Универзитет у Београду

Математички факултет

Љубица В. Матић

О једној класи трансмисионих проблема у неповезаној области

-мастер рад-

Београд, 2010.

Садржај

Предговор

У овом раду се говори о једној класи трансмисионих проблема на неповезаној области. Најпре ћемо описати математички модел који одговара осцилацији две танке жице. Одговарајући модел је задат хиперболичким системом једначина који ће бити посматран са различитих аспеката.

У другом и трећем поглављу су описани основни елементи Парцијалних диференцијалних једначина, као и Мешовити проблем за хомогену и нехомогену таласну једначину.

У четвртом поглављу, користећи Фуријеову методу раздвајања променљивих, извршена је трансформација почетног проблема на проблем сопствених вредности. Такође, нови проблем је упрошћен увођењем простора Собољева.

Теорија спектра и асимптотско понашање сопствених вредности датог проблема су описани у петом поглављу. Приказано је и неколико графичких примера који одговарају различитим дужинама жица као и различитом избору параметара који описују осцилаторни процес.

У шестом поглављу је примењена Теорија дистрибуција, док је одговарајући проблем поједностављен претпоставком да су жице приближена једна другој.

У седмом поглављу, изводи почетног проблема су замењени одговарајућим коначним диференцијалним апроксимацијама што је довело до матричне нотације и рада са операторским једначинама.

Примена Мултигрид методе на примеру датог проблема је описана у осмом поглављу.

Основна идеја деветог поглавља се састоји у посматрању задатог интервала као уније три неповезана подинтервала на којима су појединачно дефинисани почетни услови.

Десето поглавље укључује дефиниције основних појмова Функционалне анализе, Теорије оператора, Теорије сопствених вредности, Мултигрид методе..

Посебну захвалност дугујем Проф. Др. Бошку Јовановићу и Др. Кристосу Краваритису због стрпљења, разумевања и корисних сугестија које су допринеле финалном изгледу рада.

Математички факултет
Београд, мај 2010.

Љубица В. Матић

1. Увод

У свакодневном животу често наилазимо на појаве које су описане многим физичким, механичким, статичким особинама. Из жеље да их боље разумемо и прецизније опишемо, настала је јако широка теорија која истом задатку прилази са различитих аспеката..

У овом раду разматраћемо осцилације две танке жице које су учвршћене на једном свом крају, док им је супротан крај слободан. Разматрање вршимо уз претпоставку да осцилације зависе само од хоризонталне променљиве x и времена t. Учвршћен крај леве жице означимо са a_1 а слободан са b_1 .Слично, нека је a_2 слободан крај десне жице а b_2 учвршћен. Нека је при томе $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2$.

Одступање од равнотежног положаја тачке прве жице са апсцисом x у временском тренутку t означимо са $u_1 = u_1(x,t)$ и аналогно за десну жицу $u_2 = u_2(x,t)$.
Процес осциловања зависи од сила које делују на жице (сила истезања, еластична сила, спољашња сила), као и од врсте интеракције слободних крајева.

Физички процеси чији се описи и решење различито понашају у различитим подобластима посматране области често се називају проблемима трансмисије. Ту спадају дифракција светлости, пренос топлоте у композитним материјалима, дифузија кроз разне врсте мембрана итд. Описани проблем осциливања две жице се такође може убројити у проблеме трансмисије. При томе се његова специфичност огледа у чињеници да се решење посматра у две дисјунктна, строго раздвојена интервала.

Дакле, физичка појава осцилација танких жица је објашњена, добро дефинисана и поставља се питање како јој доделити одговарајући математички модел. При том, модал би требало да садржи и променљиве које описују еластичност жица, утицај спољашњих сила...

Већину комплексних физичких процеса је могуће посматрати као скуп једноставнијих процеса и њиховог међудејства.

При кретању слободног краја жице, у физичком смислу можемо изучавати путању, брзину приликом кретања која може бити константна или не, постојање почетне брзине, убрзања..
Такође, може се проучавати и дејство спољашњих фактора: које врсте енергије поседује дато тело у средини са датим карактеристикама, да ли постоје силе које узрокују отпор при кретању, каква им је природа... као и дејство унутрашњих фактора који се углавном односе на морфолошке карактеристике тела као што су његов облик, густина, хомогеност, еластичност..

У физици и статици су изучени основни односи и корелације између величина које описују дато кретање.
Ту су, на пример, добро позната формула $s=v\cdot t$ која говори да се дужина пута при равномерном праволинијском кретању може добити као производ брзине и времена. Или, формула $v=a\cdot t$ говори о вези убрзања, брзине и времена при специфичним условима.

Из прве формуле видимо да се брзина може посматрати као извод пута по времену, а диференцирамо ли ту величину још једном по времену, добићемо убрзање. Ово показује да се, уз познавање одговарајуће математичке апаратура, може смањити број променљивих које описују задати процес што доводи до значајног упрошћавања и стварања могућности за детаљније истраживање.
Математички модел који садржи описе спољашњих и морфолошких фактора који утичу на кретање је, наравно, доста комплекснији, па је потребно развити теоријску основу и добру математичку апаратуру за његово решавање.

Управо се због ових практичних потреба развила теорија која се бави проблемом симулације физичких појава. Развој ове теорије су равномерно подстицали математичари, физичари, механичари.
Класа једначина коју дефинише ова теорија се назива једначинама математичке физике. Она обједињује готово све математичке дисциплине и користи разноврсан математички апарат.

Покажимо сада како изгледа генерисање математичког модела на примеру жице која осцилује.
Са $T(x,t)$ обележимо силу истезања (она је тангентна на жицу), са $\rho(x)$ густину жице, а са $F(x,t)$ силу која се односи на спољашње утицаје.
При малим осцилацијама истезање жице се може занемарити, односно $\frac{\partial u}{\partial x} \approx 0$:
:

$$l(x) = \int_a^b \sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2}\, dx \approx b-a$$

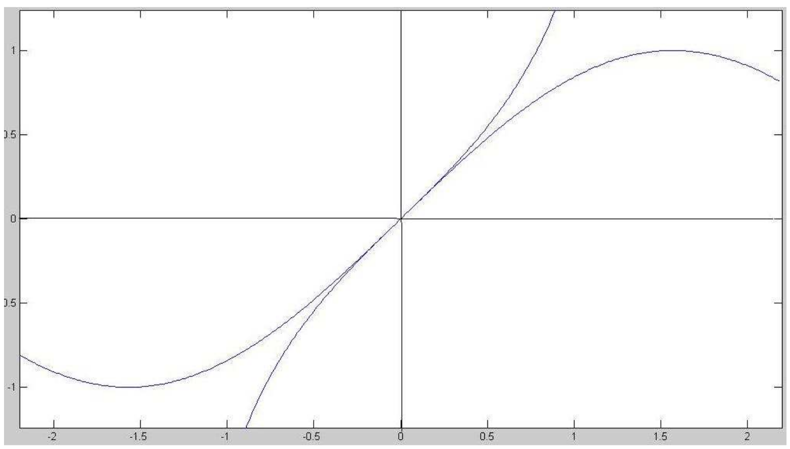
Према Хуковом закону, сила истезања $T(x,t)$ ће бити константна тј. $|T(x,t)| = T_0$
Посматрајмо сегмент жице $(x, x+\Delta x)$ и испитајмо које силе на њега делују.
Ту су: сила истезања која има интензитет једнак следећој разлици $T(x+\Delta x,t)$ - $T(x,t)$, затим, спољашња сила чије ћемо дејство означити са $F(x,t)\,\Delta x$. Други Њутнов закон говори о томе да је резултујућа сила која делује на тело једнака

производу масе и убзања тог тела. Када то применимо у конкретном случају осцилације жице и посматрамо компоненту силе паралелну са u осом, имаћемо:

$$(T_0 \sin\alpha)|_{x+\Delta x} - (T_0 \sin\alpha)|_x + F(x,t)\,\Delta x = m\cdot a = \rho(x)\,\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \qquad (1.1)$$

Последња једнакост је испуњена јер смо убрзање посматрали као $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, а масу као производ линеарне густине и дужине. Такође, при малим осцилацијама тј. када је мала вредност угла α, можемо да извршимо следећу апроксимацију:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}} \approx \tan\alpha$$



Са слике уочавамо и да је $\tan\alpha$ управо промена $u(x,t)$ зависно од прве координате, односно извод, тако да пишемо:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}} \approx \tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$$

У једначини (1.1) смо изразили само масу и убрзање преко функција $u(x,t)$ и $\rho(x)$, а сада то можемо да урадимо и са функцијом $\sin\alpha$. Када поделимо обе стране једнакости са Δx, добићемо:

$$T_0 \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + F(x,t) = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

Обзиром да посматрамо произвољан интервал $(x, x+\Delta x)$, можемо захтевати да $\Delta x \to 0$. У том случају, израз

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]$$

конвергира ка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.

Дакле, други Њутнов закон и теореме физике су нам дали јадначину (1.1) која описује кретање тачака жице. Уз извесне апроксимације, ту једначину смо свели на следећу:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + F(x,t)$$

и коначно, када претходну једнакост поделимо са $\rho(x)$, добићемо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t)$$

где је $a^2 = \frac{T_0}{\rho(x)}$ позитиван коефицијент.

Приметимо да смо при генерисању математичког модела разматрали само утицај спољашње силе и силе истезања. Када у разматрање укључимо и еластичне силе, модел добија компликованији облик:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - q(x)u\,(x,t) + f(x,t)$$

где је $q(x)$ функција која описује еластичну силу која делује на жицу у тачки x.

Правац силе еластичности жице се поклапа са самом путањом тачака жице, тако да постоји линеарна веза између еластичне силе и одступања од равнотежног положаја $u\,(x,t)$ што је у претходној једначини представљено као $q(x)u\,(x,t)$. Такође, први члан десне стране једнакости се односи на силу истезања, а други на еластичну силу. С обзиром да ове две силе имају супротан смер, постало је јасно и зашто су обрнути предзнаци чланова који их представљају.

Овако изведена једначина спада у класу парцијалних диференцијалних једначина, тако да ће нам бити веома важно да проучимо теорију везану за ову област.

Теоријом парцијалних диференцијалних једначина се математички моделира широк круг физичких процеса, а дешава се и да се једном истом једначином могу моделирати по својој природи сасвим различити процеси као што су осцилаторна кретања, кретања вискозних течности и гасова, дифузни процеси, процеси провођења топлоте, процеси који су стационарни у времену, електростатичке појаве...

2. Парцијалне диференцијалне једначине

2.1. Општа својства решења

Дефиниција: Једначина у којој се јављају парцијални изводи непознате функције u независно променљивих $x_1, x_2 \ldots x_n$ се назива **парцијална диференцијална једначина (ПДЈ).** Њен ред је одређен редом највишег извода.
Општа ПДЈ је облика:

$$F(x_1, x_2 \ldots . x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1} \ldots \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n}, \ldots \frac{\partial^k u}{\partial {x_1}^{k_1} \partial {x_2}^{k_2} \ldots \partial {x_n}^{k_n}})$$

где је F дата функција.
Наравно, она не мора да садржи све независно променљиве, непознату функцију и све њене парцијалне изводе.
Решење парцијалне диференцијалне једначине је функција из неког допустивог скупа функција која ову једначину идентички задовољава.
Поступак одређивања решења ПДЈ се назива интеграција парцијалне диференцијалне једначине.
Ако је функција $u = u\,(x_1, x_2 \ldots x_n)$ решење ПДЈ, онда се хиперповрш у R^{n+1} описана овом функцијом назива **интегрална површ**.
Зависно од природе проблема, може се захтевати да се из класе решења ПДЈ одреди решење које задовољава неке дате услове: Кошијеве (почетне) услове, граничне (рубне) услове, мешовите услове- почетне и граничне. У зависности од ових услова, разматрају се:

- Кошијеви (почетни) проблеми
- Гранични (рубни) проблеми
- Мешовити проблеми

У решавању ових проблема постављају се три кључна питања: егзистенције, јединствености и стабилности решења. Ако постоји јединствено , стабилно решење, кажемо да је математички модел **коректно постављен**.
Посебну класу ПДЈ чине **квазилинеарне** ПДЈ – линеарне по парцијалним изводима највишег реда.
Ако су оне линеарне по свим парцијалним изводима и по непознатој функцији, називају се *линеарне* ПДЈ.

Квазилинеарна ПДЈ другог реда је дата са:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1 \ldots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial u}{\partial x_n}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x_1 \ldots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial u}{\partial x_n}),$$

При томе, без смањења општости, можемо сматрати да је испуњен услов

$$a_{ij}=a_{ji}$$

Специјални случај ове квазилинеарне једначине је линеарна ПДЈ другог реда:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1\ldots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1\ldots x_n)u = F(x_1\ldots x_n)$$

Функције a_{ij}, b_i и c су коефицијенти једначине, а функција F је слободан члан.
Функција $u = u(x_1\ldots x_n)$ је решење претходне једначине у области $D\subset R^n$ ако је $u\in C^2(D)$ за свако $(x_1\ldots x_n)\in D$.

Посматрајмо сада специјални случај претходне једначине – ПДЈ другог реда са две независно промењљиве :

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \qquad (\#)$$

где су $A, B, C \in C^2(D)$, $D\subseteq R^2$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$, $F\in C(G)$, $G\subseteq R^5$.
Без губитка општости можемо да претпоставимо да је $A\neq 0$ у области D.

Због углавном јако сложене структуре квазилинеарних ПДЈ другог реда, јавила се потреба да се свакој конкретној једначини пре решавања додели одговарајући тип.
Затим се, одговарајућим линеарним трансформацијама, дата једначина своди на најједноставнији- канонски облик.

Означимо

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)\cdot C(x,y)$$

или, краће

$$\Delta = B^2 - AC$$

Функција $\Delta(x,y)$ се назива **дискриминанта** парцијалне диференцијалне једначине.
Управо на основу ње вршимо класификацију ПДЈ на типове, и то на следећи начин:
Једначина (#) је:

- хиперболичког типа у области D, ако је $\Delta > 0$, за свако $(x,y)\in D$;
- параболичког типа у области D, ако је $\Delta = 0$, за свако $(x,y)\in D$;
- елиптичког типа у области D, ако је $\Delta < 0$, за свако $(x,y)\in D$.

За једначину (#) кажемо да је мешовитог типа ако је различитог типа у разним подобластима области D.

Решење квазилинеарне ПДЈ са две независно променљиве (#) које се изражава помоћу две произвољне функције се назива **опште решење**.
Његовом одређивању се приступа након свођења једначине на канонски облик. Поступак налажења општег решења свођењем на канонски облик помоћу карактеристика је познат као метода карактеристика.

Нама ће касније бити важно да размотримо хиперболички тип чије се решавање углавном базира на обичним диференцијалним једначинама или на линеарним парцијалним диференцијалним једначинама.

Опишимо сада проблем који захтева да се из класе решења ПДЈ одреди решење које задовољава дате почетне услове. Такав проблем називамо Кошијев.
Нека су дуж криве Г: $y=g(x)$ која се налази у области D, или је граница те области, задате функције:

$$u_0 \in C^1(D_\Gamma),\ u_1 \in C(D_\Gamma)$$

где са D_Γ означавамо $D_\Gamma = \{x|\ (x,g(x)) \in D\}$.
Поред тога, предпоставимо да постоји $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in D_\Gamma$.
Формулација Кошијевог проблема је следећа: наћи функцију $u(x,y)$ која је решење једначине (1) у области *D* и која задовољава почетне услове:

$$u|_\Gamma = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_\Gamma = u_1(x)$$

или,

$$u|_\Gamma = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_\Gamma = u_1(x)$$

Да бисмо боље описали аспект примена ПДЈ, посебно на примеру осцилације жица, размотримо детаљније ПДЈ хиперболичког типа.

2.2. ПДЈ хиперболичког типа

ПДЈ хиперболичког типа заправо представљају математичке моделе различитих осцилаторних процеса. Битна својства ПДЈ другог реда хиперболичког типа одражава канонички представник ове класе једначина, таласна једначина непознате функције $u = u(x_1 \ldots x_n, t)$ која је позната и као Даламберова једначина (Jean le Rond d'Alembert 1717-1789 [1]).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}\right) + \mathrm{F}(x_1 \ldots x_n, t)$$

где је $a > 0$ реалан параметар и F дата функција.

Даламберова једначина се може записати и на други начин помоћу линеарног парцијалног диференцијалног оператора познатог као **Лапласов оператор**:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots\ldots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

где су $x_1 \ldots x_n$ коордианантне променњиве на које овај оператор делује. Нагласимо да се Лапласов оператор не мора односити на све координантне променљиве. У једначинама које ми разматрамо, он се односи само на просторне координате $x_1 \ldots x_n$, дакле не и на временску координату t.

За дату функцију $\mathrm{F}(x_1 \ldots x_n, t)$, реалан параметар $a > 0$ и непознату функцију $u(x_1 \ldots x_n, t)$, n-димензиона таласна једначина изражена Лапласовим оператором гласи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta \mathrm{u} = \mathrm{F}$$

Наведимо сада неке физичке процесе описане овим једначинама.
За $\mathrm{n}=1$ су описани различити примери осцилације жице; за $\mathrm{n}=2$ цилиндрични таласи и осциловање мембрана; случај $\mathrm{n}=3$ описује процес простирања звука у хомогеном простору или процес простирања електромагнетних таласа у хомогеној непровидној средини.
При разматрању ПДЈ у области која је просторно ограничена, поред почетних услова, неопходно је знати и граничне услове. Тада говоримо о мешовитом проблему.

Фуријеова метода раздвајања променљивих се може применити у решавању неких случајева мешовитих проблема. Историјски, она представља једну од првих метода за решавање ПДЈ. Примењује се у областима специјалног облика: на правој, кругу, правоугаонику, цилиндру, лопти, или на неким њиховим модификацијама: кружном прстену, кружном исечку, полуравни, полупростору и слично. Суштина ове методе је у изражавању решења мешовитог проблема у облику производа две функције које зависе од једне променљиве:

$$\mathrm{u(x,t)} = \mathrm{X(x)} \cdot \mathrm{T(t)}$$

Сходно томе, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ се записује као X(x)·T“(t).

---

[1] Даламбер је био Француски математичар, физичар, механичар, филозоф.. Управо га ова научна свестраност доводи до тога да истом проблему приступи са различитих аспеката. Он је то образлагао: “... Верујем да је механика само једна од математичких дисциплина као што су то геометрија или алгебра.. Рационална механика је наука базирана на простим принципима, шта више, сви њени појединачни делови и феномени могу бити дедуковани строгим математичким методама.. “

Сасвим аналогно записујемо и остале парцијалне изводе чиме се упрошћава проблем налажења општег решења ПДЈ. Показује се да ће решење бити представљено Фуријеовим редом по неком ортогоналном систему функција. Размотримо детаљније

2.3. Кошијев проблем за таласну једначину на правој

Таласна једначина на правој је заправо једнодимензиона таласна једначина:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$$

у фазном полупростору $D = \{(x,t) \mid x \in R, t>0\}$ где је x просторна координата, а t време.
Ако је $F(x,t)=0$, ради се о хомогеној таласној једначини на правој.
За ову једначину дефинишемо Кошијев проблем (класично решење) :

Одредити функцију $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ која задовољава таласну једначину у области D и почетне услове:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \ x \in R$$

Физички смисао овог Кошијевог проблема је следећи:
Жица (струна) неограничене дужине, занемарљиве тежине је у равнотежном положају затегнута силом константног интензитета. Њен почетни положај је описан функцијом φ, а тачке жице су у почетном тренутку добиле почетне брзине ψ. Изведена из равнотежног положаја под дејством спољашње поремећајне силе $F(x,t)$ жица осцилује у једној равни почевши од временског тренутка $t_0=0$. Закон принудних осцилација жице је описан таласно једначином у којој је параметар a брзина простирања таласа. Уколико нема силе F, слободне осцилације жице су описане хомогеном таласном једначином.

Постоји доста тврђења која говоре о егзистенцији, јединствености и, уколико постоји, облику решења датог Кошијевог проблема.
Једно од њих је следеће:

Теорема: Ако је $\varphi \in C^2(R)$, $\psi \in C^1(R)$, $F \in C^1(D)$, тада Кошијев проблем за нехомогену таласну једначину:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad (*)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

у полупростору D има јединствено решење изражено Даламберовом формулом:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(y)dy + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-z)}^{x+a(t-z)}F(y,z)dydz$$

2.4. Штурм-Лиувилов гранични проблем

Кошијев проблем смо до сада разматрали у полупростору $D=\{(x,t)\mid x\in R, t>0\}$.
У овом поглављу ћемо увести нова ограничења јер ћемо поред временске, наметнути услове и за просторну координату.
При разматрању ПДЈ у просторно ограниченој области неопходно је знати почетне (Кошијеве) услове и граничне услове.
Такав проблем називамо мешовити проблем.
С обзиром да сад имамо више услова, поступак налажења оптшег решења је компликованији од претходног проблема. Због тога је погодно увести елементе Теорије оператора који су детаљније проучени у математичкој анализи.
Решавање мешовитих проблема за линеарне парцијалне диференцијалне једначине другог реда се заснива на решавању Штурм-Лиувилов граничног проблема обичне диференцијалне једначине. (J.Ch.F. Sturm 1803-1855, Joseph Liouville 1809-1882 [2])

Како бисмо детаљније описали поступак решавања мешовитог проблема, опишимо Штурм-Лиувилов гранични проблем.

Предпоставимо да су дате функције $p\in C^2[0,l]$, $p(x)\neq 0$, $q\in C[0,l]$.
Оператор $\mathcal{L}\colon C^2[0,l]\to C[0,l]$ дефинисан са:

$$\mathcal{L}(\varphi)=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)-q(x)\varphi(x)$$

се назива **оператор Штурм- Лиувила**.

За оператор $\mathcal{L}$ се може поставити Штурм-Лиувилов гранични проблем:

---

[2] Лиувил је био Француски математичар, студент Политехничке школе у Паризу. На Лиувилов рад су снажан утицај извршили његови професори Коши и Поасон. Након дипломирања 1827.године, започиње рад на ПДЈ, а најзначајније резултате у овој области бележи у сарадњи са Штурмом. Ова два научника су Теорију граничних проблема за диференцијалне једначине развијали између 1829. и 1837.год. Штурм се у Француску преселио 1833. Већ 1836. постаје члан Академије наука, а од 1839. почиње да ради као професор анализе и механике у Политехничкој школи. Интересантно је да је Штурма и Лиувила повезивало и заједничко интересовање за пројективну и диференцијалну геометрију.

Одредити нетривијално решење $\varphi \in C^2[0,l] \cap C^1([0,l])$ обичне диференцијалне једначине

$$\mathcal{L}(\varphi) + \lambda\omega(x)\varphi(x) = 0, \qquad 0 < x < l$$

где је λ комплексан параметар, а функција $\omega(x) \in C[0,l]$ задата позитивна функција која на крајевима интервала дефинисаности задовољава граничне услове:

$$\alpha\varphi'(0) - \beta\varphi(0) = 0$$
$$\gamma\varphi'(l) - \delta\varphi(l) = 0$$
$$\alpha^2 + \beta^2 > 0$$
$$\gamma^2 + \delta^2 > 0$$

Вредност параметра λ за који Штурм-Лиувилов гранични проблем има нетривијално решење се назива сопствена (карактеристична) вредност, а одговарајуће решење сопствена (карактеристична) функција.
Наведимо фундаменталну теорему која даје довољне услове егзистенције сопствених вредности и одговарајућих сопствених функција:

Теорема: Размотримо Штурм-Лиувилов проблем:

$$\mathcal{L}(\varphi) + \lambda\omega(x)\varphi(x) = 0$$

где је

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right) - q(x)\varphi(x)$$

Ако су испуњени услови:

$$p \in C^1[0,l], \ p(x) > 0 \text{ na } [0,l],$$

$$q \in C[0,l], \ q(x) > 0 \text{ na } [0,l],$$

$$\omega \in C^1[0,l], \ \omega(x) > 0 \text{ na } [0,l],$$

и за константе претходно дефинисаног граничног проблема важи:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0, \ \alpha+\beta > 0, \ \gamma+\delta > 0,$$

тада:

(i) Сопствене вредности Штурм-Лиувиловог проблема су ненегативне, једноструке и чине строго расући низ $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$

(ii) Одговарајуће сопствене функције су ω-ортогоналне, тј. $\int_0^l \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\omega(x)dx = 0$, $i \neq j$ и чине потпун ортогонални систем у простору функција $L_{2,\omega}(0,l)$

(iii) За сваку функцију $f \in C^2[0,l]$ која задовољава граничне услове и услов $|p(x)f'(x) - q(x)f(x)| \leq C\sqrt{\omega(x)}$, $x \in [0,l]$, ред дат са

$$\sqrt{\omega(x)}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\omega(x)}\,\varphi_k(x)$$

где је $a_k = \frac{\int_0^l f(x)\varphi_k(x)\omega(x)dx}{\int_0^l \varphi_k^2(x)\omega(x)dx}$ конвергира апсолутно и униформно на $[0,l]$.

С обзиром да смо дефинисали основне појмове, наведимо врсте мешовитог проблема за таласну једначину на правој и опишимо поступке његовог решавања.

3. Мешовити проблем таласне једначине на правој

3.1. Мешовити проблем хомогене таласне једначине на правој са хомогеним граничним условима

У области D= $(0, l)$ x $(0,\infty)$ одредити нетривијално класично решење $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ хомогене таласне једначине:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad (x,t)\in D \qquad (*)$$

које задовољава почетне услове:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_2(x) \ , \quad x\in(0, l)$$

и граничне услове:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t)=0, \quad t>0$$

Физичка интерпретација услова $u(x, 0) = \varphi_1(x)$ се односи на положај жице у тренутку $t=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_2(x)$ представља почетну брзину жице, док $u(0,t) = 0$ и $u(l,t)=0$ заправо значи да је жица учвршћена на крајевима.

За решавање овог проблема се користи Фуријеова метода раздвајања променљивих. Најпре $u(x,t)$ изразимо као $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$.
Једначина (*) постаје:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

или,

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda = \text{const}$$

Са леве и десне стране првог знака једнакости се налазе функције различитих аргумената, тако да је задовољена и друга једнакост.
Овим се задатак свео на решавање добро познатог Штурм-Лиувиловог граничног проблема:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ \ X(0) = X(l) = 0$$

И обичне диференцијалне једначине.:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

Опште решење прве једначине је дато као:

$$\mathrm{X(x)} = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,\mathrm{x} + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\mathrm{x}\,,$$

што увршћено у граничне услове даје:

$\mathrm{X}(0) = C_1 + C_2 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

$\mathrm{X}(l) \; = \; C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\mathrm{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\sqrt{\lambda}\,\mathrm{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\,\mathrm{l} = \mathrm{n}\pi \quad \mathrm{n}=1, 2, 3\ldots$

Дакле, сопствене вредности и сопствени вектори одговарајућег Штурм-Лиувиловог граничног проблема су изражене на следећи начин:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l}, \quad \mathrm{n}=1, 2, 3\ldots$$

$$X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}\; x = \sin\frac{n\pi}{l}\,\mathrm{x}$$

Израчунате λ_n сада уврштавамо у $\mathrm{T}''(\mathrm{t}) + \lambda a^2 \mathrm{T}(\mathrm{t}) = 0$, и савим аналогно добијамо:

$$\mathrm{T(t)} = D_1 \cos\frac{an\pi t}{l} + D_2 \sin\frac{an\pi t}{l}$$

односно, коначно решење представљамо као:

$$u(x,t) = \; X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (D_1 \cos\frac{an\pi t}{l} \; + \; D_2 \sin\frac{an\pi t}{l}) \sin\frac{n\pi}{l}\,\mathrm{x}$$

Пример 1.

Одредити закон осциловања жице дужине l ако су почетни и гранични услови дати са:

$$\mathrm{u(0,t)} = 0, \quad \mathrm{u}(l,\mathrm{t})=0, \quad \mathrm{t}>0$$

$$\mathrm{u}(x,0) = \; \varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{3x_0}{l} x & \mathrm{x} \in [0, l/3] \\ x_0 & \mathrm{x} \in [l/3, 2l/3] \\ -\frac{3x_0}{l}(x - l) & \mathrm{x} \in [2l/3, l] \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_2(\mathrm{x}) = 0\,, \quad \mathrm{x} \in (0, l)$$

Из претходног извођења знамо да решење представљамо као:

$$u(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_k \cos\frac{an\pi t}{l} + D_2 \sin\frac{an\pi t}{l}) \sin\frac{n\pi}{l} \mathrm{x}$$

док коефицијенте одређујемо решавањем интеграла:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(x) \sin\frac{k\pi x}{l} \, \mathrm{dx}$$

$$D_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l \varphi_2(x) \, \mathrm{dx}$$

након неколико парцијалних интеграција добијамо:

$$C_k = \frac{12x_0}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi}{2} \cos\frac{k\pi}{6}$$

$$D_k = 0$$

и, коначно

$$u(x,t) = \frac{6\sqrt{3}x_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{(6n+1)^2} \cos\frac{a(6n+1)\pi t}{l} \sin\frac{(6n+1)\pi x}{l})$$

$$-\frac{6\sqrt{3}x_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{(6n+5)^2} \cos\frac{a(6n+5)\pi t}{l} \sin\frac{(6n+5)\pi x}{l}).$$

3.2. Мешовити проблем нехомогене таласне једначине на правој са хомогеним граничним условима

Овај проблем гласи слично као претходни:
У области $\mathrm{D}=(0,l)$ x $(0,\infty)$ одредити нетривијално класично решење $\mathrm{u} \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ хомогене таласне једначине

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{f(x,t)} \qquad \mathrm{(x,t)} \in \mathrm{D}$$

које задовољава почетне услове:

$$\mathrm{u}(x,0) = \varphi_1(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_2(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in (0,l)$$

и граничне услове:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t)=0, \quad t>0$$

Дакле, све је исто као у типу I сем нехомогене таласне једначине чије решење одређујемо.
f(x,t) упућује на то да се осцилације жице коначне дужине дешавају под утицајем неке поремећајне силе. Ова нехомогеност се може превазићи развијањем функције f(x,t) у Фуријеов ред по x, односно представљањем у облику:

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l} \quad \Leftrightarrow$$

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x,t) \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx$$

Решење ћемо, слично, тражити у облику:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

где функције $c_k(t)$ одређујемо из почетних и граничних услова.

Пример 2

Решити мешовити проблем:

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) + x - 2 \qquad x\in(0,2), \quad t>0$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(x,0)=\sin 2\pi x$$

$$u(2,t) = 0 \qquad u_t(x,0) = 0$$

најпре $u(x,t)$ изразимо у облику збира $u(x,t) = z(x,t) + f(x)$, где се функција $f(x)$ одређује тако да трансформисана једначина буде хомогена. Користећи претходну смену, добијамо:

$$z_{xx}(x,t) = z_{tt}(x,t) + f''(x) + x - 2$$

$$z(0.t) + f(0) = 0$$

$$z(2.t) + f(2) = 0$$

Функцију f тражимо као решење граничног проблема:

$$f''(x) = 2 - x, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = 0,$$

и добијамо:

$$f(x) = -\frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{4}{3}x$$

Из почетних услова $z\,(0,t) = 0$ и $z(x,0) = \sin 2\pi x$ имаћемо:

$$\sin 2\pi x = u(x,0) = z(x,0) + f(x)$$

$$0 = u_t(x,0) = z_t(x,0)$$

па се функција z одређује као решење мешовитог проблема:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad x \in (0,2), \quad t > 0$$

$$z(0,t) = 0, \quad z(2,t) = 0$$

$$z(x,0) = \sin 2\pi x + \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{4}{3}x$$

$$z_t(x,0) = 0$$

Задатак се даље своди на решавање првог типа мешовитих проблема, што је описано у претходном примеру.

3.3. Мешовити проблем нехомогене таласне једначине на правој са нехомогеним граничним условима

У области D= $(0, l\,) \times (0,\infty)$ одредити нетривијално класично решење $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ нехомогене таласне једначине

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in D$$

које задовољава почетне услове:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_2(x)\,, \quad x \in (0,l)$$

и граничне услове:

$$u(0,t) = \psi_1(t)\,, \quad u(\,l, t) = \psi_2(t), \quad t > 0$$

услови $u(0,t) = \psi_1(t)$ i $u(l, t) = \psi_2(t)$ описују кретање левог и десног краја жице.

Решавање III типа мешовитог проблема се коришћењем одређених алгебарских трнсформација лако своди на претходно описано решавање мешовитих проблема.
Наиме, да бисмо се ослободили нехомогености граничних услова, решење тражимо у облику збира:

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t),$$

где је

$$U(x,t) = \psi_1(t) + \frac{\psi_1(t) - \psi_2(t)}{l}\, x$$

Овим смо задатак свели на:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t) - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad , \quad (x,t) \in D$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0,$$

$$v(x,0) = \varphi_1(0) - \psi_1(0) - \frac{\psi_2(t) - \psi_1(t)}{l}\, x,$$

$$v_t(x,0) = \varphi_2(x) - \psi_1(0)' - \frac{\psi_2(0)' - \psi_1(0)'}{l}\, x$$

Даље решавамо сасвим аналогно као други тип мешовитог проблема.
Приметимо да смо до сада све разматрања везана за мешовити проблем вршили на области D= $(0, l)$ x $(0,\infty)$. Дакле, временска координата није имала горње ограничење.
Уведимо сада нову област D_1 са

$$D_1 = [0, l] \times [0, T]$$

и дефинишимо на њој мешовити проблем једнодимензионе ПДЈ хиперболичког типа:

Одредити функцију $u \in C^2(D_1) \cap C^1(\overline{D_1})$ која задовољава једначину:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u + f(x,t), \quad (x,t) \in D_1$$

и почетне услове:

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in (0, l)$$

и један од следећих парова граничних услова:

(a) $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(l,t) = \mu_2(t)$
(b) $u_x(0,t) = \nu_1(t)$, $u_x(l,t) = \nu_2(t)$

(c) $u_x(0,t)$ - $h_1 u(0,t) = \omega_1(t)$, $u_x(l, t) + h_2 u(l,t) = \omega_2(t)$.

где су: $p\in C^1([0,l])$, $q,\rho\in C([0,l])$, $f\in C(D_1)$,

$p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) > 0$, $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ za $x\in[0,l]$;

$\varphi\in C^1(D_1)$, $\psi\in C(D_1)$;

$\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, \omega_1, \omega_2 \in C([0,T])$,

h_1 и h_2 су позитивне константе.

Поред тога, морају бити задовољени одговарајући услови сагласности почетних и граничних услова. На пример, за први гранични услов мора да важи:

$$\varphi(0) = \mu_1(0),\ \ \varphi(l) = \mu_2(l),\ \ \psi(0) = \mu_1'(0),\ \ \psi(l) = \mu_2'(l).$$

При овим условима постоје теореме које гарантују јединственост и стабилност формалног решења датог проблема, а уз неке додатне претпоставке, може се доказати и егзистенција.

Пример 3.

Решити гранични проблем:

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \qquad x\in(0,1),\ \ t>0$$

$$u(0,t)=t+1 \qquad u(x,0)=x+1$$

$$u(1,t)=t^3+2 \qquad u_t(x,0) = 0$$

у складу са претходним ознакама, имаћемо:

$$\psi_1(t)= t+1\ ,\ \ \psi_2(t)= t^3+2,\ \ \varphi_0(x) = x+1,\ \ \varphi_1(x) = 0,\ \ l = 1.$$

Пошто су гранични услови нехомогени, решење тражимо у облику збира

$$u(x,t)=v(x,t)+U(x,t)$$

где је

$$U(x,t)= \psi_1(t) + \frac{\psi_1(t)- \psi_2(t)}{l}\, x = t+1+(t^3-t+1)\cdot x$$

Овим смо добили једноставнији задатак са хомогеним граничним условима :

$$v_{xx}(x,t) = v_{tt}(x,t) - 6xt \qquad x\in(0,1),\ \ t > 0$$

$$v(0,t)=0 \qquad v(x,0)=0$$

$$v(1,t)=0 \qquad v_t(x,0)=x-1$$

Примењујући Штурм-Лиувилов поступак, решење тражимо у облику:

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin k\pi t,$$

функцију $f(x,t)=-6xt$ такође развијамо у Фуријеов ред,
односно $f(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$ а функције $f_k(t)$ одређујемо на следећи начин :

$$f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\ldots=(-1)^k\,\frac{12}{k\pi}\cdot t$$

Када $v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin k\pi t$ уврстимо у $v_{xx}(x,t)=v_{tt}(x,t)-6xt$ добићемо следећу диференцијалну једначину за одређивање функција $c_k(t)$:

$$c_к{}''(t)+(k\pi)^2 c_k(t)=\frac{(-1)^k}{k\pi}\cdot 12t$$

$$c_k(0)=0,$$

$$c_k{}'(0)=\frac{-2}{k\pi}$$

Последње две једнакости смо добили из следећих:

$$c_k(0)=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=0$$

$$c_k{}'(0)=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l (x-1)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\ldots=\frac{-2}{k\pi}$$

Опште решење ове једначине је:

$$c_k(t)=\alpha_к\cos k\pi t+\beta_k\sin k\pi t+\frac{(-1)^k}{(k\pi)^3}\cdot 12t$$

док, коефицијенте $\alpha_к$ и β_k одређујемо из:

$$c_k(0)=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha_к=0$$

$$c_k{}'(0)=\frac{-2}{k\pi} \quad\Rightarrow\quad \beta_k k\pi+\frac{(-1)^k}{(k\pi)^3}\cdot 12=\frac{-2}{k\pi} \quad\Rightarrow\quad \beta_k=\frac{-2}{(k\pi)^2}-(-1)^k\frac{12}{(k\pi)^4}$$

Дакле,

$$c_k(t) = \left(\frac{-2}{(k\pi)^2} - (-1)^k \frac{12}{(k\pi)^4}\right) \sin k\pi t + \frac{(-1)^k}{(k\pi)^3} \cdot 12\mathrm{t}$$

Остало је још да $c_k(t)$ уврстимо у $\mathrm{v(x,t)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin k\pi t,$ тако да је коначно решење

$$\mathrm{u(x,t)=v(x,t)+U(x,t)}$$

дато у облику:

$$\mathrm{u(x,t)} = \mathrm{t}+1+(t^3\text{-t}+1)\cdot \mathrm{x} + \sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{(k\pi)^2} - (-1)^k \frac{12}{(k\pi)^4}\right) \sin k\pi t \ \sin k\pi x$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k\pi)^3} \cdot 12\mathrm{t} \sin k\pi x$$

4. Проблем сопствених вредности

Задатак који је на први поглед деловао апстактно: описати одступање од равнотежних положаја тачака еластичних жица које под дејством неке поремећајне силе осцилују, сада ће добити одговарајућу матеметичку интерпретацију. Наиме, математички модел који одговара датом физичком процесу је описан мешовитим проблемом једнодимензионе ПДЈ хиперболичког типа:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - q_1(x)u_1 + f_1(x,t) \qquad x\in(a_1,b_1),\ t>0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) - q_2(x)u_2 + f_2(x,t) \qquad x\in(a_2,b_2),\ t>0 \qquad (2)$$

где су:

$p_i(x)$ модули еластичности жице
$q_i(x)$ коефицијенти еластичности
$f_i(x,t)$ спољашње силе

Такође, разматрање вршимо уз претпоставку да је попречни пресек жице константан.
Приметимо да када су жице учвршћене, односно за $x=a_1$ и $x=b_2$, имамо :

$$u_1(a_1,t) = 0 \qquad \text{и} \qquad u_2(b_2,t) = 0 \qquad (3)$$

Наредне две једнакости су последица несавршености контакта међу жицама:

$$p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,t) + \alpha_1 u_1(b_1,t) = \beta_1 u_2(a_2,t) \qquad (4)$$

$$-p_2(a_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2,t) + \alpha_2 u_2(a_2,t) = \beta_2 u_1(b_1,t) \qquad (5)$$

α_i, β_i су коефицијенти еластичности у тачкама $x=b_1$ и $x=a_2$.

Остаје још да опишемо почетне положаје и брзине. Обзиром да смо већ дефинисали мешовити проблем и објаснили његову физичку интерпретацију, то није тешко. Дакле, имаћемо:

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \psi_1(x), \quad x\in(a_1,\ b_1) \qquad (6)$$

$$u_2(x,0) = \varphi_2(x), \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = \psi_2(x), \quad x\in(a_2,\ b_2) \qquad (7)$$

4.1. Уводни појмови, свођење на Штурм-Лиувилов проблем

Најпре ћемо извршити раздвајање променљивих Фуријеовом методом. Представимо $u_1(x,t)$ као производ:

$$u_1(x,t) = v_1(\mathrm{x})\cdot \tau(\mathrm{t})$$

Једначина

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - q_1(x)u_1$$

се, овако уведеном сменом, трансформише на следећи облик:

$$v_1(\mathrm{x})\tau''(t) = (p_1(x)v_1(x)'\tau(\mathrm{t}))' - q_1(x)v_1(\mathrm{x})\,\tau(\mathrm{t})$$

$$= \tau(\mathrm{t})[\,(p_1(x)v_1(x)')' - q_1(x)v_1(\mathrm{x})]$$

или,

$$\frac{\tau''(t)}{\tau(\mathrm{t})} = \frac{(p_1(x)v_1(x)')' - q_1(x)v_1(\mathrm{x})}{v_1(\mathrm{x})} = \lambda$$

када прву једнакост другачије напишемо, добићемо:

$$-(p_1(x)v_1(x)')' + q_1(x)v_1(\mathrm{x}) = \lambda v_1(\mathrm{x})$$

из услова $u_1(a_1,t) = 0$ непосредно следи $v_1(\mathrm{a}_1) = 0,$

док једнакост

$$p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,t) + \alpha_1 u_1(b_1,t) = \beta_1 u_2(a_2,t)$$

аналогно постаје:

$$p_1(b_1)v_1{}'(b_1) + \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1) = \beta_1 v_2(\mathrm{a}_2)$$

Дакле, проблем (1) – (7) смо трансмормисали у :

$$-(p_1(x)v_1(x)')' + q_1(x)v_1(\mathrm{x}) = \lambda v_1(\mathrm{x}),\quad \mathrm{x}\in(a_1,b_1) \qquad (8)$$
$$-(p_2(x)v_2(x)')' + q_2(x)v_2(\mathrm{x}) = \lambda v_2(\mathrm{x}),\quad \mathrm{x}\in(a_2,b_2) \qquad (9)$$
$$v_1(\mathrm{a}_1) = 0,\quad v_2(\mathrm{b}_2) = 0 \qquad (10)$$
$$p_1(b_1)v_1{}'(b_1) + \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1) = \beta_1 v_2(\mathrm{a}_2) \qquad (11)$$
$$-p_1(a_2)v_2{}'(a_2) + \alpha_1 v_2(\mathrm{a}_2) = \beta_2 v_1(\mathrm{b}_1) \qquad (12)$$

$\alpha_i > 0,\quad \beta_i > 0$ za $\mathrm{i}=1,2$

4.2. Неке особине сопствених вредности

Вратимо се на проблем (8)-(12).
Примећујемо да једначине (8) и (9) имају сличан облик.
Жице осцилују на исти начин, па се једина разлика у једначинама (8) и (9) односи на индексе променљивих које описују две дате путање. Природно се намеће потреба за неком врстом обједињавања ових једначина. Самим тим, потребно је дефинисати простор на ком ће се вршити даља разматрања.
Дефинишимо са L следећи производ простора:

$$\mathrm{L} = L_2(a_1, b_1) \times L_2(a_2, b_2)$$

и придружимо му норму:

$$(\mathrm{u}, \mathrm{v})_{\mathrm{L}} = \beta_2 (u_1, v_1)_{L_2(a_1,b_1)} + \beta_1 (u_2, v_2)_{L_2(a_2,b_2)}$$

$$\|v\|_L = (\mathrm{v}, \mathrm{v})_L^{1/2}$$

При том, скаларни производ $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle$ је дефинисан стандардно:

$$\langle \mathrm{u_i}, \mathrm{v_i} \rangle_{L_2(a_i,b_i)} = \int_{a_i}^{b_i} u_1 v_1 \, dx \,, \quad \mathrm{i}=1,2$$

Дефинишимо још један простор Собољевског типа:

$$H^1 = \{ \mathrm{v}=(v_1, v_2) \mid v_i \in H^1(a_i, b_i), \; v_1(a_1) = 0, \; v_1(b_2) = 0 \}$$

Који је снадбевен скаларним производом и нормом:

$$(\mathrm{u}, \mathrm{v})_{H^1} = \beta_2 (u_1, v_1)_{H^1(a_1,b_1)} + \beta_1 (u_2, v_2)_{H^1(a_2,b_2)}$$

$$\|v\|_{H^1} = (\mathrm{v}, \mathrm{v})_{H^1}^{1/2}$$

где је скаларни производ дефинисан са:

$$(u_i, v_i)_{H^1(a_i,b_i)} = (u_i, v_i)_{L_2(a_i,b_i)} + (u'_2, v'_2)_{L_2(a_2,b_2)}, \quad \mathrm{i} = 1,2$$

Наведимо битне карактеристике овако уведених простора H^1 и L :

- H^1 и L су Хилбертови простори
- H^1 је компактно потопљен у L

(поглавље 10.1.)

Наведимо две леме чија ће нам тврђења касније бити потребна у доказу Теореме о асимптотском понашању сопствених вредности.

Лема 1. Нека је задовољено следеће:

$$p_i(\mathrm{x}), q_i(\mathrm{x}) \in L_\infty(a_i, b_i) \quad \mathrm{i=1,2}$$

$$p_i(\mathrm{x}) \geq p_0 > 0, \quad q_i(\mathrm{x}) \geq 0,$$

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0 \quad \text{za} \quad \mathrm{i=1,2}$$

Тада је задатак (8)-(12) формално еквивалентан следећем варијационом проблему:
Наћи $(\lambda, \mathrm{v}) \in \mathrm{R} \times H^1$ такве да важи:

$$\mathrm{A}(\mathrm{v}, \omega) = \lambda(v, \omega)_L \quad \text{за свако } \omega \in H^1$$

где је

$$\mathrm{A(u,v)} = \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} p_1 u_1' v_1' \, dx + \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} p_2 u_2' v_2' \, dx + \beta_2 \, \alpha_1 u_1(b_1) v_1(b_1) +$$

$$\beta_1 \, \alpha_2 u_2(a_2) v_2(a_2) - \beta_1 \beta_2 [u_1(b_1) v_2(a_2) + u_2(a_2) v_1(b_1)] \qquad (¤)$$

Доказ ове леме је у [8].

Лема 2. Претпоставимо да је задовољено:

$$p_i(\mathrm{x}), q_i(\mathrm{x}) \in L_\infty(a_i, b_i)$$

$$p_i(\mathrm{x}) \geq p_0 > 0, \quad q_i(\mathrm{x}) \geq 0,$$

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0 \quad \text{za} \quad \mathrm{i=1,2}, \text{ као и}$$

$$\beta_1 \beta_2 \leq \alpha_1 \alpha_2$$

Билинеарна форма дефинисана са (¤) је симетрична и ограничена на $H^1 \times H^1$.
Шта више, постоји константа $c_0 > 0$ таква да је:

$$\mathrm{A(v,v)} \geq c_0 \, \|v\|_{H^1}^2$$

Доказ ове леме је такође у [8].
Претходне две леме нам омогућују да проблем (8)-(12) трансформишемо у генералну теорију апстрактног проблема сопствених вредности билинеарне форме у Хилбертовом простору.

За Теорију оператора је везано доста ставова који олакшавају рад са сопственим вредностима и сопственим векторима. Из тог разлога, циљ нам је да проблем (8)-(12) сада већ представљен као:

$$\mathrm{A}(\mathrm{v},\omega) = \lambda(v,\omega)_L$$

трансформишемо тако да будемо у могућности да искористимо елементе Теорије оператора.

Теорема: Проблем (8)-(12) има пребројив низ реалних сопствених вредности:

$$0< \lambda_1<\lambda_2 < \ldots \to \infty$$

Одговарајуће сопствене функције $v^n = (v_1^n, v_2^n)$ се могу одабрати тако да буду ортонормиране у (претходно дефинисано) простору L.
Оне чине базу за Хилбертове просторе H^1 i L.
λ_i могу да буду одређене коришћењем минималног принципа Релејевих коефицијената. Принцип се састоји у следећем:

Означимо са $$\mathrm{R}(\mathrm{v}) = \frac{\langle \mathrm{Av}, \mathrm{v}\rangle}{\|v\|^2}$$

λ_1 одређујемо као $$\lambda_1 = \min_{v\in H^1} R(v) = \mathrm{R}(v_1),$$

и, слично за идуће :

$$\lambda_n = \min_{\substack{v\in H^1 \\ A(v,v_i)=0 \\ i=1,2\ldots n}} R(v) = \mathrm{R}(v_n).$$

5. Структура спектра

Наставимо са решавањем и испитивањем особина задатка (8)-(12).
Сопствене вредности (детаљније о спектралној теорији в. у 10.3) имају широку примену у различитим областима. У овом поглављу показаћемо да се управо њиховом применом полазни задатак знатно олакшава.

Пре него што наведемо теорему која говори о асимптотском понашању сопствених вредности, вратимо се на сам почетак - I тип Мешовитог проблема за хомогену таласну једначину на правој са хомогеним граничним условима. Њега смо дефинисали на страни !!! и решење представили као:

$$u(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(D_1 \cos\frac{an\pi t}{l} + D_2 \sin\frac{an\pi t}{l}) \sin\frac{n\pi}{l}\mathrm{x}$$

где $\frac{n\pi}{l} = \sqrt{\lambda_n}$, $\mathrm{n}=1, 2, 3\ldots$ потиче из уврштавања граничних услова:

$$\mathrm{X}(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\mathrm{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\sqrt{\lambda}\,\mathrm{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\,\mathrm{l} = \mathrm{n}\pi \quad \mathrm{n}=1, 2, 3\ldots$$

Овако изражене сопствене вредности (релативно једноставног) мешовитог проблема већ упућују како ће се понашати сопствене вредности компликованијег задатка.
Приметимо и да сопствени вектор $\mathrm{v}=(v_1, v_2)$ претходно описаног простора L је дефинисан до на множење константом, па га можемо нормирати, тј. захтевати да

$$\|v\|_L = 1, \qquad \text{као и да је} \qquad v_1'(a_1) > 0$$

С обзиром да смо извршили потребне припреме, наведимо јако важну теорему о понашању сопствених вредности у чијем ће нам доказу бити потребна тврђења из претходног поглавља:

Теорема: Сопствене вредности λ_n проблема (8)-(12) се за $\mathrm{n} \to \infty$ асимптотски понашају по формули:

$$\sqrt{\lambda_n} = \mathrm{C}\cdot\mathrm{n} + \frac{O(n)}{n}$$

Доказ: Показује се да се асимптотско понашање сопствених вредности свих регуларних проблема (8)-(12) може изучавати на једноставнијем примеру.

Наиме, сопствене вредности претходног проблема се, уз извесне претпоставке, понашају исто као сопствене вредности следећег проблема са константним коефицијентима:

$$-v_1'' = \lambda v_1(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in (a_1, b_1)$$

$$-v_2'' = \lambda v_2(x), \quad x \in (a_2, b_2)$$

$$v_1(a_1) = 0, \quad v_2(b_2) = 0 \qquad (\blacksquare)$$

$$v_1'(b_1) + \alpha_1 v_1(b_1) = \beta_1 v_2(a_2)$$

$$-v_2'(a_2) + \alpha_1 v_2(a_2) = \beta_2 v_1(b_1)$$

Претпоставке које морају бити задовољене гласе:

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0 \quad \text{za} \quad i=1,2$$

$$\beta_1\beta_2 \le \alpha_1\alpha_2.$$

Желимо да изразимо сопствени вектор $v = (v_1(x), v_2(x))$.

Решење једначине: $-v_1'' = \lambda v_1(x)$,

са граничним условом: $v_1(a_1) = 0$

је изражено као:

$$v_1(x) = A \sin\mu(x - a_1)$$

где је $\mu^2 = \lambda$, док је A непознати параметар.

Аналогно,

$$v_2(x) = B \sin\mu(b_2 - x)$$

Коначно, користећи следеће граничне услове можемо наћи непознате параметре A и B:

$$v_1'(b_1) + \alpha_1 v_1(b_1) = \beta_1 v_2(a_2)$$

$$-v_2'(a_2) + \alpha_1 v_2(a_2) = \beta_2 v_1(b_1)$$

⇔

$$A\,[\,\mu\cos\mu(b_1 - a_1) + \alpha_1 \sin\mu(b_1 - a_1)] - B\,\beta_1 \sin\mu\,(b_2 - a_2) = 0$$

$$-A\,\beta_2 \sin\mu(b_1 - a_1) + B\,[\,\mu\cos\mu(b_2 - a_2) + \alpha_2 \sin\mu\,(b_2 - a_2)\,] = 0$$

Решавањем овог хомогеног систем једначина добијамо:

$$[\,\mu\cos\mu(b_1-a_1)+\alpha_1\sin\mu(b_1-a_1)]\,[\,\mu\cos\mu(b_2-a_2)+\alpha_2\sin\mu\,(b_2-a_2)\,]-$$

$$\beta_1\ \beta_2\sin\mu\,(b_2-a_2)\sin\mu(b_1-a_1)=0$$

Ова једнакост се алгебарским трансформација своди на следећу:

$$\mu^2+\mu[\,\alpha_1\tan\mu(b_1-a_1)+\alpha_2\tan\mu(b_2-a_2)]+$$

$$(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\tan\mu(b_1-a_1)\tan\mu(b_2-a_2)=0$$

Фамилија решења ове једначине ја дата изразом:

$$\mu_{1,2}=-\frac{1}{2}\left[\alpha_1\tan\mu\left(b_1-a_1\right)+\alpha_2\tan\mu(b_2-a_2)\right]$$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\{\,[\alpha_1\tan\mu(b_1-a_1)+\alpha_2\tan\mu(b_2-a_2)]^2-4(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\tan\mu(b_1-a_1)\tan\mu(b_2-a_2)\,\}}\,.$$

Израз испод корена се може свести на:

$$\mathbf{I}=\left[\alpha_1\tan\mu\left(b_1-a_1\right)-\alpha_2\tan\mu(b_2-a_2)\right]^2+4\beta_1\beta_2\tan\mu(b_1-a_1)\tan\mu(b_2-a_2)$$

Пошто није очигледно, проверимо под којим условима је претходни израз позитиван.

Решење $\mu_{1,2}$ је дато трансцендентном једначином, тако да, ради лакшег рачуна, уведимо смене:

$$t_1=\tan\mu(b_1-a_1),$$

$$t_2=\tan\mu(b_2-a_2),$$

$$S=\frac{t_1}{t_2}$$

Израз испод корена постаје:

$$\left[\alpha_1\tan\mu\left(b_1-a_1\right)+\alpha_2\tan\mu(b_2-a_2)\right]^2-4(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\tan\mu(b_1-a_1)\tan\mu(b_2-a_2)$$

$$=(\alpha_1t_1+\alpha_2t_2)^2-4(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\,t_1t_2$$

$$={t_2}^2[(\alpha_1S+\alpha_2)^2-4S(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\,]$$

$$={t_2}^2[\,{\alpha_1}^2S^2-2\alpha_1\alpha_2\,S+4\,S\,\beta_1\beta_2+{\alpha_2}^2]$$

Дакле, израз $\mathbf{I}$ је позитиван ако је дискриминанта претходне квадратне форме негативна, односно:

$$(-\alpha_1\alpha_2 + 2\,\beta_1\beta_2)^2 - \alpha_1{}^2\alpha_2{}^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\beta_1\beta_2\,(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2) \leq 0$$

а ово је, као претпоставка, задовољено.

Дошли смо до закључка да постоје две фамилије реалних решења претходне трансцендентне једначине која су дата изразима:

$$\mu_1 = -\tfrac{1}{2}\left[\alpha_1 \tan\mu\left(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1\right) + \alpha_2 \tan\mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2)\right] + \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathbf{I}}\,\cdot$$

$$\mu_2 = -\tfrac{1}{2}\left[\alpha_1 \tan\mu\left(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1\right) + \alpha_2 \tan\mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2)\right] - \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathbf{I}}\,\cdot$$

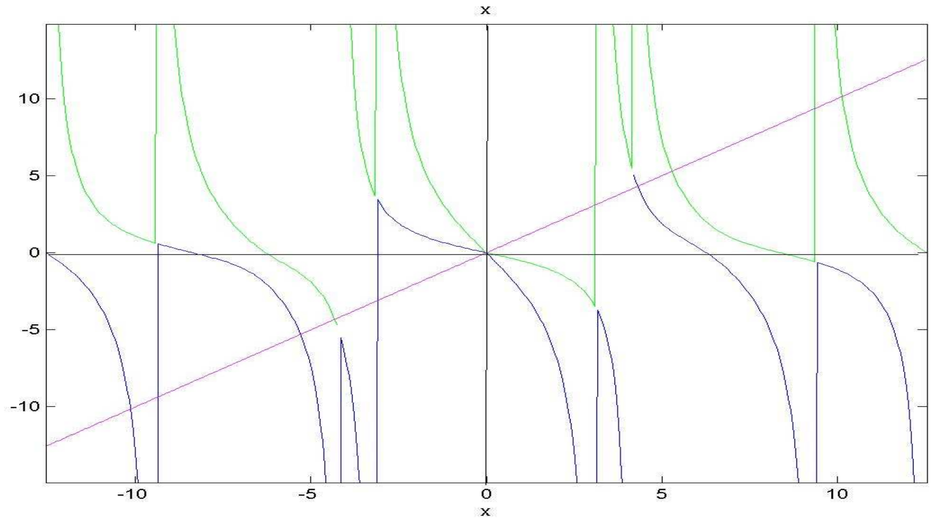
Узмимо сада конкретне вредности за a_i, b_i, α_i, β_i и представимо графички решење једначине:

$$\mu^2 + \mu[\,\alpha_1\tan\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1) + \alpha_2\tan\mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2)] +$$

$$(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)\tan\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1)\tan\mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2) = 0$$

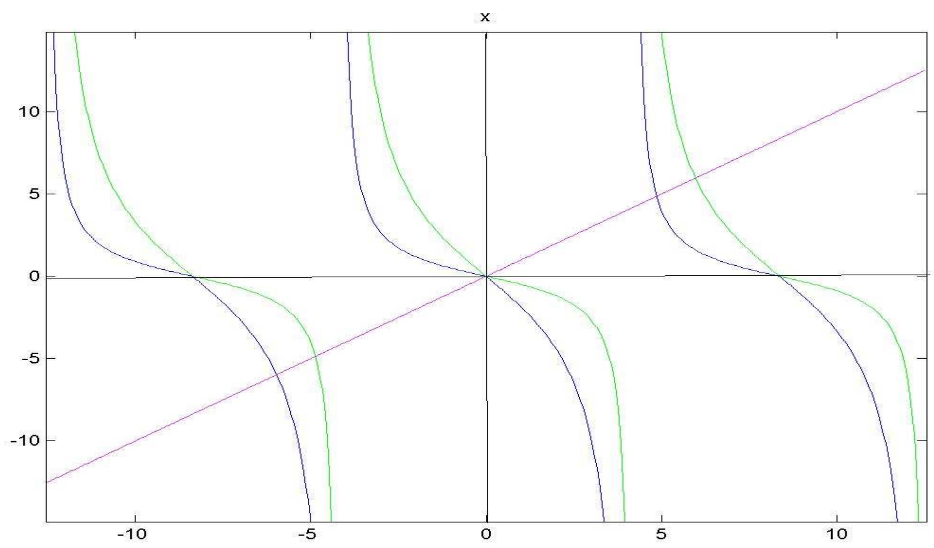
Пример 4.
Нека је $\mathrm{a}_1 = 0$, $\mathrm{b}_1 = \frac{3}{8}, \mathrm{a}_2 = \frac{4}{8},\ \mathrm{b}_2 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2$ дакле, посматрамо општи случај- жице су различите дужине а коефицијенти α_1, α_2, β_1, β_2 случајно одабрани.

Решење дате једначине се налази у пресеку праве $y(\mu)=\mu$ са претходно дефинисаним $\mu_1(\mu)$ и $\mu_2(\mu)$.

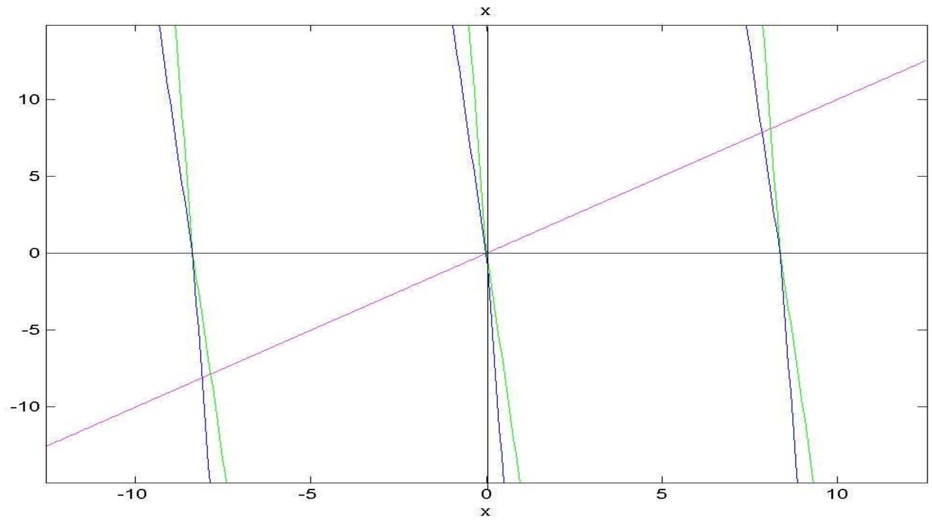


Претпоставимо сада да су жице исте дужине, и у складу са тим одаберимо:

$a_1 = 0,\ b_1 = \frac{3}{8}, a_2 = \frac{5}{8},\ b_2 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2$



Нека су и даље жице исте дужине, али уместо $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2$, узмимо $\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.4,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2$:



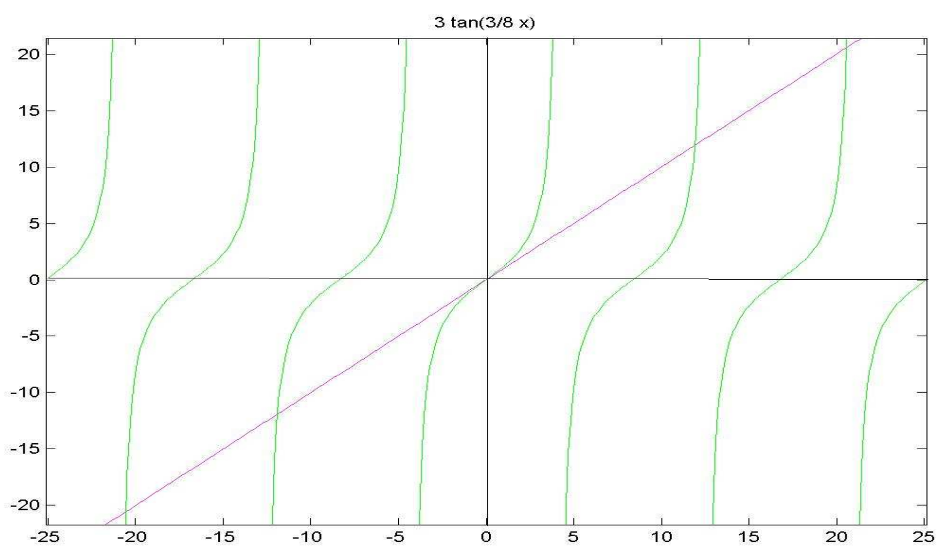
Пример 5.

Ако је $\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2$ имаћемо једноставнију фамилију решења изражену у облику:

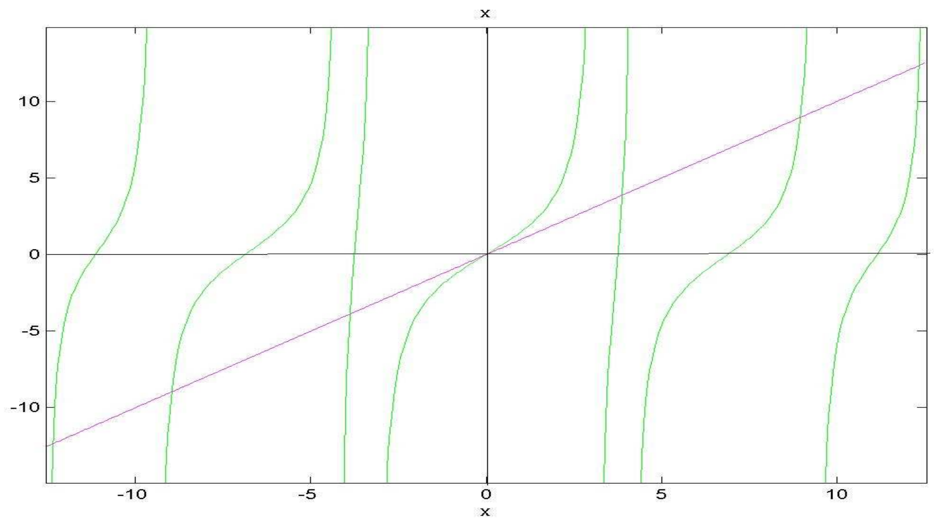
$$\mu = -\frac{1}{2}\left[\alpha_1 \tan \mu\left(b_1 - a_1\right) + \alpha_2 \tan \mu(b_2 - a_2)\right] \pm \frac{1}{2}\left|\alpha_1 \tan \mu\left(b_1 - a_1\right) + \alpha_2 \tan \mu(b_2 - a_2)\right|$$

$$= -\left[\alpha_1 \tan \mu\left(b_1 - a_1\right) + \alpha_2 \tan \mu(b_2 - a_2)\right]$$

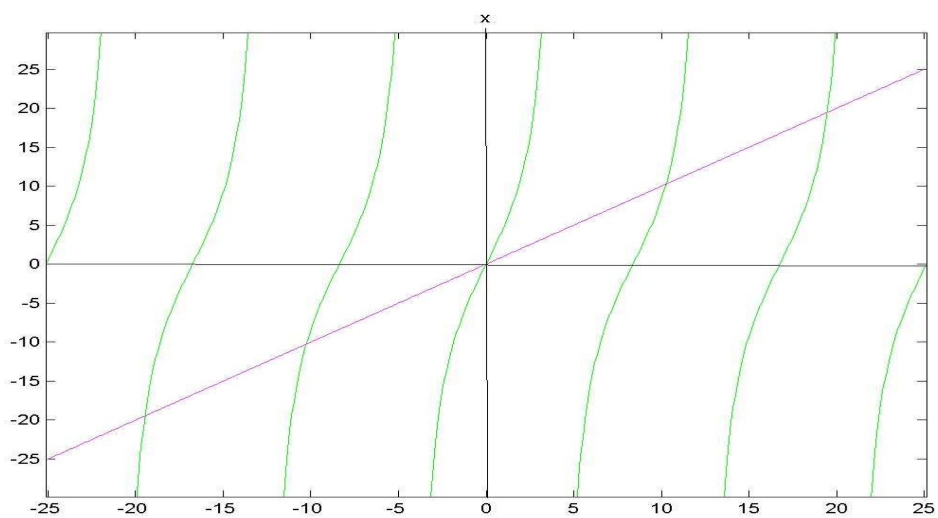
Представимо графички решење у случају $a_1 = 0$, $b_1 = \frac{3}{8}, a_2 = \frac{5}{8}$, $b_2 = 1, \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$:



У случају да су жице различитих дужина: $a_1 = 0$, $b_1 = \frac{3}{8}, a_2 = \frac{4}{8}$, $b_2 = 1, \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, имаћемо



Погледајмо сада како изгледа решење ако су дужине жица исте, али, у односу на први пример овог случаја, повећајмо коефицијенте $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$: $a_1 = 0$, $b_1 = \frac{3}{8}, a_2 = \frac{5}{8}$, $b_2 = 1, \alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 6$, $\beta_1 = 6$, $\beta_2 = 3$:



Дакле, можемо да закључимо да, што су коефицијенти $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ већи, то функција

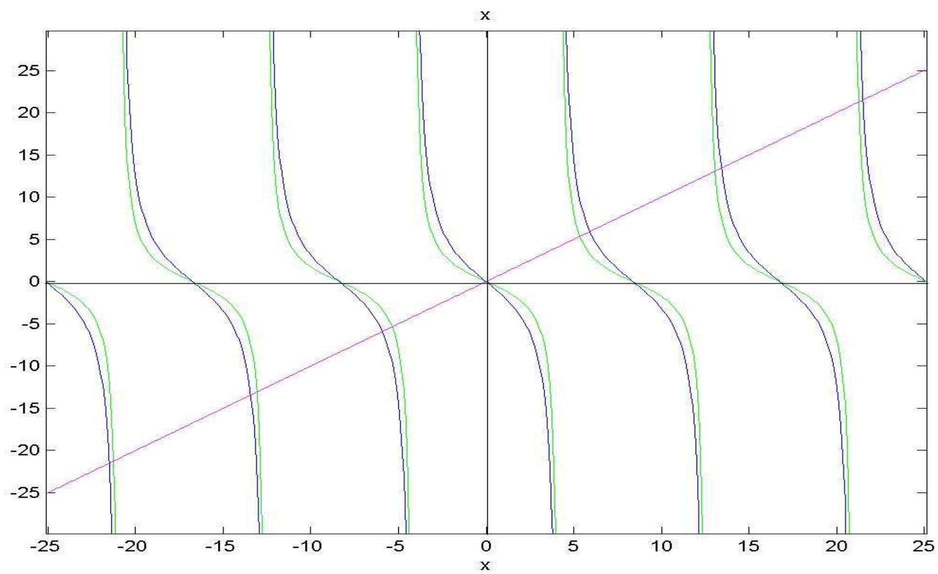
$$\mu_1(\mu) = [\alpha_1 \tan \mu(b_1 - a_1) + \alpha_2 \tan \mu(b_2 - a_2)]$$ брже расте.

Пример 6.

Ако је $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = d$, односно, ако су жице исте дужине, решење ће бити у облику:

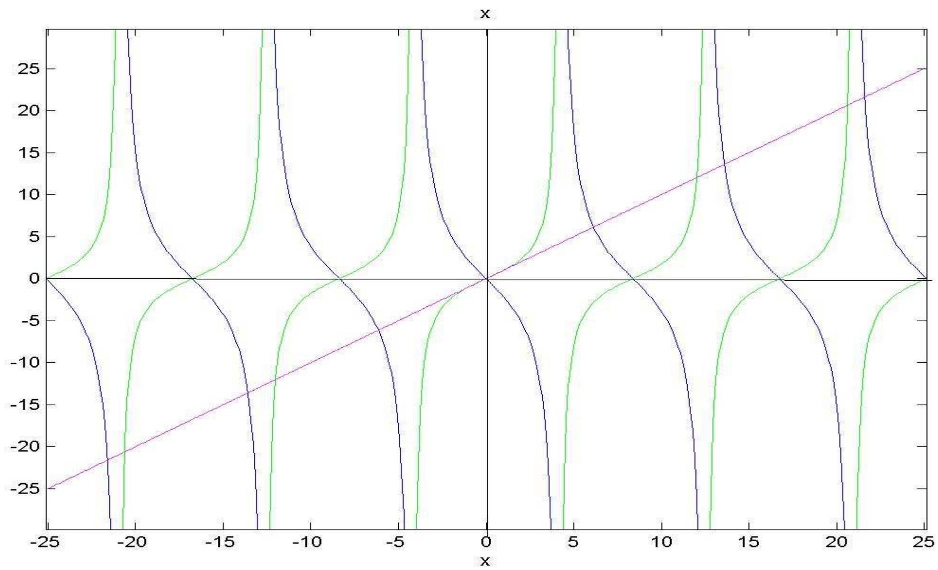
$$\mu_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\alpha_1 + \alpha_2 \mp \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\,\beta_1\beta_2}\,\right] \tan \mu d$$

За конкретно $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0.75$, $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = 0.375$, имаћемо две фамилије решења датих у пресеку праве $y(\mu)=\mu$ са претходно дефинисаним $\mu_1(\mu)$ и $\mu_2(\mu)$.

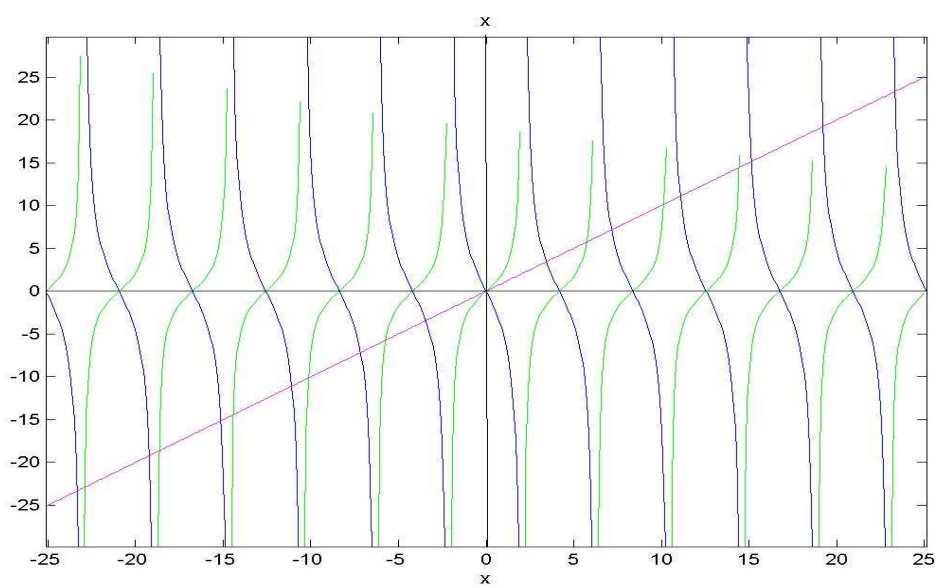


Нека је дужина жица и даље 0.375, али променимо коефицијенте: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 4$. Овим добијамо решења у облику:

$$\mu_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[3 \mp \sqrt{65}\,\right] \tan(0.375\mu)$$



На крају, проверимо како графички изгледа фамилија решења у случају да коефицијенти остану исти: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 4$, а за дужину жица уместо 0.375 узмимо 0.750 :



6. Алтернативне формулације

У претходном поглављу , задатку (8)-(12) смо приступили са аспекта спектралне теорије. Показало се да је Штурм-Лиувилов проблем лако решив као и да је понашање сопствених вредности датог проблема добро изучено и дато одговарајућом графичком интерпретацијом.

У овом поглављу циљ ће нам бити да истом проблему приступимо користећи Теорију дистрибуција. (Поглавље 10.4.)

Показује се да задатак :

$$-(p_1(x)v_1(x)')' + q_1(x)v_1(\mathrm{x}) = \lambda v_1(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x}\in(a_1, b_1) \qquad (8)$$

$$-(p_2(x)v_2(x)')' + q_2(x)v_2(\mathrm{x}) = \lambda v_2(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x}\in(a_2, b_2) \qquad (9)$$

$$v_1(\mathrm{a}_1) = 0, \;\; v_2(\mathrm{b}_2) = 0 \qquad (10)$$

$$p_1(b_1)v_1{}'(b_1) + \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1) = \beta_1 v_2(\mathrm{a}_2) \qquad (11)$$

$$-p_1(a_2)v_2{}'(a_2) + \alpha_1 v_2(\mathrm{a}_2) = \beta_2 v_1(\mathrm{b}_1) \qquad (12)$$

може бити трансормисан у аналогни који садржи Дираковy дистрибуцију.

Претпоставимо да је $p_1(b_1) = p_2(a_2)$. Овај услов се увек може задовољити погодном сменом променљивих, тако да даље разматрање вршимо уз ту претпоставку.
Подсетимо се да смо у четвртом поглављу увели простор собољевског типа:

$$H^1 = \{ v = (v_1, v_2) \mid v_i \in H^1(a_i, b_i), \; v_1(a_1) = 0, \; v_1(b_2) = 0\}$$

На тај начин смо успели да једначине (8)-(12) једноставније и краће запишемо.

Из истог разлога уводимо следеће функције:

$$v\,(\mathrm{x}) = \begin{cases} v_1(x + a_1) & x \in (0, \xi) \\ v_2(x - \xi + a_2) & x \in (\xi, l) \end{cases}$$

где је $\xi = b_1 - a_1$,

$l = b_2 - a_2 + b_1 - a_1 = b_2 - a_2 + \xi$, односно l представља збир дужина датих жица.

Сасвим аналогно, означимо.

$$\mathrm{p(x)}= \begin{cases} p_1(x+a_1) & x\in(0,\xi) \\ p_2(x-\xi+a_2) & x\in(\xi,l) \end{cases}$$

$$\mathrm{q(x)}= \begin{cases} q_1(x+a_1) & x\in(0,\xi) \\ q_2(x-\xi+a_2) & x\in(\xi,l) \end{cases}$$

Функције $\mathrm{p(x)}$ и $\mathrm{q(x)}$ су коректно дефинисане. На пример, када променљива x узима вредности из интервала $(0,\xi)$, тада $x+a_1\in(a_1,b_1)$. Овако уведеним ознакама $v_i,\ p_i$ и q_i заиста описују тачке одговарајуће (прве) жице.

На овај начин, задатак (8)-(12) смо свели на следећи:

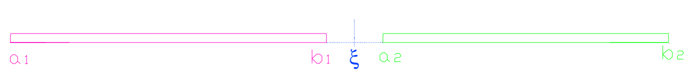
$$-\,(p(x)v(x)')' + \mathrm{q}(x)v(\mathrm{x}) = \lambda\mathrm{v(x)} \qquad \mathrm{x}\in(0,\xi)\cup(\xi,l)$$

$$v\,(0)=0, \quad v\,(l)=0$$

$$\mathrm{p}(\xi-0)v'(\xi-0)+\alpha_1 v(\xi-0) = \beta_1 v(\xi+0)$$

$$-\mathrm{p}(\xi+0)v'(\xi+0)+\alpha_2 v(\xi+0) = \beta_2 v(\xi-0)$$

Прва једнакост се односи на једнакости (8) и (9) при проласку променљиве x интервалима (0,ξ) и (ξ,l) респективно.
Дефиниција функције $\mathrm{v}(x)=v_1(x+a_1),\ x\in(0,\xi)$ и услов $v_1(\mathrm{a}_1)=0$ заправо дају $v\,(0)=0,$ и аналогно, $\mathrm{v}(l)=0.$
Последње две једнакости представљају другачији запис једнакости (11) и (12).
Уз уведену ознаку ξ која представља дужину прве жице и претпоставку да смо жице међусобно спојили, тачку b_1 представљамо као $\xi-0,$ а тачку a_2 као $\xi+0.$



У случају када функција $\mathrm{f(x)}$ има изоловане прекиде прве врсте у тачкама x_i $\ i=1{,}2\ldots$ тада се њен извод у смислу дистрибуција изражава као:

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \textstyle\sum_i [f]_{x_\mathrm{i}}\ \delta(x-x_\mathrm{i})$$

где је $\{f'(x)\}$ је класичан извод док је $[f]_x$ скок у тачки x:

$$[f]_x = f(x+0) - f(x-0)$$

Примењујући ову формулу на наш задатак где је једина тачка прекида $x_j = \xi$, добићемо:

$$(p(x)v'(x))' = [p(x)v'(x) + p(x)[v]_\xi\, \delta(x-\xi)]'$$

$$= \{(p(x)v'(x))'\} + (p(x)[v]_\xi\, \delta(x-\xi))'$$

$$= \{(p(x)v'(x))'\} + p(x)[v']_\xi\, \delta(x-\xi) + p(x)[v]_\xi \delta'(x-\xi)$$

Изразимо $[v]_\xi$ и $[v']_\xi$ преко $v(\xi \pm 0)$ и $v'(\xi \pm 0)$.

Уведимо следеће ознаке:

$$[v]_x = v(x+0) - v(x-0)$$

$$v(\xi-0) = m \text{ и } v(\xi+0) = n.$$

Из последње две једначине модификованог задатка (8)-(12):

$$p(\xi)v'(\xi-0) + \alpha_1 m = \beta_1 n$$

$$-p(\xi)v'(\xi+0) + \alpha_2 n = \beta_2 m$$

добијамо:

$$n = \frac{\alpha_1 p(\xi)v'(\xi+0) - \beta_2 p(\xi)v'(\xi-0)}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2},$$

$$m = \frac{\beta_1 p(\xi)v'(\xi+0) - \alpha_2 p(\xi)v'(\xi-0)}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2},$$

и коначно:

$$[v]_\xi = n - m = \frac{p(\xi)}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}(\,(\alpha_1-\beta_1)\, v'(\xi+0) + (\alpha_2-\beta_2)\, v'(\xi-0)\,)$$

Слично :

$$[pv']_\xi = p(\xi)[v']_\xi = -(\beta_1-\alpha_2)\, v(\xi+0) - (\beta_2-\alpha_1)v(\xi-0)$$

Када претходна разматрања уврстимо у полазну једначину:

$$-(p(x)v(x)')' + q(x)v(x) = \lambda v(x) \qquad x \in (0,\xi) \cup (\xi, l)$$

$$v(0)=0, \quad v(l)=0$$

добићемо следећи гранични проблем:

$$-p(\xi+0)v'(\xi+0)+\alpha_2 v(\xi+0) = \beta_2 v(\xi-0)$$

Дакле, коришћењем дистрибуција, задатак (8)-(12) смо успели да изразимо у једноставнијем облику:

$$-(p(x)v(x)')' + q(x)v(x) + ((\alpha_2-\beta_1)\, v(\xi+0)+(\alpha_1-\beta_2)v(\xi-0))\,\delta(x-\xi)$$

$$+\frac{p^2(x)}{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}(\,(\alpha_1-\beta_1)\,v'(\xi+0)+(\alpha_2-\beta_2)\,v'(\xi-0)\,)\,\delta'(x-\xi) = \lambda v(x), \qquad x\in(0,l)$$

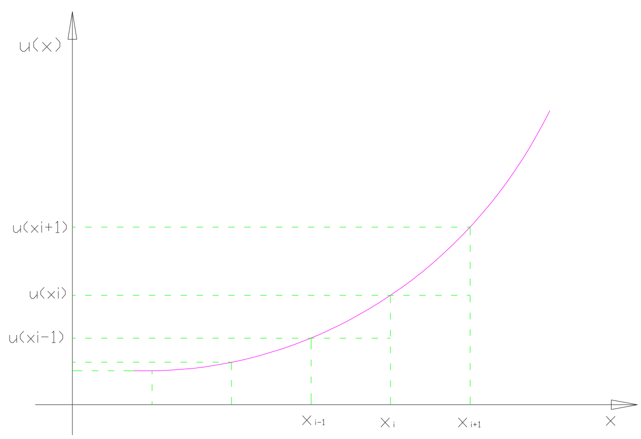
$$v(0)=0, \quad v(l)=0$$

7. Апроксимација помоћу коначних разлика

Метода коначних разлика се заснива на замени извода количницима коначних разлика. Идеја се састоји у томе да се одабере коначно много тачака сегмента на ком је дефинисана променљива x. Те тачке називамо чворови мреже. Уколико су чворови равномерно распоређени, мрежа је равномерна, иначе је неравномерна. Мрежа дефинисана кораком h, растојањем међу чворовима, је дата са:

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_{\mathrm{i}} \mid x_{\mathrm{i}} = ih,\ i = 0,1,,,n, \quad h = {}^{l}/_{n} \right\}$$

где је l дужина сегмента на ком је променљива x дефинисана.



На овако дефинисаној мрежи изводе апроксимирамо на следећи начин:

$$u_{x,i} = \frac{1}{h}[u(x_{i+1}) - u(x_i)],$$

$$u_{\bar{x},i} = \frac{1}{h}[u(x_i) - u(x_{i-1})],$$

$$u_{\bar{x}xi} = \frac{1}{h^2}[\, u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})] = \frac{1}{h}(\mathrm{u}_{\mathrm{x,i}} - \mathrm{u}_{\bar{\mathrm{x}},\mathrm{i}})$$

$$u'(x_i) = u_{x,i} + O(h) = u_{\bar{x},i} + O(h)$$

$$u''(x_i) = u_{\bar{x}xi} + O(h^2)$$

При томе, кад $h \to 0$ количници разлика теже ка одговарајућим изводима.

Посматрајмо сада задатак:

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0, l]$$

$$\alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0 \qquad \alpha_2 u'(l) + \beta_2 u(l) = 0$$

Он се, у складу са претходним ознакама, своди на диференцијску схему:

$$-u_{\bar{x}xi} + q_i u_i = f_i, \quad \text{i=1.... n-1}$$

$$\alpha_1 u_{x,0} + \beta_1 u_0 = 0$$

$$\alpha_2 u_{x,n} + \beta_2 u_n = 0$$

где је $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

Овај дискретан проблем се може написати општије, у облику операторске једначине:

$$L_h u = f_h$$

где је $L_h u_i = \frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + (2 + qh^2)u_i - u_{i+1})$,

или, у матричном облику:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2+q_1h^2 & -1 & \dots & \dots \\ -1 & 2+q_2h^2 & -1 & \dots \\ \dots\ \dots & & \dots & -1 \\ \dots\ \dots & & -1 & 2+q_{n-1}h^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Питања егзистенције, јединствености решења и конвергенције диференцијске схеме се морају анализирати посебно за сваку схему.

Апроксимација граничних услова има грешку $O(h)$ што успорава конвергенцију. Да бисмо граничне услове апроксимирали са грешком $O(h^2)$, применимо Тејлоров развој на:

$$u_{x,0} = \frac{1}{h}[u(h) - u(0)] = u'(0) + \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2) = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}u(0) + \frac{h}{2}[q(0)u(0) - f(0)] + O(h^2)$$

Последња једнакост је добијена из диференцијалне једначине и првог граничног услова. Када је другачије запишемо, добићемо:

$$-u_{x,0} + \left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{h}{2}q_0\right)u_0 = \frac{h}{2}f_0$$

$$u_{\bar{x},n} + \left(-\frac{\beta_2}{\alpha_2} + \frac{h}{2} q_n\right) u_n = \frac{h}{2} f_n$$

У операторском запису, претходна схема је дата са $L_h u = f_h$ где је:

$$L_h = \begin{cases} \frac{2}{h}\left(-u_{x,0} + \frac{\beta_1}{\alpha_1} u_0\right) + q_0 u_0 & i = 0 \\ -u_{\bar{x}xi} + q_i u_i & \mathrm{i = 1 \ldots n-1} \\ \frac{2}{h}\left(u_{\bar{x},n} - \frac{\beta_2}{\alpha_2} u_n\right) + q_n u_n & i = n \end{cases}$$

Сада желимо да претходно описани поступак применимо на задатак (8)-(12). Узмимо $\mathrm{N} \geq 2$ и уведимо равномерну мрежу:

$$\bar{\omega}_i = \left\{ x = x_{\mathrm{ij}} = a_i + j h_i,\ j = 0,1,,,N,\ h = {(b_i - a_i)}/{N} \right\}, \quad \omega_i = \bar{\omega}_i \cap (a_i, b_i)$$

У складу са стандардним ознакама, спектрални задатак (8)-(12) апроксимирамо следећом диференцијском схемом:

$$-(r_1 u_{1,\bar{x}})_{\dot{x}} + q_1 u_1 = \lambda^h u_1 \quad \mathrm{x} \in \omega_1$$

$$-(r_2 u_{2,\bar{x}})_{\dot{x}} + q_2 u_2 = \lambda^h u_2 \quad \mathrm{x} \in \omega_2$$

$$u_1(\mathrm{a}_1) = u_2(b_2) = 0$$

$$\frac{2}{h_1}\left[r_1(b_1) u_{1,\bar{x}}(b_1) + \alpha_1 u_1(b_1) - \beta_1 u_2(a_2)\right] + q_1(b_1) u_1(b_1) = \lambda^h u_1(b_1)$$

$$\frac{2}{h_2}\left[-r_1(a_2) u_{2,x}(a_2) + \alpha_2 u_2(a_2) - \beta_2 u_1(b_1)\right] + q_2(a_2) u_2(a_2) = \lambda^h u_2(a_2)$$

где смо са $r_i(x)$ означили $p_i\left(x - \frac{h_i}{2}\right)$, док последње две једнакости одговарају условима (11)-(12):

$$p_1(b_1) v_1'(b_1) + \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1) - \beta_1 v_2(\mathrm{a}_2) = 0$$

$$-p_1(a_2) v_2'(a_2) + \alpha_1 v_2(\mathrm{a}_2) - \beta_2 v_1(\mathrm{b}_1) = 0$$

8. Мултигрид метода

У овом поглављу ће бити објашњена употреба Мултигрид методе, као и решење полазног задатка (8)-(12).

Наведимо најпре основне елементе методе на примеру једнодимензионог граничног проблема:

$$-u''(x) + qu(x) = f(x) \qquad x \in (0,1), \quad q > 0$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

Коришћењем коначних разлика овај задатак може бити трансформисан у следећи::

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2+qh^2 & -1 & \cdots & \cdots \\ -1 & 2+qh^2 & -1 & \cdots \\ \cdots\ \cdots & & \cdots & -1 \\ \cdots\ \cdots & & -1 & 2+qh^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$v_0 = v_N = 0$$

Или:

$$Av = \mathrm{f}$$

$$v_0 = v_N = 0$$

где је А симетрична, позитивно дефинитна матрица димензије $(N-1) \times (N-1)$.

При томе v_i означимо апроксимацију вредности $u(x_i)$. Грешка e ове апроксимације је задата са:

$$e = u(x_i) - v_i$$

С обзиром да је $r = f - Av$,

$$Au = f$$

може бити изражено као:

$$A(v+e) = f$$
$$\Leftrightarrow \qquad Ae = f - Av$$

Последња једначина је позната као Резидуална једначина

$$Ae = r$$

Основни елементи Мултигрид методе

Дефиниција: V-циклус је схема описана на следећи начин:

- Извршити α_1 итерација на $A^h u^h = f^h$ на мрежи Ω^h са почетном вредношћу v^h
- Израчунати $r^h = f^h - A^h v^h$
  - Извршити α_2 итерација на $A^{2h} u^{2h} = f^{2h}$ на мрежи Ω^{2h} са почетном вредношћу v^{2h}
  - Израчунати $r^{2h} = f^{2h} - A^{2h} v^{2h}$
    - Извршити α_3 итерација на $A^{4h} u^{4h} = f^{4h}$ на мрежи Ω^{4h}почетном вредношћу v^{4h}
    - Израчунати $r^{4h} = f^{4h} - A^{4h} v^{4h}$

•

•

Решити $A^{Lh} u^{Lh} = f^{Lh}$

•

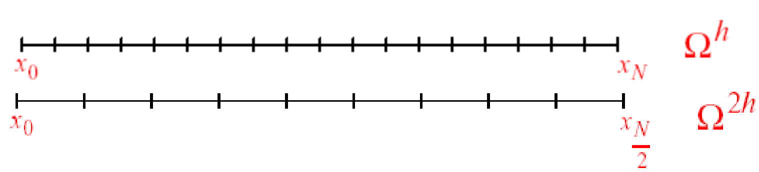
•

    - Модификовати $v^{4h} \leftarrow v^{4h} + I_{8h}^{4h} v^{8h}$
    - Извршити α_4 итерација на $A^{4h} u^{4h} = f^{4h}$ са почетном вредношћу v^{4h}
  - Модификовати $v^{2h} \leftarrow v^{2h} + I_{4h}^{2h} v^{4h}$
  - Извршити α_5 итерација на $A^{2h} u^{2h} = f^{2h}$ са почетном вредношћу v^{2h}
- Модификовати $v^h \leftarrow v^h + I_{2h}^{h} v^{2h}$
- Извршити α_6 итерација на $A^h u^h = f^h$ са почетном вредношћу v^h

Поред ове, постоји још неколико сличних шема као што су
W-циклус и F-циклус [7].
Уочавамо да су основне компоненте V-циклуса :
- итеративне методе
- методе за рестрикцију и продужење, тј. пресликавања

$$\Omega^h \to \Omega^{2h} \quad \text{и} \quad \Omega^{2h} \to \Omega^h$$

(више о овоме у поглављу 10.5.)



Ω^h означава мрежу са кораком (размаком између суседних чворова) h. Слично, Ω^{2h} означава мрежу са кораком 2h.

Потсетимо се прве једначине нашег задатка:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - q_1(x)u_1 + f_1(x,t) \qquad \mathrm{x}\in(a_1,b_1),\ \mathrm{t}>0 \qquad (1)$$

Проблеми који садрже временску променљиву се често називају 'тешки проблеми' јер се дискретизација не може урадити на стандардни начин. Једначине које садрже само први извод по времену (као што је параболички проблем) могу бити ефикасно решене применом Мултигрид методе.
Идеја се базира на коришћењу коначних разлика за дискретизацију просторне променљиве, док се временска променљива дискретизује помоћу имплицитне Ојлерове методе.
Генерално, у току је истраживање вишенивоских (multilevel) техника за решавање хиперболичких проблема.

Дакле, једначина (1) полазног проблема садржи други извод по времену па се не може дискретизовати само применом коначних разлика.

У четвртом поглављу задатак (1)-(7) је трансформисан у еквивалентан:

$$-(p_1(x)v_1(x)')' + q_1(x)v_1(\mathrm{x}) = \lambda v_1(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x}\in(a_1,b_1) \qquad (8)$$
$$-(p_2(x)v_2(x)')' + q_2(x)v_2(\mathrm{x}) = \lambda v_2(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x}\in(a_2,b_2) \qquad (9)$$
$$v_1(\mathrm{a}_1) = 0,\ \ v_2(\mathrm{b}_2) = 0 \qquad (10)$$
$$p_1(b_1)v_1'(b_1) + \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1) = \beta_1 v_2(\mathrm{a}_2) \qquad (11)$$
$$-p_1(a_2)v_2'(a_2) + \alpha_2 v_2(\mathrm{a}_2) = \beta_2 v_1(\mathrm{b}_1) \qquad (12)$$

$p_{\mathrm{i}}(x)$ и $q_1(x)$ описују физичка својства жице, и узимајући константе p_{i} и q_{i} уместо њих, једначина (8) може бити представљена као:

$$-(p_1 v_1(x)')' + q_1 v_1(\mathrm{x}) = \lambda v_1(\mathrm{x}), \qquad \mathrm{x}\in(a_1,b_1)$$

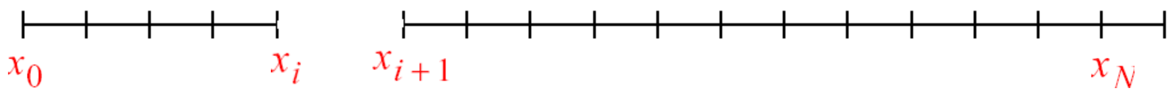
$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2p_1 + q_1h^2 & -p_1 & \cdots & \cdots \\ -p_1 & 2p_1 + q_1h^2 & -p_1 & \cdots \\ \cdots\ \ \cdots & & \cdots & -p_1 \\ \cdots\ \ \cdots & & -p_1 & 2p_1 + q_1h^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{N-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda v_1(\mathrm{x}) \\ \vdots \\ \lambda v_1(\mathrm{x})\end{pmatrix}$$

$$v_1(\mathrm{a}_1) = 0$$

Када је $p_1 = 1$, овај задатак је сличан примеру који смо користили приликом описивања основних елемената Мултигрид методе. Наиме, једина разлика је недостатак другог граничног услова.
Задати услов $v_2(\mathrm{b}_2) = 0$ се односи на другу жицу.

Узимајући у обзир ову чињеницу, једначине (8) и (9) нећемо више разматрати појединачно. Уместо тога, извршићемо дискретизацију целог интервала $(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_2)$ тако да је $\mathrm{a}_1 = \mathrm{x}_0,\ \mathrm{b}_2 = \mathrm{x}_\mathrm{N}$.
b_1 је тачка са интервала која означава крај прве жице којој одговара чвор мреже x_i. Слично, тачка a_2 ће бити замењена са $\mathrm{x}_{\mathrm{i}+1}$.



Дакле, Мултигрид методу ћемо применити за решавање проблема на неповезаној области.

Једначине (11) и (12) задају однос између вредности $v_1(\mathrm{b}_1)$ и $v_2(\mathrm{a}_2)$.
Ови услови доводе до малих промена у инициjалној матрици.Заправо, нова матрица садржи везу између вредности у $i-$том и $(i+1)-$вом чвору мреже што доводи до разлике у три реда иницијалне матрице (($i-1)-$вом, $i-$том, и $(i+1)-$вом). Ипак, ова модификација нема лош утицај на својства конвергенције.

Током рачуна, могуће је добити индефинитну матрицу па могу настати компликације приликом израчунавања сопствених вредности проблема.

У том случају, уместо Мултигрид методе, боље је применити класичне алгоритме као што су: Инверзна итерација, QR метода, итд.

Конвергенција Мултигрид методе зависи од избора и начина комбиновања његових основних елемената. Својства конвергенције се могу анализирати помоћу софистициране методе – Компактне Фуријеове анализе. Другим речима, добра комбинација изглађивача (smoother-a), матрице рестикције и продужења која доводи до мале грешке је уједно и гаранција да ће решење бити довољно добро.

У неким (идеалним) случајевима, Мултигрид може довести до директног решења.

Више о овој теми у [10].

Пример: Ако је број чворова мреже (N) 30, број претходних и накнадних итерација изглачавања 1, константе: p=1, q=0, тада добијамо следеће сопствене вредности $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_{30})$: и сопствене векторе

λ = (0.0110 0.0437 0.0979 0.1729 0.2679 0.3820 0.5137 0.6617 0.8244 1.0000 1.1865 1.3820 1.5842 1.7909 2.0000 2.2091 2.4158 2.6180 2.8135 3.0000 3.1756 3.3383 3.4863 3.6180 3.7321 3.8271 3.9021 3.9563 3.9890)

λ	**0.0110**	**0.0437**	**0.0979**	**0.1729**	**0.2679**	**0.3840**	**0.5137**
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
	94.1530	10.5214	-2.6073	3.8412	-1.1129	2.0066	-2.5118
	187.2745	20.0130	-4.7640	6.6534	-1.8016	2.9829	-3.5513
	278.3442	27.5457	-6.0972	7.6833	-1.8023	2.4284	-2.8875
	366.3643	32.3821	-6.3762	6.6546	-1.1147	0.6275	-0.7962
	450.3705	34.0488	-5.5526	3.8428	-0.0003	-1.4945	1.6250
	529.4423	32.3825	-3.7690	0.0013	1.1148	-2.8479	2.8236
	602.7134	27.5464	-1.3334	-3.8408	1.8047	-2.7375	2.5327
	669.3812	20.0138	1.3327	-6.6539	1.8055	-1.2203	0.8489
	728.7151	10.5220	3.7686	-7.6842	1.1162	0.9239	-1.2282
	780.0650	0.0001	5.5529	-6.6555	0.0001	2.5934	-2.3667
	822.8684	-10.5219	6.3770	-3.8432	-1.1166	2.9298	-2.2923
	856.6563	-20.0140	6.0984	-0.0011	-1.8072	1.7606	-0.9649
	881.0586	-27.5471	4.7650	3.8413	-1.8074	-0.3137	0.7493
	895.8078	-32.3837	2.6077	6.6544	-1.1173	-2.2272	1.7798
	900.7423	-34.0504	-0.0008	7.6841	-0.0006	-2.9967	1.8803
	895.8082	-32.3839	-2.6092	6.6545	1.1163	-2.2269	0.9218
	881.0594	-27.5473	-4.7664	3.8416	1.8061	-0.3142	-0.3846
	856.6576	-20.0142	-6.0994	-0.0008	1.8057	1.7591	-1.2408
	822.8700	-10.5217	-6.3774	-3.8425	1.1162	2.9295	-1.4495
	780.0669	0.0008	-5.5525	-6.6543	0.0008	2.5954	-0.8289
	728.7169	10.5228	-3.7679	-7.6832	-1.1147	0.9292	0.0701
	669.3827	20.0146	-1.3320	-6.6535	-1.8043	-1.2136	0.7207
	602.7147	27.5471	1.3340	-3.8412	-1.8050	-2.7329	0.9978
	529.4432	32.3831	3.7693	0.0002	-1.1164	-2.8484	0.6918
	450.3712	34.0494	5.5530	3.8417	-0.0010	-1.4999	0.1896
	366.3649	32.3828	6.3768	6.6540	1.1150	0.6196	-0.2426
	278.3447	27.5464	6.0980	7.6835	1.8048	2.4199	-0.5226
	187.2749	20.0137	4.7649	6.6542	1.8050	2.9763	-0.4631
	94.1532	10.5218	2.6079	3.8418	1.1156	2.0025	-0.3461
norm	3488.12	131.8733	24.8334	29.7586	7.3504	11.6013	8.6155

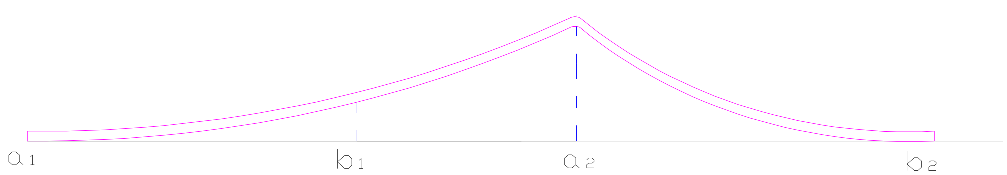
9. Физички смисао хиперболичког проблема у неповезаној области

У претходним параграфима проблем осцилације две танке жице смо свели на испитивање функције која описује положај дате тачке (било које) жице у датом тренутку.
У том циљу, уводили смо нове просторе, операторе на њима, користи смо спектралну теорију, теорију дистрибуција, диференцијске схеме...

Сада ћемо мало детаљније да размотримо физички смисао таласне једначине.
Подсетимо се да смо при извођењу ове једначине пре дељења са $\rho(x)$ добили облик:

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = T_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + F(x,t)$$

$\rho(x)$ је густина жице у тачки x, односно познат параметар којим смо делили обе стране једнакости.
Управо нам ова чињеница даје слободу да уопштимо задатак.
Идеја се састоји у томе да интервал (a_1, b_2) посматрамо као унију три дисјунктна подинтервала на којима ћемо посебно дефинисати услове који нам требају при опису. Наравно, поред жељених услова, имаћемо и неке пропратне да би задатак уопште био дефинисан.



Тачке прве жице одговарају сегменту (a_1, b_1), друге сегменту (a_2, b_2), а сегмент (b_1, a_2) у ком заправо и нема тачака жице, описујемо тако што ћемо на њему за густину жице узети јако мали број, односно $\rho(x) \approx 0$.
Ради једноставнијег рачуна уведимо:

$$\rho_1(x) = 1 \qquad x \in (a_1, b_1)$$

$$\rho_2(x) = 1 \qquad x \in (a_2, b_2)$$

$$\rho_L(x) = 0 \qquad x \in (b_1, a_2).$$

Математички модел који одговара овако постављеном проблему гласи:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) - q_i(x)u_i \qquad i=1,2 \tag{9.1}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_L(x)\frac{\partial u_L}{\partial x}\right) - q_L(x)u_L \tag{9.2}$$

Овако замишљен модел захтева (што се и са слике лако уочава), непрекидност функције $u(x,t)$ за $\forall\, x \in (a_1, b_2)$.

Непрекидност у тачкама b_1 и a_2 даје следеће једнакости:

$$\begin{aligned} u_1(b_1) &= u_L(b_1) \\ u_2(a_2) &= u_L(a_2) \end{aligned} \tag{9.3}$$

Такође, када размислимо о физичком смислу, и применимо законе термодинамике, закључујемо да сличне једнакости морају да важе и за флукс:

$$\begin{aligned} p_i(b_1)\frac{\partial u_i}{\partial x}(b_1,t) &= p_L(x)\frac{\partial u_L}{\partial x}(b_1,t) \\ p_L(a_2)\frac{\partial u_L}{\partial x}(a_2,t) &= p_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2,t) \end{aligned} \tag{9.4}$$

Једначина (9.2) је обична диференцијална једначина другог реда:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_L(x)\frac{\partial u_L}{\partial x}\right) - q_L(x)u_L$$

чије опште решење налазимо аналитички, у облику:

$$u_L(x) = C_1(t)v_1(x) + C_2(t)v_2(x) + \omega(x,t), \qquad x \in (b_1, a_2) \tag{9.5}$$

где су $v_1(x)$, $v_2(x)$ и $\omega(x,t)$ познате функције. Ако је $x=b_1$, и $x=a_2$ добићемо:

$$\begin{bmatrix} v_1(b_1) & v_2(b_1) \\ v_1(a_2) & v_2(a_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_L(b_1,t) - \omega(b_1,t) \\ u_L(a_2,t) - \omega(a_2,t) \end{bmatrix} \tag{9.6}$$

Решавањем овог система једначина, $C_1(t)$, $C_2(t)$ можемо изразити преко $u_L(b_1,t), \omega(b_1,t)$, $u_L(a_2,t)$, $\omega(a_2,t)$.

Уведимо следеће ознаке:

$$\Delta(b_1\, a_2) = \begin{vmatrix} v_1(b_1) & v_2(b_1) \\ v_1(a_2) & v_2(a_2) \end{vmatrix} = v_1(b_1)v_2(a_2) - v_1(a_2)\, v_2(b_1)$$

$$\Delta_1(\mathrm{r,s}) = \begin{vmatrix} p_1(r) & p_2(r) \\ \frac{dv_1}{dx}(s) & \frac{dv_2}{dx}(s) \end{vmatrix} = p_1(r)\,\frac{dv_2}{dx}(s) - p_2(r)\,\frac{dv_1}{dx}(s)$$

Изражавањем $\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,t)$ и $\frac{\partial u_\mathrm{L}}{\partial x}(a_2,t)$ користећи једнакости (9.5), (9.6) и (9.3), након краћег рачуна, добијамо следеће услове:

$$\begin{gathered} p_1(b_1)v_1{}'(b_1) + \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1) - \beta_1 v_2(\mathrm{a}_2) = 0 \\ -p_2(a_2)v_2{}'(a_2) + \alpha_2 v_2(\mathrm{a}_2) - \beta_2 v_1(\mathrm{b}_1) = 0 \end{gathered} \tag{9.7}$$

где је:

$$\alpha_1 = \frac{p_L(b_1)\Delta_1(a_2,b_1)}{\Delta(b_1,a_2)} \qquad \alpha_2 = \frac{p_L(a_2)\Delta_1(b_1a_2)}{\Delta(b_1,a_2)}$$

$$\beta_1 = \frac{p_L(b_1)\Delta_1(b_1,b_1)}{\Delta(b_1,a_2)} \qquad \beta_2 = b_1\frac{p_L(a_2)\Delta_1(a_2,a_2)}{\Delta(b_1,a_2)}$$

10. Дефиниције основних појмова

10.1. Елементи Функционалне анализе и Теорије оператора

Метрички простори

Дефиниција: (X, d) је **метрички простор** ако функција $d: X\times X \to [0,+\infty)$ задовољава следеће услове:

1. $d(x,y)= 0$ акко $x = y$
2. $d(x,y)= d(y,x)$
3. $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ – неједнакост троугла

Дефиниција: Овако дефинисану функцију *d* називамо **метриком** на X.

Дефиниција: Метрички простор (X, d) је **комплетан** ако у њему конвергира сваки Кошијев низ.

Дефиниција: Нека је (X, d) метрички простор. За $K\subset X$ кажемо да је **компактан** ако сваки низ у K има конвергентан подниз *у* K . Када је $K=X$, кажемо да је (X , d) **компактан метрички простор**.

Нормирани и Банахови простори

Дефиниција: Нека је X векторски простор над R или C .

Функција $\|\cdot\|: X \to [0,+\infty)$ са особинама:

1. $\|x\| = 0$ акко $x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

се назива **норма**, а $(X, \|\cdot\|)$ нормиран простор.

Дефиниција: Уколико је нормиран простор X комплетан у односу на метрику коју индукује његова норма, онда се он назива **Банахов простор.**
Дакле,нормиран простор може бити и комплетан у односу на метрику индуковану нормом, али не мора. Када јесте, и када је Банахов, добија се добар спој алгебарских и геометријских особина које дају изузетно значајне структуре.

Дефиниција: Нека су X и Y векторски простори над истим пољем.
Пресликавање $A : X\to Y$ са особинама:

1. $A(x+ y)= Ax+Ay$
2. $A(\lambda x)=\lambda Ax$, $x, y \in X$, λ - скалар,

се назива **линеарни оператор** (линеарно пресликавање).

Дефиниција: Нека су X и Y нормирани простори над истим пољем и $\mathrm{A}: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ линеарни оператор. A је **ограничен оператор** ако:

$$(\exists \mathrm{M} = \mathrm{const} < +\infty)\ \|\mathrm{Ax}\| \leq \mathrm{M}\ \|\mathrm{x}\|\ ,\ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{X}\ .$$

Дефиниција: Норма оператора A се дефинише на следећи начин:

$$\|\mathrm{A}\| = \inf\left\{\ \mathrm{M}:\ \|\mathrm{Ax}\| \leq \mathrm{M}\ \|\mathrm{x}\|\ ,\ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{X}\right\}.$$

Дефиниција: Нека су X и Y нормирани простори и $\mathrm{A} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$.
A је **непрекидан оператор** у тачки x_0 ако за свако $x_n \to x_0$ важи $\mathrm{A}(x_n) \to \mathrm{A}(x_0)$.

Хилбертови простори

Дефиниција: Нека је X векторски простор над пољем K ($\mathrm{K}=\mathrm{R}$ или $\mathrm{K}=\mathrm{C}$).
Нека је $\Phi: \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{K}$ пресликавање за које захтевамо да има следеће особине:
1. $\Phi\left(\alpha x + \beta\, y,\, z\right) = \alpha\, \Phi\left(x, z\right) + \beta\, \Phi\left(y, z\right)$ – линеарност по првој променљивој
2. $\Phi\left(x,\, \alpha y + \beta z\right) = \overline{\alpha}\, \Phi\left(x, y\right) + \overline{\beta}\, \Phi\left(x, z\right)$ – антилинеарност по другој променљивој

Овако дефинисано пресликавање називамо **сесквилинеарна форма.**
Ако је ово пресликавање линеарно и по другој променљивој, називамо га **билинеарна форма**.

Дефиниција: Сесквилинеарна форма.се назива **хермитска форма** уколико је:

$$\Phi(\mathrm{f}, \mathrm{g}) = \overline{\Phi(\mathrm{g}, \mathrm{f})}$$

Дефиниција: Ако је хермитска форма Φ таква да је $\Phi(\mathrm{f}, \mathrm{f}) > 0$ за свако $\mathrm{f} \neq 0$, $\mathrm{f} \in \mathrm{X}$, онда се она назива **скаларним производом.** Простор X на ком је уведен скаларни производ се назива унитарни простор.

Дефиниција: Хилбертовим простором се назива сваки Банахов простор чија је норма индукована неком сесквилинеарном формом са особином $\Phi(\mathrm{f}, \mathrm{f}) > 0$, за свако $\mathrm{f} \neq 0$.

Теорема: Ако је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на X, тада је са:

$$\|\mathrm{f}\| = \sqrt{\langle \mathrm{f}, \mathrm{f} \rangle}\quad ,\ \text{ за свако } f \in X,$$

дефинисана норма за коју се каже да је **индукована** скаларним производом тог простора.

Дефиниција: Адјунгован оператор оператора A је оператор A^* за који важи:

$$\langle \mathrm{Af}, \mathrm{g} \rangle = \langle \mathrm{f}, \mathrm{A}^*\mathrm{g} \rangle$$

При томе важи: $\|\mathrm{A}\| = \|\mathrm{A}^*\|$.
Билинеарну форму смо већ дефинисали као сесквилинеарно пресликавање које је линеарно и по другој променљивој. Сесквилинеарна пресликавања су јако значајна не само као уопштење скаларног производа, већ и због везе са операторима.

Теорема: Сваком ограниченом сесквилинеарном формом $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\Phi}$ су једнозначно одређени оператори A и B на Хилбертовом простору H такви да важи:

$$\langle \mathrm{f}, \mathrm{g} \rangle_{\Phi} = \langle \mathrm{Af}, \mathrm{g} \rangle = \langle \mathrm{f}, \mathrm{Bg} \rangle \qquad \text{за све } \mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathrm{H}$$

при томе је:

$$\|\mathrm{A}\| = \|\mathrm{B}\| = \|\Phi\|$$

L^p простори

Нека је дат скуп X , са $\mathfrak{m}$ обележимо σ-алгебру на скупу X, а са μ меру на датој σ-алгебри. Уређену тројку (X,$\mathfrak{m}$,μ) називамо простор са мером.

$$\mathcal{L}_p(X,\mu) = \{f : X \to C \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$$

$L_p(X,\mu)$ има сличну дефиницију. Разлка је у томе што $L_p(X,\mu)$ заправо представља количнички подскуп претходног, и то онај који је сечен по класама еквиваленције дефинисаним са: $\mathrm{f} \sim g \iff f = g$ μ скоро свуда.

Норма у овом простору ја дата са $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$

Приликом описивања Штурм-Лиувиловог оператора, поменут је простор $\mathcal{L}_{2,\omega}(0,l)$. Њега дефинишемо као:

$$\mathcal{L}_{2,\omega}(0,l) = \{\varphi \mid \int_0^l \varphi(x)^2 \omega(x)\, dx < \infty\}$$

Детаљније о овоме у [5].

10.2. Простори Собољева

Нека је Ω област у R^n. Просторе Собољева $\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)$ дефинисаћемо полазећи од простора $L_2(\Omega)$.

$L_2(\Omega)$ је Хилбертов простор са скаларним проиводом:

$$\langle f,g\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{dx}$$

и нормом:

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \langle f,f\rangle_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} = (\int_{\Omega}|\mathrm{f(x)}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Просторе Собољева дефинишемо на следећи начин:

$$\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega) = \{\, \mathrm{f(x)} \in L_2(\Omega)\colon D^{\alpha}f \in L_2(\Omega), \qquad \forall\alpha\colon |\alpha| \leq k \,\}$$

где је $\kappa \in N_0$.

При томе, изводи се схватају у смислу извода дистрибуција. Специјално, за $\kappa=0$, означимо:

$$\mathrm{H}^0(\Omega) = \mathrm{L}_2(\Omega)$$

$\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)$ је Хилбертов простор са скаларним производом:

$$\langle f,g\rangle_{\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha}f(x)\overline{D^{\alpha}g(x)}\,\mathrm{dx}$$

$$\|f\|_{\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega))} = (\sum_{|\alpha|\leq k}\|D^{\alpha}f\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)})^{1/2}$$

Наведимо неке особине ових простора:

1. Ако $\mathrm{f(x)} \in \mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)$ и $\Omega' \in \Omega$, тада $\mathrm{f(x)} \in \mathrm{H}^{\kappa}(\Omega')$

2. Ако $\mathrm{f(x)} \in \mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)$ и $\alpha \in C^{\kappa}(\bar{\Omega})$, тада $\alpha\mathrm{f(x)} \in \mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)$

3. Ако $\mathrm{f(x)} \in \mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)$ и f је финитна у Ω, тада функција

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(\mathrm{x}), & \mathrm{x} \in \Omega \\ 0, & \mathrm{x} \notin \Omega \end{cases}$$

припада простору $\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega')$ за свако $\Omega \in \Omega'$.

4. Нека је $\mathrm{y=y(x)}$ обострано једнозначно пресликавање области Ω на област Q и $\mathrm{x=x(y)}$ инверзно пресликавање. Ако за неко к ≥1 важи: $y_i(\mathrm{x}) \in C^k(\bar{Q})$, $x_i(\mathrm{y}) \in$

$C^k(\bar{Q})$ за $i=1,2....n.$ тада функција $F(x) \equiv f(y(x))$ припада простору $H^{\kappa}(\Omega)$ ако и само ако $f(y) \in H^{\kappa}(\Omega)$ при томе важи и:

$$C_1\|f\|_{H^{\kappa}(Q)} \leq \|F\|_{H^{\kappa}(\Omega)} \leq C_2\|f\|_{H^{\kappa}(Q)}$$

Више о овоме у [3].

10.3. Елементи апстрактне теорије сопствених вредности оператора

Нека је A линеарни оператор у n- димензионом простору C^n.
Наведимо неке карактеристике спектра оператора:

Дефиниција: Број $\lambda \in C$ се назива сопствена вредност оператора A ако једначина $Ax = \lambda x$ има нетривијално решење. Свако нетривијално решење те једначине називамо **сопствени вектор** који одговара сопственој вредности λ.

Све сопствене вредности оператора A су нуле његовог карактеристичног полинома, и за сваку вредност $\lambda \in C$ која није његова нула, оператор $A\text{-}\lambda I$ има инверзни који је такође ограничен. Скуп свих сопствених вредности оператора A називамо **спектром оператора** A, а комплемент спектра (у односу на комплексну раван) називамо скупом регуларних тачака оператора A.
Наведимо могућности које могу да наступе у случају оператора који делује на коначно димензионом простору:

- Једначина $Ax = \lambda x$ има нетривијална решења, тј. λ је сопствена вредност оператора A. У том сллучају $A\text{-}\lambda I$ нема инверзни.
- Постоји ограничен оператор $(A - \lambda I\ )^{-1}$ који је дефинисан на целом простору. У том случају λ је регуларна тачка.

Ако оператор A делује на бесконачно димензионом простору X, тада може да наступи и трећа могућност:

- Једначина $Ax = \lambda x$ има само тривијална решења, тј. $(A - \lambda I\ )^{-1}$ постоји али није дефинисан на целом простору.

Спектар оператора се може поделити на три дела: тачкасти спектар, непрекидни спектар и резидуални спектар.
Тачкасти или пунктуални спектар са састоји од свих карактеристичних вредности, тј. од свих комплексних бројева λ за које постоји нетривијално $x \in H$ такво да је

$$Ax = \lambda x$$

⇔

$$(A\text{-}\lambda I)x = 0$$

ово заправо значи да $A\text{-}\lambda I$ није инјективан.

Подсетимо се неких особина ортогоналности и ортонормираности.

Дефиниција: Кажемо да је x ортогонално на y, у ознаци $x \perp y$, уколико је $\langle x,y \rangle = 0$.

Дефиниција: Ортогонални комплемент скупа M, у ознаци $M^{\perp}$ је следећи скуп $\{ y \in X \mid \forall x \in M, \ \langle x,y \rangle = 0 \}$. За било који скуп M, $M^{\perp}$ је Хилбертов потпростор.

Дефиниција: Систем вектора $\{ e_i \mid i \in I \}$ је **ортогоналан** уколико $e_i \perp e_j$ за свако $i \neq j$. Исти систем је ортонормиран ако је ортогоналан и важи: $\| e_i \| = 1$ за свако $i \in I$, тј. $\langle e_i , e_i \rangle = \delta_{i\,j}$.

За рад су, наравно, најпогоднији простори чију базу чини ортонормиран систем вектора. Ортонормираност базе се може постићи Грам-Шмитовим поступком ортогонализације. Наиме, од сваког низа $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ линеарно независних вектора се може добити ортонормиран систем вектора $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ такав да важи:

$$\mathcal{Lin}\{e_1, e_2 \dots e_n\} = \mathcal{Lin}\{f_1, f_2 \dots f_n\} \text{ за свако } n \in N.$$

При том, вектори e_n се могу изразити експлицитно формулама:

$$e_n = \frac{\begin{vmatrix} \langle f_1, f_2 \rangle \dots\dots & \langle f_1, f_n \rangle & f_1 \\ \langle f_2, f_2 \rangle & \langle f_2, f_n \rangle & f_2 \\ \vdots & & \\ \langle f_n, f_2 \rangle & \langle f_n, f_n \rangle & f_n \end{vmatrix}}{\sqrt{\Gamma(f_1, f_2 \dots f_{n-1})}\sqrt{\Gamma(f_1, f_2 \dots f_n)}},$$

где је
$$\Gamma(f_1, f_2 \dots f_n) = \begin{vmatrix} \langle f_1, f_2 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle \dots & \langle f_1, f_n \rangle \\ \langle f_2, f_2 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle \dots & \langle f_2, f_n \rangle \\ \vdots & & \\ \langle f_n, f_2 \rangle & \langle f_n, f_3 \rangle & \langle f_n, f_n \rangle \end{vmatrix}$$

10.4. Дистрибуције – основни појмови

- Парцијалне изводе означавамо на следећи начин: $D^{\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \dots\dots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$
- $C_0^m(\Omega)$ означава простор функција које су непрекидне на Ω заједно са свим парцијалним изводима реда ≤ m, и које имају компактан носач у Ω

Дефиниција: За низ функција $\varphi_j \in C_0^{\infty} \to (R^n)$ кажемо да конвергира ка функцији $\varphi \in C_0^{\infty}(R^n)$ ако су испуњени следећи услови:
1. постоји компактан скуп $K \subset R^n$ такав да $\mathrm{supp}\varphi_j \subseteq K$ за свако j

2. за сваки мултииндекс α, низ $D^{\alpha}\varphi_{\mathrm{j}}$ униформно конвергира ка $D^{\alpha}\ \varphi$ на К кад $j \to \infty$.

- Простор $C_0^{\infty}(R^n)$ са овако дефинисаном конвергенцијом означавамо са $\mathrm{D}=\mathrm{D}(R^n)$

Дефиниција: Линеарне непрекидне функционале на скупу $\mathrm{D}(R^n)$ називамо дистрибуцијама или генералисаним финкцијама. Скуп дистрибуција оначавамо са $D' = D'(R^n)$. Вредност дистрибције $\mathrm{f} \in D'$ на основној функцији $\varphi \in \mathrm{D}$ означавамо са $\langle \mathrm{f}, \varphi \rangle$.
При томе $\langle \mathrm{f}, \varphi \rangle \in C$ и важе следећи услови:

- Линеарност

$$\langle \mathrm{f}, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda\langle \mathrm{f}, \varphi \rangle + \mu\langle \mathrm{f}, \psi \rangle$$

$$\forall \mu, \lambda \in C, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathrm{D}$$

- Непрекидност

$$\text{ако} \quad \varphi_k \to \varphi, \qquad \mathrm{k} \to \infty \ \text{у } \mathrm{D}, \text{ тада}$$

$$\langle \mathrm{f}, \ \varphi_k \rangle \to \langle \mathrm{f}, \varphi \rangle \quad \mathrm{k} \to \infty \ \text{ у } \mathrm{C}$$

Диракова дистрибуција δ је дефинисана на следећи начин:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathrm{D}$$

Више о овој теми у [3].

10.5. Мултигрид метода

Итеративне методе

Као итеративне методе могу бити коришћене различите варјанте Јакобијеве и Гаус- Зајделове методе.
У случају Јакобијеве методе, итеративна формула гласи:

$$v_i^{(new)} = \frac{1}{2}(v_{i-1}^{(old)} + v_{i+1}^{(old)} + h^2 f_i) \qquad 1 \le i \le N-1$$

Представљањем матрице A као

$$A = D - L - U$$

где су: D дијагонална матрица; L и U доња и горња троугаона матрица са нулама на дијагонали, респективно, добићемо:

$$Au = f$$
$$(D - L - U)u = f$$
$$Du = (L + U)u + f$$
$$u = D^{-1}(L + U)u + D^{-1}f$$

Уз ознаку: $R_j = D^{-1}(L + U)$, Јакобијева метода може бити представљена у матричном облику:

$$u = R_j u + D^{-1}f$$

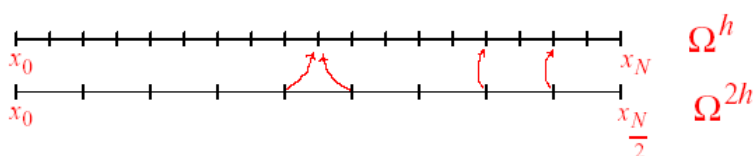
Продужење

Очигледно, потребна су нам пресликавања : $\Omega^h \to \Omega^{2h}$ и $\Omega^{2h} \to \Omega^h$

Дефиниција: Линеарна интерполација $(I_{2h}^h: \quad \Omega^{2h} \to \Omega^h)$

Ово пресликавање узима векторе крупне мреже и пресликава их у векторе фине мреже према формули:

$$\begin{cases} v_{2i}^h = v_i^{2h} \\ v_{2i+1}^h = \dfrac{1}{2}(v_i^{2h} + v_{i+1}^{2h}) \end{cases}$$



Другим речима, вредности у тачкама са крупне мреже су непромењене, док се вредности у тачкама које не припадају крупној мрежи рачунају као аритметичка средина суседних тачака са крупне мреже. На пример, за N=8 матрица интерполације је задата на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{2h} \\ v_2^{2h} \\ v_3^{2h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^h \\ v_2^h \\ v_3^h \\ v_4^h \\ v_5^h \\ v_6^h \\ v_7^h \end{bmatrix}$$

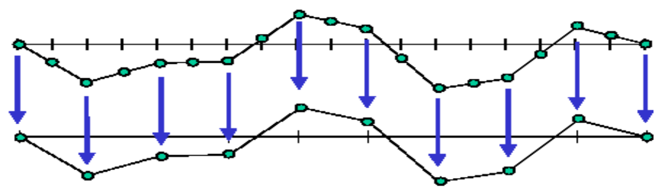
Рестрикција помоћу инјекција

Пресликавање са фине на крупнију мрежу је представљено:

$$I_h^{2h}: \quad \Omega^h \to \Omega^{2h}$$

$$I_h^{2h} v^h = v^{2h}$$

где $v_i^{2h} = v_{2i}^h$



I_h^{2h} је линеарни оператор, и слично као у случају I_{2h}^h, може се задати одговарајући матрични облик :

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^h \\ v_2^h \\ v_3^h \\ v_4^h \\ v_5^h \\ v_6^h \\ v_7^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^{2h} \\ v_2^{2h} \\ v_3^{2h} \end{bmatrix}$$

Осим линеарне интерполације, за пресликавање између мрежа се може одабрати константна интерполација, тривијална интерполација, итд.

Конструисање матрице A^{2h}

Према принципу Галеркина [7], оператор крупне мреже A^{2h} је дефинисан као:

$$A^{2h} = I_h^{2h} A^h I_{2h}^h$$

Више о овој теми у [6] и [7].

Литература:

[1] S. Gegovska-Zajkova, Boško S. Jovanović, Irena M. Jovanović: *On the Numerical soluton of a transmission eigenvalue problem*, Lect. Notes Comput. Sci. 5434 (2009), 289-296.

[2] Julka Knežević-Miljanović, Svetlana Janković, Jelena Manojlović, Vladimir Jovanović: *Parcijalne diferencijalne jednačine - teorija i zadaci*, Univerzitetska štampa, Beograd, (2000).

[3] Boško Jovanović: *Parcijalne jednačine*, Matematički fakultet, Beograd, (1999).

[4] Boško Jovanović, Desanka Radunović: *Numerička analiza*, Matematički fakultet, Beograd, (2003).

[5] George Bachman, Lawrence Narici: *Functional Analysis*, Polytechnic institute of Brooklyn, New York, (1966)

[6] William L. Briggs, Van Emden Henson, Steve F. McCormick: *A Multigrid tutorial*, University of Colorado, SIAM, Philadelphia, (2000)

[7] Urlich Trottemberg, Cornelis Oosterlee, Anton Schuller: *Multigrid*, Acad. Press, San Diego, (2001)

[8] B.S. Jovanović, L.G. Vulkov: *Numerical solution of a hiperbolic transmission problem*, Comput. Methods Appl. Math. 8(4) (2008), 374-385.

[9] B.S. Jovanović, L.G. Vulkov: *Formulation and analysis of parabolic interface problems on disjoint intervals*, submited.

[10] Thomas K. Huckle*: Compact Fourier Analysis for Designing Multigrid Methods*, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 31,(1), 644-666 (2008)