UNIVERZITET U BEOGRADU

Matematički fakultet

Tatjana Davidović Gustard

PLATONOVA TELA U PRIRODI

Master rad

Mentor
prof. Dr Zoran Lučić

Beograd, 2010. godine

Sadržaj

Predgovor

Ovaj rad razmatra pravilne poliedre, odnosno pet Platonovih tela u prirodi. Ljudi su se od davnina bavili njihovim proučavanjima i ovog puta sam ja pokušala da iz svog ugla prikažem neke zanimljivosti vezane za njih.
Platon je izuzetno cenio matematiku i stiče se utisak da je hteo da je ugradi i u filozofiju. Matematika je bila neophodna za bavljenje dijalektikom, osnovnom filozofskom disciplinom kojom se dolazilo do istine, do suštine, do lepote i dobrote.
Sav sklad, harmonija i duhovna lepota, kojima je težio Platon, nalazi svoje početke u simetriji i jednakosti pravilnih poliedara koje ću poimenično navesti u daljem radu.

Za izradu crteža sam koristila program GCLC koji je osmislio Predrag Janičić sa Matematičkog fakulteta u Beogradu. Veći broj slika je samostalno fotografisano po muzejima u Engleskoj. Sam rad ima pet poglavlja.
Prvo poglavlje počinje objašnjenjem i definicijom pravilnih poliedara i nastavlja se istorijatom spomenutih tela. Ovde sam se dotakla antičkog perioda, spominjujući Platona i njegovo delo *Timaj*, kao i naučnike iz perioda renesanse.
U drugom delu sam se bavila karakteristikama Platonovih tela i predstavila dokaz da su ona jedini pravilni poliedri. Na kraju ovog poglavlja su konstrukcije tela u spomenutom GCLC programu.
Treće poglavlje se odnosi na XIII knjigu Euklidovih *Elemenata* i prikazima konstrukcija svih pet tela kao što je navedeno u delu. Naveden je i kratak osvrt na 14. i 15. knjigu Euklidovih *Elemenata*.
U četvrtom poglavlju su navedena neka od svojstva Platonovih tela. Spomenut je nezaobilazni zlatni presek i njegova veza sa telima bez njegovog detaljnog objašnjenja. Zatim, simetrije pravilnih poliedara, dualnost kao i njihov uzajamni odnos.
Peto poglavlje govori o Platonovim telima oko nas, odnosno u prirodi. Navedeni su primeri u životinjskom svetu, u hemiji primeri sintetizovanih ugljovodonika, alotrop-

skih modifikacija kao i virusa. Napravljen je i osvrt na istraživački rad Dr Martina Čaplina o Platonovim telima i njihovoj vezi sa hidratacijom kroz ćelijsku membranu. Dalje, u ovom delu rada, su navedeni primeri pravilnih poliedara u mineralogiji i na kraju, primeri u umetnosti, arhitekturi i modernom dizajnu.
U okviru ovog rada je korišćena odgovarajuća literatura koja je navedena na samom kraju kao i zaključak.
Namera pri pisanju ove teme mi je bila da ukažem na neraskidivu vezu između Platonovih tela tj. pravilnih poliedara i prirode kojom smo okruženi.

Uvod

Geometrijske objekte koje Euklid[1] u svojim *Elementima* naziva prostornim figurama mi danas nazivamo **poliedrima**. Poliedar je prostorni geometrijski lik čiji se rub sastoji iz povezanog skupa poligonskih površi tako raspoređenih da je svaka ivica jedne površi istovremeno ivica tačno još jedne površi, a površi sa zajedničkim temenom pripadaju stranama tačno jedne rogljaste površi. Poligonske površi zovemo *pljosnima* tog poliedra, a ivice i temena pljosni zovemo *ivicama i temenima* poliedra. Skup svih poligonskih površi na rubu poliedra zovemo *poliedarskom površi*.

Poliedre koji zadovoljavaju sledeće uslove:

1. sve pljosni su pravilne i međusobno podudarne poligonske površi
2. sve rogljaste površi su pravilne i međusobno podudarne oko svakog temena u istom broju
3. sve pljosni su konveksne i svi rogljevi su konveksni

zovemo **pravilnim poliedrima.**[11]

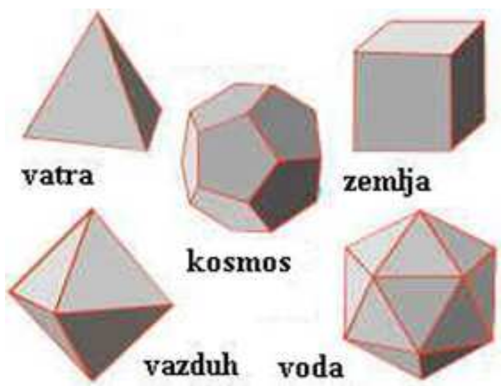
Pravilni tetraedar, pravilni heksaedar (kocka), pravilni oktaedar, pravilni ikosaedar i pravilan dodekaedar su jedini pravilni poliedri poznati još kao i Platonova tela. Njihova lepota proizilazi iz simetrija i jednakosti njihovih odnosa.

[1] Euklid (III vek pre n.e), verovatno učenik Platonove Akademije, napisao je *Elemente* oko 300.godine pre n.e. *Elementi* sadrže 13 knjiga i predstavlja sistematsko izlaganje matematike putem dedukcije i vekovima je smatranao najsavršenijim matematičkim delom.

Glava 1

Istorijat

U antičko vreme smatralo se da tetraedar predstavlja vatru, oktaedar vazduh, heksaedar zemlju, ikosaedar vodu a da dodekaedar simbolizuje harmoniju celog kosmosa.



Slika 1.1: Pravilni poliedri

Teetet (oko 415-369, pre n.e.), učenik Platonove Akademije, prvi je pisao o Platonovim telima. Bavio se pravilnim poliedrima ispitujući njihova zajednička svojstva. Smatra se da je on uveo pojam pravilnog poliedra u geometriju. Autor je skoro svih teorema u XIII knjizi *Elemenata* koju je napisao Euklid.

Platon (oko 427-347, pre n.e.) opisuje pravilne poliedre oslanjajući se na geometrijska istraživanja svog učenika Teeteta. U svom delu *Timaj* pominje pravilne poliedre i to je najstariji sačuvani spis.
Pravilne poliedre Platon pominje u *Timaju* na sledeći način:

Nastanak tetraedra - prvog prostornog oblika

,, ... Počećemo od prvog oblika (tetraedar), čiji je sastav najednostavniji i najmanji. Njegov element je trougao čija je hipotenuza dvostruko duža od kraće stranice (katete).

Slika 1.2: Levo: Rafal "Atinska škola", freska iz Vatikana; Desno: uveličani deo koji prikazuje Platona sa delom *Timaj* i Aristotela sa *Etikom*

Ako se dva takva trougla spoje svojim hipotenuzama (tako da one predstavljaju dijagonalu dobijenog četvorougla), i ako se sve to tri puta ponovi, tako da se i dijagonale i kraće stranice (prvobitnih trouglova) oslanjaju na istu (tačku), kao na centar, dobija se jedan jednakostranični trougao, koji postaje od ovih šest (manjih trouglova). A takva četiri jednakostranična trougla sastave se tako da po tri njihova površinska ugla čine jedan čvrsti ugao (rogalj), čija veličina neposredno prevazilazi veličinu najvećeg tupog površinskog ugla (tj.180°). Pošto su dovršena četiri takva roglja, sastavljen je prvi prostorni oblik, koji može deliti na jednake i slične delove svaku sferu (u koju je upisan)."[16]

Nastanak drugog prostornog oblika - oktaedra

,,Drugi je oblik od istih trouglova: osam jednakostraničnih trouglova je sastavljeno tako da po četiri površinska ugla obrazuju jedan prostorni. Kada nastane šest takvih uglova, dovršeno je telo drugog oblika."[16]

Treći prostorni oblik - ikosaedar

,,Treći oblik je spojen od stodvadeset osnovnih trouglova i dvanaest prostornih uglova, dok on ima dvadest jednakostraničnih trouglova za osnove."[16]

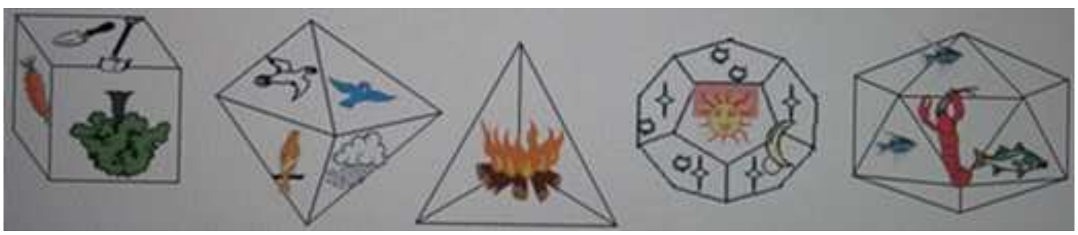
Nastanak heksaedra (kocke)

,,I pošto su rođena ova tela, jedan od elemenata (osnovnih trouglova) je završio svoje, dok je ravnokraki trougao rodio prirodu četvrtog oblika. On je sastavljen tako što su po četiri takva trougla, sa svojim pravim uglovima, spojena u centru, obrazujući tako jednakostranični četvorougao (kvadrat). Šest kvadrata spojeno je tako da obrazuju osam prostornih uglova, svaki ograničen sa po tri ravna ugla. Oblik tako sastavljenog tela je kocka, koja ima šest četvorouglih ravnostranih osnova."[16]

Dodekaedar, koji ima dvanaest pljosni koje su pravilni petouglovi i ne mogu se

konstruisati ni od jednog od pomenuta dva trougla, Platon ne opisuje u *Timaju*.
,,Postoji još jedan, peti sastav: Bog ga je upotrebio za svemir, oslikavajući na njemu likove (Zodijaka).“[16]
Smatra se da je dodekaedar izabran za svemir, jer se po svom obliku najviše približava lopti.

Interesantno je da je, oko 2000 godina kasnije, Johan Kepler[1] fasciniran pravilnim poliedrima, tj.5 Platonovim telima, razvio svoju teoriju o njima. Kepler prihvata korespodenciju 5 tela i 4 elementa postavljenu u antičko vreme i prikazuje ih crtežima vatre na tetraedru, oblacima i pticama na oktaedru, drvetom i alatom na heksaedru, ribama i morskim rakom na ikosaedru, mesecom, sunce i zvezdama na dodekaedru.



Slika 1.3: Keplerov prikaz pravilnih poliedara

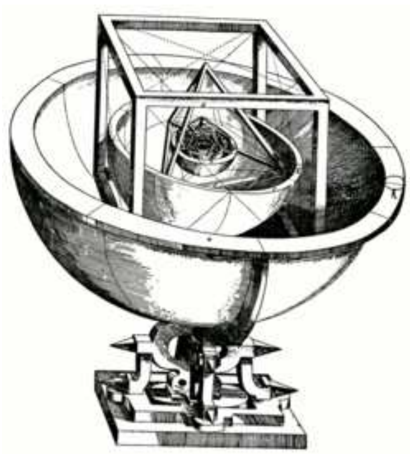
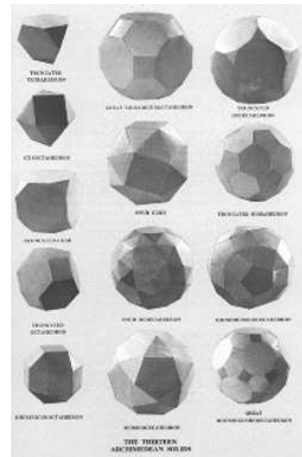
Kepler je u svom delu *Mysterium Cosmographicum* (1596.) napisao detaljnu studiju o pravilnim telima.

U delu *Harmonices Mundi* (1619.) je pisao o pokrivanju ravni tesalacijom pravilnih poligona. Bavio se Arhimedovim telima[2] i pravilnim zvezdastim poliedrima. Veoma dugo ga je interesovala teorija pravilnih poliedara i bila je usko povezana sa njegovim istraživanjima zakona kretanja planeta u svemiru, sa njegovom koncepcijom "harmonije svemira".

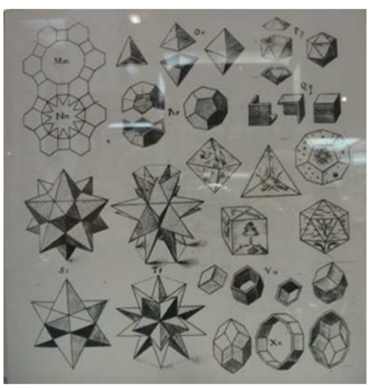
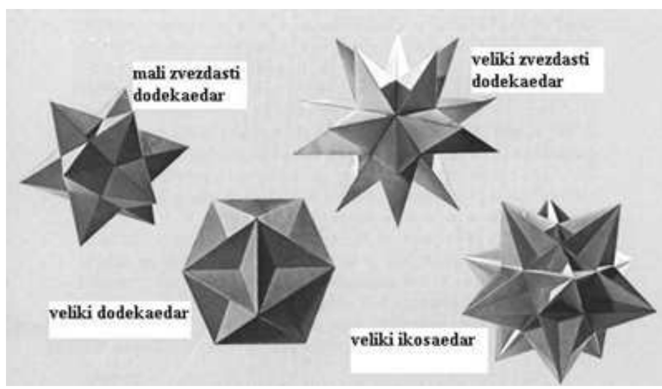
Pokušao je da redukuje rastojanje planete Sunčevog sistema na metričke osobine Platonovih tela. Predstavio je model solarnog sistema u kojem je pet Platonovih tela postavljeno jedno unutar drugog i odvojeno serijama upisanih i opisanih sfera. Šest sfera je u korespodenciji sa jednom od planeta (Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter i Saturn). Tela su poređana od same unutrašnjosti redom: oktaedrom, zatim ikosaedrom, dodekaedrom, tetraedrom i kao poslednji je prikazan heksaedar. Na kraju, ova njegova ideja je bila odbačena. Kepler u to vreme nije znao ništa o Uranu, Neptunu i Plutonu

[1]Johanes Kepler (1571-1630)- nemački naučnik, matematičar, fizičar, astronom.
[2]Polupravilni poliedri, tela čije su pljosni pravilne a rogljevi podudarni.

koji su otkriveni kasnije. Kao rezultat njegovih istraživanja imamo otkrića Keplerovih tela [3], saznanje da orbite planeta nisu kružne već eliptične, tri zakona o kretanju planeta koji su temelji nove astronomije.

Slika 1.4: Levo: Keplerov model solarnog sistema, Britanski muzej, London. Desno: Arhimedova tela, Wenniger Magnus J.1966 NCTM

Slika 1.5: Levo: prikaz iz dela *Harmonica Mundi*, Muzej Nauke, London. Desno: Kepler-Poinsotova tela, Wenniger Magnus J.1966 NCTM

Za vreme renesanse, umetnici su postali zainteresovani za perspektivu i poliedri su postali izazov kako za umetnike tako i za crtače. Postoje neki lepi primerci intarzije[4] ovog perioda koji uključuju poliedre. Neke od najlepših su od fra Đovanija de Verone

[3] Kepler-Poisont-ova tela su pravilni poliedri sa podudarnim rogljevima bez uslova konveksnosti. Ima ih četiri: mali zvezdasti dodekaedar, veliki zvezdasti dodekaedar, veliki dodekaedar i veliki ikosaedar. Osobina im je da ravni kojima pripadaju njihove pljosni prodiru jedna kroz drugu.

[4] Mozaik napravljen od parčića drveta. Izvanredne umetničke forme nastale krajem 15.veka i početkom 16.veka. To su ravne ploče isprepletene tehnikom različitih boja, tonova i teksture tako da čine jednu celinu.

(1457-1525).

Na slici su pravilni poliedri zajedno sa Arhimedovim telima.


Slika 1.6: Ikosaedar (levo) i Kocka sa jednakoivičnim piramidama (desno)

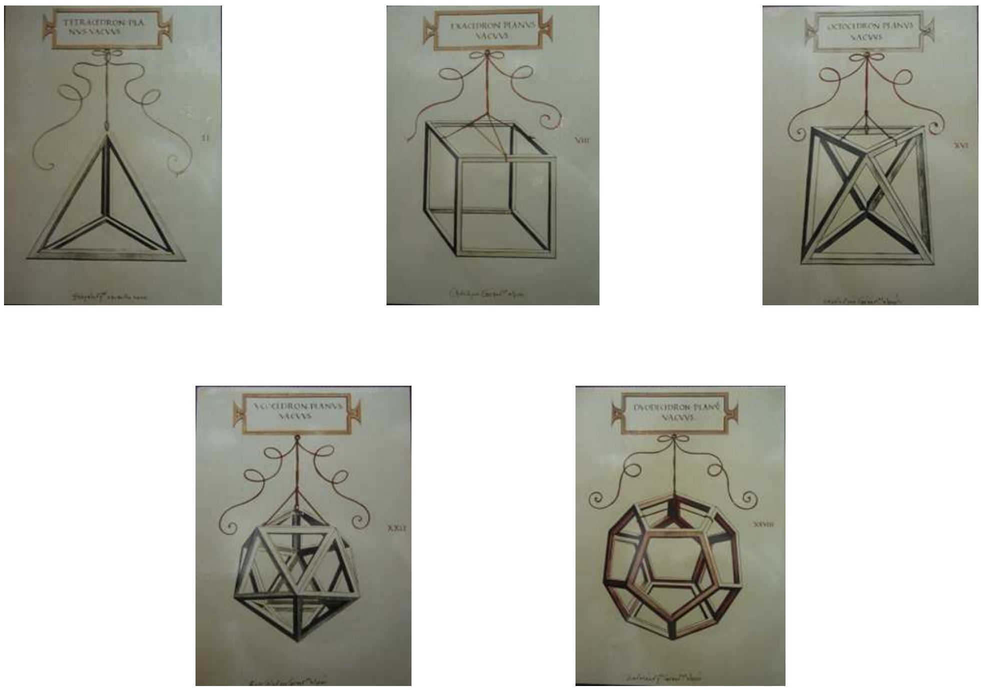
Slika 1.7: Đakopo de Barberi: Luka Pačoli 1499, Napuljski Nacionalni muzej. Fra Luka Pačoli i njegov student Đidobaldo, vojvoda od Urbina. Na stolu je kopija Euklidovih *Elemenata* sa dodekaedrom

Prve kompletne ilustracije pet Platonovih tela dao je Leonardo da Vinči[5] koji je ilustrovao knjigu svog prijatelja Luke Pačolija[6] o *Božanskoj Proporciji* 1509.godine. Leonardo je bio veliki ljubitelj geometrije i posvetio joj je mnogo vremena, počevši od svojih ranih četrdesetih. Oko 1496.godine franjevački monah, teoretičar, matematičar i pisac fra Luka Pačoli dolazi u Milan, gde ostaje do 1499.godine i sarađuje sa Leonardom proučavajući proporcije, geometriju. Leonardov največi doprinos poliedrima su

[5]Leonardo di ser Piero da Vinci (1452-1519) je jedan od najvećih pronalazača-naučnika zabeležene istorije. Inženjer, arhitekta, slikar, skulptor, anatomist, filozof svog vremena.

[6]Fra Luca Bartolomeo de Pacioli (1446/7-1517) italijanski matematičar franjevačkog reda.

ilustracije za knjigu fra Luke Pačolija *Divine Proportione*. Knjiga je imala veliki uticaj na kruženje informacija o geometriji i poliedrima uopšte. Jedan deo rada je bio prevod rasprave o poliedrima od strane Pačolijevog učitelja Pjera dela Frančeska.[7]



Slika 1.8: Leonardove ilustracije Platonovih tela (Muzej Nauke, London), redom: tetraedar, heksaedar, oktaedar, ikosaedar i dodekaedar

[7]Piero della Francesca (1416-1492), u raspravi *Libellus de quinque corporibus regularibus*, rekonstruiše pet Platonovih tela.

Glava 2

Karakteristike Platonovih Tela

S obzirom da su kod pravilnih poliedara sve pljosni pravilne i istostrane a takođe i rogljevi i da je isti broj pljosni kod svakog temena, svaki pravilni poliedar (svako Platonovo telo) možemo označiti simbolom {p,q}, gde su sve pljosni ovog poliedra p uglovi, po q uglovi kod svakog temena. Ovaj simbol se zove Šlefijev simbol (*Ludwig Schläfli* (1814-1895))

Tabela 2.1: Tabela karakteristika

poliedar	**izgled pljosni**	**teme**	**ivica**	**pljosan**	**{p,q}**
TETRAEDAR	trougao	4	6	4	{3,3}
HEKSAEDAR	kvadrat	8	12	6	{4,3}
OKTAEDAR	trougao	6	12	8	{3,4}
DODEKAEDAR	petougao	20	30	12	{5,3}
IKOSAEDAR	trougao	12	30	20	{3,5}

Ako pretpostavimo da su kod pravilnog poliedra {p,q} pljosni konveksne poligonske površi i da su mu svi rogljevi konveksni, tada će svaki unutrašnji ugao pljosni takvog poliedra biti

$$\frac{(p-2)\pi}{p}$$

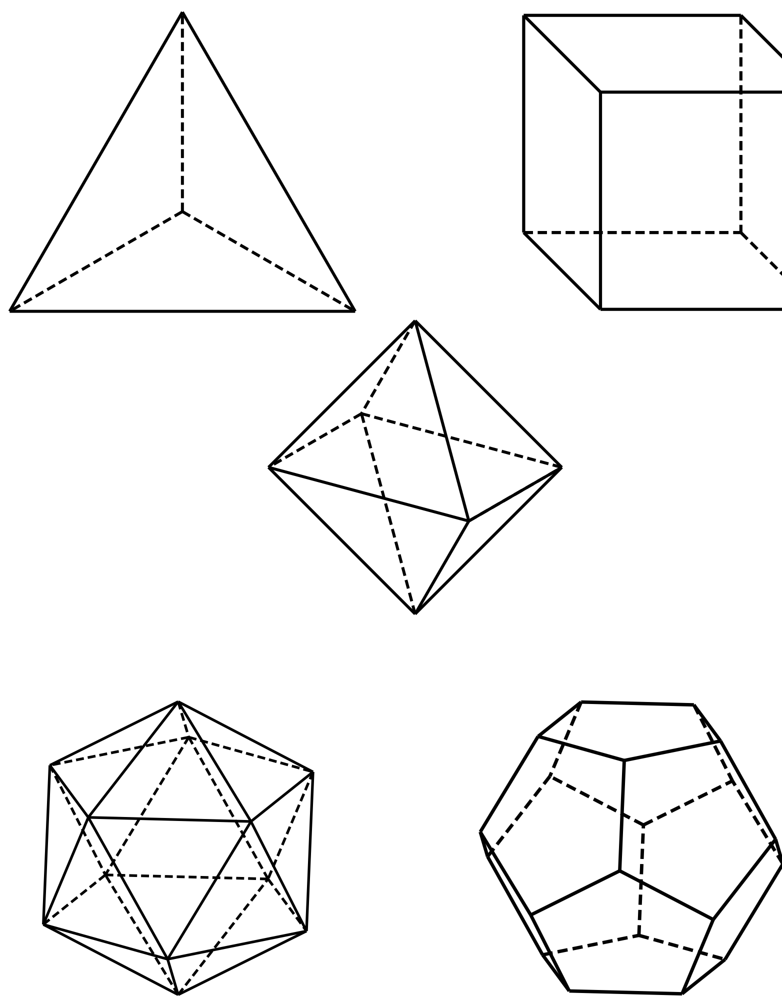
Kako je kod poliedra kome susedne pljosni ne pripadaju jednoj ravni, suma q takvih uglova manja od 2π biće

$$
\begin{aligned}
\frac{q(p-2)\pi}{p} &< 2\pi \\
q(p-2) &< 2p \\
(p-2)(q-2) &< 4
\end{aligned}
$$

gde su (p-2) i (q-2) prirodni brojevi čiji je proizvod manji od 4, pa su time određene jedine mogućnosti:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \\
\{p,q\} & = & \{3,3\} & \{3,4\} & \{4,3\} & \{3,5\} & \{5,3\}
\end{array}
$$

Ovim smo dokazali da su pravilan tetraedar, pravilan oktaedar, pravilan heksaedar, pravilan ikosaedar i pravilan dodekaedar jedini pravilni poliedri kod kojih su pljosni konveksne poligonske površi i svi rogljevi konveksni.[17]



Slika 2.1: ***Pravilni poliedri - PLATONOVA TELA***: tetraedar, heksaedar, oktaedar, ikosaedar i dodekaedar

Glava 3

KONSTRUKCIJE PO EUKLIDU

3.1 EUKLID, *ELEMENTI* XIII KNJIGA

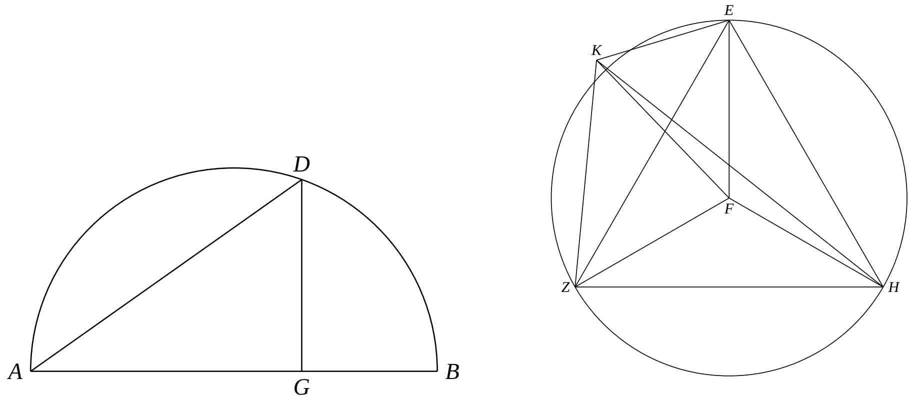
Euklidova XIII knjiga *Elemanata* sadrži 18 stavova. Dvanaest je o pravilnim poligonima: ravnostranom trouglu, kvadratu i pravilnom petouglu, i šest stavova je o pravilnim poliedrima. Prvih 12 je potrebno u dokazivanju ovih 6 i zato se ovde i iznose.

Opisane su konstrukcije i ideja da se "zamisli u sferi" svaki od pravilnih poliedara. "Zamisliti u sferi" podrazumeva konstruisanje opisane sfere i uključuje određivanje odnosa između "strane" tj. ivice poliedra i poluprečnika sfere. U slučaju tetraedra, oktaedra i kocke taj odnos je zaista i određen dok se u slučaju ikosaedra može pokazati da je ivica tog tela iracionalna tzv. "manja", a u slučaju dodekaedra "apotema".

Interesantno je primetiti da geometrijsko telo koje mi danas nazivamo pravilni tetraedar, Euklid naziva piramida, bez obzira što je taj pojam u njegovim definicijama mnogo širi. Euklid i u drugim pojmovima koristi takvu nelogičnost u primeni terminologije.
U daljem tekstu su prikazi konstrukcija pravilnih poliedara u Euklidovim *Elementima*.
Evo kako je u 13. stavu XIII knjige Euklid konstruisao pravilni tetraedar.
,,*Konstruisati piramidu, obuhvatiti je datom sferom, i dokazati da je kvadrat na prečniku sfere jedan i po puta veći od kvadrata na ivici piramide.*[1]"

,,Odmerimo duž AB, jednaku prečniku date sfere, i presecimo je tako tačkom G da AG bude dva puta veće od GB.
Nacrtajmo na AB polukrug ADB, konstruišimo kroz tačku G duž GD upravnu na AB i spojimo A i D pravom AD.

[1] Ovde iznosimo samo opis konstrukcije bez daljeg dokazivanja.



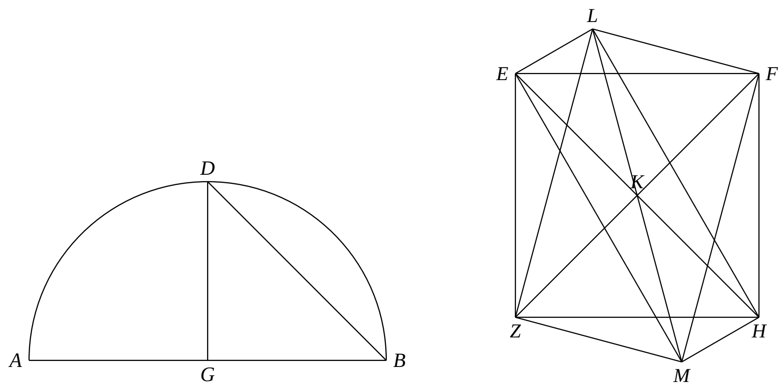
Slika 3.1: Konstrukcija polukruga (levo) i tetraedra (desno)

Nacrtajmo krug EZH poluprečnika DG, upišimo u krug EZH jednakostrani trougao EZH, uzmimo za centar kruga tačku F i povucimo duži EF, FZ, FH. Iz tačke F konstruišemo pravu FK normalnu na ravan kruga EZH. Odmerimo na FK duž FK jednaku AG. Povucimo KE, KZ, KH. Pošto je prava KF normalna na ravni kruga EZH, ona obrazuje prave uglove sa svim pravama koje je seku i nalaze se u ravni kruga EZH. No, seče je svaka od pravih FE, FZ, FH, pa prema tome je FK upravna na svakoj od FE, FZ, FH.
Pošto je AG jednako FK, a GD jednako FE i obrazuju prav ugao, biće i osnovica DA jednaka osnovici KE. Iz istih razloga i svako od KZ i KH jednako je DA. Prema tome su tri duži KE, KZ, KH jednake među sobom. Pošto je AG dvaput veće od GB, biće AB triput veće od BG. No, kako ćemo to docnije dokazati, AB je prema BG kao kvadrat na AD prema kvadratu na DG. Prema tome je kvadrat na AD triput veći od kvadrata na DG. I kvadrat na ZE triput veći od kvadrata na EF, a DG je jednako EF. Dakle, i DA jednako je EZ. Ali, kako je dokazano, i svako od KE, KZ, KH jednako je DA, pa je znači, svako od EZ, ZH, HE jednako svakom od KE, KZ, KH. Prema tome su četiri trougla EZH, KEZ, KZH i KEH jednakostrani. Na ovaj način je obrazovana piramida od četiri jednakostrana trougla, čija je osnova trougao EZH, a vrh tačka K...“

Evo kako je u 14. stavu XIII knjige Euklid konstruisao pravilni oktaedar.
,,*Konstruisati oktaedar, obuhvatiti ga sferom, kao u predhodnom slučaju, i dokazati da je kvadrat na prečniku sfere dvaput veći od kvadrata na ivici oktaedra.*[2]“

,,Odmerimo prečnik date sfere AB, prepolovimo ga tačkom G i nacrtajmo na AB polukrug ADB. Zatim iz tačke G povucimo pravu normalnu na AB, povucimo DB.

[2]Ovde iznosimo samo opis konstrukcije bez daljeg dokazivanja.



Slika 3.2: Konstrukcija polukruga (levo) i oktaedra (desno)

Uzmimo kvadrat EZHF čije su sve strane jednake DB. Dalje, povucimo FZ, EH pa iz tačke K povucimo pod pravim uglovima prema ravni kvadrata EZHF pravu KL, produžimo je sa druge strane ravni kao KM. Na svakoj od KL i KM odmerimo prave KL, KM jednake jednoj od EK, ZK, HK, FK i nacrtajmo LE, LZ, LH, LF, ME, MZ, MH, MF. Pošto je KE jednako KF i ugao EKF prav, biće kvadrat na FE dvaput veći od kvadrata na EK. Zatim, pošto je LK jednako KE i ugao LKE prav, biće kvadrat na EL dvaput veći od kvadrata na EK. A dokazano je da je i kvadrat na FE dvaput veći od kvadrata na EK. Prema tome je kvadrat na LE jednak kvadratu na EF, dakle i LE jednako EF. Iz istih razloga je i LF jednako FE. Dakle, trougao LEF je jednakostran. Slično se dokazuje da je jednakostran i svaki od preostalih trouglova čije su osnovice strane kvadrata EZHF i vrhovi u tačkama L, M. Na ovaj način je konstruisan oktaedar omeđen sa osam jednakostranih trouglova...“

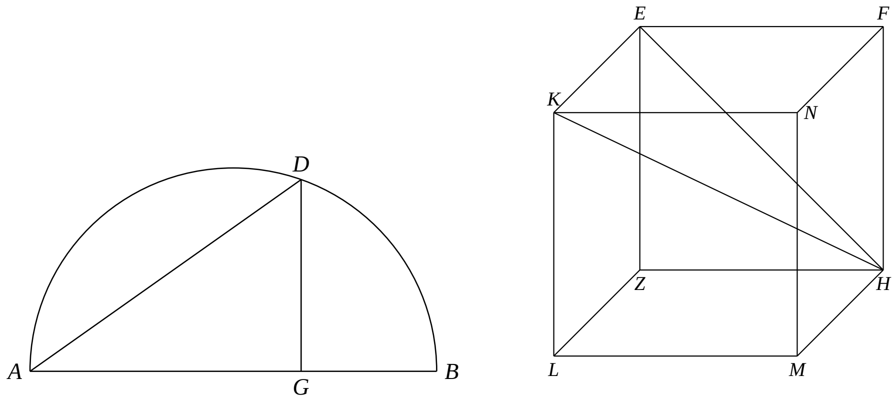
Evo kako je u 15. stavu XIII knjige Euklid konstruisao kocku.

,,*Konstruisati kocku, obuhvatiti je sferom, kao i piramidu, i dokazati da je kvadrat na prečniku sfere triput veći od kvadrata na ivici kocke.*[3]“

,,Odmerimo AB kao prečnik date sfere podelimo ga tačkom G tako da AG bude dvaput veće od GB. Dalje, nacrtajmo na AB polukrug ADB, iz G podignimo normalu GD na AB, povucimo DB.

Konstruišimo kvadrat EZHF kome je strana jednaka DB, pa kroz tačke E,Z,H,F u ravni kvadrata EZHF povucimo normale EK, ZL, HM, FN. Odmerimo na svakoj od EK, ZL, HM, FN duži EK, ZL, HM, FN od kojih je svaka jednaka jednoj od duži EZ, ZH, HF, FE. Spojimo K sa L, L sa M, M sa N i N sa K. Tako je načinjena kocka ZN

[3]Ovde iznosimo samo opis konstrukcije bez daljeg dokazivanja.

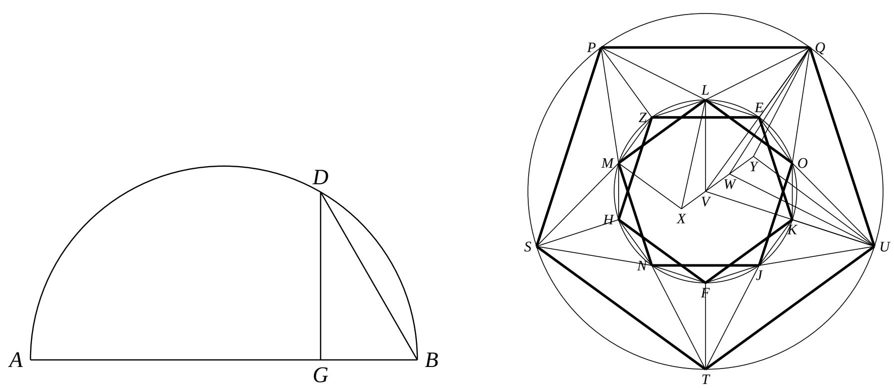


Slika 3.3: Konstrukcija polukruga (levo) i kocke (desno)

obuhvaćena sa šest jednakih kvadrata..."

Evo kako je u 16. stavu XIII knjige Euklid konstruisao pravilni ikosaedar.
,,*Konstruisati ikosaedar, obuhvatiti ga sferom, kao i ranije navedena tela, i dokazati da je ivica ikosaedra iracionalna i to takozvana "manja".*[4]"

,,Odmerimo AB kao prečnik date sfere i podelimo ga tačkom G tako da AG bude četiri puta veće od GB. Dalje, nacrtajmo na DB polukrug ADB, povucimo iz G normalu GD na AB i nacrtajmo DB.



Slika 3.4: Konstrukcija polukruga (levo) i ikosaedra (desno)

Konstruišimo krug EZHFK poluprečnika DB, pa upišimo u krug EZHFK jednakostrani i jednakougli petougao EZHFK. Prepolovimo lukove EZ, ZH, HF, FK, KE tačkama L, M, N, J, O i nacrtajmo LM, MN, NJ, JO, OL, EO. Biće tada LMNJO jednakostran i jednakougli petougao i EO strana desetougla. Kroz tačke E, Z, H, F, K u ravni kruga povucimo normale EQ, ZP, HS, FT, KU jednake poluprečniku kruga EZHFK i

[4]Ovde iznosimo samo opis konstrukcije bez daljeg dokazivanja.

spojimo QP, PS, ST, TU, UQ, QL, LP, PM, MS, SN, NT, TJ, JU, UO, OQ. Pošto je svaka od EQ i KU normalna na istoj ravni, biće EQ paralelno sa KU a one su i jednake. Ali prave koje spajaju sa iste strane krajeve jednakih i paralelnih duži jednake su i paralelne. Prema tome su prave QU i EK jednake i paralelne. No, EK je strana jednakostranog petougla. Znači da je i QU strana jednakostranog petougla upisanog u krug EZHFK. Iz istih razloga i svaka od duži QP, PS, ST, TU je strana jednakostranog petougla upisanog u krug EZHFK.

Dakle, petougao QPSTU je jednakostran. Pošto je QE strana šestougla, a EO desetougla i ugao QEO je prav, biće QO strana petougla, jer je kvadrat strane petougla jednak zbiru kvadrata strane šestougla i strane desetougla upisanih u isti krug. Iz istih razloga i OU je strana petougla. Takođe i QU je strana petougla. Prema tome je trougao QOU jednakostran. Iz istih razloga i svaki od trouglova QLP, PMS, SNT, TJU je jednakostran. Pošto je dokazano da je svaka od duži EL i QO strana petougla, a takođe i LO strana petougla, biće i trougao QLO jednakostran. Iz istih razloga i svaki od trouglova LPM, MSN, NTJ, JUO je jednakostran. Uzmimo za centar kruga EZHFK tačku V. Iz tačke V spustimo normalu VY na ravan kruga i produžimo kao VX na drugu stranu. Odmerimo stranu šestougla VW i svaku VX, WY kao strane desetougla i spojimo QY, QW, UY, EV, LV, LX, XM. Pošto je svaka od VW i QE normalna na ravni kruga, onda su VW i QE paralelne a one su i jednake. Znači, i EV i QW su jednake i paralelne.

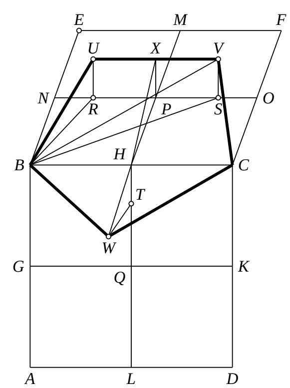
No, EV je strana šestougla, te prema tome, i QW je strana šestougla. Pošto je QW strana šestougla, WY strana desetougla i ugao QWY prav, biće QY strana petougla. Iz istih razloga i UY je strana petougla, jer ako povučemo VK i WU one su jednake i suprotnog položaja, a kako je VK, kao poluprečnik, strana šestougla, biće i WU strana šestougla. No, WX je strana desetougla i ugao UWY prav, znači i UY je strana petougla a i QU je strana petougla. Prema tome je i trougao QUY jednakostran. Iz istih razloga i svaki od preostalih trouglova sa osnovicama QP, PS, ST, TU i sa vrhom u tački Y je jednakostran.

Zatim, pošto je VL strana šestougla, a VX desetougla i ugao LVX prav, biće LX strana petougla. Iz istih razloga, ako uzmemo duž MV, koja je strana šestougla, biće i MX strana petougla. No, i LM je strana petougla. Prema tome je i trougao LMX jednakostran. Na sličan način se dokazuje da je i svaki od preostalih trouglova sa osnovicama

MN, NJ, JO, OL i vrhom u tački X jednakostran. Na ovaj način je konstruisan ikosaedar obuhvaćen sa dvadeset jednakostranih trouglova...“

Evo kako je u 17. stavu XIII knjige Euklid konstruisao pravilni dodekaedar .
,,*Konstruisati dodekaedar, obuhvatiti ga sferom, kao i ranije navedena tela, i dokazati da je ivica dodekaedra iracionalna, takozvana "apotema".*[5]“

,,Uzmimo dve, jedna na drugoj upravne, ravni ABCD i CBEF, ranije pomenute kocke. Svaku od ivica AB, BC, CD, DA, EF, EB, FC prepolovimo tačkama G, H, K, L, M, N, O spojimo GK, HL, MH, NO i podelimo svaku od NP, PO, HQ neprekidno tačkama R, S, T. I neka su RP, PS, TQ veći delovi. Pa iz tačaka R, S, T podignimo normale na ravnima kocke sa spoljašnje strane, odmerimo duži RU, SV, TW jednake dužima RP, PS, TQ i spojimo UB, BW, WC, CV, VU. Tvrdim da je UBWCV jednakostran ravan petougao i da ima jednake uglove.



Slika 3.5: Konstrukcija jednakostranog petougla

Zaista, uzmimo RB, SB i VB. Pošto je duž NP podeljena tačkom R neprekidno, i veći deo je RP, biće zbir kvadrata na PN i NR triput veći od kvadrata RP. No, PN je jednako NB i RP jednako RU. Prema tome je zbir kvadrata na BN i na NR triput veći od kvadrata na RU. No, zbir kvadrata na BN i na NR jednak je kvadratu BR. Znači, kvadrat na BR je triput veći od kvadrata na RU. Tako da je zbir kvadrata na BR i RU četiri puta veći od kvadrata na RU. No, zbir kvadrata na BR i na RU jednak je kvadratu na BU. Prema tome je kvadrat na BU četiri puta veći od kvadrata na UR, dakle, BU je dvaput veći od RU.
No, i VU je dvaput veće od UR, pošto je SR dvaput veće od RP tj. od RU. Na ovaj način BU je jednako UV. Slično se dokazuje da je i svako od BW, WC, CV jednako

[5] Ovde iznosimo samo opis konstrukcije bez daljeg dokazivanja.

svakom od BU i UV. Dakle, petougao BUVCW je jednakostran. Tvrdim da je i ravan. Zaista, povucimo kroz tačku P sa spoljašnje strane kocke pravu PX paralelnu svakoj od pravih RU i SV i povucimo XH i HW. Tvrdim da je XHW prava. Zaista, pošto je duž HQ podeljena tačkom T neprekidno i veći njen deo je QT, biće HQ prema QT kao QT prema TH. No, HQ je jednako HP, a QT svakoj od TW i PX dakle, HP je prema PX kao WT prema TH. I duž HP je paralelna sa TW, pošto je svaka od njih normalna na ravni BD. I duž TH je paralelna sa PX, jer je zaista svaka normalna na ravni BF. No, ako su dva trougla XPH i HTW, sa po dve proporcionalne strane, u takvom položaju da su dva kraka ugla jednog trougla paralelna sa homolognim kracima ugla drugog trougla, onda su njihove preostale strane u istoj pravoj. Prema tome su XH iHW na istoj pravoj. No, svaka prava je u istoj ravni, pa je prema tome petougao UBWCV u jednoj ravni.

Tvrdim da on ima jednake uglove.

Zaista, pošto je duž NP podeljena tačkom R neprekidno i veći deo je PR (biće i zbir NP i PR prema PN kao PN prema PR), a PR je jednako PS (znači, SN je prema NP kao NP prema PS), prema tome, NS je podeljeno tačkom P neprekidno i veći deo je NP. Znači, zbir kvadrata na NS i na SP je triput veći od kvadrata na NP. No, NP je jednako NB i PS je jednako SV. Prema tome je zbir kvadrata na NS i na SV triput veći od kvadrata na NB tako da je zbir kvadrata na VS, SN i NB četiri puta veći od kvadrata na NB. No, zbir kvadrata na SN i na NB jednak je kvadratu na SB. Na taj način zbir kvadrata na BS i na SV, a to je kvadrat na BV (jer je ugao VSB prav), je četiri puta veći od kvadrata na NB. Znači, BV je dvaput veće od NB. Ali, i BC je dvaput veće od BN. Prema tome je BV jednako BC. I pošto su dve strane BU i UV jednake dvema stranama BW i WC i osnovica BV je jednaka osnovici BC, biće i ugao BUV jednak uglu BWC. Prema tome su tri ugla BWC, BUV i UVC jednaka među sobom. Ali, ako su kod jednakostranog petougla tri ugla jednaka među sobom, petougao ima jednake uglove. Jednake uglove ima i petougao BUVCW, a dokazano je da je on i jednakostran. Na taj način petougao BUVCW je jednakostran i jednakougli i nalazi se na ivici BC kocke. Prema tome, ako na svakoj od dvanaest ivica kocke izvršimo isto to, dobićemo prostornu figuru obuhvaćenu od dvanaest jednakostranih i jednakouglih petouglova koja se zove dodekaedar...“[2]

Konstrukcije pravilnih poliedara upisanih u datu sferu, koje Euklid opisuje, ukratko ću izložiti na sledeći način:

1. Tetraedar

   Neka je dato D prečnik opisane sfere u koju se upisuje tetraedar. Euklid konstruiše krug sa poluprečnikom r tako da je $r^2 = \frac{1}{3}D \cdot \frac{2}{3}D$ tj. $r = \frac{1}{3}\sqrt{2}D$ i upisuje jednakostraničan trougao. Iz centra povlači normalu koja je dužine $\frac{2}{3}D$. Duži koje spajaju krajnje tačke normale sa temenima jednakostraničnog trougla određuju tetraedar. Svaka od tih duži tj.ivica, označiću ih sa x, su takve da je $x^2 = r^2 + \frac{4}{9}D^2$. Kako je $D^2 = \frac{9}{2}r^2$ to je $x^2 = 3r^2$. Dalje, Euklid dokazuje da je kvadrat na strani trougla upisanog u krug takođe $3r^2$. Iz toga sledi da je ivica tetraedra, recimo a, $a = \sqrt{3}r$ tj. $a = \frac{1}{3}\sqrt{6}D$.

2. Oktaedar

   Neka je D prečnik opisane sfere u koju treba upisati oktaedar. Euklid konstruiše krug sa poluprečnikom r tako da je $r^2 = \frac{1}{2}D \cdot \frac{1}{2}D$ tj. $r = \frac{1}{2}D$ i upisuje kvadrat u taj krug. Iz njegovog centra povlače se normale u oba pravca dužine jednake poluprečniku kruga ili polovini dijagonale kvadrata. Svaka od ivica koje se uzdižu iznad kvadrata je jednaka stranici kvadrata. Zbog toga je svaka od ivica oktaedra, recimo a, $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}D$.

3. Kocka

   Neka je D prečnik opisane sfere u koju treba upisati kocku. Konstruiše se kvadrat stranice a takav da je $a^2 = D \cdot \frac{1}{3}D$ tj. $a = \frac{1}{3}\sqrt{3}D$. Zatim se konstruiše kocka sa kvadratom kao osnovom.

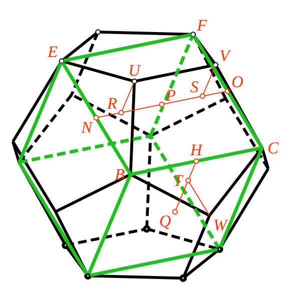
4. Ikosaedar

   Neka je D prečnik opisane sfere. Konstruiše se krug poluprečnika r tako da je $r^2 = D \cdot \frac{1}{5}D$ i upisuje se pravilan desetougao. Iz temena desetougla povlače se normale dužine r. Ovo određuje temena pravilnog desetougla upisanog u jednaki paralelni krug. Spajanjem svakog drugog temena jednog, a onda drugog desetougla dobijaju se pravilni petouglovi u paralelnim krugovima koji ih opisuju ali tako da im temena ne budu naspramna. Spajanjem temena jednog petougla sa najbliža dva temena drugog dobija se 10 trouglova. Neka je p stranica svakog petougla a d stranica oba desetougla, onda su stranice koje se uzdižu iznad trouglova, označiću ih sa x, $x^2 = d^2 + r^2 = p^2$. Zato su 10 trouglova jednakostranični. Neka su C i C' centri paralelnih krugova. CC' je produžena u oba pravca do X i Z respektivno, tako da je $CX = C'Z = d$, gde je d stranica desetougla. Spajajući X i Z sa temenima dva petougla respektivno, dobijaju se ivice ikosaedra recimo a. Odavde sledi da je svaka od ivica $a = p = \frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{D}{2\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{1}{10}D\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$. Sfera prečnika XZ opisuje ikosaedar i $XZ = r + 2d = r + r(\sqrt{5}-1) = D$.

5. Dodekaedar

   Počinje se od kocke upisane u datu sferu prečnika D. Zatim se nacrtaju petouglovi kojima su stranice dijagonale kocke. Neka su H, N, M i O središne tačke stranica na pljosni $BEFC$ a H, G, L i K središne tačke stranica na pljosni $BCDA$. Onda se spoje NO, GK koje su paralelne sa BC i MH i HL koje su njihove medijatrise u tačkama P i Q. Zlatnim presekom se podele PN, PO i QH u tačkama R, S i T tako da su PR, PS i QT veći segmenti. RU, PX i SV su upravne na ravan $BEFC$ a TW upravna na ravan $BCDA$ tako da je svaka od ovih normala jednaka PR ili PS. Spajaju se UV, VC, CW, WB i BU. One određuju stranice pravilnog petougla $UVCWB$ a ostali petouglovi se dobijaju na isti način. Važi $BU^2 = BR^2 + RU^2 = BN^2 + NR^2 + RP^2 = PN^2 + NR^2 + RP^2 = 4RP^2 = UV^2$. Dokazuje se da sfera prečnika D koja opisuje kocku opisuje i dodekaedar.

   Recimo, ako je Z centar sfere $ZU^2 = ZX^2 + XU^2 = NS^2 + PS^2 = 3PN^2$ i $ZB^2 = 3ZP^2 = 3PN^2$. Neka je a ivica dodekaedra a c ivica kocke, onda je $a = 2RP = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}D = \frac{1}{6}D(\sqrt{15}-3)$. Dodeljivanjem jednog pravilnog petougla svakoj od 12 ivica kocke dobiće se 12 pravilnih petouglova koji su pljosni pravilnog dodekaedra.



Slika 3.6: Dodekaedar i kocka

Knjiga XIII se završava 18. stavom koja ivice pet pravilnih poliedara upisanih u istu sferu ređa po veličini. Euklid dokazuje da se ivice piramide (tetraedra), oktaedra i kocke nalaze među sobom u racionalnim razmerama, a da se ivice ostala dva, ikosaedra i dodekaedra, ne nalaze u racionalnim razmerama, jer su one iracionalne. Važi proporcija

$(2R)^2 : a_{tetr}^2 : a_{okt}^2 : a_{koc}^2 = 6:4:3:2 \qquad \text{i} \qquad a_{ikos} > a_{dod}$

$a_{tetr} = \frac{2}{3}R\sqrt{6} \qquad a_{okt} = R\sqrt{2} \qquad a_{koc} = \frac{2}{3}R\sqrt{3} \qquad a_{ikos} = \frac{1}{5}R\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$

$a_{dod} = \frac{1}{3}R(\sqrt{15}-\sqrt{3})$, R pulupречnik opisane sfere

Posle ovog stava iznosi se još jedan i dokazuje se. Taj stav nije numerisan, kao da je naknadno dodat. On glasi ovako:

,,*Tvrdim, da se sem pet pomenutih tela ne može konstruisati nijedno drugo telo, koje bi bilo obuhvaćeno jednakostranim i jednakouglim mnogouglovima.*“[2]

U prilogu se dokazuje da nijedno drugo pravilno geometrijsko telo ne postoji, osim ovih pet već postojećih, jer zbir uglova roglja pravilnog poliedra mora biti manji od zbira četiri prava ugla. Takođe, minimalan broj uglova roglja je tri, jer se od dva ugla ma koje ravne slike ne može sastaviti rogalj. Ovo kratko rasuđivanje je postalo osnovno i ulazi u sve udžbenike elementarne geometrije.

3.2 ČETRNAESTA I PETNAESTA KNJIGA EUKLIDOVIH *ELEMENATA*

U svom izdanju grčko-latinskog teksta *Euclides Elementa* I. L. Heiberg daje još dve knjige: četrnaestu, koja pripada grčkom matematičaru Hipsiklu (dodata u II v.n.e) i petnaestu, čiji je autor nepoznat[6]. Iz teksta 15. knjige se može zaključiti da je ona napisana mnogo kasnije, možda čak u VI veku n.e. ili čak u VIII v.n.e. Kako se ove dve knjige i po sadržaju i po načinu izlaganja razlikuju od pravih Euklidovih knjiga, one su dobile naziv "takozvanih knjiga"Euklidovih *Elemenata*. Predgovor 14. knjige je veoma značajan i iz njega se može zaključiti da je Apolonije pisao o upoređivanju dodekaedra i ikosaedra upisanih u istu sferu. U samoj 14. knjizi, posle stavova o odnosima površina i zapremina nekih pravilnih poliedara, nalazi se zaključak:

,,Ako je $AB = a$ neka dužina podeljena tačkom G neprekidno i $AG = m$ veći deo, a $GB = n$ manji, i ako imamo kocku, dodekaedar i ikosaedar, upisani u istu sferu, onda

[6]Neki izvori kažu da se pripisuju Damaskiju koji je bio poslednji upravnik Novoplatonske akademije, koju je 529.g.n.e. zbog paganizma ukinuo car Justinijan.

je

1. (ivicakocke) : (iviciikosaedra) = $\sqrt{a^2+m^2}:\sqrt{a^2+n^2}$
2. (površina dodekaedra):(površini ikosaedra)=(ivica kocke):(ivici ikosaedra)
3. (zapremina dodekaedra):(zapremini ikosaedra)= (površina dodekaedra):(površini ikosaedra)
4. (zapremina dodekaedra):(zapremini ikosaedra)=$\sqrt{a^2+m^2}:\sqrt{a^2+n^2}$“

Sadržaj takozvane 15. knjige je mnogo slabiji od sadržaja Hipsiklove knjige. Neki istraživači su mišljenja da knjiga ima karakter đačke beležnice i da možda i nije pripadala istom piscu. Ne može se tačno ustanoviti ni vreme kada je ona napisana.
Početak knjige se odnosi na upisivanje pravilnih poliedara u druge pravilne poliedre: tetraedar u kocku, oktaedar u tetraedar, oktaedar u kocku, kocka u oktaedar, dodekaedar u ikosaedar. Izlaganje poslednje konstrukcije i njenog dokaza je nedovršeno. Dalje slede veoma elementarna rasuđivanja o broju strana i broju temena kod spomenutih poliedara.
Knjiga se završava proučavanjem problema koji je postavio Isidor, ”veliki učitelj”, kako ga veliča autor knjige. Neki komentatori misle da je to Isidor iz Mileta, arhitekta, koji je rukovodio zidanjem crkve sv.Sofije u Carigradu završene 537. godine, ali je to malo verovatno. Isidorov problem sastoji se u određivanju uglova između ravni strana pet pravilnih poliedara. Dokazi ovih konstrukcija nisu dovoljno jasni, pa autor prevoda ove knjige iznosi svoj dokaz.

Slika 3.7: Euklid Aleksandrijski ”prvi”apostol geometrije

Eukld (III vek p.n.e), poznat kao Euklid Aleksandrijski, je veliki matematičar antičke Grčke. Samo je jedna Aleksandrija, ona na delti Nila, postala prestoni grad i kulturni centar helenskog sveta. U njoj je nikla najveća biblioteka starog doba. Euklid će osnovati matematičku školu u Aleksandriji, gde je došao, po pozivu, iz Platonove akademije. Razvijanjem njene delatnosti i svog nastavnog i naučnog rada, on će postati njen stub. Na Euklida i njegov rad najveći uticaj su imala dva značajna filozofa, Platon i Aristotel. Matematiku je prihvatao kao deo logike, čime se potreba strogog dokazivanja sama nametala. Geometriju nije posmatrao kao formalnu logiku zasnovanu na pretpostavkama. Poznat je kao osnivač geometrije i kao filozof. Napisao je briljantan i veoma korišćen rad na koma se vekovima zasnivala geometrija.

Za *Elemente* se kaže da je posle Biblije u ljudskoj istoriji najviše proučavano, prevođeno i štampano delo. Doživelo je oko 1700 izdanja. Kako originalni rukopisi Euklida nisu sačuvani, ne može se sa sigurnošću reći da je kompletna konstrukcija dela (izbor i raspored materijala, obrada, naročito teksta) samo njegovo. Oni razlozi koji posebnu sumnju upućuju tekstu, ne umanjuju veličinu genija i njegov doprinos nauci i njegovoj poziciji u njoj. Prvo štampano izdanje dela je objavljeno u Veneciji 1482. godine.[14]

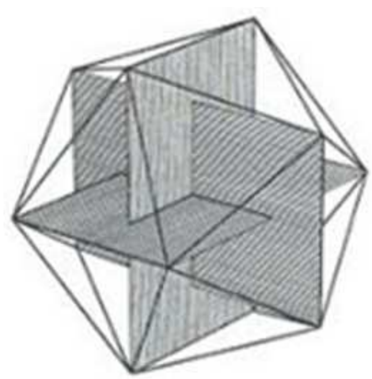
Stvaraoci tipa Euklida, Pitagore, Teeteta, Eudoksa, Hipokrata, Aristotela i drugih, ostavili su civilizaciji da se napaja plodovima njihove praktične i misaone umetnosti ne samo milenijumima.

Glava 4

SVOJSTVA PLATONOVIH TELA

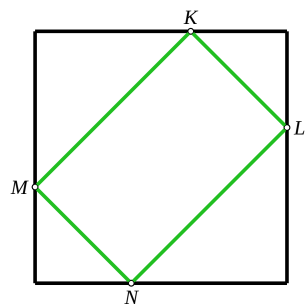
Pet Platonovih tela je povezano sa zlatnim presekom. Naime, Luka Pačoli se u svom delu Božanska Proporcija bavi zlatnim presekom. Renesansni slikari su bili ubeđeni da je ljudskom oku najugodnije kada se glavni objekat slike postavi ne u središte, već ekscentrično upravo u tačku čije je rastojanje od rubova slike u zlatnom preseku. Nije jasno otkuda to uverenje. Verovatno je za to zaslužan Leonardo da Vinči, koji je tim putem "matematizovao"raznovrsna likovna estetska ubeđenja. Moguće je da je i igra reči u zlatnoj razmeri da "manji deo se odnosi prema većem kao veći prema celini"igrala svoju ulogu u ovom verovanju.
Luka Pačoli piše o osobinama broja τ koji predstavlja konstantu zlatnog preseka ($\tau = 1.6180339887...$). U literaturi je u upotrebi i oznaka ϕ (Phi) za ovu konstantu.
Proučavajući broj τ Pačoli dolazi do zanimljive osobine ikosaedra.

Svako teme ikosaedra povezuje pet pljosni koje čine pljosni pravilne piramide čija je osnova pravilan petougao.
Ikosaedar možemo dobiti ako spojimo temena tri podudarna pravougaonika raspoređena na sledeći način kao što je predstavljeno na slici.



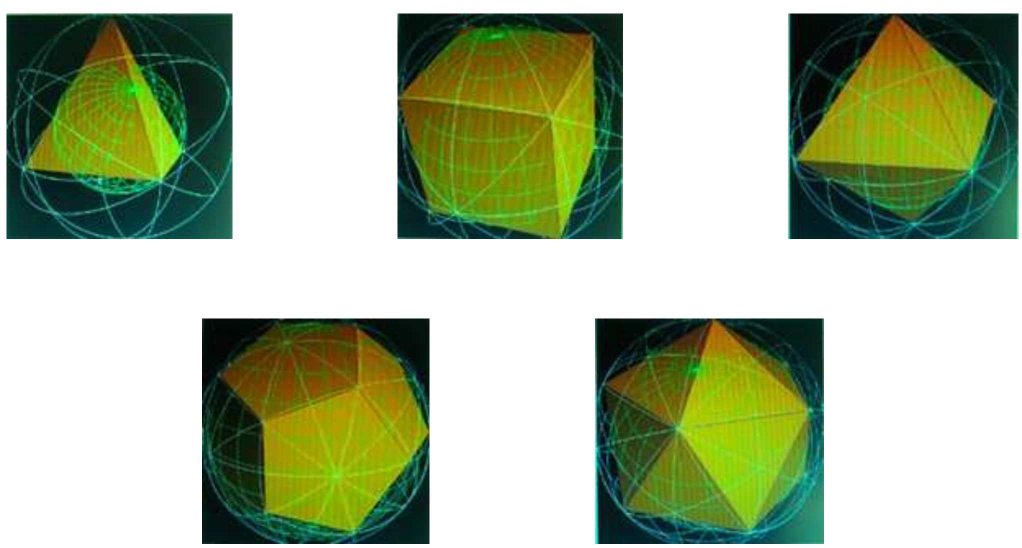
Manja osnovica svakog pravougaonika je stranica ikosaedra odnosno gore pomenute piramide, a samim tim i stranica pravilnog petougla koji je osnova piramide. Veća stranica svakog od ova tri pravougaonika je dijagonala tog istog petougla. Prema stavu (8. stav XIII knjige *Elemanata*) koji Pačoli navodi u svom delu, dijagonala i stranica petougla sa odnose kao $\tau : 1$, tada se i veća i manja stranica pravougaonika odnose kao $\tau : 1$. Svaki takav pravougaonik kod koga su stranice u odnosu $\tau : 1$ naziva se zlatni pravougaonik.

Ako svaku stranicu priozvoljnog kvadrata izdelimo po zlatnom preseku, zatim spojimo tačke na susednim stranicama, dobićemo zlatni pravougaonik.[13]



Slika 4.1: Zlatni pravougaonik MNKL upisan u kvadrat

Kod pravilnih poliedara razlikujemo **opisanu sferu** (sadrži temena poliedra), **međusferu** (dodiruje sve njegove ivice) i **upisanu sferu** (dodiruje sve njegove pljosni).[13]

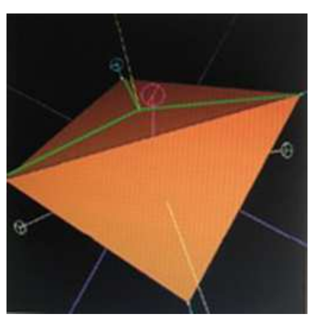


Slika 4.2: redom: tetraedar, kocka, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar

4.1 SIMETRIJE PRAVILNIH POLIEDARA

Izometrijske transformacije[1] euklidskog prostora, E^3, su direktne i indirektne.
U direktne spadaju: koincidencija, translacija, osna rotacija i zavojna kretanja.
U indirektne spadaju: ravanska refleksija, rotaciona refleksija i klizajuća refleksija. Znači, razlikujemo sedam vrsta izometrijskih transformacija, pa s obzirom na to i sedam vrsta simetrija, a to su: identičnost, translaciona simetrija, osna simetrija, zavojna simetrija, ravanska simetrija, rotaciona simetrija, klizajuća simetrija. Sa ovako utvrđenim postojećim vrstama simetrija u prostoru E^3, može se pristupiti nalaženju postojećih grupa simetrija u prostoru E^3.[12]
U geometriji pravilnih poliedara u prostoru E^3 posebnu pažnju privlače pitanja koja se odnose na njihove grupe simetrija. Tri teoreme, kojima se u ovom izlaganju neću baviti, govore o: redu grupe simetrija pravilnih poliedara, identifikuju se sve postojeće simetrije iz grupe rotacija i indetifikuju se sve preostale simetrije tih poliedara. Red simetrija pravilnih poliedara je sledeći.

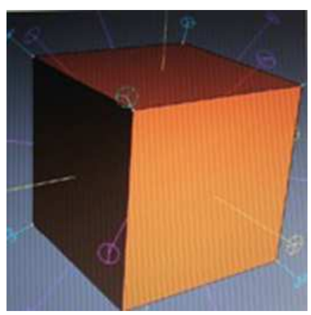
Pravilan tetraedar ima 24 simetrije od kojih jedna polovina menja njegovu orjentaciju, a druga ne.
Direktne transformacije bi bile: identičnost, 8 osnih rotacija reda tri u oba smera u odnosu na prave određene visinama tog tetraedra. Osne simetrije reda dva definisane su u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica i ima ih 3. Indirektne transformacije bi bile: 6 ravanvskih refleksija definisanih bisektralnim ravnima unutrašnjih diedara i 6 rotacionih refleksija reda četiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica i ravni. To je i jedina rotaciona refleksija kojom raspolaže, jer pravilan tetraedar nema ni naspramnih pljosni ni naspramnih temena.



Slika 4.3: Pravilan tetraedar

[1] Izometrija je bijekcija koja čuva podudarnost.

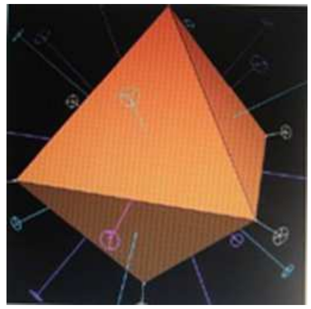
Pravilan heksaedar-kocka ima 48 simetrija od kojih jedna polovina menja orjentaciju, a druga ne.
Direktne transformacije bi bile: 6 osnih simetrija reda četiri definisanih u odnosu na prave koje spajaju središta naspramnih pljosni i 3 osne simetrije reda dva definisane u odnosu na iste prave. Osnih simetrija reda dva definisanih u odnosu na središta naspramnih ivica ima 6 i 8 osnih simetrija reda tri, definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima. Računajući i identičnost kocka raspolaže sa ukupno 24 rotacije.
Indirektne transformacije bi bile: 6 ravanskih refleksija definisanih u oba smera u odnosu na bisektralne ravni unutrašnjih diedara. Ravanskih refleksija zadatih medijalnim ravnima ivica ima 3. Od rotacionih refleksija ima sve tri moguće vrste i to: 6 rotacionih refleksija reda četiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni, 8 rotacionih simetrija reda šest definisanih u oba smera u odnosu na pravce određene naspramnim temenima i centralnu refleksiju.



Slika 4.4: Pravilan heksaedar

Pravilan oktaedar ima 48 simetrija od kojih jedna polovina menja orjentaciju, a druga ne.
Direktne transformacije bi bile: 8 osnih simetrija reda tri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni, 6 osnih simetrija reda dva definisanih odnosu na prave odredjene središtima naspramnih ivica, 6 osnih simetrija reda četiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima i 3 osne simetrije reda dva definisane u odnosu na iste prave. Uz identičnost to ih je ukupno 24.
Indirektne transformacije bi bile: 3 ravanske refleksije definisane bisektralnim uglovima, 6 ravanskih refleksija definisanih medijalnim ravnima i ivicama, 8 rotacionih simetrija reda šest definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih

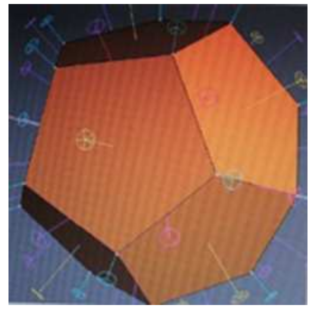
pljosni, 6 rotacionih simetrija reda četiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima. Raspolaže i centralnom simetrijom.



Slika 4.5: Pravilan oktaedar

Pravilan ikosaedar ima 120 simetrija od kojih jedna polovina menja orjentaciju, a druga ne.
Direktne transformacije bi bile: 20 simetrija reda tri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni, 15 osnih simetrija reda dva definisanih središtima naspremnih ivica, 12 osnih simetrija reda 5/2 u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima, 12 osnih simetrija reda pet definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima temena i identičko preslikavanje.
Indirektne transformacije bi bile: 15 ravanskih simetrija definisanih bisektralnim ravnima unutrašnjih diedara, 20 rotacionih refleksija reda tri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni, 12 rotacionih simetrija reda pet definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima, 12 rotacionih simetrija reda 5/2 definisanih u oba smera u odnosu na prave određene napsramnim temenima.
Raspolaže i centralnom simetrijom.

Pravilan dodekaedar ima 120 simetrija od kojih jedna polovina menja orjentaciju, a druga ne.
Direktne transformacije bi bile: 20 osnih simetrija reda tri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima, 15 osnih simetrija reda dva definisanih središtima naspramnih ivica, 12 osnih simetrija reda pet definisanih u oba smera u odnosu na prave odrađene središtima naspramnih pljosni, 12 osnih simetrija reda 5/2 definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni i identičko preslikavanje.
Indirektne transformacije bi bile: 20 rotacionih simetrija reda šest definisanih u oba



Slika 4.6: redom: Pravilan ikosaedar, pravilan dodekaedar

smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima, 15 ravanskih refleksija definisanih bisektralnim ravnima unutrašnjih diedara, 12 rotacionih refleksija reda deset definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni, 12 rotacionih refleksija simetrije 5/2 definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni.

Svaki pravilan poliedar ima istu grupu simetrija kao njegov dualni poliedar, jer rotacije koje ciklično permutuju temena neke pljosni jednog od para ovih poliedra, istovremeno ciklično permutuju pljosni oko jednog temena njemu dualnog poliedra.[10]

4.2 DUALNOST PRAVILNIH POLIEDARA

Simetrije Platonovih tela vode ka još jednom interesantnom svojstvu a to je dualnost.

Dva poliedra su dualna ako postoji bijekcija kojom se incidentna temena, ivice i pljosni jednog od njih preslikavaju, redom, na incidentne pljosni, ivice i temena drugog. Za neki poliedar ćemo reći da su mu incidentni:

1. teme i ivica ako je teme, kraj ivice
2. teme i pljosan ako je teme, teme te pljosni
3. ivica i pljosan ako je ivica, stranica te pljosni[11]

Kocka i oktaedar imaju po 12 ivica, ali broj njihovih pljosni i temena su zamenjena. Kocka: 6 pljosni i 8 temena a oktaedar: 8 pljosni i 6 temena. Slično, dodekaedar i ikosaedar imaju po 30 ivica, ali dodekaedar 12 pljosni i 20 temena, dok ikosaedar 20 plosni i 12 temena. Ovo omogućava da jedno telo bude preslikano u svoj dual.

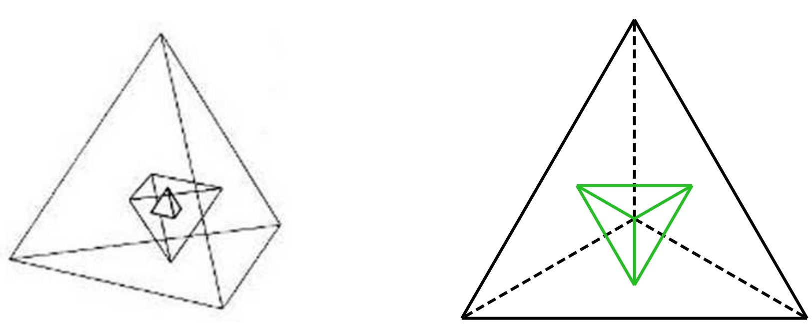
Ako spojimo centre svih pljosni kocke dobićemo oktaedar i ako spojimo centre pljosni oktaedra, dobićemo kocku.

Ista procedura se može primeniti da bi se ikosaedar preslikao u dodekaedar i obrnuto.

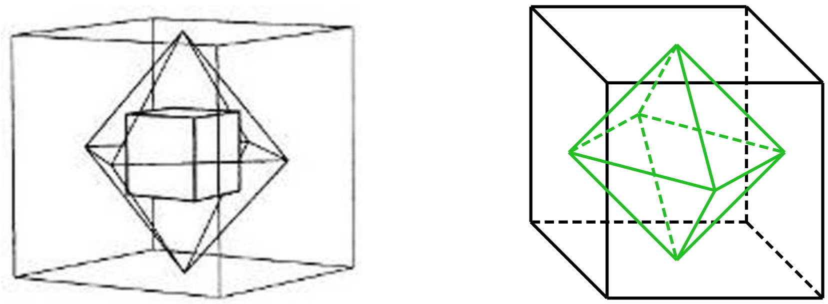
Tetraedar je dualan sam sebi. Spajajući 4 centra njegovih pljosni dobija se drugi, obrnuti tetraedar.

Dualni poliedar polaznog poliedra je polazni poliedar.

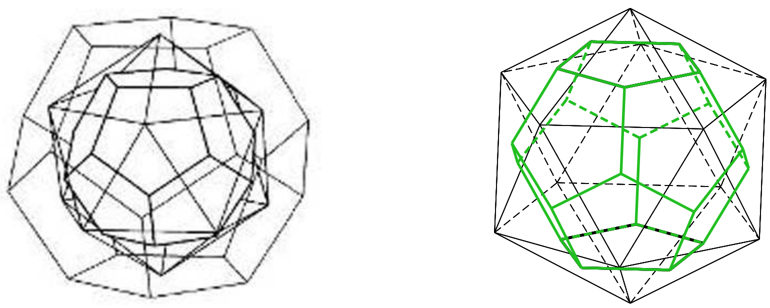
Na sledećim crtežima su primeri dualnih pravilnih poliedara.



Slika 4.7: Tetraedar dualan sam sebi



Slika 4.8: Kocka i oktaedar



Slika 4.9: Dodekaedar i ikosaedar

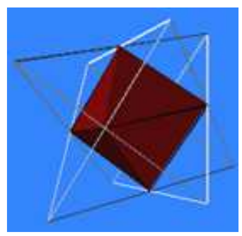
4.3 UZAJAMNI ODNOS PRAVILNIH POLIEDARA

Na sledećim slikama su predstavljene kombinacije (spojevi) dualnih poliedara.

Slika 4.10: redom: Dva tetraedra, kocka i oktaedar, dodekaedar i ikosaedar

Zanimljiva je još jedna od osobina poliedara a to je *stelacija*.
Stelacija poliedara je proces generisanja novog poliedra koji se sastoji u "produžavanju" njegovih elemenata, strana i ivica, do preseka svakog elementa sa ostalim, odnosno do formiranja novog poliedra, poštujući pri tome određene tipove simetrije.
Stelacijom pravilnih poligona možemo dobiti pravilne zvezdaste poligone i preklapanje već postojećih poligona. Pravilan poligon ima jednake stranice i jednake uglove kod svakog temena. Očigledno, zvezda je pravilan poligon ako dozvolimo da joj stranice prodiru jedna kroz drugu.

U zavisnosti od toga kako ravni kome pripadaju strane datog poliedra dele prostor, postoji više načina da se produže i odaberu delovi koji će biti spojeni. Primetimo da dve ravni koje se sreću u jednoj ivici u stelaciji neće deliti ivicu u svom unutrašnjem poliedru. Odatle možemo zaključiti da ne postoji stelacija za kocku jer su joj nesusedne pljosni paralelne pa se nikada ravni u kojima se nalaze ne mogu seći, kada uzimamo u obzir konačna tela. Takođe je nemoguća stelacija tetraedra jer su mu svake dve strane susedne.
Stelacija oktaedra je sastavljena od dva pravilna tetraedra.



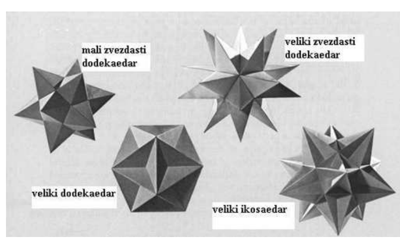
Slika 4.11: Stelacija oktaedra

Ovaj model pokazuje konture dva pravilna tetraedra. Ravni kojima pripadaju njihove strane su generisana produženim pljosnima unutrašnjeg oktaedra.

Kepler-Poinsotova tela su stelacije pravilnog ikosaedra i dodekaedra.

Veliki ikosaedar je stelacija ikosaedra.

Ostala tri tela su stelacije dodekaedra.



Slika 4.12: Kepler-Poinsotova tela

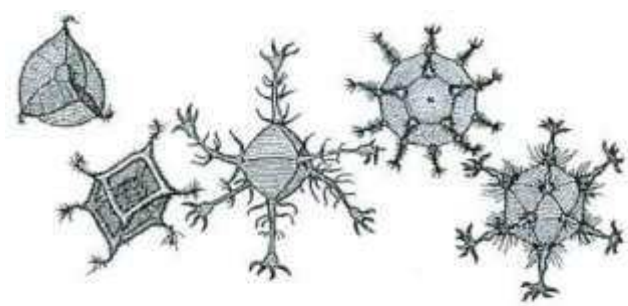
U ovom radu se neću detaljno baviti stelacijama, jer to nije tema moga rada. Samo sam htela da ukažem na određene osobine pravilnih poliedara.

Glava 5

PLATONOVA TELA OKO NAS

5.1 PRIMERI PLATONOVIH TELA U ŽIVOTINJSKOM SVETU

S početka 20. veka, Ernest Hekel[1] je opisao mikroskopske životinje Radiolarie. Neki od pravilnih poliedara se prepoznaju u njihovim skeletima: Circoporus octahedrus (oktaedar), Circogonia icosahedra (ikosaedar), Lithocumbus geometricus (heksaedar), Circorrhegma dodecahedra (dodekaedar) i Protozoa Callimitra agnesae (tetraedar).[6]



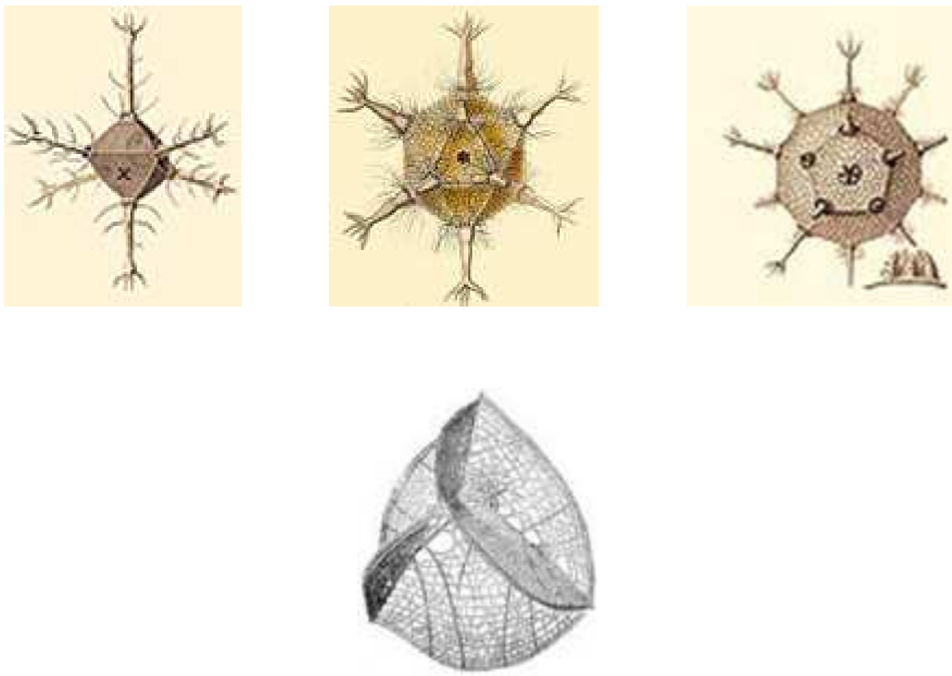
Slika 5.1: U moru

Radiolarie su morske životinje koje vode lebdeći, planktonski način života.
Neke od njih (npr. grupa Phaeodaria) žive na dubinama do 7000 metara. Radiolarie su naročito mnogobrojne u toplim morima kao na primer u Sredozemnom moru.[8]
Broj vrsta savremenih Radiolaria prevazilazi 2000. Simetričnog su izgleda i spadaju među najlepše životinjske vrste. Njihov skelet obrazuje sve moguće geometrijske oblike. Skelet Radiolaria iz proteklih geoloških perioda je dosta dobro sačuvan i zato se i njihove

[1]Ernst Heinrich Philip August Haeckel (1834 - 1919), nemački biolog, prirodnjak, fizičar. Otkrio je, opisao i označio hiljade novih biljnih i životinjskih vrsta, iscrtao generičko drvo koje ih povezuje. Usaglasio je mnoge biološke termine.

ljušture upotrebljavaju za određivanje starosti pojedinih slojeva.
Najbogatije naslage skeleta vode poreklo iz tercijernog perioda.[9]

Protozoa su jednoćelijski organizmi, rasprostranjene u morima i kopnenim vodama, vlažnoj zemlji, a mnoge žive na ili u telima drugih organizama. Do danas je opisano oko 25000 vrsta.[3]



Slika 5.2: redom: CircoporusOctahedrus, CircogoniaIcosahedra, CircorrhegmaDodecahedra i Callimitra Agnesae

5.2 PRIMERI PLATONOVIH TELA U HEMIJI

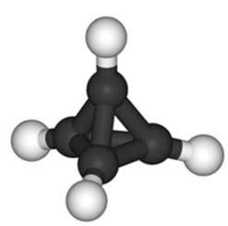
Platonovi ugljovodonici su molekularne reprezentacije pravilnih poliedara. Kod njih su temena zamenjena atomima ugljenika, a ivice hemijskim vezama.
Nemaju svi pravilni poliedri svoje molekulske parove:

- Četvorovalentnost ugljenika[2] isključuje ikosaedar (5 pljosni koje se seku u svakom temenu) kao izvodljivu formu
- Ugaoni napon onemogućava oktaedarsku strukturu. Pošto se četiri strane seku u svakom uglu, tamo ne bi moglo da bude vodonikovih atoma i ovaj hipotetički oktaedar bi bio alotrop[3] C_6 elementa ugljenika, a ne ugljovodonika

Sledeći Platonovi poliedri su sintetizovani:

- Tetraedran (C_4H_4) ali samo sa odgovarajućim substituentima
- Kuban (C_8H_8)
- Dodekaedran ($C_{20}H_{20}$)

Tetraedran je Platonov ugljovodonik, hemijske formule (C_4H_4) i tetraedarske strukture. Preveliki ugaoni napon (uglovi između ugljenika mnogo odstupaju od ugla u tetraedru koji je približno 109.5 °) spečava ovaj molekul da nastaje prirodno.



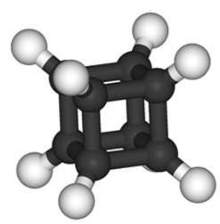
Slika 5.3: Tetraedran (C_4H_4)

Kuban (C_8H_8) je sintetički ugljovodonični molekul koji se sastoji od osam ugjenikovih atoma raspoređenih u uglovima kocke, sa po jednim atomom vodonika vezanim za svaki atom ugljenika.

[2] Ugljenik ima 4 elektrona u poslednjem energetskom nivou (omatač jezgra se sastoji iz više energetskih nivoa, tj.orbitala) i ti elektroni služe za građenje jedinjenja.

[3] Alotropska modifikacija nekog elementa je pojava koja se dešava kada se neki element javlja u više oblika koji se razlikuju po broju atoma u molekulu ili strukturnoj formuli molekula.

Kuban je čvrsta kristalna supstanca. Prvi put ga je sintetisao Dr Filip Iton (Dr Philip Eaton) profesor hemije na Čikaškom univerzitetu 1964. godine. Pre njegove sinteze, istraživači su verovali da ga je nemoguće sintetisati zbog ugla od 90°, jer bi se pri tome ugljenikovi atomi našli pod prevelikim pritiskom i samim tim bi bili nestabilni.
Iznenađujuće, kada se napravi, kuban je zapravo kinetički stabilan zbog nedostatka načina da se raspadne. Kuban i njegovi derivati imaju mnoge važne osobine. Ugao veza od 90° znači da su veze jako napete pa iz toga proizilazi velika reaktivnost kubanskih jedinjenja što ih čini veoma korisnim gorivima, velike gustine i velikog energetskog sadržaja kao i eksplozivima, kao na primer oktanitrokuban i heptanitrokuban.
Kuban je isto tako i ugljovodonik sa najvećom gustinom, što dodatno doprinosi njegovoj sposobnosti da sadrži velike količine energije. Istraživači traže načine upotrebe kubana u medicini i nanotehnologiji.[4]



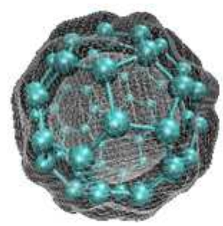
Slika 5.4: Kuban (C_8H_8)

Dodekaedran je hemijsko jedinjenje ($C_{20}H_{20}$) koje je prvi put sintetisao Leo Paket (Leo Paquette) sa Ohajo državnog univerziteta 1982. godine prvenstveno zbog "estetske zadovoljive simetrije dodekaedarske konstrukcije". U ovom molekulu svako teme je atom ugljenika koji vezuje tri susedna atoma ugljenika. Primetno je da je ugao od 180° svakog pravilnog pentagona blizak idealnom uglu veze od 109.5° koji postoji između sp3 hibridizovanih ugljenikovih atoma. Svaki ugljenikov atom je takođe vezan i za po jedan vodonikov atom.[20]

[4]Nanotehnologija je interdisciplinarna nauka koja proučava fizičke, hemijske i biološke osobine molekula i atomskih čestica. To je tehnologija koja manipuliše sa pojedinačnim atomima na nivou nanometara.

Slika 5.5: Dodekaedran ($C_{20}H_{20}$)

Sa porastom broja ugljenikovih atoma u mreži, geometrija se konačno približava sferi. Ovo je najzad postignuto kod fulerena[5], iako on sam nije pravilni poliedar. Bakminster fuleren C_{60} ima oblik zasečenog ikosaedra, Arhimedovog tela.[6]



Slika 5.6: Bakminster fuleren C_{60}

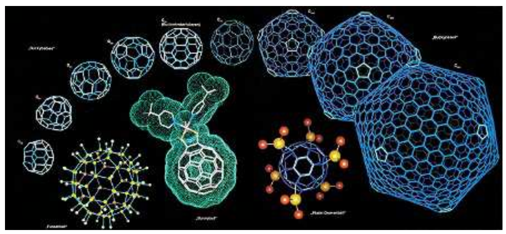
C_{60} je visoko simetričan molekul čistog ugljenika. Često se naziva i Bakibol. Ime je izvedeno iz imena Ričarda Bakminster Fulera (Richard Buckminster Fuller), poznatog po svojim geodezičnim kupolama. Ovaj molekul je otkriven 1985. godine dok je grupa naučnika pokušavala da razume apsorpcioni spektar međuzvezdane prašine.

Tokom poslednje dekade, hemijske i fizičke osobine fulerena bile su veoma interesantne u polju naučnog istraživanja i razvoja. Taj trend će se ubuduće verovatno i nastaviti. Fulereni su 2003. godine počeli da se istražuju i u medicinske svrhe: vezivanjem specifičnih antibiotika za strukture otpornih bakterija kao i da ciljaju određene tipove ćelija kancera kao što je melanom. Poznata je i upotreba fulerena kao svetlosno aktiviranih antimikrobnih agenasa. U polju nanotehnologije, toplotna otpornost i superprovodljivost su, između ostalih, osobine koje posebno privlače pažnju istraživača.

[5]Fulereni su klasa alotropa ugljenika koji se sastoje od grafenskih slojeva smotanih u tube ili sfere. U ove strukture spadaju i nanotube koje su interesantne zbog svoje mehaničke čvrstoće kao i zbog svojih električnih osobina.

[6]Arhimedova tela se mogu posmatrati kao tela nastala zasecanjem Platonovih tela ili daljim zasecanjem tako dobijenih tela. Zasečeni ikosaedar ima 32 pljosni (12 petouglova, 20 šestouglova), 90 ivica i 60 temena.

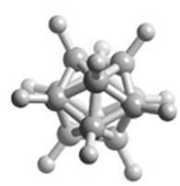
Nauka je oduvek tražila konačnu listu elemenata za klasifikaciju. Na primer: pet i samo pet Platonovih tela (pravilnih poliedara), trinaest i samo trinaest Arhimedovih tela, perodni sistem elemenata, 32 klase kristala, i tekući pokušaj da se pronađe kompletna sekvenca genoma. Istraživanje strukture pokazalo je veliki značaj kroz istoriju nauke. Na ovaj način je Bakminster Fuler razvio svoju geodeziju, bakibol (buckyball), a posthumno Bakminster fuleren i fulereni su nađeni u nanoarhitekturi, koja je osnova za novu granu hemije ugljenika.



Slika 5.7: Fulereni

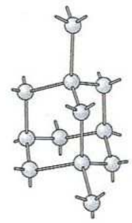
Hemičari Kroto, Keri i Smoli (Kroto, Curl i Smalley) su 1996. godine dobili Nobelovu nagradu za otkriće nove modifikacije ugljenika - fulerene.

Prirodno, elementarni bor ima više alotropa i jedan od njih je alfa - bor, B_{12}. Ikosoedarska struktura je pronađena kod borovog jedinjenja $B_{12}H_{12}{}^{2-}$. Za ovo se znalo mnogo godina pre pronalaska molekula C_{60}.



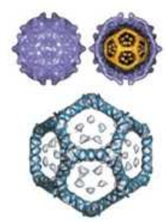
Slika 5.8: $B_{12}H_{12}{}^{2-}$

Alotropske modifikacije ugljenika su grafit, fulereni i dijamant. Dijamant je bezbojna, kristalna supstanca sa velikim indeksom prelamanja svetlosti i on je najtvrđi mineral u prirodi. Njegovim sečenjem i poliranjem dobija se brilijant koji se koristi kao nakit. Ugljenikovi atomi u dijamantu zauzimaju tetraedarsku strukturu, a svaki atom ugljenika ima 4 sigma veze.[21]



Slika 5.9: Dijamant

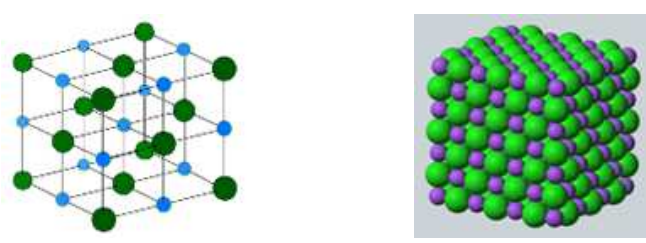
Mnogi poznati virusi[7] podsećaju svojom strukturom na pravilne poliedre. Jedan od njih, izolovan u Peruu, pre oko desetak godina je, Pariacoto Virus (PaV) sa dodekaedarskim kaveznim obosmernim RNA.[19]



Slika 5.10: Pariacoto virus

Tri od pet pravilnih poliedara se mogu naći u prirodi kao kristali: tetraedar kao kristal natrijum antimonosulfida ($Na_3SbS_4 \cdot 9H_2O$), heksaedar kao kristal natrijum hlorida tj. kuhinjske soli (NaCl) i oktaedar kao kristal potašehrom sulfata ($K_2Cr_2(SO_4)_4 \cdot 24H_2O$).[15]

[7]Virus- struktura koja se sastoji od delića genetskog materijala (nukleinska kiselina) okruženih zaštitnim omotačem koji se sastoji od proteina u kombinaciji sa ugljovodoničnim ili lipidnim komponentama. Proteinski omotači najmanjih virusa su vrlo pravilni i mogu se precizno matematički opisati. Manji virusi su najčešće u obliku ikosaedra premda se pojavljuju i drugi pravilni oblici, pogotovu kod biljnih virusa.



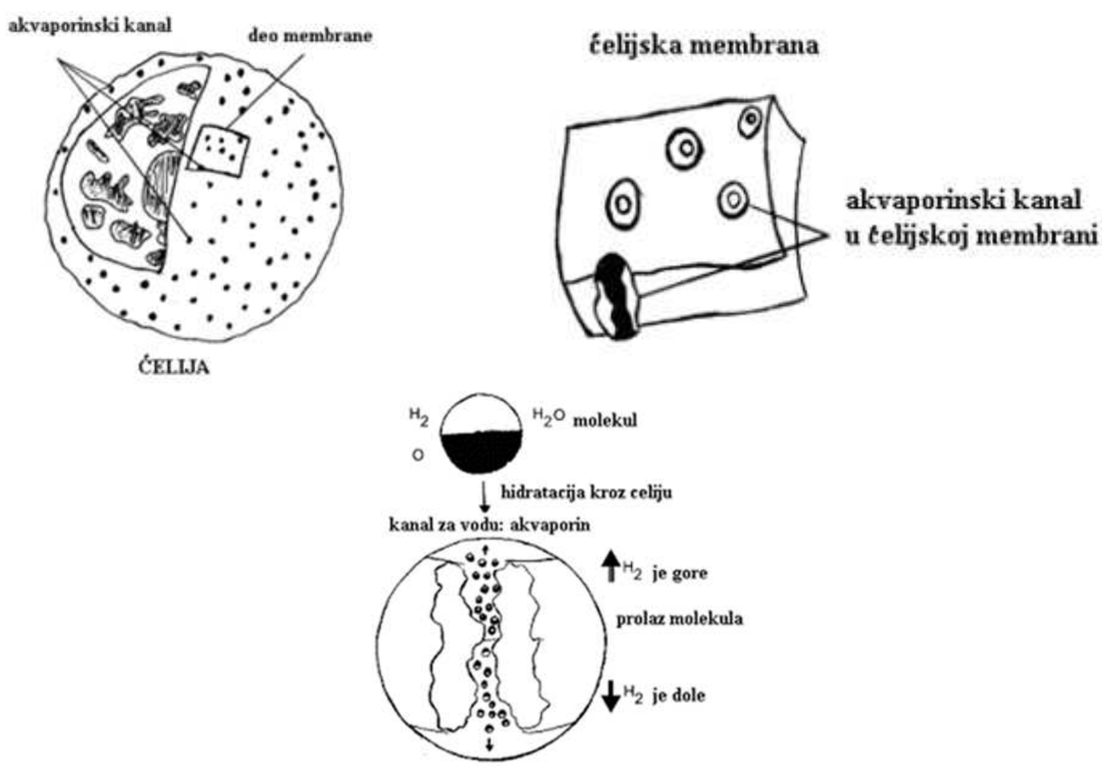
Slika 5.11: Natrijum Hlorid (NaCl); plavo - Na^+ zeleno-Cl^-

5.3 CRTEŽI LJUDSKE ĆELIJE

5.3.1 Opis prolaska vode kroz Akvaporinske kanale

Nobelova nagrada za hemiju, 2003. godine, dodeljena je za otkriće Akvaporina - kanala ćelijske membrane. Još od 19. veka pretpostavljalo se da organizmi poseduju kanale za tansport vode ali se njihovo postojanje nije moglo dokazati. To je uspelo nobelovcu Piteru Agriu (Peter Courtland Agre, 1949-).
On je izolovao jedan od proteina sa ćelijske membrane i demonstrirao da je on misteriozni "kanal vode". Ovaj protein je nazvan Akvaporin. Radi se o velikoj familiji proteina, a do danas je u ljudskom telu pronađeno 11 različitih vrsta.
Otkriće vodenih kanala otvorilo je vrata za dalja biološka i fiziološka istraživanja bakterija, biljaka i životinja.

U ovom istraživanju objašnjeno je da kroz Akvaporin, voda u unutrašnjost ćelije može da prođe samo molekul po molekul, ali bez prisustva bilo kakvih rastvorenih supstanci ili naelektrisanih čestica. Sledeći crteži predstavljaju izgled Akvaporinskih kanala na ćelijskom nivou.



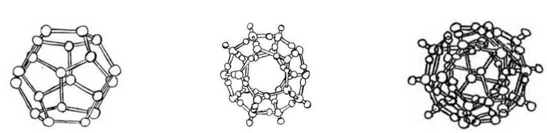
Slika 5.12: Ulazak vode u ćeliju kroz Akvaporinski kanal

5.3.2 Pravilni poliedri i njihovih veza sa vodom

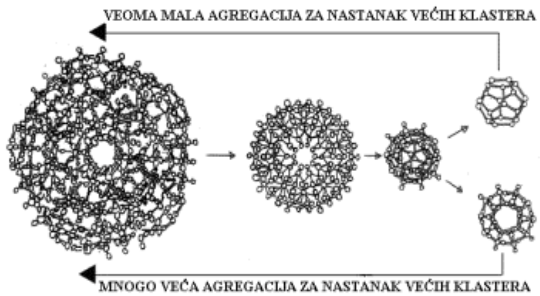
U mnogim kulturama postoje osnovni prirodni elementi koji pomažu da se objasni struktura i funkcija materije i energije, a takođe i da bi se objasnili procesi izlečenja tela. Ono što je posebno u Platonovoj prezentaciji je to što su geometrijske strukture koje on definiše bazirane na pet elemenata koji zapravo odgovaraju onome što je danas poznato u fizici i hemiji. Ikosaedar, koji Platon povezuje sa vodom je, kako hemičari i fizičari objašnjavaju, najzastupljeniji način strukturnog uvećanja vode u vodi sa niskim sadržajem čestica. Zarobljeni u nepreglednom nizu ikosoedarskih strukturnih uvećanja, nalaze se dodekaedri, za koje Platon smatra da predstavljaju ceo univerzum. Moderni fizičari su postulirali da univerzum zapravo može biti u obliku dodekaedra, koji se smatra najstabilnijom mogućom trodimenzionalnom strukturom. Isto kao što današnja "Teorija Svega" u modernoj fizici pokušava da objedini sve sile koje deluju u univerzumu na osnovu vibracija, tako je i Platon imao "Teoriju Svega" koja se bazirala na pet geometrijskih tela i posebno bila povezana sa dodekaedrom.

5.3.3 Crteži agregacije klastera vode i lakoća prolaska kroz ćelijsku membranu

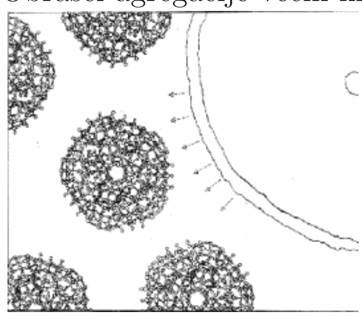
Dva pravilna poliedra koja su važna za vodu su ikosaedar i dodekaedar. Oblik ikosaedra je najzastupljeniji u vodi sa niskim procentom čestica. Voda u ovom obliku teži da se spaja u veoma velike milionske klastere usled mogućnosti magnetnog privlačenja vode u obliku ikosaedra. Uhvaćeni u veliku grupu, u kojoj je voda u obliku ikosaedra, nalaze se jedinični klasteri vode u obliku dodekaedra. Kada se ovi klasteri oslobode iz velikog ikosaedra, oni se više ne spajaju nego ostaju razdvojeni usled magnetnog odbijanja. Sve crteže je nacrtao Dr David Viler (Dr David Wheeler). Osnova za njegove prezentacije osobina vode, koje su povezane sa fizikom Platonovih tela i njihova veza sa hidracijom kroz ćelijsku membranu, uglavnom su radovi Dr Martina Čaplina (Dr Martin Chaplin), profesora Primenjene nauke, istraživanja vode i vodenih sistema, na Saut bank univerzitetu u Londonu.[5]



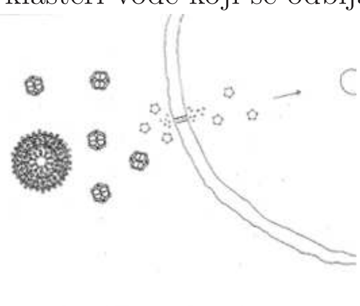
Slika 5.13: Ikosaedar i dodekaedar zaključani zajedno



Slika 5.14: Obrasci agregacije većih klastera



Slika 5.15: Veliki ikosoedarski klasteri vode koji se odbijaju o ćelijsku membranu



Slika 5.16: Mali dodekaedarski klasteri vode koji lako hidriraju kroz ćelijsku membranu

5.4 PRIMERI PLATONOVIH TELA U MINERALOGIJI

Pirit, FeS_2, sulfidni mineral koji se često javlja u obliku kristala različite veličine, dodekaedarskog, heksaedarskog ili oktaedarskog habitusa. Pljosni pirita nisu pravilne pa samim tim ni pirit nema strukturu pravilnog poliedra. Upotrebljava se za proizvodnju sumpor dioksida, sumporne kiseline i za upotrebu u industriji papira.

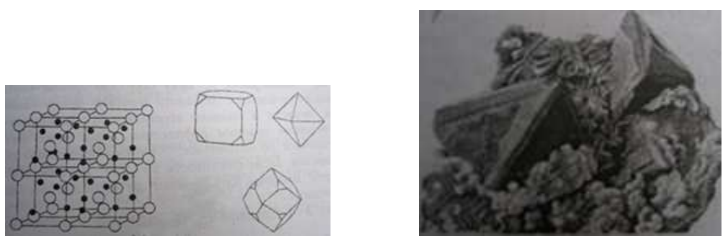
U grupu pirita spada mineralna vrsta Bravoit (Fe, Ni, Co)S_2.

To su kristali oktaedarske i heksaedarske strukture.

U Srbiji, kontatovan je u okolini Petkovića na Kosovu, gde je njegovo obrazovanje povezano sa naknadnim hidrotermalnim procesima.

Slika 5.17: Pojavljivanje pirita: heksaedarski habitus kristala i kristal oblika dodekaedra - ležište Cu Bor

Kuprit Cu_2O, je potklasa prostih oksida sa mrežastom strukturom.
Njegova struktura je specifična u tom smislu što su anjoni kiseonika raspoređeni u rogljevima i na sredini pljosni elementarne ćelije, dok su katjoni Cu po dijagonalama i na sredini pljosni elementarne ćelije.
Habitus kristala je obično heksaedarski, oktaedarski ili ređe rombododekaedarski.
Kristali imaju mrkocrvenu ili crnu boju. Manje količine kuprita su se ranije javljale u oksidacionim zonama Majdanpeka i Bora. U većim količinama je ruda za dobijanje bakra.



Slika 5.18: Kuprit: struktura sa nekim kristalnim formama i kristali kuprita - Klaustal (Harc) Nemačka

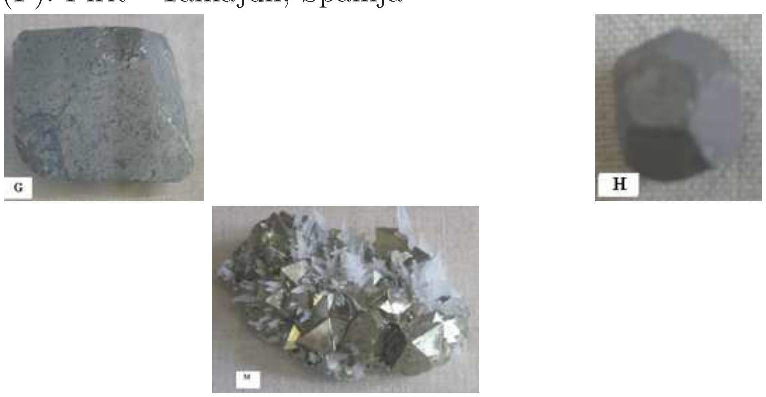
Kristali Magnetita Fe_3O_4 $(FeFe_2O_4)$ su pretežno oktaedarskog, ređe rombododekaedarskog habitusa. Magnetit je karakteristične crne boje, metaličnog sjaja, jako magnetičan i krt.[1]

Slika 5.19: Kristali magnetita oktaedarskog habitusa, Ržanovo - Makedonija

Po raznim svetskim muzejima i privatnim kolekcijama čuvaju se predivni primerci kristala koji nas podsećaju na pravilne poliedre. Ovo su samo neki od njih.

Slika 5.20: (A): Izolovan tetraedar - Kotrbach, Slovačka; (B): grupa oktaedra - Burra Burra rudnik, Južna Australija; (C): grupa teraedra sa malahitom - Tsumeb, Jugo-Zapadna Afrika

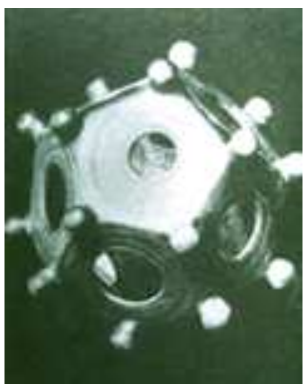
Slika 5.21: (D): Grupa kocki sa kvarcom - Gersdorf, Saxony, Nemačka; (E): Pirit - Devon, Engleska; (F): Pirit - Tamajun, Španija



Slika 5.22: (G): Oktaedar - Klefva, Švedska; (H): Dodekaedar - Hakansboda, Švedska; (M): Oktaedri sa kvarcom - Kelly rudnik, Butte, Montana

5.5 PLATONOVA TELA I UMETNOST

Pet Platonovih tela su još od praistorije pa do danas bila prikazivana kao umetnički motivi. Ljudi su uvek imali interesovanja za njih, tako da njihove oblike prepoznajemo na mnogim slikama, korišćeni su i kao igračke ili kao delovi upotrebnih predmeta i samog dizajna u širem smislu.
Egipćani su, naravno, znali za tetraedar, ali takođe i za oktaedar i kocku. U mnogim muzejima su prikazani primeri kocki iz perioda raznih dinastija. Ljudi su bili na neki način opsednuti njima. Da li zbog njihovih matematičkih osobina (simetrije, zlatnog preseka), uticaja koji su na razvoj misli imali filozofi, ili su im jednostavno privlačili pažnju.

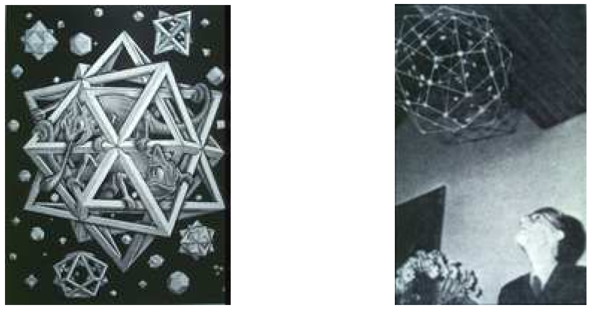



Slika 5.23: levo: Etrurski dodekaedar, okolina Padove, 500 g.p.n.e. desno: Neufchatel Nicolaus: Johanes Neudorfer i njegov sin, 1561.

Slika 5.24: Kamenje: Škotska, Ašmolian muzej, Oksford, Engleska

Po saznanjima Alison Roberts, kolekcionom menadžeru Ašmolian muzeja u Oksfordu, grupa kamenja je pronađena u delovima Škotske i Irske. Podsećaju na Platonova tela i iz perioda su kasnog neolita i ranog bronzanog doba.

Umetnik i matematičar 20. veka Ešer, M.C.Escher (1902-1972), je bio obuzet geometrijom. Pravio je modele Platonovih tela i nije se odvajao od njih.



Slika 5.25: Ešer i modeli

U ovom radu se neću baviti umetničkom kritikom, niti analizom dela. Evo primera jedne od skorije postavke u muzeju savremene umetnosti Tate (Tate Modern) u Londonu.

Slika 5.26: levo: Robert Moriss: Bez naslova 1965/71. staklo i drvo; desno: Sol LeWitt: Otvorene geometrijske strukture, slikano drvo 1979.

U Francuskoj je oblik dodekaedra iskorišćen kao kontejner za odlaganje komunalnog otpada i reciklaže.

Slika 5.27: Na trotoaru, Francuska

Forme inspirisane prvilnim poliedrima se nalaze u arhitekturi i modernom dizajnu. U arhitekturi 70-tih i 80-tih godina se razvio novi princip gradnje. Pokušalo se sa primenama kocki i dodekaedra kao stambenih jedinica.
U Holandiji mnogi ovakvi stanovi se vode kao luksuzni i boraviti u njima je vrlo prijatno i interesantno.
U Izraelu neuobičajeni projekti izgradnje stambenog prostora u obliku dodekaedra se nisu pokazali kao funkcionalni za život.

Slika 5.28: Stambena naselja u Holandiji: Roterdam i Helmond, arh. Piet Blom

Slika 5.29: Stambeno naselje Ramot Hausing, Izrael- Jerusalim 1971/85, arh. Zvi Hecker

Na sledećoj slici je projekat španskog arhitekte, Santijaga Kalatrave (Santiago Calatrava), stambenog i poslovnog prostora Toranj u Nju Jorku. Sastoji se od 12 kocki. Projekat je odobren, ali još uvek nije realizovan.

Slika 5.30: S. Calatrava: 80th South Sreet Tower, Nju Jork

Toranj muzeja savremene umetnosti Nagi u Mito Ibaraki u Japanu, sačinjen je od teraedra koji se međusobno oslanjaju na jednu zajednivčku stranu tetraedra. Na ovako generisanoj konstrukciji, temena teraedra obrazuju 4 zavojne linije.

Slika 5.31: Muzej Nagi, Mito Japan 1994, arh. Arata Isozaki

Zaključak

Na kraju bih dodala obrazloženje koje završava ova razmatranja vezana za Platonova tela. Mislim da sam uspela da dotaknem, pokažem koliko se tela o kojima sam pisala nalaze u okruženju, od jednostavnih do visoko stvaralačkih dela, od svakodnevnice do trajnih umetničkih i naučnih dostignuća.
Smatram svojim uspehom što sam zavirila u taj svet čudesnih, savršenih poliedara koji su bili inspiracija za brojne slikare, arhitekte, dizajnere, i na drugoj strani otkriće na polju nauke (matematike, filozofije, hemije, biologije).
Obuzetost ovim savršenim telima proističe od najranijeg perioda počev od neolita, do današnjeg doba.

Bibliografija

[1] Danilo Babić, *Mineralogija*, Cicero, Beograd, 2003. 5.4

[2] Anton Belimović, *Euklidovi Elementi*, deseta knjiga, Srpska Akademija Nauka, Matematički institut, Beograd, 1956. 13, 13

[3] Miloje Brajković, *Zoologija invertebata I*, ZUNS, Beograd, 2001. 16

[4] H.S.M. Coxeter, L.L.D, F.R.S., *The Macmillan Company*, second edition, New York, 1963.

[5] Martin Chaplin http://wwwl.lsbu.ac.uk/water/index2.html 5.3.3

[6] E. Heackel, *Art forms in nature*, Prestel USA, 1998. 16

[7] T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol I-II, Dover, New York, 1981.

[8] Miloje Krunić sa saradnicima, *Sistematizacija invertebrata sa praktikumom I deo*, ZUNS, Beograd, 1982. 16

[9] Miloje Krunić, *Zoologija invertebata I deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1982. 16

[10] D. Lopandić, *Geometrija*, Naučna Knjiga, Beograd, 1979. 15

[11] Zoran Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, preliminarna verzija. 1, 3

[12] Zoran Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Grafiti i Matematički fakultet, Beograd, 1994. 15

[13] Zoran Lučić, *Metodika nastave matematike II-predavanja*, Beograd. 4, 4

[14] Slavko B. Nedović, *Matematičko-istorijski mozaik pogled u matematiku antike (sa zbirkom zadataka)*, Arhimedes, Beograd 2004. 14

[15] Petrović Miodrag i Ljiljana, *Matematički vremeplov prilozi za istoriju matematike*, Zmaj, Novi Sad, 2006. 22

[16] Platon, *Timaj*, Eidos, Vrnjačka Banja, 1995. 1

[17] *Prilozi o matematičkim naukama kod Srba-dvadeseti vek-istorija matematičkih i mehaničkih knjiga knjiga 6*, Beograd, 1992. 2

[18] A.V. Shubnikov, *Symmetry in science & art*, plenum press, New York & London, 1974.

[19] L.Tang, K.N.Johnson, L.A.Ball, T.Lin, M.Yeager, *The structure of Pariacoto virus*, Nature Structural Biology, 2001. 22

[20] Nenad Trinajstić sa saradnicima, Ruđer Bošković Institut, Zagreb, *Komleksnost Platonovih tela*, Bilten o Hemiji i Tehnologijama - Makedonija, vol 13. No.2, 1994. 19

[21] C. Thomsen and S. Reich, *Light Scattering in Solids IX*, volume XX of *Topics in Applied Physics*, chapter Raman Scattering in Carbon Nanotubes, (Springer Verlag, Heidelberg, 2005). 21

[22] Magnus J. Wenninger, *Polyhedron Models*, London: Cambridge University Press, 1971.