Универзитет у Београду

Математички факултет

Комбинаторне теореме о конвексним скуповима

мастер рад

Аутор: Владимир Телебак
Ментор: Др Синиша Врећица

Београд
јун, 2011.

Предговор

Три знамените и сродне теореме које су одолиле зубу времена и доживјеле бројна уопштења и примјене су теореме Каратеодорија, Радона и Хелија. Покушај да се у једном раду макар и помену сви сродни проблеми у самом старту је осуђен на пропаст, тако да сам морао добро одвагати и из мора лијепих резултата одабрати оне који су по мом укусу за нијансу више него остали. Тако у овом раду раме уз раме стоје класичне теореме какве су рецимо Јунгова или Штајницова и веома нови и надасве лијепи резултати који се тичу разнобојног Твербрговог проблема.

Сам рад је подијељен на четири главе. Прва глава је уводног карактера и служи као припрема за оно што долази касније. У њој сам крајње концизно обрадио основе теорије конвексних скупова, симплицијалне комплексе, као и елементе хомолошке теорије.

Друга глава је у цјелости посвећена класичним теоремама које се баве комбинаториком конвексних скупова. Поред три главне теореме, теореме Каратеодорија, Радона и Хелија, овдје сам пажњу посветио и неким примјенама Хелијеве теореме, као и једном занимљивом уопштењу теореме Каратеодорија. Крај главе је резервисан за Твербергову теорему. Теорему можда не тако времешну као остале које су овој глави, али свакако теорему која већ заслужује придјев класична.

У трећој глави се бавим такозваним разнобојним теоремама, и то Каратеодоријевом и Хелијевом. Разнобојна Каратеодоријева теорема је послужила за један од, до сада, најљепших доказа Твербергове теореме, који је приказан у овој глави.

Коначно, посљедња, четврта глава се тиче тополошких уопштења Радонове и Твербергове теореме. Посебна пажња је посвећена разнобојном Твербрговом проблему, у чијем је рјешавању у посљедње вријеме начињен изненадан и велики помак.

На крају, иако не најмање важно, желио бих истаћи како ми је причињавало велику част и задовољство писати под менторском палицом Синише Врећице, коме се и овом приликом захваљујем за свесрдну помоћ и примједбе које су овај рад учиниле много бољим него што је могао бити.

Бања Лука, Тројчиндан, 2011. В. Т.

Садржај:

Глава 1

Ствари познате, више или мање

Ова глава ће нам послужити да наведемо основне појмове који ће нам касније користити као и да усталимо ознаке. Доказе и детаљнија појашњења појмова ћемо избјегавати, али ћемо, гдје год буде потребе, упутити читаоца на литературу са више података о датој теми.

1.1 Конвексни скупови

У овом поглављу навешћемо основне особине конвексних скупова. Такође ћемо дефинисати двије посебне класе конвексних скупова које ће нам касније користити, конвексне политопе и конвексне конусе. Доказе и детаљнија објашњења читалац може пронаћи у [Vre93], [Zie95] и [Mat02].

Дефиниција 1.1. *Скуп $C \subseteq \mathbb{R}^d$ називамо* ***конвексним*** *ако за све $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ и све $\lambda \in [0, 1]$ вриједи $(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in C$.*

Геометријски, конвексан скуп за сваке своје двије тачке садржи и дуж која их повезује.

Теорема 1.1. *Пресјек фамилије конвексних скупова је конвексан скуп.*

Дефиниција 1.2. *Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Најмањи, по инклузији, конвексан надскуп од S зовемо* ***конвексним омотачем*** *од S и означавамо са $\operatorname{conv}(S)$.*

Дефиниција 1.3. *Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ненегативни реални бројеви такви да је $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. Израз $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n$ називамо* ***конвексном комбинацијом*** *тачака $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.*

Теорема 1.2. *Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Тада је*

$$\mathrm{conv}(S) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \mathbf{x}_i \in S\}.$$

Дефиниција 1.4. *Нека су $A, B \subset \mathbb{R}^d$. Кажемо да хиперраван h* ***раздваја*** *скупове A и B ако су они садржани у различитим затвореним полупросторима одређеним са h. Ако су при томе садржани у различитим отвореним полупросторима, рећи ћемо да h* ***строго раздваја*** *A и B.*

Теорема 1.3. *Нека су C_1 и C_2 конвексни подскупови од $\mathbb{R}^d$. Ако је $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ тада постоји хиперраван h која раздваја скупове C_1 и C_2. Ако су при томе скупови C_1 и C_2 ограничени и бар један од њих је компактан, хиперраван h можемо одабрати тако да их строго раздваја.*

Примједба 1.4. *Из предходне теореме се види да се тачка може строго раздвојити од ограниченог конвексног скупа, ако му не припада.*

Дефиниција 1.5. *Хиперраван h је* ***хиперраван ослонца*** *скупа $S \subset \mathbb{R}^d$ у тачки $\mathbf{x} \in S$ ако је $\mathbf{x} \in h$, а скуп S је садржан у једном од затворених полупростора одређених са h.*

Теорема 1.5. *Затворен и конвексан скуп $C \subset \mathbb{R}^d$ има хиперраван ослонца у свакој својој граничној тачки.*

Дефиниција 1.6. ***Политоп*** *је конвексан омотач коначног скупа тачака у $\mathbb{R}^d$.*
Димензија политопа P, $\dim(P)$, је димензија његовог афиног омотача.

Дефиниција 1.7. ***Полиедар*** *је пресјек коначно много полупростора у $\mathbb{R}^d$.*

Може се показати да је сваки политоп један ограничен полиедар и обрнуто (погледати [Zie95]), те ћемо се надаље понашати у складу са том чињеницом.

Дефиниција 1.8. *Неједнакост $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leqslant \alpha$, која је испуњена за сваку тачку $\mathbf{x}$ политопа P називамо* ***валидном неједнакости*** *за политоп P.*

Дефиниција 1.9. *Ако је $P \subset \mathbb{R}^d$ политоп, $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leqslant \alpha$ неједнакост валидна за P, $h = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = \alpha\}$, скуп $h \cap P$ називамо* ***страном политопа*** *P.*

Стране димензије 0 називамо **тјеменима,** а стране димензије $d-1$, ако је $\dim(P) = d$, **максималним странама.** Неједнакости $\mathbf{0}^T\mathbf{x} \leqslant 0$ и $\mathbf{0}^T\mathbf{x} \leqslant 1$ су очигледно валидне за сваки политоп $P \in \mathbb{R}^d$, а на основу прве је политоп сам себи страна, док је на основу друге празан скуп, $\emptyset$, страна сваког политопа. Ове стране обично зовемо тривијалним а остале правим странама политопа P.

Дефиниција 1.10. *Нека је P политоп димензије d.* ***Релативна унутрашњост*** *политопа P је скуп*

$$\mathrm{relint}(P) = P \setminus \bigcup_{\substack{F \text{ је страна од } P \\ \dim(F) \leqslant d-1}} F.$$

Релативна граница *политопа P је скуп*

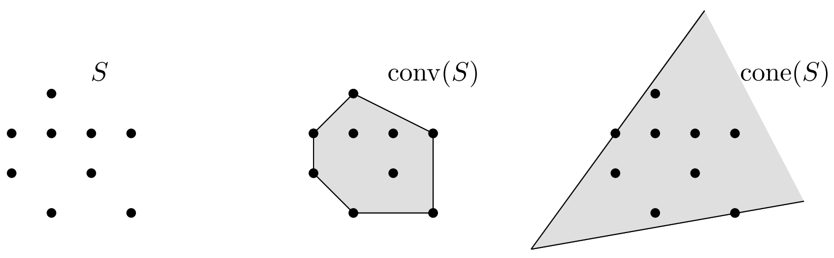
$$\mathrm{relbd}(P) = P \setminus \mathrm{relint}(P).$$

Сада ћемо се упознати са још једном посебном класом конвексних скупова, конвексним конусима.

Дефиниција 1.11. *Непразан скуп $C \in \mathbb{R}^d$ који за сваки свој коначан подскуп садржи и све његове ненегативне линеарне комбинације називамо* ***конусом****.*

Примједба 1.6. *Према предходној дефиницији сваки конус је конвексан и садржи* $\mathbf{0}$.

Дефиниција 1.12. *Нека је $S \subset \mathbb{R}^d$. Најмањи, по инклузији, конус који садржи S називамо* ***конусним омотачем*** *скупа S и обиљежавамо са* $\mathrm{cone}(S)$.



Илустрација 1.1: Скуп, конвексни омотач и конусни омотач

Слично као у случају конвексних омотача имамо да вриједи сљедећа теорема.

Теорема 1.7. *Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Тада је*

$$\mathrm{cone}(S) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \geqslant 0, \mathbf{x}_i \in S\}.$$

1.2 Симплицијални комплекси

Један од најважнијих мостова између топологије и комбинаторике представљају симплицијални комплекси, којима ћемо посветити ово поглавље. Детаљнији третман симплицијалних комплекса читалац може наћи у [Mun84].

Дефиниција 1.13. *Нека је $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{d+1}\} \subset \mathbb{R}^d$ афино независан скуп. Конвексан омотач скупа V, $\sigma^d = \mathrm{conv}(V)$, називамо $d-$**димензионалним симплексом.** Елементе скупа V називамо **тјеменима** симплекса. Конвексан омотач произвољног подкупа од V називамо **страном** симплекса σ^d.*

Из дефиниције је јасно да су стране симплекса такође симплекси и да $d-$симплекс има 2^d страна (празан скуп је $-1-$симплекс). Тачка је $0-$симплекс, $1-$симплекси су сегменти, $2-$симплекси су троуглови, и тако даље.

Дефиниција 1.14. *За непразну коначну фамилију симплекса K кажемо да је **симплицијални комплекс** ако вриједи:*

- *Ако је $\sigma \in \mathrm{K}$ и τ је страна од σ тада је и $\tau \in \mathrm{K}$.*
- *Ако су $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{K}$ тада је $\sigma_1 \cap \sigma_2$ страна и од σ_1 и од σ_2.*

*Унију свих симплекса из симплицијалног комплекса K зовемо **полиедром** од K и обиљежавамо са $||\mathrm{K}||$.*
***Димензија** симплицијалног комплекса K је највећа од димензија припадајућих симплекса, $\dim(\mathrm{K}) = \max\{\dim(\sigma) : \sigma \in \mathrm{K}\}$.*
***Скуп тјемена,** у ознаци $V(\mathrm{K})$, је унија скупова тјемена симплекса из K.*

Симплицијални комплекси димензије 0 су конфигурације тачака, $1-$димензионални симплицијални комплекси су графови, геометријски представљени са правим гранама које немају међусобних пресјека, осим у чворовима.

За сваку тачку $\mathbf{x} \in ||\mathrm{K}||$ постоји јединствен симплекс $\sigma \in \mathrm{K}$ такав да је $\mathbf{x} \in \mathrm{relint}(\sigma)$. Тај симплекс зовемо **носачем** од $\mathbf{x}$ и означавамо са $\mathrm{supp}(x)$.

Дефиниција 1.15. *Ако је* K *симплицијални комплекс и* $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{K}$ *такође симплицијални комплекс, за* L *кажемо да је* ***поткомплекс*** *од* K.

Примјер 1.1. *Скуп страна симплекса* σ^d *је симплицијални комплекс. Ознаку* σ^d *ћемо користити и за симплекс и за симплицијални комплекс.*

Примјер 1.2. *Скуп свих страна димнензије не веће од* k *симплицијалног комплекса* K *је поткомплекс од* K. *Овај симплицијални комплекс зовемо* $k-$*скелетон од* K *и означавамо са* $(\mathrm{K})^{\leqslant k}$.

Примјер 1.3. *Специјално, скуп свих правих страна симплекса* σ^d *је симплицијални комплекс* $(\sigma^d)^{\leqslant d-1}$.

Дефиниција 1.16. *Нека је* X *тополошки простор. Симплицијални комплекс* K *такав да је* $||\mathrm{K}||$ *хомеоморфно са* X, *ако постоји, називамо* ***триангулацијом*** *од* X, *а простор* X *триангулабилним.*

У складу са предходном дефиницијом под појмом симплицијални комплекс ћемо подразумијевати и све тополошке просторе који су триангулабилни.

Примјер 1.4. *Нека је* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d)$ *стандардна база простора* $\mathbb{R}^d$. *Хипероктаедар,* $\diamond^d$, *је политоп дефинисан са*

$$\diamond^d = \mathrm{conv}\{\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2, \ldots, \pm\mathbf{e}_d\}.$$

Лако се види да су његове праве стране облика $\mathrm{conv}F$, *при чему је* F *подскуп од* $\{\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2, \ldots, \pm\mathbf{e}_d\}$ *који не садржи истовремено* $+\mathbf{e}_i$ *и* $-\mathbf{e}_i$ *ни за једно* $i \in [d]$. *Скуп свих правих страна овог политопа је симплицијални комплекс који представља једну триангулацију сфере* S^{d-1}.

Дефиниција 1.17 (Комбинаторни симплицијални комплекс)**.** *Нека је* V *коначан скуп и* $\mathrm{K} \subseteq 2^V$ *фамилија подскупова од* V. *Пар* (V, K) *називамо* ***комбинаторним симплицијалним комплексом*** *ако вриједи*

$$F \in \mathrm{K}, G \subseteq F \Rightarrow G \in \mathrm{K}.$$

Елементе од K *називамо* ***(комбинаторним) симплексима.***
Димензију *од* K *дефинишемо са* $\dim(\mathrm{K}) = \max\{|F| - 1 : F \in \mathrm{K}\}$

Када је скуп тјемена V познат говорићемо једноставно о комбиаторном симплицијалном комплексу K.

Нека је K неки геометријски симплицијални комплекс чији је скуп тјемена V. Њему одговара комбинаторни симплицијални комплекс на скупу V чији су симплекси скупови $F \in 2^V$ такви да је $\mathrm{conv}(F) \in \mathrm{K}$. С друге стране, ако је (V, K) комбинаторни симплицијални комплекс, такав да је $|V| = n + 1$, можемо му придружити поткомплекс од σ^n.

На основу предходних разматрања јасно је да можемо одбацити придјеве геометријски и комбинаторни и причати о симплицијалном комплексу.

Примјер 1.5 ([BLVŽ94]). ***Топовски комплекс*** $\Delta_{m,n}$ *је симплицијални комплекс чија су тјемена поља* $(m \times n)-$*шаховске табле, а симплекси су му сви распореди међусобно независних топова.*
Топовски комплекс се у литератури јавља и као комплекс парцијалних инјективних функција из $[m]$ *у* $[n]$*, али и као комплекс парцијалних мечинга комплетног бипартитног графа* $K_{m,n}$.

Дефиниција 1.18. *Нека су* K *и* L *симплицијални комплекси. Пресликавање* $f : V(\mathrm{K}) \to V(\mathrm{L})$ *које слика симплексе у симплексе називамо* ***симплицијалним****. Ако је* f *бијекција, кажемо да су симплицијални комплеси* ***изоморфни.***

Чињеница да свака тачка из $||\mathrm{K}||$ има јединствен носач нам омогућава да симплицијално пресликавање $f : V(\mathrm{K}) \to V(\mathrm{L})$ проширимо до пресликавања $||f|| : ||V(\mathrm{K})|| \to ||V(\mathrm{L})||$, дефинисаног са

$$||f||(\mathbf{x}) = ||f||(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(\mathbf{v}_i),$$

ако је $\mathrm{conv}\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \mathrm{supp}(\mathbf{x})$.

Ово проширење ћемо звати **афиним** или **канонским проширењем** симплицијалног пресликавања f и када то не буде доводило до забуне, користићемо исту ознаку и за симплицијално пресликавање и за његово канонско проширење.

1.3 Џојнови

Важна конструкција у примјенама топологије у дискретној геометрији је џојн тополошких простора. Посебно битан случај за нас је џојн сиплицијалних комплекса, тако да ћемо са њим и кренути. У излагању ћемо, уз неке измјене, пратити [Mat08], гдје се могу наћи недостајући докази.

Прије него ли дефинишемо џојн симплицијалних комплекса уведимо ознаку која ће нам касније уштедјети много простора:

$$A \uplus B = A \times \{1\} \cup B \times \{2\}.$$

Слично за n скупова $A_1, A_2, \ldots, A_n$ дефинишимо

$$A_1 \uplus A_2 \uplus \ldots \uplus A_n = A_1 \times \{1\} \cup A_2 \times \{2\} \cup \ldots \cup A_n \times \{n\}.$$

Дефиниција 1.19. *Нека су* K *и* L *симплицијални комплекси.* ***Џојн симплицијалних комплекса*** *је симплицијални комплекс* $\mathrm{K} * \mathrm{L}$ *на скупу* $V(\mathrm{K}) \uplus V(\mathrm{L})$ *чији су симплекси сви скупови облика* $F \uplus G$ *за* $F \in \mathrm{K}$ *и* $G \in \mathrm{L}$.

Индуктивно можемо дефинисати џојн $n \geqslant 2$ симплицијалних комплекса. Џојн је асоцијативна операција, у смислу да су симплицијални комплекси $(\mathrm{K} * \mathrm{L}) * \mathrm{M}$ и $\mathrm{K} * (\mathrm{L} * \mathrm{M})$ изоморфни, те стога можемо писати кратко $\mathrm{K} * \mathrm{L} * \mathrm{M}$. Такође, за $n-$џојн симплицијалног комплекса K са самим собом $\mathrm{K} * \mathrm{K} * \ldots * \mathrm{K}$ пишемо K^{*n}.
Може се показати да за симплицијалне комплексе $\mathrm{K}_1,\ \mathrm{K}_2,\ \mathrm{L}_1$ и L_2 вриједи

$$||\mathrm{K}_1|| \cong ||\mathrm{K}_2|| \text{ и } ||\mathrm{L}_1|| \cong ||\mathrm{L}_2|| \Rightarrow ||\mathrm{K}_1 * \mathrm{L}_1|| \cong ||\mathrm{K}_2 * \mathrm{L}_2||.$$

Дакле, иако смо џојн дефинисали као комбинаторни објекат, ипак он има тополошко значење. Иначе се џојн може дефинисати и за произвољне тополошке просторе, а лијепа ствар је што се та дефиниција за триангулабилне просторе поклапа са предходном.

Дефиниција 1.20. *Нека су* X *и* Y *тополошки простори.* ***Џојн*** $X * Y$ *је фактор простор* $X \times Y \times [0,1]/_{\approx}$, *гдје је релација еквиваленције* $\approx$ *дата са* $(x, y, 0) \approx (x', y, 0)$ *и* $(x, y, 1) \approx (x, y', 1)$ *за све* $x, x' \in X$ *и* $y, y' \in Y$.

Као што смо већ нагласили симплицијални и тополошки џојн се поклапају за триангулабилне просторе, наиме вриједи $||\mathrm{K} * \mathrm{L}|| \cong ||\mathrm{K}|| * ||\mathrm{L}||$, а сљедећа лема нам може помоћи у доказу те чињенице, иако се ту не завршава њена корист.

Лема 1.8. *Нека су X и Y ограничени тополошки потпростори од $\mathbb{R}^n$ такви да је $X \subset h_1$ и $Y \subset h_2$, гдје су h_1 и h_2 мимоилазне афине многострукости, $h_1 \cap h_2 = \emptyset$ и $\dim(h_1 \cup h_2) = \dim(h_1) + \dim(h_2) + 1$. Тада је*

$$X * Y \cong \{t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} : t \in [0,1], \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\}.$$

За тачку $(x, y, t) \in X * Y$ користићемо ознаку $t\mathbf{x} \oplus (1-t)\mathbf{y}$, што би представљало формалну конвексну комбинацију. Ипак оваква операција није комутативна те треба бити опрезан. Аналогно, за тачку из џојна $\mathrm{K}_1 * \mathrm{K}_2 * \ldots * \mathrm{K}_n$ ћемо користити запис $t_1\mathbf{x}_1 \oplus t_2\mathbf{x}_2 \oplus \ldots \oplus t_n\mathbf{x}_n$, гдје су $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ненегативни скалари чија је сума једнака 1.

Примјер 1.6. *За симплексе σ^k и σ^l вриједи $\sigma^k * \sigma^l \cong \sigma^{k+l+1}$.*

Примјер 1.7. *Нека је $\mathrm{D}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Вриједи $||\mathrm{D}_2|| \cong S^0$. Када је у питању D_2^{*n} скуп тјемена можемо идентификовати са $[2] \times [n]$ при чему ће симплекси бити сви подскупови који не садрже истовремено $(1, i)$ и $(2, i)$ за неко $i \in [n]$, што је ништа него граница хипероктаедра $\diamond^n$ која је хомеоморфна сфери S^{n-1}. Дакле,*

$$\mathrm{D}_2^{*n} \cong (S^0)^{*n} \cong S^{n-1}.$$

Такође можемо закључити да је

$$S^k * S^l \cong S^{k+l+1}.$$

Дефиниција 1.21. *Нека су дата пресликавања на тополошким просторима $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$.* ***Џојн пресликавања*** *f_1 и f_2*

$$f_1 * f_2 : X_1 * X_2 \to Y_1 * Y_2$$

дефинишемо са

$$f_1 * f_2 : t\mathbf{x}_1 \oplus (1-t)\mathbf{x}_2 \mapsto tf(\mathbf{x}_1) \oplus (1-t)f(\mathbf{x}_2).$$

Дефиниција 1.22. *Нека је X тополошки простор. Скуп*

$$X^{*n}_{\Delta(k)} = X^{*n} \setminus \{\bigoplus_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\mathbf{x}_i : \exists \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [n] \text{ такав да } \mathbf{x}_{i_1} = \ldots = \mathbf{x}_{i_k}\}$$

*називамо $k-$**умањеним** $n-$**џојном.** Ако је $k = n$ пишемо X^{*n}_{Δ} умјесто $X^{*n}_{\Delta(n)}$.*

Дефиниција 1.23. *За симплицијални комплекс* K *дефинишемо* $k-$***умањени*** $n-$***цојн*** *са*

$$\mathrm{K}^{*n}_{\Delta(k)} = \mathrm{K}^{*n} \setminus \{F_1 \uplus \ldots \uplus F_n : \exists \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [n] \text{ такав да } \bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j} \neq \emptyset\}.$$

Ако је $k = n$ *пишемо* K^{*n}_{Δ} *умјесто* $\mathrm{K}^{*n}_{\Delta(n)}$.

Умањени цојнови ће нам бити важни у глави 4 када нам буде потребно да дејство групе буде слободно.

Лема 1.9. *Ако су* K *и* L *симплицијални комплекси, тада вриједи*

$$(\mathrm{K} * \mathrm{L})^{*n}_{\Delta(2)} \cong (\mathrm{K})^{*n}_{\Delta(2)} * (\mathrm{L})^{*n}_{\Delta(2)}.$$

Лема 1.10. *За* $d \geqslant 0$ *и* $n \geqslant 2$ *вриједи*

$$(\sigma^d)^{*n}_{\Delta(2)} \cong [n]^{*(d+1)}$$

Примјер 1.8. *За топовске комплексе вриједи* $\Delta_{m,n} \cong ([n])^{*m}_{\Delta(2)}$.

1.4 Елементи алгебарске топологије

У овом поглављу ћемо навести неке основне појмове из алгебарске топологије, а циљ нам је да дефинишемо степен пресликавања, што ће нам користити у глави 4 приликом проучавања такозваног разнобојног Твербертовог проблема. Ова екскурзија у поље алгебарске топологије биће крајње концизна и углавном ћемо пратити прву главу из [Mat06].

Дефиниција 1.24. *Нека су* X *и* Y *тополошки простори и* $f, g : X \to Y$ *непрекидна пресликавања. Кажемо да су* f *и* g ***хомотопна,*** $f \sim g$, *ако постоји непрекидно пресликавање* $F : X \times [0,1] \to Y$ *такво да је*

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x), & x \in X, t = 0 \\ g(x), & x \in X, t = 1 \end{cases}$$

Пресликавање хомотопно константном зовемо ***нулхомотопним.***

Дефиниција 1.25. *За тополошке просторе* X *и* Y *кажемо да су* ***хомотопски еквивалентни*** *ако постоје непрекидна пресликавања* $f : X \to Y$ *и* $g : X \to Y$ *таква да је* $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ *и* $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$.

Дефиниција 1.26. *Нека је $k \geqslant -1$. Тополошки простор X је $k-$**повезан** ако за свако $l = -1, 0, 1, \ldots, k$, непрекидно пресликавање $f : S^l \to X$ можемо проширити до непрекидног пресликавања $\tilde{f} : B^{l+1} \to X$. За $l = -1$ ово значи да је простор X непразан.*

Простор X који је $0-$повезан ћемо звати повезаним.

Теорема 1.11 ([Mat08]). *Сфера S^n је $(n-1)-$повезана и није $n-$повезана.*

Теорема 1.12 (Бјорнер, Ловас, Врећица, Живаљевић, [BLVŽ94]). *Топовски комплекс $\Delta_{m,n}$ је $(\nu - 1)-$повезан, за*

$$\nu = \min\{m, n, \lfloor (m + n + 1)/3 \rfloor\}.$$

Дефиниција 1.27. *Нека је $\sigma^d = \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ $d-$симплекс. За два поретка скупа тјемена кажемо да су еквивалентна ако се разликују за парну пермутацију. Ако је $d > 0$ пореци тјемена су разбијени у двије класе еквиваленције. Класу еквиваленције зовемо **оријентацијом** симплекса σ^d. За $d = 0$ постоји једна класа и самим тим једна оријентација. **Оријентисани симплекс** је симплекс заједно са одабраном оријентацијом.*

Предходна дефиниција оријентације је комбинаторне природе. У литератури се оријентација дефинише и на сљедећи начин. Наиме, посматрамо оријентисане базе од $\mathbb{R}^d$. За двије такве кажемо да су еквивалентне ако матрица преласка са једне на другу има позитивну детерминанту. Оваква релација еквиваленције дијели оријентисане базе простора $\mathbb{R}^d$ на двије класе еквиваленције. Класу еквиваленције називамо оријентацијом простора $\mathbb{R}^d$. Када знамо оријентисати линеарни простор, знамо и афин, а оријентација симплекса би била оријентација његовог афиног омотача. Ове двије дефиниције оријентација се поклапају, па надаље нећемо правити разлику.

Дефиниција 1.28. ***Индукована оријентација** $(d-1)-$диензионалне стране оријентисаног симплекса σ^d је потпоредак оријентације симплекса σ^d.*

Дефиниција 1.29. ***Оријентација** симплицијалног комплекса* K *је скуп оријентација сваког од симплекса из* K.

Дефиниција 1.30. *Низ C Абелових група и њихових хомоморфизама*

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

*бесконачан у оба смјера зовемо **ланчастим комплексом** ако за свако $n \in \mathbb{Z}$ вриједи $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.*

Услов $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ је еквивалентан услову $Im(\partial_{n+1}) \subseteq Ker(\partial_n)$.

Дефиниција 1.31. *Групу C_n зовемо $n-$**димензионалном ланчастом групом** комплекса C. Језгро, $Ker(\partial_n)$, хомоморфизма ∂_n зовемо **групом $n-$димензионалних циклова** и слику, $Im(\partial_{n+1})$, хомоморфизма ∂_{n+1} **групом $n-$димензионалних граница.** Увешћемо ознаке $A_n = Ker(\partial_n)$ и $B_n = Im(\partial_{n+1})$.*

Дефиниција 1.32. *Фактор групу $H_n(C) = A_n/B_n$ зовемо $n-$**том хомолошком групом** ланчастог комплекса C.*

Дефиниција 1.33. *Нека су C и C' два ланчаста комплекса. **Ланчасто пресликавање** је фамилија хомоморфизама*

$$\phi = \{\phi_n : C_n \to C'_n, n \in \mathbb{Z}\}$$

за коју вриједи $\phi_n \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \phi_{n+1}$ за свако n.

Услов $\phi_n \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \phi_{n+1}$ значи да су сви квадрати у доњем дијаграму комутативни.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{n-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Ланчаста пресликавања индукују хомоморфизме одговарајућих хомолошких група.

Теорема 1.13. *Нека је $\phi : C \to C'$ ланчасто пресликавање. Тада пресликавање $x \mapsto \phi_n(x)$ индукује хомоморфизам $\phi_* : H_n(C) \to H_n(C')$.*

Наш сљедећи циљ је да оријентисаном симплицијалном комплексу K придружимо ланчасти комплекс $C(\mathrm{K})$. Почнимо са групама. Елементи групе $C_n(\mathrm{K})$ су формалне суме $m_1\sigma_1^n + m_2\sigma_2^n + \ldots + m_k\sigma_k^n$ гдје су $\sigma_i^n, i = 1, \ldots, k$ сви $n-$симплекси из K, m_i су цијели бројеви, а сабирање елемената из $C_n(\mathrm{K})$ је компонентно.

Хомоморфизам $\partial_n : C_n(\mathrm{K}) \to C_{n-1}(\mathrm{K})$ је довољно да дефинишемо за генераторе, али прво примијетимо да сваки $\sigma^{n-1} \in C_{n-1}$ који је страна од генератора σ^n има двије оријентације, сопствену и индуковану:

$$\partial_n(\sigma^n) = \sum_{\sigma^{n-1} \in C_{n-1}(\mathrm{K})} \varepsilon(\sigma^{n-1})\sigma^{n-1}$$

при чему је

$$\varepsilon(\sigma^{n-1}) = \begin{cases} 0, \text{ ако } \sigma^{n-1} \text{ није страна од } \sigma^n, \\ 1, \text{ ако } \sigma^{n-1} \text{ јесте страна од } \sigma^n \text{ и оријентације се поклапају}, \\ -1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Теорема 1.14. *Ако је* K *оријентисани симплицијални комплекс, низ* $C(\mathrm{K})$ *јесте ланчасти комплекс.*

Дефиниција 1.34. *Нека је* K *оријентисани симплицијални комплекс.* ***Хомолошке групе*** *комплекса* K, $H_n(K)$, *су хомолошке групе одговарајућег ланчастог комплекса* $C(\mathrm{K})$.

Као што се и очекује, хомолошке групе неће зависити од избора оријентације симплицијалног комплекса. Такође, ако је X произвољан триангулабилан простор и ако је K симплицијални комплекс за који вриједи $X \cong ||\mathrm{K}||$ дефинишемо $H_n(X) = H_n(\mathrm{K})$. Испостави се да дефиниција не зависи од избора триангулације.

Нека је $g : \mathrm{K} \to \mathrm{L}$ симплицијално пресликавање. Оно индукује ланчасто пресликавање $\phi : C(\mathrm{K}) \to C(\mathrm{L})$ на сљедећи начин:

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} 0, \text{ ако } \dim \sigma > \dim f(\sigma), \\ \pm g(\sigma), \text{ иначе,} \end{cases}$$

при чему ћемо знак $+$ узети ако g чува оријентацију, а $-$ ако је мијења.

Како смо се већ увјерили да ланчасто пресликавање индукује хомоморфизме ланчастих група, то нам омогућава да дефинишемо

$$g_* : H_n(\mathrm{K}) \to H_n(\mathrm{L}),$$

индуковани хомоморфизам хомолошких група, за симплицијално пресликавање $g : \mathrm{K} \to \mathrm{L}$.

Пошто се може показати и да за свако непрекидно пресликавање између триангулабилних простора, $f : ||\mathrm{K}|| \to ||\mathrm{L}||$, постоји симплицијално пресликавање $g : \mathrm{K} \to \mathrm{L}$, такво да је $||g|| \sim f$ онда можемо дефинисати индуковани хомоморфизам и за непрекидно пресликавање f,

$$f_* : H_n(\mathrm{K}) \to H_n(\mathrm{L}),$$

са $f_* = g_*$.

Дефиниција 1.35. *Тополошки простор M је $n-$**димензионална многострукост** ако свака тачка $\mathbf{x} \in M$ има околину U хомеоморфну са отвореним и повезаним скупом $V \subseteq \mathbb{R}^n$.*

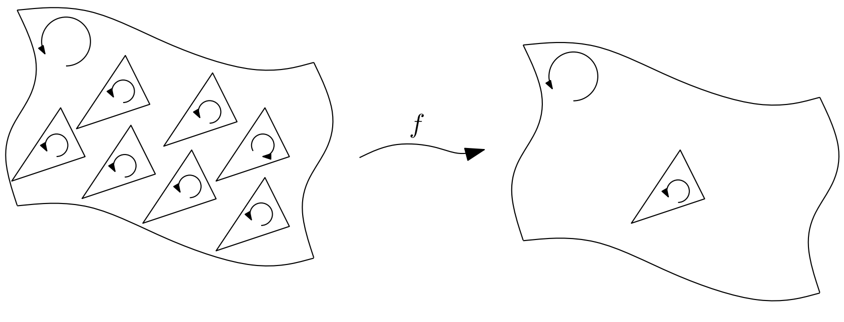
Нас ће искључиво интересовати триангулабилне многострукости.

Дефиниција 1.36. *Триангулабилна $n-$димензионална многострукост је **оријентабилна** ако $n-$симплексе можемо оријентисати тако да индуковане оријентације $(n-1)-$симплекса садржаног у два сусједна $n-$симплекса буду супротне.*

Теорема 1.15. *Нека је M повезана, затворена, триангулабилна $n-$димензионална многострукост. Тада је $H_n(M) = \mathbb{Z}$, ако је M оријентабилна многострукост и $H_n(M) = 0$, ако није.*

Заједно са познатом чињеницом да је сваки хомоморфизам $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ у ствари множење неким скаларом, предходна теорема нам омогућава сљедећу дефиницију.

Дефиниција 1.37. *Нека су M и N повезане, затворене, триангулабилне и оријентабилне $n-$димензионалне многострукости и нека је $f : M \to N$ непрекидно пресликавање. Цио број $f_*(1)$, гдје је f_* индуковани хомоморфизам хомолошких група, називамо **степеном пресликавања** f, и обиљежавамо са $\deg(f)$.*



Илустрација 1.2: $\deg(f) = 3$

Степен пресликавања има јасну геометријску интерпретацију. Нека је $f : M \to N$ симплицијално пресликавање и σ^n симплекс из N. Нека су $\sigma_1^n, \sigma_2^n, \ldots, \sigma_k^n$ сви $n-$симплекси из M који се сликају у σ^n. Нека оријентације свих ових симплекса одговарају оријентацијама многострукости. Додијелимо симплексу σ_i^n број 1 ако рестрикција од f на σ_i^n

чува оријентацију, а -1 ако је мијења. Сума ових бројева је управо степен пресликавања f. Ако f није симплицијално, него само непрекидно, требамо га прво апроксимирати, њему хомотопним, симплицијалним пресликавањем.

За крај ћемо дефинисати још једну класу простора на којој се може дефинисати степен пресликавања, а то су такозване псеудомногострукости.

Дефиниција 1.38. ***Затворена*** $n-$***димензионална псеудомногострукост*** *је* $n-$*димензионални симплицијални комплекс за који вриједи:*

- *Сваки* $(n-1)-$*симплекс је садржан у тачно два* $n-$*симплекса.*
- *За свака два* $n-$*симплекса* σ_0^n *и* σ_k^n *постоји низ* $\sigma_1^n, \sigma_2^n, \ldots, \sigma_{k-1}^n$ $n-$*симплекса такав да је за свако* $i \in [k]$ *пресјек* σ_{i-1}^n *и* σ_i^n *заједничка страна.*
- *Сваки симплекс је садржан у неком* $n-$*димензионалном.*

Глава 2

Класични резултати о конвексним скуповима

У овој глави разматрамо класичне теореме о комбинаторици конвексних скупова, Радонову лему, Каратеодоријеву и Хелијеву теорему, као и нека њихова уопштења и примјене. Бројна уопштења и примјене резултата којима ћемо се бавити у овој глави, неке хипотезе повезане са истима, као и мноштво даљих референци могу се пронаћи у [DGK63], [Kal95], [Kal01] и [Wen04].

2.1 Радонова лема и Каратеодоријева теорема

У претходној глави смо видјели да за скуп C у $\mathbb{R}^d$ вриједи

$$\mathrm{conv}(C) = \{\alpha_1\mathbf{c}_1+\alpha_2\mathbf{c}_2+\ldots+\alpha_m\mathbf{c}_m : \mathbf{c}_i \in C, \alpha_i \geqslant 0, \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m = 1\}.$$

Сљедеће тврђење, познато као Каратеодоријева теорема, нам каже да нема потребе посматрати све конвексне комбинације елемената из C, него само оне које користе највише $d+1$ елеменат скупа C.

Теорема 2.1 (Каратеодори, [Car07])**.** *Нека је* $C \subseteq \mathbb{R}^d$ *и нека је* $\mathbf{c} \in \mathrm{conv}(C)$. *Тада постоји подскуп* $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \ldots, \mathbf{c}_m\} \subseteq C$, $m \leqslant d+1$, *такав да је* $c \in \mathrm{conv}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \ldots, \mathbf{c}_m\}$.

Доказ. Нека је $\mathbf{c} \in \mathrm{conv}(C)$. Тада постоје тачке $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \ldots, \mathbf{c}_m \in C$ и скалари $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geqslant 0$ такви да вриједи

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$$

и

$$\alpha_1\mathbf{c}_1 + \alpha_2\mathbf{c}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{c}_m = \mathbf{c}.$$

Претпоставимо да је $m > d+1$. Скуп $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m\}$ је тада афино зависан, па постоје скалари $\beta_1, \ldots, \beta_m$ такви да вриједи

$$\mathbf{0} = \beta_1\mathbf{c}_1 + \beta_2\mathbf{c}_2 + \ldots + \beta_m\mathbf{c}_m,$$

при чему је бар један β_i различит од 0 и вриједи

$$\beta_1 + \ldots + \beta_m = 0.$$

Нека је $P = \{i \in [m] : \beta_i > 0\}$. Јасно да је скуп P непразан. Нека је даље $\delta = \min\{\frac{\alpha_i}{\beta_i} : i \in P\}$. Без смањења општости можемо претпоставити да је $\delta = \frac{\alpha_m}{\beta_m}$. Тада вриједи

$$\mathbf{c} = (\alpha_1 - \delta\beta_1)\mathbf{c}_1 + \ldots + (\alpha_m - \delta\beta_m)\mathbf{c}_m,$$

а како је у ствари $\alpha_m - \delta\beta_m = 0$ имамо

$$\mathbf{c} = (\alpha_1 - \delta\beta_1)\mathbf{c}_1 + \ldots + (\alpha_{m-1} - \delta\beta_{m-1})\mathbf{c}_{m-1},$$

при чему су сви коефицијенти $\alpha_i - \delta\beta_i$ ненегативни и вриједи

$$(\alpha_1 - \delta\beta_1) + \ldots + (\alpha_{m-1} - \delta\beta_{m-1}) = 1.$$

Добили смо, дакле, $\mathbf{c}$ као конвексну комбинацију $m-1$ тачке из скупа C. Овакву редукцију вршимо све док не добијемо афино независан подскуп C' скупа $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \ldots, \mathbf{c}_m\}$ такав да је $\mathbf{c} \in \operatorname{conv}(C')$. Како такав C' не може бројати више од $d+1$ тачке, теорема је доказана. $\square$

Каратеодоријеву теорему можемо формулисати и за конусне омотаче:

Теорема 2.2. *Нека је $C \subseteq \mathbb{R}^d$ и нека је $\mathbf{c} \in \operatorname{cone}(C)$. Тада постоји подскуп $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \ldots, \mathbf{c}_m\} \subseteq C$, $m \leqslant d$, такав да је $\mathbf{c} \in \operatorname{cone}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \ldots, \mathbf{c}_m\}$.*

Доказ. Доказаћемо да су теореме 2.1 и 2.2 еквивалентне.

Нека је $C \subseteq \mathbb{R}^d$ и нека је $\mathbf{c} \in \operatorname{cone}(C)$. Можемо претпоставити да је $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, јер је у противном тврђење тривијално. То значи да постоји $\alpha > 0$ такво да је $\alpha\mathbf{c} \in \operatorname{conv}(C)$. Према теореми 2.1 постоји скуп $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{d+1}\} \subseteq C$ такав да је $\alpha\mathbf{c} \in \operatorname{conv}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{d+1}\}$. Пошто је

$$\operatorname{conv}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{d+1}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{d+1} \operatorname{conv}\left(\{\mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{c}_i\}\right),$$

то постоји $i \in \{1, 2, \dots, d+1\}$ такво да је

$$\alpha\mathbf{c} \in \operatorname{conv}\left(\{\mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{c}_i\}\right),$$

одакле слиједи да је

$$\alpha\mathbf{c} \in \operatorname{cone}\left(\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{c}_i\}\right),$$

па је и

$$\mathbf{c} \in \operatorname{cone}\left(\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{c}_i\}\right).$$

Нека је сада $C \subseteq \mathbb{R}^d$ и нека је $\mathbf{c} \in \operatorname{conv}(C)$. Тада је

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} : \mathbf{x} \in C\right\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}.$$

Према теореми 2.2 постоји $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{d+1}\} \subseteq C$ такав да је

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{c}_i \\ 1 \end{pmatrix} : i \in \{1, 2, \dots, d+1\}\right\},$$

одакле слиједи да је $\mathbf{c} \in \operatorname{conv}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{d+1}\}$. $\square$

Видјели смо да је Каратеодоријева теорема 2.1 посљедица једноставне чињенице из линеарне алгебре, да је сваки $(d+2)-$члани подскуп од $\mathbb{R}^d$ афино зависан. Још једна знаменита теорема која се бави комбинаториком конвексних скупова, а позната је као Радонова лема, је посљедица исте чињенице.

Теорема 2.3 (Радон, [Rad21]). *Нека је $F \subseteq \mathbb{R}^d$, $|F| = m$, при чему је $m \geqslant d+2$. Тада постоје два дисјунктна подскупа $F_1, F_2 \subseteq F$, таква да вриједи*

$$\operatorname{conv}(F_1) \cap \operatorname{conv}(F_2) \neq \emptyset.$$

Доказ. Нека је $F = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$. Скуп F је афино зависан, па постоје скалари $\alpha_1, \dots,\ \alpha_m$ такви да вриједи

$$0 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m,$$

при чему је бар један α_i различит од 0 и вриједи

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 0.$$

Дефинишимо скупове

$$P := \{i \in [m] : \alpha_i > 0\}$$

и

$$N := \{i \in [m] : \alpha_i < 0\}.$$

Вриједи

$$\sum_{i \in P} \alpha_i = -\sum_{i \in N} \alpha_i.$$

Означимо ту вриједност са α. Нека су сада

$$F_1 := \{\mathbf{v}_i : i \in P\}$$

и

$$F_2 := \{\mathbf{v}_i : i \in N\}.$$

Скупови F_1 и F_2 су очигледно дисјунктни и вриједи

$$\mathrm{conv}(F_1) \ni \sum_{i \in P} \frac{\alpha_i}{\alpha} \mathbf{v}_i = \sum_{i \in N} \frac{\alpha_i}{-\alpha} \mathbf{v}_i \in \mathrm{conv}(F_2).$$

□

Сада ћемо доказати Штајницову теорему, која је сличног карактера као Каратеодоријева, а касније ћемо видјети да, у ствари, имају заједничко уопштење.

Теорема 2.4 (Штајниц, [Ste13, Ste14, Ste16]). *Нека је $X \subseteq \mathbb{R}^d$ и $\mathbf{x}$ је унутрашња тачка од* $\mathrm{conv}(X)$*. Тада постоји подскуп X' од X, $|X'| \leqslant 2d$, такав да је $\mathbf{x}$ унутрашња тачка од* $\mathrm{conv}(X')$.

Доказ. Прво примијетимо да је $\mathbf{x}$ садржана у унутрашњости конвексног омотача неког коначног подскупа од X. Наиме, из $\mathbf{x} \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(X))$ слиједи да је $\mathbf{x} \in \mathrm{int}(\sigma)$, гдје је σ неки $d-$димензионални симплекс садржан у $\mathrm{conv}(X)$. Према Каратеодоријевој теореми 2.1 свако тјеме симплекса σ је конвексна комбинације највише $d+1$ тачке из X, па одатле слиједи да је $\mathbf{x}$ у унутрашњости конвексног омотача неког подскупа Y од X, кардиналности не веће од $(d+1)^2$.

Без смањења општости можемо претпоставити да је $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и дефинишимо

$$L_{d-1} = \{\alpha_1 \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \mathbf{y}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{y}_k : \alpha_i \in \mathbb{R},\ \mathbf{y}_i \in Y, k \leqslant d-1\}.$$

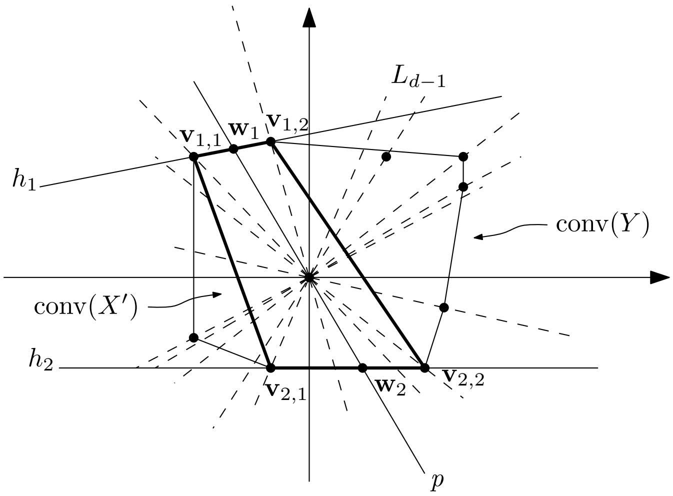
Како је L_{d-1} коначна унија правих линеарних потпростора од $\mathbb{R}^d$, то постоји права p таква да је $p \cap L_{d-1} = \{\mathbf{0}\}$. Нека су сада $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$

тачке праве p које леже на граници скупа $\operatorname{conv}(Y)$. Означимо са h_1 и h_2 потпорне хиперравни скупа $\operatorname{conv}(Y)$ у тачкама w_1 и w_2. Очигледно је

$$\mathbf{0} \in \operatorname{relint}([\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2])$$

и

$$\mathbf{w}_i \in \operatorname{conv}(L_{d-1} \cap h_i),\ i = 1, 2.$$



Илустрација 2.1: Штајницова теорема у $\mathbb{R}^2$

Према Каратеодоријевој теореми 2.1 постоје скупови

$$W_1 = \{\mathbf{v}_{1,1}, \mathbf{v}_{1,2}, \dots, \mathbf{v}_{1,k_1}\} \subset L_{d-1} \cap Y$$

и

$$W_2 = \{\mathbf{v}_{2,1}, \mathbf{v}_{2,2}, \dots, \mathbf{v}_{2,k_2}\} \subset L_{d-1} \cap Y$$

такви да је

$$\mathbf{w}_i \in \operatorname{conv}(W_i \cap h_i),\ i = 1, 2,$$

при чему је $k_i \leqslant d$, за $i = 1, 2$, док на основу избора праве p вриједи $k_1 = k_2 = d$. Одатле, за скуп $X' = W_1 \cup W_2$, очигледно вриједи $X' \subseteq X$, $|X'| = 2d$ и

$$\mathbf{0} \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(X')).$$

□

За крај поглавља ћемо навести теорему Бониса и Клија, [BK63], која представља већ поменуто заједничко уопштење Каратеодоријеве теореме 2.1 и Штајницове теореме 2.4. Теорему наводимо без доказа, а један доста елементаран заинтересовани читалац може пронаћи у [Rea65].

Дефиниција 2.1. *Нека је $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ и нека је $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Скуп*

$$\mathrm{int}_k(Y) = \{\mathbf{y} \in Y : \exists \sigma^k \subseteq Y, \mathbf{y} \in \mathrm{relint}(\sigma^k)\}$$

*називамо $k-$**унутрашњост** скупа Y.*

На основу претходне дефиниције је $\mathrm{int}_0(Y) = Y$ и $\mathrm{int}_d(Y) = \mathrm{int}(Y)$.

Теорема 2.5 (Бонис, Кли, [BK63])**.** *Нека је $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $0 \leqslant k \leqslant d$ и $\mathbf{x} \in \mathrm{int}_k(\mathrm{conv}(X))$. Тада постоји подскуп X' од X, $|X'| \leqslant \max\{2k, d+1\}$, такав да је $\mathbf{x} \in \mathrm{int}_k(\mathrm{conv}(X'))$.*

2.2 Хелијева теорема и примјене

У овом поглављу ћемо доказати Хелијеву теорему која каже да ако нека фамилија конвексних скупова има непразан пресјек, то се да провјерити на подфамилијама разумне кардиналности. Такође, видјећемо и неке теореме које се на лијеп начин добију као посљедица Хелијеве теореме.

Теорема 2.6 (Хели, [Hel23])**.** *Нека су $H_1, H_2, \ldots, H_n$ конвексни подскупови од $\mathbb{R}^d$, $n \geqslant d+1$. Претпоставимо да сваких $d+1$ има непразан пресјек. Тада је непразан и пресјек свих H_i.*

Доказ. Доказаћемо ову теорему индукцијом по n. Ако је $n = d+1$ нема шта да се доказује. Претпоставимо да је $n > d+1$ и да је тврдња тачна за $n-1$. По индуктивној претпоставци пресјек сваких $n-1$ је непразан, па можемо одабрати тачке

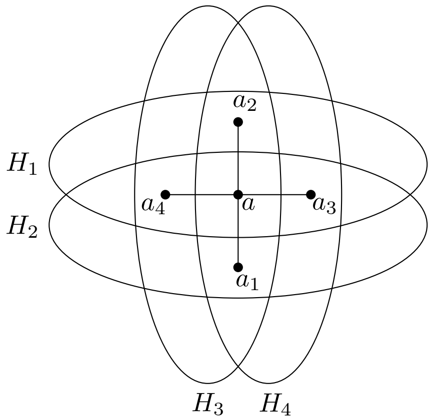
$$\mathbf{a}_i \in \bigcap_{j \neq i} H_j, \; i \in [n].$$

По Радоновој леми је $[n] = I_1 \cup I_2$, при чему је $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ и постоји тачка

$$\mathbf{a} \in \mathrm{conv}\{\mathbf{a}_i : i \in I_1\} \cap \mathrm{conv}\{\mathbf{a}_i : i \in I_2\}.$$

Докажимо да је

$$\mathbf{a} \in \bigcap_{i \in [n]} H_i.$$



Илустрација 2.2: Хелијева теорема у $\mathbb{R}^2$

Нека је $i \in [n]$ произвољно. Тада вриједи $i \notin I_1$ или $i \notin I_2$. У првом случају вриједи
$$\{\mathbf{a}_j : j \in I_1\} \subseteq H_i$$
па је и
$$\mathbf{a} \in H_i,$$
јер је скуп H_i конвексан. Закључак бисмо на исти начин извели и у случају $i \notin I_2$. □

Ако мало пооштримо услове за скупове из Хелијеве теореме 2.6 онда можемо доказати да тврдња вриједи и у случају беконачних фамилија.

Теорема 2.7. *Нека је $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}$ бесконачна фамилија компактних конвексних подскупова од $\mathbb{R}^d$. Претпоставимо да свака подфамилија величине $d+1$ има непразан пресјек. Тада је непразан и пресјек читаве фамилије.*

Доказ. На основу Хелијеве теореме свака коначна подфамилија фамилије $\mathcal{H}$ има непразан пресјек. Како је то фамилија компактних скупова из опште топологије нам је познато да читава фамилија има непразан пресјек. □

Чак нисмо морали претпостављати ни да су сви скупови компактни. На сличан начин бисмо доказали претходну теорему и да је само један од скупова компактан, а остали затворени (погледати [Vre93]).

Сљедеће теореме, иако овдје наведене као примјери примјене Хелијеве теореме 2.6, посматране саме за себе имају интересантна тврђења.

Теорема 2.8 (Кирхбергер, [Kir03]). *Нека је* $S \subseteq \mathbb{R}^d$ *коначан скуп,* $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $|S| \geqslant d+2$. *Нека за сваки* $C \in \binom{S}{d+2}$ *постоји хиперраван која раздваја* $S_1 \cap C$ *и* $S_2 \cap C$. *Тада постоји хиперраван која раздваја* S_1 *и* S_2.

Доказ. За $\mathbf{x} \in S_1$ дефинишимо скуп

$$S_1(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{a}, \alpha) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leqslant \alpha\},$$

а за $\mathbf{x} \in S_2$ дефинишимо

$$S_2(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{a}, \alpha) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \mathbf{a}^T\mathbf{x} \geqslant \alpha\}.$$

Нека је

$$\mathcal{S}_i = \{S_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S_i\},\ i = 1, 2.$$

Лако се провјери да су у питању фамилије конвексних скупова. Како је $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{d+1}$ имамо да је $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ коначна фамилија конвексних скупова у $\mathbb{R}^{d+1}$. По претпоставкама теореме свака $d{+}2$ члана те фамилије имају непразан пресјек ако нису сви из $\mathcal{S}_1$ или $\mathcal{S}_2$. Ако јесу сви из $\mathcal{S}_1$ онда је $(\mathbf{0}, 1)$ у пресјеку, а ако су сви из $\mathcal{S}_2$ онда је $(\mathbf{0}, -1)$ у пресјеку. Коначно, можемо констатовати да за фамилију $\mathcal{S}$ вриједе претпоставке из Хелијеве теореме 2.6, те постоји $(\mathbf{a}, \alpha) \in \bigcap \mathcal{S}$. Хиперраван одређена са $(\mathbf{a}, \alpha)$ је хиперраван која раздваја S_1 и S_2. □

Теорема 2.9 (Јунг, [Jun01]). *Сваки скуп* J *дијаметра* 1 *у* $\mathbb{R}^d$ *може се покрити затвореном лоптом полупречника* $\sqrt{d/2(d+1)}$.

Доказ. Нека је $S \subseteq J$, $|S| \leqslant d+1$. Докажимо да се S може покрити затвореном лоптом полупречника $\sqrt{d/2(d+1)}$.

Нека је $B = B(y, r)$ најмања затворена лопта која садржи читав S. Нека је

$$\{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\} = \{\mathbf{x} \in S : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r\}$$

скуп тачака из S које су на граници посматране лопте. Јасно је да вриједи $m \leqslant d$. Центар $\mathbf{y}$ лопте B припада скупу $\mathrm{conv}\{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\}$. У противном би постојала хиперраван h која раздваја $\mathbf{y}$ и $\mathrm{conv}\{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\}$, па бисмо лопту B могли помјерити ка π, а затим је скупити, чиме бисмо добили нову лопту B' која покрива S, а има строго мањи полупречник него r.

Без смањења општости можемо претпоставити да је $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. То према малопређашњој примједби значи да постоје $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ који нису сви једнаки нули, такви да вриједи

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mathbf{z}_i = \mathbf{0}.$$

Нека је $d_{i,j} = d(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)$ за $i, j = 0, 1, \ldots, m$. Знамо да је $d_{i,j} \leqslant 1$, при чему је $d_{i,i} = 0$ за $i = 0, 1, \ldots, m$. За произвољно $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ вриједи

$$\begin{aligned}
1 - \alpha_j &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \alpha_i \\
&\geqslant \sum_{i=0}^{m} \alpha_i d_{i,j}^2 \\
&= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (2r^2 - 2\langle \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j \rangle) \\
&= 2r^2 \sum_{i=0}^{m} \alpha_i - 2 \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \langle \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j \rangle \\
&= 2r^2 - 2\langle \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j \rangle \\
&= 2r^2
\end{aligned}$$

Сумирајмо сада по j и добићемо

$$\begin{aligned}
m &= \sum_{j=0}^{m} (1 - \alpha_j) \\
&\geqslant \sum_{j=0}^{m} 2r^2 \\
&= 2r^2(m+1)
\end{aligned}$$

Одавде слиједи да је $r^2 \leqslant m/2(m+1)$, а како је функција $x \mapsto x/(x+1)$ растућа на свом домену и $m \leqslant d$ слиједи и да је $r^2 \leqslant d/2(d+1)$.

Дефинишимо сада, за $\mathbf{x} \in J$,

$$B_x = \{y \in \mathbb{R}^d : d(x, y) \leqslant \sqrt{d/2(d+1)}\}.$$

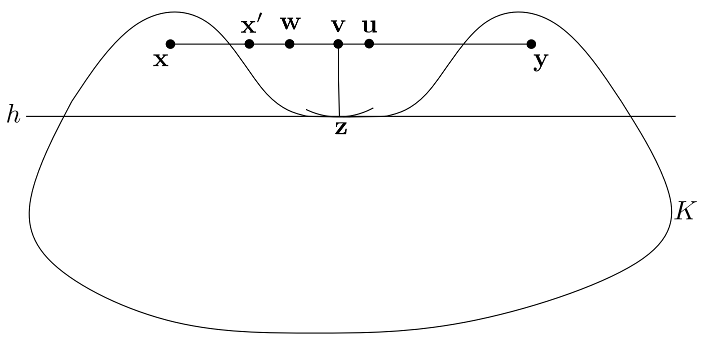
Фамилија $\mathcal{B} = \{B_x : x \in J\}$ је фамилија компактних конвексних скупова. Већ смо доказали да свака $(d+1)-$члана подфамилија од $\mathcal{B}$ има непразан пресјек. По бесконачној варијанти Хелијеве теореме (теорема 2.7), читава фамилија $\mathcal{B}$ има непразан пресјек, а тачке тога пресјека су управо центри затворених лопти полупречника $d/2(d+1)$ које покривају читав скуп J. $\square$

Дефиниција 2.2. *Нека је $K \subset \mathbb{R}^d$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$. Кажемо да је $\mathbf{x}$* ***видљива*** *из $\mathbf{y}$ у K ако је $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq K$.*

Теорема 2.10 (Красноселски, [Kra46])**.** *Нека је K бесконачан компактан скуп у $\mathbb{R}^d$. Претпоставимо да за сваких $d+1$ тачака из K постоји тачка у K из које су све ове тачке видљиве у K. Тада постоји тачка у K из које је читав скуп K видљив.*

Доказ. За $\mathbf{x} \in K$ дефинишимо $V_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in K : [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq K\}$. Према претпоставкама теореме сваких $d+1$ скупова $V_{\mathbf{x}}$ се сијеку, а ми желимо да докажемо да се сви сијеку. Према Хелијевој теореми 2.6 постоји тачка $\mathbf{y} \in \bigcap_{\mathbf{x} \in X} \operatorname{conv}(V_{\mathbf{x}})$. Показаћемо да је $\mathbf{y} \in \bigcap_{\mathbf{x} \in X} V_{\mathbf{x}}$.

Претпоставимо супротно, да за неко $\mathbf{x} \in K$ постоји тачка $\mathbf{u} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \setminus K$ и одаберимо тачку $\mathbf{x}'$ на дужи $[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$ за коју вриједи $(\mathbf{x}', \mathbf{u}) \cap K = \emptyset$.



Илустрација 2.3: Теорема Красноселског у $\mathbb{R}^2$

Тада постоји тачка $\mathbf{w} \in (\mathbf{x}', \mathbf{u})$ таква да је

$$d(\mathbf{x}', \mathbf{w}) = \frac{1}{2} d(\mathbf{u}, K)$$

и тачке $\mathbf{v} \in [\mathbf{w}, \mathbf{u}]$ и $\mathbf{z} \in S$ такве да је

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = d([\mathbf{w}, \mathbf{u}], K) > 0.$$

Како је $\mathbf{z}$ најближа тачка скупа K тачки $\mathbf{v}$, то скуп $V_{\mathbf{z}}$ лежи у затвореном полупростору h^+ који не садржи $\mathbf{v}$ и који је оограничен хиперравни h која је нормална на дуж $[\mathbf{v}, \mathbf{z}]$.

Како је $\mathbf{y} \in \operatorname{conv}(V_{\mathbf{z}}) \subseteq h^+$, имамо да је $\measuredangle \mathbf{vzy} \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ одакле слиједи да је $\measuredangle \mathbf{yvz} < \dfrac{\pi}{2}$. Из

$$d(\mathbf{v}, K) \leqslant d(\mathbf{w}, K) < d(\mathbf{u}, K)$$

је јасно да је $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ па, дакле, постоји тачка на дужи $[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$ различита од $\mathbf{v}$ која је ближа скупу K него што је $\mathbf{v}$. Ово је контрадикција са избором тачке $\mathbf{v}$.

$\square$

2.3 Разломљена Хелијева теорема

У предходном поглављу смо се упознали са Хелијевом теоремом 2.6 која каже да, ако је, у $\mathbb{R}^d$, дата нека коначна фамилија конвексних скупова $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$, $n \geqslant d+1$, таква да свака $(d+1)-$члана подфамилија има непразан пресјек, онда и читава фамилија има непразан пресјек. Шта се дешава ако немају све $(d+1)-$члане подфамилије непразан пресјек, него њих барем $\alpha\binom{n}{d+1}$, за неки позитиван број α мањи од 1. Качалски и Лиу у [KL79] доказују да постоји $\beta > 0$ тако да нека подфамилија од $\mathcal{H}$, која се састоји од барем βn чланова има непразан пресјек. Та теорема је данас позната као разломљена Хелијева теорема, а ми ћемо је овдје доказати за $\beta = \frac{\alpha}{d+1}$. Уз неколике измјене ослонићемо се на поступак из [Mat99]. Прво докажимо сљедећу лему која ће нам касније користити.

Лема 2.11. *Нека је $n \geqslant d+1$ и нека су $F_1, F_2, \ldots, F_n$ конвексни и компактни подскупови од $\mathbb{R}^d$, при чему је $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$. Ако је $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ вектор за који се вриједност*

$$m = \min\{\mathbf{v}^T\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^n F_i\}$$

достиже у јединственој тачки $\mathbf{x}_0 \in \bigcap_{i=1}^n F_i$, тада постоји неки $k-$члани подскуп J од $\{1, 2, \ldots, n\}$, $k \leqslant d$, такав да је $\mathbf{x}_0$ тачка минимума функције $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{v}^T\mathbf{x}$ и на скупу $\bigcap_{i \in J} F_i$.

Доказ. Дефинишимо скуп C са

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{v}^T\mathbf{x} < m\}.$$

Скуп C је конвексан и очигледно вриједи

$$C \cap F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset.$$

Према Хелијевој теореми 2.6 постоји $k \leqslant d$ такав да неких $k+1$ чланова фамилије конвексних скупова $\{C, F_1, F_2, \ldots, F_n\}$, такође има празан пресјек. Јасно је да је један од њих C, па дакле за неки $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ вриједи

$$C \cap F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots \cap F_{i_k} = \emptyset.$$

Скуп J је очигледно тражени скуп. □

Сада смо спремни да докажемо главни резултат овог поглавља:

Теорема 2.12 (Качалски, Лиу, [KL79]). *Нека је $n \geqslant d+1$ и нека су $H_1, H_2, \ldots, H_n$ конвексни подскупови од $\mathbb{R}^d$. Ако је $\alpha > 0$ реалан број такав да за бар $\alpha\binom{n}{d+1}$ $(d+1)-$чланих подскупова I од $\{1, 2, \ldots, n\}$ је $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$ тада постоји $\beta = \beta(d, \alpha) > 0$, такво да је пресјек неких βn скупова H_i непразан.*

Доказ. Примијетимо прво да је довољно теорему доказати у случају када су скупови $H_1, H_2, \ldots, H_n$ политопи. Изаберимо тачке $\mathbf{p}_I \in \bigcap_{i \in I} H_i$, за $I \in \binom{n}{d+1}$, за које је $\bigcap_{i \in I} F_i$ непразан. Ако дефинишемо политопе $H_i' = \operatorname{conv}\{\mathbf{p}_I : i \in I\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, видимо да је $H_i' \subseteq H_i$ и да теорема вриједи за скупове $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ако вриједи за политопе $H_1', H_2', \ldots, H_n'$. На основу овога ћемо за остатак доказа претпоставити да су сви скупови H_i, а самим тим и непразни пресјеци $\bigcap_{\substack{i \in I \\ I \subset [n]}} H_i$, политопи.

Ради прегледности дефинишимо

$$P_I = \bigcap_{i \in I} H_i, \text{ за } I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$$

и нека је

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} : |I| = d+1, P_I \neq \emptyset\}$$

Нека је $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ вектор за који функција $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{v}^T\mathbf{x}$ на сваком $P_I, I \in \mathcal{I}$ има јединствену тачку минимума $\mathbf{x}_I$. Сада, на основу леме 2.11 сваком $I \in \mathcal{I}$ можемо придружити неки његов $d-$члани подскуп $J = J(I)$ такав да је $\mathbf{x}_I$ тачка минимума функције $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{v}^T\mathbf{x}$ и на P_J.

Пошто имамо $\binom{n}{d}$ $d-$чланих подскупова од $\{1, 2, \ldots, n\}$, један од њих, J_0, се појављује као $J(I)$, за бар

$$\alpha\frac{\binom{n}{d+1}}{\binom{n}{d}} = \alpha\frac{n-d}{d+1}$$

различитих $I \in \mathcal{I}$. Сваки такав I је облика $J \cup \{i\}$, за неко $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Дакле, тачка минимума скупа P_{J_0} се појављује у барем

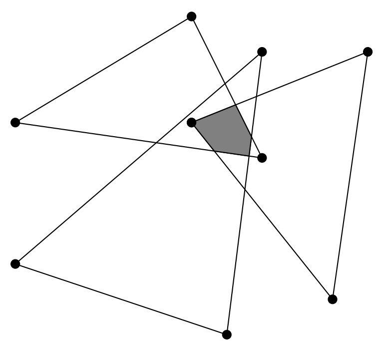
$$d + \alpha \frac{n-d}{d+1} \geqslant \alpha \frac{n}{d+1}$$

различитих скупова H_i. Одавде слиједи ваљаност теореме за $\beta = \dfrac{\alpha}{d+1}$. $\square$

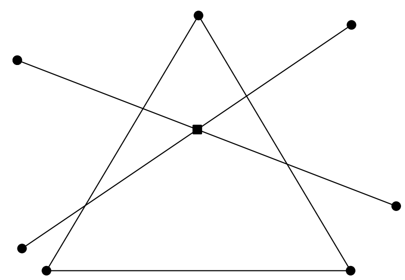
2.4 Твербергова теорема

Прича око Твербергове теореме[1] је почела са Брајаном Џоном Бирчом педесетих година прошлог вијека који је у свом раду [Bir59] доказао сљедеће тврђење:

Теорема 2.13 (Бирч, [Bir59]). *Нека је дато $3N$ тачака у равни. Тада оне одређују N троуглова који имају заједничку тачку.*



Илустрација 2.4:
9 тачака у равни



Илустрација 2.5:
7 тачака у равни

Такође је примијетио, да ако не посматрамо само троуглове, него конвексне омотаче, можемо смањити број тачака за 2:

Теорема 2.14. *Произвољне $3N-2$ тачке у равни можемо раздијелити на N дисјунктних скупова чији конвексни омотачи имају заједничку тачку.*

Коначно, Бирч је у поменутом раду поставио и сљедећу хипотезу, која би представљала уопштење теореме 2.14 у веће димензије.

[1]Погледати сјајан чланак Гинтера Циглера [Zie11]

Бирчова хипотеза

Произвољних $(n+1)N-n$ тачака у $\mathbb{R}^n$ можемо раздијелити у N дисјунктних скупова чији конвексни омотачи имају заједничку тачку.

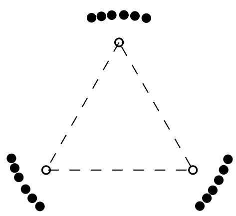
Седам година касније Хелге Тверберг у [Tve66] доказује ову хипотезу и то тврђење је данас познато као Твербергова теорема. Коришћењем модернијих језика, термина и ознака, него што су били средином двадесетог вијека, Твербергова теорема гласи:

Теорема 2.15 (Тверберг, [Tve66])**.** *Нека је $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $|X| = (r-1)(d+1)+1$. Тада постоји партиција скупа X на дисјунктне подскупове $X_1, X_2, \ldots, X_r$ такве да је $\bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{conv}(X_j)$ непразан.*

Твербергов оригиналан доказ је прилично компликован, иако га одликује крајње једноставна идеја:

За задату конфигурацију тачака формирати низ конфигурација који задовољава тврдњу и који конвергира задатој.

Касније је Тверберг у [Tve81] дао још један доказ ове теореме, као и још неколицина математичара. Ми ћемо овдје издвојити два за која већина математичара, а и аутор ових редова, сматра да су најљепши до сада. Први, дјело Тверберга и Синише Врећице из [TV93] ћемо изложити сада, а други, за који је одговоран Каранбир Саркарија, [Sar92], биће представљен у наредној глави.



Илустрација 2.6: Конфигурација тачака без Твербергове 7−партиције

Напоменимо, прије него пређемо на доказ, да је број $(r-1)(d+1)+1$ из Твербергове теореме 2.15 отималан. Наиме, ако узмемо тјемена $d-$симплекса и замијенимо свако неким кластером од $r-1$ тачке, лако се види да добијена конфигурација од $(r-1)(d+1)$ тачке неће имати Твербергову партицију (илустрација 2.4).

Доказ. Одаберимо дисјунктне подскупове $X_1, \ldots, X_r$ од X и лопту B за коју вриједи

1. $B \cap \operatorname{conv}(X_i) \neq \emptyset$ за $i = 1, \ldots, r$;
2. B има минималан полупречник;
3. B има максималну удаљеност од координатног почетка;
4. B додирује минималан број скупова $\operatorname{conv}(X_i)$.

Ако је B дегенерисана у тачку то је крај доказа, те стога можемо претпоставити да је полупречник од B позитиван и да је $\mathbf{y}_i \in B \cap \operatorname{conv}(X_i)$ за $i = 1, \ldots, r$.

Како је $\mathbf{y}_i$ у релативној унутрашњости неког симплекса са тјеменима из X_i који додирује лопту B ако $\operatorname{conv}(X_i)$ додирује лопту B, можемо претпоставити да је скуп X_i афино независан, то јест да тачке тога скупа представљају тјемена симплекса. Тада је $\dim(\operatorname{aff}(X_i)) = |X_i| - 1$, па је дакле $\operatorname{aff}(X_i)$ скуп рјешења система од $d + 1 - |X_i|$ линеарних једначина по d непознатих. Укупан број једначина је

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r}(d + 1 - |X_i|) &= rd + r - |X_1 \cup \ldots \cup X_r| \\
&= d + |X| - |X_1 \cup \ldots \cup X_r| \\
&= d + |X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_r)|.
\end{aligned}$$

Разликоваћемо два случаја.

Први случај: $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$. Тада имамо систем од d једначина по d непознатих. Ако тај систем има неко рјешење, то јесте тачку $\mathbf{x}$ која припада $\operatorname{aff}(X_i)$, за $i = 1, \ldots, r$, можемо да помјеримо лопту B у правцу вектора $\mathbf{x}$. Тако ће се она примаћи оним $\operatorname{aff}(X_i)$ за које B додирује скуп $\operatorname{conv}(X_i)$. Помјерену лопту можемо мало скупити, што је контрадикција.

Ако поменути систем нема рјешење, то значи да постоји вектор $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ паралелан са свих d хиперравни, специјално паралелан и са свим $\operatorname{aff}(X_i)$, афиним многострукостима за које B додирује скуп $\operatorname{conv}(X_i)$. Помјеримо сада B у правцу вектора $\mathbf{v}$ тако да се повећа удаљеност центра од координатног почетка, при чему B и даље додирује исте скупове $\operatorname{conv}(X_i)$ које је и прије додиривала, док остале и даље сијече у унутрашњој тачки. Контрадикција.

Други случај: $X \neq X_1 \cup \ldots \cup X_r$. Нека је $\mathbf{x}_1 \in X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_r)$. Примијетимо да је центар од B у конвексном омотачу тачака $\mathbf{y}_i$ у којима B додирује $\operatorname{conv}(X_i)$. У противном би постојала хиперраван h која раздваја центар лопте B од тих тачака, па бисмо могли помјерити B према овим тачкама, нормално на h, што је, послије скупљања лопте, контрадикција. Нека је центар од B у релативној унутрашњости симплекса са тјеменима $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$. Посматрајмо сада пројекцију простора $\mathbb{R}^d$ на афину многострукост $\operatorname{aff}\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$. Тангетна хиперраван на B у тачки $\mathbf{y}_i$ која садржи X_i сијече $\operatorname{aff}\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$ по тангетној хиперравни на $B \cap \operatorname{aff}\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$ (мисли се на простор $\operatorname{aff}\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$) у тачки $\mathbf{y}_i$, за $i = 1, \ldots, s$. Ове хиперравни у простору $\operatorname{aff}\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$ одређују симплекс који садржи $B \cap \operatorname{aff}\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$. Бар за једну од ових хиперравни, можемо претпоставити да је у питању прва, је тачка $\mathbf{x}_1'$, која представља пројекцију тачке $\mathbf{x}_1$ на многострукост $\operatorname{aff}\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$, у истом отвореном полупростору као и $B \cap \operatorname{aff}\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$. То значи да отворени сегмент $(\mathbf{x}_1', \mathbf{y}_1)$ сијече $B \cap \operatorname{aff}\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s\}$, одакле слиједи да $[\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1]$ сијече B. Замијенимо ли скуп X_1 скупом $X_1 \cup \{\mathbf{x}_1\}$ смањили смо број скупова $\operatorname{conv}(X_i)$ који додирују B што је контрадикција. $\square$

Глава 3

Разнобојни покривајући симплекси

У овој глави разматрамо такозване "разнобојне" теореме, Каратеодоријеву и Хелијеву, као и неке примјене разнобојне Каратеодоријеве теореме. Главу ћемо закључити са још једним доказом Твербергове теореме 2.15.

3.1 Барањијева теорема

Дефиниција 3.1. *Нека су дати скупови* $X_1, X_2, \ldots, X_k \subseteq \mathbb{R}^d$. *Скуп* $T \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} X_i$, *такав да је* $|T \cap A_i| = 1$, *за свако* $i = 1, 2, \ldots, k$, *зваћемо* ***разнобојним***. *Ако је скуп* T *афино независан, тада ћемо његов конвексан омотач,* $\operatorname{conv}(T)$, *звати* ***разнобојним симплексом***.

Предходна дефиниција се може схватити тако што замислимо да сваки од скупова X_i је обојен бојом i, па је онда скуп T, скуп представника од сваке боје. Сљедећу теорему, коју у литератури често зову разнобојном Каратеодоријевом теоремом[1], је у раду [Bár82] доказао Имре Барањи.

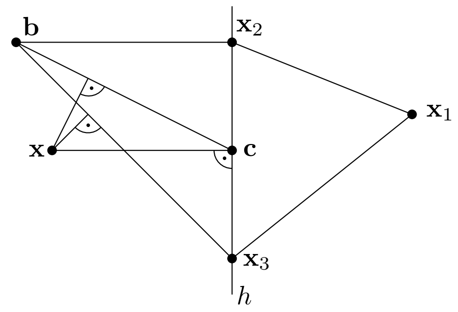
Теорема 3.1 (Барањи, [Bár82])**.** *Дати су скупови* $X_1, \ldots, X_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^d$ *такви да је* $\mathbf{x} \in \bigcap_{j=1}^{d+1} \operatorname{conv}(X_j)$. *Тада постоји разнобојан скуп* $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{d+1}\}$ *такав да је* $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(T)$.

Доказ. Захваљујући обичној Каратеодоријевој теореми, можемо претпоставити да су скупови X_i коначни. Посматрајмо разнобојан скуп

$$T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots, \mathbf{x}_{d+1}\}$$

[1] Када су сви скупови X_i једнаки добија се обична Каратеодоријева теорема

чији конвексан омотач, $C = \mathrm{conv}(T)$, је најближи тачки $\mathbf{x}$. Ако је $\mathbf{x} \in C$ доказ је готов, те стога можемо претпоставити да $\mathbf{x} \notin C$. Нека је $\mathbf{c} \in C$ тачка на којој се достиже минимум вриједности $d(\mathbf{x}, C)$. Тачка $\mathbf{c}$ је на граници скупа C те је она, на основу Каратеодоријеве теореме, конвексна комбинација d тачака из C. Можемо претпоставити да су то тачке $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \dots, \mathbf{x}_{d+1}$.



Илустрација 3.1: Ближи разнобојни симплекс

Нека је h хиперраван нормална на вектор $\mathbf{x}-\mathbf{c}$ у тачки $\mathbf{c}$. Хиперраван h раздваја тачку $\mathbf{x}$ и скуп C. Пошто је $\mathbf{x} \in \mathrm{conv}(X_1)$ и $\mathbf{x} \notin h$, то постоји тачка $\mathbf{b} \in X_1$ са исте стране хиперравни h, као и тачка $\mathbf{x}$. Очигледно за C', конвексан омотач разнобојног скупа

$$T' = \{\mathbf{b}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{d+1}\},$$

вриједи $d(\mathbf{x}, C') < d(\mathbf{x}, C)$. Контрадикција и крај доказа. □

Теорема 3.1, слично као и Каратеодоријева теорема 2.1, има своју конусну верзију.

Теорема 3.2 (Барањи, [Bár82])**.** *Нека су дати скупови* $X_1, X_2, \dots, X_d \subseteq \mathbb{R}^d$ *и нека је* $\mathbf{x} \in \bigcap_{j=1}^{d} \mathrm{cone}(X_j)$*. Тада постоји разнобојан скуп* $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_d\}$ *такав да је* $\mathbf{x} \in \mathrm{cone}(T)$*.*

3.2 О броју разнобојних симплекса

Теорема 3.1 нам гарантује постојање бар једног разнобојног симплекса који садржи тачку $\mathbf{x}$, па је онда питање које се само намеће колико има таквих разнобојних симплекса. Ми ћемо у наставку дати неке одговоре на то питање, али прије него пређемо на ствар да видимо какве конфигурације хоћемо да разматрамо.

За почетак, дјелује разумно да претпоставимо да сваки од скупова X_i има највише $d+1$ елемената. Можемо примијетити да ништа не губимо ако претпоставимо да је тачка $\mathbf{x}$ из пресјека конвексних омотача у теореми 3.1 у ствари $\mathbf{0}$. Даље, за скупове, какви су у теореми 3.1 рећи ћемо да су у **општем положају у односу на $\mathbf{0}$**, ако се никоја два не сијеку и ако никојих $k+1$ тачака уније $\bigcup_{j=1}^{d+1} X_j$ не лежи у заједничком $k-$димензионалном линеарном потпростору од $\mathbb{R}^d$, за свако $k = 0, 1, \ldots, d-1$. Очигледно, из $\mathbf{0} \in \operatorname{conv}(X_i)$ слиједи да је $|X_i| \geqslant d+1$, ако су скупови X_i у општем положају у односу на $\mathbf{0}$. Од сада, дакле, посматрамо $(d+1)-$члане скупове $X_1, X_2 \ldots, X_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^d$ који су у општем положају о односу на $\mathbf{0}$, и за које је $\mathbf{0} \in \bigcap_{i=1}^{d+1} \operatorname{conv}(X_i)$. Циљ нам је да видимо колико под овим претпоставкама постоји разнобојних симплекса који садрже $\mathbf{0}$.

Први одговор је дао сам Барањи у [Bár82], у виду теореме 3.3 , из које слиједи да разнобојних симплекса који садрже $\mathbf{0}$ увијек има барем $d+1$.

Теорема 3.3 (Барањи, [Bár82]). *Нека су дати скупови $X_1, X_2 \ldots, X_d \subseteq \mathbb{R}^d$ и нека је $\mathbf{0} \in \bigcap_{j=1}^{d} \operatorname{conv}(X_j)$. За сваку тачку $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ постоји разнобојан скуп $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_d\}$ такав да је $\mathbf{0} \in \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d\}$.*

Доказ. На основу Каратеодоријеве теореме 2.1, можемо претпоставити да је $|X_i| \leqslant d+1$, за $i = 1, \ldots, d$. Прво ћемо доказати теорему у случају када је $\mathbf{0} \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(X_i))$. Тада постоји $\varepsilon > 0$ такво да вриједи

$$-\varepsilon \mathbf{x}_0 \in \operatorname{conv}(X_i), \text{ за } i = 1, \ldots, d,$$

а одатле је и

$$-\varepsilon \mathbf{x}_0 \in \operatorname{cone}(X_i), \text{ за } i = 1, \ldots, d.$$

По теореми 3.2 постоји разнобојан скуп $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_d\}$ такав да је $-\varepsilon \mathbf{x}_0 \in \operatorname{cone}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_d\}$. То значи да постоје ненегативни скалари α_i, $i = 1, \ldots, d$, за које је

$$-\varepsilon \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Ставимо ли да је $\varepsilon + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i = M$ из предходне једнакости добијамо да вриједи

$$\mathbf{0} = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i' \mathbf{x}_i,$$

гдје је
$$\alpha'_0 = \frac{\varepsilon}{M}$$
и
$$\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{M}, \text{ за } i = 1, \ldots, d.$$
Очигледно вриједи
$$\alpha'_i \geqslant 0, \text{ за } i = 0, 1, \ldots, d$$
и
$$\sum_{i=0}^{d} \alpha'_i = 1,$$
одакле слиједи да је $\mathbf{0} \in \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d\}$.

Коначно, да бисмо доказали теорему и у случају када за неко i тачка $\mathbf{0}$ није у унутрашњости скупа $\operatorname{conv}(X_i)$, довољно је тај скуп апроксимирати низом $(d+1)-$чланих скупова $(X_i^n)_{n=0}^{\infty}$ таквих да је $\mathbf{0} \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(X_i^n))$, за свако $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Доњу границу за број разнобојних симплекса који садрже $\mathbf{0}$ на $2d$ побољшавају Деза, Хуанг, Стивен и Терлаки у раду [DHST06] . У истом раду они конструишу конфигурацију која нема више од d^2+1 разнобојних симплекса који садрже $\mathbf{0}$, те постављају хипотезу да се тај број може увијек достићи. Недуго затим Барањи и Матушек у [BM07] доказују да их постоји барем $\frac{1}{5}d(d+1)$, а Стивен и Томас у [ST08] поправљају доњу границу на $\left\lfloor \frac{(d+2)^2}{4} \right\rfloor$, и то је резултат који ћемо и ми овдје показати.

Теорема 3.4 (Стивен, Томас, [ST08])**.** *Нека су скупови $X_1, X_2, \ldots, X_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^d$ у општем положају у односу на $\mathbf{0}$, при чему је $\mathbf{0} \in \bigcap_{j=1}^{d+1} \operatorname{conv}(X_j)$. Тада постоји барем $\left\lfloor \frac{(d+2)^2}{4} \right\rfloor$ разнобојних симплекса који садрже $\mathbf{0}$.*

Доказ. Нека су скупови $X_1, X_2 \ldots, X_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^d$ као у теореми 3.4 и нека је $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{d+1}$. Можемо претпоставити да је $X \subset S^{d-1}$. У противном, могли бисмо тачке скупа X замијенити централним пројекцијама на S^{d-1}.

За сваки $d-$члани подскуп A од X дефинишимо $\sigma(A) = \operatorname{cone}(A) \cap S^{d-1}$, одговарајући сферни симплекс. Због особина скупа X, Сваки такав сферни симплекс је садржан у отвореној хемисфери.

Даље, нека је $Y_i = X \setminus X_i$ и $P_i = -X_i$, за $i = 1, 2, \ldots, d+1$.

Произвољан разнобојан подскуп T од Y_i ћемо звати **трансверзала**. Са $\mathcal{T}^d(Y_i)$ ћемо обиљежити фамилију свих трансверзала у Y_i, док ћемо за неки $Y_i' \subseteq Y_i$ са $\mathcal{T}^d(Y_i')$ обиљежити фамилију трансверзала из Y_i које су подскупови од Y_i'.

За тачку $\mathbf{a}$ на сфери S^{d-1} ћемо рећи да је **покривена трансверзалом** $T \in \mathcal{T}^d(Y_i)$ ако је $\mathbf{a} \in \sigma(T)$, а ако је $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}^d(Y_i)$, фамилија трансверзала рећи ћемо да $\mathcal{F}$ **покрива** $\mathbf{a}$, ако бар једна трансвезала T из $\mathcal{F}$ покрива $\mathbf{a}$.

Сада видимо да је довољно бројати парове облика $(\mathbf{p}_i, T)$ при чему је $\mathbf{p}_i \in P_i$, $T \in \mathcal{T}^d(Y_i)$ и $\mathbf{p}_i$ је покривено са са T, јер сваки такав пар одређује један разнобојан симплекс који садржи $\mathbf{0}$. При томе морамо водити рачуна да изостављамо различите парове који одговарају истом симплексу.

Као очигледну посљедицу теореме 3.3 имамо сљедећу лему.

Лема 3.5. *Нека је* $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ *и* $i \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$. *Тада постоји трансверзала* $T \in \mathcal{T}^d(Y_i)$ *која покрива* $\mathbf{x}$.

Доказ. Према теореми 3.3 постоји трансверзала $T \in \mathcal{T}^d(Y_i)$ таква да је $\mathbf{0} \in \operatorname{conv}(T \cup \{-\mathbf{x}\})$, а то је еквивалентно чињеници да је $\mathbf{x}$ покривено са T. $\square$

За доказ теореме 3.4 је кључна сљедећа лема, коју овдје наводимо без доказа који се може наћи у [BM07].

Лема 3.6 (Барањи, Матушек, [BM07])**.** *Нека је* $i \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$ *и нека су* S *и* T *двије дисјунктне трансверзале из* $\mathcal{T}^d(Y_i)$*, при чему* S *покрива тачку* $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ *Тада*

(*i*) *Ако* $\mathcal{T}^d(S \cup T)$ *не покрива цијелу сферу* S^{d-1}*, тада постоји трансверзала* $T' \in \mathcal{T}^d(S \cup T)$, $T' \neq S$*, таква да* T' *такође покрива* $\mathbf{x}$.

(*ii*) *Ако је* S *јединствена трансверзала у* $\mathcal{T}^d(S \cup T)$ *која покрива* $\mathbf{x}$*, тада* $\mathcal{T}^d(S \cup T)$ *покрива цијелу сферу* S^{d-1}.

Посљедица 3.7. *Нека су скупови* $X_1, X_2 \ldots, X_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^d$ *као у теореми 3.4. Претпоставимо да* $\mathbf{0}$ *лежи у мање од* d^2+d *разнобојних симплекса.*

Тада за свако $i \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$ *постоје трансверзале* $S, T \in \mathcal{T}^d(Y_i)$ *такве да* $\mathcal{T}^d(S \cup T)$ *покрива цијелу сферу* S^{d-1}.

Доказ. Без смањења општости можемо претпоставити да је $i = d+1$. Ако је свака од тачака скупа P_{d+1} поривена са барем d трансверзала из $\mathcal{T}^d(Y_{d+1})$, то би значило да постоји барем $d^2 + d$ разнобојних симплекса који садрже $\mathbf{0}$.

Закључујемо да постоји тачка $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ која је покривена са највише $d-1$ трансверзалом из $\mathcal{T}^d(Y_{d+1})$. Одавде слиједи да постоји трансверзала $T \in \mathcal{T}^d(Y_{d+1})$ која не покрива $\mathbf{x}$, нити је иједан $\mathbf{t} \in T$ елемент неке трансверзале из $\mathcal{T}^d(Y_{d+1})$ која покрива $\mathbf{x}$.

На основу леме 3.5 постоји трансверзала $S \in \mathcal{T}^d(Y_{d+1})$ која покрива $\mathbf{x}$. Према одабиру трансверзала S и T оне су очигледно дисјунктне и S је јединствена трансверзала из $\mathcal{T}^d(S \cup T)$ која покрива $\mathbf{x}$, па на основу леме 3.6 фамилија трансверзала $\mathcal{T}^d(S \cup T)$ покрива цијелу сферу S^{d-1}. □

Вратимо се доказу теореме 3.4. Претпоставићемо да је $\mathbf{0}$ садржан у мање од $d^2 + d$ разнобојних симплекса са бисмо могли примијенити претходну посљедицу.

Одаберимо трансверзале $S_1, T_1 \in \mathcal{T}^d(Y_1)$ такве да $\mathcal{T}^d(S_1 \cup T_1)$ покрива цијелу сферу S^{d-1}. То значи и да је сваки елемент скупа P_1 покривен бар једном трансверзалом из $\mathcal{T}^d(S_1 \cup T_1)$. То нам даје $d+1$ разнобојних симплекса који садрже $\mathbf{0}$.

Сада одаберимо трансверзале $S_2, T_2 \in \mathcal{T}^d(Y_2)$ такве да $\mathcal{T}^d(S_2 \cup T_2)$ покрива цијелу сферу S^{d-1}. Свака од тачака из скупа $P_2 \setminus (-(S_1 \cup T_1))$, а има их $d-1$ је покривена неком трансверзалом из $\mathcal{T}^d(S_2 \cup T_2)$, што нам даје још $d-1$ разнобојних симплекса који садрже $\mathbf{0}$.

Понављањем ове процедуре, у $i-$том кораку добијамо $d + 1 - 2(i-1)$ нових разнобојних симплекса који садрже $\mathbf{0}$, што нам даје укупно

$$(d+1) + (d-1) + (d-3) + \ldots = \left\lfloor \frac{(d+2)^2}{4} \right\rfloor$$

разнобојних симплекса који садрже $\mathbf{0}$. □

3.3 Разнобојна Хелијева теорема

У раду [Bár82] Барањи наводи и сљедеће тврђење, за које каже да га је први примијетио Ласло Ловас, које касније постаје познато као разнобојна Хелијева теорема.

Теорема 3.8 (Барањи, Ловас, [Bár82])**.** *Нека су* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_{d+1}$ *непразне коначне фамилије компактних конвексних подскупова од* $\mathbb{R}^d$ *са особином да за сваки избор* $C_1 \in \mathcal{C}_1, C_2 \in \mathcal{C}_2, \ldots, C_{d+1} \in \mathcal{C}_{d+1}$ *скуп* $\bigcap_{j=1}^{d+1} \operatorname{conv}(C_j)$ *је непразан. Тада је за неко* $i \in [d+1]$ *непразан и пресјек читаве фамилије* $\mathcal{C}_i$.

Доказ. Нека је

$$\mathcal{F} = \{F = \bigcap_{i=1}^{d} C_{i_d} : C_{i_d} \in \mathcal{C}_{i_d}, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_d \leqslant d+1\}.$$

Узмимо вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ такав са се за свако $F \in \mathcal{F}$ вриједност $\min\{\mathbf{v}^T\mathbf{x} : \mathbf{x} \in F\}$ достиже у јединственој тачки скупа F. Нека је F_0 такав да је тај минимум највећи и нека се достиже у $\mathbf{x}_0 \in F_0$. Можемо претпоставити да је $F_0 = \bigcap_{i=1}^{d} C_i$, дакле да је посљедња фамилија изостављена из F_0.

Показаћемо да је $\mathbf{x}_0 \in C_{d+1}$, *за свако* $C_{d+1} \in \mathcal{C}_{d+1}$.

Претпоставимо да $\mathbf{x}_0 \notin C_{d+1}$ за неко $C_{d+1} \in \mathcal{C}_{d+1}$. Нека је $\mathbf{y}$ тачка у којој се достиже $\min\{\mathbf{v}^T\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \cap_{i=1}^{d+1} C_i\}$. Скуп $\bigcap_{i=1}^{d+1} C_i$ је непразан па такво $\mathbf{y}$ постоји и вриједи $\mathbf{v}^T\mathbf{x}_0 < \mathbf{v}^T\mathbf{y}$. Нека су даље $\mathbf{x}_j$ одговарајуће тачке минимума функције $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{v}^T\mathbf{x}$ на скуповима $\bigcap_{i \neq j} C_i$, за $j = 1, \ldots, d$. Вриједи $\mathbf{v}^T\mathbf{x}_j \leqslant \mathbf{v}^T\mathbf{x}_0$, за свако $j \in \{1, \ldots, d\}$. Одатле слиједи да дужи $[\mathbf{x}_j, \mathbf{y}], j \in \{1, \ldots, d\}$ сијеку хиперраван $h = \{\mathbf{x} : \mathbf{v}^T\mathbf{x} = \mathbf{v}^T\mathbf{x}_0\}$. Означимо са $\mathbf{y}_j$, тачке пресјека. За сваку од њих вриједи $\mathbf{y}_j \in \bigcap_{i \neq j} C_i$. То исто вриједи и за тачку $\mathbf{y}_{d+1} = \mathbf{x}_0$. Пошто имамо скуп скуп од $d+1$ тачке који лежи на хиперравни, која је димензије $d-1$, постоји Радонова партиција скупа $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \ldots, \mathbf{y}_{d+1}\}$ и Радонова тачка $\mathbf{z}$. Примијенимо ли аргумент из доказа обичне Хелијеве теореме 2.6 добијамо да је $\mathbf{z} \in \bigcap_{i=1}^{d+1} C_i$. Имамо да вриједи $\mathbf{v}^T\mathbf{z} = \mathbf{v}^T\mathbf{x}_0 < \mathbf{v}^T\mathbf{y}$, што је контрадикција са одабиром $\mathbf{y}$. □

Теорема 2.7, бесконачна верзија Хелијеве теореме, слиједи из предходне ако ставимо

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \ldots = \mathcal{C}_{d+1}.$$

Теореме 3.1 и 3.8 су заправо и еквивалентне (доказ у [BO97]).

3.4 Још један доказ Твербергове теореме

Као што смо и обећали у предходној глави, овдје ћемо презентовати још један доказ Твербергове теореме. Ријеч је о Оновом поједностављењу ([BO97]) Саркаријиног доказа из [Sar92]. Присјетимо се прво да Твербергова теорема тврди да сваки $(r-1)(d+1)+1-$члани подскуп од $\mathbb{R}^d$ можемо разбити на r дисјунктних подскупова чији конвексни омотачи имају непразан пресјек.

Доказ. Нека је $X \subseteq \mathbb{R}^d$, при чему је $|X| = (r-1)(d+1)+1$. Ако дефинишемо $n = (r-1)(d+1)$, можемо означити елементе из X са $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Дефинишимо векторе

$$\mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}, \; i = 0, 1, \ldots, n.$$

Нека су $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^{r-1}$ врхови правилног $(r-1)-$димензионалног симплекса дијаметра 1. Једина њихова линеарна зависност, до на множење скаларом, је

$$\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

Дефинишимо скупове

$$A_i = \{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{y}_i, \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{y}_i, \ldots, \mathbf{v}_r \otimes \mathbf{y}_i\}, \; i = 0, 1, \ldots, n,$$

гдје је $\otimes$ стандардни тензорски производ вектора дефинисан за векторе $\mathbf{w}^s = (w_1^s, w_2^s, \ldots, w_s^s) \in \mathbb{R}^s$ и $\mathbf{w}^t = (w_1^t, w_2^t, \ldots, w_t^t) \in \mathbb{R}^t$ са

$$\mathbf{w}^s \otimes \mathbf{w}^t = (w_1^s w_1^t, \ldots, w_1^s w_t^t, w_2^s w_1^t, \ldots, w_2^s w_t^t, \ldots, w_s^s w_1^t, \ldots, w_s^s w_t^t).$$

Јасно је да је $A_i \subset \mathbb{R}^n$. Како је, због избора векторā $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{0} \in \mathrm{conv}(A_i)$, за $i = 0, 1, \ldots, n$, видимо да су испуњене све претпоставке из теореме 3.1, па постоји разнобојан скуп $A = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ такав да је $\mathbf{0} \in \mathrm{conv}(A)$. То значи да постоје ненегативни скалари $\alpha_i, \; i = 0, 1, \ldots, n$ такви да је

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1,$$

при чему вриједи

$$\alpha_0 \mathbf{a}_0 + \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Пошто је $\mathbf{a}_i \in A_i$ знамо да је

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{v}_{k(i)} \otimes \mathbf{y}_i, \text{ при чему је } k(i) \in \{1, \ldots, r\}.$$

Нека је

$$I_j = \{i : k(i) = j\}, \ j = 1, \ldots, r$$

и

$$X_j = \{\mathbf{x}_i : i \in I_j\}, \ j = 1, \ldots, r.$$

Очигледно је

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r,$$

а још ћемо доказати да је ово и Твербергова партиција скупа X. Посматрајмо векторе $\mathbf{z}_j = \sum_{i \in I_j} \alpha_i \mathbf{y}_i, \ j = 1, \ldots, r$. Вриједи

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_{k(i)} \otimes \mathbf{y}_i \\ &= \sum_{j=1}^{r} \mathbf{v}_j \otimes \sum_{i \in I_j} \alpha_i \mathbf{y}_i \\ &= \sum_{j=1}^{r} \mathbf{v}_j \otimes \mathbf{z}_j. \end{aligned}$$

Пошто за вектор $\mathbf{u}_1 = 2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \in \mathbb{R}^{r-1}$ вриједи

$$\mathbf{u}_1^T \mathbf{v}_1 = 1, \ \mathbf{u}_1^T \mathbf{v}_2 = -1 \text{ и } \mathbf{u}_1^T \mathbf{v}_k = 0, \text{ за } k \neq 1, 2.$$

можемо претходну једнакост помножити с лијева са $\mathbf{u}_1^T$ и добићемо да је $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2$. Слично можемо, помоћу векторā $\mathbf{u}_i = 2(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i+1})$, $i = 2, 3, \ldots, r-1$, добити и $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \ldots = \mathbf{z}_r$. Видимо да је посљедња координата вектора $\mathbf{z}_j$ једнака $\sum_{i \in I_j} \alpha_i = \frac{1}{r}$. Нека је даље вектор $\tilde{\mathbf{z}}$ пројекција вектора $\mathbf{z}$ на првих d координата. Тада је

$$r\tilde{\mathbf{z}} = \sum_{i \in I_j} r\alpha_i \mathbf{x}_i \in \operatorname{conv}(X_i), \text{ за свако } i = 1, 2, \ldots, r.$$

$\square$

Глава 4

Тополошки Твербергов проблем

Мноштво резултата у комбинаторици и дискретној геометрији је доказано коришћењем апарата алгебарске топологије. Први велики резултат из те бранше је Ловасов доказ Кнезерове хипотезе из 1978. године.[1] Од тада па до данас област тополошке комбинаторике се непрестано развија. Ми у овом поглављу хоћемо да докажемо тополошке верзије теорема Радона и Тверберга, као и још неке занимљиве резултате. У тој намјери углавном ћемо пратити изванредну Матушекову књигу [Mat08]. Осим у [Mat08], многе лијепе примјене топологије у комбинаторици и дискретној геометрији се могу наћи у [Bjö95], [Živ96], [Živ98] и [Živ04].

4.1 Од афиних до непрекидних утапања

Присјетимо се Радонове леме (теорема 2.3), која је тврдила да скуп од $d+2$ тачке у $\mathbb{R}^d$ можемо разбити на два дисјунктна подскупа чији се конвексни омотачи сијеку. Лако се провјери да је ово тврђење еквивалентно сљедећем:

Теорема 4.1. *Нека је $f : ||\sigma^{d+1}|| \to \mathbb{R}^d$ афино пресликавање. Тада постоје двије дисјунктне стране F_1 и F_2 од σ^{d+1} такве да је*

$$f(||F_1||) \cap f(||F_2||) \neq \emptyset.$$

Наиме, еквивалентност је посљедица чињенице да је афино пресликавање симплекса у потпуности одређено сликама тјемена. На сличан начин се види и да је Твербергова теорема 2.15 еквивалентна сљедећој:

[1] Погледати [dL04].

Теорема 4.2. *Нека су r и d природни бројеви. Ставимо $N = (d+1)(r-1)$. Нека је $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$ афино пресликавање. Тада постоји r међусобно дисјунктних страна $F_1, \ldots, F_r$ од σ^N таквих да је*

$$f(||F_1||) \cap f(||F_2||) \cap \ldots \cap f(||F_r||) \neq \emptyset.$$

Природно се поставља питање да ли ове теореме важе и ако је f призвољно непрекидно пресликавање. Године 1979. у [BB79] Бајмоки и Барањи дају потврдан одговор када је ријеч о Радоновој теореми:

Теорема 4.3 (Бајмоки, Барањи, [BB79])**.** *Нека је $f : ||\sigma^{d+1}|| \to \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада постоје двије дисјунктне стране F_1 и F_2 од σ^{d+1} такве да је*

$$f(||F_1||) \cap f(||F_2||) \neq \emptyset.$$

Што се тиче тополошког уопштења Твербергове теореме Барањи, Шлосман и Сиђ, 1981. године, у [BSS81], доказују да вриједи у случају да је r прост број. Озајдин, 1987. године у необјављеном раду, а касније Воловиков у [Vol96] и Саркарија у [Sar00] уопштавају тврђење на случај када је r степен простог броја, тако да данас имамо сљедећу теорему:

Теорема 4.4 (Воловиков, [Vol96], Саркарија, [Sar00])**.** *Нека је r степен простог броја и $d \geqslant 1$ произвољан цио број. Ставимо $N = (d+1)(r-1)$. Нека је $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада постоји r међусобно дисјунктних страна $F_1, \ldots,$ F_r од σ^N таквих да је*

$$f(||F_1||) \cap f(||F_2||) \cap \ldots \cap f(||F_r||) \neq \emptyset.$$

Према [Mat08] доказ тополошке Твербергове теореме за произвољан природан број r је један од најзначајнијих отворених проблема у пољу тополошке комбинаторике.

4.2 $G-$индекс

Дефиниција 4.1. *Нека је G тополошка група (G је тополошки простор и множење и узимање инверза су непрекидне операције) и X тополошки простор. $G-$**дејство** на X је колекција $\Phi = (\phi_g)_{g \in G}$ хомеоморфизама на X таква да вриједи:*

1. *Пресликавање $(g, x) \mapsto \phi_g(x)$ је непрекидно,*

2. *$\phi_e = \mathrm{id}_X$, ако је e јединични елемент у G и*

3. $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh}$ *за свако* $g, h \in G$.

Пар (X, Φ) *називамо* $G-$***простором***.
Ако су (X, Φ) *и* (Y, Ψ) $G-$*простори, пресликавање* $f : X \to Y$ *зовемо* ***еквиваријантним*** *или* $G-$***пресликавањем*** *ако је* $f \circ \phi_g = \psi_g \circ f$ *за свако* $g \in G$.

Дефиницију $G-$пресликавања можемо илустровати комутативним дијаграмом:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_g} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_g} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Дефиниција 4.2. $G-$*простор* (X, Φ) *зовемо* ***слободним***, *ако ниједан хомеоморфизам* ϕ_g, *осим тривијалног, нема фиксних тачака. Одговарајуће* $G-$*дејство ћемо такође називати слободним.*

$\mathbb{Z}_n-$**простори.** Посматрајмо адитивну групу $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, групу остатака по модулу n. $\mathbb{Z}_n-$дејство Φ је одређено хомеоморфизмом ϕ_1, јер је $\phi_k = (\phi_1)^k$, тако да ћемо у овом случају говорити $\mathbb{Z}_n-$простор (X, ν), ако је $\phi_1 = \nu$.

Посебно занимљив случај $\mathbb{Z}_n-$простора јесте за $n = p$, прост број. Тада је $\mathbb{Z}_p-$простор (X, ν) слободан ако и само ако хомеоморфизам ν нема фиксних тачака.

Симплицијални $G-$**комплекси.** Нека је K симплицијални комплекс са скупом тјемена V. Претпоставимо да група G дејствује на V тако да су елементима групе придружена симплицијална пресликавања. Тада K зовемо симплицијалним $G-$комплексом.

Иако је ово дејство дефинисано само на тјеменима од K, сва пресликавања канонски проширимо на $||\mathrm{K}||$, који тако постаје $G-$простор.

Примјер 4.1. ***Неки*** $G-$***простори.***

(a) Јединична сфера S^d *и простор* $\mathbb{R}^d$ *су* $\mathbb{Z}_2-$*простори, ако је хомеоморфизам* ϕ_1 *антиподално пресликавање* $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$. *Први је слободан, други није.*

(б) *Ако је (X,Φ) $G-$простор и H подгрупа од G тада је (X,Φ) такође $H-$простор. Ако је $G-$дејство било слободно и $H-$дејство је.*

(в) *За произвољан простор X, симетрична група S_n дејствује на $n-$џојну X^{*n} тако што пермутује координате:*

$$\pi(t_1x_1 \oplus t_2x_2 \oplus \ldots \oplus t_nx_n) = t_{\pi(1)}x_{\pi(1)} \oplus t_{\pi(2)}x_{\pi(2)} \oplus \ldots \oplus t_{\pi(n)}x_{\pi(n)}.$$

Према (б) свака подгрупа од S_n такође дејствује на X^{*n}. У случају $\mathbb{Z}_n$ ово се своди на цикличко помијерање координата.
Слично група S_n дејствује и на директном производу X^n. У општем случају, дејство симетричне групе на овим просторима није слободно.

(г) *Ако су (X,Φ) и (Y,Ψ) $G-$простори тада је и $(X*Y,\Phi*\Psi)$ $G-$простор, гдје је $G-$дејство $\Phi*\Psi$ дато са $\phi_g*\psi_g$. Џојн слободних простора је слободан.*

(д) *Свака тополошка група дејствује сама на себи лијевим множењем, $\phi_g(h)=gh$. Ако је G коначна група тада је $(n+1)-$џојн G^{*n+1} $n-$димензионалан, $(n-1)-$повезан слободан симплицијални $G-$комплекс.*[2]

Нека су X и Y неки $G-$простори. Ако постоји неко $G-$пресликавање из X у Y писаћемо $X \xrightarrow{G} Y$ или $X \leqslant_G Y$.

Дефиниција 4.3. *Нека је G коначна нетривијална група и n ненегативан цио број. Коначан $n-$димензионални симплицијални $G-$комплекс, који је $(n-1)-$повезан и слободан у односу на дејство групе G називамо E_nG* ***простором.***

Примјер 4.1 нам каже да E_nG простори постоје, а сљедећа теорема да су свака два E_nG простора, за фиксирано n, еквивалентна.

Теорема 4.5. *Ако су X и Y E_nG простори, тада је $X \xrightarrow{G} Y$.*

Предходна теорема нам омогућава да дефинишемо $G-$индекс.

Дефиниција 4.4. *Нека је X неки $G-$простор. Дефинишемо $G-$**индекс** од X као*

$$\mathrm{ind}_G(X) = \min\{n : X \xrightarrow{G} E_nG\}.$$

[2]Заправо се може показати да је хомотопски еквивалентан букету $n-$сфера.

Примједба 4.6. *Видјели смо у примјеру 4.1 да је* G^{*n+1} *примјер* E_nG *простора. У случају* $G = \mathbb{Z}_2$ *у питању је сфера* S^n.

Битне особине $G-$индекса садржане су у сљедећој теореми.

Теорема 4.7 ([Mat08])**.** *Нека је* G *нетривијална коначна група и* X *и* Y $G-$*простори. Тада вриједи:*

(*i*) $\mathrm{ind}_G(X) > \mathrm{ind}_G(Y) \Rightarrow X \overset{G}{\nrightarrow} Y$,

(*ii*) $\mathrm{ind}_G(E_nG) = n$,

(*iii*) $\mathrm{ind}_G(X * Y) \leqslant \mathrm{ind}_G(X) + \mathrm{ind}_G(y) + 1$,

(*iv*) *ако је* X $(n-1)-$*повезан, тада је* $\mathrm{ind}_G(X) \geqslant n$ *и*

(*v*) *ако је* K *слободан симплицијалан* $G-$*комплекс димензије* n *тада је* $\mathrm{ind}_G(K) \leqslant n$.

Иако не изгледа тако, најтежи дио предходне теореме за доказ је (*ii*). Он захтијева сљедећу теорему Борсук-Уламовог типа:

Теорема 4.8. *Не постоји* $G-$*пресликавање са* E_nG *простора у* $E_{n-1}G$ *простор.*

Ако узмемо $G = \mathbb{Z}_2$ и $E_nG = S^n$ претходна теорема тврди да не постоји антиподално пресликавање са S^n у S^{n-1}, што је једна од много еквивалентних формулација добро познате Борсук-Уламове теореме.

4.3 Тополошка Радонова лема и тополошка Твербергова теорема

Тополошка Радонова лема каже да не постоји непрекидно пресликавање $f : ||\sigma^{d+1}|| \to \mathbb{R}^d$ за које би вриједило: $f(\mathbf{x}_1) \neq f(\mathbf{x}_2)$ за сваке двије тачке $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \sigma^{d+1}$ такве да је $\mathrm{supp}(\mathbf{x}_1) \cap \mathrm{supp}(\mathbf{x}_2) = \emptyset$. Претпоставимо супротно. Нека је $f : ||\sigma^{d+1}|| \to \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање такво да је $f(\mathbf{x}_1) \neq f(\mathbf{x}_2)$ за сваке двије тачке $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \sigma^{d+1}$ са дисјунктним носачем. Дефинишимо пресликавање f^{*2} са

$$f^{*2}(t\mathbf{x}_1 \oplus (1-t)\mathbf{x}_2) = tf(\mathbf{x}_1) \oplus (1-t)f(\mathbf{x}_2).$$

Природан домен пресликавања f^{*2} је $||\sigma^{d+1}||^{*2}$, док је природан кодомен $(\mathbb{R}^d)^{*2}$. Међутим, ми ћемо домен ограничити на скуп $||(\sigma^{d+1})^{*2}_{\Delta}||$. Са таквим доменом, а на основу особина пресликавања f, знамо да слике припадају скупу

$$\{t\mathbf{y}_1 \oplus (1-t)\mathbf{y}_2 \in (\mathbb{R}^d)^{*2} : \mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2\} \subseteq (\mathbb{R}^d)^{*2}_{\Delta}.$$

Простори $||(\sigma^{d+1})^{*2}_{\Delta}||$ и $(\mathbb{R}^d)^{*2}_{\Delta}$ су слободни $\mathbb{Z}_2$ простори, ако за јединични хомеоморфизам узмемо пресликавање $t\mathbf{x}_1 \oplus (1-t)\mathbf{x}_2 \mapsto (1-t)\mathbf{x}_2 \oplus t\mathbf{x}_1$. Дакле за пресликавање f^{*2} вриједи

$$f^{*2} : ||(\sigma^{d+1})^{*2}_{\Delta}|| \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} (\mathbb{R}^d)^{*2}_{\Delta}.$$

За контрадикцију, а самим тим и доказ тополошке Радонове леме сада нам је довољна сљедећа лема чији доказ се може пронаћи у [Mat08].

Лема 4.9. *Нека је p прост број и d природан. Тада је*

(*i*) $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_p}((\sigma^d)^{*p}_{\Delta(2)}) = d$,

(*ii*) $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_p}((\mathbb{R}^d)^{*p}_{\Delta}) = (d+1)(p-1)-1$.

У овом поглављу, ми не само да смо доказали Тополошку Радонову лему, него смо бесплатно добили и сљедећу теорему:

Теорема 4.10. *Нека је K симплицијалан комплекс. Ако је $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(K^{*2}_{\Delta}) > d$, $||K||$ се не може реализовати у $\mathbb{R}^d$.*

Како је за доказ тополошке Твербергове теореме 4.4 потребна техника која увелико превазилази обим овога рада, ми ћемо је доказати само у специјалном случају, када је r прост број.

Теорема 4.11 (Барањи, Шлосман, Сић, [BSS81])**.** *Нека је p прост број и $d \geqslant 1$ произвољан цио број. Ставимо $N = (d+1)(p-1)$. Нека је $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада постоји p међусобно дисјунктних страна $F_1, \ldots, F_p$ од σ^N таквих да је*

$$f(||F_1||) \cap f(||F_2||) \cap \ldots \cap f(||F_p||) \neq \emptyset.$$

Доказ. Доказ се заснива на истој идеји као и доказ тополошке Радонове леме. Постојање пресликавања f које би противуријечило тврђењу би довело до постојања пресликавања

$$f^{*p} : ||(\sigma^N)^{*p}_{\Delta(2)}|| \xrightarrow{\mathbb{Z}_p} (\mathbb{R}^d)^{*p}_{\Delta}.$$

С друге стране, на основу леме 4.9, је $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_p}((\sigma^N)^{*p}_{\Delta(2)}) = N$ и $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_p}((\mathbb{R}^d)^{*p}_{\Delta}) = N-1$, што би била контрадикција. □

4.4 О броју Твербергових партиција

Нека је $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $|X| = (r-1)(d+1)+1$. Нека је $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$ партиција скупа X у непразне дисјунктне подскупове. Ако за ту партицију вриједи $\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{conv}(X_i) \neq \emptyset$ рећи ћемо да је то **Твербергова партиција.** Твербергова теорема нам гарантује постојање бар једне Твербергове партиције за скуп X, тако да је природно поставити питање колико их укупно има. У том смислу позната је Сиерксмина хипотеза која тврди да увијек постоји барем $((r-1)!)^d$ неуређених Твербергових партиција, $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$, $((r-1)(d+1)+1)-$чланог скупа X у општем положају.

Ако би се испоставило да је ова хипотеза тачна број $((r-1)!)^d$ би био најбољи могући. Наиме, ако узмемо стандардни $d-$симплекс, свако од $d+1$ тјемена замијенимо са кластером од $r-1$ тачке, и још додамо барицентар симплекса, добили смо конфигурацију која има тачно $((r-1)!)^d$ неуређених Твербергових партиција.

Изузмемо ли случај $r = 2$ који се своди на Радонову лему и $d = 1$ који је тривијалан, Сиерксмина хипотеза је још увијек отворен проблем, али су зато Вучић и Живаљевић у [VŽ93] доказали да увијек постоји бар $\dfrac{1}{(r-1)!}\left(\dfrac{r}{2}\right)^{(d+1)(r-1)/2}$ Твербергових партиција, ако је r прост број. Касније је Хел у [Hel07] проширио овај резултат на степене простих бројева.

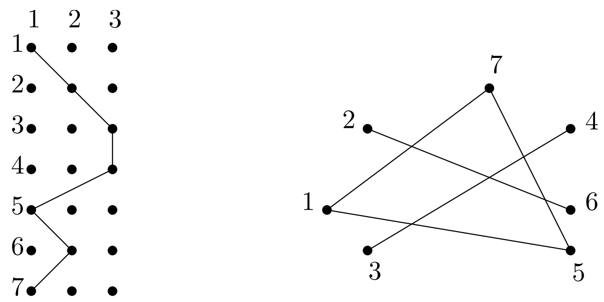
Ми ћемо овдје доказати резултат Вучића и Живаљевића за r прост број.

Теорема 4.12 (Вучић, Живаљевић, [VŽ93])**.** *Нека је p прост број и $d \geqslant 1$ произвољан цио број. Ставимо $N = (d+1)(p-1)$. Нека је $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$ непрекидно пресликавање. Тада неуређених $p-$торки $\{F_1, F_2, \ldots, F_p\}$ дисјунктних страна од σ^N таквих да је $\bigcap_{i=1}^{p} f(||F_i||) \neq \emptyset$ има барем*

$$\frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{p}{2}\right)^{(d+1)(p-1)/2}.$$

Доказ. Нека је $\mathrm{K} = (\sigma^N)^{*p}_{\Delta(2)}$. Скуп тјемена симплицијалног комплекса K је $[N+1] \times [p]$, док су максмималне стране облика $S = \{(1, i_1), (2, i_2), \ldots, (N+1, i_{N+1})\}$, при чему је $i_1, i_2, \ldots, i_{N+1} \in [p]$. Свака таква максимална страна S одређује уређену партицију $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ дисјунктних страна од σ^N, гдје је $F_i = \{j \in [N+1] : i_j = i\}$.

Други начин да видимо максималне стране од K је да их посматрамо као гране комплетног $(N+1)-$партитног хиперграфа.



Илустрација 4.1: "Добра" страна и Твербергова партиција

Зваћемо S **добром** страном, ако одређује Твербергову партицију. Ако је $f^{*p} : ||\mathrm{K}|| \xrightarrow{\mathbb{Z}_p} (\mathbb{R}^d)^{*p}$ пресликавање добијено од f на начин описан у доказу теореме 4.4, онда је S добра страна ако садржи тачку коју f^{*p} слика у дијагоналу од $(\mathbb{R}^d)^{*p}$.

Сада ћемо конструисати фамилију $\mathcal{L}$ поткомплекса L од K за које вриједи

(i) L је затворен у односу на $\mathbb{Z}_p-$дејство (цикличко помијерање колона хиперграфа) и

(ii) $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{L}) \leqslant N$.

Посљедица особина (i) и (ii) је да сваки такав L има бар једну орбиту добрих страна. Како је дејство слободно свака орбита је $p-$члана, па нам то даје p уређених Твербергових партиција.

Обиљежимо ли са Q број поткомплекса $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$ који садрже неку задату максималну страну од K, на основу предходних разматрања имамо да за број M уређених $p-$торки Твербергових партиција вриједи

$$M \geqslant p\frac{|\mathcal{L}|}{Q}.$$

Израчунајмо још бројеве $|\mathcal{L}|$ и Q.

Пошто се у случају $p = 2$ теорема своди на тополошку Радонову лему 4.3 можемо претпоставити да је p непаран прост број, па је онда

$(d+1)(p-1)$ паран. Фиксирајмо сада једну врсту хиперграфа, а остале подијелимо у $\frac{N}{2}$ парова. Нека је Π број начина на који то можемо урадити. Концентришимо се сада на један од парова које смо изабрали. Стране од K које су на ове двије врсте су гране комплетног бипартитног графа са тјеменима у овим врстама. Одаберимо из овог пара циклус C који је инваријантан у односу на $\mathbb{Z}_p$−дејство. Такав циклус је једнозначно одређен избором двије различите гране које су инцидентне са неким фиксираним тјеменом, на примјер првим из горње врсте. Остале гране које припадају траженом циклусу добијамо цикличким помијерањем одабране двије. Постоји дакле $\binom{p}{2}$ начина да одаберемо циклус C. Инваријантне циклусе $C_1, C_2, \ldots, C_{N/2}$ за сваки од парова можемо да одаберемо дакле на укупно $\binom{p}{2}^{N/2}$ начина. Максималне стране поткомплекса L који одговара оваквом избору циклуса $C_1, C_2, \ldots, C_{N/2}$ су оне максималне стране од K које садрже по једну грану из сваког од циклуса C_i. Слиједи да је

$$|\mathcal{L}| = \Pi \binom{p}{2}^{N/2}.$$

Такође, лако видимо да је

$$Q = \Pi(p-1)^{N/2}.$$

Наиме, ако је фиксирана максимална страна J и подјела на парове врста, страни од J која лежи на једном пару, довољно је додати још једну грану из горњег тјемена, па ће тако бити одређен инваријантан циклус, а самим тим и комплекс L.

Према конструкцији, очигледно је испуњен услов (i), а (ii) слиједи из чињенице да је L џојн $N/2$ циклуса и дискретног простора D_p, па је

$$||\mathrm{L}|| \cong (S_1)^{*(N/2)} * \mathrm{D}_p \cong S^{N-1} * \mathrm{D}_p,$$

одакле, на основу теореме 4.7, излази да је $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{L}) \geqslant N$, што је и тражено.

Коначно имамо да је

$$M \geqslant p \left(\frac{p}{2}\right)^{N/2}.$$

Како нама треба број неуређених Твербергових партиција, а M представља број уређених, остаје нам да горњу неједнакост подијелимо са $p!$ и добијамо управо број који нам је и требао.

□

4.5 Разнобојни Твербергов проблем

Нека је $T = T(r,k,d)$ минималан број T за који важи да за сваку колекцију "боја" $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}\}$ такву да је $|C_i| \geqslant T$ за свако $i = 1, 2, \ldots, k+1$ постоји r разнобојних скупова $A_1, A_2, \ldots, A_r$ који су међусобно дисјунктни, а њихови конвексни омотачи имају непразан пресјек, $\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{conv}(A_i) \neq \emptyset$.

Разнобојни Твербергов проблем се састоји у потврђивању постојања броја $T(r,k,d)$, као и његовом одређивању. Раде Живаљевић у [Živ04] разликује два случаја:

1. Ако је $k = d$ имамо разнобојни Твербергов проблем **типа А** и
2. ако је $k < d$ тада имамо разнобојни Твербергов проблем **типа Б.**

У случају разнобојног Тверберговог проблема типа A уобичајено је умјесто $T(r,d,d)$ писати $T(r,d)$.

Хипотеза 4.13 (Тип А)**.** *За све природне бројеве r и d вриједи*

$$T(r,d) = r.$$

Хипотеза 4.14 (Тип Б)**.** *За све природне бројеве r, k и d, $k < d$, вриједи*

$$T(r,k,d) = 2r-1.$$

Што се хипотезе 4.14 тиче, Врећица и Живаљевић су у [VŽ94] показали да је тачна када је r прост број, а касније је Живаљевић у [Živ98] проширио доказ и на случај када је r степен простог броја.

Када је у питању хипотеза 4.13, Барањи, Ларман и Ловас у [BL92] показују да је тачна у случајевима $r = 2$ и $d \leqslant 2$. Живаљевић и Врећица у [ŽV92] показују да је $T(r,d) \leqslant 4r-3$, при чему је $T(r,d) \leqslant 2r-1$, ако је r прост број, а то је резултат који ћемо и ми овдје доказати.

Теорема 4.15 (Живаљевић, Врећица, [ŽV92])**.** *За цијеле бројеве $r \geqslant 2$ и $d \geqslant 1$ постоји цио број $T = T(d,r)$ такав да за сваки избор $T-$чланих подскупова $C_1, C_2, \ldots, C_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^d$ постоје дисјунктни скпови $A_1, A_2, \ldots, A_r \subseteq \mathbb{R}^d$ за које вриједи $|A_i \cap C_j| = 1$ за све $i \in [r]$ и $j \in [d+1]$, при чему је $\bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{conv}(A_j)$ непразан.*

Сви познати докази претходне теореме су тополошки. Ми ћемо доказати сљедећу тополошку верзију разнобојне Твербергове теореме из које, на основу Бертрановог постулата, слиједи теорема 4.15 за $T = 4r-3$.

Теорема 4.16 (Живаљевић, Врећица, [ŽV92])**.** *Нека је p прост број и $d \geqslant 1$ произвољан цио број. Нека су $C_1, \dots, C_{d+1}$ дисјунктни скупови са по $2p-1$ елемената. Нека је K симплицијалан комплекс чији је скуп тјемена $C_1 \cup \ldots \cup C_{d+1}$, а симплекси су му подскупови са највише једним тјеменом из сваког од скупова C_i. Тада за свако непрекидно пресликавање $f : ||K|| \to \mathbb{R}^d$ постоји p дисјунктних страна $F_1, \dots, F_p$ од K таквих да је $f(||F_1||) \cap f(||F_2||) \cap \ldots \cap f(||F_p||) \neq \emptyset$.*

Дефиниција 4.5. ***Хиперграф*** *је пар (V, E) гдје је V скуп и $E \subseteq 2^V$ је фамилија подскупова од V. Елементе од V називамо* ***тјеменима,*** *елементе од E* ***гранама*** *хиперграфа.*

Дефиниција 4.6. *Нека је $\mathcal{F}$ фамилија скупова.* ***Кнезеров $r-$хиперграф,*** *$\mathrm{KG}_r(\mathcal{F})$ је хиперграф чија су тјемена скупови из $\mathcal{F}$ а гране су $r-$члане подфамилије дисјунктних подскупова од $\mathcal{F}$:*

$$\{\{S_1, S_2, \dots, S_r\} \subseteq \mathcal{F} : S_i \cap S_j = \emptyset, \ \text{за } 1 \leqslant i < j \leqslant r\}.$$

Право $m-$бојење хиперграфа H је пресликавање $c : V(H) \to [m]$ такво да не постоји монохроматска грана.
Хроматски број, $\chi(H)$, хиперграфа H је најмањи природан број m за који постоји право $m-$бојење.

Пошто смо усвојили терминологију са хиперграфовима вратимо се теореми 4.16 за чији је доказ кључна сљедећа теорема.

Теорема 4.17 (Саркарија)**.** *Нека је p прост број, d и n природни бројеви и нека је K симплицијални комплекс са тјеменима $1, 2, \dots, n$ такав да вриједи*

$$d \leqslant \frac{n-p}{p-1} - \chi(\mathrm{KG}_p(\mathcal{F})),$$

гдје је $\mathcal{F}$ фамилија, по инклузији, минималних скупова из $2^{[n]} \setminus K$. Тада за свако непрекидно пресликавање $f : ||K|| \to \mathbb{R}^d$ постоје тачке $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p \in ||K||$ са дисјунктним носачима такве да вриједи

$$f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2) = \ldots = f(\mathbf{x}_p).$$

Доказ теореме 4.17 се може наћи у [Mat08] а ми ћемо коначно доказати теорему 4.16

Доказ. Фамилија $\mathcal{F}$ по инклузији, минималних скупова из $2^{[n]} \setminus K$ се састоји од грана између тачака у истој класи C_i. Како p дисјунктних грана покрије $2p$ тјемена, јасно је да не могу сва та тјемена бити из исте класе. Слиједи да је бојење тачака из класе C_i бојом i, за $i = 1, 2, \ldots, d{+}1$, право $(d+1)-$бојење хиперграфа $\mathrm{KG}_p(\mathcal{F})$ одакле слиједи да је

$$\chi(\mathrm{KG}_p(\mathcal{F})) \leqslant d+1.$$

Број тјемена у симплицијалном комплексу K је

$$n = (2p-1)(d+1).$$

Сада за десну страну неједнакости у теореми 4.17 имамо да вриједи:

$$\begin{aligned} \frac{n-p}{p-1} - \chi(\mathrm{KG}_p(\mathcal{F})) &\geqslant \frac{(2p-1)(d+1)-p}{p-1} - d - 1 \\ &= \frac{dp}{p-1} \\ &> d, \end{aligned}$$

одакле слиједи тврђење. □

Скоро двије деценије након горњих резултата није било никаквог помака у рјешавању разнобојног Тверберговог проблема, када су Благојевић, Мачке и Циглер, [BMZ09], изненада доказали сљедећу теорему Тверберговог типа.

Теорема 4.18 (Благојевић, Мачке, Циглер, [BMZ09])**.** *Нека је r прост број и $d \geqslant 1$ произвољан цио број и нека је $N = (r-1)(d+1)$. Нека су $C_0, C_1 \ldots,\ C_{d+1}$ дисјунктни подскупови скупа тјемена симплекса σ^N такви да је $|C_i| = r-1$, за све $i = 0, 1, \ldots, d$ и $|C_{d+1}| = 1$. Тада за свако непрекидно пресликавање $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$ постоји r дисјунктних разнобојних страна $F_1, \ldots,\ F_r$ од σ^N таквих да је*

$$f(||F_1||) \cap f(||F_2||) \cap \ldots \cap f(||F_r||) \neq \emptyset.$$

Одбацивањем симплекса F_i који садржи тјеме из једночланог скупа C_{d+1} из горње теореме слиједи да је $T(r-1, d) = r-1$, ако је r прост број.

Оригиналан доказ теореме 4.18 у [BMZ09], заснива се на теорији опстукција. Недуго након појављивања тога резултата Врећица и Живаљевић у [VŽ11] доказују теорему 4.18 помоћу степена пресликавања. Благојевић, Мачке и Циглер у [BMZ11] такође доказују теорему

4.18 помоћу степена пресликавања, као и помоћу кохомолошког индекса. Свакако вриједан помена је и рад Матушека, Тансера и Вагнера [MTW] у ком аутори, пратећи доказе засноване на степену пресликавања, изводе геометријски доказ теореме 4.18.

Ми ћемо овдје приказати скицу доказа теореме 4.18 према [VŽ11].

Скица доказа теореме 4.18. У маниру предходних доказа у овој глави, постојање пресликавања f које би противурijечило тврђењу теореме 4.18, довело би до $\mathbb{Z}_r-$пресликавања

$$f^* : (C_0)^{*r}_{\Delta(2)} * (C_1)^{*r}_{\Delta(2)} * \ldots * (C_d)^{*r}_{\Delta(2)} * (C_{d+1})^{*r}_{\Delta(2)} \xrightarrow{\mathbb{Z}_r} (\mathbb{R}^d)^{*r}_{\Delta}$$

Даље, $(C_i)^{*r}_{\Delta(2)}$, за $i = 0, 1, \ldots, d$, је топовски комплекс $\Delta_{r,r-1}$, док је $(C_{d+1})^{*r}_{\Delta(2)} = [r] = \Delta_{r,1}$.

Нека је $W_r \subset \mathbb{R}^r$ ортогонални комплемент вектора $(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^r$. Ортогонална пројекција $p : \mathbb{R}^r \to W_r$ нам даје $\mathbb{Z}_r-$пресликавање

$$\Pi : (\mathbb{R}^d)^{*r}_{\Delta} \xrightarrow{\mathbb{Z}_r} W_r^{\oplus(d+1)},$$

$$\Pi(\bigoplus_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{x}_i) = (p(\lambda_1, \ldots, \lambda_r), p(\lambda_1 \mathbf{x}_{11}, \ldots, \lambda_r \mathbf{x}_{r1}), \ldots, p(\lambda_1 \mathbf{x}_{1d}, \ldots, \lambda_r \mathbf{x}_{rd})).$$

Због чињенице да Π иде из $(\mathbb{R}^d)^{*r}_{\Delta}$, $\mathbf{0}$ није у кодомену, композицијом Π и радијалне пројекције можемо добити $\mathbb{Z}_r-$пресликавање из $(\mathbb{R}^d)^{*r}_{\Delta}$ у сферу $S(W_r^{\oplus(d+1)})$.

Комбинујући, добили смо $\mathbb{Z}_r-$пресликавање

$$\tilde{f} : (\Delta_{r,r-1})^{*(d+1)} * \Delta_{r,1} \xrightarrow{\mathbb{Z}_r} S(W_r^{\oplus(d+1)}).$$

Сада ћемо се ограничити на рестрикцију $h = \tilde{f}\mid_{(\Delta_{r,r-1})^{*(d+1)}}$, јер су простори $(\Delta_{r,r-1})^{*(d+1)}$ и $S(W_r^{\oplus(d+1)})$. исте димензије. Како је $\Delta_{r,r-1}$ повезана, оријентабилна псеудомногострукост ([BLVŽ94]), а онда то вриједи и за $(\Delta_{r,r-1})^{*(d+1)}$, можемо причати о степену пресликавања h.

Сљедећа лема гарантује да свака два $\mathbb{Z}_r$ пресликавања имају исти степен по модулу r.

Лема 4.19. *Нека је M триангулабилна, компактна, оријентабилна, $n-$димензионална псеудомногострукост. Нека је G коначна група која* *дејствује слободно и симплицијално на M и нека је $S(W)$ $G-$инваријантна сфера у реалној, $(n+1)-$димензионалној $G-$репрезентацији W. Претпоставимо да M и $S(W)$ имају исти оријентацијски карактер, то јесте, сваки елемент из G или задржава оријентацију и на M и на $S(W)$ или је истовремено мијења. Тада за свака два $G-$пресликавања $f, g : M \to S(W)$ вриједи*

$$\deg(f) \equiv \deg(g) \pmod{|G|}.$$

Дефинишимо сада пресликавање

$$\xi_{m,k} : \Delta_{m,k} \to (\sigma^{m-1})^{\leqslant k-1},$$

са

$$\xi_{m,k} : \{(i_1, j_1), \dots, (i_p, j_p)\} \mapsto \{i_1, \dots, i_p\}.$$

Може се доказати да за $m = r$ и $k = r-1$ вриједи

$$\deg(\xi_{r,r-1}) = (-1)^{r+1}(r-1)!$$

Из $S(W_r) \cong (\sigma^{r-1})^{\leqslant r-2}$ слиједи да је

$$S(W_r^{\oplus(d+1)}) \cong S(W_r)^{*(d+1)} \cong ((\sigma^{r-1})^{\leqslant r-2})^{*(d+1)},$$

па је са

$$\xi = (\xi_{r,r-1})^{*(d+1)}$$

дефинисано једно $\mathbb{Z}_r-$пресликавање из $(\Delta_{r,r-1})^{*(d+1)}$ у $S(W_r^{\oplus(d+1)})$ за које вриједи

$$\deg(\xi) = ((r-1)!)^{d+1} \equiv (-1)^{d+1} \pmod{r}.$$

На основу леме 4.19 вриједи и $\deg(h) \equiv (-1)^{d+1} \pmod{r}$, док би, на основу тога што је h рестрикција $\mathbb{Z}_r-$пресликавања $\tilde{f}$, требало да вриједи $\deg(h) = 0$. Контрадикција и крај доказа. □

Аутори [VŽ11] су отишли и корак даље доказавши сљедећу теорему.

Теорема 4.20 (Врећица, Живаљевић, [VŽ11]). *Нека је r прост број и X неки $(\nu-1)-$повезан, слободан симплицијалан $\mathbb{Z}_r-$комплекс. Нека је W_r стандардна $(r-1)-$димензионална репрезентација од $\mathbb{Z}_r$ и V произвољна репрезентација без фиксних тачака димензије не веће од ν. Тада не постоји $\mathbb{Z}_r-$пресликавање*

$$f : (\Delta_{r,r-1})^{*l} * X \to S(W_r^{\oplus l} \oplus V).$$

Како је из [BLVŽ94] познато да је топовски комплекс $\Delta_{s,t}$ $(\nu - 1)-$повезан, за $\nu = \min\{s, t, \lfloor (s+t+1)/3 \rfloor\}$, теорема 4.20 добро служи за доказивање непостојања $\mathbb{Z}_r-$пресликавања облика

$$f : (\Delta_{r,r-1})^{*l} * \Delta_{r,s_1} * \ldots * \Delta_{r,s_k} \to S(W_r^{\oplus(d+1)}),$$

за погодно одабране параметре $s_1, \ldots, s_k$ и l. Поред теореме 4.18 као посљедицу теореме 4.20 аутори између осталог наводе и сљедећу теорему која се тиче разнобојног Твербергововог проблема.

Теорема 4.21 (Врећица, Живаљевић, [VŽ11]). *Нека је r прост број и $d \geqslant 1$ произвољан цио број. Нека су $C_1, C_2 \ldots,\ C_{d+1}$ дисјунктни скупови такви да је $|C_{d+1}| = 2r - 1$ и $|C_i| = r - 1$, за $i = 1, 2, \ldots, d$. Тада постоји r дисјунктних скупова $A_1, A_2, \ldots, A_r \subset \bigcup_{i=1}^{d+1} C_i$, $A_i \cap C_j \leqslant 1$, за које вриједи*

$$\mathrm{conv}(A_1) \cap \mathrm{conv}(A_2) \cap \ldots \cap \mathrm{conv}(A_r) \neq \emptyset.$$

Референце

[Bár82] I. Bárány. A Generalization of Carathéodory's Theorem. *Discrete Mathematics*, 40:141–152, 1982.

[BB79] E. G. Bajmóczy and I. Bárány. A Common Generalization of Borsuk's and Radon's Theorem. *Acta Math. Hungarica*, 34:347–350, 1979.

[Bir59] B. J. Birch. On 3N Points in a Plane. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 55:289–293, 1959.

[Bjö95] A. Björner. Topological Methods. In R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, editors, *Handbook of Combinatorics*, volume 2, chapter 34, pages 1819–1872. North-Holland, Amsterdam, 1995.

[BK63] W. Bonnice and V. L. Klee. The Generation of Convex Hulls. *Math. Ann.*, 162(1):1–29, 1963.

[BL92] I. Bárány and D. G. Larman. A Colored Version of Tverberg's Theorem. *Journal London Math. Soc.*, 45(2):314–320, 1992.

[BLVŽ94] A. Björner, L. Lovász, S. T. Vrećica, and R. T. Živaljević. Chessboard Complexes and Matching Complexes. *Journal London Math. Soc.*, 49(1):25–39, 1994.

[BM07] I. Bárány and J. Matoušek. Quadratically Many Colorful Simplices. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 21(1):191–198, 2007.

[BMZ09] P. V. M. Blagojević, B. Matschke, and G. M. Ziegler. Optimal Bounds for the Colored Tverberg Problem. http://arxiv.org/abs/0910.4987, 2009.

[BMZ11] P. V. M. Blagojević, B. Matschke, and G. M. Ziegler. Optimal Bounds for a Colorful Tverberg-Vrećica type Problem. *Advances in Math.*, 226(6):5198–5215, 2011.

[BO97] I. Bárány and S. Onn. Carathéodory's Theorem, Colorful and Applicable. In I. Bárány and K. Böröczky, editors, *Intuitive Geometry*, volume 6 of *Bolyai Society Mathematical Studies*, pages 11–22. Budapest, 1997.

[BSS81] I. Bárány, S. B. Shlosman, and A. Szücs. On a Topological Generalization of a Theorem of Tverberg. *Journal London Math. Soc.*, 23(2):158–164, 1981.

[Car07] C. Caratheodory. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annahmen. *Math. Ann.*, 64:95–115, 1907.

[DGK63] L. Danzer, B. Grünbaum, and V. Klee. Helly's Theorem and its Relatives. In V. Klee, editor, *Convexity*, volume 7 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 101–180. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963.

[DHST06] A. Deza, S. Huang, T. Stephen, and T. Terlaky. Colorful Simplicial Depth. *Discrete Comput. Geom.*, 35(4):597–604, 2006.

[dL04] M. de Longueville. 25 Years Proof of the Kneser Conjecture. *EMS-Newsletter*, 53:16–19, 2004.

[Hel23] E. Helly. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkte. *Jahr. der Deutschen Math. Verein.*, 32:175–176, 1923.

[Hel07] S. Hell. On the Number of Tverberg Partitions in the Prime Power Case. *Europ. J. of Comb.*, 28:347–355, 2007.

[Jun01] H. Jung. Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst. *Journal für die reine und angewantde Mathematik*, 123:241–257, 1901.

[Kal95] G. Kalai. Combinatorics and Convexity. In *Procedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich, Switzerland, 1994.*, pages 1363–1374. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[Kal01] G. Kalai. Combinatorics with a Geometric Flavor: Some Examples. In *Visions in Mathematics Toward 2000.(GAFA, special volume)*, pages 742–792. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[Kir03] P. Kirchberger. Über Tschebyschefsche Annäherungsmethoden. *Math. Ann.*, 57:509–540, 1903.

[KL79] M. Katchalski and A. Liu. A Problem of Geometry in $\mathbb{R}^n$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 75(2):284–288, 1979.

[Kra46] M. A. Krasnosselsky. Sur un critère pour qu'un domaine soit etoilé. *Mat. Sb. (N. S.)*, 19(61):309–310, 1946.

[Mat99] J. Matoušek. *Piercing and Selection Theorems in Convexity*. Lecture notes, Charles University, Prague, 1999.

[Mat02] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*, volume 212 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New Jork, 2002.

[Mat06] S. V. Matveev. *Lectures on Algebraic Topology*. EMS, 2006.

[Mat08] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2nd edition, 2008.

[MTW] J. Matoušek, M. Tancer, and U. Wagner. A Geometric Proof of the Colored Tverberg Theorem. *Disrete and Comput. Geom.* To appear.

[Mun84] J. R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1984.

[Rad21] J. Radon. Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. *Math. Ann.*, 83:113–115, 1921.

[Rea65] J. R. Reay. A New Proof of the Bonnice-Klee Theorem. *Proc. of Amer. Math. Soc.*, 16(4):585–587, 1965.

[Sar92] K. S. Sarkaria. Tverberg's Theorem via Number Fields. *Israel Journal of Mathematics*, 79:317–320, 1992.

[Sar00] K. S. Sarkaria. Tverberg Partitions and Borsuk-Ulam Theorems. *Pacific Journal of Mathematics*, 196:231–241, 2000.

[ST08] T. Stephen and H. Thomas. A Quadratically Lower Bound for Colorful Simplicial Depth. *Journal of Combinatorial Optimization*, 16(4):324–327, 2008.

[Ste13] E. Steinitz. Bedingt konvergente Reichen und konvexe Systeme. *Journal für die reine und angewantde Mathematik*, 143:128–175, 1913.

[Ste14] E. Steinitz. Bedingt konvergente Reichen und konvexe Systeme (Fortsetzung). *Journal für die reine und angewantde Mathematik*, 144:1–40, 1914.

[Ste16] E. Steinitz. Bedingt konvergente Reichen und konvexe Systeme (Schluß). *Journal für die reine und angewantde Mathematik*, 146:1–52, 1916.

[TV93] H. Tverberg and S. Vrećica. On Generalizations of Radon's Theorem and the Ham Sandwich Theorem. *Europ. J. Combinatorics*, 14:259–264, 1993.

[Tve66] H. Tverberg. A Generalization of Radon's Theorem. *Journal London Math. Soc.*, 41:123–128, 1966.

[Tve81] H. Tverberg. A Generalization of Radon's Theorem II. *Bull Austral. Math. Soc.*, 24:321–325, 1981.

[Vol96] A. Yu. Volovikov. On a Topological Generalization of the Tverberg Theorem. *Math. Notes*, 59(3):324–326, 1996.

[Vre93] S. Vrećica. *Konveksna analiza.* Matematički fakultet, Beograd, 1993.

[VŽ93] A. Vučić and R. T. Živaljević. Note on a Conjecture of Sierksma. *Dicrete Comput. Geom.*, 9:339–349, 1993.

[VŽ94] S. Vrećica and R. T. Živaljević. New Cases of the Colored Tverberg Problem. In H. Barcelo and G. Kalai, editors, *Jerusalem Combinatorics '93*, volume 178 of *Contep. Math.*, pages 325–334. Amer. Math. Soc., Providence, 1994.

[VŽ11] S. Vrećica and R. T. Živaljević. Chessboard Complexes indomitable. *Journal of Comb. Theory, Ser. A*, 118(7):2157–2166, 2011.

[Wen04] R. Wenger. Helly-Type Theorems and Geometric Transversals. In J. E. Goodman and J. O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 4, pages 73–96. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2nd edition, 2004.

[Zie95] G. M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, volume 152 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New Jork, 1995.

[Zie11] G. M. Ziegler. 3N Colored Points in a Plane. *Notices of the AMS*, 58(4):550–557, 2011.

[Živ96] R. T. Živaljević. User's Guide to Equivariant Methods in Combinatorics. *Publications de l'Institut Mathematique*, 59(73):114–130, 1996.

[Živ98] R. T. Živaljević. User's Guide to Equivariant Methods in Combinatorics II. *Publications de l'Institut Mathematique*, 64(78):107–132, 1998.

[Živ04] R. T. Živaljević. Topological Methods. In J. E. Goodman and J. O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 14, pages 305–330. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2nd edition, 2004.

[ŽV92] R. T. Živaljević and S. Vrećica. The Colored Tverberg Problem and Complexes of Injective Functions. *Journal of Comb. Theory, Ser. A*, 61:309–318, 1992.