-p)}{n\varepsilon^2} \to 0, \quad n \to \infty,$$

а то је тврђење *Бернулијевог слабог закона великих бројева.*

Он, дакле, значи да у смислу конвергенције у вероватноћи низ релативних учесталости конвергира вероватноћи успеха:

$$\frac{1}{n}\,S_n \xrightarrow{P} p, \quad n \to \infty.$$

Међутим, ми овде желимо да докажемо и знатно јаче тврђење. Показаћемо да $\frac{1}{n}\,S_n$ скоро сигурно конвергира p када $n \to \infty$.

Приметимо да мајоранте $\left(\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\right)$ са десне стране у неједнакости Чебишева јесу чланови дивергентног реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\,S_n - p\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = +\infty.$$

Из низа $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ можемо извући подниз a_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$ за који ће бити $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} a_{n_k} < +\infty$, тј. за који ће ред бити конвергентан. На пример, можемо узети подниз $a_{n_k} = \frac{1}{k^2}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тада неједнакост Чебишева даје

$$P\left\{\left|\frac{1}{n^2}\,S_{n^2} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{n^4 \cdot \varepsilon^2} n^2 \cdot p \cdot (1-p) = \frac{p(1-p)}{n^2\varepsilon^2},$$

а како за свако $\varepsilon > 0$ важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n^2}\,S_{n^2} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(1-p)}{n^2\varepsilon^2} < +\infty,$$

на основу првог дела Борел-Кантелијеве леме добијамо да је

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = 0,$$

односно $P\left\{\left|\frac{1}{n^2}\,S_{n^2} - p\right| \geq \varepsilon \text{ бесконачно много пута}\right\} = 0$. То значи да $P\left\{\frac{1}{n^2}\,S_{n^2} \to p,\, n \to \infty\right\} = 1$, односно у случају подниза $q_n = \frac{1}{n^2}$ имамо закључак: Низ релативних учесталости $\frac{1}{n^2}\,S_{n^2}$ скоро сигурно тежи теоријској вероватноћи p.

Поставља се питање да ли овај закључак може да се пренесе и на све индексе k који нису потпуни квадрати природних бројева. Запазимо да је тада k увек између нека два суседна потпуна квадрата. Узмимо

$$k \in \left\{n^2 + 1, n^2 + 2, \ldots, (n+1)^2 - 1\right\}$$

и констатујмо да је низ S_n неопадајући:

$$S_{k+1} = S_k + I_{k+1}.$$

Зато је $\frac{S_k}{k} \leq \frac{S_{k+1}}{k} \leq \frac{S_{(n+1)^2}}{k} = \frac{S_{(n+1)^2}}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{k}$, па због $n^2+1 \leq k \leq (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$ је

$$\frac{n^2+1}{(n+1)^2} \leq \frac{k}{(n+1)^2} \leq \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} < \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} = 1$$

$$1 < \frac{(n+1)^2}{k} \leq \frac{(n+1)^2}{n^2+1} \to 1,\ n \to \infty.$$

Закључујемо да $\frac{(n+1)^2}{k} \to 1,\ n \to \infty$. Како $\frac{1}{n^2} S_{n^2} \to p,\ n \to \infty$, закључујемо да за свако k важи:

$$\frac{S_k}{k} \to p,\ \ k \to \infty$$

Тиме је доказ Бореловог закона завршен.

□

5.5 Доказ Хинчиновог јаког закона великих бројева

У случају Хинчиновог закона доказ се може извести на следећи начин:

Нека је (X_n) низ независних случајних величина са истом расподелом код којих је $E(X_n) = m$, $D(X_n) = \sigma^2$, $\sigma(X_n) = \sigma$. Тада неједнакост Чебишева даје

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} S_n - \frac{1}{n} E(S_n)\right| \geq \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{1}{n} S_n - m\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot D\left(\frac{1}{n} S_n\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \cdot D(S_n) = \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \cdot n \cdot D(X_1) = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}.$$

Ред мајораната је дивергентан:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} S_n - \frac{1}{n} E(S_n)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \cdot n} = +\infty.$$

Из низа $a_n = \dfrac{1}{n}$ можемо изабрати подниз, нпр. $a_{n_k} = \dfrac{1}{k^2}$ за који ћемо имати $P\left\{\left|\dfrac{1}{n^2}\,S_{n^2} - m\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n^2}\,S_{n^2} - m\right| \geq \varepsilon\right\} \sum_{n=1}^{\infty} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Борел-Кантелијева лема тада тврди да се из низа догађаја

$$\left\{\omega : \left|\frac{1}{n^2}\,S_{n^2} - m\right| \geq \varepsilon\right\}$$

реализује беконачно много њих са вероватноћом нула, тј. са вероватноћом 1 ће за скоро све вредности n бити $\left|\dfrac{1}{n^2}\,S_{n^2} - m\right| \leq \varepsilon$.

Другим речима

$$\frac{1}{n^2}\,S_{n^2} \xrightarrow{\text{с.с}} m, \quad n \to \infty.$$

Поставља се сада питање да ли ово важи и за све индексе између потпуних квадрата тј. за $k \in \left\{n^2+1, n^2+2, \ldots, (n+1)^2-1\right\} = \left\{n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+2n\right\}$, $n \geq 1$. Да бисмо то испитали, дефинишимо максималну разлику између центрираних вредности за S_k и S_{n^2}. Прецизније речено, нека је

$$D_{n^2} = \max_{n^2+1\leq k\leq (n+1)^2-1} \left|(S_k - k\cdot m) - \left(S_{n^2} - n^2\cdot m\right)\right|.$$

За те вредности D_{n^2}, неједнакост Чебишева за свако $\varepsilon > 0$ даје

$$P\left\{\left|\frac{1}{n^2}\,D_{n^2}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot E\left(\frac{1}{n^2}\,D_{n^2}\right)^2 = \frac{1}{n^4\varepsilon^2}\,E\left(D_{n^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^4\varepsilon^2}\max_{n^2+1\leq k\leq (n+1)^2-1}\left(E\left(S_k - S_{n^2} - \left(k-n^2\right)m\right)\right)^2.$$

Прерачунавање добијене десне стране даје

$$E\left[(S_k - S_{n^2}) - \left(k-n^2\right)m\right]^2 =$$

$$= E\left[(S_k - S_{n^2})^2 - 2\cdot\left(k-n^2\right)m\,(S_k - S_{n^2}) + \left(k-n^2\right)^2 m^2\right] =$$

$$= E\,(S_k - S_{n^2})^2 - 2\cdot\left(k-n^2\right)mE\,(S_k - S_{n^2}) + \left(k-n^2\right)^2 m^2 =$$

$$= \left[D\left(S_k - S_{n^2}\right) + \left(E\left(S_k - S_{n^2}\right)\right)^2\right] - 2\left(k-n^2\right)m\left(k-n^2\right)m + \left(k-n^2\right)^2 m^2 =$$

$$= \left(k-n^2\right)\sigma^2 + \left(k-n^2\right)^2 m^2 - \left(k-n^2\right)^2 m^2 = \left(k-n^2\right)\sigma^2.$$

Зато је

$$E\left(D_{n^2}^2\right) = \max_{n^2+1 \le k \le (n+1)^2-1} E\left[\left(S_k - k\cdot m\right) - \left(S_{n^2} - n^2\cdot m\right)\right]^2 \le$$

$$\le \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} E\left[\left(S_k - k\cdot m\right) - \left(S_{n^2} - n^2\cdot m\right)\right]^2 =$$

$$= \left[(n+1)^2 - 1 - (n^2+1)\right] E\left[\left(S_k - k\cdot m\right) - \left(S_{n^2} - n^2\cdot m\right)\right]^2 =$$

$$= 2n\cdot\left(k-n^2\right)\sigma^2 \le 2n\cdot\left(n^2+2n-n^2\right)\sigma^2 = 4n^2\sigma^2,$$

односно

$$P\left(\left|\frac{1}{n^2}D_{n^2}\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{1}{n^4\varepsilon^4}\cdot 4n^2\sigma^2 = \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n^2},$$

па се поступком који је аналоган оном из претходног параграфа закључује да

$$\frac{1}{n^2}D_{n^2} \xrightarrow{\text{c.c.}} 0, \quad n\to\infty.$$

Даље имамо

$$\left|\frac{S_k - k\cdot m}{k}\right| = \left|\frac{S_k}{k} - m\right| \le \frac{|S_{n^2}| + |D_{n^2}|}{k} \le \frac{|S_{n^2}|}{n^2} + \frac{|D_{n^2}|}{n^2},$$

па како оба сабирка теже нули, то нас води закључку

$$\frac{S_k}{k} - m \xrightarrow{\text{c.c.}} 0, \quad k\to\infty, \qquad \text{односно} \qquad \frac{S_k}{k} \xrightarrow{\text{c.c.}} m, \quad k\to\infty,$$

за све вредности k.
Тиме је доказ Хинчиновог јаког закона великих бројева завршен. $\square$

Као што се из доказа теорема у последња два параграфа види, у многим случајевима битно интервенише неки од делова Борел-Кантелијеве леме. То показује да је њен значај у граничним теоремама теорије вероватноће веома битан.

Литература

[1] Gunnar Englund, Timo Koski, *Borel-Cantelli lemmas and the Law of large numbers* (2008).

[2] R. G. Laha, V. K. Rohtagi, *Probability Theory*, John Wiley&Sons, New York (1979).

[3] Јован Малишић, *Вероватноћа и математичка статистика*, Круг, Београд (1999).

[4] Павле Младеновић, *Вероватноћа и статистика*, Математички факултет, Београд (2005).

[5] Павле Младеновић, *Изабрани задаци из теорије вероватноће*, рецензовани рукопис (1984).

[6] V. V. Petrov, *A generalization of the Borel-Cantelli lemma*, Statistics & Probability letters 67 (2004), 233–239.

[7] V. V. Petrov, *A note on the Borel-Cantelli lemma*, Statistics & Probability letters 58 (2002), 283–286.

[8] А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, *Задачи по теории вероятностей*, Наука, Москва (1986).

[9] L. L. Chung, P. Erdös, *On the application of the Borel-Cantelli lemma* (1952), 179–186.