УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Ђорђе Кртинић

ФУНКЦИОНАЛНИ РАЧУНИ ЗА n-ТОРКЕ КОМУТИРАЈУЋИХ НЕОГРАНИЧЕНИХ ОПЕРАТОРА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Београд, фебруар 2011.

Садржај

0. Предговор и мотивација 1

1. Увод и основне дефиниције 3
   1.1. Кратак преглед досадашњих резултата 3
   1.2. Простори $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$;
   квазианалитичке и неквазианалитичке алгебре 4
   1.3. Апстрактан Кошијев проблем 7
   1.4. Дефиниција слабог функционалног рачуна 9
   1.5. Поставка проблема 10

2. Први резултати и помоћна тврђења 13
   2.1. Алгебра F_α, опис и особине 13
   2.2. Алгебра $\mathscr{A}_h$, опис и особине 16
   2.3. Однос различитих дефиниција комутативности 17
   2.4. Клифордова анализа, основна својства 19

3. Функционални рачун и носач функционалног рачуна 22
   3.1. Конструкција функционалног рачуна на F_α 22
   3.2. Конструкција функционалног рачуна на $F_{\alpha,loc}$ 25
   3.3. Конструкција функционалног рачуна на $\mathscr{A}_h$ 26
   3.4. Носач функционалног рачуна 28
   3.5. Максималност слабог функционалног рачуна 31

4. Примери и закључак 32
   4.1. Односи различитих дефиниција функционалног рачуна 32
   4.2. Примери 34
   4.3. Завршни коментари 35

Литература 36

0. Предговор и мотивација

Нека је $\mathscr{A}$ алгебра функција, а $\mathscr{B}$ алгебра оператора, на којима су уведене Хаусдорфове топологије сагласне са алгебарском структуром, тј. топологије у којима су алгебарске операције непрекидне. Функционални рачун за оператор $T \in \mathscr{B}$, уопштено говорећи, јесте хомоморфизам $\Phi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, тако да $\mathscr{A}$ садржи полиноме и да важи $\Phi(1) = e$ (1 ($1_{\mathbb{R}}$) је функција индентички једнака 1, а e је јединица алгебре $\mathscr{B}$) и $\Phi(I(x)) = T$ ($I(x) \equiv x$ је идентичка функција). Хомоморфизам Φ је притом (у неком смислу) непрекидан. И више, пожељно је да је алгебра $\mathscr{A}$ генерисана са 1 и x, тј. да су полиноми густи у $\mathscr{A}$ (у топологији простора $\mathscr{A}$).

Међу примерима функционалних рачуна, један од оних са којима се у литератури може најчешће срести јесте аналитички функционални рачун на Банаховим алгебрама. То је хомоморфизам $\Phi\colon \mathscr{H} \to \mathscr{C}$, где је $\mathscr{C}$ Банахова алгебра, $T \in \mathscr{C}$, а $\mathscr{H}$ алгебра функција, аналитичких у некој околини $\sigma(T)$ (са топологијом генерисаном униформном конвергенцијом по компактима), који је дефинисан са

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - T)^{-1} d\lambda = f(T), \tag{1}$$

где је $\Gamma \subset \mathrm{Dom}(f)$ и $\sigma(T) \Subset \operatorname{int}\Gamma$. Ово пресликавање је непрекидно „на природан начин".

Још један често сретан пример функционалног рачуна описан је спектралном теоремом. Ако је $\mathscr{H}$ Хилбертов простор и $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ нормалан оператор, са

$$L^{\infty}(\sigma(T)) \ni f \longrightarrow \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_{\lambda} = f(T)$$

(где је E_{λ} спектрална мера) дефинисан је хомоморфизам $\Phi\colon L^{\infty} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$, који је непрекидан по норми, пошто је $\|f\|_{\infty} = \|f(T)\|$ и важи $f_n \overset{\text{т.п.т.}}{\longrightarrow} f \Rightarrow f_n(T) \overset{s}{\to} f(T)$ („непрекидност").

Из ових примера може се приметити да ако је функционални рачун дефинисан за широку класу оператора, алгебра функција је релативно мала. Уколико се алгебра функција прошири, потребно је појачати услове које оператор испуњава.

Ако би се говорило о приступима увођења функционалног рачуна на Банаховом простору, свим до сада познатим техникама заједничко је да се, приликом дефинисања $f(T)$ (где f и T припадају одговарајућим класама, као у првом пасусу текста), $f(x)$ приказује као суперпозиција „једноставнијих" функција $\omega_{\alpha}(x)$ (α припада некој индексној фамилији), за које се дефинише $\omega_{\alpha}(T)$, а онда и $f(T)$ помоћу оператора $\omega_{\alpha}(T)$.

Један од примера је дат формулом (1); у овом примеру се дефинише $\omega_{\alpha}(T)$ за функције $\omega_{\alpha}(x) = (\alpha - x)^{-1}$ ($\alpha \in \rho(T)$; $\omega_{\alpha}(T) = (\alpha - T)^{-1}$ је заправо резолвента), а након тога се једнакошћу (1) појам $f(T)$ дефинише за ширу класу функција (аналитичке на одговарајућем скупу).

У другом познатом примеру (једна од варијанти), за самоадјунгован оператор T на Хилбертовом простору, појам $f(T)$ се може дефинисати са

$$f(T) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{itT} dt,$$

где је $\widehat{f}$ Фуријеова трансформација функције f. У овом случају $\omega_\alpha(T)$ се дефинише за функције $\omega_\alpha(x) = e^{i\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$; $\omega_\alpha(T) = e^{i\alpha T}$ је одговарајућа једнопараметарска група), а након тога се претходном формулом (која за мотивацију има чувену формулу инверзије за Фуријеову трансформацију) појам $f(T)$ преноси на ширу класу функција (на класу функција за које $\widehat{f}(x)$ „довољно брзо опада", а ова особина се природно повезује са брзином раста $\|e^{itT}\|$ кад $t \to \infty$).

Сваки од претходних приступа има предности и мане. Приступ преко Фуријеове трансформације доводи до најсуптилнијих тренутно познатих резултата у проблемима спектралне асимптотике (видети, на пример, [19] и [20]). Међутим, тад се захтева добро познавање одговарајуће унитарне групе, док је приступ преко симулације Кошијевог интеграла практичнији за употребу и рачунску манипулацију са операторима (па се чешће јавља у неким применама, нарочито у физици; видети, на пример, [15] и [18]).

За ограничене операторе проблем увођења функционалног рачуна је прилично добро проучен, док је за неограничене операторе и даље остало много отворених проблема. У овом раду проучаван је проблем увођења функционалног рачуна за n-торке комутирајућих уопштених скаларних оператора на Банаховом простору. Техника која се користи је техника Фуријеове трансформације; ово није нова техника и за дефинисање функционалног рачуна коришћена је још 1952. За случај једног оператора са спектром на кружници ова идеја се јавља, на пример, у [28], где аутор ову идеју приписује Берлингу. Централни резултати се налазе у глави 3, а ти резултати су и саставни делови радова [21] и [22]. Ради лакшег праћења, текст је подељен у главе, а главе у одељке, док је на почетку сваке главе дат кратак опис онога што се налази у глави.

Искористио бих ову прилику да се захвалим људима који су допринели (или бар нису одмогли) мом професионалном развитку, породици, пријатељима и колегама; посебно људима који су директно учествовали у изради ове дисертације, и то мотивацијом, сугестијама, али и активним учешћем у решавању самог проблема, као и подршком у одлуци да се бавим математиком.

1. Увод и основне дефиниције

У овом делу су наведене дефиниције појмова који се користе у остатку рада. Након кратког историјског осврта на досада добијене резултате, наведена су тврђења из литературе, која су дала мотивацију и неопходни технички апарат да би тврђења у деловима 2,3 и 4 могла да буду доказана. На крају главе наведене су дефиниције слабог и ултра слабог функционалног рачуна, чија је егзистенција испитивана у остатку текста, као и неки коментари који би требало да помогну лакшем разумевању.

1.1. Кратак преглед досадашњих резултата

У овом раду се користи техника Фуријеове трансформације. Та техника се користила и у ранијим истраживањима. У раду [23], McIntosh са групом аутора развио је функционални рачун за n-торку комутирајућих ограничених уопштених скаларних оператора и за функције чије се Фуријеове трансформације налазе у $L^1_s = \left\{ f \mid \int |f(t)|(1+|t|^s)dt < \infty \right\}$. Општије резултате објавили су Andersson и Berndtsson у [2]. Резултате који су везани за генератор ограничене јако непрекидне групе добили су Balabane и група аутора у [5]. Више детаља везаних за добијене резултате, као и њихов историјат, могу се наћи у [11].

У истраживањима су се јављале и сличне идеје, базиране на коришћењу Лапласове трансформације за генераторе ограничених или полиномно ограничених полугрупа; такви резултати се могу наћи, на пример, у [13] и [12].

Приступи развитка функционалног рачуна помоћу Коши–Гринове интегралне формуле такође су доста раширени у истраживањима. Први резултати могу се наћи код Дынкина у [15], а наредни у [18], [1], [3] и [4]. У њима се функционални рачун развија на скоро холоморфним раширењима тест функција. Треба рећи да је већина ових резултата последица резултата ове дисертације. Заиста, у [1] је показано да је функционални рачун уведен преко Коши–Гринове формуле, могуће проширити до алгебре C^∞ функција са додатном особином понашања у бесконачности ако и само ако је одговарајућа група полиномно ограничена, иако шира класа оператора допушта функционални рачун на тест функцијама. Занимљив приступ може се наћи и у [4]. У том раду, користећи чињеницу да за својствено пресликавање $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ (тј. пресликавање које има својство да је инверзна слика произвољног компактног скупа компактан скуп) скуп $\left\{ g \circ f \mid g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^k) \right\}$ јесте садржан у $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, конструише се функционални рачун за $f(T)$, где је f својствена C^∞ функција, а T је Helffer–Sjöstrand-ов оператор, тј. оператор T чији је спектар реалан и за чију резолвенту важи да за сваки компакт $K \subset \mathbb{C}$ постоје $C_K, N_K > 0$ тако да важи $\|(z-T)^{-1}\| \leqslant C_K |\operatorname{Im} z|^{-N_K}$ за свако $z \in K \setminus \mathbb{R}$; за више детаља видети [18].

У глави 4 размотрен је однос функционалног рачуна конструисаног у овом раду са неким од досада добијених резултата.

1.2. Простори $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$; квазианалитичке и неквазианалитичке алгебре

У овом раду, ако није другачије наглашено, функције узимају комплексне вредности. За сваку n-торку $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ненегативних целих бројева (такозвани мултииндекс) дефинише се диференцијални оператор

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

поретка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ (ако је $|\alpha| = 0$ сматра се да је $D^\alpha f = f$). За сваки отворен скуп $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ дефинише се простор $C^\infty(\Omega)$ свих комплексних функција f за које је $D^\alpha f \in C(\Omega)$ за сваки мултииндекс α ($C(\Omega)$ је простор непрекидних функција на Ω). На простору $C^\infty(\Omega)$ се може дефинисати топологија на следећи начин:

> нека је $(K_i)_{i=1}^\infty$ низ компактних скупова таквих да је K_i садржано у $\operatorname{int} K_{i+1}$ за сваки $i \in \mathbb{N}$ и $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$; ако је $p_n(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| \mid x \in K_n \wedge |\alpha| \leqslant n\}$, локалну база топологије чине скупови $V_n = \left\{f \in C^\infty(\Omega) \mid p_n(f) < \frac{1}{n}\right\}$ за $n \in \mathbb{N}$.

Простор $C^\infty(\Omega)$ са овом топологијом је Фрешеов простор са Хајне–Бореловим својством. Конвергенција у овој топологији повлачи конвергенцију свих извода униформно на компактним скуповима.

За сваки компактан скуп K, скуп свих бесконачно диференцијабилних функција чији је носач садржан у K (у ознаци $\mathscr{D}_K$) јесте затворени потпростор простора $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. На скупу $\mathscr{D} = \bigcup\limits_K \mathscr{D}_K$ може се дефинисати топологија, чија је база састављена од свих скупова $U \subseteq \mathscr{D}$ таквих да је скуп $U \cap \mathscr{D}_K$ отворен скуп у $\mathscr{D}_K$ за сваки K. Овако дефинисан простор $\mathscr{D}$ се назива простор тест функција (ако се жели нагласити димензија простора, користи се и ознака $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$) и један је од основних објеката који се користе у овом раду. Посебну улогу игра простор дистрибуција $\mathscr{D}'$, тј. простор непрекидних линеарних фунционала на $\mathscr{D}$. У даљем тексту наведене су неке особине ових објеката, које су коришћене кроз рад. Те особине су сада делови стандардног образовања, тако да је већина само наведена, а дати су само докази за које је сматрано да користе бољем разумевању текста.

Став 1.1. (а) *Линеарно пресликавање из $\mathscr{D}$ у локално конвексан простор је непрекидно ако и само ако је непрекидна његова рестрикција на $\mathscr{D}_K$ за свако компактно K.*

(б) *Ако је $u \in \mathscr{D}'$, $\varphi \in \mathscr{D}$, онда је $u * \varphi \in C^\infty$ и важи*

$$D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * (D^\alpha \varphi)$$

за произвољан мултииндекс α.

(в) *Ако је $u \in \mathscr{D}'$ и $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$, онда је $u * (\varphi * \psi) = (u * \varphi) * \psi$.*

(г) *Ако је $u, v \in \mathscr{D}'$ и u има компактан носач, тада је $u * v = v * u$ и $D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v)$ за сваки мултииндекс α.*

(д) *Ако је $u \in \mathscr{D}'$ и δ јесте Диракова мера, онда је $D^\alpha u = (D^\alpha \delta) * u$ за сваки мултииндекс α. Специјално, важи $u = \delta * u$.*

(ђ) *Функција из $L^p(\mathbb{R})$ (за $1 \leqslant p \leqslant \infty$), као и свака мерљива функција чија је апсолутна вредност ограничена полиномом, јесте и споро растућа дистрибуција (тј. индукује такву дистрибуцију).*

(е) *Ако је $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$ и $h(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, онда је $\widehat{h}(t) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda t)$.*

Дефиниција 1.1. Низ функција $(h_j)_{j\geqslant 1}$ облика $h_j(x) = j^k h(jx)$, где је $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^k), h \geqslant 0$ и $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} h(x)dx = 1$, назива се апроксимативом јединицом на $\mathbb{R}^k$.

Став 1.2. *Нека је $(h_j)_{j\geqslant 1}$ апроксимативна јединица на $\mathbb{R}^k$, $\varphi \in \mathscr{D}$ и $u \in \mathscr{D}'$. Тада важи:*

(1) $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi * h_j = \varphi$ *(конвергенција у простору $\mathscr{D}$);*

(2) $\lim\limits_{j\to\infty} u * h_j = u$ *(конвергенција у простору $\mathscr{D}'$).*

Докази ставова 1.1 и 1.2 могу се наћи у [26].

Теорема 1.1. *У локално конвексном простору X скуп је слабо ограничен ако и само ако је (оригинално) ограничен.*

Доказ. Како свака слаба околина нуле јесте околина у оригиналној топологији, следи да сваки ограничен скуп у оригиналној топологији јесте слабо ограничен.

Нека је E слабо ограничен скуп у X, а U нека околина нуле у оригиналној топологији. Како је X локално конвексан, постоји уравнотежена конвексна околина нуле V таква да је $\overline{V} \subset U$. Нека је

$$K = \{\Lambda \in X^* \mid (\forall x \in V)\, |\Lambda x| \leqslant 1\}\,.$$

Како је $V \subseteq W = \{x \in X \mid (\forall \Lambda \in K)\, |\Lambda x| \leqslant 1\}$ и како је W затворен, следи $\overline{V} \subseteq W$. Међутим, ако постоји $x_0 \in X \setminus \overline{V}$, по Хан–Банаховој теореми ($\overline{V}$ је уравнотежен скуп) постоји $\Lambda \in K$ тако да је $\Lambda x_0 > 1$, па је $\overline{V} = W$. Дакле, важи

$$\overline{V} = \{x \in X \mid (\forall \Lambda \in K)\, |\Lambda x| \leqslant 1\}\,. \tag{2}$$

Како је E слабо ограничен, за сваки $\Lambda \in X^*$ постоји број $\gamma(\Lambda) < \infty$ тако да за свако $x \in E$ важи $|\Lambda x| \leqslant \gamma(\Lambda)$. Како је K конвексан и слабо* компактан (по теореми Банах–Алаоглу), а функције $\Lambda \to \Lambda x$ слабо* непрекидне, на основу теореме Банах–Штајнхауса следи

$$(\exists \gamma < \infty)(\forall x \in E)(\forall \Lambda \in K)|\Lambda x| \leqslant \gamma. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следи да за свако $x \in E$ важи $\gamma^{-1}x \in \overline{V} \subset U$, па како је V уравнотежена околина, следи $E \subset t\overline{V} \subset tU$ за свако $t > \gamma$, односно E је ограничен. □

Функција f, аналитичка на интервалу $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}$, поседује особину да је идентички једнака нули ако су у некој тачки сви њени изводи једнаки нули (укључујући и вредност функције у тој тачки). Ово је довело до уопштења појма аналитичких функција, тј. до класа функција у којима и даље важи наведено својство. То су класе квазианалитичких функција. Са друге стране, постоје и класе функција у којима то својство не важи, али које задовољавају својства описана у Урисоновој леми. Такве класе функција називају се класама неквазианалитичких функција. У наставку рада коришћене су такве класе, тј. над таквом класом је развијан функционални рачун. Овде су наведене дефиниције ових појмова, као и основни критеријуми утврђивања да ли је класа квазианалитичка, односно неквазианалитичка (резултати Denjoy-а и Carleman-а).

Дефиниција 1.2. Нека је $M = (M_k)_{k=0}^{\infty}$ низ позитивних реалних бројева и $M_0 = 1$. Нека је $C^M([\,a,b\,])$ скуп свих функција $f \in C^{\infty}([\,a,b\,])$ за које постоји $C > 0$ тако да важи

$$\left|\frac{d^k f}{dx^k}(x)\right| \leqslant C^{k+1} \cdot M_k$$

за сваки $x \in [\,a,b\,]$ и сваки $k \geqslant 0$.

Класа $C^M([\,a,b\,])$ се назива квазианалитичком ако важи:

Ако $f \in C^M([\,a,b\,])$ и $\dfrac{d^k f}{dx^k}(x) = 0$ за неки $x \in [\,a,b\,]$ и сваки $k \geqslant 0$, тада је $f \equiv 0$.

Функција f се назива квазианалитичком ако f припада некој квазианалитичкој класи.

На пример, ако је $M_k = k!$, добија се тачно класа реалних аналитичких функција на $[\,a,b\,]$.

Теорема 1.2. *Следећи услови су еквивалентни:*

(а) *класа $C^M([\,a,b\,])$ је квазианалитичка;*

(б) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{L_j} = \infty$, *где је* $L_j = \inf_{k \geqslant j} M_k^{\frac{1}{k}}$;

(в) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (M_j^*)^{-\frac{1}{j}} = \infty$, *где је* $(M_j^*)_{j=1}^{\infty}$ *највећи логаритамски конвексан низ ограничен одозго одговарајућим члановима низа* $(M_j)_{j=1}^{\infty}$.

(г) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{M_{j-1}^*}{M_j^*} = \infty$.

Доказ теореме 1.2 и више детаља може се наћи у [7] и [19].

Дефиниција 1.3. Алгебра $\mathscr{A}$ функција дефинисаних на $\mathbb{R}^n$ се назива неквазианалитичком ако за сваки компактни скуп K и за сваки отворен скуп $U \supset K$ постоји $\chi \in \mathscr{A}$, тако да је носач функције χ садржан у U, а $\chi \equiv 1$ у некој околини $V \subset U$ скупа K.

Теорема 1.3. *Нека је $h(t)$ позитивна, непрекидна, субадитивна функција на $\mathbb{R}^n$, таква да је $h(0) = 0$, $h(t)$ расте по зрацима из координатног почетка и важи* $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{h(t)}{|t|} = 0$. *Алгебра*

$$\mathscr{B}_h = \left\{ f \mid \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(t)| e^{h(t)} dt < \infty \right\}$$

је неквазианалитичка ако и само ако је $\displaystyle\int_{|t|\geqslant 1}\frac{h(t)}{|t|^{n+1}}\,dt<\infty$*; притом последњи услов важи ако и само ако постоји конкавна растућа функција* $H(s)$*, таква да је* $h(t)\leqslant H(|t|)$ *и*

$$\int_1^{\infty}\frac{H(s)}{s^2}\,ds<\infty. \tag{4}$$

Нетривијални део теореме је неквазианалитичност алгебре $\mathscr{B}_h$ при наметнутим условима на функцију $H(s)$; у наставку је дат доказ овог тврђења.

Доказ. Нека је $n=1$ (доказ је аналоган за $n>1$) и $\widetilde{h}(t)=H(|t|)+2\ln(1+|t|)$. Тада је $\mathcal{P}\widetilde{h}(x+iy)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\cdot\widetilde{h}(t)dt$ $(y>0)$ (Пуасонов интеграл функције $\widetilde{h}$) добро дефинисан (по услову (4)), па је $\mathcal{P}\widetilde{h}$ позитивна хармонијска функција у горњој полуравни. Ако је φ аналитичка функција за коју је $\operatorname{Re}\varphi=\mathcal{P}\widetilde{h}$, следи да је $g=e^{-\varphi}$ ограничена аналитичка функција (у горњој полуравни) за коју је $|g|=e^{-\widetilde{h}(t)}$ на граници, па g јесте Фуријеова трансформација неке функције f, чији је носач садржан на позитивном делу реалне осе. Како је $|\widehat{f}(t)|=e^{-\widetilde{h}(t)}$, то следи да $f\in\mathscr{B}_h$.

Зато постоји $\psi\in\mathscr{B}_h$ $(\psi\not\equiv 0)$ чији је носач у произвољном интервалу (избором погодних a, b и $\psi(t)=\varphi(a+t)\varphi(b-t)$). Како је $\mathscr{B}_h$ затворена за конјуговање, ако је $f\in\mathscr{B}_h$ функција са компактним носачем, онда је $|f|^2$ ненегативна функција са компактним носачем из $\mathscr{B}_h$, па се функција са носачем у U и једнака 1 на K добија конволуцијом функције χ_V $(K\subset V\subset U)$ и функције ψ са носачем у довољно малој околини нуле. $\square$

1.3. Апстрактан Кошијев проблем

У овом одељку је објашњено шта представља e^{itT} за неограничен оператор T на Банаховом простору X. У случају имитације класичног поступка да се експоненцијална функција прикаже преко одговарајућег степеног реда, могу настати бројни проблеми. На пример, скуп

$$\left\{x\in X\mid x\in\bigcap_{n\geqslant 1}\operatorname{Dom}(T^n)\wedge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|T^nx\|}{n!}<\infty\right\}$$

(аналитички вектори) не мора бити густ у X (Нелсонова теорема).

У овом раду под e^{itT} подразумева се једнопараметарска (полу)група $C(t)$ која је решење операторске једначине

$$\frac{d}{dt}C(t)=iTC(t),\quad C(0)=I, \tag{5}$$

познате под именом апстрактан Кошијев проблем. Овај проблем је дуго проучаван и утврђена је егзистенција решења ове једначине (као полугрупа или као група) под различитим условима. Такође, могуће је дати и процену асимптотског понашања тог решења (видети, на пример, [8], [9] и [10]). У наставку одељка наведене су неке ситуације у којима постоји решење једначине (5) (више детаља и докази се могу наћи у [14] и [11]).

Дефиниција 1.4. Фамилија $\{C(t) \mid t \geqslant 0\}$ ограничених линеарних оператора у Банаховом простору X назива се јако непрекидном полугрупом ако важи

(1) $C(s+t) = C(s)C(t)$ за сваки $s, t \geqslant 0$,

(2) $C(0) = I$,

(3) за сваки $x \in X$ функција $t \to C(t)x$ је непрекидна.

Теорема 1.4. *Нека је $\{C(t) \mid t \geqslant 0\}$ полугрупа која је непрекидна у равномерној операторској топологији. Тада постоји ограничен оператор T на простору X, такав да је $C(t) = e^{tT}$ за $t \geqslant 0$. Оператор T дефинисан је формулом*

$$T = \lim_{h \to 0+} \frac{C(h) - I}{h}.$$

Притом за довољно велико $\mathrm{Re}(\lambda)$ *резолвента оператора T може се изразити преко елемената полугрупе формулом*

$$(\lambda I - T)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t) dt.$$

Међутим, уколико се у претходној теореми услов непрекидности у равномерној операторској топологији замени условом јаке непрекидности, проблем постаје доста захтевнији. Уколико постоји решење, по аналогији са скаларним случајем и претходном теоремом то решење се сматра неком врстом експоненцијалне функције, али (опет по претходној теореми) ако конвергенција није равномерна, не постоји $T \in \mathscr{B}(X)$ тако да је $C(t) = e^{tT}$ за $t \geqslant 0$. Зато прво треба дефинисати шта у оваквим ситуацијама игра улогу експоненцијалне функције.

Дефиниција 1.5. За $h > 0$ нека је T_h линеарни оператор дефинисан са

$$T_h x = \frac{C(h)x - x}{h} \quad \text{за} \quad x \in X.$$

Инфинитезималним генератором (или инфинитезималним оператором) полугрупе $\{C(t) \mid t \geqslant 0\}$ назива се оператор T чији домен $\mathfrak{D}(T)$ јесте скуп свих $x \in X$ за које постоји $\lim_{h \to 0+} T_h x$ и који је дефинисан са $Tx = \lim_{h \to 0+} T_h x$.

Став 1.3. (а) *Скуп $\mathfrak{D}(T)$ је векторски простор; оператор T је линеаран на $\mathfrak{D}(T)$;*

(б) *ако је $x \in \mathfrak{D}(T)$, тада је $C(t)x \in \mathfrak{D}(T)$ (за $0 \leqslant t < \infty$) и $\frac{d}{dt} C(t)x = TC(t)x = C(t)Tx$;*

(в) *ако је $x \in \mathfrak{D}(T)$, тада је $[C(t) - C(s)]\, x = \int_s^t C(u)Txdu$ за $0 \leqslant s < t < \infty$;*

(г) *ако је $t \geqslant 0$ и ако је f Лебег интеграбилна функција, непрекидна у t, онда важи*

$$\lim_{h \to 0+} \int_t^{t+h} f(u)C(u)xdu = f(t)C(t)x;$$

(д) *$\mathfrak{D}(T)$ је густ у X, а оператор T је затворен на $\mathfrak{D}(T)$.*

У претходном ставу наведене су основне особине инфинитезималног генератора. Како је $\mathfrak{D}(T)$ густ у X, на основу теореме Банах–Штајнхауса следи да је инфинитезимални генератор неке полугрупе ограничен ако и само ако је та полугрупа непрекидна у равномерној операторској топологији.

Теорема 1.5 (Hille-Yoshida). *Затворени линеарни оператор T који је густо дефинисан јесте инфинитезимални генератор јако непекидне полугрупе ако и само ако постоје $M, \omega \in \mathbb{R}$ такви да за свако $\lambda > \omega$, $\lambda \in \rho(T)$, важи*

$$\|(\lambda - T)^{-n}\| \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad \text{за сваки} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Коначно, на основу претходних тврђења делује природно да се одговарајућа јако непрекидна полугрупа (односно група, кад је $t \in \mathbb{R}$) сматра решењем одговарајућег Кошијевог проблема и посматра као „експоненцијална функција” при раду са неограниченим операторима. Следећа три става сумирају резултате наведене у овом одељку.

Став 1.4. *Затворени густо дефинисани линеарни оператор T генерише јако непрекидну полугрупу $\{C(t) \mid t \geqslant 0\}$ ограничених оператора, са својством $\|C(t)\| \leqslant e^{\omega t}$ за неко $\omega \in \mathbb{R}$, ако и само ако важи*

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega}\,, \quad \text{за} \quad \lambda > \omega.$$

Став 1.5. *Затворени густо дефинисани линеарни оператор T је инфинитезимални генератор јако непрекидне полугрупе ако и само ако постоји непрекидна фамилија $\{B(t) \mid t \geqslant 0\}$ ограничених линеарних оператора за коју важи $B(0) = I$, $\|B(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ за неке бројеве $M > 0$ и $\omega \in \mathbb{R}$, и за коју је*

$$(\lambda - T)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} B(t) x dt, \quad \text{ако је} \quad \lambda > \omega.$$

Став 1.6. *Затворени густо дефинисани линеарни оператор T генерише јако непрекидну групу $\{C(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ограничених оператора ако и само ако постоје $M > 0, \omega \geqslant 0$ тако да важи*

$$\|(\lambda - T)^{-n}\| \leqslant M \cdot \frac{1}{(|\lambda| - \omega)^n}\,, \quad \text{за} \quad |\lambda| > \omega \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ако T генерише групу $\{C(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, тада важи $\|C(t)\| \leqslant Me^{\omega|t|}$ за неке бројеве $M > 0, \omega \geqslant 0$

1.4. Дефиниција слабог функционалног рачуна

У овом раду користиће се ознаке $\mathbb{R}^k \ni t = (t_1, \ldots, t_k)$ и $T = (T_1, \ldots, T_k)$ за k-торке бројева и оператора, редом, $t \cdot T$ ће означавати $t_1 T_1 + \ldots + t_k T_k$, $|t|$ Еуклидску норму $\sqrt{t_1^2 + \ldots + t_k^2}$.

У жељи да се ради са неограниченим операторима, у овом раду ће се разматрати слаб функционални рачун. Тај рачун се уводи следећом дефиницијом, која представља модификацију дефиниције коју је дао Василеску у [27], прилагођену потребама овог рада:

Дефиниција 1.6. Нека је $T = (T_1, \ldots, T_k)$ k-торка затворених густо дефинисаних оператора на Банаховом простору X. Слаб функционални рачун над $\mathbb{R}^k$ је уређен пар $(\mathscr{A}, \Phi)$ за који важи:

1. $\mathscr{A}$ је нормирана алгебра функција дефинисаних на $\mathbb{R}^k$, са топологијом τ таквом да
   (а) τ је слабија од топологије индуковане нормом;
   (б) сабирање је непрекидно у односу на τ;
   множење је покоординатно непрекидно у односу на τ;
   (в) простор тест функција $\mathscr{D}$ је садржан и густ у $\mathscr{A}$ (у топологији τ);
   (г) утапање $\mathscr{D} \hookrightarrow \mathscr{A}$ је непрекидно;
2. $\Phi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}(X)$ је хомоморфизам, који је непрекидан у норми, као и непрекидан у односу на топологију τ и слабу топологију на $\mathscr{B}(X)$;
3. за сваки полином $p(t_1, \ldots, t_k)$ степена m и произвољан низ тест функција $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$ који тежи ка 1 растући и равномерно по компактима, важи $\Lambda(\Phi(\vartheta_n p)x) \to \Lambda(p(T_1, \ldots, T_k)x)$ за сваки $x \in \bigcap\limits_{\sum m_j = m} \mathrm{Dom}(T_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot T_k^{m_k})$ и сваки $\Lambda \in X^*$.

Напомена 1.1. У услову (1) захтева се само непрекидност по координатама, јер је нереално добити непрекидност множења. Заиста, ако се претпостави непрекидност множења, из услова (2) следи да ако $T_n \to T$ и $S_n \to S$, слабо, тада и $T_n S_n \to TS$ слабо, што у општем случају није тачно.

Дефиниција 1.7. Нека је $T = (T_1, \ldots, T_k)$ k-торка затворених густо дефинисаних оператора на Банаховом простору X. Ултра слаб функционални рачун над $\mathbb{R}^k$ је уређен пар $(\mathscr{A}, \Phi)$ који јесте слаб функционални рачун такав да за алгебру $\mathscr{A}$ важи:

За произвољну тест функцију $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, једнаку 1 у некој околини нуле, и за произвољно $f \in \mathscr{A}$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi\left(\dfrac{x}{n}\right) f(x) \to f(x)$ у топологији простора $\mathscr{A}$.

1.5. Поставка проблема

Резултати који су приказани у првом одељку наводе на питање да ли се, и у каквом облику они могу уопштити. У овом раду доказана је егзистенција ултра слабог функционалног рачуна, где алгебра $\mathscr{A}$ јесте потпростор F_α простора Собољева,

$$W^\alpha_\infty(\mathbb{R}^k) \supseteq F_\alpha = \Big\{ f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{C} \mid \widehat{f} \text{ је мера за коју је } \int_{\mathbb{R}^k} (1+|t|^\alpha) d|\widehat{f}\,| < \infty \Big\},$$

где је $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, а α_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ је позитиван реалан број, док су оператори $(T_j)_{j=1}^n$ затворени, густо дефинисани и такви да је $\sigma(T_j) \subseteq \mathbb{R}$ и

$$\|e^{itT_j}\| = O(|t|^{\alpha_j}) \text{ кад } t \to \infty. \tag{6}$$

Претпоставља се и да наведени оператори комутирају по паровима. Овде се под комутативношћу оператора T_j и T_l подразумева комутирање оператора из одговарајућих група e^{itT_j} и e^{isT_l}, описаних у одељку 1.3.

Оператори са претходно наведеним особинама познати су и као уопштени скаларни оператори. Треба напоменути да су услови $\sigma(T_j) \subseteq \mathbb{R}$ (за $1 \leqslant j \leqslant n$) заправо сувишни, као што то показује

Став 1.7. *Ако су $(T_j)_{j=1}^n$ међусобно комутирајући оператори и важе услови (6), тада је $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Доказ. Нека је $z = \gamma - i\beta$, где је $\beta \neq 0$ $(\beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ за $x \in \{\beta, \gamma, z\})$. Тада је

$$\|e^{it(T-z)\cdot\beta}\| = \|e^{itT\cdot\beta - |\beta|^2 t}\| \leqslant \text{const} \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} |t|^{\alpha_j}\right)^{|\beta|} \cdot e^{-|\beta|^2 t} \leqslant \text{const} \cdot e^{-\delta t},$$

за неко $\delta > 0$, па су $c_j = \frac{1}{i} \cdot \int_0^\infty \beta_j e^{it(T-z)\cdot\beta} dt$ (за $1 \leqslant j \leqslant n$) добро дефинисани. Следи

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(z_j - T_j) = \int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{it(T-z)\cdot\beta} dt = e,$$

па $z \notin \sigma(T)$. □

У леми 1.2. из [2], Andersson и Berndtsson су доказали и општије тврђење о вези „реалности" заједничког спектра n-торке комутирајућих ограничених оператора и услова сличних са (6), а то тврђење остаје да важи и ако се изостави ограниченост. Међутим, треба рећи да многи услови који обезбеђују егзистенцију решења апстрактног Кошијевог проблема садрже „реалност" спектра.

Такође, овде је изабрана једна од многих могућих дефиниција комутативности неограничених оператора. Међутим, према коментарима из одељка 2.3, испоставља се да за уопштене скаларне операторе овим избором није ништа изгубљено.

Из теореме 1.5 следи да за сваки затворени, густо дефинисан оператор T, са реалним спектром за који важи $\|(T - \lambda I)^{-m}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|^m}$ за $\lambda \notin \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$, једначина (5) има решење такво да је

$$||C(t)|| = o(e^{\varepsilon t}) \text{ за сваки } \varepsilon > 0. \tag{7}$$

Ово природно доводи и до питања:

Да ли услови (7) повлаче полиномну процену за $C(t)$?

Одговор на ово питање дат је у следећем примеру.

Пример 1.1. *Постоји оператор који не задовољава (6) и чије је асимптотско понашање слабије од експоненцијалног. Прецизније, за произвољно* $\varepsilon > 0$ *важи* $\|e^{itT}\| = o(e^{\varepsilon|t|})$ *кад* $|t| \to \infty$.

Нека је E векторски простор оних целих функција за које постоји број $C \in \mathbb{R}$ такав да је

$$|f(z)| \leqslant Ce^{\sqrt{|z|}}.$$

E је и Банахов простор, где се норма функције f ($\|f\|$) дефинише као најмања константа C за коју претходна неједнакост важи: $\|f\| = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} \dfrac{|f(z)|}{e^{\sqrt{|z|}}}$. Како је

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi+z)}{\xi^2}\,d\xi,$$

то је оператор $T = \dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{d}{dz}$ ограничен линеаран оператор на E. Следи

$$\left(e^{itT}f\right)(z) = \left(e^{t\frac{d}{dz}}f\right)(z) = f(z+t).$$

С обзиром да је

$$\frac{|\left(e^{itT}f\right)(z)|}{e^{\sqrt{z}}} = \frac{|f(z+t)|}{e^{\sqrt{|z+t|}}}\cdot\frac{e^{\sqrt{|z+t|}}}{e^{\sqrt{|z|}}} \leqslant \|f\|\cdot e^{\sqrt{|z|+|t|}-\sqrt{|z|}},$$

за сваки $f \in E$, то је $\|e^{itT}\| = O(e^{\sqrt{|t|}})$ када $|t| \to \infty$.

Ако је $f_0(z) = 2\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{(2n)!}$, онда из претходног следи $\dfrac{\|e^{itT}f_0\|}{\|f_0\|} \leqslant e^{\sqrt{|t|}}$. А како за $x, t \geqslant 0$ важи

$$\begin{aligned}\frac{\left(e^{itT}f_0\right)(x)}{e^{\sqrt{x}}} &= \frac{2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+t)^n}{(2n)!}}{e^{\sqrt{x}}} = \frac{2\cdot\operatorname{ch}(\sqrt{x+t})}{e^{\sqrt{x}}}\\ &= e^{\sqrt{x+t}-\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x+t}-\sqrt{x}},\end{aligned}$$

то следи да је $\|e^{itT}f_0\| \sim e^{\sqrt{|t|}}$ када $t \to \infty$, па је $\|e^{itT}\| \sim e^{\sqrt{|t|}}$ када $t \to \infty$.

2. Први резултати и помоћна тврђења

У овој глави наведена су тврђења која претходе и помажу бољем разумевању остатка текста, као и прве дефиниције и описи објеката са којима се ради. У прва два одељка описани су простори (алгебре) функција за које ће бити дефинисан функционални рачун, у трећем одељку објашњено је шта представља комутативност за уопштене скаларне операторе (и разматран је однос између различитих дефиниција комутативности за неограничене операторе), а у четвртом су наведена основна тврђења Клифордове анализе која ће бити коришћена.

2.1. Алгебра F_α, опис и особине

У овом одељку описана је алгебра F_α над којом ће бити конструисан слаб функционални рачун. Централна места овог одељка су теореме 2.1, 2.2 и 2.3, а његов главни резулат је да из ових теорема следи да простор (F_α, τ) описан дефиницијом 2.1 задовољава услов 1 дефиниције 1.6.

Дефиниција 2.1. Нека је $\mathscr{M}_\alpha(\mathbb{R}^k)$ простор свих Борелових мера на $\mathbb{R}^k$ таквих да је $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^k}(1+|t|^\alpha)d|\mu| < \infty$, са нормом $\|\mu\|_\alpha = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^k}(1+|t|^\alpha)d|\mu|$, где је $\alpha > 0$ реалан број.

Нека је $F_\alpha = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^k) \mid \widehat{f} \in \mathscr{M}_\alpha \right\}$ нормирани простор, са нормом $\|f\|_{F_\alpha} = \|\widehat{f}\|_{\mathscr{M}_\alpha}$.

Пошто је $F_\alpha = \check{\mathscr{M}}_\alpha$, следи да је F_α Банахов простор са нормом $\|\cdot\|_{F_\alpha}$

$$(|\check{\mu}(x)| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \cdot \left| \int_{\mathbb{R}^k} e^{ix\cdot t} d\mu(t) \right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \cdot \|\mu\|_{\mathscr{M}_\alpha} < \infty).$$

Дефиниција 2.2. Нека је τ топологија на F_α генерисана слабом* топологијом на $\mathscr{M}_\alpha(\mathbb{R}^k) \subseteq (C_{b,\alpha}(\mathbb{R}^k))^*$, где је $C_{b,\alpha}(\mathbb{R}^k)$ простор непрекидних функција, таквих да важи $f(t) = O(|t|^\alpha)$ кад $|t| \to \infty$, са нормом $\|f\|_{C_{b,\alpha}} = \inf\{M \mid |f(t)| \leqslant M \cdot (1+|t|^\alpha)\}$.

τ је дефинисана предбазним околинама нуле облика

$$\mathcal{B}(g,\varepsilon) = \left\{ f \in F_\alpha \mid \left| \int_{\mathbb{R}^k} g d\widehat{f} \right| < \varepsilon \right\}$$

за $g \in C_{b,\alpha}(\mathbb{R}^k), \varepsilon > 0$. Више детаља и сличне конструкције могу се наћи у [26], глава 1.

Теорема 2.1. *Простор F_α је алгебра.*

Наиме, важи неједнакост

$$1 + |s+t|^\alpha \leqslant 2^\alpha (1+|s|^\alpha)(1+|t|^\alpha). \tag{8}$$

Заиста, за $|s| \leqslant |t|$ важи $1+|s+t|^\alpha \leqslant 1+(2|t|)^\alpha \leqslant 2^\alpha(1+|t|^\alpha) \leqslant 2^\alpha(1+|t|^\alpha)(1+|s|^\alpha)$; аналогно се добија да неједнакост важи за $|s| \geqslant |t|$. Зато функција $g(t) = \ln(1+|t|^\alpha)$ задовољава $g(s+t) \leqslant \alpha \ln 2 + g(s) + g(t)$, доказ тврђења је аналоган доказу теореме 2.4.

Простори Собољева W^α_∞ могу се дефинисати као простори свих функција $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ чији парцијални изводи $(1-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f$ припадају L^∞. Овде је парцијални извод $(1-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ дефинисан преко Фуријеове трансформације. Притом је $W^\alpha_\infty \supset F_\alpha$ (тј. претходна инклузија је строга), пошто Фуријеова трансформација функције из F_α има непрекидне парцијалне изводе.

Може се дефинисати и векторски простор $F_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$, који се састоји од свих функција f чије су Фуријеове трансформације $\widehat{f}$ јесу мере за које важи $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} (1+|t_1|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |t_n|^{\alpha_n}) d|\widehat{f}\,| < \infty$. Из неједнакости средина следи да је $F_\alpha \subset F_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$, при чему је та инклузија строга, што показује следећи пример.

Пример 2.1. Нека је $n=2$ и $(\alpha_1,\alpha_2) = (1,1)$. Тада је

$$F_{(1,1)} = \Big\{ f \mid \int_{\mathbb{R}^2} (1+|xy|) d|\widehat{f}\,| < \infty \Big\} \quad \text{и} \quad F_2 = \Big\{ f \mid \int_{\mathbb{R}^2} (1+x^2+y^2) d\widehat{f}\ < \infty \Big\}.$$

Нека је ψ инверзна Фуријеова трансформација функције

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{1+|xy|} \cdot \frac{1}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\ln^2(1+(x^2+y^2)/2)}.$$

Тада је

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1+|xy|) d\widehat{\psi} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\ln^2(1+(x^2+y^2)/2)}\, dxdy < \infty,$$

док је

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} (1+x^2+y^2) d\widehat{\psi} &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+|xy|} \cdot \frac{1}{\ln^2(1+(x^2+y^2)/2)}\, dxdy \\
&\geqslant \int_{|x| \geqslant |y|} \frac{1}{1+|xy|} \cdot \frac{1}{\ln^2(1+x^2)}\, dxdy \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(1+x^2)} \cdot \int_0^{|x|} \frac{d|y|}{1+|xy|}\, dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x| \ln(1+x^2)} = \infty,
\end{aligned}$$

па следи $\psi \in F_{(1,1)} \setminus F_2$.

Међутим, простор $F_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$ не мора бити алгебра, што показује наредни пример.

Пример 2.2. Нека је $n = 2$ и $(\alpha_1, \alpha_2) = (1,1)$. Функције $\varphi(x,y) = \sin x^2$ и $\psi(x,y) = \sin y^2$ припадају простору $F_{(1,1)}$, пошто су ограничене и имају ограничене парцијалне изводе $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y}$. Међутим, други мешовити извод производа ових функција није ограничен, па $F_{(1,1)}$ није алгебра.

Следећа теорема даје детаљнији опис простора F_α; она пружа могућност да се у проучавању F_α искористе стандардне технике теорије дистрибуција.

Теорема 2.2. *Скуп $\mathscr{D}$ је густ у простору F_α (са топологијом τ), а утапање $\mathscr{D} \hookrightarrow F_\alpha$ је непрекидно.*

Доказ. $\left([-n,n]^k\right)_{n\geqslant 1}$ је растући низ скупова и важи $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}[-n,n]^k = \mathbb{R}^k$. Следи $|\mu|\left([-n,n]^k\right) \to |\mu|\left(\mathbb{R}^k\right)$ кад $n\to\infty$ за свако $\mu \in \mathscr{M}_\alpha$. Ако је $g \in C_{b,\alpha}(\mathbb{R}^k)$ и $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^k}|g(x)|$, следи да постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да је $|\mu|\left(\mathbb{R}^k \setminus [-n,n]^k\right) < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Зато је $\check{\mu}_n \in \check{\mu} + \mathcal{B}(g,\varepsilon)$, где је $\mu_n(E) = \mu\left(E \cap [-n,n]^k\right)$, за сваки мерљив скуп E, па за први део тврђења довољно доказати да је $\mathscr{D}$ густ у скупу $\{\check{\mu} \mid \mu \in \mathscr{M}_\alpha \wedge \text{носач } \mu \text{ је компактан}\}$.

Нека је μ мера са компактним носачем и $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ апроксимативна јединица на $\mathbb{R}^k$. Тада је $h_j * \mu \in \mathscr{S}$ (пошто је $D^\alpha(h_j*\mu) = (D^\alpha h_j)*\mu$ (став 1.1, део (г)), и, како h_j и μ имају компактне носаче, $h_j*\mu$ такође има компактан носач; овде је $\mathscr{S}$ Шварцова класа). Ако је $g_1(t) = g(-t)$, следи $(h_j*\mu)(g) = ((h_j*\mu)*g_1)(0) = (h_j*(\mu*g_1))(0) \to \delta*(\mu*g_1)(0) = \mu*g_1(0) = \mu(g)$, по ставу 1.1, делови (в) и (г). Следи да $h_j*\mu\to\mu$ кад $j\to\infty$ у слабој* топологији на $\mathscr{M}_\alpha$, па је $\mathscr{S}$ густ у тој топологији, одакле следи да је густ и у простору F_α са топологијом τ, пошто је $\widehat{\mathscr{S}} = \mathscr{S}$.

Дакле, довољно је доказати да је $\mathscr{D}$ густ у $\mathscr{S}$.

Како је $\mathscr{D}$ густо у $\mathscr{S}$ у топологији простора $\mathscr{S}$ (то се може видети аналогном процедуром као са почетка доказа; нека је $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ апроксимативна јединица, тако да је $h(x) \leqslant 1$ и $h \equiv 1$ у некој околини нуле; тада $\mathscr{D} \ni h_j * (\chi_{[-n,n]^k}\cdot\varphi) \to \varphi$ у топологији простора $\mathscr{S}$), за $\varphi \in \mathscr{S}$ постоји $(\varphi_n)_{n\geqslant1}$ тако да $\varphi_n \to \varphi$ у $\mathscr{S}$, кад $n\to\infty$.

Нека је $g \in C_{b,\alpha}(\mathbb{R}^k)$. Тада $\widehat{g} \in \mathscr{S}'$ (по ставу 1.1, део (ђ)), одакле $\int_{\mathbb{R}^k} g(\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi})dx = \int_{\mathbb{R}^k}(\varphi_n - \varphi)d\widehat{g} \to 0$, односно $\varphi_n\to\varphi$ кад $n\to\infty$ у топологији τ.

Коначно, последњи део тврђења је очигледан за тест функције са носачем у фиксираном компактном скупу, па је (по ставу 1.1, део (а)) тачно на целом $\mathscr{D}$. $\square$

Теорема 2.3. *Тачка по тачка сабирање и множење су непрекидни у простору (F_α, τ).*

Доказ. Нека је $\lim\limits_\Gamma f_\gamma = f$ и $\lim\limits_\Gamma g_\gamma = g$ у топологији простора F_α, где Γ нека мрежа. Тада $\int_{\mathbb{R}^k} hd\widehat{f_\gamma} \to \int_{\mathbb{R}^k} hd\widehat{f}$ и $\int_{\mathbb{R}^k} gd\widehat{g_\gamma} \to \int_{\mathbb{R}^k} hd\widehat{g}$, за произвољно $h \in C_{b,\alpha}(\mathbb{R}^k)$. Следи

$$\int_{\mathbb{R}^k} hd(\widehat{f_\gamma + g_\gamma}) = \int_{\mathbb{R}^k} hd\widehat{f_\gamma} + \int_{\mathbb{R}^k} hd\widehat{g_\gamma} \to \int_{\mathbb{R}^k} hd\widehat{f} + \int_{\mathbb{R}^k} hd\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}^k} hd(\widehat{f+g})$$

кад $\gamma \in \Gamma$.

За доказ непрекидности множења, прво нека је $f_\gamma \to 0$ и фиксно g. Нека је

$$\mathcal{B}_{h_1,\ldots,h_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \left\{\varphi \in F_\alpha \;\middle|\; \left|\int_{\mathbb{R}^k} h_j d\widehat{\varphi}\right| < \varepsilon_j, j = 1,\ldots,n\right\}$$

произвољна базна околина нуле, генерисана са $h_j \in C_{b,\alpha}$. На основу неједнакости (8), следи да функције

$$\psi_j(x) = \int_{\mathbb{R}^k} h_j(x+y)d\widehat{g}(y)$$

припадају $C_{b,\alpha}$. Ако је $f_\gamma \in \mathcal{B}_{\psi_1,\dots,\psi_n,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$ тада је $f_\gamma \cdot g \in \mathcal{B}_{h_1,\dots,h_n,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$. Заиста,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^k} h_j d\widehat{f_\gamma} * \widehat{g}\right| = \left|\iint_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k} h_j(x+y)d\widehat{g}(y)d\widehat{f_\gamma}(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^k} \psi_j d\widehat{f_\gamma}\right| < \varepsilon_j.$$

У општем случају важи $f_\gamma \cdot g - fg = (f_\gamma - f)\cdot g$, па тврђење следи на основу претходно доказаног специјалног случаја. □

2.2. Алгебра $\mathscr{A}_h$, опис и особине

У овом одељку описана је алгебра $\mathscr{A}_h$, на којој је такође могуће развити слаб функционални рачун. Ова алгебра уопштава алгебру F_α из претходног одељка, а уз то је неквазианалитичка. Многи резултати који важе за алгебру F_α важе и за ову алгебру. Резултати овог одељка садржани су у [22] и уопштавају неке резултате из [21], [4] и [2] (за неограничене операторе).

Дефиниција 2.3. *Нека је H растућа функција на $[0,\infty)$, за коју важи $H(s+t) \leqslant C + H(s) + H(t)$ за неко $C \in \mathbb{R}$, $H(t) = o(t)$ кад $t \to \infty$ и*

$$\int_1^\infty \frac{H(s)}{s^2}\,ds < \infty. \tag{9}$$

Нека је $h(t) = H(|t|)$.

Дефиниција 2.4. Нека је $\mathscr{M}_h(\mathbb{R}^k)$ простор свих Борелових мера на $\mathbb{R}^k$ таквих да је $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} e^{h(|t|)}d|\mu| < \infty$, са нормом $\|\mu\|_{\mathscr{M}_h} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} e^{h(|t|)}d|\mu|$, где је h функција која је уведена дефиницијом 2.3.

Нека је $\mathscr{A}_h = \left\{f \in L^\infty(\mathbb{R}^k) \mid \widehat{f} \in \mathscr{M}_h\right\}$ нормиран простор, са нормом $\|f\|_{\mathscr{A}_h} = \|\widehat{f}\|_{\mathscr{M}_h}$.

Пошто је $\mathscr{A}_h = \check{\mathscr{M}}_h$, следи да је $\mathscr{A}_h$ Банахов простор, са нормом $\|\cdot\|_{\mathscr{A}_h}$

$$(|\check{\mu}(x)| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\cdot\left|\int_{\mathbb{R}^k} e^{ix\cdot t}d\mu(t)\right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\cdot e^{-C}\cdot\|\mu\|_{\mathcal{M}_h} < \infty$$

–из дефиниције 2.3 следи да је $H(0) \geqslant -C$).

Дефиниција 2.5. Нека је τ топологија на $\mathscr{A}_h$ генерисана слабом* топологијом на $\mathscr{M}_h(\mathbb{R}^k) \subseteq (C_{b,h}(\mathbb{R}^k))^*$, где је $C_{b,h}(\mathbb{R}^k)$ простор непрекидних функција за које важи $f(t) = O(e^{h(t)})$ кад $|t| \to \infty$, са нормом $\|f\|_{C_{b,h}} = \inf\{M \mid |f(t)| \leqslant M \cdot e^{h(t)}\}$.

Теорема 2.4. *Простор $\mathscr{A}_h$ је алгебра.*

Доказ. $\mathscr{A}_h$ је, очигледно, векторски простор. Ако је $f, g \in \mathscr{A}_h$ тада су $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$ коначне мере, тако да је $\int_{\mathbb{R}^k} e^{h(|t|)} d|\widehat{f}\,| < \infty$ и $\int_{\mathbb{R}^k} e^{h(|t|)} d|\widehat{g}\,| < \infty$. Такође, $\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}$ је добро дефинисана и коначна, јер су коначне $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$, па је

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^k} e^{h(|t|)} d|\widehat{f} * \widehat{g}\,| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^k} e^{h(|s+t|)} d|\widehat{f}\,|(s) d|\widehat{g}\,|(t) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^k} e^{h(|s|+|t|)} d|\widehat{f}\,|(s) d|\widehat{g}\,|(t) \\
&\leqslant e^C \cdot \int_{\mathbb{R}^k} e^{h(|s|)} d|\widehat{f}\,|(s) \cdot \int_{\mathbb{R}^k} e^{h(|t|)} d|\widehat{g}\,|(t) \\
&= e^C \cdot \|f\|_{\mathscr{A}_h} \cdot \|g\|_{\mathscr{A}_h}.
\end{aligned}$$

Дакле, ако $f, g \in \mathscr{A}_h$ тада $f \cdot g \in \mathscr{A}_h$. □

Услов (9) значи, према теореми 1.3 (односно према варијанти која се односи на алгебру $\mathscr{A}_h$), да је алгебра $\mathscr{A}_h$ неквазианалитичка.

Напомена 2.1. У раду [2], Andersson и Berndtsson су проучавали просторе $\mathscr{A}_h$, где је $h\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ позитивна, непрекидна, субадитивна функција, која расте по зрацима из координатног почетка, $h(0) = 0$ и $h(t) = o(|t|)$ кад $t \to \infty$, тј. под јачим условима на функцију h од услова који су наведени у дефиницији 2.3. Под тим условима, уз $f, g \in L^1(\mathbb{R}^k)$, простор $\mathcal{A}_h$ са нормом $\|f\|_{\mathcal{A}_h} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} |\hat{f}(t)| e^{h(t)} dt$ је Банахова алгебра (са тачка по тачка множењем). У овом раду се проучавају неограничени оператори, као и (ултра) слаби функционални рачун, па нам није потребана структура Банахове алгебре.

Као и за алгебру F_α важи:

Теорема 2.5. (а) *Скуп $\mathscr{D}$ је густ у простору $\mathscr{A}_h$ (са топологијом τ) и утапање $\mathscr{D} \hookrightarrow \mathscr{A}_h$ је непрекидно.*

(б) *Тачка по тачка сабирање и множење су непрекидни у $(\mathscr{A}_h, \tau)$.*

Доказ је аналоган доказима теорема 2.2 и 2.3, па је изостављен. Коначно, као и у претходном одељку, закључак овог одељка би могао да буде да из 2.4, 2.5 следи да простор $(\mathscr{A}_h, \tau)$ (из дефиниције 2.1) задовољава услов 1 из дефиниције 1.6.

2.3. Однос различитих дефиниција комутативности

При раду са неограниченим операторима настаје много проблема који не постоје приликом рада са ограниченим. Један од таквих је и само значење појма комутативности. За n-торку неограничених оператора тај појам није једнозначано одређен и није јасно у каквом облику он може довести до разумне теорије. У литератури се приликом дефинисања комутативности неограничених оператора S и T најчешће срећу следеће дефиниције:

(Д 1) Постоји густ скуп $\mathfrak{D} \subseteq X$ такав да за сваки $x \in \mathfrak{D}$ важи $STx = TSx$.

(Д 2) Нека постоји $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ функционални рачун и за S и за T. За $f, g \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ важи $f(S)g(T) = g(T)f(S)$.

(Д 3) Нека су S и T генератори јако непрекидних група e^{itS} и e^{itT}, редом. За сваки $s, t \in \mathbb{R}$ важи $e^{isS}e^{itT} = e^{itT}e^{isS}$.

(Д 4) За сваки $\mu \in \rho(S)$ и $\lambda \in \rho(T)$ важи $(S-\mu I)^{-1}(T-\lambda I)^{-1} = (T-\lambda I)^{-1}(S-\mu I)^{-1}$.

Може се десити да услови (Д 2), (Д 3), (Д 4) „не говоре ништа", пошто неограничен оператор не мора имати ни $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ функционални рачун, нити мора постојати решење одговарајућег Кошијевог задатка, а резолвентни скуп оператора може бити празан.

Међутим, за уопштене скаларне операторе S и T ове дефиниције су смислене и међусобно еквивалентне, што је наведено у наставку овог одељка. У доказима је претпостављена егзистенција ултра слабог функционалног рачуна, што је главни резултат овог рада; та егзистенција је доказана у глави 3.

Став 2.1. (Д 1) $\Rightarrow$ (Д 4).

Доказ овог става је једноставан, па је изостављен.

Став 2.2. *За уопштене скаларне операторе* S, T *важи* (Д 3) $\Rightarrow$ (Д 1).

Доказ овог тврђења налази се након Става 3.5.

Став 2.3. *За уопштене скаларне операторе* S, T *важи* (Д 3) $\Rightarrow$ (Д 2).

Резултат се добија конструкцијом функционалног рачуна за пар (S, T) за ширу алгебру $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, избором функције $f(x)g(y)$.

Став 2.4. *За уопштене скаларне операторе* S, T *важи* (Д 4) $\Rightarrow$ (Д 3).

Доказ. Доказ је модификација стандардног доказа теореме Хиле–Јошида (теорема 1.5). Како је спектар оператора iT на имагинарној оси, за свако $\lambda > 0$ је $\lambda \in \rho(iT)$, па је $B_\lambda = -i\lambda\left[I - \lambda(\lambda I - iT)^{-1}\right]$ (за $\lambda > 0$) ограничен оператор. Такође, важи $iTx = \lim\limits_{\lambda\to\infty} B_\lambda x$ за свако $x \in \mathfrak{D}(iT) = \mathfrak{D}(T)$, а $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tB_\lambda}x$ постоји за свако $x \in \mathfrak{D}(iT) = \mathfrak{D}(T)$ и та гранична вредност је $e^{itT}x$. Аналогно, ако је $C_\lambda = -i\lambda\left[I - \lambda(\lambda I - iC)^{-1}\right]$ (за $\lambda > 0$), следи $iSx = \lim\limits_{\lambda\to\infty} C_\lambda x$ за свако $x \in \mathfrak{D}(iS) = \mathfrak{D}(S)$ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{sC_\lambda}x$ постоји за свако $x \in \mathfrak{D}(iS) = \mathfrak{D}(S)$.

Ако важи (Д 4) (тј. ако резолвенте комутирају), тада комутирају и B_λ и C_λ (за свако $\lambda > 0$), одакле, граничним прелазом $\lambda \to \infty$, следи (Д 3). □

Став 2.5. *За уопштене скаларне операторе* S, T *важи* (Д 2) $\Rightarrow$ (Д 4).

Доказ. Функција $g_\lambda(x) = \dfrac{1}{x-\lambda}$ припада F_α за свако α и за све $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Заиста, g_λ је инверзна Фуријеова трансформација функције $F(x) = i\sqrt{2\pi}\cdot e^{-i\lambda x}H(-x)$ (где је $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ Хевисајдова функција) за $\operatorname{Im}\lambda > 0$, односно инверзна Фуријеова трансформација функције $F(x) = -i\sqrt{2\pi}\cdot e^{-i\lambda x}H(x)$ за $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Следи да је $g_\lambda \in F_\alpha$ и $\|g_\lambda\|_{F_\alpha} = \sqrt{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{|\operatorname{Im}\lambda|^\alpha}\right)$.

Ако је $\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$, где је $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ тест функција једнака 1 у некој околини нуле, тада низ тест функција $\psi_{n,\lambda} = \varphi_n \cdot g_\lambda \to g_\lambda$ кад $n \to \infty$ у топологији τ из дефиниције 2.1, па $\psi_{n,\lambda}(S) \to g_\lambda(S) = (S - \lambda I)^{-1}$ слабо, по ставу 4.1. Аналогно, $\psi_{m,\mu}(T) \to (T - \mu I)^{-1}$ слабо. Ако је испуњено (Д 2), тада $\psi_{n,\lambda}(S)\psi_{m,\mu}(T) = \psi_{m,\mu}(T)\psi_{n,\lambda}(S)$, па граничним прелазом $n \to \infty$ и $m \to \infty$ следи (Д 4). $\square$

2.4. Клифордова анализа, основна својства

Клифордове алгебре су структуре које су природно уопштење комплексних бројева и кватерниона. Над овом структуром могуће је развити теорију која има доста сличности са комплексном анализом. У овом раду су искоришћена основна тврђења Клифордове анализе, пре свега аналогон Лиувилове теореме, да би се описао носач функционалног рачуна.

Дефиниција 2.6. Нека је F реални векторски простор димензије m са базом $\{e_j \,|\, 1 \leqslant j \leqslant m\}$. Клифордова алгебра $\mathcal{C}l(F)$ је векторски простор чија је база $\{e_S \,|\, S \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}\}$, са множењем које је генерисано идентитетима $e_\emptyset = 1$, $e_{\{j\}} = e_j$ и правилима

$$
\begin{array}{lrcl}
(10) \qquad & e_j^2 & = & -1, \\
& e_j e_k & = & -e_k e_j, \text{ за } k \neq j, \\
& e_S & = & e_{j_1} e_{j_2} \ldots e_{j_s}, \text{ за } S = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}.
\end{array}
$$

За m-димензионални реални векторски простор F биће коришћена и ознака $\mathcal{C}l(m)$ уместо $\mathcal{C}l(F)$. На пример, $\mathcal{C}l(1)$ је изоморфна пољу комплексних бројева, а $\mathcal{C}l(2)$ пољу кватерниона. У овој структури природно се дефинише и инволуција $\lambda \to \overline{\lambda}$: ако је $\lambda = \sum \lambda_S e_S$, тада је $\overline{\lambda} = \sum \overline{\lambda_S} \overline{e}_S$, где је $\overline{e}_S \in \{e_S, -e_S\}$ изабран тако да важи $e_S \overline{e}_S = \overline{e}_S e_S = 1$. Један од разлога што су Клифордове алгебре погодне за рад јесте што су сви ненула елементи у њој инвертибилни; ако је $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $(\in \mathbb{R}^{n+1})$ елемент различит од нуле, тада је

$$
x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^2} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2} \cdot (x_0 - x_1 e_1 - \ldots - x_n e_n)
$$

(овај простор је нормиран простор са нормом $|x|^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2$).

Дефиниција 2.7. Нека је U отворен скуп у $\mathbb{R}^n$ и $f \colon U \to \mathcal{C}l(n)$ функција класе C^1. Функција f се назива лево (десно) моногенична ако је $\sum\limits_{j=1}^{n} e_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} e_j = 0\right)$.

Оператор $D = \sum_{j=1}^{n} e_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ се назива Дираков оператор. Настао је симулацијом класичног Дираковог оператора; задовољава $D^2 = -\triangle_n$, где је Лапласијан $\triangle_n$ у n димензија. Услов из претходне дефиниције се често записује у облику $Df = 0$ ($fD = 0$). Типични примери моногеничних функција су градијенти реалних хармонијских функција (ако је h реална хармонијска, Dh је (лево и десно) моногенична); у применама се често користи функција $G(x) = \frac{\overline{x}}{\|x\|^n}$ (у ознаци $G_n(x)$ ако се жели назначити димензија). На крају овог одељка дате су варијанте Кошијеве теореме, Кошијеве интегралне формуле и Лиувилове теореме у Клифордовој анализи. Више детаља о Клифордовим алгебрама и Клифордовој анализи може се наћи у [6] и [25].

Теорема 2.6. *Нека је f лево моногенична функција на U, а g десно моногенична функција на U. Нека је V ограничена област која компактно припада U са део-по-део глатком границом S. Тада је*

$$\int_S g(x)n(x)f(x)d\sigma(x) = 0 \tag{11}$$

где је $n(x)$ јединична спољна нормала на S у x, а $\sigma(x)$ површинска (Лебегова) мера на S.

Доказ. Из Гринове (Стоксове) формуле следи

$$\int_S g(x)n(x)f(x)d\sigma(x) = \int_V \left((g(x)D)f(x) + g(x)(Df(x))\right) dx^n = 0.$$

□

Теорема 2.7. *Нека су U, V, S, f као у теореми 2.6, ω_n површина јединичне сфере у $\mathbb{R}^n$ и $y \in V$. Тада је*

$$f(y) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_S G(x-y)n(x)f(x)d\sigma(x) \quad \text{и} \quad g(y) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_S g(x)n(x)G(x-y)d\sigma(x).$$

Доказ. Нека је $S^{n-1}(z,r)$ сфера у $\mathbb{R}^n$ са центром у z и полупречника r. Како је V отворен, за довољно мало r је $S^{n-1}(y,r) \subset V$, па из теореме 2.6 следи

$$\int_S G(x-y)n(x)f(x)d\sigma(x) = \int_{S^{n-1}(y,r)} G(x-y)n(x)f(x)d\sigma(x).$$

Међутим, на $S^{n-1}(y,r)$ је $n(x) = \frac{x-y}{\|x-y\|}$, одакле је $G(x-y)n(x) = \frac{1}{r^{n-1}}$. Дакле, важи

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}(y,r)} G(x-y)n(x)f(x)d\sigma(x) &= \int_{S^{n-1}(y,r)} \frac{f(x)-f(y)}{r^{n-1}}\, d\sigma(x) + \int_{S^{n-1}(y,r)} \frac{f(y)}{r^{n-1}}\, d\sigma(x) \\
&= \int_{S^{n-1}(y,r)} \frac{f(x)-f(y)}{r^{n-1}}\, d\sigma(x) + f(y)\cdot\omega_n.
\end{aligned}$$

Коначно, први део тврђења следи из $\lim\limits_{r\to 0+} \int_{S^{n-1}(y,r)} \frac{f(x)-f(y)}{r^{n-1}}\, d\sigma(x) = 0$, док се други доказује аналогно. □

Теорема 2.8. *Ако је* $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{C}l(n)$ *ограничена цела (лево) моногенична функција, тада је* f *константна.*

Доказ. За сваки $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, нека је $S^n(x,R) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ сфера са центром у x, радијуса R. Из теореме 2.7 следи да је

$$f(x) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_{S^n(x,R)} |x-y|^{-n-1}\overline{(x-y)}n(y)f(y)d\sigma(y).$$

Међутим, на $S^n(x,R)$ је $n(y) = \dfrac{y-x}{\|x-y\|}$, одакле

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right\| &= \frac{1}{\omega_n} \cdot \left\| \int_{S^n(x,R)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x-y|^{-n-1}\overline{(x-y)}n(y)f(y)\right) d\sigma(y) \right\| \\
&= \frac{1}{\omega_n} \cdot \left\| \int_{S^n(x,R)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x-y|^{-n}f(y)\right) d\sigma(y) \right\| \\
&= \frac{1}{\omega_n} \cdot \left\| \int_{S^n(x,R)} -\left(|x-y|^{-n-2}\cdot 2(x_i-y_i)f(y)\right) d\sigma(y) \right\| \\
&\leqslant \frac{2}{\omega_n} \cdot R^{-n-1} \max_{y\in\mathbb{R}^{n+1}} f(y) \cdot \int_{S^n(x,R)} d\sigma(y) \\
&= \frac{2}{\omega_n} \cdot R^{-n-1} \max_{y\in\mathbb{R}^{n+1}} f(y) \cdot R^n\omega_n \\
&= \mathrm{const} \cdot \frac{1}{R} \to 0 \quad \text{кад} \quad R \to \infty.
\end{aligned}$$

Следи да је $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0$ за сваки j (и сваки $x \in \mathbb{R}^{n+1}$), па је $f \equiv \mathrm{const}$. □

3. Функционални рачун и носач функционалног рачуна

У овој глави налазе се главна тврђења овог рада. У првом одељку конструисан је ултра слаб функционални рачун над алгебром F_α (за n-торку комутирајућих уопштених скаларних оператора). Сличне конструкције се налазе у другом одељку, над тамо дефинисаном алгебром $F_{\alpha,loc}$ (што даје могућност конструисања функционалног рачуна који на неки начин не зависи од понашања функције у бесконачности) и у трећем са алгебром $\mathscr{A}_h$. У четвртом одељку доказано је да се носач тако добијеног функционалног рачуна поклапа са спектром оператора који је у уској вези са полазном n-торком (тај оператор делује на Клифордовој алгебри добијеној из полазног Банаховог простора). Коначно, у петом одељку је констатовано да је у неком смислу овом конструкцијом обухваћена најшира могућа алгебра функција.

3.1. Конструкција функционалног рачуна на F_α

Став 3.1. *Нека је φ тест функција, таква да је $\varphi \equiv 1$ у некој околини нуле и $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Нека је $\chi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ за $n \in \mathbb{N}$. Тада $f\chi_n \to f$ у топологији простора F_α (кад $n \to \infty$).*

Доказ. Треба доказати да

$$\int_{\mathbb{R}^k} g d\widehat{f\chi_n} \to \int_{\mathbb{R}^k} g d\widehat{f}$$

кад $n \to \infty$ за свако $g \in C_{b,\alpha}(\mathbb{R}^k)$.

Нека је $F_n(t,s) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} g(t+s) d\widehat{\chi_n}(s)$. Пошто $\widehat{\chi_n}(s) \to \delta$ (Диракова дистрибуција) у топологији простора F_α кад $n \to \infty$ ($\widehat{\chi_n}(s)$ припада Шварцовој класи $\mathscr{S}$ и тежи ка δ у топологији $\mathscr{S}$; видети теорему 2.2), следи $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t,s) = g(t)$.

Пошто је

$$\int_{\mathbb{R}^k} g d\widehat{f\chi_n} = \int_{\mathbb{R}^k} g d(\widehat{f} * \widehat{\chi_n}) = \int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^k} g(s+t) d\widehat{f}(t) d\widehat{\chi_n}(s) = \int_{\mathbb{R}^k} F_n(t,s) d\widehat{f}(t),$$

и како је $\widehat{\chi_n}(s) = n^k \widehat{\varphi}(ns)$ (став 1.1, део (e)), резултат се добија на основу теореме о доминантној конвергенцији, пошто је

$$\begin{aligned}
|F_n(t,s)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^k} |g(t+s)| d|\widehat{\chi_n}(s)| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^k} n^k (1 + |s+t|^\alpha) d\widehat{\varphi}(ns) \\
&\leqslant 2^\alpha (1 + |t|^\alpha) \int_{\mathbb{R}^k} n^k (1 + |s|^\alpha)(1 + |ns|)^{-\alpha-k-1} ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^\alpha(1+|t|^\alpha)\int_{\mathbb{R}^k}\frac{(1+\left|\frac{u}{n}\right|^\alpha)}{(1+|u|)^{\alpha+k+1}}\,du\\
&\leqslant 2^\alpha(1+|t|^\alpha)\int_{\mathbb{R}^k}\frac{(1+|u|^\alpha)}{(1+|u|)^{\alpha+k+1}}\,du\\
&\leqslant \mathrm{const}\cdot(1+|t|^\alpha).
\end{aligned}
$$

У претходном је коришћено је да је $g \in C_{b,\alpha}(\mathbb{R}^k)$, $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}$ (па је $|\widehat{\varphi}'(s)| \leqslant \mathrm{const}\cdot(1+|s|)^{-m}$ за свако природно m), $\left|\frac{u}{n}\right| \leqslant |u|$ за природно n и неједнакост (8). □

Претходни став говори да алгебра F_α задовољава услов из дефиниције ултра слабог функционалног рачуна. Симулирајући разматрања из [23] и [21], и користећи Фуријеову трансформацију, може се дефинисати функционални рачун формулом:

$$
W^\alpha_\infty \supseteq F_\alpha \ni f \mapsto \Phi(f) = f(T) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\cdot\int_{\mathbb{R}^k} e^{-it\cdot T}d\mu_{\widehat{f}}, \tag{12}
$$

где мера $\mu_{\widehat{f}}$ јесте Фуријеова трансформација функције f.

Наиме, иако $\widehat{f}(t) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\cdot\displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} e^{-its}f(s)ds$ може дивергирати за неко t, ова формула дефинише комплексну Борелову меру $\mu_{\hat{f}}$ и важи $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^k}(1+|t|^\alpha)d|\mu_{\widehat{f}}| < \infty$. Ради лакшег записа, од сада ће се често писати $\hat{f}$ уместо $\mu_{\hat{f}}$.

Теорема 3.1. *Нека је $T = (T_1,\ldots,T_k)$ k-торка затворених, густо дефинисаних оператора, таквих да постоје e^{itT_j} као решења одговарајућег Кошијевог проблема (5) и да важи*

$$
\|e^{itT_j}\| = O(|t|^{\alpha_j}) \ \text{ кад } \ t\to\infty.
$$

Нека T_j међусобно комутирају (што значи да одговарајуће групе e^{itT_j} и e^{isT_l} међусобно комутирају за све $s,t\in\mathbb{R}$ и све j,l).

Нека је X рефлексиван Банахов простор и нека је $\alpha = \displaystyle\sum_{l=1}^{k}\alpha_l, \alpha_l \geqslant 0$.

Тада формула (12) дефинише хомоморфизам $\Phi\colon F_\alpha \to \mathscr{B}(X)$. Притом интеграл у (12) постоји као слаб интеграл и Φ је (τ,ω) непрекидно, где је τ топологија простора F_α као потпростора дуала простора $C_{b,\alpha}$, а ω је слаба топологија на $\mathscr{B}(X)$.

Доказ. Нека је $x\in X$ и $\Lambda \in X^*$. Функција $t\mapsto \Lambda(e^{it\cdot T}x)$ је непрекидна и важи

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^k}\Lambda\left(e^{it\cdot T}x\right)d\mu_{\widehat{f}}\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^k}\|\Lambda\|(1+|t|^\alpha)\|x\|d|\mu_{\widehat{f}}| \leqslant \|\Lambda\|\cdot\|x\|\cdot\|f\|_\alpha;
$$

зато (12) постоји као слаб интеграл.

Пресликавање Φ је линеарно и важи

$$
\begin{aligned}
\Phi(f)\cdot\Phi(g) &= \frac{1}{(2\pi)^k}\cdot\int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^k} e^{i(t+s)\cdot T}d\mu_{\widehat{f}}(s)d\mu_{\widehat{g}}(t)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\cdot\int_{\mathbb{R}^k} e^{ir\cdot T}d\mu_{\widehat{f}*\widehat{g}}(r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\cdot\int_{\mathbb{R}^k} e^{ir\cdot T}d\mu_{\widehat{fg}}(r) = \Phi(fg),
\end{aligned}
$$

где je $r = s + t$.

Нека je $S_{\Lambda,x,\varepsilon} = \{A \mid |\Lambda(Ax)| < \varepsilon\}$ предбазни скуп у $\mathscr{B}(X)$, $f_0 \in F_\alpha$ и

$$A_f = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} e^{it\cdot T} d\mu_{\widehat{f}}(t) \in \mathscr{B}(X) \quad \text{за} \quad f \in F_\alpha.$$

Нека je $V = \left\{ f \,\middle|\, \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \cdot \left| \int_{\mathbb{R}^k} \Lambda(e^{it\cdot T}x) d\mu_{\widehat{f-f_0}} \right| < \varepsilon \right\}$. Пошто je $t \mapsto \Lambda(e^{it\cdot T}x)$ непрекидно, V je околина у F_α, а како je

$$\Lambda\left[(A_f - A_{f_0})x\right] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} \Lambda(e^{it\cdot T}x) d\mu_{\widehat{f-f_0}}(t) < \varepsilon,$$

следи $\Phi(f_0 + V) \subseteq A_{f_0} + S_{\Lambda,x,\varepsilon}$. □

Теорема 3.2. *Нека je $p(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ полином степена m, а $(\vartheta_n)_{n\geqslant 1}$ низ тест функција који растући и униформно на компактима тежи ка 1. Тада за сваки $\phi \in \bigcap_{\sum m_j = m} \operatorname{Dom} \prod_j T_j^{m_j}$ важи $\Phi(\vartheta_n p)\phi \xrightarrow{w} p(T_1, T_2, \ldots, T_k)\phi$ кад $n \to \infty$.*

Доказ. Функција $t \mapsto e^{it\cdot T}$ je јако и слабо диференцијабилна и задовољава (5). Нека je $D_j = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial t_j}$, а δ Диракова дистрибуција. Пошто je $D_j^m(\widehat{1}) = D_j^m((2\pi)^{k/2}\delta) = (-1)^m \widehat{t_j^m}$ (за све $m \in \mathbb{N}_0$), а ϑ_n има компактан носач, на основу дефиниције дистрибуције и става 1.1, део (д), следи

$$\begin{aligned}
T_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot T_k^{m_k}\phi &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} T_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot T_k^{m_k} e^{it\cdot T} \phi \, d((2\pi)^{\frac{k}{2}} \cdot \delta) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} D_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot D_k^{m_k} \left(e^{it\cdot T}\right) \phi \, d\mu_{(\widehat{1} * \widehat{\vartheta_n})} \\
&= (-1)^{m_1 + \ldots + m_k} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} e^{it\cdot T} \phi \, d\mu_{(D_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot D_k^{m_k}(\widehat{1}) * \widehat{\vartheta_n})} \\
&= (-1)^{\sum_j m_j} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} e^{it\cdot T} \phi \, d\mu_{(((-1)^{\sum_j m_j} \widehat{t_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot t_k^{m_k}}) * \widehat{\vartheta_n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} e^{it\cdot T} \phi \, d\mu_{(\widehat{t_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot t_k^{m_k} \cdot \vartheta_n})},
\end{aligned}$$

што доказује тврђење у случају када je $p(t_1, \ldots, t_k) = t_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot t_k^{m_k}$ (моном). У општем случају резултат следи из линеарности Φ. □

Претходни резултати говоре да je формулом (12) дефинисан ултра слаби функционални рачун.

3.2. Конструкција функционалног рачуна на $F_{\alpha,loc}$

У овом одељку је показано да могућност конструисања $f(T)$ не зависи од понашања функције f у бесконачности; заправо, зависи од локалних својстава функције f.

Кроз остатак рада, $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$, $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$, $(\chi_n)_{n\geqslant 1}$ ће означавати растуће низове тест функција, са сликом у $[0,1]$, такве да $\{t \in \mathbb{R}^k \mid \varphi_n(t) = 1\}$ чине растуће низове скупова чија је унија $\mathbb{R}^k$, сем ако се не нагласи другачије. Такве низове ћемо називати исцрпљујућим.

Став 3.2. *Нека је X_n векторски простор $\operatorname{Im}(\chi_n(T))$ (за $n \in \mathbb{N}$) и нека је $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Тада је X_n инваријантан за све операторе $f(T)$, а $E = \mathscr{L}(E_0)$ је густ у X.*

Доказ. Нека је $x \in X_n$, тј. $x = \chi_n(T)y$. Тада $f(T)x = f(T)\chi_n(T)y = \chi_n(T)f(T)y \in X_n$.

Пошто $\chi_n \to 1$ у топологији простора F_α, за свако $x \in X$ важи $x = w - \lim x_n = w - \lim \chi_n(A)x$. Следи да је скуп E_0 слабо густ, па је такав и његов линеаран омотач E. Међутим, за линеарне просторе слабо и јако затворење се поклапају. □

Дефиниција 3.1. Нека је $F_{\alpha,loc}$ скуп свих функција $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ таквих да за свако $\varphi \in \mathscr{D}$ важи $f\varphi \in F_\alpha$.

Став 3.3. *Важи $F_\alpha \subseteq F_{\alpha,loc}$, а простор $F_{\alpha,loc}$ је алгебра.*

Доказ. Прво тврђење следи из $\mathscr{D} \cdot F_\alpha \subseteq F_\alpha \cdot F_\alpha \subseteq F_\alpha$. Нека је $f, g \in F_{\alpha,loc}$ и нека је $\varphi \in \mathscr{D}$. Нека је $\psi \in \mathscr{D}$ тако да је $\varphi\psi = \varphi$, тј. функција ψ је једнака 1 у околини носача функције φ. Тада је $f\varphi, g\psi \in F_\alpha$ и $fg\varphi = f\varphi \cdot g\psi \in F_\alpha$. □

Став 3.4. *Нека је $f \in F_{\alpha,loc}$, а $(\chi_n)_{n\geqslant 1}$ неки исцрпљујући низ и нека је $x \in E$. Тада низ $((f \cdot \chi_n)(T)x)_{n\geqslant 1}$ јако конвергира и његова гранична вредност не зависи од избора исцрпљујућег низа.*

Доказ. Нека је $x \in X_k$. Тада је $x = \psi_k(A)y$ за неко $y \in X$. Нека је $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $\chi_{n_0} = 1$ на $\operatorname{supp}\psi_k$. За $n \geqslant n_0$ важи $(f\cdot\chi_n)(T)x - (f\cdot\chi_{n_0})(T)x = ((f\cdot(\chi_n - \chi_{n_0})\cdot\psi_k(T))y = 0$, па је $(f \cdot \chi_n)(T)x$ константно за $n \geqslant n_0$. Следи да је тај низ константан за $x \in E$.

Нека је $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ исцрпљујући низ и нека је

$$y = \lim_{n\to\infty} (f\chi_n)(T) \text{ и } z = \lim_{n\to\infty} (f\psi_n)(T).$$

За произвољно $\theta \in \mathscr{D}$ важи

$$\theta(T)y = \lim_{n\to\infty} \theta(T)(f\chi_n)(T)x = (\theta f)(T)x,$$

и, аналогно, $\theta(T)z = (\theta f)(T)x$. Следи да за свако $\theta \in \mathscr{D}$ важи $\theta(T)(y - z) = 0$. Ако θ узима вредности $\theta_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$, тада $\theta_n(T) \to I$ слабо (кад $n \to \infty$), па је $y - z = 0$. Дакле, гранична вредност не зависи од избора исцрпљујућег низа. □

Дефиниција 3.2. Нека је $f \in F_{\alpha,loc}$ и $x \in E$. Нека је $f(T)x = \lim_{n\to\infty}(f \cdot \chi_n)(T)x$ (на овај начин је дефинисано пресликавање $f \mapsto f(T)$).

Став 3.5. *Пресликавање дефинисано у претходној дефиницији је линеарно и мултипликативно.*

Доказ. Линеарност је очигледна. Низ $(f\chi_n)(T)x$ је константан за $n \geqslant n_0$ (за неко n_0). Нека је ψ_n произвољан исцрпљујући низ и $x = \psi_k(T)y \in X_k$, а φ_n исцрпљујући низ за који важи $\chi_n\varphi_n = \chi_n$. Тада је

$$(fg)(T)x = \lim_{n\to\infty}(f\chi_n)(T)(g\varphi_n)(T)\psi_k(T)y. \tag{13}$$

Пошто оператори $(f\chi_n)(T)$, $(g\varphi_n)(T)$, $\psi_k(T)$ комутирају, и $(g\varphi_n)(T)y$ и $(f\chi_n)(T)y$ припадају X_k, па су $(g\varphi_n)(T)y$ и $g(T)y$ (као гранична вредност) у домену оператора $f(T)$, тј. оператор $f(T)g(T)$ је добро дефинисан на X_n. Заменом улога f и g следи да је и $g(T)f(T)$ добро дефинисан на X_n. Из (13) следи $(fg)(T) = f(T)g(T) = g(T)f(T)$. $\square$

Доказ става 2.2. У овој глави за уопштене скаларне операторе конструисан је ултра слаби функционални рачун и проширен до $F_{\alpha,loc}$. Како функција $f(x,y) = xy$ припада $F_{\alpha,loc}$, оператор $f(T,S)$ је дефинисан на линераном омотачу скупа E (дефинисаном у ставу 3.2), па из доказа става 3.5 следи да су на E и TS и ST једнаки $f(T,S)$. $\square$

Став 3.6. *За свако $f \in F_{\alpha,loc}$ оператор $f(T)$ је затворив.*

Доказ. Нека $x_n \to 0$ и $f(T)x_n \to y$ кад $n \to \infty$. Тада је

$$y = w - \lim_{n\to\infty}\chi_n(T)y = w - \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\chi_n(T)f(T)x_m = 0,$$

пошто су и $\chi_n(T)$ и $(\chi_n f)(T)$ ограничени. $\square$

3.3. Конструкција функционалног рачуна на $\mathscr{A}_h$

Став 3.7. *Нека је $e^{h(|t|)} = O(|t|^\alpha)$ за неко $\alpha \geqslant 0$. Нека је φ тест функција, таква да је $\varphi \equiv 1$ у некој околини нуле и $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Нека је $\chi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ за $n \in \mathbb{N}$. Тада $f\chi_n \to f$ у топологији простора $\mathscr{A}_h$ (кад $n \to \infty$).*

Доказ. Треба доказати да

$$\int_{\mathbb{R}^k} g d\widehat{f\chi_n} \to \int_{\mathbb{R}^k} g d\widehat{f}$$

кад $n \to \infty$ за свако $g \in C_{b,\alpha}(\mathbb{R}^k)$.

Нека је $F_n(t,s) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} g(t+s)d\widehat{\chi_n}(s)$. Пошто $\widehat{\chi_n}(s) \to \delta$ (Дираковa дистрибуција) у топологији простора $\mathscr{A}_h$ кад $n \to \infty$ ($\widehat{\chi_n}(s)$ припада Шварцовој класи $\mathscr{S}$ и тежи ка δ у топологији $\mathscr{S}$; видети теорему 2.5), следи $\lim_{n\to\infty} F_n(t,s) = g(t)$.

Пошто је

$$\int_{\mathbb{R}^k} g d\widehat{f\chi_n} = \int_{\mathbb{R}^k} g d(\widehat{f} * \widehat{\chi_n}) = \int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^k} g(s+t) d\widehat{f}(t) d\widehat{\chi_n}(s) = \int_{\mathbb{R}^k} F_n(t,s) d\widehat{f}(t),$$

и како је $\widehat{\chi_n}(s) = n^k \widehat{\varphi}(ns)$ (став 1.1, део (е)), резултат се добија на основу теореме о доминантној конвергенцији, пошто је

$$\begin{aligned}
|F_n(t,s)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^k} |g(t+s)| d|\widehat{\chi_n}(s)| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^k} n^k e^{h(|s+t|)} d\widehat{\varphi}(ns) \\
&\leqslant e^C \cdot e^{h(|t|)} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} n^k e^{h(|s|)} \widehat{\varphi}'(ns) ds \\
&= e^C \cdot e^{h(|t|)} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} e^{h\left(\left|\frac{u}{n}\right|\right)} \widehat{\varphi}'(u) du \\
&\leqslant e^C \cdot e^{h(|t|)} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} e^{h(|u|)} \widehat{\varphi}'(u) du \\
&\leqslant e^C \cdot e^{h(|t|)} \cdot \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\mathrm{const} \cdot (1+|u|^\alpha)}{(1+|u|)^{\alpha+k+1}} du \\
&\leqslant \mathrm{const} \cdot e^{h(|t|)}.
\end{aligned}$$

У претходном је коришћено је да је $g \in C_{b,\alpha}(\mathbb{R}^k)$, $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}$ (па је $|\widehat{\varphi}'(s)| \leqslant \mathrm{const} \cdot (1+|s|)^{-m}$ за свако природно m), $\left|\frac{u}{n}\right| \leqslant |u|$ за природно n и својства функције h. $\square$

Услов $e^{h(|t|)} = O(|t|^\alpha)$, за неко $\alpha > 0$, у литератури се чешће замењује јачим условом $\varliminf_{|t|\to\infty} \dfrac{\ln(1+|t|)}{h(|t|)} > 0$. Заправо, најчешће се срећу алгебре код којих је одговарајућа тежина облика $e^{-h(t)}$, са условом $\varlimsup_{|t|\to\infty} \dfrac{\ln(1+|t|)}{h(t)} = 0$, који је еквивалентан услову да је $e^{-h(t)} = O(|t|^{-m})$ за свако $m > 0$; видети, на пример, [2].

Претходни став показује да алгебра $\mathscr{A}_h$ (са додатним условом) задовољава услов из дефиниције ултра слабог функционалног рачуна. Као и за алгебре F_α, формула (12) дефинише хомоморфизам $\Phi\colon \mathscr{A}_h \to \mathscr{B}(X)$, и којом је дефинисан ултра слаби функционални рачун. То говоре теорема 3.2 и следећа варијанта теореме 3.1 за алгебре $\mathscr{A}_h$. Доказ је аналоган доказу теореме 3.1, па је изостављен.

Теорема 3.3. *Под условима теореме 3.1 формула (12) дефинише хомоморфизам $\Phi\colon \mathscr{A}_h \to \mathscr{B}(X)$. Притом интеграл у (12) постоји као слаб интеграл и Φ је (τ,ω) непрекидно, где је τ топологија простора $\mathscr{A}_h$ као потпростора дуала простора $C_{b,\alpha}$, а ω је слаба топологија на $\mathscr{B}(X)$.*

Дефиниција 3.3. Носач функционалног рачуна је најмањи затворен скуп $\operatorname{supp}\Phi \subseteq \mathbb{R}^k$ такав да, ако је $f \equiv g$ на $\operatorname{supp}\Phi$, онда је $\Phi(f) = \Phi(g)$.

Дефиниција 3.4. За Банахов простор X Банахов модул над $\mathcal{C}l(m)$ је векторски простор

$$X_{(m)} = X \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}l(m) = \{ \sum_{S \subseteq \{1,2,\ldots,m\}} u_S e_S \mid u_S \in X \},$$

са нормом

$$\Big\| \sum_{S \subseteq \{1,2,\ldots,m\}} u_S e_S \Big\| = \left(\sum_{S \subseteq \{1,2,\ldots,m\}} \|u_S\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Дефиниција 3.5. За $(m+1)$-торку оператора $T_0, T_1, \ldots, T_m$ (ограничених или неограничених) на Банаховом простору X, оператор $T_{cl} = \sum_{j=0}^{m} T_j e_j$ је дефинисан са

$$T_{cl}(\sum_S u_S e_S) = \sum_{j=0}^{m} \sum_S T_j u_S e_j e_S,$$

а његова норма са $\|T_{cl}\| = \sup_{\|u\| \leqslant 1} \|T_{cl} u\|$.

Резолвентни скуп и спектар оператора T_{cl} дефинишу се једнакостима

$$\begin{aligned} \rho(T_{cl}) &= \{\lambda \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \lambda I - T_{cl} \ \text{ је инвертибилан}\}, \quad \text{односно} \\ \sigma(T_{cl}) &= \mathbb{R}^{m+1} \setminus \rho(T_{cl}). \end{aligned}$$

Став 3.8. (а) *За свако $u \in X_m$ и све $\lambda \in \mathcal{C}l(m)$ важи $\|u\lambda\| \leqslant 2^{\frac{m}{2}} \|u\| \, \|\lambda\|$.*

(б) $\sigma(T_{cl}) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{R}^{m+1} \mid |\lambda| \leqslant \sqrt{m+1} \cdot \|T_{cl}\|\}$.

Став 3.9. *Нека је $T_0, T_1, \ldots, T_m$ $(m+1)$-торка комутирајућих неограничених оператора. Нека је $T_{cl} = \sum_{j=0}^{m} T_j e_j$.*

(а) *Следећи услови су еквивалентни:*

(1) T_{cl} је инвертибилан;

(2) $(\sum_j T_j^2) e_0$ је инвертибилан;

(3) $\sum_j T_j^2$ је инвертибилан у $\mathscr{B}(X)$

(б) $\sigma(T_{cl}) = \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid \sum_j (T_j - \lambda_j)^2$ *није инвертибилан*$\}$.

Под комутативношћу се подразумева да постоји густ $\mathfrak{D} \subseteq X$, тако да за свако $x \in \mathfrak{D}$ и свако j, k важи $T_j T_k x = T_k T_j x$; видети и одељак о комутативности у претходној глави.

Доказ. Ако је $\sum_j T_j^2$ инвертибилан у $\mathscr{B}(X)$, тада је $T_{cl}^{-1} = \left(\sum_j T_j^2\right)^{-1} \cdot \left(T_0 - \sum_{j>0} T_j e_j\right)$, па важи (3)⇒(1).

Пошто је $\left(T_0 - \sum_{j>0} T_j e_j\right) U = U T_{cl}$, где је $U(\sum_j u_S e_S) = \sum_j (-1)^{|S|} u_S e_S$, следи да је $\left(T_0 - \sum_{j>0} T_j e_j\right)$ инвертибилан, па је и $(\sum_j T_j^2) e_0 = T_{cl}(T_0 - \sum_{j>0} T_j e_j)$ инвертибилан, тј. (1)⇒(2).

(2)⇔(3) је очигледно, а део (б) следи из (1)⇔(3). □

Дефиниција моногеничности, као и теореме 2.6, 2.7 и 2.8 важе (са аналогним доказима) и за операторске функције. Специјално, функција $f \colon U \to X_{(n)}$ из класе C^1 назива се лево моногенична ако је $Df = 0$, и за такве функције важи

Теорема 3.4. *Ако је* $f \colon \mathbb{R}^{n+1} \to X_{(n)}$ *ограничена цела (лево) моногенична функција, тада је* f *константна.*

Пример 3.1. Нека је скуп $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ компактан и нека је $\mathscr{H}(K)$ скуп оператор вредносних аналитичких функција на K. За отворено U топологија на $\mathscr{H}(U)$ је одређена униформном конвергенцијом на компактима; $\mathscr{H}(K)$ је унија свих $\mathscr{H}(U)$ (за отворене $U \subset K$) са индукованом граничном топологијом. За $z \in \Omega = \mathbb{R}^{n+1} \setminus K$ нека је $f_z(x) = G_{n+1}\left(\overline{x - z}\right) = \dfrac{\overline{x - z}}{|x - z|^{n+1}}$, $x \in K$; тада, функција $F \colon \Omega \to \mathscr{H}(K)_{(n)}$ дефинисана са $F(z) = f_z$ јесте моногенична.

Пример 3.2. Нека је n непаран природан број и $\mathscr{T} = (T_0, \ldots, T_n)$ $n+1$-торка комутирајућих оператора из $\mathscr{B}(X)$. Нека је $T = \sum_{j=0}^{n} T_j e_j$ и нека је $f_z(\mathscr{T}) = \|T - z\|^{n-1}(T - z)$ (за $z \in \mathbb{R}^{n+1}$), где је $\|T - z\| = \left[\sum_{j=0}^{n} (T_j - z_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Према ставу 3.9 (б), ако је $z \in \rho_{(n)}(T)$, тада је $f_z(\mathscr{T})$ инвертибилно у $\mathscr{B}(X)_{(n)}$ (и важи $(f_z(\mathscr{T}))^{-1} = \|T - z\|^{-n-1}(\overline{T} - \overline{z})$). Оператор вредносна функција $F \colon \rho_{(n)}(T) \to \mathscr{B}(X)_{(n)}$, дефинисана са $F(z) = (f_z(\mathscr{T}))^{-1}$, јесте моногенична (ако $2 \nmid n$, тада је $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$).

Теорема 3.5. *Носач функционалног рачуна (из дефиниције 1.6) једнак је* $\sigma\left(\sum_{i=1}^{m} T_i e_i\right)$.

Доказ. Нека је n непаран природан број, $n \geqslant \max\{m, 2\}$, и $T = \sum_{i=1}^{m} T_i e_i$. Према ставу 3.9, како је $\operatorname{supp}\Phi \subseteq \mathbb{R}^m$, довољно је показати да је $\sigma(T) = \operatorname{supp}\Phi$. Ако је $f = \sum_S f_S e_S$, тада $\Phi_{(n)}(f) = \sum_S \Phi(f_S)e_S$ јесте раширење Φ до хомоморфизма

$$\Phi_{(n)} \colon \mathscr{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{(n)} \to \mathscr{B}(X)_{(n)},$$

који је непрекидан у односу на τ и слабу топологију на $\mathscr{B}(X)_{(n)}$, и за који важи $\operatorname{supp}\Phi_{(n)} = \operatorname{supp}\Phi$.

Нека $\lambda \notin \operatorname{supp}\Phi$, и нека је $\vartheta_i \in \mathscr{D}$ (за $i \in \mathbb{N}$) такво да је $\vartheta_i(\lambda) = 0$ и $\operatorname{supp}\vartheta_i \to \operatorname{supp}\Phi$ растући и равномерно на компактима. Тада је функција $|x-\lambda|^{-n-1}\overline{(x-\lambda)}$ добро дефинисана (за $x = \lambda$ сматра се да је вредност функције 0), док је функција $(x-\lambda)|x-\lambda|^{n-1}$ полином (јер је n непарно). Следи

$$\begin{aligned}
&(T-\lambda I)|T-\lambda I|^{n-1} \cdot \lim_{i\to\infty} \Phi_{(n)}\left(\vartheta_i \cdot |x-\lambda|^{-n-1}\overline{(x-\lambda)}\right)\\
&= \lim_{i\to\infty} \Phi_{(n)}\left(\vartheta_i \cdot (x-\lambda)|x-\lambda|^{n-1}\right) \Phi_{(n)}\left(\vartheta_i \cdot |x-\lambda|^{-n-1}\overline{(x-\lambda)}\right)\\
&= \lim_{i\to\infty} \Phi_{(n)}(\vartheta_i^2) = I.
\end{aligned}$$

Аналогно, $\lim_{i\to\infty} \Phi_{(n)}\left(\vartheta_i \cdot |x-\lambda|^{-n-1}\overline{(x-\lambda)}\right) \cdot (T-\lambda I)|T-\lambda I|^{n-1} = I$, па следи да је $T - \lambda I$ инвертибилан, тј. $\lambda \notin \sigma(T)$.

У супротном смеру, нека је $f \in \mathscr{D}$ такво да је $\operatorname{supp} f \cap \sigma(T) = \emptyset$. Нека је

$$F(x) = \begin{cases} (T-xI)^{-1}|T-xI|^{-n+1}\Phi_{(n)}(f), & \text{за } x \notin \sigma(T) \\ \Phi_{(n)}\left(f(t)\cdot|t-x|^{-n-1}\overline{(t-x)}\right), & \text{за } x \notin \operatorname{supp} f \end{cases}.$$

Како је $\operatorname{supp} f \cap \sigma(T) = \emptyset$, следи да је F дефинисана за сваки x. Ако $x \notin \sigma(T)$, $x \notin \operatorname{supp} f$ и ако је $\vartheta_i \in \mathscr{D}$ (за $i \in \mathbb{N}$) такав да важи $\vartheta_i \equiv 1$ на $\operatorname{supp} f$ и ϑ_i тежи ка 1 (кад $i \to \infty$) растући и униформно по компактима, тада је

$$\begin{aligned}
&(T-xI)|T-xI|^{n-1} \cdot \Phi_{(n)}\left(f(t)\cdot|t-x|^{-n-1}\overline{(t-x)}\right)\\
&= \lim_{i\to\infty} \Phi_{(n)}\left(\vartheta_i \cdot (t-x)|t-x|^{n-1}\right) \cdot \Phi_{(n)}\left(f(t)\cdot|t-x|^{-n-1}\overline{(t-x)}\right)\\
&= \lim_{i\to\infty} \Phi_{(n)}(\vartheta_i f) = \Phi_{(n)}(f),
\end{aligned}$$

што значи да је F добро дефинисано.

На основу примера 3.1 и 3.2 функција F цела моногенична. Како

$$f(t)\cdot|t-x|^{-n-1}\overline{(t-x)} \rightrightarrows 0 \text{ кад } |x| \to \infty, \text{ следи да}$$

$$\Phi_{(n)}\left(f(t)\cdot|t-x|^{-n-1}\overline{(t-x)}\right) \xrightarrow{w} 0$$

у $\mathscr{B}(X)_{(n)}$, па је слика оператора $\Phi_{(n)}$ слабо ограничена. Међутим, у локално конвексном простору сваки слабо ограничен скуп је и оганичен (теорема 1.1), па је $\Phi_{(n)}\left(f(t)\cdot|t-x|^{-n-1}\overline{(t-x)}\right)$ ограничен у норми. Према теореми 3.4, F је константна. Међутим, како константан низ оператора који слабо тежи ка 0 мора бити низ нула оператора, следи $F \equiv 0$. Дакле, $\Phi_{(n)}(f) = 0$, па је $\operatorname{supp}\Phi_{(n)} \subseteq \sigma(T)$. $\square$

3.5. Максималност слабог функционалног рачуна

У овом одељку је показано да функционални рачун чија је егзистенција доказана у овом раду садржи, у неком смислу, најширу могућу алгебру функција.

Теорема 3.6. *Оператор T има F_α функционални рачун ако и само ако важи $\|e^{itT}\| \leqslant M(1+|t|^\alpha)$ за неки $M \in \mathbb{R}$.*

Доказ. Ако постоји $M \in \mathbb{R}$ тако да је $\|e^{itT}\| \leqslant M(1+|t|^\alpha)$, онда из главе 3 следи да оператор T има F_α функционални рачун.

У супротном смеру, како је $\dfrac{d^\alpha}{dx^\alpha}e^{itx} = (it)^\alpha e^{itx}$, следи

$$\|e^{itx}\|_\alpha = \sup_{x\in\mathbb{R}} |e^{itx}| + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} e^{itx} \right| \leqslant 1 + |t|^\alpha,$$

па из егзистенције функционалног рачуна следи да важи

$$\|\Phi(e^{itx})\| \leqslant M \|e^{itx}\| \leqslant M(1+|t|^\alpha).$$

$\square$

4. Примери и закључак

У овој глави дати су завршни коментари. У првом одељку је упоређен (ултра) слаб функционални рачун са неким другим аксиоматским приступима; показано је да је ултра слаб функционални рачун општији. Прецизније, добијена је одговарајућа теорија за ширу алгебру функција (како је показано у [1], класа оператора се поклапа са класом која се посматра при приступу увођења функционалног рачуна имитирањем Коши–Гринове интегралне формуле). У другом одељку наведени су неки примери функционалних рачуна, а у трећем неки коментари и проблеми који могу бити предмет даљег истраживања.

4.1. Односи различитих дефиниција функционалног рачуна

У претходним главама дефинисани су слаб и ултра слаб функционални рачун на начин који је мотивисан радом Василескуа (видети [27]). Међутим, постоје се и другачије дефиниције функционалног рачуна; у овом одељку наведене су три такве дефиниције и разматрани су њихови односи са резултатима овог рада.

Дефиниција 4.1 (de Laubenfels, [12]). Нека је T неограничен оператор на Банаховом простору X, а $\mathscr{F}$ алгебра функција. Нека је $f_1(x) = x$ (идентичка функција), $f_0(x) \equiv 1$ а $g_\lambda(z) = (z-\lambda)^{-1}$. Пресликавање $\mathscr{F} \ni f \to f(T) \in \mathscr{B}(X)$ се назива $\mathscr{F}$ функионални рачун ако је хомоморфизам за који важи:

(1) ако $f, f \cdot f_1 \in \mathscr{F}$, тада

$$f(T)T \subseteq Tf(T) = (f \cdot f_1)(T);$$

(2) ако $f_0 \in \mathscr{F}$, тада $f_0(T) = I$;

(3) ако $g_\lambda^k \in \mathscr{F}$, тада је $T - \lambda I$ ињекиван и важи $(g_\lambda^k)(T) = (T-\lambda I)^{-k}$.

Дефиниција 4.2 (Andersson, [4]). Хипероператор на $\mathbb{R}$ (у ознаци $T \in H_{\mathscr{D}(\mathbb{R})}(X)$) је непрекидно мултипликативно пресликавање $T\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathscr{B}(X)$ за које важи

(1) $\mathfrak{D}_T = \bigcup\limits_{\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})} \operatorname{Im} T(\phi)$ је густ у X;

(2) $\mathfrak{N} = \bigcap\limits_{\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})} \operatorname{Ker} T(\phi) = \{0\}$.

У радовима [4] и [3] Andersson користи алгебру $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ свих диференцијабилних функција f на $\mathbb{R}$ које имају понашање $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}$ (кад $x \to \infty$), где је $a_k \in \mathbb{C}$. Прецизније, за свако $N \in \mathbb{N}$ важи

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^{-k} + x^{-N-1} r_{N+1}(x), \quad |x| > 1,$$

где су $r_{N+1}(x)$ и његови изводи ограничени. Детаљнији опис ове алгебре може се наћи у [3]. Осим тога, користи се и и $\mathrm{Ł}(\mathfrak{D})$, скуп свих затворивих оператора на $\mathfrak{D}$. Скуп $\mathrm{Ł}(\mathfrak{D})$ није простор.

Дефиниција 4.3 (Andersson, [4]). Нека је $c = (c, \mathfrak{D})$ линеаран оператор који слика густ потпростор $\mathfrak{D}$ Банаховог простора X у себе, који је затворив и такав да постоји линеарно мултипликативно пресликавање $\mathscr{E}(\mathbb{R}) \to Ł(\mathfrak{D})$, стандардно дефинисано на полиномима (затворење слике 0 је 0_X, затворење слике 1 је 1_X и даље по линеарности и мултипликативности), и за које важи:

ако $h_k \to h$ кад $k \to \infty$ у $\mathscr{E}(\mathbb{R})$, тада $h_k(c)x \to h(c)x$ кад $k \to \infty$ за свако $x \in \mathfrak{D}$.

Такво пресликавање c се назива слабим хипероператором.

Став 4.1. *Ултра слаб функционални рачун је $\mathscr{A}$ функционални рачун у смислу дефиниције 4.1, где је $\mathscr{A}$ алгебра из дефиниције 1.7.*

Доказ. (1) Нека је $x \in \mathrm{Dom}(T)$ и $\chi_n = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ за $n \in \mathbb{N}$, где је $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ тест функција једнака 1 у некој околини нуле. Из дефиниције слабог функционалног рачуна следи $\mathscr{D} \ni f f_1 \chi_n \to f f_1$ кад $n \to \infty$ у топологији простора $\mathscr{A}$, па $(f f_1 \chi_n)(T) \to f f_1(T)$ слабо, кад $n \to \infty$. Зато је

$$f(T)Tx = w - \lim_{n\to\infty} f(T)(f_1\chi_n)(T)x = w - \lim_{n\to\infty}(f f_1 \chi_n)(T)x = (f f_1)(T)x,$$

одакле је $f(T)T \subseteq (f f_1)(T)$. Са друге стране, за свако x за које $f(T)x \in \mathrm{Dom}(T)$ важи

$$(f f_1)(T)x = w - \lim_{n\to\infty}(f_1\chi_n)(T)f(T)x = Tf(T)x.$$

Скуп таквих вектора x је садржан у скупу E дефинисаном у ставу 3.2, па је густ у X. По непрекидности следи $Tf(T) = (f f_1)(T)$.

(2) Нека је $f_0 \in \mathscr{A}$ и низ $(\chi_n)_{n\geqslant 1}$ функција из $\mathscr{D}$ који тежи ка f_0 (кад $n \to \infty$) у топологији простора $\mathscr{A}$. Према дефиницији слабог функционалног рачуна $\mathscr{D}$, је густ у $\mathscr{A}$ у топологији простора $\mathscr{A}$. Следи $f_0(T)x = w - \lim_{n\to\infty} \chi_n(T)x = x$, према дефиницији ултра слабог функционалног рачуна.

(3) Нека је $g_\lambda^k \in \mathscr{A}$. Нека је $(\chi_n)_{n\geqslant 1}$ исцрпљујући низ функција из $\mathscr{D}$. Како је $(z-\lambda)^k g_\lambda^k(z) = 1$, према дефиницији ултра слабог функционалног рачуна и услову (3) из дефиниције 1.6 (примењеном на полином $t \to t$), важи

$$x = w - \lim_{n\to\infty}(\chi_n(f_1 - \lambda)^k g_\lambda^k)(T)x = (T - \lambda I)^k g_\lambda(T)^k x = g_\lambda^k(T)(T - \lambda I)^k x.$$

$\square$

Став 4.2. *Рестрикција слабог функционалног рачуна на $\mathscr{D}$ јесте хипероператор.*

Доказ. Из услова (3) дефиниције 1.6, примењеног на полином $f_0(x) \equiv 1$, следе услови (1) и (2) из дефиниције 4.2. □

4.2. Примери

Пример 1.1 може бити и уопштен коришћењем примера из [17] и технике из [16]. Детаљи доказа су аналогни доказима из примера 1.1, па су изостављени.

Пример 4.1. *Постоји оператор за који не важи (6), а његово асимптотско понашање задовољава* $e^{itA} \sim \rho e^{|t|^\rho}$ *кад* $|t| \to \infty$, *за свако* $\rho > \dfrac{1}{4}$.

Нека је E векторски простор свих целих функција за које постоји $C \in \mathbb{R}$ такав да је

$$|f(z)| \leqslant C e^{\sigma |z|^\rho}.$$

Тада је E Банахов простор, ако се норма функције f дефинише као најмања константа C за коју горња неједнакост важи. Пошто је

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi + z)}{\xi^2}\, d\xi,$$

оператор $T = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{d}{dz}$ је ограничен линеаран оператор на E (видети [17]). Следи

$$\left(e^{itT} f\right)(z) = \left(e^{t\frac{d}{dz}} f\right)(z) = f(z + t).$$

Такође је и $\|e^{itT}\| = O(e^{|t|^\rho})$ кад $|t| \to \infty$.

Тачно асимптотско понашање може се добити коришћењем функције

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)},$$

где је Γ гама функција. На основу примера 1.5. из рада [16] закључује се да је $f_0(x) \sim \rho e^{x^\rho}$ кад $x \to \infty$, за $\rho > \dfrac{1}{4}$, одакле следи тврђење.

Пример 4.2. Нека је оператор $T = \frac{1}{i} \cdot \frac{d}{dx}$ дефинисан на потпростору простора $L^p(\mathbb{R})$, састављеном од свих апсолутно непрекидних функција чији су изводи у $L^p(\mathbb{R})$. Овај потпростор је густ у простору $L^p(\mathbb{R})$. Такође, важи $e^{itT} f = f(x+t)$ и $\|e^{itT}\| = 1$. Следи да оператор T има F_0 функционални рачун.

Пример 4.3. Нека је $\mathscr{H}$ Хилбертов простор, а $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ неограничен самоадјунгован оператор. Нека је $Q : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ нилпотентан оператор реда n (тј. важи $Q^n = 0$ и $Q^{n-1} \neq 0$) који комутира са T. На пример, Q може бити одређен матрицом

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

у односу на коренски потпростор неке сопствене вредности оператора T. Тада је

$$\|e^{it(T+Q)}\| = \|e^{itT} e^{itQ}\| = \|e^{itQ}\| = O(|t|^{n-1}).$$

Следи да оператор $T + Q$ има F_{n-1} функционални рачун.

Пример 4.4. Оператор адвекције (за векторско поље „брзине" a) јесте

$$f(x,t) \mapsto a \cdot \nabla f(x,t)$$

($\nabla = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $t \in \mathbb{R}$) и користи се у механици флуида. Он је уопштени скаларни оператор (у једначини адвекције $f(x,t)$ је решење апстрактног Кошијевог проблема $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} = a \cdot \nabla f(x,t)$). Овај неограничени оператор комутира са лапласијаном; заправо, он комутира са $\partial/\partial x_j$ за сваки $1 \leqslant j \leqslant n$. Зато се може конструисати ултра слаб функционални рачун за ове операторе, па се могу добити линеарне (и неке нелинеарне) везе оператора адвекције и лапласијана; један од познатијих примера је

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + f(x,t) \cdot \nabla f(x,t) = a \cdot \Delta f(x,t) \quad \text{(Бургерова једначина)}.$$

4.3. Завршни коментари

У [24] McIntosh, Pryde и Ricker су доказали да се код k-торки комутирајућих ограничених уопштених скаларних оператора спектар $\sigma(T)$ поклапа са неким другачије дефинисаним заједничким спектрима k-торке $(T_1, \ldots, T_k)$, на пример, са Хартовим и Тејлоровим спектром. Чини се да интересантно питање за даље истраживање може бити да ли ово тврђење остаје тачно и за k-торке неограничених оператора. Заправо, у жељи да се одговори на ово питање дошло је до „ширења" функционалног рачуна на неквазианалитичке класе, пошто у њима постоји могућност избора функција које узимају „погодне" вредности на одговарајућим деловима спектра). Такође, чини се да интересантно питање за даље истраживање може бити одређивање везе између ултра слабог функционалног рачуна и слабог хипероператора.

Литература

[1] M. Andersson, *(Ultra)differentiable functional calculus and current extension of the resolvent mapping*, Ann. Inst. Fourier 53 (2003) 903–926.

[2] M. Andersson, B. Berndtsson, *Non-Holomorphic Functional Calculus for Commuting Operators with Real Spectrum*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. I (2002) 925–955

[3] M. Andersson, J. Sjöstrand, *Functional calculus for non-commuting operators with real spectra via an iterated Cauchy formula*, Journal of Functional Analysis 210 (2004) 341–375.

[4] M. Andersson, H. Samuelsson, S. Sandberg, *Operators with smooth functional calculi*, J. Anal. Math. 98 (2006) 221–247.

[5] M. Balabane, H. Emamirad, M. Jazar, *Spectral distribution and generalization of Stone's theorem*, Acta Appl. Math. 31 (1993) 275–295.

[6] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen, *Clifford analysis*, Research Notes in Mathematics, 76, Pitman Advanced Publishing Program, Boston/London/Melbourne, 1982.

[7] P. J. Cohen, *A Simple Proof of the Denjoy-Carleman Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 75, No. 1 (1968), 26–31.

[8] R. deLaubenfels, *Existence and Uniqueness Families for the Abstract Cauchy Problem*, J. London Math. Soc., s2-44 (1991) 310–338.

[9] R. deLaubenfels, *Unbounded holomorphic functional calculus and abstract Cauchy problems for operators with polynomially bounded resolvents*, Journal of Functional Analysis Vol. 114 No. 2 (1993) 348–394.

[10] R. deLaubenfels, *Automatic Well-Posedness with the Abstract Cauchy Problem on a Frechet Space*, J. London Math. Soc., s2-48 (1993) 526–536.

[11] R. deLaubenfels, *Existence families, functional calculi and evolution equations*, Lecture Notes in Mathematics , Vol. 1570, Springer 1994.

[12] R. deLaubenfels, *Automatic extensions of functional calculi*, Studia Mathematica 114 (1995) 237–259.

[13] R. deLaubenfels, M. Jazar, *Functional calculi, regularized semigroups and integrated semigroups*, Studia Mathematica 132(2) (1999) 151–172.

[14] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear operators, Part I*, New York, Interscience, 1951.

[15] E.M. Dynkin, *An operator calculus based on the Cauchy-Green formula* (in Russian), Investigation on linear operators and the theory of functions, III Zap. Naučn. Sem. LOMI 30 (1972) 33–39.

[16] M.A. Evgrafov, *Асимптотические оценки и целые функции*, 3-е изд., Наука, Москва, (1979)

[17] Е.А. Горин, М.И. Караханян, *Асимптотический вариант теореми Фуглида–Путнама о комутаторах для элементов Банаховых алгебр'*, *Математичские Заметки* т. 22 No. 2 (1977) 179–188.

[18] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Equation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper*, Springer lecture notes in Physics 345 (1989) 118–197.

[19] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol. I–IV, Grundlehren, Springer, Berlin, (1985).

[20] V. Ivrii, *Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, (1998).

[21] D. Kečkić, Dj. Krtinić, *A Functional Calculus for Unbounded Generalized Scalar Operators on Banach Spaces*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 249 No. 1 (2011) 135–156.

[22] Dj. Krtinić, *Non-Quasianalytic functional calculus for unbounded generalized scalar operators on Banach spaces*, preprint

[23] A. McIntosh, A. Pryde, *A functional calculus for several commuting operators*, Indiana University Mathematics Journal Vol. 36 No. 2 (1987) 421–439.

[24] A. McIntosh, A. Pryde, W. Ricker, *Comparison of joint spectra for certain classes of commuting operators*, Studia Mathematica 88 (1988) 23–36.

[25] J. Ryan, *Introductory Clifford analysis*, arXiv:math.CV/0303339, 2003.

[26] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1973.

[27] F.-H. Vasilescu, *Analytic functional calculus and spectral decompositions*, Mathematics and its Applications (East European Series), vol. 1, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland, 1982.

[28] J. Wermer, *The Existence of Invariant Subspaces*, Duke Math. Journal 19 (1952), 615-622.