UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

MASTER RAD

ARHITA IZ TARANTA

student: **Goran Sofijanić**
broj indeksa: **1171**

Mentor: **dr Zoran Lučić**

2011.

1 Uvod

Veliki broj tekstova posvećen je istoriji matematike. U nekim od tih tekstova dat je hronološki razvoj matematike, dok su drugi posvećeni razvoju pojedinih matematičkih disciplina. U ovom tekstu obrađena je biografija jedne od najznačajnijih ličnosti antičke Grčke, Arhite iz Taranta. On je, kako ćemo kasnije videti, pripadao kasnim pitagorejcima. Osim što je dao značajne rezultate u matematici, bio je i filozof, državnik, više puta je biran za stratega svoga grada Taranta, grčke kolonije u južnoj Italiji. Takođe, Arhitini radovi na polju muzičke teorije spadaju u najznačajnije radove ove vrste u antici. Ovaj tekst bavi se svim aspektima Arhitinog života i rada o kojima su sačuvani pisani tragovi.

U drugom poglavlju navedeni su i objašnjeni izvori, korišćeni za istraživanje same Arhitine biografije, o čijem životu mi saznajemo posredstvom dela prevedenih znatno posle Arhitinog života. Arhiti se pripisuje utemeljenje pojma *kvadrivijuma*, o čemu će biti više reči u narednom poglavlju. Dati su i mnogi aspekti Arhitinog državničkog posla, odnos Arhite sa svojim najpoznatijim savremenikom, Platonom, koga je imao priliku i čast lično da upozna. I pored uzajamnog uvažavanja, Arhita i Platon nisu se slagali po mnogim pitanjima nauke, o čemu će više biti reči kasnije.

U delovima drugog poglavlja pojedinačno su prezentovama Arhitina dostignuća na polju fizike i mehanike. On se bavio optikom, prostiranjem zvuka, beskonačnošću svemira. U mehanici Arhita je ostao zabeležen kao tvorac mehaničkog goluba koji je mogao da leti i kao tvorac čegrtaljke, muzičkog instrumenta korišćenog, pre svega, za razvoj muzičke teorije i u mističnim verskim obredima.

Sledeće poglavlje, treće po redu, posvećeno je u celini rešavanju jednog od tri legendarna antička matematička problema, *udvostručenju kocke*. Naime, Arhita je prvi dao rešenje ovog problema, konstruisanjem dvostrukih proporcionala Hipokrata sa Hiosa. U ovom poglavlju dat je istorijat samog problema, Hipokratov rad koji je prethodio rešavanju, Platonov komentar na rešenje koje je dao Arhita, kao i zaključak o konačnom razrešenju ovog problema, dat tek početkom XIX-og veka. Nadalje, detaljno je izloženo Arhitino rešenje *Delskog problema* i na kraju je dat prikaz Arhitine konstrukcije metodama analitičke geometrije.

Četvrto poglavlje u celini se odnosi na Arhitin rad na polju razvoja muzičke teorije. U posebnom delu objašnjeni su neki osnovni pojmovi muzičke teorije, čije je poznavanje neophodno za praćenje daljeg teksta. Zatim je izloženo generisanje Pitagorejske tonske lestvice, čiji je nastanak prethodio Arhitinom radu. Nadalje, izloženi su neki aspekti Arhitinog rada kao što su: pronalaženje tri nove vrste tetrahorda, dokaz da se superpartikularna proporcija ne može podeliti na dva jednaka dela umetanjem srednjeg broja, utvrđivanje odnosa u pojedinim akordima, uvođenje pojma frekvencije, pronalaženje tri tipa sredina u muzici (aritmetičke, geometrijske i harmonijske). U nastavku ovog poglavlja biće reči o dijatonskoj tonskoj lestvici, koja se najduže zadržala u muzici i u kojoj su primenjeni principi na kojima insistira Arhita, kao i o hromatskoj temperovanoj lestvici, koja je danas aktuelna i u celini zasnovana na geometrijskoj sredini.

U zaključku izložen je značaj i uticaj državničkog i naučnog, pre svega matematičkog rada Arhite iz Taranta na dalji razvoj nauke. Ovde je apostrifirano to da su se neki rezultati do kojih je došao Arhita našli u najznačajnijoj i najuticajnijoj raspravi iz geometrije svih vremena, Euklidovim *Elementima*.

2 Arhita, život i delo

2.1 Poreklo i izvori

Slika 1: Arhita iz Taranta

Kao navodi Miloš Đurić [4, str. 287] u antičko vreme o Arhiti su pisali Aristotel (Diogen L V25) i Aristoksen (Athen XII 545 A) u drugoj polovini četvrtog veka, dakle pedesetak godina posle njegove smrti, ali kako nam te njihove biografije nisu sačuvane u izvornom izdanju, već tek u navodima Diogena Laertija i Ateneja, koji su živeli između 200-te i 500-te g. ne, to je znanje o detaljima Arhitinog života prilično nepouzdano.

Ipak, o njegovom značaju za antičko doba, u kome se istakao kao intelektualac i politički lider, govori već sama količina pisanja koja mu je posvećena. Aristotel je napisao delo u tri toma u kome objašnjava Arhitinu filozofiju. Toliko pažnje nije posvetio nijednom svom prethodniku. Aristoksen piše *Život Arhitin*, koji zapravo predstavlja osnov biografske tradicije o njemu. Pored ličnih saznanja koje je imao o Arhiti, on se oslanjao na svedočenje svog oca Spintharusa, koji je bio mlađi Arhitin savremenik. Tako on tvrdi da je Arhita rođen u Tarantu, kao sin Hestijejev (Athen FHG II 275) ili Mnezagorin (Diog L VIII 79), oko 428. godine, gde je i odrastao i umro između 360. i 350. godine stare ere.

Kako je i Aristoksen započeo svoju karijeru kao pitagorejac u Atini, njegov odnos prema Arhiti bio je krajnje pozitivan: Arhita od Taranta predstavljen je kao grčki matematičar, filozof i državnik, najbliži ostvarenju Platonovog sna o vladaru mudracu. Učestvovao je u političkim borbama i sedam puta je bio biran za stratega svog rodnog grada, što je predstavljalo presedan, i nikada nije izgubio bitku (Diog L VIII 79, 82). Bio je i Platonov prijatelj, poslao je brod za spasavanje Platona iz kandži Dionizija Mlađeg, tiranina Sirakuze, mada su veze dvojice mislilaca izuzetno složene i višeznačne.

Arhita je pripadao mlađoj generaciji piragorejaca. Aristotel navodi da je najverovatnije bio Filolajev učenik, mada ga Eudem, Aristotelov učenik, tretira i kao važnog nezavisnog mislioca koji je uspeo da reši jedan od tri goruća antička matematička problema u predplatonovom vremenu: *udvostručenje kocke*, i to konstrukcijom srednjiih proporcionala Hipokrata sa Hiosa, o čemu će kasnije biti više reči. Ostala dva problema su *kvadratura kruga* i *trisekcija ugla* [5, str. 232].

Primenio je matematički pristup u definisanju muzičkih skala antike, čime je jedan čulni kvalitet (ton) preveo u kvantitativni prag (broj), potpuno u duhu pitagorejske škole koja je u osnovi svega sagledavala isti [4, str. 282].

Arhita je prvi utemeljio pojam *kvadrivijuma* kao grupu od četiri kanonske, matematičkim metodom grupisane nauke (aritmetika, geometrija, astronomija i muzika) koje su predstavljale put ka poznavanju *suština*, koje su Platonovi učenici smatrali jedinim pravim *objektima* saznanja [1, str. 228].

Krajnjim ciljem nauke Arhita je smatrao opis pojedinačnih stvari u svetlu proporcije i međusobnih odnosa, zbog čega je aritmetiku, kao nauku o broju i razmeri kojim se utvrđuje odnos i poredak stvari, pojedinačnog i opšteg, smatrao gospodaricom nauka [3, str. 382-383]. Racionalni pristup smatrao je osnovom uređenog (dobrog) života, kako pojedinca tako i države i svemira, dakle tri oblasti koje su predstavljale i okosnicu Platonovog interesovanja [4, str. 267].

Ontološka osnova aritmetike, u smislu određenja broja, vrste brojeva i njihovih odnosa, predstavljala je uslov određenju proporcije i njenih vrsta (aritmetička, geometrijska, harmonijska), što je dalje upućivalo ka filozofiji broja, iz koje su proisticale različite operacije i pravila.

Matematička znanja tretirana su, dakle, kao nužna stepenica na putu uma ka istini i ovladavanju filozofskim znanjima, jer je svet posmatran kao fenomen stvoren po modelu brojeva, koji inače poseduje brojevnu strukturu. U osnovi svih brojeva je jedinica, ali i samo bivstvovanje zavisi od jedinstva, što znači da je potčinjeno jedinici, koja je *materija sveta*.

Aritmetičkoj vrednosti *jedinice* u geometriji bi odgovarala tačka. Zato i brojevima složenim iz jedinica, odgovaraju linije, ravne i oble figure. Iz parnog i neparnog, posredstvom proporcije i mere, stvara se svetska harmonija, koja se izražava u periodičnosti, saglasnosti i ritmičnosti prirodnih i ljudskih pojava [12, str. 39-43].

Dakle, aritmetika je osnov svemu i prva od četiri discipline *kvadrivijuma*. Prevodeći antičke spise tokom šestog veka nove ere taj termin uveo je Boetije da njime označi grupu nauka koje su, određene sadržajem, činile osnov najpre pitagorejske pedagogije, odakle su kao aktuelne preuzete i izučavane kroz čitav srednji vek. Radi se, zapravo, o četiri puta, u smislu četiri načina vezana za merenje i računanje. Njima je sadržajno bilo obuhvaćeno celokupno ljudsko znanje, čije je sistematizovanje po *načinu* i *metodu* određeno grupom *trivijuma* (retorika, gramatika, dijalektika).

STUDIA HUMANITATIS	
KVADRIVIJUM	TRIVIJUM
Aritmetika	*Retorika*
Geometrija	*Gramatika*
Muzika	*Dijalektika*
Astronomija	

Pitagorejci i Platon nisu se slagali u redosledu naučnih disciplina kvadrivijuma. I kod jednih i kod drugih prvo i drugo mesto, nametnuto njihovim značajem, zauzimaju aritmetika i geometrija. Pitagorejci smatraju da iza toga sledi muzika koja predstavlja most od ljudske dimenzije (harmonije duše i tela) do harmonije kretanja nebeskih tela. Na kraju je astronomija kao nauka o savršeno uređenom svemiru. Platon, međutim, astronomiju postavlja ispred muzike jer smatra da nauka koja zavisi od vizuelnog opažaja treba da prethodi onoj koja ima odnos sa sluhom ((Država, 522a-531c).

Zajedno, ove dve grupe činile su osnov humanistički usmerenog obrazovanja od antičkog vremena do XVIII-og veka, kada se počelo sa osnivanjem državnih škola. Stari Grci smatrali su da je ovakav sistem obrazovanja, $\pi\alpha\iota\delta\epsilon\iota\alpha$, koji sažima svo ljudsko znanje kružan, $\epsilon\nu\ \kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\omega\sigma$, jer je krug simbolizovao celokupnost, završenost i potpunost.

Latinski autori tokom prvog veka transkribovali su ovaj postulat u *en cyclo paedia*, koja se u aktuelnom značenju priručnika, knjige, javlja od XVI-og veka.

U Grčkoj i kasnije u Rimu smatralo se da je upravo obrazovanje ono što odvaja slobodnog čoveka od roba, kulturnog od varvarina, a što za to vreme nije bilo nebitno.

Čovek proistekao iz ovakvog obrazovnog sistema, označavan je kao *homo humanus* i to je bio ideal tokom čitavog prvog milenijuma. U drugom milenijumu, *Septem artes liberales*, vrlo neobično, ostaju na snazi. Iako je pojava hrišćanstva najpre dovela do konflikta sa paganskim vrednostima, u oblasti edukacije hrišćanska crkva ne samo da se ne suprotstavlja, već uspeva da integriše pagansko obrazovanje, pretvarajući ga u sredstvo širenja vere. Izvorni smisao ove obrazovne koncepcije punu aktuelnost vratio je od XIV-og do XVI-og veka, u doba humanizma i renesanse u pokušaju sveopšte rehabilitacije grčke kulture.

2.2 Politička i filozofska delatnost

Aristoksen navodi da je

> *Arhita tako lepo i čovečno upravljao Tarantskom državom i bio na njezinu čelu da mu se slava proširila među sve ljude; on je u početku bio preziran, a kad se zbližio s Platonom postigao je tako veliki ugled*[3, str. 370]

Sedam godina za redom bio je biran za stratega, što je rekord koji podseća na Perikla u Atini. Višestruki izbor zabranjivao je čak i zakon. Aristoksen, međutim, izveštava da se Arhita, koji nikada nije bio poražen u bici, jednom, pritisnut zahtevima svojih neprijatelja, povukao sa liderske pozicije grada, ali je Tarant odmah doživeo vojni poraz, zbog čega je Arhita hitno vraćen na položaj. Mi danas ne znamo o kojih je sedam godina reč. Neke od njih morale su se poklopiti sa Platonovom drugom i trećom posetom južnoj Italiji i Siciliji 367. i 361. godine [4, str. 317-328.].

Ne znamo ni na koji je tačno način Arhita upravljao Tarantom; da li je bio autokrator koji je o diplomatskim i vojnim pitanjima mogao da odlučuje samostalno, ili mu je pak bilo potrebno odobrenje skupštine. Aristoksen izveštava jedino da je bio u prijateljskim odnosima sa svojim podanicima.

Slika 2: *Karta antičke Grčke*

Važno je shvatiti da je Tarant u antičko vreme bio i jedan od značajnijih gradskih centara. Kao spartanska kolonija, osnovan je 706. godine i u početku je bio u senci drugih južnoitalskih gradova, npr. Krotone. Međutim, geografski položaj najbolje luke na južnoitalskoj obali učinio ga je prirodno jednim od važnih centara pomorskog i kopnenog saobraćaja i trgovine, što je podstaklo i njegov ekonomski rast.

U Peloponeskom ratu, Tarant je učestvovao na strani Sparte, što ga je učinilo dugogodišnjim protivnikom susedne Mesapije, koja se borila na strani Atine. Dobro i čvrsto vođenje rata protiv Mesapljana, po Aristoksenu, znatno je podiglo ugled Arhite kao vojnog zapovednika.

Posle Peloponeskog rata, Tarant se izgleda trudio da izbegne direktno učešće u sukobu Dionizija Starijeg, tiranina Sirakuze i lige grčkih gradova na jugu Italije, koju je predvodila Krotona. Poraz južnoitalskih gradova, njihovo osiromašenje i iscrpljivanje vojne moći učinilo ga je najjačim grčkim gradom u južnoj Italiji i najverovatnije novim vođom lige. U periodu 380-350. godine, kada je ostareli Arhita bio na vrhuncu ugleda, Tarant je bio jedan od najmoćnijih gradova grčkog sveta uopšte. Strabon ga upoređuje sa vojnom snagom Atine na početku Peloponeskog rata.

Izgleda da je u Arhitino vreme Tarant, za razliku od Sparte, koja je bila oligarhija, bio demokratski uređen. Prema Aristotelu, demokratija je uspostavljena, najverovatnije posle 473. godine, kada je veliki deo tarantske aristokratije poginuo u borbama protiv lokalnog stanovništva. I Herodot potvrđuje da je ta godina bila kobna i prelomna po grčki svet, koji se iscrpeo u međusobnim obračunima.

Nema indicija da je od tada do Arhitine smrti, 360-350. godine, Tarant bio išta drugo do demokratija. Neki naučnici su se pozivali na veze grada sa svojom maticom Spartom, ili podvlačili sklonost pitagorejaca prema aristokratiji, govoreći o političkom uređenju grada. Strabon, međutim, opisuje Tarant kao demokratski grad u vreme Arhite, čime objašnjava i njegovu popularnost kod građana, sa čim se slaže i Aristotel (Athen XII 519 B).

Atenodor u knjizi *O ozbiljnosti i šali* pripoveda i da je

> *Arhita iz Taranta, koji je bio državnik i filozof, imao vrlo veliki broj robova, s kojima se uvek zabavljao za stolom, pozivajući ih na gozbu, pa se veoma rado zabavljao sa njihovim sinovima i igrao se sa onima koji su se rodili u kući.*[3, str. 370]

Aristotel navodi da je za njih Arhita napravio i vrlo koristan izum

> *čegrtaljku, koja se daje deci da se njom igraju i ne razbijaju predmete po kući, jer dete ne može biti mirno*[4, str. 371]

Sam Arhita u knjizi o matematici, objašnjavajući dobar metod upravljanja državom i potrebu poznavanja matematike iz tog razloga kaže:

> *Neslogu je zaustavio, a slogu pospešio pronalazak pravog merila: nema naime prisvajanja tuđeg od kada je to merilo pronađeno, vlada, naprotiv, jednakost: po njemu se naime sporazumevamo o međusobnim dužnostima. Po njemu, dakle, siromasi primaju od imućnih, a bogaraši daju potrebnima, jer su i jedni i drugi uvereni da će po njemu posedovati jednako. Tako to merilo postaje propis i kočnica onima koji čine nepravdu, te one koji znaju računati zaustavlja pre nego učine nepravdu, uverivši ih da neće moći ostati neotkriveni kad se dođe do njega; onima pak koji ne znaju misliti, pokaže očito da u njemu greše, te ih tako spreči učiniti nepravdu.*[3, str. 382]

S političkom snagom Taranta, utemeljenom na demokratskim osnovama i helenska egzaktna nauka dobila je neslućeni polet, koji se pre svega odrazio u matematici i matematičkim prirodnim naukama, koje je negovao ne samo Arhita, nego i čitav njegov krug naučnika (Arhedem, Filistion i dr.). Njihov odnos prema moralnim i životnim načelima najstrasnije je inspirisao Platona da uđe u njihov naučni rad i da u njemu pronađe idealan model državnika koga je kasnije u *Državi* opisao, ističući da je za preporod helenskog državnog života neophodan spoj političke i filozofske moći. Sledeći i svog učitelja Sokrata sa druge strane, Platon objašnjava:

> *Kraljevi i vladaoci nisu oni koji drže žezlo, ni oni koji su izabrani od kojih god, ni oni koji kockom dobiju, ni oni koji silom otmu, ni oni koji prevare, nego oni koji umeju vladati.* [4, str. 389]

Primarno značenje i važnost tog stava u antičko vreme, najbolje objašnjava poređenje sa načinom upravljanja Dionizija Starijeg, koji je vladao Sirakuzom, najmoćnijim gradom tog vremena na Siciliji.

> *Iako je živo saobraćao sa mnogim srodnicima i drugarima, i po helenskom običaju, imao krug veoma odanih mladića, ipak čuvanje svoga života nije poveravao njima, nego robovima, svakakvim strancima i čak divljim varvarima. Njega nije šisao ni brijao ni jedan berberin, jer se bojao da bi mu oni mogli preseći vrat, nego je taj opasan posao poveravao ćerkama, koje su inače negovane i držane kao princeze. Svojim ženama ne bi činio posetu, pre nego bi njihove ložnice sasvim izvideo i pretražio. Svoju ložnicu opasao je širokim šancem, preko koga je vodio jedan drveni most, i kad bi vrata za sobom zatvorio, sam bi uklonio most svojom rukom. Kad bi trebalo da održi kakav govor, ne bi govorio sa opšte govornice, nego s kakve visoke kule. Kad mu je jedared neki od njegovih dvorana, Damokle,*

> *slavio njegovu moć, bogatstvo, impozantnu vlast i vojničku snagu i najzad izjavio da ne zna čoveka koji bi od njega bio srećniji, on ga posadi na raskošnu i sjajnu sofru, ali mu nad glavom obesi o konjskoj dlaci oštar mač i tako pokaza kakva opasnost preti njemu, vlastodršcu, pored sve njegove vlasti i moći.* [4, str. 295]

2.3 Arhita i Platon

Iz proučavanja grčkih matematičkih spisa nedvosmisleno proizilazi da je Platon jedna od ključnih tačaka od koje se odnos prema matematici bitno promenio. Mada, sa jedne strane matematika nije bila prevashodna oblast njegovog interesovanja i mada su postojala brojna matematička znanja i dokazi pre Platona, osnivanje njegove *Akademije* i značaj koji je u njenom vaspitnom programu dat matematici, svedoče da su se sporadična matematička istraživanja pretvorila u bazičan sistematski uobličen proces iz koga je kasnije, najverovatnije, ponikao i Euklid, koji nam je u svojim *Elementima* ostavio najkompetentniju zbirku antičkih matematičkih znanja i interesovanja.

Izgleda otuda prirodno da se pri proučavanju Arhitinog života i dela nikako ne sme zaobići njegov odnos sa Platonom, tim pre što su obojica živeli u isto vreme i u nekoliko navrata se čak i lično susretali.

Najpre, Arhita je, kako navodi Miloš Đurić, predstavljao onaj idealan spoj filozofa i državnika u jednoj ličnosti, koga je Platon pretpostavio svakom drugom tipu vladara, još pre svog putovanja na Siciliju i južnu Italiju, gde se susreo sa pitagorejskim učenjem, koje mu je ovaj stav još više učvrstilo.

> *Da bismo pravilno razumeli Platonov zahtev, treba najpre da znamo šta je on podrazumevao pod filozofima kao kraljevima i kraljevima kao filozofima. Taj zahtev ne znači da vlast u državi treba poveriti nekakvim specijalnim stručnjacima, na primer raznim Tesejima koji smatraju da su u beskrajnom lavirintu pojava naišli na Minotaura neznanja i savladali ga, ili neumornim zanatlijama vretena za opredanje Arijadnina konca radi snalaženja u tom lavirintu, ili asketskim usamljenicima, čija se vita contemplativa zadovoljava sitnim ili krupnim otkrivačkim radostima kao jedinim svrhama njihova života, ili specijalnim industrijalcima pojmova i apstrakcija. Platonovu mislilaštvu nije poreklo u čuđenju pred zagonetkama života i smrti, u sklonostima prema razumevanju i objašnjavanju pojava, njihovu člananju i vezivanju kao u drugih istraživača i mislilaca, nego u njegovu zakonodavnom i državotvornom nagonu koji on nosi kao svoje odiskonsko filogenetsko nasledstvo.*[4, str. 267]

Takav slučaj, gde filozofi, na ovaj način shvaćeni upravljaju državom, događao se u istoriji u više navrata i pre i posle Platona. Za njegova života, Arhita je bio najbolje oličenje takvog spoja, ali se ta situacija ponavljala i u staro i u moderno vreme (npr. Marko Aurelije, Fridrih Veliki, despot Stefan Lazarević na našim prostorima, Masarik...). Ređe je bilo ovo drugo, da se vladari bave filozofijom, jer kako je rekao Bakunjin, osećaj vlasti i od najvećeg ljubitelja slobode napravi tiranina.

Potrebu za filozofijom, kao ljubavi i putu ka mudrosti, pod kojim je pre svega podrazumevao umerenost i racionalan pristup stvarima, sam Arhita iz govora koji mu se pripisuju, objašnjavao je ovako:

> *Nijednu pošast pogubniju od putene naslade priroda nije dala ljudima, jer požude željne tih slasti slepo i razuzdano potiču ljude da ih se dokopaju. Od toga se rađaju izdaje domovine, od toga državni prevrati, od toga tajni dogovori s neprijateljima; nema napokon nijednog zločina, ni jedne opačine na koju ne bi poticala želja za putenim užitkom; a bludne čini i preljube i sve takve sramote ne pobuđuju se nikakvim drugim zavodilima nego putenošću. I kako čoveku nije priroda ili kakav bog dao ništa izvrsnije od uma, tako tome božanskom daru i poklonu ništa nije pogubnije od putenosti. Jer gde pohota vlada, nema mesta umerenosti i uopšte u carstvu putenosti ne može opstati krepost.* [3, str. 371]

Snaga Taranta izgrađena na ovakvim principima i postavljena na čvrste osnove pitagorejskog učenja i mudrosti profilisala je njegovu spoljnu politiku i nadživela Arhitu skoro čitav vek, sve dok njegovim tronom nisu više upravljali filozofi [4, str. 288].

Slični stavovi prema državnoj politici doveli su i do ličnih kontakata, izgleda i prijateljstva dvojice filozofa. I u antici i danas, Arhita je najčešće bio poznat po tome što je poslao brod za spasavanje Platona od tiranina Sirakuze, Dionizija Drugog 361. godine. Ovu priču do najsitnijih detalja ispričao je sam Platon u *Sedmom pismu* koje mu se pripisuje, posle čega ih je većina autora čak smatrala prijateljima.

Kako iz pisma proizilazi, Platon se prvi put sreo sa Arhitom dvadesetak godina ranije, 388-387. godine, kada je, posle Sokratove smrti prvi put posetio gradove južne Italije i Sicilije. Najmoćniji od tih gradova bila je Sirakuza, kojom je vladao Dionizije Stariji, moćni tiranin koji je posle pobede nad Kartaginom, stvorio modernu i jaku državu, čija je površina bila tri puta veća od površine Atine sa Pirejom [3, str. 392]. Platon je odmah prepoznao da moć te države proizilazi iz njene mogućnosti da postane najveća zaštita helenske krvi i helenske prosvete, kao i najjače okrilje za ostvarivanje panhelenske ideje [4, str. 394]. Iako mu je posle smrti odao priznanje kao ratniku, moralni jaz između tiranina i filozofa bio je nepremostiv, Platon nije uspeo da ubedi Dionizija Prvog da uspostavi demokratsku vladavinu u okviru koje bi vladao u miru i ljubavi sa narodom, ali je iskra njegove ideje dotakla Diona, Dionizijevog rođaka i savetnika, koji će posle smrti tiranina pozvati Platona da pokuša da prevaspita njegovog sina Dionizija Drugog. Ni ovaj dvostruki pokušaj nije dao rezultate, jer je i Dionizije Mlađi bio previše bahat i samo se deklarativno zanimao za istinsku mudrost. Platonu je to bilo jasno već posle prvog susreta koji se neslavno završio, međutim kada ga je Dionizije, računajući da će time povećati svoj ugled u grčkom svetu, po drugi put pozvao na svoj dvor, Platon je, na nagovor Diona i Arhite

> *koji mu je davao i jemstvo za ličnu bezbednost i koji je njegovu ponovnu posetu Sirakuzi želeo iz političkih razloga, s obzirom na vrednost prijateljskih veza između Taranta i Sicilije*[4, str. 322],

teška srca prihvatio poziv.

Iako ga je pompezno dočekao i posle definitivnog idejnog i moralnog razlaza, pristao da mu na zahtev Arhitin i pitagorejaca iz Taranta poštedi život, dozvolivši mu da otputuje, Dionizije Drugi nije prihvatio ništa od Platonove filozofije,

> *iz tiranskog panja nije se dao izvesti mudrac* i *tako se rastadoše kralj i filozof za čiju je uzajamnu vezu cela Helada vezivala tako velika očekivanja* [4, str. 328].

Obzirom na značaj pripisan samom događaju i ličnosti koje su u njemu učestvovale obavio je oreol slave, kako u antičko, tako i u novije doba.

Ostaje, doduše izvesna senka iza čitavog događaja, koja ne razotkriva jasno pozicije Platona i Arhite u međusobnom odnosu, najpre zato što se samom *Sedmom pismu* često osporava autentičnost, a onda i stoga što Aristotel uvodeći pojam *xenia* (gost - prijatelj) za Platona na tarantskom dvoru ne ostaje decidno jasan koliki je i kakav stepen tog prijateljstva: da li je, pozivajući treći put Platona na sirakuški dvor, Arhita kompromitovao sebe nepoznavanjem suštine Platonovog učenja i Dionizijeve ličnosti, ili je koristio njegov dolazak za sopstvenu političku promociju, koja mu je možda bila ugrožena, ili je čitavoj priči pristupio iz krajnje moralnih i časnih pobuda, kao i sam Platon?!

Arhita se najčešće navodi kao Filolajev učenik, čija je *tri čuvena dela posvećena pitagorejskom učenju, Platon otkupio po ceni od sto mina. Toliko ih je smatrao važnim*[5, str. 22].

Verovatno po navodima Aristoksena i u pokušaju da se objasni divljenje prema gotovo mističnoj potrebi čuvanja tajne mudrosti [3, str. 103], koja kao zajednička svojina može pripadati samo posvećenima sa jedne, i kako ne bi postao predmet kritike sa druge strane (Na početku *Knjige o prirodi* koja mu se pripisuje, Pitagora govori ovako:

> *Ne, tako mi zraka koji udišem, tako mi vode koju pijem, nikada neću trpeti prekora s obzirom na ovu raspravu.*[3, str. 104])

Pitagora i oni koji su ga sledili nisu dozvoljavali demokratizaciju svog učenja sve do Filolaja. Sporne tri knjige (*O prirodi,O odgoju, O državničkoj veštini*) otkupio je, dakle, ili Platon lično, ili Dion Sirakužanin po Platonovom nagovoru u vreme kada je Filolaj dospeo u nemaštinu, ali je to prvo javno eksponiranje učenja koje je gotovo čitav vek bilo obavijeno velom tajne za sve one koji nisu direktno pripadali školi, a koje je Arhita, kao njen sledbenik dobro poznavao. Za razliku od predsokratovaca, koji su uzmičući pred idejom bogostvaranja sveta bili upućeni uglavnom na proučavanje prirode u cilju potrage za zajedničkim imeniteljem kao prauzrokom stvari koji leži u osnovi svega postojećeg i Sokratove antropološke usmerenosti, pitagorejci su u centar interesovanja stavili broj. Njihova ideja broja nije, međutim, ni prauzrok ni cilj, broj je odnos, opis reda i harmonije, u okviru koje sve ima svoje mesto i značenje. To je mera uređenog sveta, koga Pitagora prvi naziva kosmosom, što u izvornom značenju te reči upućuje na nešto lepo, sređeno i skladno [3, str. XVI], a da bi kao takvo opstalo, nije svejedno ni gde se šta nalazi, ni koje je veličine i oblika. Pitagorejci su, naime, brojeve doživljavali kao geometrijske slike: trouglove, kvadrate i pravougaonike, petouglove..., pa su govorili o trougaonim, kvadratnim, petougaonim... brojevima koje su označavali kamičcima u određenom rasporedu [5, str. 22-23], što im je dalje služilo za uobličavanje idealnih proporcija i oblika u arhitekturi i šire [5, str. 138-139].

Samo uređeno i može biti predmet saznanja, jer zna se ono što se može i zna izračunati. Suprotno od toga je haos.

Ono što se, dakle, u broju vidi, u stvarnosti je po sebi dato, a matematika postaje fundamentalna teorija koja nudi uputstva i rešenja. Njeno prenošenje na stvarnost, kao uređeni niz pojava i oblika postaje univerzalni estetski ideal, dopuna ideji reda, ili čovekov prodor u kosmos. Ono što pak matematici izmiče, kao ideja života posle smrti, rešava se verovanjem, ali ono nije individualna čovekova stvar, već proizilazi iz mesta u sistemu, dakle iz rezultata mogućnosti i potreba koje se prema značaju utvrđuju u okviru zajednice. I tu dolazimo do pitanja društvenog i političkog uređenja. Sledeći ideju veličine i značaja, pitagorejska teorija smatrala je da to ne može biti demos (narod), zbog čega im je demokratska tendencija neprihvatljiva.

Stvarajući idelan model države, Platon iz pitagorejske škole preuzima ideju zakona i reda koji vode do sklada u kome pravda, kao glavni cilj, postaje moguća. Međutim, prevazilazeći okvire individualizma, svedenog na kabinetsko izučavanje i intelektualizam i dajući prevagu opšteg nad pojedinačnim, po Sokratovom modelu, Platon govori o državi kao zajednici svih ljudi, dakle čoveka i onoga što ga takvim čini uopšte, a odatle i o zakonu koji je u službi stvaralačkog života. To je jedan idealan utopistički model za koga sam kaže

> *...bar na zemlji ona (država) ne nalazi se nigde. Ali u nebu možda postoji kao uzor za onoga koji hoće da je gleda i da prema onome što je sagledano uobličuje svoj vlastiti život.*[4, str. 258]

Sledeći govore koji mu se pripisuju [3, str. 372-389], izgleda da je takva vrsta uzora, prema kome se usmerava i lični i državotvorni rad u životu, za Platonova vremena najviše vodila Arhitu jer njegovo traganje za brojevima nije bilo ograničeno na prirodni svet. U smislu broja i proporcije objašnjavao je političke odnose i moralno delovanje pojedinca, pri čemu je racionalno izračunavanje identifikovao kao osnovu stabilne države. Anegdote o njegovom odnosu sa robovima ističu da je imao potrebu da deluje na osnovu pravila a ne zbog emocija. Arhita je odbio da kazni ozbiljne propuste svojih robova zato što je bio ljut i ne želeći da deluje iz besa. Uzdržavajući se od glasne grdnje ispisivao je psovke na zidu [3, str. 369-370].

2.4 Naučna delatnost

2.4.1 Fizika

Postoje indicije da je Arhita doprineo razvoju optike, baveći se objašnjenjem sagledavanja slike u ogledalu. Apulej u svojoj *Apologiji* kaže da se Arhita bavio fizičkim problemom refleksije svetla na ogledalo. Arhita smatra da naše oči emaniraju zrake, kako će kasnije misliti i Platon, samo što se ti zraci po Arhiti ne mogu mešati sa drugim zracima, dok je po Platonu uslov viđenja njihovo mešanje sa spoljnom svetlošću.

> *Jer često treba gledati ne samo svoju sliku, nego takođe ispitivati uzroke same slike: da li su, kako kaže Epikur, od nas potekle slike kao neki zraci koji se od tela izlivaju nekim nepresušnim tokom kad se upute na nešto glatko i čvrsto i udareni se odbijaju i natrag potisnuti kreću u suprotnom smeru, ili su to, kako dokazuju drugi filozofi, naši zraci koji ili iz naših očiju izlaze, pa se pomešani sa spoljnom svetlošću sjedinjuju, kako misli Platon, ili samo proizilaze iz očiju bez ikakvog spoljnog oslonca, kako misli Arhita.*[3, str. 379]

Aristotel je bio prvi grčki autor koji je uopšte pominjao optiku kao nauku, smatrajući je podređenom geometriji (Apulej, 78b34). Najverovatnije je da njen razvoj i počinje u prvoj polovini IV veka, kada je Arhita bio najaktivniji, zbog čega je moguće da je u njenom koncipiranju odigrao važnu ulogu. Kao što je pitagorejce fasciniralo to što je muzičke intervale moguće predstaviti odnosima malih brojeva, filozofi IV veka bili su impresionirani činjenicom da se fenomeni optike mogu objasniti geometrijskim slikama. Arhita je očigledno bio radoznali vizionar, koji je pokušao da razjasni i fenomen ogledala kako je pristupao i matematičkim problemima. Ova oblast ipak je više zanimala njegovog savremenika Demokrita, koji je na prelasku iz IV u V vek stare ere dao atomistički prikaz čulnog opažanja. Po njemu stvari emituju odraze koji kroz oko kao spoljne slike dolaze do duše, i same sastavljene od atoma, tačnije atoma vatre. I sama misao, po Demokritu i atomistima, je opisana kao promena u telu. Nema dokaza da je ova teorija bila deo obrazovnog programa na Platonovoj Akademiji, niti pisanih podataka da su se on i Aristotel njome ozbiljno bavili. Iz toga najverovatnije sledi da Demokritova atomistička teorija nije bila deo glavne struje grčke filozofije ali su je prihvatili neki kasniji grčki filozofi, među kojima i Epikur, o čemu on piše u svom delu *O prirodi stvari*.

Uspešnija su Arhitina razmišljanja o šumovima, za koje je on shvatao da proističu iz vibracija koje nastaju zbog prolaska tela kroz vazduh. Polazeći od ovog otkrića, on je postavio hipotezu da i nebeska tela, koja se nalaze u neprekidnom kretanju, moraju proizvoditi šumove. Međutim, ljudi te šumove ne mogu čuti jer oni nisu dati u intervalima, nego su vremenski kontinuirani. Čovek ne može registrovati ni zvukove koji su proizvod slabih vibracija, niti one koji su previše udaljeni od nas, a neke zato što se prevelike jačine jer *prejaki zvukovi ne mogu prodreti u naše uho, kao što se ni u posude sa uskim grlom, kad neko mnogo u njih uliva, ne može ništa uliti* [3, str. 380-381].

Iako imamo malo informacija o Arhitinom pristupu kosmičkim problemima, njemu se pripisuje razvoj najpoznatijih argumenata o beskonačnosti univerzuma u antičkoj misli. Kako kaže Eudem:

> *Arhita je, ovako pitajući vodio razgovor: "Kada bih se našao na kraju prostora, kao na primer na nebu sa zvezdama stajačicama da li bih mogao ispružiti ruku ili štap izvan njega ili ne? I sad reći da ne bih mogao, bilo bi nerazumno, a ako ispružim ruku van, hoće li ono vani biti telo ili prostor (neće biti nikakve razlike kako ćemo videti). Uvek će dakle ići dalje na isti način prema uvek dohvatljivom kraju i uvek će isto pitati, pa ako uvek bude drugo kamo dosegne štapom, jasno je da je to i beskonačnost. Pa ako je to telo, dokazana je pretpostavka, a ako je prostor - a prostor je ono u čemu jeste ili može biti telo - treba ono što je u mogućnosti kao postojeće stavljati u veće stvari, i tako bi i telo i prostor bili beskonačni"*[3, str. 379]

2.4.2 Mehanika

Smatra se da je Arhita na matematičke osnove postavio i razvoj mehanike, ukoliko bismo pod istom podrazumevali antičku definiciju tog problema: opis i objašnjenje rada mašina. Najranije rasprave o mehanici i mehaničkim problemima pripisuju se Aristotelu, koji se bavi opisima mašina koje funkcionišu na principu poluge. Diogen iz Laerte piše:

> *On (Arhita) je prvi mehaniku doveo u jedan sistem primenjujući principe matematike; takođe je prvi primenio mehaničko kretanje prilikom jedne geometrijske konstrukcije, kada je, naime, pokušavao da pomoću preseka polucilindra pronađe dve srednje proporcionale da bi udvostručio kocku*[5, str. 240]

Vitruvije, pisac najveće rimske knjige o arhitekturi, *De architectura, libri decet* tvrdi da je Arhita napisao delo o mašinama [5, str. 240],

> *a i većina poznatih grčkih pisaca, među njima filozof Favorin, najmarljiviji istraživač starih spomenika, napisali su kao sigurno proverenu činjenicu da je Arhita napravio golubicu od drveta po pravilima neke mehaničke nauke i da je ova letela; očigledno je lebdela uz pomoć protivteže terana pomoću komprimovanog vazduha... Kada bi je zaustavio, nije se više dizala. Sve dotle, naime... (prazninu na kraju fragmenta nije moguće rekonstruisati). O konstrukciji golubice pisao je i Wilhem Schmidt iz Helmstedta 22. januara 1903. godine, nagađajući da zamišlja golubicu kako uzleće od grane do grane drveta, čije deblo skriva libramentum (uređaj za protivtežu). Za kretanje uvis upotrebljava se sabijeni vazduh (aura spiritus inclusa) u šupljem telu golubice, koji se, kako on zamišlja, dovodi i sabija skrivenim mehom. Kad se onda otvori jedan ventil golubice, sabijeni vazduh izlazeći stavlja u pogon krila i smanjenjem težine čini golubicu nešto lakšom od protivteže koja je valjcima i konopcem povezana sa golubicom. Time golubica poleće u visinu i tamo ostaje sedeti. On je upoređivao sa olimpijskim orlom i Kanahovim jelenom.*[3, str. 371-372]

Drugi njegov izum bila je čegrtaljka, koja se i danas može sresti kao muzički instrument ili igračka, o čemu će i kasnije biti reči.

3 Udvostručenje kocke

3.1 Delski problem

Postoji više predanja koja se odnose na problem udvostučenja kocke. Najstarije od njih došlo je od Eutokija iz Askalona, koji je u VI veku pne [5, str. 235] komentarisao Arhimedovu raspravu *O sferi i cilindru.* On se poziva na sadržaj pisma koje je Eratosten uputio kralju Ptolemaju III Euergetu. Ovo pismo sadrži sledeće predanje:

> *Kažu da je jedan od drevnih tragičkih pesnika na scenu postavio Minoja koji je dao da se za Glauka*[1] *izgradi grob. Kada je čuo da je grob dug sto stopa u svakom pravcu rekao je: "Načinili ste premalo kraljevsko prebivalište, ono mora biti dvaput veće. Brzo udvostručite svaku stranu groba, ne kvareći njegov divan oblik". Čini se da je on načinio grešku. Kada se udvostruči ivica, površina se uveća četiri a zapremina osam puta. Geometri su stali da izučavaju kako da udvostruče dato telo ne menjajući mu oblik, a ovaj problem nazvan je udvostručenjem kocke, budući da su počeli sa kockom u nameri da je udvostruče.*

Često se spominje i antička legenda o tzv. *Delskom problemu*, koji zahteva da se udvostruči zapremina kocke. Prema predanju Eratostena u svom radu pod imenom *Platonik*, a koga citira Teon, ostrvom Delom, koje se nalazi u Egejskom moru, je vladala kuga. Deljani su, da bi epidemiju zaustavili, tražili savet u Apolonovom proročištu na ostrvu. Apolon im je, preko svojih sveštenika, poručio da udvostruče veličinu zlatnog oltara, koji je imao oblik kocke, u njegovom hramu i kuga će prestati. Arhitekte, postiđene nemogućnošću da reše ovaj problem, otišle su Platonu da ga pitaju za savet. Tada im je on odgovorio da božanstvo nije svoju poruku poslalo zbog udvostručenja oltara, već da prekori Grke zbog njihove ravnodušnosti prema matematici, a pre svega zbog nepoštovanja geometrije. Ne ulazeći u verodostojnost ove priče, legenda je poslužila da se problem nazove *Delskim problemom.*

3.2 Hipokrat sa Hiosa

Hipokrat sa Hiosa živeo je u petom veku stare ere. Postoje tvrdnje da je boravio u Atini između 450. i 430. godine [5, str. 298].Plutarh navodi da je

[1] U grčkoj mitologiji Glauk je sin slavnog i pravednog kritskog kralja Minoja i njegove žene Persifaje, koji se udavio u ćupu sa medom, ali ga je prorok Polid oživeo i dao mu proročke sposobnosti koje mu je kasnije oduzeo

> *neki Hipokrat sa Hiosa, trgovac, naišao na gusarski brod i izgubio sve što je imao, pa je došao u Atinu da tuži gusare, i kako je dugo vremena boravio u Atini radi tužbe, pohađao je filozofe i postigao toliko znanje u geometriji da je pokušao naći kvadraturu kruga.*[3, str. 346]

On je pošao od jedne formulacije Pitagorine teoreme, kod koje se pod kvadratom može podrazumevati mera kvadratne površi:

> *Površina kvadratne površi kojoj je ivica hipotenuza pravouglog trougla jednaka je zbiru površina dveju kvadratnih površi kojima su ivice katete toga trougla.*

Odavde sledi da je površina kruga kome je prečnik hipotenuza pravouglog trougla jednaka zbiru površina dva kruga kojima su prečnici katete tog trougla. Stoga je i površina polukruga nad hipotenuzom jednaka zbiru površina polukrugova nad katetama. Hipokrat sa Hiosa rešio je problem *kvadrature lunule* i na taj način dokazao da "krivolinijski"lik može biti jednak "pravolinijskom". Ovim je rešavanje još jednog antičkog problema, *kvadrature kruga*, dobilo veliki zamah i javila se nada da će problem biti rešen samo konstrukcijama pravih i krugova. Pod *kvadraturom kruga* podrazumeva se konstrukcija kvadrata kojem je površina jednaka površini datog kruga, ili konstrukcija duži koja ima dužinu jednaku obimu zadatog kruga.

Kako je Hipokratov tekst o rešavanju kvadrature lunule izgubljen, o ovom otkriću sačuvano je svedočenje Aleksandra iz Afrodizije, i to u Simplikijevim komentarima Aristotelove *Fizike*. U njiima se, pored Aleksandrovog teksta, nalaze i delovi Eudemove *Istorije geometrije* koji se odnose na Hipokratovu kvadraturu lunule (grč. *meniskos* - $\mu\eta\nu\iota\sigma\kappa o\varsigma$ ili mesečić).

Pogledajmo dokaz *kvadratute lunule*.

Pretpostavimo da je AB prečnik kruga kojem je D središte,a AC i CB ivice kvadrata koji je upisan u taj krug.

Nad ivicom AC kao nad prečnikom opisan je polukrug AEC. Povežimo tačke C i D.

Sada, kako je

$$AB^2 = 2AC^2,$$

a krugovi (pa stoga i polukrugovi) jedan prema drugom odnose se kao kvadrati nad njihovim prečnicima, biće

$$(\text{polukrug } ACB) = 2\ (\text{polukrug } AEC).$$

Ali

$$(\text{polukrug } ACB) = 2\ (\text{kvadrant } ADC),$$

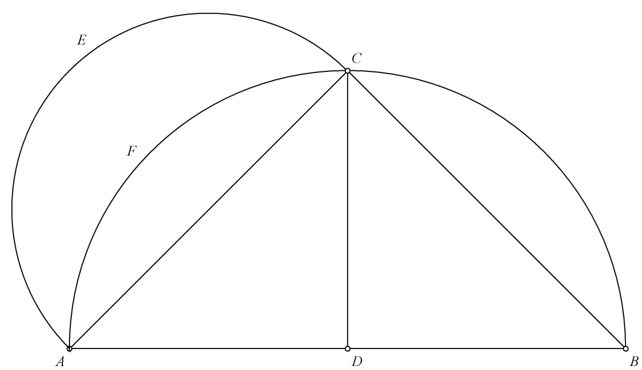
pa je

$$(\text{polukrug } AEC) = (\text{kvadrant } ADC).$$

Ako sada oduzmemo zajednički deo, odsečak AFC, dobićemo da je

$$(\text{lunula } AECF) = \Delta ADC,$$

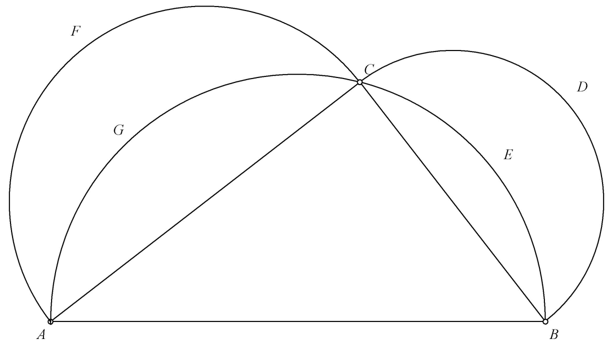
pa je tako dobijena *kvadratura lunule* [5, str. 82-83].



Slika 3: Kvadratura lunule

Nadovezujući se na prethodno izrečeno o jednakosti zbira površina polukruga nad katetama sa površinom polukruga nad hipotenuzom pravouglog trougla, lako je uočiti i da je zbir površina dve lunule nad katetama pravouglog trougla jednak površini tog pravouglog trougla, tj. možemo dati uopštenje prethodno iznetog Hipokratovog otkrića.

Neka je ABC pravougli trougao sa pravim uglom kod temena C i neka je nad hipotenuzom AB opisan polukrug tako da sadrži teme C pravog ugla.Neka su nad katetama AC i BC sa iste strane hipotenuze opisani polukrugovi (kao na *slici 4*). Primećujemo da je zbir površina lunula $BCDE$ i $ACFG$ jednak razlici zbira površina polukrugova nad katetama BC i AC i zbira površina kružnih odsečaka BCE i ACG. Primećujemo i da je površina trougla ABC jednaka je razlici površine polukruga nad hipotenuzom AB i zbira površina istih odsečaka. Dakle, može se zaključiti da je zbir površina ove lunula $BCDE$ i $ACFG$ jednak površini pravouglog trougla ABC.



Slika 4: Zbir površina dve lunule jednak je površini trougla

Proklo svedoči da je Hipokrat sa Hiosa napisao spis *Elementi* [3, str. 345], u kome su se mogli naći stavovi koje je Euklid kasnije uključio u prvu, treću i šestu knjigu svojih *Elemenata.* Tvrdi se da od Hipokrata potiče poznata grčka strogost u geometriji.

Vratimo se problemu udvostručenja kocke. Za rešenje Delskog problema, kako je utvrdio Hipokrat sa Hiosa, dovoljno je naći dve srednje proporcionale za dve zadate duži. Naime, ako su a i b dve zadate duži, dovoljno je naći x i y, njihove dve srednje proporcionale, takve da je

$$a : x = x : y = y : b$$

da bi se rešio problem udvostručenja kocke.Ovo vidimo iz sledeće jednakosti:

$$\tfrac{a^3}{x^3} = \tfrac{a}{x} \cdot \tfrac{x}{y} \cdot \tfrac{y}{b} = \tfrac{a}{b}.$$

Sada, ako je a ivica kocke i ako je zadat odnos $a : b$, tada će i odnos zapremina kocki ivica a i x biti jednak zadatom odnosu. Analogno ovom važi:

$$\tfrac{y^3}{b^3} = \tfrac{y}{b} \cdot \tfrac{x}{y} \cdot \tfrac{a}{x} = \tfrac{a}{b}.$$

tako da je odnos zapremina kocki kojima su ivice y i b jednak zadatom odnosu $a : b$.

Poseban slučaj traženja dve srednje proporcionale je kada je odnos dužina a i b jednak 2 :1, tj. kada je dužina ivice a dvostruko veća od dužine b. Tada je zapremina kocke ivice a dvostruko veća od zapremine kocke ivice x, zapremina kocke sa ivicom y biće dvostruko veća od zapremine kocke sa ivicom b. Na ovaj način, kako je utvrdio Hipokrat sa Hiosa, problem udvostručenja kocke redukovan je na konstrukciju dveju srednjih proporcionala. Eutokije o ovome svedoči da je Hipokrat

tu teškoću pretvorio u drugu ne manju teškoću [3, str. 346].

3.3 Rešavanje Delskog problema

Herman Dils navodi posvetni epigram Eratostena o delskom problemu udvostručenja kocke:

> *Nemoj bar ti istraživati teške poslove Arhitinih valjaka, i ne pokušavaj presecima konusa dobiti Menehmove trijade, pa ni ako se od božanskog Eudoksa opisuju zakrivljenim linijama.*[3, str. 375]

Rešavanjem problema traženja dve srednje proporcionale prvo su se bavili Arhita iz Taranta, pomoću polucilindara, Eudoks, pomoću zakrivljenih linija i Menehmo, čija konstrukcija počiva na poznavanju konusnih preseka. Zabeleženo je i da je sam Platon ukorio Arhitine, Menehmove i Eudoksove učenike zato što su hteli da božanski savršene i idealne geometrijske forme upotrebe i primene u praksi za izradu različitih oruđa, namenjenih upotrebi u ovozemaljskom životu, što bi po njemu značilo degradaciju božanski savršene ideje. U osmoj knjizi *Gozbenih razgovora*, kako navodi Plutarh, Platon je

> *...prekorevao one iz kruga Eudoksova, Arhitina i Menehmova, koji hoće da redukuju udvostručenje kocke na mehaničke konstrukcije, nalazeći srednje proporcionale neteorijskim metodama kojima se dobro u geometriji razara i dovodi do ništavila...*[5, str. 247]

U suštini, Platon i njegovi učenici ne obezvređuju pomenute dokaze po sebi, ali smatraju da nije problem u pronalaženju novih "instrumenata", već u teškoćama koje nastaju pri korišćenju samo osnovnih sredstava, šestara i lenjira, odnosno pri konstrukciji krugova i pravih, koji su zbog svog savršenog oblika jedina dopuštena sredstva za rešavanje geometrijskih problema u Akademiji, što se odrazilo i u prva tri postulata Euklidovih *Elemenata*:

1. *da se može povući od svake tačke ka svakoj drugoj tački prava linija*,
2. *i da ograničena prava može biti produžena u svom pravcu neprekidno*,
3. *i da se može opisati od svakog središta svakim rastojanjem krug.*

Kako je uticaj Platonove Akademije u razvoju nauke bio neosporan, to su jedina dopuštena *sredstva* u geometrijskim konstrukcijama u svim narednim vremenima bila šestar i lenjir. Dakle, jedine dopuštene konstrukcije su konstrukcije pravih i krugova. Kao što ćemo kasnije videti, Arhitina konstrukcija na kojoj počiva rešenje problema udvostručenja kocke nije ispunila ovaj zahtev, tj. nije izvedena samo lenjirom i šestarom. Mnogi ljudi su, od antičkih vremena pa sve do početka XIX veka, pokušavali da reše ovaj problem samo konstrukcijama krugova i pravih, međutim do rešenja nisu došli. Neki od najpoznatijih matematičara svoga vremena koji su se ovim bavili su Vijet (François Viète, 1540-1603), Dekart (René Descartes, 1596-1650), Njutn (Isaac Newton, 1643-1727) i Šal (Michel Chasles, 1793-1880) [5, str. 249].

Ovaj problem dobio je svoje konačno razrešenje tek početkom XIX-og veka. Tada je dokazano da se, u opštem slučaju, nijedan od poznata, ranije pomenuta tri problema antičke matematike ne može rešiti konstrukcijama samo pravih i krugova, tj. lenjirom i šestarom. Dokaz se ne zasniva na geometrijskoj, već na algebarskoj metodi. Naime, prave i krugovi mogu se opisati linearnim i kvadratnim jednačinama, dok se jednačine kojima se opisuju udvostručenje kocke, trisekcija ugla i kvadratura kruga ne mogu svesti samo na linearne i kvadratne. Najveći pomak u rešavanju načinio je 1826. godine Nils Abel (Niels Henric Abel, 1802-1829). On je tada dokazao da algebarske jednačine petog stepena nisu rešive preko korenova, tj. da se njihova rešenja ne mogu izraziti formulama koje se sastoje samo iz koeficijenata jednačine, simbola aritmetičkih operacija i znakova drugog, trećeg, četvrtog... korena. Smatra se da je prvi potpuni dokaz da se tri antička problema ne mogu rešiti lenjirom i šestarom, dao 1837. godine P. L. Vancel [5, str. 249].

3.4 Arhitina konstrukcija

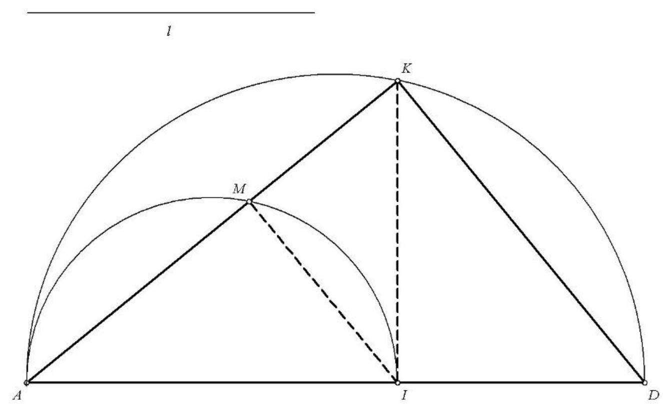
Najstarije, a ujedno i najzanimljivije rešenje problema udvostručenja kocke je Arhitino rešenje.

Arhita polazi od pravouglog trougla ADK, sa pravim uglom kod temena K. Tačka I je podnožje normale iz tačke K na AD, a tačka M podnožje normale iz I na AK. Tada, iz sličnosti trouglova ADK, AKI i AIM važi proporcija

$$\frac{AD}{AK} = \frac{AK}{AI} = \frac{AI}{AM},$$

a iz ovoga proizilazi, prema zaključku Hipokrata sa Hiosa, da je

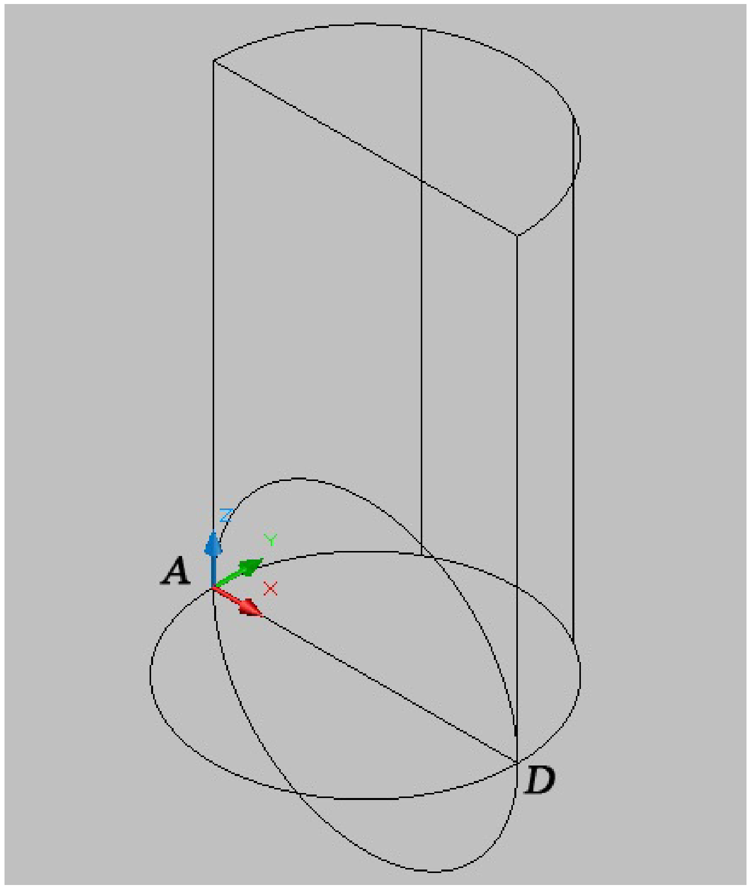
$$\frac{AD}{AM} = \frac{AI^3}{AM^3}.$$



Slika 5: Srednje proporcionale Hipokrata sa Hiosa

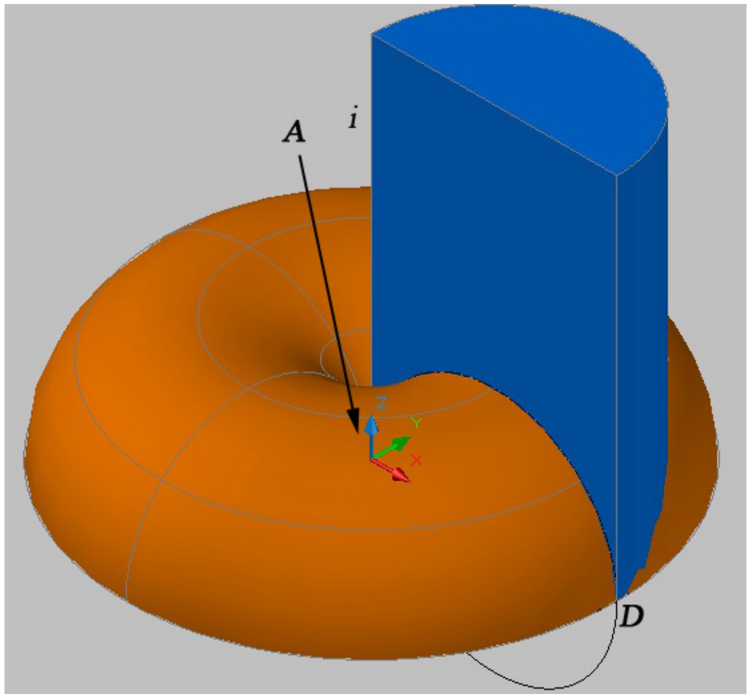
Neka je AM ivica zadate kocke. Tada je odnos zapremina kocki čije su ivice AI i AM jednak zadatom odnosu $AD : AM$. U posebnom slučaju kada je duž AD dvostruko veća od duži AM, zapremina kocke čija je ivica AI je dvostruko veća od zapremine kocke sa ivicom AM. Da bi se rešio problem *udvostručenja kocke* potrebno je konstruisati tačku I na duži AD kada su zadate duži AD i AM.

Prava poteškoća bila je u konstrukciji sličnih trouglova ADK, AKI i AIM. Izborom tačke I na duži AD određeni su položaji tačaka K i M i to tako što tačka K pripada polukrugu čiji je prečnik AD i pri tom je KI normalno na AD a M je podnožje normale iz tačke I na duž AK. Ako se tačka I kreće po duži AD od tačke D ka tački A, tada i AM opada od AD do nule, pa je zbog toga u jednom "trenutku", AM podudarna nekoj unapred zadatoj duži g, manjoj od AD.



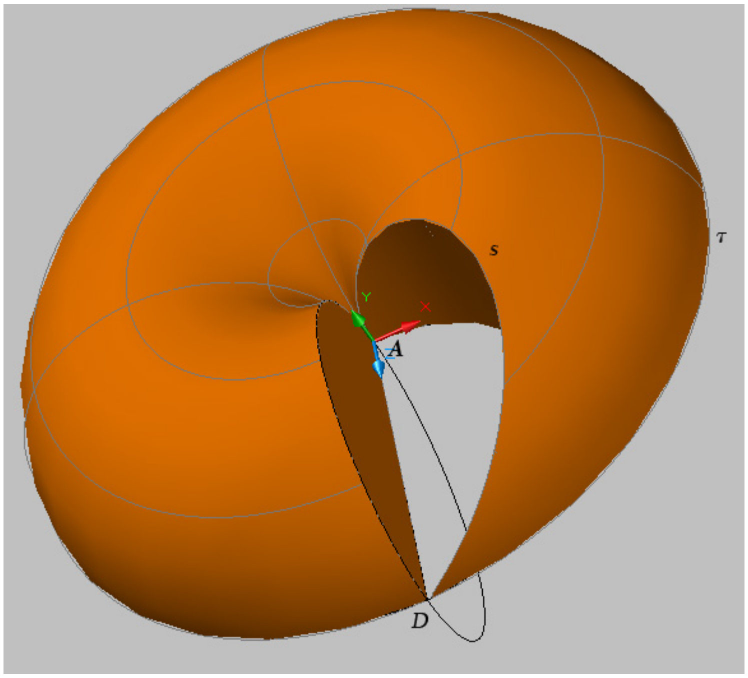
Slika 6: Početak konstrukcije

Taj "trenutak" kada je AM podudarna zadatoj duži g Arhita traži na sledeći način: on ravan trougla ADK postavlja tako da bude upravna na ravan fiksiranog kruga k kojem je AD prečnik, a potom trougao ADK rotira oko prave i koja je u tački A upravna na "horizontalnoj" ravni kruga k. Tada tačka D opisuje krug tačaka D' u "horizontalnoj" ravni. Središte tog kruga je tačka A. Neka je krug l opisan oko trougla $AD'K$, Arhita primećuje da se neprekidnom rotacijom ovog kruga oko prave i, dobija površ nekog torusa τ. Kako osa i rotacije u tački A dodiruje krug l, svi meridijani tog torusa sadržaće tačku A, pa će njegov unutrašnji poluprečnik biti nula.



Slika 7: Poluvaljak i torus

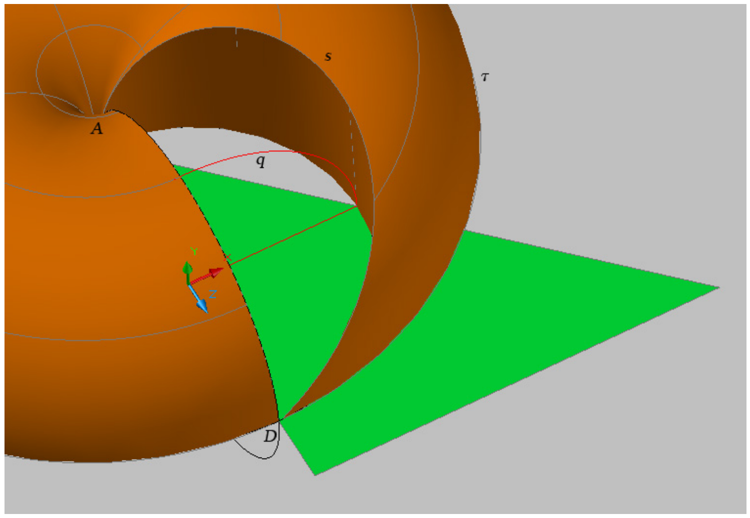
Dopuštajući osnu rotaciju trougla ADK oko prave i, Arhita pretpostavlja da je tačka I tačka preseka rotirajuće duži AD' i "horizontalnog"kruga k i primećuje da tada tačka K pripada pravoj koja je u tački I normalna na ravni kruga k. Stoga ona pripada cilindru σ čije izvodnice sadrže tačke "horizontalnog"kruga i upravne su na ravan tog kruga.



Slika 8: Prostorna kriva s koja predstavlja presek cilindra i torusa

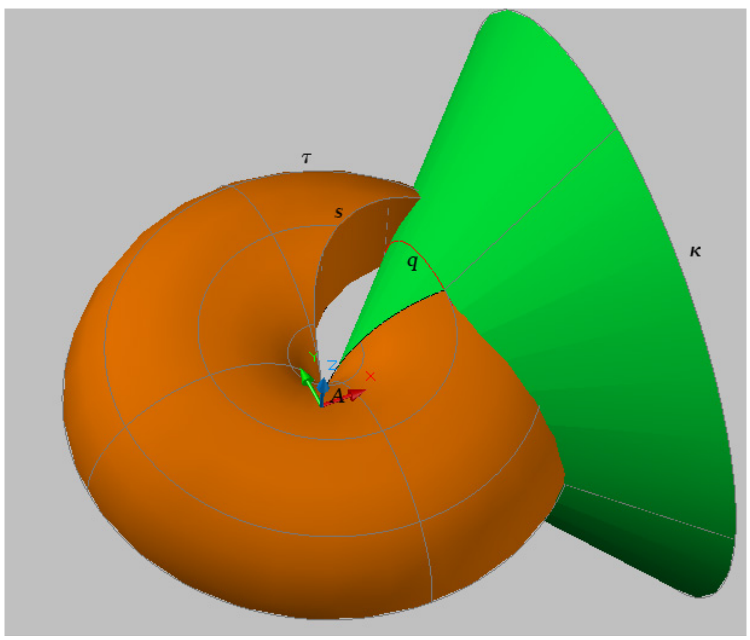
Dakle, tačka K opisuje prostornu krivu s doja se dobija u preseku dveju površi: cilindra σ i torusa τ.

Kako je ugao AMI prav, a ravan trougla $AD'K$ upravna na horizontalnu ravan kruga k, tačka M pripadaće sferi kojoj je AD prečnik. Kako je, pri tome, AM ivica zadate kocke, podudarna nekoj duži g, tačka M će pripadati i sferi sa središtem u tački A i poluprečnikom g. Stoga ona pripada krugu q preseka ovih dveju sfera. U posebnom slučaju konstukcije *dvostrukih proporcionala*, kada je potrebno rešiti problem udvostručenja kocke, duž AD je dvostruko veća od duži AM, pa su stoga ove dve sfere podudarne i središte jedne pripadaće drugoj.

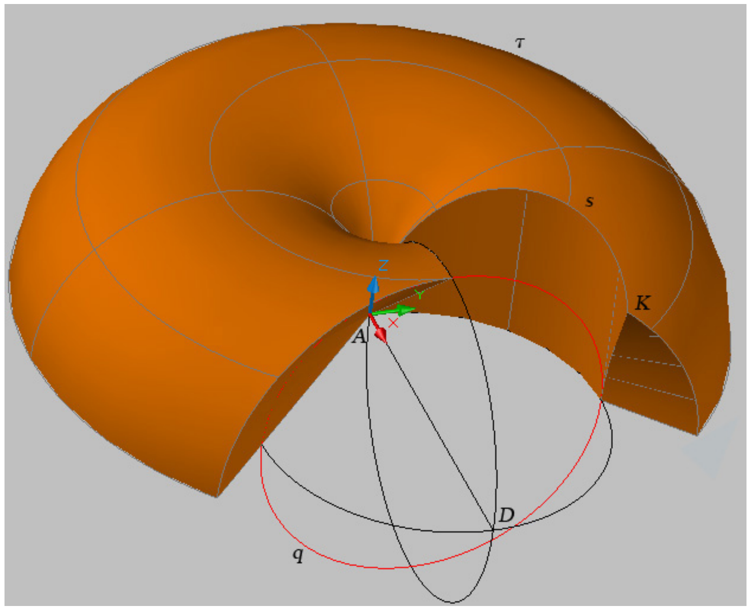


Slika 9: Krug q kao direktrisa konusa i trougao čijom rotacijom nastaje konus

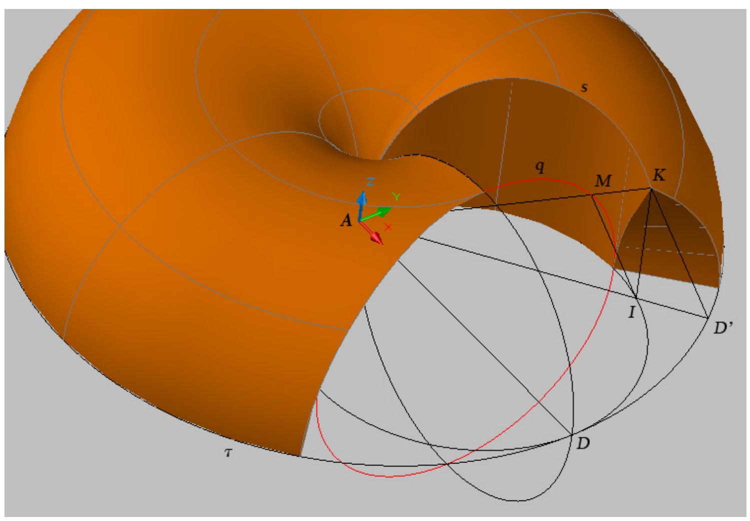
Budući da su tačke A, M i K kolinearne, one će pripadati konusu κ sa temenom A kojem je direktrisa krug q koji se dobija u preseku dveju sfera.



Slika 10: Torus τ iz koga je izvađen polucilindar i konus κ

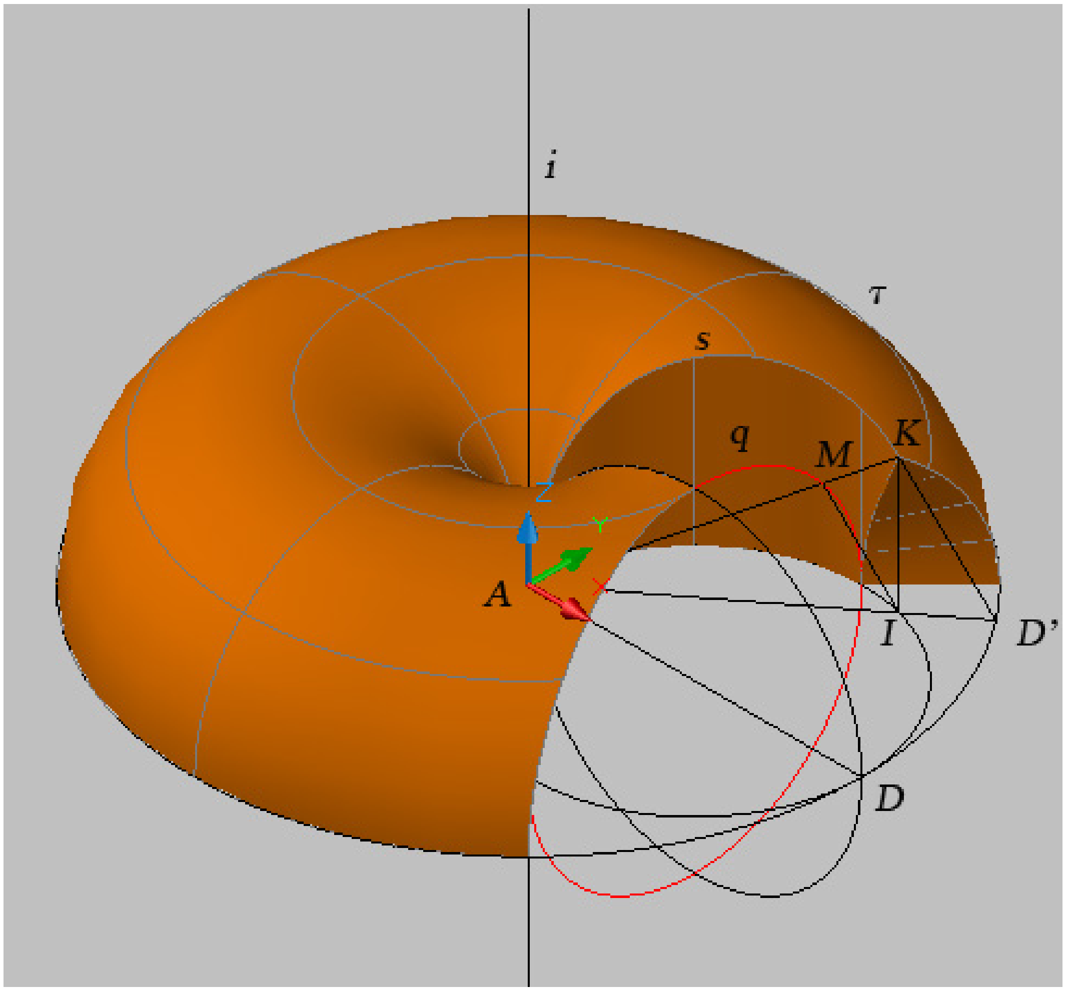


Slika 11: Konstrukcija tačke K koja se dobija u preseku polucilindra, torusa i konusa



Slika 12: Konstrukcija tačaka I, D', M

Stoga je tačka K presek prostorne krive s i konusa κ, tj. presek jednog konusa, jednog cilindra i jednog torusa. Odredivši tačku K, koja predstavlja ključno mesto ove konstrukcije, Arhita je mogao da odredi tačke I i M. Ovim je rešen problem udvostručenja kocke.



Slika 13: Svi elementi Arhitine konstrukcije dvostrukih proporcionala

Smelost i mašta ove veličanstvene konstrukcije ogleda se u tome što on predveđa presek u tački K rotirajućeg kruga (torus), polucilindra i rotirajućeg trougla (konus).Ovo rešenje je u osnovi "kinematično". Štavise, Arhita se ne ustručava da koristi *princip neprekidnosti* kada određuje "trenutak"kada je duž AM koja opada od AD do nule, podudarna datoj duži g manjoj od AD, pretpostavljajući da će neprekidna promenljiva koja je najpre veća, a potom manja od date vrednosti, u jednom momentu biti njoj jednaka [5, str. 240].

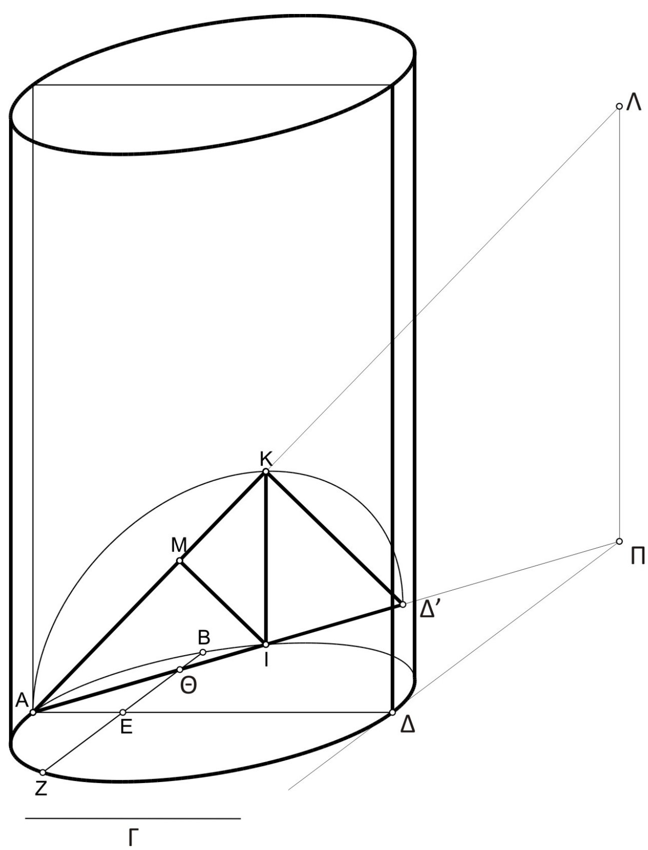
Mi zaista ne znamo šta je navelo Arhitu da proizvede ovaj neverovatan podvig prostorne imaginacije, u cilju konstrukcije *srednjih proporcionala* i time rešavanja problema *udvostručenja kocke*. Kriva koja predstavlja presek poluvaljka i torusa je prva prostorna kriva, tj. kriva koja ne leži u jednoj ravni, u istoriji matematike. Ova kriva danas se naziva *Arhitinom krivom*.

Ipak, kako se Arhita smatra ocem mehanike, to se ne treba čuditi kinematičkom pristupu u rešavanju *Delskog problema*. O njemu Diogen iz Laerte piše:

> *On je prvi mehaniku doveo u jedan sistem primenjujući principe matematike; takođe je prvi primenio mehaničko kretanje prilikom jedne geometrijske konstrukcije, kada je, naime, pokušavao da pomoću preseka polucilindra pronađe dve srednje proporcionale da bi udvostručio kocku* [5, str.240].

Vrednost Arhitinog rešenja problema udvostručenja kocke prevazilazi oblast matematike. Iako nije mehaničko samo po sebi, rešenje je od ogromnog značaja za mehaniku jer omogućava ne samo da se pomoću njega duplira kocka, već da se izgradi telo koje je veće ili manje od datog tela u bilo kom odnosu. Dakle, rešenje omogućava izgradnju mašina na bazi radnog modela.

Za kraj priče o Arhitinoj konstrukciji, prenosimo izvorni tekst u kojem se rešava Delski problem *"Arhitin pronalazak, kako pripoveda Eudem"*, koji potiče iz izgubljene Eudemove *Istorije geometrije* a do nas dolazi preko Eutokija, koji komentariše Arhimedovo delo:



Slika 14: Arhitina konstrukcija

Neka su zadate dve duži $A\Delta$ i Γ. Treba naći dve srednje proporcionale uz $A\Delta$ i Γ. Neka se oko veće duži $A\Delta$ opiše krug $AB\Delta Z$ i neka se nacrta tetiva $AB = \Gamma$. I produžena neka u tački Π seče tangentu kruga u tački Δ. Neka se povuče paralela BEZ liniji $\Pi\Delta O$, i neka se zamisli polucilindar upravan na polukrugu $AB\Delta$, a nad $A\Delta$ vertikalni polukrug u ravni pravougaonika tog polucilindra. Ako se ovaj polukrug (u vertikalnom položaju) zavrti od Δ prema tački B tako da A miruje kao kraj prečnika, seći će površ polucilindra i opisaće na njemu neku liniju. Ako se opet trougao $A\Pi\Delta$, dok miruje $A\Delta$, zavrti u suprotnom smeru od polukruga, opisaće prava $A\Pi$ površ konusa koji će u kruženju preseći liniju na cilindru u nekoj tački. Ujedno će i tačka B opisati polukrug na površini konusa. Sada neka položaj polukruga u kretanju bude Δ'KA kada se ove dve linije seku, a položaj trougla koji se kreće u suprotnom smeru neka bude $\Delta\Lambda A$, a tačka pomenutog preseka neka bude K.

Sada neka BMZ bude polukrug koji opisuje tačka B, a zajednička tetiva tog polukruga i kruga BΔZA neka bude BZ. Od tačke K neka se povuče upravna na ravan polukruga BΔA. Ona će pasti na obod kruga jer je cilindar prav. Neka ona bude KI, a prava koja povezuje I i A neka seče pravu BZ u tački Θ, a prava AΛ neka seče polukrug BMZ u tački M. Neka se spoje K i Δ', M i I, M i Θ. Kako je svaki od dvaju polukrugova Δ'KA i BMZ upravan na osnovnoj ravni, njihova zajednička tetiva MΘ je upravna na ravni kruga[2]*, zato je i MΘ upravna na BZ. Dakle, pravougaonik nad ΘB i ΘZ i zato i nad ΘA i ΘI*[3]*, jednak je kvadratu nad MΘ. Stoga je trougao AMI sličan svakom od trouglova MIΘ i MAΘ,a zato je ugao IMA prav. Ali i ugao Δ'KA je prav. Paralelne su dakle prave KΔ' i MI i, zbog sličnosti trouglova, kao što se odnose Δ'A prema AK, odnosno AK prema AI, tako se i AI odnosi prema AM*[4]*.Dakle, četiri duži Δ'A, AK, AI i AM su neprekidno proporcionalne. Duž AM jednaka je duži Γ, zato što je jednaka i duži AB. Dakle, dvema zadatim dužima AΔ i Γ nađene su dve srednje proporcionale AK i AI.* [3, str. 372-375]

Smatra se da je Euklid preuzeo Arhitine matematičke rezultate, i na taj način su oni do nas su dospeli kroz osmu knjgu *Elemenata*, posvećenu teoriji neprekidnih proporcija [5, str. 243].

[2]Ovde Arhita koristi tvrđenje koje će kasnije uvrstiti Euklid u svoje *Elemente* kao stav XI.19.

[3]Arhita koristi i stav III.35 iz Euklidovih *Elemenata*.

[4]Naime, važi Δ'A : AK = KA : AI = IA : AM.

3.5 Arhitina konstrukcija primenom metoda analitičke geometrije

Koordinatne ose pravouglog koordinatnog sistema u prostoru postavićemo na sledeći način: koordinatni početak je u tački A, x-osa je određena tako da se na njoj nalazi duž AD. Ravan Oxy postavljena je tako da se u njoj nalazi baza cilindra, primenjenog u Arhitinoj konstrukciji. Osa z poklapa se sa osom i torusa τ. Neka je dužina AD jednaka a, i neka je dužina AM jednaka b. Sada možemo dobiti jednačine cilindra, torusa i konusa na sledeći način:
Cilindar:

$$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$$

$$x^2+y^2=ax \qquad (1)$$

Torus τ:

$$(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{a}{2})^2+z^2=(\frac{a}{2})^2$$

$$x^2+y^2+z^2=a\sqrt{x^2+y^2} \qquad (2)$$

Konus κ:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x}=\frac{a}{b}$$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{b^2}x^2 \qquad (3)$$

Neka je tačka $K(x,y,z)$ tačka preseka cilindra, torusa i konusa. Njena normalna projekcija na Oxy ravan je tačka $I(x,y,0)$. Uz to je tačka $A(0,0,0)$. Iz jednačine (2) važi da je

$$a=\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

pa važi da je

$$\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\frac{x2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (4)$$

Iz jednačina (1) i (3) može se uočiti da važi

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{ax}{b}, tj. \sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{x^2+y^2}{b},$$

pa važi sledeće

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\frac{x^2+y^2}{b}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b} \qquad (5)$$

Sada, iz jednačina (4) i (5) važi sledeća jednakost

$$\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b} \tag{6}$$

Kako je $AD' = AD = a$, $AK = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $AI = \sqrt{x^2+y^2}$ i $AM = b$, to iz jednačine (6) važi da je

$$\frac{AD'}{AK} = \frac{AK}{AI} = \frac{AI}{AM},$$

pa za $AK = x$ važi da je

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{b}$$

U posebnim slučaju, kada je $a = 2b$, kocka ivice a je dvostruko veće zapremine od kocke ivice x, tj. problem udvostručenja kocke je rešen.

4 Muzika i matematika

4.1 Uvod

Pre nego što izložimo Arhitin rad na polju muzičke teorije potrebno je da se upoznamo sa osnovnim muzičkim pojmovima. Reč muzika je grčkog porekla ($\mu o \upsilon \sigma \iota \kappa \acute{\eta}$- umetnost muza) i predstavlja umetnost stvaranja određenih odnosa među tonovima. Jedna od definicija muzike je bila da je muzika umetnost koja se služi tonovima kao sredstvom svog izraza i u našu svest dopire pomoću čula sluha. Za nekoga je to neverbalna forma komunikacije koja dotiče ljudski intelekt i može da izazove duboke i burne emocije. Za pitagorejce ona je fenomen prirode, rezultat principa matematike, koji su ljudi samo otkrili, prepoznali i naučili da manipulišu njime. Za Platona muzika je, pored arhitekture, bila jedina prava umetnost, jer je apstraktna.

Sve ono što registrujemo čulom sluha, zovemo opštim imenom zvuk. Zvuk nastaje treperenjem neke elastične čvrste materije (npr. žice, strune, metalne ili drvene pločice...) ili vazdušnog stuba u cevi koja u stanju napetosti teži ka stanju mirovanja i kao zvučni izvor, izaziva svojim treperenjem širenje zvučnih talasa. Brzina zvuka kod srednje temperature od 18^0C iznosi 340 m/s. Zvučni talasi dopiru kroz vazduh do naše svesti preko slušnih organa, koji se sastoje od spoljnog, srednjeg i unutrašnjeg uha. Zvukova ima artikulisanih (određenih) i neartikulisanih (neodređenih). Neodređeni zvukovi su npr. šum, lupa, škripa... a određeni su zvukovi koje proizvode muzički instrumenti, ljudski glas (pevanje) i sl. Zvučni talasi neodređenih zvukova nepravilni su, dok su talasi određenih zvukova pravilni i periodični. Zvukovi određene visine primenjuju se u muzici i zovu se muzički tonovi.

Muzički ton je zvuk koji ima određenu *visinu, jačinu, trajanje i boju.* To su četiri glavne osobine muzičkog tona. Da bi se proizveo ton potrebno je elastično telo koje, napeto, u težnji da se ponovo vrati u mirno stanje, proizvodi treptaje. Vreme koje je telu potrebno da izvrši potpuni treptaj naziva se trajanje treptaja ili *perioda*, a broj treptaja koji se izvrši u jednoj sekundi zove se *frekvencija*. Mera za frekvenciju zove se herc i obeležava se "Hz". Što je veća frekvencija tona, to više zvuči ton koji čujemo. Ljudsko čulo sluha može da registruje mehaničke talase čija je frekvencija između 16 Hz i 20000 Hz. U muzičkoj praksi upotrebljavaju se tonovi od 16 Hz do, otprilike 5000 Hz. Da bi se odredili što tačniji odnosi tonova po visini, ustanovljen je 1885. godine tzv. "kamerton"od 435 Hz, a to je takozvano *"normalno a-a1"*. Savremeni kamerton ima 440 Hz.

Jačina zvuka zavisi od energije koja je preneta zvučnom izvoru. Amplituda i zapremina ili masa tela koje treperi odlučuju o jačini tona. Jačina zvuka meri se u decibelima (dB). Čovek može da čuje zvuke jačine od 5 dB, ta jačina se zove prag čujnosti, do 120 dB - granica bola.

Svaki muzički ton predstavlja složenu muzičku pojavu jer se sastoji iz glavnog tona, (tj. onog koji stvarno čujemo) i u njemu sadržanih "harmonskih gornjih tonova"ili alikvotnih tonova. Ako je osnovni ton frekvencije $\boldsymbol{f}$, alikvotni tonovi koje stvaraju muzički instrumenti predstavljaju spektar tonova manje jačine čije su frekvencije celobrojni umnošci od $\boldsymbol{f}$, tj. $2\boldsymbol{f}$, $3\boldsymbol{f}$, $4\boldsymbol{f}$... Broj i jačina alikvotnih tonova utiču na oblik treptaja, odnosno zvučnih talasa, koji se dele na transferzalne (na primer kod treperenja žice, metalne ili drvene pločice...) i longitudalne (na primer kod duvačkih instrumenata). Gornje tonove ne čujemo kao samostalne tonove, već kao boju (tembr) glavnog tona. Visina frekvencije gornjih tonova može biti vrlo različita kod različitih muzičkih instrumenata (npr. kod flaute se penje do 4000 Hz, kod violine do 8000 Hz, a kod trube do 9000 Hz...), prema tome svaki instrument ima svoju različitu tonsku boju kao i svaka vrsta pevačkog glasa.

Trajanje tona uslovljeno je postojanošću treperenja zvučnog tela, a ova zavisi od trajnosti spoljnog uticaja koji izaziva treperenje. Kada zvučni talas naiđe na neko telo ili vazdušni prostor sa istom ili sličnom frekvencijom, izazove kod ovih zajedničko treperenje ili rezonancu, koja pojačava zvučni talas. Da bi se izazvalo takvo pojačavanje zvučnih talasa, treba frekvenciji tonova da odgovara frekvencija rezonantnog tela. Zato visoki tonovi zahtevaju manja, a duboki veća tela za rezonancu (npr. violina i kontrabas).

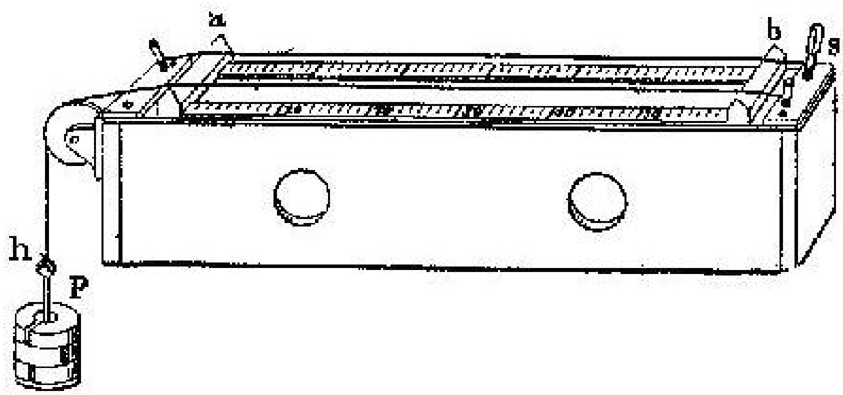
4.2 Pitagorejska lestvica

Arhitin rad na polju muzičke teorije nadovezuje se na rad Pitagore. Za Pitagoru[5] se vezuju počeci teorije muzike. Pitagorejci su, polazeći od rezultata koje su dobili izučavajući harmonije u muzici, došli do zaključka da je u osnovi svega postojećeg ***broj***. Smatrali su da je matematički princip jedan univerzalan princip i da se harmonija univerzuma zasniva na harmoničnim odnosima među brojevima. Pitagorejci su brojeve doživljavali kao geometrijske slike: trouglove, kvadrate, pravougaonike, petouglove... Tako postoje trougaoni, četvorougaoni, petougaoni brojevi. Oni su zamišljeni kao geometrijski likovi koji predstavljaju osnovne elemente od kojih su sastavljene sve stvari i sva živa bića.

Sve je počelo otkrićem tzv. *zakona malih brojeva*, koji na matematički način opisuje razliku između našeg osećaja konsonantnosti (harmonije) i disonantnosti. Pitagorin zakon malih brojeva kaže da su dva tona konsonantna

[5]Vreme njegovog života nije sa sigurnošću određeno. Pozivajući se na Boetijeve prevode antičkih spisa (početak VI veka?) svi kasniji istraživači smatraju da je Pitagora rođen oko 569. g.pne. na Samosu, odakle se oko 530. g.pne. preselio u Južnu Italiju, gde se formira osnov njegove filozofije, i da je umro oko 495. g.pne. u Metapontu [1, str. 229]

ako im frekvencije stoje u odnosu malih prirodnih brojeva. Pitagora je do tog zakona došao polazeći od rezultata eksperimenata koje je izvodio na *monokordu*. Sam naziv instrumenta izveden je od grčke reči monos ($\mu\acute{o}\nu o\varsigma$) - jedini i korde ($\chi o\rho\delta\eta$) - žica . Monokord je muzički instrument kod koga je preko rezonantne kutije oblika kvadra zategnuta jedna žica. Ona je na jednom kraju učvršćena, dok je drugi kraj preko kotura opterećen tegom koji održava stalno isti napon žice. Na instrumentu se nalazi još i pokretna kobilica. Njenim se pomeranjem varira dužina žice pod konstantnim naponom.



Slika 15: Monokord

Visina tona koji proizvodi jedna određena žica zavisi od njene dužine. Što je žica kraća, to je ton viši. Skraćivanjem žice u odnosu 2 : 1, tj. polovljenjem žice, dobija se ton koji je za oktavu viši od polaznog tona. Skraćivanjem žice na dve trećine dužine, tj. podelom žice u odnosu 3 : 2, dobija se ton za kvintu viši od polaznog tona. Ako žicu skratimo za jednu četvrtinu, tj. podelimo je u odnosu 4 : 3, ton će biti viši za kvartu.

Tonska lestvica ili skala je jednosmeran i postepen niz tonova, najčesće u rasponu oktave. Skala se, u principu, može urediti na beskonačno mnogo načina. Međutim, polazna osnova za gradnju skale je činjenica da svakom tonu odgovara jedna frekvencija i da ton za oktavu viši od polaznog tona ima dva puta veću frekvenciju od njega.

Pitagorejska skala može se dobiti jednostavnim matematičkim postupkom, koji se svodi upravo na poznavanje osnovna tri intervala: oktave, kvinte i kvarte. Sabiranju dva susedna tonska intervala odgovara množenje njihovih brojnih odnosa. Kako interval kvinte iznosi $\frac{3}{2}$ a interval kvarte $\frac{4}{3}$, važi da je $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{1}$, tj. kvinta + kvarta = oktava. Ovo možemo izreći i na sledeći način: ako osnovni ton ima frekvenciju f, ton za kvintu viši od osnovnog tona ima frekvenciju $\frac{3}{2}$f, dok ton za kvartu viši od drugog tona ima frekvenciju $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$f, tj 2f.

Polazeći od tona C, čija relativna frekvencija iznosi 1, odredićemo relativne frekvencije ostalih tonova C-dur lestvice: D, E, F, G, A, H, C'.

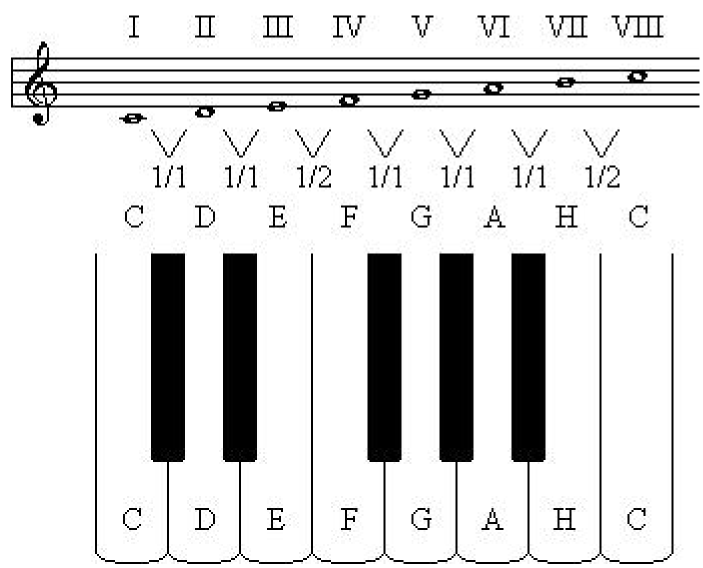
Velike sekunde (C-D, D-E, F-G, G-A, A-H) nalazimo kao razliku između intervala kvinte i kvarte.

Kvinta - kvarta = velika sekunda, tj. $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$.

Male sekunde (E-F i H-C) dobijaju se tako što se od intervala kvarte oduzmu dve velike sekunde i one iznose $\frac{4}{3} : (\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8}) = \frac{256}{243}$. Ovako dobijena pitagorejska tonska lestvica se može pregledno predstaviti sledećom tabelom:

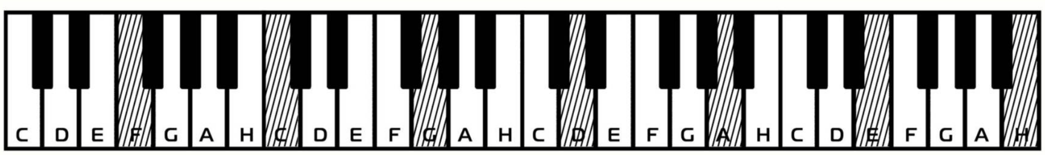
Tonovi	C	D	E	F	G	A	H	C'
Frekvencije u odnosu na ton C	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
Frek. u odnosu na niži susedni ton		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

Ovi tonski intervali najbolje se mogu ilustrovati na klavijaturi. Velikim sekundama odgovaraju dve susedne bele dirke između kojih se nalazi crna dirka a malim sekundama one dve susedne bele dirke između kojih ne postoji crna dirka (poluton).



Slika 16: Oktava

Pored ovog načina, postoji i drugi način da se dobiju frekvencije svih tonova pitagorejske tonske skale i to preko tzv. kvintnog kruga. Ako ton C, čija relativna frekvencija iznosi 1, podignemo za kvintu gore, dobija se ton čija je frekvencija $1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, tj. ton G. Ako sada ovaj ton podignemo za kvintu, dobija se ton čija je frekvencija $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$. Kako je frekvencija ovog tona veća od 2, ton se nalazi u drugoj oktavi. Ton koji njemu odgovara u prvoj oktavi, tj. čija je frekvencija dva puta manja je ton sa frakvencijom $\frac{9}{8}$, tj. ton D. Sledeći ton za oktavu viši ima frekvenciju $(\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$ i nalazi se u drugoj oktavi. U prvoj oktavi njemu odgovara ton sa frekvencijom $\frac{27}{16}$, tj. ton A. Ponavljanjem postupka dobija se ton sa relativnom frekvencijom $(\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16}$, koji se nalazi u trećoj oktavi. Njemu u drugoj oktavi odgovara ton sa frekvencijom $\frac{81}{32}$, a u prvoj oktavi ton sa frekvencijom $\frac{81}{64}$, tj. ton E. Nadalje, $(\frac{3}{2})^5 = \frac{243}{32}$, ton sa ovom frekvencijom nalazi se u trećoj oktavi. Njemu u prvoj oktavi odgovara ton sa frekvencijom $\frac{243}{128}$, tj. ton H. Relativna frekvencija tona F se dobija tako što se odredi frekvencija tona za kvintu nižeg od polaznog tona C, tj $1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$, zatim se odredi ton za oktavu viši, dakle, u prvoj oktavi relativna vrekvencija tona F je $\frac{4}{3}$.



Slika 17: Generisanje tonova pitagorejske tonske skale

Nastavkom započetog postupka dobili bismo i sve "međutonove", kojima odgovaraju crne dirke na klaviru. Redosled generisanja međutonova je sledeći: $F^\sharp$, $C^\sharp$, $G^\sharp$, $D^\sharp$, B.

Pitagorejska skala je matematički perfektna u odnosu na početni ton, ali ima i jedan nedostatak koji se ispoljava kada pokušamo da promenimo tonalitet. Naime, ona se izvođjenjem 12 uzastopnih kvintnih skokova ne može tačno zatvoriti. Matematičko objašnjenje ovoga je sledeće: polaskom od osnovnog tona C nakon 12 kvintnih skokova trebali bismo dobiti ton C koji je u sedmoj oktavi od polazne, tj. sa relativnom frekvencijom $2^7 = 128$. Međjutim, frekvencija ovako dobijenog tona C je $(\frac{3}{2})^{12} = \frac{531441}{4096} = 129,7463$. Ovo odstupanje se može brojčano izraziti kao količnik

$$\frac{(\frac{3}{2})^{12}}{2^7} = \frac{531441}{524288} = 1,0136$$

i ono se u muzičkoj teoriji naziva *"pitagorejska koma"*. Ovaj koeficijent predstavlja razliku u frekvenciji između dvanaeste kvinte i sedme oktave. Kao nedostatak pitagorejske skale može se navesti i to da osnovni durski trozvuk koji čine četvrti, peti i šesti alikvotni ton, tj. tonovi C-E-G ima sledeću brojnu proporciju $1 : \frac{81}{16} : \frac{3}{2}$ ili $64 : 81 : 96$, što se ne uklapa u potpunosti u zakon malih brojeva.

Kod pitagorejaca brojevi nisu samo dublji od stvarnih stvari, već su i u samim stvarima dublji od njihovih neposredno datih svojstava (kvaliteta) i oni su princip njihove strukturne gradnje. Zato su, po pitagorejcima, brojevi "ono najmudrije". Filolaj, koji je bio pitagorejac, govori kako kad bi sve bilo bez granica, ono ne bi moglo biti predmet saznanja: to znači da brojevi nemaju samo ontološko već i gnoseološko značenje (koje je blisko estetskom). Granica je princip rasčlanjavanja, oformljavanja i broj je princip harmonije. U broju se objedinjuju suprotnosti i time se oblikuje strukturna bivstvena figurnost i muzikalnost. Filolaj kaže:

> *Kako u osnovi svega bivstvujućeg leže dva počela (granica i beskonačno; 1 i 2), koji nisu ni slični ni jednorodni, nemoguće bi bilo da oni obrazuju kosmos da im se nije prisajedinila i harmonija, bez obzira na koji je način ona nastala. Jednakom i istorodnom nije potrebna nikakva harmonija ali nesličnom i kvantitativno nejednakom, poređanom jednom kraj drugog, harmonija je bila neophodna da bi se mogli održati kao celina sveta*[10, str. 33].

Filolaj takođe kaže:

> *Muzika je harmonično spajanje suprotnosti, dovođenje mnoštva u jedinstvo, saglasje raznoglasnog* [10, str. 33].

Kao posledicu primene pitagorejskih brojeva na konstrukciju bivstvovanja, imamo muzičko brojčani kosmos sa sferama koje su na rastojanjima saglasno brojčanim i harmonijskim odnosima. Brojčana harmonija sveta stvara:

- kosmos, u kome su sfere simetrično raspoređene saglasno muzičkim tonovima
- duše i sve stvari koje u sebi imanentno sadrže kvalitativno-harmonijsku strukturu

Pri tom, duše dobijaju harmoniju i unutar samih sebe uz pomoć katarsisa (smirivanjem i lečenjem celokupne čovekove psihe), dok se iz stvari izvode elementarni akustički momenti zasnovani na harmonijskom pristupu: brojčani odnosi tonova, veza visine tonova sa brzinom kretanja i frekvencijom, kao i teorija konsonansa i disonansa, razni eksperimenti deljenja tonova. Upravo ovim problemima, možda najviše od svih pitagorejaca, bavio se Arhita iz Taranta.

4.3 Arhita i muzika

Arhita je smatrao da se ton sastoji iz delova koji se moraju izraziti u brojčanoj proporciji. On se trudio da zadrži superpartikularne proporcije u podeli na tetrahorde, smatrajući da je simetrija intervala u samoj prirodi harmonije. U muzičkoj teoriji pod superpartikularnim odnosom podrazumeva se odnos $\frac{n+1}{n}$.Tonski sistem antičke Grčke polazi od intervala kvarte ($\frac{4}{3}$). Popunjavajući ovaj interval sa još dva tona dobijaju se grupe od po četiri tona - *tetrahordi.* Grčki tetrahord je niz tonova od viših ka nižim, lestvice su silazne. Pitagorin dijatonski tetrahord je tetrahord sa intervalima $\frac{9}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{256}{243}$, o kojima je bilo reči u prethodnom tekstu koji se odnosi na izgradnju pitagorejske tonske skale. Ovaj tetrahord je korišćen od strane Filolaja i Platona. Arhita razlikuje tri vrste tetrahordske tonske lestvice: *enharmonijsku, hromatsku* i *dijatonsku.* Dijatonski tetrahord sastoji se iz jednog polutonskog i dva celotonska intervala (A-G-F-E). Hromatska tonska vrsta deli tetrahord u jednu prekomernu sekundu i dva polutona (A-Ges-F-E), dok enharmonijska tonska vrsta deli tetrahord na jednu nedeljivu veliku tercu i dva četvrt tona (A-F-Fes-E). Brojčani odnosi između pojedinih tonova u lestvici, do kojih je došao Arhita, mogu se predstaviti na sledeći način:

Dijatonska vrsta	*Hromatska vrsta*	*Enharmonijska vrsta*
A	A	A
$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{5}{4}$
G	Ges	F
$\frac{8}{7}$	$\frac{243}{224}$	$\frac{36}{35}$
F	F	Fes
$\frac{28}{27}$	$\frac{28}{27}$	$\frac{28}{27}$
E	E	E
$\frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{28}{27} = \frac{4}{3}$	$\frac{32}{27} \cdot \frac{243}{224} \cdot \frac{28}{27} = \frac{4}{3}$	$\frac{5}{4} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{28}{27} = \frac{4}{3}$

Primećujemo da su dijatonska i enharmonijska tonska vrsta zadržale superpartikularni odnos u intervalima, ali da je ovaj odnos narušen na dva mesta u hromatskoj tonskoj vrsti.

Spajanjem dva ovakva tetrahorda dobijaju se cele tonske lestvice.

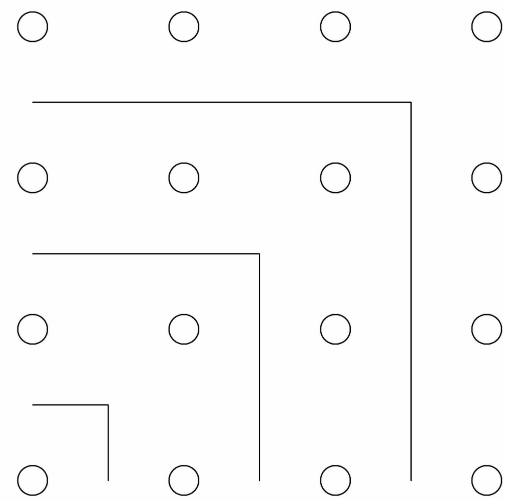
Jedan od važnih rezultata analize muzike u smislu odnosa celih brojeva jeste Arhitino saznanje da muzičke intervale nije moguće podeliti na jednake delove: oktava nije deljiva na dva jednaka dela, nego na kvartu i na kvintu, kvarta nije deljiva na dva jednaka dela, nego na dva cela tona i na ostatak. Ceo ton ne može se podeliti na dva jednaka tonska dela. Ovo proizilazi iz toga što se u skupu prirodnih brojeva ne može izračunati nepoznata x iz sledećih proporcija: $2 : x = x : 1$, ili $3 : x = x : 2$, ili $4 : x = x : 3$, ili $5 : x = x : 4$, ili $9 : x = x : 8$. S druge strane, moguće je podeliti duplu oktavu na dva jednaka dela. Ovo se može uočiti iz toga što se za interval duple oktave $4 : 1$ može odrediti x tako da je $4 : x = x : 1$, tj. za vrednost $x = 2$ važi da je $4 : 2 = 2 : 1$, tj. dupla oktava može se podeliti na dve oktave.

Boetije piše o Arhitinom dokazu da se superpartikularna proporcija ne može deliti na jednake delove proporcionalnim umetanjem srednjeg broja.

> *Neka je superpartikularna proporcija $A : B$. Uzimam u istoj proporciji najmanje brojeve: C i $D + E$.Budući da su u istoj proporciji najmanji brojevi C i $D+E$ i da su superpartikularni, to broj $D + E$ nadvisuje broj C jednim svojim i njegovim delom; neka to bude D. Kažem da D neće biti broj nego jedinica. Ako je naime D deo broja $D + E$, broj D će biti divizor i broja E, a takođe to će biti i broja C. Oba, dakle, broja će biti deljivi brojem D,a to je nemoguće. Jer brojevi koji su najmanji u istoj proporciji od bilo kojih drugih brojeva, oni su međusobno "prvi"i samo kao razliku zadržavaju jedinicu. Stoga ne upada nijedan srednji broj koji bi onu proporciju delio u dva jednaka dela.*[3, str. 378].

Tvrđenje koje ovde daje Arhita citira Euklid u svojim *Elementima* u VII knjizi, stav 22. Na osnovu ovoga van der Verden tvrdi sa su pitagorejci u IV veku pne. imali razvijenu teoriju brojeva, kao i da je Arhitina teorija muzike uticala na sadržaj VII i VIII knjige *Elemenata.* Napomenimo, kako kaže Taneri a prenose mnogi matematičari, da je razvoj muzičke teorije inicirao razvoj logistike. Arhita je logistiku smatrao ne samo praktičnom umetnošću računanja, već naukom o odnosima između brojeva i po njemu je ona superiornija od ostalih nauka. On kaže da je karakteristično za pitagorejce da projektuju same brojeve u vidljivi svet, ali da je njihov odnos u svetu tonova. Proporcionalnost, za Arhitu, nije vezana samo za teoriju brojeva, već i za geometriju (dvostruke proporcionale) i muzičku teoriju (tonski intervali) i za njega su ove nauke povezane.

Prethodno tvrđenje ogleda se u sledećem: ako bi postojao interval $\frac{b}{a}$ koji interval $\frac{n+1}{n}$ deli na jednake delove, tada bi važilo da je $\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{n+1}{n}$, tj. $\frac{b^2}{a^2} = \frac{n+1}{n}$. Kako su a^2 i b^2 kvadratni brojevi, onako kako su ih doživljavali pitagorejci, to oni ne mogu biti u superpartikularnom odnosu. Štaviše, jedini intervali koji se mogu podeliti na dva jednaka dela su oni koji se mogu predstaviti količnikom kvadratnih brojeva. Primer ovoga je interval pitagorejske terce $\frac{81}{64}$, koji se može podeliti na dva osnovna tona sa odnosom $\frac{9}{8}$. Ovaj rezultat pojavljuje se kasnije kod Euklida. On je u svom delu koje se bavi matematičkom osnovom muzike *Sectio Canonis*, pored dokaza iracionalnosti brojeva oblika $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, koji je preuzeo od Arhite, dokazao i iracionalnost brojeva oblika $\sqrt[m]{\frac{n+1}{n}}$.



Slika18: Kvadratni brojevi kod pitagorejaca

Tako je Arhita ustanovio jedan niz iracionalnih brojeva koji se dobijaju kao rešenja jednačina, npr. $\frac{3}{x} = \frac{x}{2}$, tj. niz kvadratnih korena koji se dobijaju iz razlomaka. Taj niz, u rastućem poretku, čine brojevi $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{72}$...[6]

Arhiti i Didimu se pripisuje utvrđivanje odnosa u akordima, kao i kasnije upoređivanje različitih akorda i uzajamno upoređivanje po pitanju skladnosti. Predmet upoređivanja su tri osnovna akorda pitagorejske muzike i to: akord oktave (odnos 2:1), akord kvinte (odnos 3:2) i akord kvarte (odnos 4:3). Ako u brojnom odnosu akorda oktave oduzmemo od brojeva 2 i 1 po jednu jedinicu i saberemo tako dobijene ostatke dobija se broj 1. Ako isti postupak ponovimo sa akordom kvinte dobija se broj 3, tj. $(3-1)+(2-1)=3$. Ponavljajući ovo za akord kvarte dobija se broj 5, tj. $(4-1)+(3-1)=5$. Oni daju sledeće tumačenje dobijenog rezultata: što je broj koji se na ovakav način dobija manji, to je akord savršeniji. Najsavršeniji akord je oktava jer je u njoj različni element 1, zatim je kvinta, jer je u njoj različni element 3, a najmanje savršen od ovih je akord kvarte, u njoj je rezlični element 5. Nastavljajući se na ovo mi bismo mogli da utvrdimo da je još manje savršen akord terce (odnos 5:4), sa različnim elementom 7.

Arhiti se pripisuje i uvođenje pojma frekvencije. Naime, on je smatrao da se odnos akorda nalazi u brojevima, takvi odnosi sastoje se u treperenjima i da

[6]Prema Platonu, Teodor iz Kirene (oko 430. g. pne.) dokazao je iracionalnost brojeva $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{17}$, ali ne navodi iracionalnost broja $\sqrt{2}$, iz čega se može zaključiti da je to bilo poznato još u Pitagorino vreme. [13, str. 110]

brzo treperenje daje visok ton, jer neprestano udara i brže potiskuje vazduh, a sporo treperenje daje dubok ton jer je tromije. Takođe, smatrao je i da zvuk koji je posledica brzog treperenja brže dolazi do uha slušalaca. Do ovih spoznaja Arhita je došao ispitujući zvuk koji proizvodi prutić kada se pomera polako i slabo, odnosno brzo i jako. Isto se može primetiti i kod frule: vazduh koji izlazi iz usta i upada u rupice najbliže ustima proizvodi viši zvuk zbog jakog pritiska, a koji dopire u rupice dalje od usta daje dublji zvuk. Takođe, Arhiti se pripisuje i izum čegrtaljke, koja se koristila i u mističnim obredima. Ako se ona okreće lagano, ispušta dubok zvuk, a ako se okreće snažno, daje visok zvuk. Arhita je, takođe, utvrdio kako visina tona koji proizvodi zategnuta struna zavisi od dužine strune koja vibrira, kao i da su dužina strune i visina tona obrnuto proporcionalni. O ovome, Platon u *Državi* kaže da su *"pitagorejci valjani ljudi koji daju posla žicama i ispituju ih"*. Međutim, moramo primetiti da je Arhita dobro povezao brzinu treperenja sa visinom tona koji se dobija, ali je pogrešio što se tiče brzine kretanja samog zvuka. Brzina zvuka ne zavisi od njegove frekvencije[7]. Iako Arhitina teorija frekvencija nije potpuno tačna, ona je, prilagođena od strane Platona i Aristotela, ostala dominantna teorija tokom antike.

Arhita je došao do tri tipa proporcija u muzici i razlikovao je aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku proporciju (sredinu). Govoreći o srednjim proporcionalama, Arhita piše:

> *Postoje tri srednje proporcije u muzici: jedna je artimetička, druga geometrijska i treća inverzna, koju zovu harmonijska. Aritmetička je sredina kada tri brojna pojma pokazuju jednaku uzastopnu razliku: koliko prvi nadvisuje drugi, toliko drugi nadvisuje treći. Kod te analogije događa se to da je odnos među većim pojmovima manji, a među manjima veći. Geometrijska je sredina kada se prvi brojni pojam odnosi prema drugom kao drugi prema trećemu. Kod njih veći imaju isti međusobni odnos kao manji. Inverzna sredina, koju zovemo harmonijska, jeste onda kada se brojni pojmovi odnose ovako: za koliki deo vlastite veličine prvi pojam nadvisuje drugi, za toliki deo trećega srednji pojam nadvisuje treći. Kod te analogije je odnos između većih pojmova veći, a između manjih manji.*[3, str. 381]

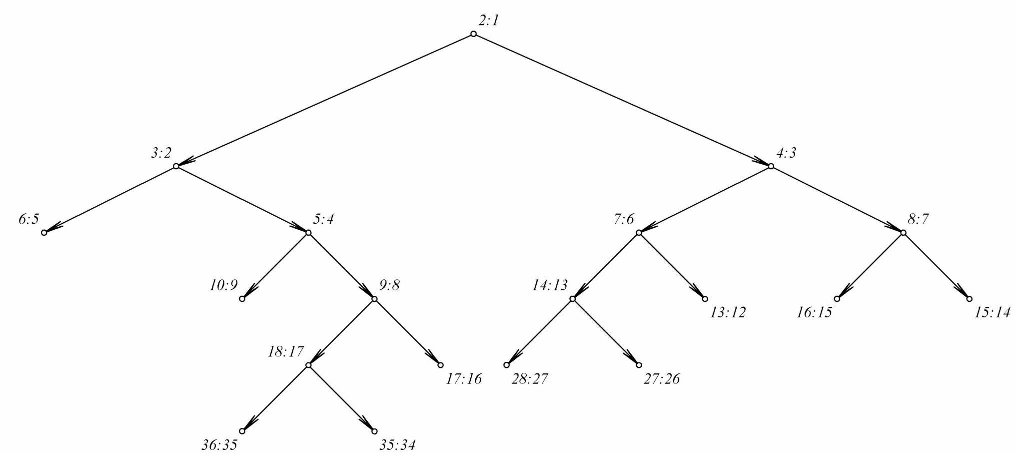
Za dva realna broja a i b ($a < b$) važi sledeće:

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2} \text{ ili b - A = A - a}$$

[7]Brzina prostiranja zvuka zavisi od svojstava sredine (Jangovog modula elastičnosti za čvrste sredine i gustine sredine)

$$G(a,b) = \sqrt{ab} \text{ ili a : G = G : b}$$
$$H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \text{ ili } \frac{1}{a} - \frac{1}{H} = \frac{1}{H} - \frac{1}{b}$$

Svi glavni intervali u Arhitinom tetrahordskom tonskom sistemu u dijatonskoj i enharmonijskoj vrsti izvedeni su kroz harmonijsku sredinu. Takođe, i mali intervali su rezultat manipulacije harmonijskom sredinom.



Slika 19: Intervali u muzici do kojih je došao Arhita iz Taranta

4.4 Dijatonska lestvica

Sada ćemo dovesti u vezu aritmetičku i harmonijsku sredinu sa izgradnjom dijatonske tonske lestvice. Dijatonska skala predstavlja evoluciju pitagorejske tonske skale. Ona pored intervala oktave, kvinte i kvarte uzima u obzir još jedan značajan interval u muzici, interval terce. Ako se pokretna kobilica na monokordu postavi tako da osciluje četiri petine dužine žice, dobija se velika terca. Recipročna vrednost $\frac{5}{4}$ predstavlja odgovarajući frekvencijski broj. Upravo ovaj interval je najznačajniji za izgradnju dijatonske tonske lestvice. Polazna osnova su poznati frekvencijski brojevi v(C) = 1, v(E) = $\frac{5}{4}$, v(F) = $\frac{4}{3}$, v(G) = $\frac{3}{2}$, v(C') = 2. Ostali tonski intervali dobijaju se sledećim računom:

mala sekunda: v(F) : v(E) = $\frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{16}{15}$

septima: v(C') : v(H) = 2 : v(H) = $\frac{16}{15} \Rightarrow$ v(H) = 2 : $\frac{16}{15} \Rightarrow$ v(H) = $\frac{15}{8}$

seksta: v(A) : v(F) = $\frac{5}{4} \Rightarrow$ v(A) = $\frac{5}{4}\cdot$ v(F) = $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow$ v(A) = $\frac{5}{3}$

velika sekunda: v(D):v(C)=v(G):v(F) $\Rightarrow$ v(D):1=$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} \Rightarrow$ v(D)=$\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$=$\frac{9}{8}$

Ovaj rezultat može se pregledno predstaviti sledećom tabelom:

Tonovi	C	D	E	F	G	A	H	C'
Frekvencije u odnosu na ton C	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Frekv. u odnosu na niži susedni ton		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

Jedna od komparativnih prednosti dijatonske tonske lestvice u odnosu na pitagorejsku je i ta što se za osnovni durski trozvuk C - E - G dobija sledeća proporcija $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$, što se može predstaviti kao $4 : 5 : 6$. Istu proporciju zadovoljavaju i trozvuci F : A : C' i G : H : D', dok je u pitagorejskom sistemu ova proporcija složenija i ima oblik $1 : \frac{81}{64} : \frac{3}{2}$ ili, nakon proširivanja $64 : 81 : 96$. Možemo uočiti još jednu vezu između dijatonske tonske lestvice i principa u muzici koje postavlja Arhita: svi susedni intervali ove lestvice predstavljeni su superpartikularnim odnosima brojeva.

Sada ćemo objasniti postupak stvaranja dijatonske tonske lestvice primenom aritmetičke i harmonijske sredine. Uzimamo za vrednosti promenljivih a i b sledeće vrednosti: a =1 i b=2. Broj 1 predstavlja interval prime i predstavlja relativnu frekvenciju tona C. Broj 2 predstavlja interval oktave i predstavlja relativnu frekvenciju tona C'.

$A(1, 2) = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$,
ovaj odnos predstavlja interval kvinte ili relativnu frekvenciju tona G.

$H(1, 2) = \frac{2\cdot 1\cdot 2}{1+2} = \frac{4}{3}$,
ovaj odnos predstavlja interval kvarte ili relativnu frekvenciju tona F.

$A(1, \frac{3}{2}) = \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$,
ovaj odnos predstavlja interval terce ili relativnu frekvenciju tona E.

$A(\frac{4}{3}, 2) = \frac{\frac{4}{3}+2}{2} = \frac{5}{3}$,
ovaj odnos predstavlja interval sekste ili relativnu frekvenciju tona A.

$A(1, \frac{5}{4}) = \frac{1+\frac{5}{4}}{2} = \frac{9}{8}$,
ovaj odnos predstavlja veliku sekundu ili relativnu frekvenciju tona D.

$H(\frac{3}{2}, \frac{15}{8}) = \frac{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{15}{8}}{\frac{3}{2}+\frac{15}{8}} = \frac{5}{3}$,
interval septime je takav da je harmonijska sredina kvinte i septime seksta. Broj $\frac{15}{8}$ predstavlja relativnu frekvenciju tona H.

4.5 Hromatska temperovana lestvica

Od vremena nastanka dijatonske tonske skale, dakle od I veka pne. pa sve do XV veka ne. ništa značajno se nije dešavalo u prilog poboljšanja tonskog sistema. Tada je postao aktuelan problem koji se može formulisati rečima: *u instrumentu sa fiksiranim položajem tonova svi tonovi koji stoje na raspolaganju moraju biti u stanju da preuzmu funkciju osnovnog tona.* Naime, dijatonska skala je matematički tačna u odnosu na osnovni ton, zatim, ljudsko uho najlakše prepoznaje intervale oktave, kvinte, kvarte i terce. Ali, da bi svaki ton mogao da bude osnovni, rešenje je u ravnomerno temperovanom štimu. Ova ideja je bila poznata još u antičko vreme, o njoj je govorio Aristoksen iz Taranta (živeo oko 100 godina posle Arhite). Matematičku razradu ravnomerno temperovanog štima dao je francuski matematičar Marin Mersen (1588-1648). U svojoj knjizi *Harmonie Universelle* (1636) dao je ravnomerno temperovanu tonsku skalu koja ima dvanaest polustepeni. Kako je relativna frekvencija trinaestog tona 2 puta veća od relativne frekvencije prvog tona u lestvici (interval oktave), i kako je odnos frekvencija bilo koja dva susedna polutona konstantan, to je odnos frekvencija dva susedna tona jednak $\sqrt[12]{2}$. Dakle, ovakva lestvica zasnovana je na geometrijskoj progresiji.

Relativne frekvencije mogu se pregledno predstaviti sledećom tabelom:

C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis	A	B	H	C'
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[3]{2^2}$	$\sqrt[4]{2^3}$	$\sqrt[6]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	2

Koristeći ovakvu ravnomerno temperovanu skalu moguće je svaku kompoziciju transponovati iz jednog tonaliteta u drugi. Ipak, nedostatak ovako uvedene lestvice je to da kvinte, kvarte, terce, više nisu matematički perfektne. Ovo proizilazi iz toga što je $\sqrt[12]{2^7} \neq \frac{3}{2}$, $\sqrt[12]{2^5} \neq \frac{4}{3}$, $\sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2} \neq \frac{5}{4}$. Ipak, ova odstupanja su tako mala da vrlo mali broj ljudi primećuje razliku. Poznato je da je Johan Sebastijan Bah (1685 - 1750) bio toliko oduševljen novim načinom štimovanja da je svoje instrumente klavikord i spinet naštimovao na nov način a zatim napisao dve knjige, ukupno 48 preludijuma i fuga za *Dobro temperovani klavir*, sa po 24 kompozicije, svaka u različitom tonalitetu (objavljene 1722. i 1744. godine). Danas, kao što koegzistiraju racionalni i iracionalni brojevi, tako paralelno koegzistiraju i prirodni i temperovani štim. Pri tom, kod instrumenata kod kojih je broj tonova prebrojiv, kao npr. klavir ili gitara, koristi se temperovani štim, dok je kod instrumenata sa beskonačnim brojem različitih tonova koje mogu proizvesti, npr. violina i ostali gudački instrumenti, moguće primeniti i prirodni štim.

5 Značaj i uticaj

Arhita u potpunosti odgovara predstavi pitagorejca, kako ju je kasnije vreme poimalo. On je, zapravo, najznačajniji pitagorejski matematičar, što je dokazao rešavanjem problema *udvostručenja kocke* i numeričkim definisanjem muzičkih intervala. Arhita se predstavlja kao praktičan čovek koji je zainteresovan za prevođenje fascinantnog i mističnog Pitagorinog učenja na razumljive i praktične muzičke forme.

Bio je daleko uspešniji politički lider od ma kog drugog drevnog filozofa i postoji bogata zbirka anegdota o njegovoj ličnoj samokontroli. Upadljivo je, međutim, da ne postoje pisani fragmenti koji povezuju Arhitu sa *metempsihozom*, verskim aspektom pitagorejskog učenja koji se odnosi na život posle smrti. U preporodu pitagorejskog učenja u Rimu, u I veku pne, za Horacija, Propertija i Cicerona, Arhita je najistaknutiji uzor. Kao poslednjem značajnom članu pitagorejske škole pripisani su mu brojni radovi (od kojih mnogi nisu njegovi), tako da je njegovo ime nastavilo da živi i kroz srednjevekovne i renesansne tekstove.

Naučnici ističu odnos između Platona i Arhite, mada dokazi upućuju da su njih dvojica bili u ozbiljnim neslaganjima po brojnim pitanjima. Platon je, u suštini, kritikovao Arhitin pragmatizam i odstupanje od čiste teorije, čime se razara savršenstvo praideje. Iz tog razloga, on zamera Arhiti korišćenje mehaničkih metoda pri konstrukciji dveju srednjih proporcionala [5, str. 247]. Isto tako zamera mu u muzici što apstraktan pojam muzičkog tona identifikuje sa brzinom oscilacija (frekvencijom tela koje osciluje), što dakle muziku svodi na analizu numeričkih odnosa, bez sagledavanja *problema* i *uzroka*.

Bez obzira na sva tumačenja i eventualna osporavanja Arhite kao mislioca, pre svega matematičara, potrebno je naglasiti njegove matematičke rezultate koji se tiču proporcionalnosti. Ti rezultati su ugrađeni u VIII knjigu Euklidovih *Elemenata*, posvećenu teoriji neprekidnih proporcija, a to je najčuvenija, najčitanija i najuticajnija rasprava o geometriji svih vremena.

Kako u vreme antike, tako se i u moderno vreme imena Platona i Arhite vezuju jedno za drugo. Naime, njima u čast, jedan krater na Mesecu nazvan je Platon, dok se jedno od brda u okolini tog kratera zove Arhita.

Arhitina ličnost bila je inspiracija španskom slikaru Salvadoru Rosi, koji je 1668. godine naslikao njegov portret, koji se danas čuva u Dalvič galeriji slika. Arhita je prikazan u bestežinskom prostoru sa golubom u desnoj ruci i snažnom ekspresijom u pogledu, koja ga predstavlja kao autoritativan lik prema okolini, predmetu njegovog istraživanja.

U današnje vreme dolazi do potpune digitalizacije svega, pa i muzike. Više nego do sada postaje očigledna potreba za matematičkim modelima u svim sferama muzike. Matematička reprezentacija muzike vrlo često ima i geometrijski prikaz, pa postaje moguća automatska analiza muzičke kompozicije. Određuju se oblasti tonaliteta, analizira se i prepoznaje ritam, a moguće je i prepoznavanje i razvijanje melodija. Smatra se da se izučavanjem matematičkih modela ljudskih sposobnosti u kreiranju, analizi i reprodukciji muzike dobijaju posredni rezultati koji doprinose boljem razumevanju same ljudske prirode, pre svega kreativnosti.

Literatura

[1] Danijel Dž. Borstin, *Svet stvaranja: istorija junaka mašte*, Geopoetika, Beograd, 2004.

[2] Miloš Čanak, *Matematika i muzika: istina i lepota: Jedna zlatna harmonijska nit*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2009.

[3] Hermann Diels, *Predsokratovci, fragmenti, vol I*, Naprijed, Zagreb, 1983.

[4] Miloš N. Đurić, *Filosofski spisi: Platonova akademija i njen politički rad*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1997.

[5] Zoran Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd, 2009.

[6] Rozália Madarász, *Matematika i muzika*, Tangenta - časopis za matematiku i računarstvo za učenike srednjih škola, br. 61, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2010.

[7] Platon, *Dela, prevod, napomene i objašnjenja Miloš N. Đurić*, Dereta, Beograd, 2002.

[8] *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/ entries/archytas/

[9] Zvonimir Šikić, *Matematika i muzika*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1999.

[10] Marko Tajčević, *Osnovna teorija muzike*, Prosveta, Beograd, 1962.

[11] Milan Uzelac, *Filozofija muzike*, Stylos, Novi Sad, 2007.

[12] Milan Uzelac, *Predavanja iz srednjovekovne filozofije*, Veris studio, Novi Sad, 2009.

[13] B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, P. Noordhoff, Groningen, 1954.

Sadržaj