UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Master rad

Tema: **KVADRATURA KRUGA**

Student: Tamara Stoisavljević

Mentor: prof. dr. Zoran Lučić

Beograd, 2011. godina

Sadržaj

Predgovor

U master radu Kvadratura kruga reč je o matematičkom problemu koji vekovima budi pažnju i interesovanje. Naime, postavlja se pitanje da li je moguće konstruisati kvadrat iste površine kao i zadati krug. U periodu antičke Grčke, stari Grci su umeli da izračunaju površine raznih geometrijskih ravnih likova, izražavajući ih preko površine kvadrata, pa se prirodno nametalo i pitanje može li se i površina kruga izraziti na isti način.

U prvom poglavlju problem kvadrature kruga opisan je matematičkim aparatom, pri čemu se prvobitna fomulacija zadatka transformiše u problem konstrukcije kvadratnog korena broja π, samo uz pomoć šestara i lenjira. Stari Grci su znali da konstuišu kvadratni koren nekog broja, ali nisu ispeli da na pomenuti klasičan način konstruišu broj π, zbog transcedentne prirode ovog broja. Konstrukcija kvadratnog korena za osnovu ima teoriju geometrijske algebre II knjige Euklidovih *Elemenata*. Posebno treba istaći XIV stav kojom Euklid završava II knjigu i koji se odnosi na konstrukciju kvadrata jednake površine kao zadata poligonska površ (u radu je to pravougaonik).

U drugom poglavlju opisani su prvi pokušaji rešavanja problema kvadrature kruga. Prvo je opisan problem br. 48 staro-egipatskog Rindovog papirusa iz XVIII veka stare ere. Zatim su objašnjene neke od ideja starih Grka (Anaksagore, Antifona i Brisona) iz kojih se u kasnijim vekovima izrodio i infitezimalni račun. Veći deo drugog poglavlja posvećen je kvadraturi Hipokratovih lunula (meseca) zbog njegovog doprinosa kvadraturi krivolinijskih likova. Zanimljivo je što se kroz objašnjenja kvadrature pojedinih vrsta Hipokratovih lunula vidi i nivo geometrijskog znanja koji su Stari Grci dosegli.

U trećem poglavlju objašnjeni su pokušaji rešavanja problema kvadrature kruga uz pomoć krivih: Hipijine kvadratrise i Arhimedove spirale. Značajan deo ovog poglavlja posvećen je Arhimedu i njegovom delu. Osim biografskih podataka i najvažnijih dela i otkrića, navedene su i dokazane tri teoreme iz njegovog dela *Merenje kruga*, kao i teoreme koje su osnova za rešavanje problema kvadrature kruga korišćenjem Arhimedove spirale, koja je našla veliku primenu u nauci i tehnici.

U četvrtom poglavlju navedena su osnovna svojstva broja π i neke od mnogobrojnih matematičkih formula za njegovu aproksimaciju.

Poslednje poglavlje ovog rada upućuje čitaoca u algebarsku osnovu rešivosti problema kvadrature kruga. Nakon uvodnog dela o polinomima i algebarskim jednačinama, navedena je i dokazana Vajerštras-Lindemanova teorema, iz koje direktno sledi transcedentnost broja π. Na kraju ovog poglavlja i rada, pokazuje se da broj π nije konstruktabilan, što navodi na zaključak da problem kvadrature kruga nije rešiv uz pomoć šestara i lenjira.

Još mnogo toga bi se moglo reći o problemu kvadrature kruga, kao što su i razne zanimljivosti koje se odnose na ovaj problem i mnogobrojni pokušaji njegovog rešavanja.

Za tehničku izradu rada korišćeni su programi MikTex i WinGCLC.

Zahvaljujem se na podršci svojoj porodici i profesoru Lučiću i nadam se da će moj rad biti dobar i sistematičan izvor informacija onima koje ova tema interesuje i koji žele dalje i sveobuhvatnije da je proučavaju.

Matematički fakultet
Beograd, 2011. godina

Tamara Stoisavljević

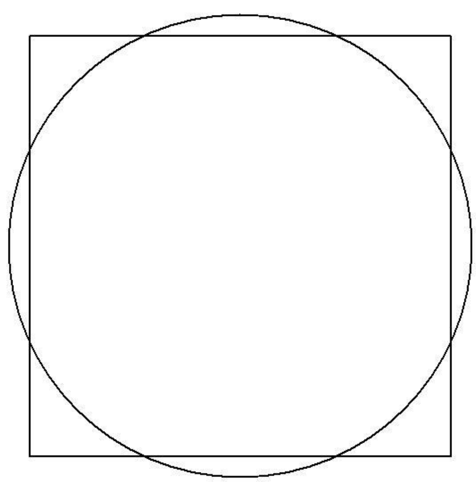
Glava 1

KVADRATURA KRUGA

1.1 Osnovno o kvadraturi kruga

Kvadratura kruga je matematički problema, čija formulacija glasi: „Konstruisati kvadrat čija je površina jednaka površini datog kruga” . Problem kvadrature kruga, trisekcije ugla i udvostručenja kocke se u literaturi često opisuju kao tri najpoznatija problema antičke Grčke. Trisekcija ugla je podela ugla na tri jednaka dela, a udvostručenje kocke se odnosi na izračunavanje stranice kocke koja bi imala dva puta veću zapreminu od unapred zadate kocke.

Kvadraturu kruga su vekovima rešavali matematičari, naučnici i mnogobrojni amateri i ljubitelji matematike. Pretpostavlja se da je utrošeno više napora da se reši problem kvadrature kruga, nego da se čovek pošalje na Mesec.



Slika 1.1: Kvadratura kruga

U geometriji kvadratura se koristi kao sinonim za izračunavanje površine, koja je za antičke Grke bila veoma važna. U helensko doba izračunavanje površine izvodilo se predstavljanjem površine geometrijske figure preko površine kvadrata. Grci su znali da izračunaju površinu trougla, pravougaonika, svakog mnogougla, kao i geometrijskog tela koje je sastavljeno od više ravnih geometrijskih figura. Oni su umeli da izračunaju površinu i nekih figura sa krivim linijama, ali nikad nisu uspeli da samo pomoću šestara i lenjira konstruišu kvadrat iste površine kao i krug. Konstrukcije pomoću šestara i lenjira podrazumevaju konstrukcije samo pravih i krugova. Koristeći savremen matematički aparat problem kvadrature kruga bi se sveo na konstrukciju kvadratnog korena broja π, što je i pokazano u narednom tekstu. Kako je površina datog kruga, poluprečnika r, jednaka

$$P = r^2\pi,$$

a povšina kvadrata stranice a

$$P = a^2,$$

izjednačavanjem površina dobija se

$$r^2\pi = a^2.$$

Nakon korenovanja je:

$$a = r\sqrt{\pi}.$$

Ako se pojednostavi problem i stavi da je $r = 1$ dobija se

$$a = \sqrt{\pi}.$$

Zaključak je da stranica kvadrata čija je površina jednaka površini jediničnog kruga iznosi

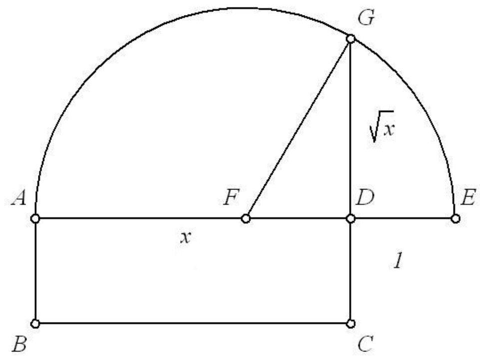
$$a = \sqrt{\pi}.$$

Stari Grci su znali da geometrijski odrede kvadratni koren broja, što je u narednom tekstu i objašnjeno, pa se problem kvadrature kruga svodi na geometrijsku konstrukciju broja π. Navedena konstrukcija nije moguća samo uz pomoć šestara i lenjira, što će kasnije u radu i biti dokazano.

U svakodnevnom životu kvadratura kruga je sinonim za nerešiv problem. Na primer, izraz „Rešio si kvadraturu kruga” se često koristi da se opovrgne nečije uverenje da je našao jednostavno rešenje komplikovanog problema.

1.2 Kvadratni koren i kvadratura pravolinijskih slika

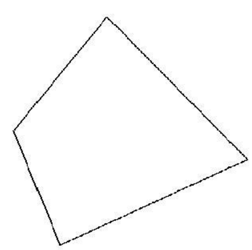
Geometrijsko određivanje kvadrtanog korena broja



Slika 1.2: Konstrukcija kvadratnog korena broja

Da bi se odredio kvadrtni koren nekog broja x, prvo se konstruiše pravougaonik $ABCD$ sa stranicama x i 1, tj. pravougaonik površine x. Nad zbirom ivica ovog pravougaonika, tj. nad duži AE, konstruiše se polukrug, sa centrom u tački F. Presek prave DC i polukruga je tačka G. Na osnovu stava II.5 Euklidovih *Elemenata* [6], zbir površina pravougaonika $ABCD$ i kvadrata stranice FD jednak je površini kvadrata stranice FE. Kako na osnovu Pitagorine teoreme u pravouglom trouglu DGF važi jednakost: $FG^2 = FD^2 + DG^2$, i kako je $FE = FG$, zaključuje se da je duž DG ivica kvadrata površine x, tj. $GD = \sqrt{x}$.

Kvadratura pravolinijskih slika



Slika 1.3: Pravolinijska slika

U poslednjem, XIV druge knjige *Elemenata*, Euklid[1] konstruiše kvadrat jednak pravolinijskoj slici, tako što prvo konstruiše pravougaonik $ABCD$ iste površine kao pravolinijska slika, pri čemu oslanja na stav I.45, takođe iz *Elemenata*, a zatim na gore objašnjen način konstriuše kvadrat jednake površine kao i pravougaonik.

[1]Euklid je napisao *Elemente* oko 300. godine stare ere, koje se sastoji iz 13 knjiga i smatra se da predstavljaja najsavršenije matematičko delo ikad napisano.

Glava 2

DREVNE KVADRATURE

2.1 Rindov papirus

Rindov papirus je kolekcija do tada poznatih matematičkih znanja iz perioda Starog Egipta. Aleksandar Henri Rind, škotski antikvar, pronašao je pomenuti rukopis 1858. godine u Luksoru, u Egiptu. Smatra se da potiče iz 1750. godine stare ere. Rindov papirus čuva se u Britanskom muzeju, a nekoliko malih fragmenata u Bruklinskom muzeju u Njujorku. Osim Rindovog postoji i Moskovski papirus[1], koji je i stariji oko 100 godina od Rindovog, ali je Rindov obimniji.

Slika 2.1: Rindov papirus-fragment, Britanski muzej, London

Rindov papirus naziva se još i Ahmesov papirus, po egipatskom svešteniku Ahmesu, koji je po ugledu na neki još stariji rukopis, sakupio uglavnom sva poznata dotadašnja znanja iz geometrije i aritmetike. Papirus sadrži ukupno 87 zadataka, od kojih je 80 zada-

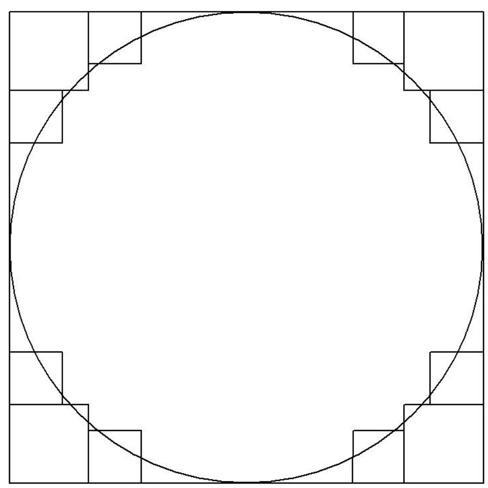
[1]Prema Moskovskom papirusu [14], Egipćani su znali obrasce za površinu pravougaonika, za površinu trougla, za zapreminu pravilne i zarubljene četvorostrane piramide.

taka iz algebre, svaki sa sopstvenim rešenjem. Većina zadataka vezana je za svakodnevni život. Rindov papirus, širine 33 cm i dužine 5 m, pisan je hijeretskim pismom.

U spomenutim zadacima nalaze se i sledeća saznanja koja su u bliskoj vezi sa temom kvadrature kruga:

1. Broj π je aproksimiran sa 256/81 ($\pi = \frac{256}{81} \approx 3.1605$).
2. Površina kruga se izračunava po formuli: $P = \frac{64}{81}d^2$ (d je prečnik kruga).
3. Ako se prečnik kruga umanji za 1/9, dobija se stranica kvadrata približno iste površine kao zadati krug.

Problem broj 48 opisan u Rindovom papirusu, odnosi se na izračunavanje približne vrednosti broja π, metodom sukcesivnog smanjivanja površine kvadrata. Moguća rekonstrukcija problema bi imala sledeći oblik [10, str. 11].



Slika 2.2: Sukcesivno smanjivanje površine kvadrata

1. Pretpostavi se da je približna vrednost P_o površine kruga prečnika d, jednaka površini kvadrata koji je opisan oko tog kruga, tada je $P_o = d^2$, pa je približna vrednost broja π jednaka 4.
2. Ako površinu kvadrata umanjimo za četiri kvadrata A_1 kojima su stranice $d/6$, tada će približna vrednost površine kruga biti:

$$P_o = d^2 - 4\left(\frac{d}{6}\right)^2 = \frac{8}{9}d^2.$$

Odavde sledi da je približna vrednost broja π jednaka 3.555.

3. Ako novodobijenu površinu umanjimo za osam kvadrta A_2 kojima su stranice $d/9$, tada će približna vrednost površine kruga biti:

$$P_o = \frac{8}{9}d^2 - 8\left(\frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2,$$

pa sada nova aproksimacija za π iznosi:

$$4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3.1605.$$

U to vreme, u Mesopotamiji, u kojoj je aritmetika bilo razvijenija nego u Egiptu, za broj π se koristila aproksimacija $25/8 = 3.125$, po čemu se zaključuje da je rezultat Egipćana posebno dobar. Za razliku od prethodnih aproksimacija, Kinezi i Jevreji su koristili lošiju preocnu: $\pi \approx 3$. Broj 3 za Jevreje je bio sveti broj, utemeljen u Starom zavetu.

2.2 Anaksagora — bogohulni filozof

Slika 2.3: *Anaksagora*, autori: Eduard Lebiedzki, Carl Rahl, 1888.

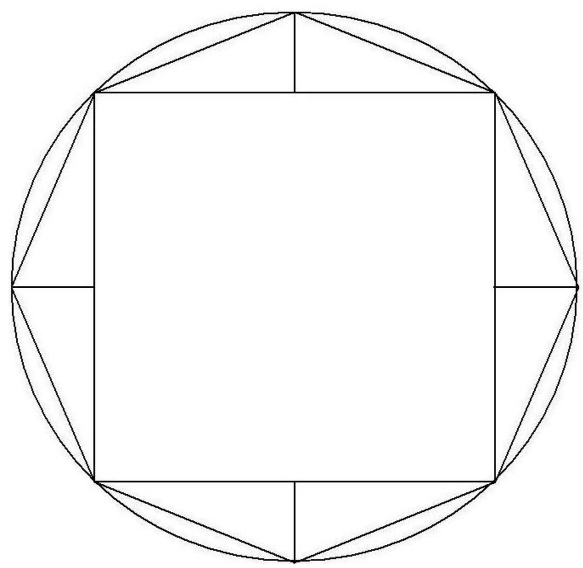
Anaksagora (500 – 428. godine stare ere) iz Klazomene (Mala Azija) bio je prvi Grk, za koga se zna da se bavio problematikom kvadrature kruga. U Atini, centru grčke kulture, proveo je 30 godina. Anaksagora se smatra osnivačem atinske filozofske škole, bio je veoma uticajan kao astronom i matematičar, ali i zbog svog asketskog načina života i ljubavi prema prirodi. On je posmatranjem nebeskih tela došao do novih teorija o poretku u svemiru, što ga je dovelo do sukoba s narodnom verom. Anaksagora je uhapšen zbog protivljenja religijskim dogmama i upravo se u zatvoru bavio kvadraturom kruga.

Na to ukazuje Plutarh[2] [11, vol. III, str. 35]. Zahvaljujući Periklovom uticaju i moći, Anaksagora je izašao na slobodu, ali je bio primoran da napusti Atinu i da se povuče u Lampsak, gde je i umro i sahranjen uz sve počasti i poštovanja.

2.3 Antifon iz Atine

Antifon iz Atine (V vek stare ere) bio je sofista i Sokratov savremenik. Od četiri teksta čiji je on autor sačuvana su samo dva: *Istina* i *O složenosti*. Kao i svaki sofista Antifon se bavio gnoseologijom, teorijom kulture, etikom i politikom, ali i kosmologijom, fizikom i matematikom. On je razmatrao i problem kvadrature kruga i u tom kontekstu ga pominje Aristofan[3] delu *Ptice*: „Tada uzmem lenjir i šestar i izmerim, i krug se u kvadrat pretvorio." . O njegovom pristupu navedenoj problematici dali su tumačenja Simplikije[4] i Temistije[5], u komentarima Aristotelove *Fizike*[7, str. 291].

Antifonova ideja je da se u zadati krug upisuju pravilni mnogougli, u svakom narednom upisivanju sa duplo većim brojem stranica. Prema Temistiju taj poligon bi bio jednakostraničan trougao, a prema Simplikiju kvadrat. Kao autentična verzija smatra se trougao, ali se u literaturi opisuje metod sa polazno upisanim kvadratom.



Slika 2.4: Antifonov metod

[2]Plutarh je bio svestrano obrazovan pisac. Rođen je oko 46. godine nove ere , u Heroneji u Beotiji, a umro je 120. godine. U njegovim delima sačuvano je dosta materijala za istoriju antičke nauke i filozofije.

[3]Aristofan (448 – 385. stare ere) je bio starogrčki pisac komedija.

[4]Simplikije je jedan od poslednjih neoplatoničara. Živeo je u VI veku nove ere. Pisao je komentare starijih geometričara i filozofa u kojima su sačuvani njihovi citati. Najpoznatiji su komentari Aristotelove *Fizike*.

[5]Temistije je najuticajniji grčki sofista IV veka nove ere.

Nakon upisivanja kvadrata u zadati krug, nad njegovim stranicama se konstruišu jednakokraki trouglovi. Teme svakog trougla naspram osnovne ivice tj. stranice kvadrata, leži na kružnici. Temena kvadrata i navedena temena trougla (osam ukupno) su temena pravilnog osmougla upisanog u krug. Isti postupak se ponavlja, pa se dobija pravilni šesnaestougao upisan u krug. Svaki naredni put se broj ivica udvostručuje, obim i površina mnogougla su sve bliži obimu i površini kruga, i jednom bi se konačno mnogougao i krug podudarili. Kako Antifon zna da konstriše kvadrat iste površine kao i zadati mnogougao, iz jednakosti površina kruga i mnogougla sledi i jednakost površina kruga i kvadrata.

Primedbe na Antifonovu ideju daje Aleksandar[6] iz Afrodizije komentarom da krug može dodirnuti pravu samo u jednoj tački, kao i Eudem[7] koji napominje da je duž neograničeno deljiva. Ipak Antifonova ideja je začetak antičke teorije mere koja je u Novom veku nazvana *ekshaustija*, a temelji se na V knjizi Elemenata i principu indirektnog dokaza. Teoriju mere razvio je Eudoks[8], a Euklid ju je izložio u XII knjizi *Elemenata*. Posle Antifona sličnu ideju upisivanaja pravilnih mnogouglova u krug koristili su i Brison i Arhimed.

2.4 Brisonov metod

Brison (kasni V vek stare ere) iz Heraklije je bio drevni grčki matematičar i sofista koji je dao doprinos rešavanju problema kvadrature kruga i izračunavanju broja π. O Brisonovom životu malo se zna. On je verovatno bio Sokratov učenik, a Aristotel[9] ga spominje kritikujući njegovu metodu koja se odnosi na problem kvadrture kruga [7, vol I, str. 223].

Brison, zajedno sa savremenikom Antifonom, bio je prvi koji je došao na ideju da upiše poligon u krug, zatim udvostruči broj stranica poligona, i ponovi proces, dobijajući kao rezultat donju granicu aproksimacije površine kruga. „Ranije ili kasnije” , navode oni, „dobiće se toliko stranica poligona, tako da će poligon postati krug.” [3, str. 16]. Brison je kasnije ponovio istu proceduru sa poligonima opisanim oko kružnice, dobijajući gornju granicu aproksimacije površine kruga. Sa ovim proračunima Brison je mogao da aproksimira broj π, i čak postavi donje i gornje granice vrednosti ovog broja. Ali zbog kompleksnosti metode aproksimirao je π na pet decimala. Sličan metod koristio je kasnije i Arhimed da približno izračuna π.

[6] Aleksandar iz Afrodizije u Kariji, bio je savremenik cara Septimije Severa (193 – 211). U svoje vreme bio je najznačajniji komentator Aristotelovih dela.

[7] Eudem sa ostrva Rodos, bio je jedan od najznačajnijih Aristotelovih učenika. On je sastavio poznatu *Istoriju geometrije*, najverovatnije 334. godine stare ere i pisao je komentare Aristotelove *Fizike*.

[8] Eudoks Knidanin (408 – 355. stare ere), bio je astronom, geometar, lekar i zakonodavac. Razvio je metodu pristupa problemu granične vrednosti niza - teoriju *ekshaustije*. Smatra se da V i XII knjiga Euklidovih *Elemenata* sadrže Eudoksove matematičke rezultate.

[9] Aristotel (384 – 322. stare ere), Platonov učenik, imao je veliki uticaj na filozofiju zapadne tradicije. On se bavio i matematikom, o čemu svedoči i njegovo delo *Prva analitika*.

2.5 Kvadriranje lunula

Hipokrat sa Hiosa - život i delo

Hipokrat (470 – 410. stare ere) je grčki matematičar iz vremena pre Euklida. Pretpostavlja se da on potiče sa Hiosa, gde je i proveo veći deo života. Hipokrat je tvorac mnogih geometrijskih otkrića i posebno se isticao na polju konstrukcija. O njemu je pisao i Proklo, koji mu pripisuje otkriće metode za izračunavanje površine lunule. Proklo Diadoh (410 – 485) bio je upravnik neoplatonske škole u Atini. Napisao je komentare prve knjige Euklidovih *Elemenata* koji i danas služe kao važan izvor znanja istorije geometrije iz preeuklidskog vremena.

Po svemu sudeći Hipokrat je u Atini boravio između 450. i 430. godine stare ere zbog parnice u vezi nekog trgovačkog posla (prema nekim izvorima na jednom od njegovih trgovačkih putovanja orobili su ga gusari). U tom periodu on se družio sa filozofima, veoma se interesovao za geometriju i stekao takav stepen znanja da je pokušao da reši problem kvadratre kruga [7, vol. I, str. 183]. Pri tim pokušajima rešio je problem kvadrture lunule i time pokazao da „krivolnijski lik" može biti jednak „pravolinijskom".

Hipokrat je poznat i po prvom pokušaju da se geometrijska znanja sistematski izlože u deduktivnoj formi. Prema Eudemu Hipokrat je sastavio prve *Elemente* i time započeo dugu istoriju zasnivanje geometrije kao deduktivne teorije. Njegove stavove Euklid je kasnije uključio u I, III i VI knjigu svojih *Elemenata*. Između ostalog tvrdi se da od Hipokrata potiče „hvaljena grčka strogost" u geometriji.

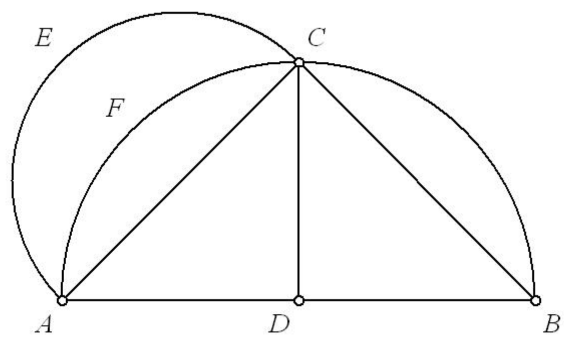
2.5.1 Hipokratove lunule 1

Prvi podaci o Hipokratovim lunulama dolaze od Aleksandra iz Afrodizije u Kariji. On je bio savremenik cara Septimije Severa (193 – 211) i u to doba najznačajniji komentator Aristotelovih dela: *Prve analitike*, *Topike*, *Meteorologije*, *O čulima* i *Metafizike*. Neki njegovi komentari su sačuvani, a od značaja su i njegova samostalna dela, spisi: *O duši* i *O sudbini*. Aleksandar je težio da razume originalno Aristotelovo mišljenje i pred kraj drugog veka postao je upravnik Likeja, Aristotelove škole u Atini. Zahvaljujući Aleksandru sačuvano je od zaborava Hipokratovo rešenje problema kvadrature lunula. On je dao interpretaciju kvadrature lunula u dva slučaja. U Simplikijevim komentarima Aristotelove *Fizike* zapisani su Aleksandrovi citati [7, vol. I, str.185], kao i segmenti Eudemove *Istorije geometrije* o Hipokratovim lunulama [5, vol. I, str. 346].

I slučaj

Neka je AB prečnik kruga kojem je D središte, a AC i CB ivice kvadrata koji je upisan u taj krug. Nad ivicom AC kao nad prečnikom opisan je polukrug AEC. Povežu se tačke C i D. Kako je:

$$AB^2 = 2AC^2,$$



Slika 2.5: Kvadratura lunule

a krugovi se, kako i njihovi polukrugovi, odnose kao kvadrati nad njihovim prečnicima, sledi da važi:

$$P(polukruga\ ACB) = 2P(polukruga\ AEC).$$

Takođe je:

$$P(polukruga\ ACB) = 2P(segmenta\ ADC).$$

Iz prethodne dve jednakosti sledi:

$$P(polukruga\ AEC) = P(segmenta\ ACD).$$

Oduzimanjem zajedničkog odsečka AFC sa leve i desne strane jednakosti dobija se da je:

$$P(lunule\ AECF) = P(\Delta ADC).$$

Izvršena je kvadratura lunule.

II slučaj

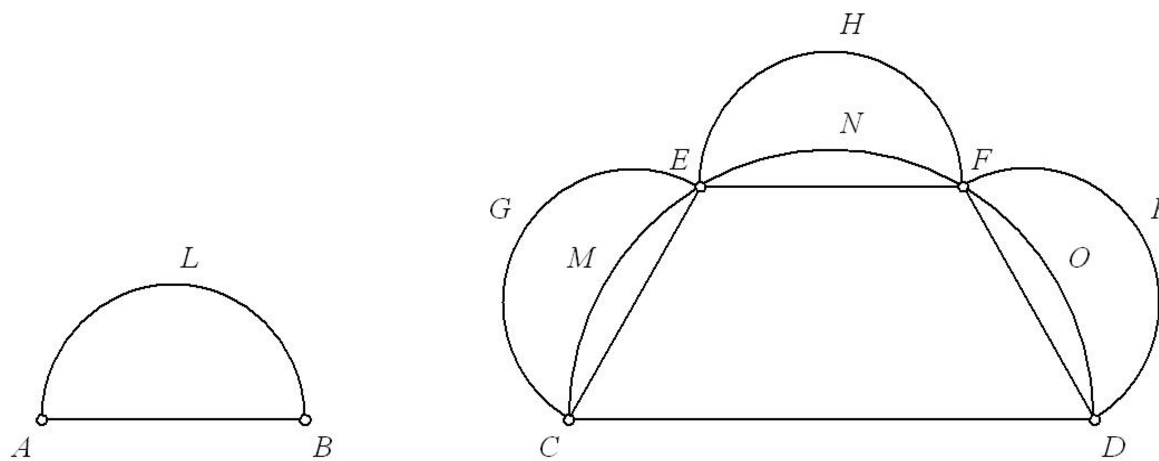
Uoči se jednakokraki trapez $CEFD$ sa kracima CE, EF i FD i osnovicom CD, koji je zapravo polovina pravilnog šestougla sa opisanim polukrugom prečnika CD. Nad kracima redom se opišu polukrugovi CGE, EHF i FKD, a nad osnovicom CD opiše se polukrug $CEFD$. Uoče se tri podudarne lunule: $CGEM$, $EHFN$ i $FKDO$ i pomoćni polukrug ALB čiji je prečnik AB jednak kracima trapeza.

Kako je:

$$CD^2 = (2AB)^2 = 4AB^2 = AB^2 + CE^2 + EF^2 + FD^2,$$

a površine krugova se odnose kao kvadrati njihovih prečnika, sledi da je:

$$P(polukruga\ CEFD) = 4P(polukruga\ ALB)$$



Slika 2.6: Kvadratura lunule i polukruga

tj.

$$\begin{aligned} P(\textit{polukruga } CEFD) = \; & P(\textit{polukruga } ALB) + P(\textit{polukruga } CGE) \\ + \; & P(\textit{polukruga } EHF) + P(\textit{polukruga } FKD). \end{aligned}$$

Oduzimajući sa obe strane prethodne jednakosti sumu površina tri kružna odsečka: CME, EHF i FKD, dobija se da je:

$$\begin{aligned} P\ (\textit{trapeza } CEFD) = P(\textit{polukruga } ALB) + P(\textit{lunule } CGEM) \\ + P(\textit{lunule } EHFN) + P(\textit{lunule } FKDB). \end{aligned}$$

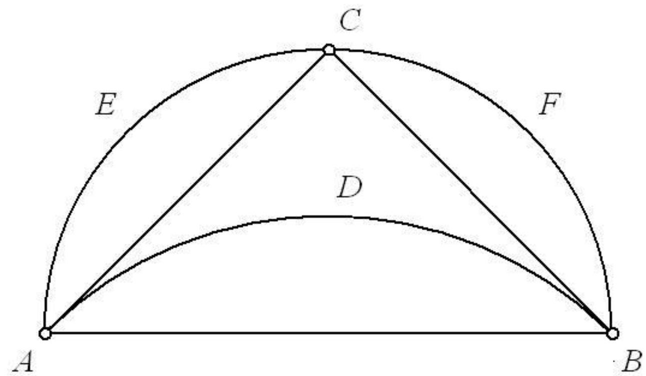
Prethodna jednakost navodi na zaključak da ako bi bilo moguće izvršiti kvadraturu gore navedene lunule, bila bi moguća i kvadratura kruga, jer je trapez svakako kvadrabilan, što je i motivisalo Hipokrata na dalje izučavanje lunula.

2.5.2 Hipokratove lunule 2

Drugu interpretaciju Hiporatovih lunula dao je Eudem, jedan od najznačajnijih Aristotelovih učenika. On se baviom medicinom i matematikom. Eudem je napisao poznatu *Istoriju geometrije*, najverovatnije 334. godine stare ere, a pisao je i komentare Aristotelove *Fizike*. Pored *Istorije geometrije* sačinio je i istoriju aritmetike, astronomije i teologije, a pisao je još i o retorici i zoologiji. Njegova *Istorija geometrije* nije sačuvana, ali se o njoj zna zahvaljujući Proklu i Simplikiju iz V i VI veka nove ere. Oni su bili komentarori antičkih dela koji su često doslovce prepisivali delove Eudemovog dela.

I slučaj: Lunula čija je spoljašnja granica polukrug

Polazi se od pravouglog jednakokrakog trougla ACB. Nad njegovom hipotenuzom AB konstruiše se polukrug ACB, čija je kružnica gornja granica lunule $ACBD$. Katete trougla AC i CB odsecaju kružne odsečke AEC i CFB . Zatim se nad hipotenuzom AB konstruiše kružni odcečak ADB sličan pomenutim odsečcima AEC i CFB. Kružni luk ADE je donja granica lunule.



Slika 2.7: Kvadratura lunule čija je spoljašnja granica polukrug

Bilo je poznato da su kružni odsečci slični ako su im jednaki odgovarajući centralni uglovi. Takođe važi da je suma površina odsečaka nad katetama jednaka površini odsečka nad hipotenuzom, jer su njihove površine srazmerne kvadratu poluprečnika odgovarajućih krugova.

$$P(\textit{kružnog odsečka ADB}) = P(\textit{kružnog odsečka AEC}) + P(\textit{kružnog odsečka CFB})$$

$$P(\textit{kružnog odsečka AEC}) = P(\textit{kružnog odsečka CFB})$$

Takođe važi:

$$P(\Delta ACB) = P(polukruga\ ACB) - (P(odsečka\ AEC) + P(odsečka\ CFB))$$

$$P(\textit{lunule ACBD}) = P(\textit{polukruga ACB}) - P(\textit{odsečka ADB}),$$

odakle sledi da važi i jednakost:

$$P(\Delta\ ACB) = P(\textit{lunule ACBD}).$$

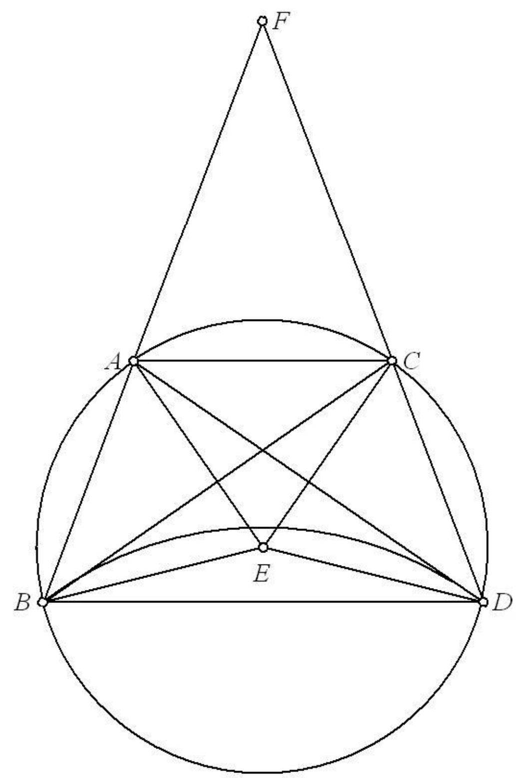
Iz prethodnog sledi da je moguća kvadratura gore spomenute lunule, jer je i trougao ABC kvadrabilan. Ova Eudemova interpretacija Hipokratove lunule slična je prvom slučaju Aleksandrovog objašnjenja lunula, slučaju jednakokrakog pravouglog trougla, pri čemu je spoljašnja granica lunule opisani polukrug, a unutrašnja kružni odsečak.

II slučaj: Lunula čija je spoljašnja granica veća od polukruga

Osnova konstrukcije je jednakokraki trapez $BACD$ sa većom osnovicom BD, jednakim kracima, BA i CD, i manjom osnovicom AC, tako da je: $BA = AC = CD$. Kvadrat osnovice je tri puta veći od kvadrata svake stranice:

$$BD^2 = 3BA^2 = 3AC^2 = 3CD^2.$$

Oko trapeza se opiše krug, pri čemu je kružni luk $BACD$ gornja ivica lunule $BACDE$. Kao i u prethodnom slučaju nad osnovicom BD konstruiše se kružni odsečak BED, sličan odsečcima koje preostale strane trapeza odsecaju od opisanog kruga, koji je donja granica lunule. Slično kao u I slučaju dokazuje se da je površina lunule jednaka površini trapeza.



Slika 2.8: Kvadrataura lunule čija je spoljašnja granica veća od polukruga

Važe jednakosti:

$$P(\textit{lunule } BACD) = P(\textit{odsečka } BACD) - P(\textit{odsečka } BED)$$
$$\text{i } P(\textit{trapeza } BACD) = P(\textit{odsečka } BACD) - (P(\textit{odsečka } BA) + P(\textit{odsečka } AC) + P(\textit{odsečka } CD)).$$

Kako je :

$$P(odsečka\ BED) = P(odsečka\ BA) + P(odsečka\ AC) + P(odsečka\ CD),$$

dolazi se do jednakosti:

$$P(trapeza\ BACD) = P(lunule\ BACDE).$$

Takođe se može dokazati da je površina kružnog odsečka $BACD$ veća od površine polukruga. Ako se stranice trapeza BA i DC produže preseći će se u tački F. U jednakokrakom trouglu FAC ugao FAC je oštar, što znači da je ugao ACD tup, pa je najveća stranica trougla ACD stranica AD. Tako da u trouglu ACD važi nejednakost:

$$AD^2 > AC^2 + CD^2,$$

tj. kvadrat najveće stranice veći je od zbira kvadrata preostale dve stranice. Kako je

$$AC = CD,$$

dolazi se do nejednakosti:

$$AD^2 > 2CD^2.$$

Važi i nejednakost:

$$BD^2 < CD^2 + AD^2,$$

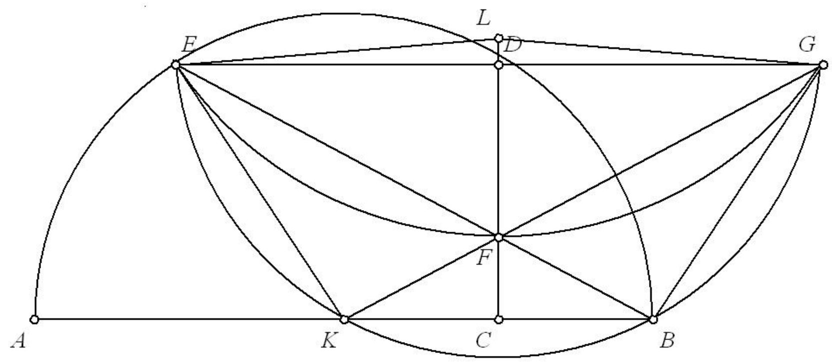
što znači da je ugao kod temena C u trouglu BCD oštar. Hipokrat je bio upoznat sa koncepcijom upisanog ugla u segment kruga, pa tako zaključuje da je površina segmenta $BACD$ veća od površine polukruga $BACD$. Kada bi ugao kod temena C bio prav, segment i polukrug bi imali iste površine.

III slučaj: Lunula čija je spoljašnja granica manja od polukruga

Prvo se konstruiše krug prečnika AB sa centrom u K i prava CD - simetrala poluprečnika KB. Zatim se konstruiše duž EF čija je tačka E na kružnici, a tačka F na pravoj koja prolazi kroz tačku B i čiji je kvadrat 3/2 puta veći od kvadrata poluprečnika KB.

U sledećem koraku se konstruiše prava EG paralelne pravoj AB, tačka K se spaja sa tačkama E i F. Tačka G je presečna tačka paravih KF i EG. Zatim se spajaja tačka B sa tačkama F i G. Važi da je $BG = EK$, i da je oko trapeza $EKBG$ moguće opisati krug.

Stranice trapeza od kruga odsecaju tri kružna odsečka: EK, KB i BG. U unutrašnjosti trapeza moguće je konstruisati krug oko trougla EFG. Stranice trougla EF i FG odsecaju odsečke: EF i FG. Kružni luk $EKBG$ je spoljašnja granica lunule $EKBGF$, a kružni luk EFG unutrašnja granica. Važi sledeće:



Slika 2.9: Kvadratura lunule čija je spoljašnja granica manja od polukruga

$$P(odsečka\ EF) = P(odsečka\ FG),$$

$$P(odsečka\ EK) = P(odsečka\ KB) = P(odsečka\ BG),$$

$$P(odsečka\ EF) = 3/2P(odsečka\ EK) \text{ i}$$

$$2P(odsečka\ EF) = 3P(odsečka\ EK).$$

Kako je:

$$P(lunule\ EKBGF) = P(pravolinijske\ figure\ EKBGF) + 3P(odsečka\ EK) - 2P(odsečka\ EF),$$

konačno važi i:

$$P(lunule\ EKBGF) = P(pravolinijske\ figure\ EKBGF).$$

Spoljašnja granica lunule $EKBGF$ je manja od polukruga, što se dokazuje na sledeći način.

Po pretpostavci je: $EF^2 = 3/2EK^2$.

Takođe važi: $BK^2 > 2BF^2$ tj. $EK^2 > 2KF^2$, pa je:

$$EF^2 = EK^2 + \frac{1}{2}EK^2 > EK^2 + KF^2,$$

što znači da je ugao kod temena K, ∠EKF tj. ∠EKG, tup, pa je i kružni segment $EKBG$ manji od polukruga.

U prethodnom je korišćena činjenica da je: $BK^2 > 2BF^2$, što se i zaključuje na osnovu sledećeg. Kako važi:

$$EB \cdot BF = AB \cdot BC = KB^2,$$

tj.

$$EF \cdot FB + BF^2 = BK^2 = \frac{2}{3}EF^2,$$

iz prethodne relacije sledi da je:

$$FB = \frac{2}{3}EF,$$

odnosno:

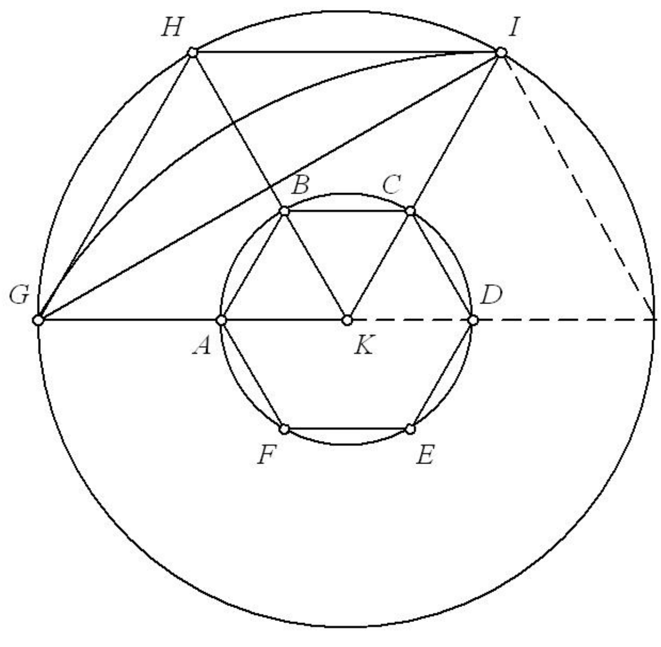
$$EF > FB.$$

Tako je i:

$$BK^2 > 2BF^2.$$

IV slučaj: Kvadratura lunule i kruga zajedno

U ovom slučaju prvo se konstruišu dva koncentrična kruga, sa centrom u tački K, tako da je kvadrat prečnika spoljašnjeg kruga 6 puta veći od kvadrata prečnika unutrašnjeg kruga. Zatim se u unutrašnji krug upiše pravilan šestougao $ABCDEF$. Neka su tačke G, H i I tačke na kružnici većeg kruga, redom produženja duži KA, KB i KC.



Slika 2.10: Kvadratura lunule i kruga zajedno

Tačke G, H i I se povežu, pri čemu se dobijaju duži: GH, HI i IG, pri čemu su GH i HI stranice pravilnog upisanog šestougla u veći krug, i one odsecaju segmente GH i HI tog spoljašnjeg kruga. Nad duži GI konstruiše se takođe segment GI sličan segmentima GH i HI.

Kako je ugao nad prečnikom prav, važi jednakost:

$$GJ^2 = GI^2 + IJ^2,$$

tj.

$$(2GK)^2 = GI^2 + GH^2.$$

Kako je $GK = GH$ sledi da je:

$$GI^2 = 3GH^2.$$

S obzirom da je odnos kvadrata manjeg i većeg poluprečnika 1 : 6, isto važi i za njihove poluprečnike:

$$GH^2 = 6AB^2.$$

Iz prethodnog sledi da je površina segmenta GI jednaka sumi površina segmenata GH i HI i površina svih segmenata nad stranicama manjeg šestougla:

$$P(\textit{segmenta GI}) = 2P(\textit{segmenta GH}) + 6P(\textit{segmenta AB}).$$

Ako na obe strane jednakosti dodamo površinu figure ograničene dužima GH, HI i lukom GI, zaključuje se da važi:

$$P(\Delta\ \textit{GHI}) = P(\textit{lunule GHI}) + 6P(\textit{segmenata AB}).$$

Dodavajući na obe strane poslednje jednakosti površinu šestougla $ABCDEF$, dolazi se do sledećeg:

$$P(\Delta\ \textit{GHI}) + P(\textit{šestougla ABCDEF}) = P(\textit{lunule GHI}) + P(\textit{manjeg kruga}).$$

Kako je moguća kvadratura i trougla i šestougla moguća je i kvadratura kruga i lunule zajedno.

2.5.3 Hipokratove kvadrabilne lunule-uopštenje

Trigonometrija omogućava nalaženje svih tipova Hipokratovih lunula koje se mogu konstrisati samo pomoću šestara i lenjira.

Neka je ACB spoljašnja, a ADB unutrašnja granica proizvoljne lunule, i neka su redom: r i r' poluprečnici, i O i O' centri navedenih lukova koji ograničavaju lunulu $ACBD$. Θ i Θ' su polovine uglova koji odgovaraju kružnim lukovima ACB i ADB.

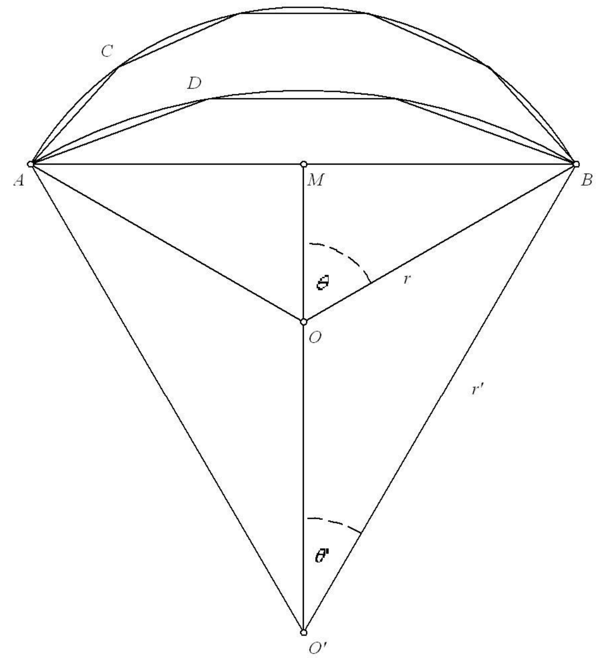
Sa slike se jasno vidi da je:

$$P(\textit{lunule ACBD}) = P(\textit{segmenta ACB}) \text{ - } P(\textit{segmenta ADB}).$$

Kako je:

$$P(\textit{segmenta ACB}) = P(\textit{isečka OACB}) \text{ - } P(\Delta\ \textit{OAB})$$

i



Slika 2.11: Kvadratura lunula - uopštenje

$$P(\textit{segmenta ADB}) = P(\textit{isečka O'ADB}) - P(\Delta \textit{ O'AB})$$

važe jednakosti:

$$P(\textit{lunule}) = (P(\textit{isečka OACB}) - P(\textit{isečka O'ADB})) - (P(\Delta \textit{ OAB}) - P(\Delta \textit{ O'AB})) \text{ i}$$

$$P(\textit{lunule}) = (r^2\Theta\text{-}r'^2\Theta') + \frac{1}{2}(r'^2 sin(2\Theta') - r^2 sin(2\Theta)).$$

Takođe mora da važi i:

$$rsin(\Theta) = \frac{1}{2}AB = r'sin(\Theta').$$

Pod pretpostavkom da se lunula $ACBD$ može kvadrirati, prvo mora biti zadovoljen uslov:

$$r^2\Theta = r'^2\Theta'.$$

Ako pretpostavimo da je:

$$\Theta = m\Theta',$$

korenovanjem obe strane prethodne jednakosti dobija se da mora biti:

$$r' = \sqrt{m}r.$$

Formula za površinu lunule postaje:

$$P(lunule)=\frac{1}{2}r^2(msin(2\Theta') - sin(2m\Theta')).$$

Još preostaje da se reši jednačina:

$$rsin(\Theta) = r'sin(\Theta'),$$

koja je ekvivalentna sledećoj:

$$sin(m\Theta') = \sqrt{m}sin(\Theta').$$

Prethodna jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu samo ako m uzme neku od vrednosti:

$$2,\ 3,\ \frac{3}{2},\ 5,\ \frac{5}{3}.$$

Hipokratove lunule odgovaraju trima prvim vrednostima promenljive m, ali je i u poslednja dva slučaja za $m = 5$ i $m = \frac{5}{3}$ moguća kvadratura lunule. Prema nekim izvorima Klauzen je 1840. godine opisao poslednja četiri slučaja problema. Do tada nije bilo poznato da je Hipokrat rešio više od jednog slučaja kvadriranja lunule. Prema M. Simonu svih pet slučajeva su objašnjena mnogo ranije, 1766. godine u disertaciji Martina Džona Volenijusa. Francuski matematičar Vijet[10] je razmatrao slučaj kada je $m = 4$, koji bi doveo do algebarske jednačine 3 stepena.

2.5.4 Značaj Hipokratovog dela

Eudemova *Istorija geometrije* otkriva drevna saznanja antičkih matematičara, njihove ideje i način razmišljanja. Iz tog dela može se dosta saznati i o Hipokratu sa Hiosa i njegovom doprinosu razvoju geometrije, prvenstveno o problematici kvadriranja lunula (meseca). Hipokrat je poznavao važne principe elementarne geometrije, koje je kasnije i Euklid uvrstio u svoje *Elemente* (I, II, III i IV knjiga).

Neka od Hipokratovih tadašnjih saznanja koja su primenjivana u prethodnim dokazima su i:

- konstrukcija pravilnog šestougla
- u pravilnom šestouglu kvadrat nad dijagonalom je tri puta veći od kvadrata nad stranicom.

Hipokratu je takođe bila poznata i sledeća znanja:

- odnos između upisanih uglova i lukova u krugu
- princip sličnosti: površine sličnih figura su proporcionalne kvadratima homologih stranica

[10]Fransoa Vijet(1540 – 1603), francuski matematičar.

- konstrukcija opisanog kruga oko trougla i jednakokrakog trapeza
- Pitagorina teorema za pravougli trougao i njeno uopštenje za tupougle i oštrougle trouglove.

Hipokrat je posedovao veštinu demonstrativne tehnike i zahtevao je visok stepen strogosti u dokazima. Pri konstrukciji lunula osim što je sa crteža bilo očigledno da je npr. spoljašnja granica veća od unutrašnje, on to i dokazuje tadašnjim matematičkim aparatom.

I pre Euklida drevni antički matematičari su dolazili do značajnih saznanja. Oni su ih sistematično sakupljali i čuvali u svojim delima, kao što su između ostalog i Hipokratovi *Elementi*. Hipokratove lunule su značajne jer je pokazana kvadratura krivolinijskih geometrijskih likova, kao i njegova ideja redukcije problema udvostručenja kocke na konstrukciju srednjih proporcionala. Hipokratovi *Elementi* su inspirisali Euklida da prikupi tadašnja geometrijska znanja i sistematski izloži u svojim neprevaziđenim *Elementima*.

Glava 3

KRIVE I KVADRTURA KRUGA

Pod uticajem Platona[1], u geometrijskim konstrukcijama bilo je dozvoljeno korišćenje samo osnovnih pomagala: šestara i lenjira. Taj zahtev matematičarima je tada utemeljen i nikada više nije odbačen. Pri rešavanju matematičkih problema bilo je dozvoljeno konstruisati samo krugove i prave.

Sva tri glavna problema antiče Grčke: udvostručenje kocke, trisekcija ugla i kvadratura kruga zahtevala su poznavanje složenijih krivih od kruga, nisu mogla biti rešena samo konstrukcijama pravih i krugova. Tek početkom XIX veka dokazano je da oni zaista u opštem slučaju i nisu rešivi na pomeniti način (korišćenjem šestara i lenjira). Do dokaza se došlo algebarskim putem, saznanjem da se krugovi i prave opisuju linearnim i kvadratnim jednačinama, a da se jednačine kojima se opisuju tri navedena problema ne mogu redukovati na linearne i kvadratne. Smatra se da je prvi potpun dokaz o nemogućnosti rešenja problema udvostručenja kocke i trisekcije ugla konstrukcijama samo uz korišćenje šestara i lenjira dao P. L. Vancel [2] 1837. godine.

Antički matematičari uspevali su da pronađu određene krive koje bi im omogućile da dođu do rešenja drevnih matematičkih problema, kada bi uvideli da to ne mogu da postignu samo konstrukcijama pravih i krugova. Najpoznatije među njima su: Hipijina kvadratrisa i Arhimedova spirala.

3.1 Hipija iz Elide

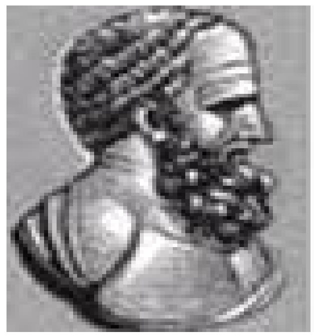
Hipija iz Elide, sofista, rođen je polovinom V veka stare ere, ne zna se pouzdano ni kad je rođen, ni kada je umro, prema nekim izvorima živeo je od 460 – 400. godine stare ere. Prema tvrđenju Miloša Đurića u njegovoj studiji *Sofisti i njihov politički značaj* moguće je da je Hipija ubijen zbog učešća u zaveri protiv državne vlasti, što se najranije moglo

[1]Platon, poreklom iz atinskog plemstva, rođen je oko 427, a umro 347. godine stare ere. Imao je vekovima veliki uticaj na razvoj filozofske misli. Poznat je i kao osnivač filozofske škole *Akademije* u Atini.

[2]P. L. Vancel (Pierre Laurent Wantzell, 1814-1848) predavao je matematiku na Politehničkoj školi u Parizu. Njegov doprinos matematici je i dokaz da Gausov uslov za konstrukciju pravilnog n-tougla nije samo dovoljan, već i potreban.

dogoditi 399. godine stare ere [10, str. 297] . Hipija je bio mlađi savremenik Protagore[3] i Sokrata[4]

Hipija se bavio: astronomijom, aritmetikom i geometrijom, gramatikom, retorikom, dijalektikom, teorijom književnosti, likovnom umetnošću, istorijom, posebno istorijom heroja poreklom iz uglednih porodica, istorijom naseljavanja i osnivanja naseobina. S obzirom da je bio upućen u mnoge oblasti znanja, iz svojih raznih istraživanja izveo je značajne etičke i političke zaključke.



Slika 3.1: Hipija iz Elide

Od njegovih mnogobrojnih proznih spisa poznata je samo nekolicina njih: *Trajanski razgovor*, *Imena naroda*, *Popis olimpijskih pobednika* i *Zbornik*. Dijalozi *Hipija manji* i *Hipija veći* koji se pripisuju Platonu sadrže prikaz Hipijine metodologije. Treba spomenuti njegov sistem mnemotehnike koji mu je omogućio da zapamti bilo koji niz od pedeset imena koje je samo jednom čuo. O Hipiji je bilo reči i u delu *Protagora*.

Njegov doprinos razvoju matematiče misli je otkriće krive kvadratrise čija je prvobitna namena bila rešavanje problema trisekcija ugla, ali se može primeniti i kod kvadrature kruga. Naziv kvadratrisa potiče od Lajbnica[5]. Komentarišući prvu knjigu Euklidovih Elemenata, Proklo navodi da je čuveni Hipija iz Elide „izveo simptome” kvadratrise, tj. današnjim jezikom govoreći, jednačinu te krive. Opis Hipijine kvadratrise može se naći kod Paposa Aleksandrijskog[6], u IV knjizi njegovog *Zbornika*.

[3]Protagora (490 – 420. p. n. e.) je bio predsokratovski filozof. Platon ga je ubrajao u sofiste.

[4]Sokrat (470 – 399. p. n. e.) je jedan od najuticajnijih filozofa zapadno-evropske civilizacije. Smatra se ocem etike i filozofije. Imao je uticaj na Platona. Poznat je njegov sokratovki (dijaloški) metod istraživanja koji je on primenjivao u ispitivanju ključnih moralnih koncepata. Pomenuti metod opisao je Platon u delu *Sokratski dijalozi*.

[5]Gotfrid Lajbnic (1646 – 1716.) bio je nemački filozof, matematičar, pronalazač, čovek sa enciklopedijskim znanjem zapadne civilizacije.

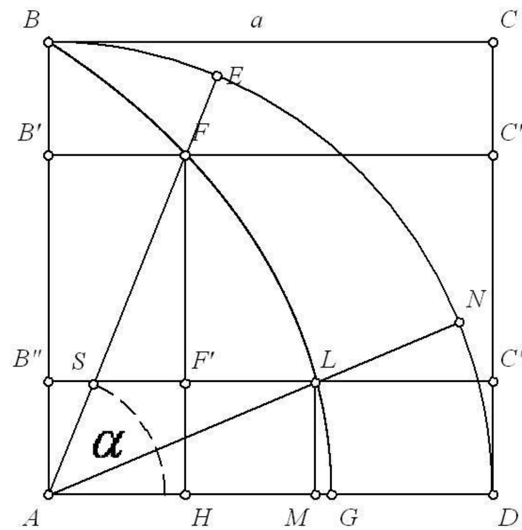
[6]Papos iz Aleksadrije je živeo na prelasku iz III u IV vek nove ere. Bio je poslednji značajni antički geometričar. Sastavio je *Matematički zbornik*, koji se sastojao iz osam knjiga i koji je pregled pojedinih problema i spisa ranijih matematičara. Ovo delo se čuva u papskoj biblioteci u Vatikanu. Papos je komentarisao Euklidove *Elemente* i Ptolomejevu *Veliku sintaksu*.

3.1.1 Hipijina kvadratrisa

Paposov opis kvadratrise

Neka je $ABCD$ kvadrat i BED kružni luk sa centrom u temenu A. Pretpostavimo da se poluprečnik kruga kreće ravnomerno oko tačke A, od pozicije AB do pozicije AD, i da se u isto vreme duž BC kreće ravnomerno, uvek paralelno samoj sebi, od pozicije BC do pozicije AD, pri čemu se tačka B kreće po duži AB do tačke A.

Na kraju svojih kretanja pokretna duž i rotirajući poluprečnik će se podudarati sa duži AD. U bilo kom prethodnom trenutku njihovih kretanja duž i poluprečnik će se seći u nekoj tački, npr. u F ili L. Skup svih presečnih tačaka nazova se kvadratrisa.



Slika 3.2: Kvadratrisa

Ako je AFE jedan položaj rotirajućeg poluprečnika, a F tačka preseka sa pomerajućom duži, tada je po definiciji kvadratrise, odnos duži AB i HF jednak odnosu lukova BD i ED.

$$AB : FH = (luk\ BD) : (luk\ ED) = \angle BAD : \angle EAD$$

Takođe je odnos upravnih FH i LM iz dveju tačaka kvadratrise F i L, jednak odnosu lukova ED i ND, gde su tačke E i N tačke luka BED koje odgovaraju tačkama kvadratrise F i L .

$$FH : LM = (luk\ ED) : (luk\ ND)$$

Tako se podela ugla EAD na n podudarnih uglova svodi na podelu duži FH na n podudarnih duži. U posebnom slučaju za $n = 3$ rešava se problem trisekcije ugla.

Jednačina kvadratrise

Neka su na prethodnoj slici prave AD i AB, x i y osa, neka je kvadrat $ABCD$ jedinični, $AB = AD = 1$, i neka je α dužina luka ED, tada je:

$$\frac{\pi}{2} : \alpha = 1 : FH.$$

Ako su x i y apscisa i ordinata tačke F, onda je:

$$\frac{\pi}{2} : \alpha = 1 : y.$$

Tada je:

$$y = \frac{2\alpha}{\pi}$$

i

$$\alpha = y\frac{\pi}{2}.$$

Kako je :

$$\frac{y}{x} = \tan\alpha,$$

jednačina kvadratrise je:

$$y = x\tan(y\frac{\pi}{2}).$$

Kvadratrisa definisana prethodnom jednačinom seče x-osu u tački $2/\pi$. Iz prethodnih relacija sledi:

$$x = \frac{y}{\tan(y\frac{\pi}{2})} = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha,$$

pa kada $\alpha \to 0$, $\cos\alpha \to 1$ i

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} \to 1, \quad x \to \frac{2}{\pi},$$

što znači da je:

$$AG = \frac{2}{\pi},$$

pa kvadratrisa seče x-osu u tački $2/\pi$.

Paposova potpuna definicija kvadratrise

U prethodnoj Paposovoj definiciji kvadratrise nejasno je kako se dobija tačka G, jer na kraju ravnomernog kretanja obe duži: rotirajući poluprečnik AB i pomerajuća duži BC, dolaze u isti položaj, tj. poklapaju se sa duži AD, pa se ne može jasno odrediti njihova presečna tačka. Prethodna definicija mogla bi se upotpuniti dodatkom da je $AG = 2/\pi$. Tada je:

$$\textit{(luk BED) : AB = AB : AG.}$$

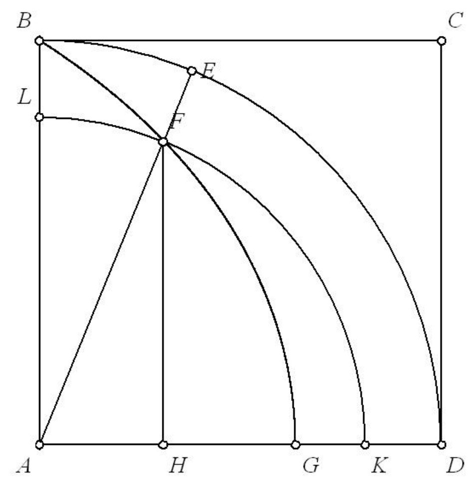
Važi i obrnuto tvrđenje, pa je dovoljno dokazati istinitost prethodne relacije da bi se dokazalo da je $AG = 2/\pi$.

Dokaz se izvodi metodom kontrapretpostavke tj. svođenja na apsurd (*reductio ad absurdum*), pretpostavi se da navedeni odnos nije tačan. Onda bi važilo:

$$\textit{(luk BED)} : AB = AB : AK,$$

pri čemu je $AK > AG$ ili $AK < AG$.

Neka je $AK > AG$. Iz temena A opiše se luk poluprečnika AK, koji seče stranicu AB u tački L, tako da se može označiti sa KFL. F je presečna tačka luka i kvadratrise. Ako produžimo duž AF ona seče luk BD u tački E. Podnožje normale iz tačke F na stranicu AD je tačka H.



Slika 3.3: Kvadratrisa – slučaj kada je AK veće od AG

Po pretpostavci je:

$$\textit{(luk BED)} : AB = AB : AK,$$

a kako je $AK = AL$, važi i relacija:

$$AB : AK = \textit{(luk BED)} : \textit{(luk LFK)}.$$

Iz prethodne dve relacije sledi odnos:

$$\textit{(luk BED)} : AB = \textit{(luk BED)} : \textit{(luk LFK)},$$

pa i jednakost:

$$AB = (luk\ LFK).$$

Iz definicije kvadratrise sledi:

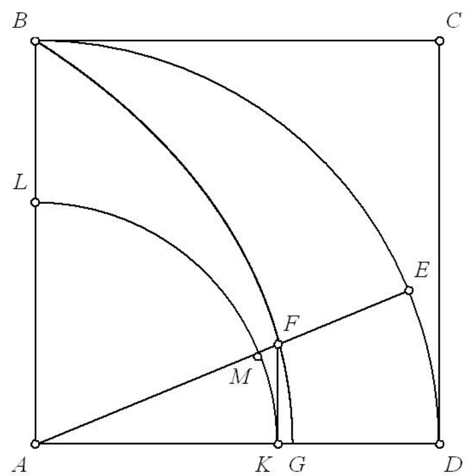
$$AB : FH = (luk\ BED) : (luk\ ED) = (luk\ LFK) : (luk\ FK).$$

Iz poslednje dve relacije bi se dobilo:

$$FH = (luk\ FK),$$

što je nemoguće tj. apsurd, pa i polazna pretpostavka da je $AK > AG$ ne važi.

Neka je $AK < AG$. Iz temena A opiše se luk poluprečnika AK, koji seče stranicu AB u tački L, tako da se može označiti sa KML. Presek kvadratrise i normale u tački K na stranicu AD je tačka F. Duž AF seče luk LK u tački M, i ako se produži ona seče luk BD u tački E.



Slika 3.4: Kvadratrisa – slučaj kada je AK manje od AG

Slično kao i prethodnom slučaju dokazuje se da je

$$AB = (luk\ LMK).$$

Iz osobina kvadratrise sledi:

$$AB : FK = (luk\ BED) : (luk\ ED) = (luk\ LMK) : (luk\ MK).$$

Iz prethodne dve relacije sledi jednakost: $FK = (luk\ MK)$, što je nemoguće i znači da je pretpostavka da je $AK < AG$ neodrživa. Kako nije ni $AK > AG$, niti $AK < AG$, mora biti $AK = AG$, važi relacija

$$(luk\ BED) : AB = AB : AG.$$

Prethodni dokaz može se pripisati Dinostratu[7] , ako ne i samom Hipiji koji je prvi definisao kvadratrisu.

[7]Dinostrat je živeo u IV veku stare ere. Prema Proklu njegov doprinos matematici je saradnja sa Platonom, pri čemu su dodatno usavršili geometriju.

Kvadratrisa i kvadratura kruga

I način

Pomoću kvadratrise se može konstrisati duž $AG = 2/\pi$. Ako je zadat poluprečnik r nekog kruga, koristeći se osobinama sličnih trouglova, može se konstrisati duž u tako da važi relacija:

$$\frac{2}{\pi} : r = r : u,$$

tj.

$$2u = \pi r^2.$$

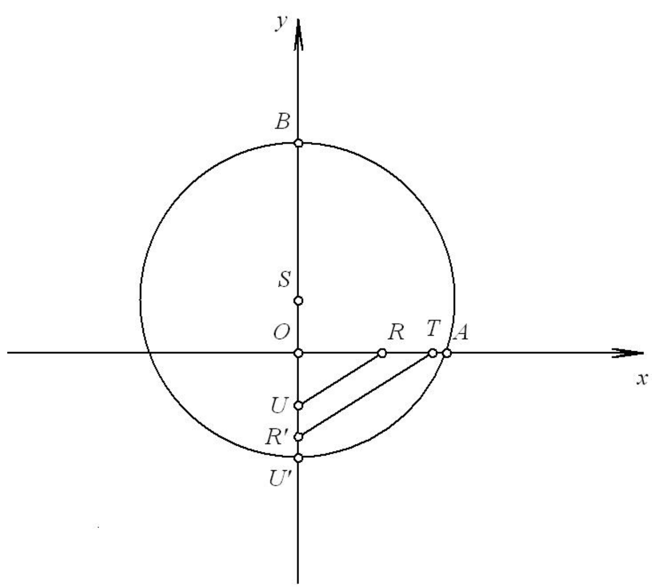
Moguće je konstruisati i duž a, tako da je:

$$2u : a = a : 1,$$

odnosno

$$a^2 = 2u,$$

takođe na osnovu sličnosti trouglova.



Slika 3.5: Konstrukcija ivice kvadrata jednakog datom krugu

Neka su tačke R i R', redom, tačke sa koordinatama (r,0) i (0,-r), i U(0,-u) tačka u kojoj prava u tački R paralelna pravoj koja sadrži tačke $T(2/\pi, 0)$ i R' seče y-osu. Važi da je:

$$\frac{2}{\pi} : r = r : u.$$

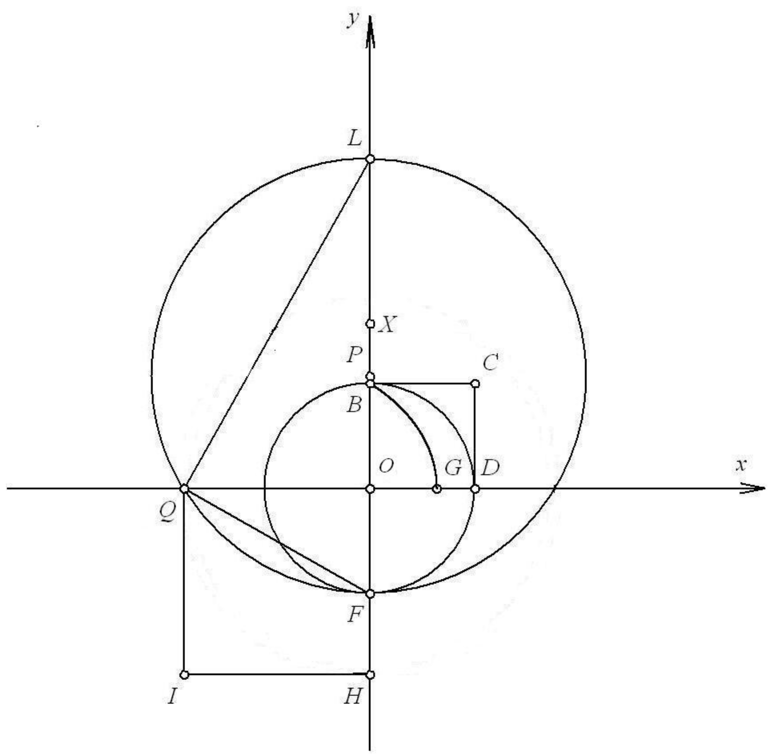
Ako je $A(a,0)$ tačka u kojoj x-osa seče krug kojem su dijametralno suprotne tačke $B(0,1)$ i $U'(0,-2u)$, važi:

$$2u : a = a : 1.$$

Na taj način je površina kvadrata čija je ivica podudarna konstrusanoj duži $a = OA$ biti jednaka površini zadatog kruga poluprečnika $r = OR$.

Prema Paposu, Dinostrat je prvi zajedno sa Nikomedom upotrebio kvadratarisu za rešenje problema kvadrature kruga.

II način



Slika 3.6: Kvadratura jediničnog kruga - konstrukcija kvadrata površine π

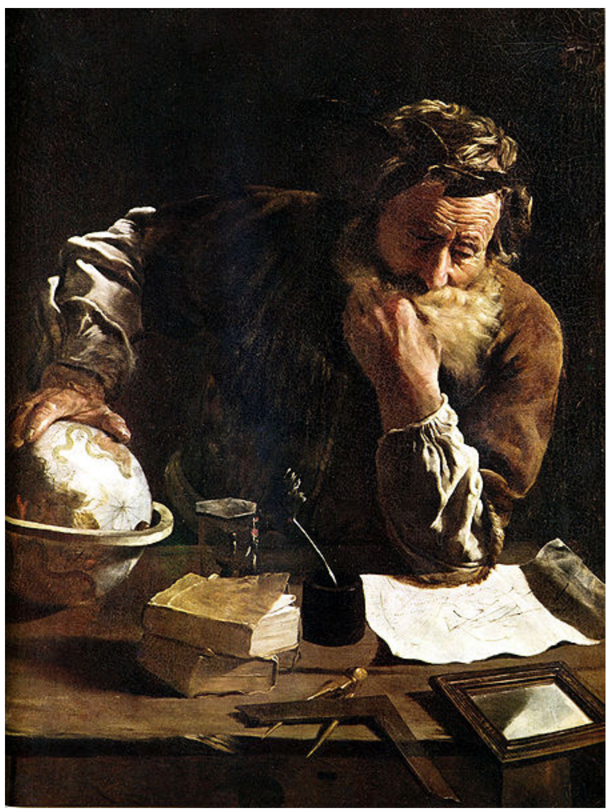
Kratak opis konstrukcije

1. Konstrukcija jediničnog kruga sa centrom u koordinatnom početku O.
2. Konstrukcija kvadratrise BG, pri čemu je: $OG = 2/\pi$.
3. Konstrukcija recipročne vrednosti za $2/\pi$, tj. duži $OX = \pi/2$.

4. Konstrukcija duži $OL = 2OX = \pi$.
5. Konstrukcija kvadratnog korena iz π, $OQ = \sqrt{\pi}$.
6. Konstrukcija kvadrata $OQIH$, čija je površina (π) jednaka površini polaznog jediničnog kruga.

3.2 Arhimed

Arhimed je rođen u Sirakuzi na Siciliji 287. godine stare ere. Vizantijski polihistor Jovan Ceces iz dvanaestog veka u svojim spisima tvrdi da je Arhimed ubijen u 75. godini života. To je bilo 212. godine stare ere kada su Rimljani posle duge opsade tokom Drugog punskog rata osvojili Sirakuzu. Na osnovu prethodnih podataka sudi se o Arhimedovoj godini rođenja [9, str. 197].



Slika 3.7: *Zamišljeni Arhimed*, autor: Domenico Fetti, 1620. godina

Arhimed, matematičar i najveći fizičar starog veka, bio je i inžinjer, pronalazač i astronom. Njegov otac bio je Fidija, astronom i matematičar, koji ga je naučio svemu što je i sam znao. Arhimed je brzo usvojio očeva znanja, koja su za njega bila tek početak bavljenja naukom. Njegov istraživački duh ga vodi u Aleksandriju (Egipat), gde su moćni

Ptolomejci osnovali čuvenu Aleksandrijsku biblioteku. U to vreme Aleksandrija je bila središte prirodnih nauka: astronomije, matematike, medicine i filologije. Arhimeda je najviše zanimala matematika. U Aleksandriji je bilo mnogo mladih i sposobnih matematičara, među njima i sjajni Eratosten, budući Arhimedov prijatelj. Tadašnje nepisano pravilo je bilo da svako otkriće pre objavljivanja mora biti poslato nekom drugom naučniku na proveru. Tako su Arhimed i Eratosten sve do Arhimedove smrti razmenili brojna pisma u kojima su se nalazila skoro sva otkrića i izumi i jednog i drugog. Nakon boravka u Aleksandriji Arhimed se vraća u Sirakuzu.

Arhimed je svojim otkrićima i delima dao veliki doprinos nauci. Njegova sačuvana dela su: *O ravanskom ekvilibrijumu (dve knjige)*, *Kvadratura parabole*, *O sferi i cilindru (dve knjige)*, *O spiralama*, *O konoidima i sferoidima*, *O plutajućim telima (dve knjige)*, *Merenje kruga*, *Prebrojabanje zrna peska* i *Metoda.*

Arhimed se najviše ponosio svojim delom *O sferi i cilindru*, tj. izračunavanjem površine i zapremine lopte i valjka, pa su mu po njegovoj želji prijatelji i srodnici na nadgrobni spomenik uklesali valjak sa loptom.

Arhimed je u navedenom delu dokazao sledeći odnos površina i zapremina lopte i valjka opisanog oko nje:

$$P(lopte) = \frac{2}{3}P(valjka)$$

i

$$V(lopte) = \frac{2}{3}V(valjka).$$

Zahvaljujući slici uklesanoj na Arhimedovom grobu, Ciceron je 75. godine stare ere uspeo da nađe Arhimedovo grobno mesto u Sirakuzi.

U spisu *O merenju kruga* Arhimed je približno izračunao vrednost broja π, upisujući u krug i opisujući oko njega pravilan 96-ugao. Zaključio je da važi ocena:

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7}$$

tj.

$$3.1408 < \pi < 3.1429$$

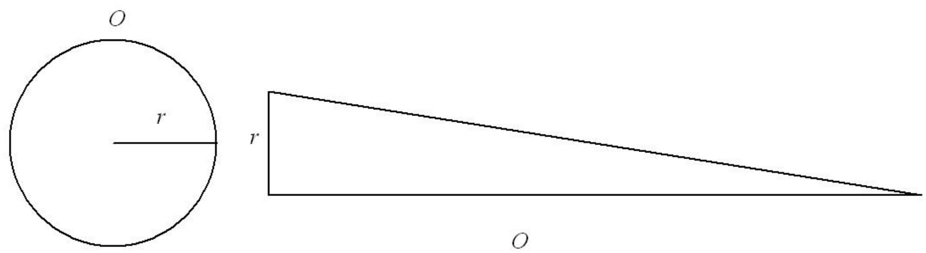
To je veoma dobra ocena ako se zna da je $\pi = 3.1416$, zaokruženo na četiri decimale. U navedenom delu Arhimed zaključuje da je površina kruga jednaka površini pravouglog trougla čija je jedna kateta poluprečnik kruga, a druga obim kruga, kao i da za odnos površine kruga i kvadrata njegovog prečnika važi: $P : d^2 = 11 : 14$.

On je takođe izvršio i aproksimaciju broja $\sqrt{3}$, ograničavajući ga na sledeći način:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

U delu *O ravanskom ekvilibrijumu* Arhimed je objasnio zakon poluge. Poznata je njegova izjava: „ Nađite mi mesto na koje da stanem i pomeriću Zemlju."

U spisu *O spiralama* opisana je mehanička kriva, Arhimedova spirala, o kojoj će biti kasnije više reči.



Slika 3.8: Površina kruga

U delu *O konoidima i sferoidima* Arhimed izračunava površine i zapremine delova sfera, konusa i paraboloida.

Osnovne temelje hidrostatike i hidraulide Arhimed je utemeljio u delu *O plutajućim telima*. Poznat je njegov zakon potiska. Izumeo je vijak za podizanje veće količine vode na veći nivo (Arhimedov vijak). Zanimljivo je da su mu znanja iz ovih oblasti omogućila da otkrije prisustvo neplemenitih metala u kruni kralja Hijerona, uz čuveni uzvik „Eureka" - što u prevodu znači: „Otkrio sam, pronašao sam."

U delu *Kvadratura parabole* Arhimed je dokazao da je površina figure ograničene parabolom i pravom linijom 4/3 puta veća od površine trougla upisanog u tu parabolu.

Jedino sačuvano delo koje svedoči o Arhimedovom zanimanju za astronomiju je *Prebrojavanje zrna peska*. Arhimed je izračunao da godina iznosi $365\frac{1}{4}$ dana.

U delu *Metode* Arhimed je dao osnove infitezimalnog računa.

Od Arhimedovih nesačuvanih spisa treba spomenuti raspravu o poliedrima u kojoj, prema Paposu, Arhimed, pored pet pravilnih poliedara opisanih u trinaestoj knjizi *Elemenata*, konstruiše i 13 polupravilnih poliedara kojima su pljosni pravilne i isto raspoređene oko temena. Ti poliedri su *Arhimedova tela*.

Arhimed je bio veoma poštovan među svojim sunarodnicima, jer je svojim izumima dugo odbijao napade Rimljana na Sirakuzu. Još jedna poznata izreka pripisuje se Arhimedu: „Ne diraj moje krugove" (lat. *Noli turbare circulos meos*), kojom se obratio rimskom vojniku, koji ga je prekidao dok ih je crtao na zemlji. Tako se i završio Arhimedov život, poginuo je od ruke rimskog vojnika prilikom opsade Sirakuze, da li zbog uzajmnog nerazumevanja (Arhimed je govorio grčki, a vojnk latinski jezik.) ili zbog nadmoći Rimljana, koji su smatrali da im je ovakav čin dozvoljen [Plutarh, *Život Mascelov*].

Još mnogo je Arhimedovih izuma i otkrića koja ovde nisu spomenuta, ali koja svedoče o njegovom genijalnom umu.

3.2.1 Merenje kruga

U ovom delu rada navedene su tri teoreme iz Arhimedovog dela *Merenje kruga* [8, str. 91 – 98].

Teorema 1

Površina kruga jednaka je površini pravouglog trougla, čija je jedna kateta jednaka poluprečniku datog kruga, a druga kateta njegovom obimu.

Dokaz

Dokaz se izvodi korišćenjem metode svođenja na apsurd, pretpostavi se da teorema ne važi tj. da površine kruga i navedenog trougla nisu jednake.

I kontrapretpostavka: Površina kruga P veća je od površine trougla K.

U krug se upiše kvadrat $ABCD$. Bisektrise kružnih lukova AB, BC, CD i DA seku kružnicu u četiri tačke, koje sa tačkama A, B, C i D čine temena pravilnog upisanog osmougla. Postupak se nastavlja, sve dok je suma segmenata kruga nad stranicama upisanog poligona manja od razlike P-K tj. razlike između površina kruga i trougla. Površina poligona je veća od površine kruga jer je:

$$\sum(segmenata) < P - K$$

i

$$\sum(segmenata) + poligon = P,$$

iz čega sledi da je:

$$\sum(segmenata) < \sum(segmenata) + poligon - K$$

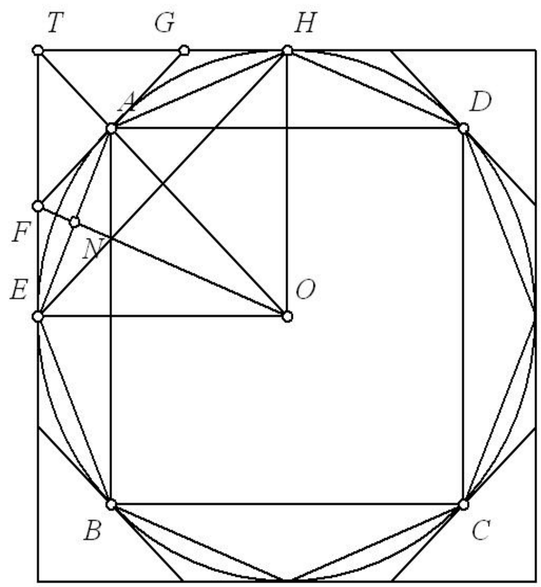
tj.

$$poligon > K.$$

S druge strane, ako je O centar kruga i ON normala na stranicu mnogougla, onda je $ON < r$, tj. ON je kraća od jedne katete pravouglog trougla (površine K). Takođe je obim pravilnog upisanog poligona manji od obima kruga, tj. od druge katete pomenutog trougla, pa je površina mnogougla manja od K-površine trougla, što je u suprotnosti sa prethodno dokazanim, pa je prva kontrapretpostavka neodrživa.

II kontrapretpostavka: Površina kruga P manja je od površine trougla K.

Oko kruga se opiše kvadrat, čije se dve susedne strane (koje dodiruju kružnicu u tačkama E i H) seku u tački T. Luk EH se podeli bisektrisom OT i u presečnoj tački A se konstruiše tangenta FAG. Tačke F i G pripadaju stranicama kvadrata. Ugao TAG je prav, pa je: $TG > GA$ i $TG > GH$ jer je $GA = GH$. Iz prethodnog sledi da je da je površina trougla FTG veća od od polovine povšine figure $TEAH$.



Slika 3.9: Merenje kruga – Teorema 1

Slično, ako se luk AH podeli na pola i konstruiše tangenta u presečnoj tački bisektrise i kruužnice, ona će odseći od površine figure GAH više od polovine.

Ponavljanjem prethodnih koraka, dobiće se opisani poligon oko kruga, tako da je razlika između njegove površine i kruga manja od razlike između površina kruga i trougla. Iz prethodnog sledi da bi površina poligona bila manja od površine trougla. Kako je normala iz centara kruga na bilo koju stranicu poligona jednaka poluprečniku kruga i kako je obim poligona veći od obima kruga, sledi da je površina poligona veća od površine trougla, što je u suprotnosti sa prethodnim, pa je i druga kontrapretpostavka neodrživa.

Zaključak

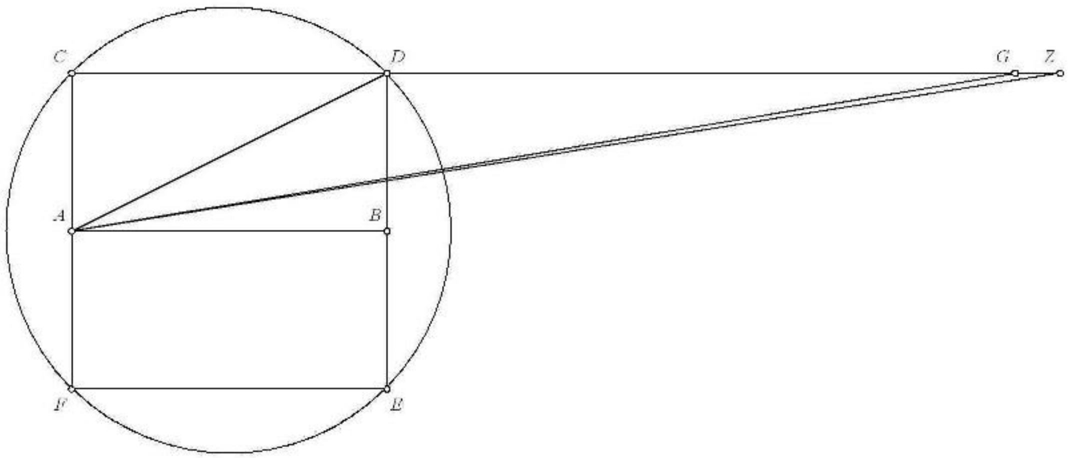
Kako ni prva, ni druga kontrapretpostavka nisu održive, sledi da površine kruga i trougla moraju biti jednake, tj.

$$P = K.$$

Teorema 2

Odnos površine i kvadrata prečnika kruga jednak je 11:14.

Dokaz



Slika 3.10: Merenje kruga – Teorema 2

Neka je dat krug K prečnika AB, oko koga je opisan kvadrat $CDEF$. Zatim se konstruiše duž DG, tako da važi raspored tačaka $C - D - G$ i da je $DG = 2CD$ i tačka Z, tako da važi raspored tačaka $D - G - Z$ i $GZ = 1/7CD$. Kako važi sledeće:

$$P(\Delta ACD) = \frac{AC \cdot CD}{2}$$

i

$$P(\Delta ACG) = \frac{AC \cdot CG}{2} = \frac{AC \cdot 3CD}{2},$$

sledi da važi:

$$P(\Delta ACG) : P(\Delta ACD) = 3 : 1 = 21 : 7.$$

Za trougao ACG važi:

$$P(\Delta AGZ) = \frac{AC \cdot GZ}{2} = \frac{AC \cdot \frac{1}{7}CD}{2} = \frac{AC \cdot CD}{14},$$

tako da važi i odnos:

$$P(\Delta ACD) : P(\Delta AGZ) = 7 : 1.$$

Površina trougla ACZ je:

$$P(\Delta ACZ) = \frac{AC \cdot CZ}{2} = \frac{AC \cdot (3 + \frac{1}{7})CD}{2},$$

pa je:

$$P(\Delta ACZ) : P\,(\Delta ACD) = 22 : 7.$$

Takođe važi i sledeće:

$$P(kvadrata\ CDEF) = 4P(\Delta ACD)$$

i

$$P(\Delta ACZ) \approx P(kruga\ K).$$

Poslednja približna jednakost sledi iz sledeće Teoreme 3, u kojoj se dokazuje da je obim kruga približno jednak $3\frac{1}{7}$ njegovog prečnika. Konačno se zaključuje da je:

$$P(kruga\ K) \approx P(\Delta ACZ) = \frac{22}{7}P(\Delta ACD) = \frac{11}{14}P(kvadrata\, CDEF) = \frac{11}{14}AB^2,$$

tj. ako je P površina, a d prečnik kruga onda približno važi:

$$P : d^2 = 11 : 14.$$

Teorema 3

Odnos obima i prečnika kruga je manji od $3\frac{1}{7}$ i veći od $3\frac{10}{71}$.

Dokaz

I deo dokaza

Prvi korak dokaza

Neka je AB prečnik kruga, tačka O njegov centar, prava AC njegova tangenta u tački A i neka je $\angle AOC$ jednak 1/3 pravog ugla. Onda je:

$$OA : AC\ [= \sqrt{3} : 1] > 265 : 153 \qquad (1)$$

i

$$OC : CA\ [= 2 : 1] = 306 : 153 \qquad (2)$$

Zatim se prvo konstruiše prava OD, bisektrisa $\angle AOC$, koja seče duž AC u tački D. Tako da je:

$$CO : OA = CD : DA,$$

kao i:

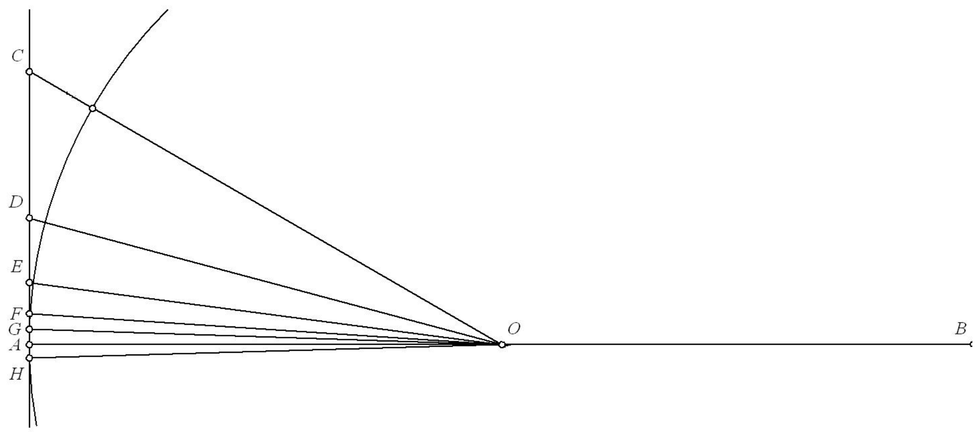
$$[(CO + OA) : OA = CA : DA]$$

ili

$$(CO + OA) : CA = OA : AD.$$

Iz (1) i (2) sledi:

$$OA : AD > 571 : 153 \qquad (3)$$



Slika 3.11: Merenje kruga – Teorema 3 – I deo dokaza

Na osnovu prethodnog je:

$$OD^2 : AD^2 \; [= (OA^2 + AD^2) : AD^2 > (571^2 + 153^2) : 153^2] > 349450 : 23409,$$

pa je:

$$OD : DA > 591\tfrac{1}{8} : 153 \tag{4}$$

Drugi korak dokaza

Sličan postupak se ponavlja i drugi put. Konstruiše se prava OE, bisektrisa ugla $\angle AOD$, koja seče duž AD u tački E. Onda je:

$$DO : OA = DE : EA$$

i

$$(DO + OA) : DA = OA : AE.$$

Iz (3) i (4) sledi da je:

$$OA : AE \; [> (591\tfrac{1}{8} + 571) : 153]$$

tj.

$$OA : AE > 1162\tfrac{1}{8} : 153 \tag{5}$$

Takođe važi:

$$\begin{aligned} OE^2 : EA^2 &> ((1162\tfrac{1}{8})^2 + 153^2) : 153^2) \\ &> (1350534\tfrac{33}{64} + 23409) : 23409 \\ &> 1373943\tfrac{33}{64} : 23409. \end{aligned}$$

Konačno je:

$$OE : EA > 1172\tfrac{1}{8} : 153 \tag{6}$$

Treći korak dokaza

Neka je OF bisektrisa ugla $\angle AOE$ i neka seče duž AE u tački F. Iz (3) i (5) sledi da je:

$$OA : AF > (1162\tfrac{1}{8} + 1172\tfrac{1}{8}) : 153$$

i

$$OA : AF > 2334\tfrac{1}{4} : 153 \tag{7}$$

Zato je:

$$OF^2 : FA^2 > ((2334\tfrac{1}{4})^2 + 153^2) : 153^2)$$

tj.

$$OF^2 : FA^2 > 5472132\tfrac{1}{16} : 23409$$

i

$$OF : FA > 2339\tfrac{1}{4} : 153 \tag{8}$$

Četvrti korak dokaza

U četvrtom ponavljanju postupka prava OG je bisektrisa ugla $\angle AOF$, koja seče duž AF u tački G. Iz (7) i (8) se dobija:

$$OA : AG > (2334\tfrac{1}{4} + 2339\tfrac{1}{4}) : 153$$

tj.

$$OA : AG > 4673\tfrac{1}{2} : 153.$$

Ugao $\angle AOC$, koji je 1/3 pravog ugla, deljen je na pola četiri puta, pa važi:

$$\angle AOG = \frac{1}{48}90^o.$$

Konstruiše se ugao $\angle AOH$ simetričan i podudaran uglu $\angle AOG$ u odnosu na pravu OA. Prava GA seče pravu OA u tački H. Onda je:

$$\angle GOH = \frac{1}{24}90^o.$$

Duž GH je stranica pravilnog 96–ougla opisanog oko datog kruga. Kako je:

$$OA : AG > 4673\tfrac{1}{2} : 153,$$

$$AB = 2OA$$

i

$$GH = 2AG,$$

sledi da je:

$$AB : (obim\,poligona)\ [> 4673\tfrac{1}{2} : (153 \cdot 96)] > 4673\tfrac{1}{2} : 14688.$$

Kako je:

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} [< 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}] < 3\frac{1}{7},$$

zaključuje se da je obim kruga (koji je manji od obima poligona) manji od $3\frac{1}{7}AB$, AB je prečnik kruga.

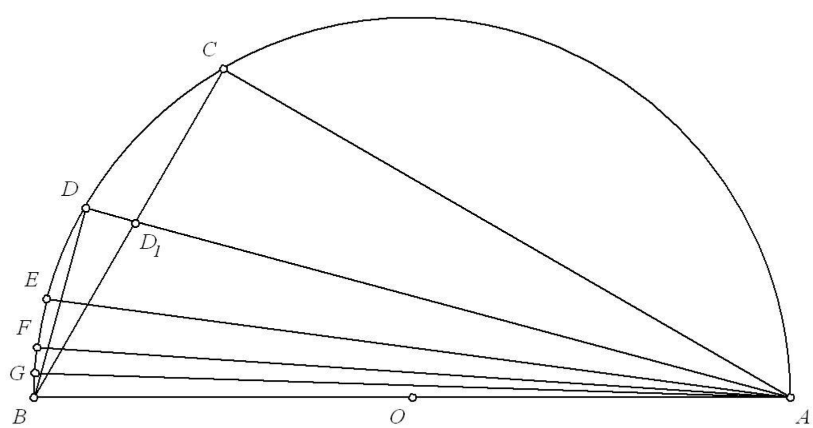
II deo dokaza

Neka je AB prečenik kruga i neka prava AC seče krug u tački C, tako da je ugao $\angle CAB$ jednak 1/3 pravog ugla. Tada je:

$$AC : CB\ [= \sqrt{3} : 1] < 1351 : 780.$$

Prvi korak dokaza

Neka je AD bisektrisa ugla $\angle BAC$. Ona seče duž BC u tački D_1 i krug u tački D. Uglovi $\angle BDA$ i $\angle BCA$ su pravi, jer su uglovi nad prečnikom kruga.



Slika 3.12: Merenje kruga – Teorema 3 – II deo

Važe sledeće jednakosti:

$$\angle BAD = \angle D_1AC = \angle D_1BD.$$

Sledi da su trouglovi: ΔADB, ΔACD_1 i ΔBDD_1 slični, pa važe odnosi:

$$AD : DB = BD : DD_1$$

$$
\begin{aligned}
&[= AC : CD_1]\\
&= AB : BD_1\\
&= (AB + AC) : (BD_1 + CD_1)\\
&= (AB + AC) : BC
\end{aligned}
$$

tj.

$$(BA + AC) : BC = AD : DB.$$

Kako je:

$$AC : CB < 1351 : 780$$

i

$$BA : BC = 2 : 1 = 1560 : 780,$$

sledi da je:

$$AD : DB < 2911 : 780. \tag{1}$$

Takođe važi:

$$AB^2 : BD^2 < (2911^2 + 780^2) : 780^2$$

tj.

$$AB^2 : BD^2 < 9082321 : 608400,$$

pa je:

$$AB : BD < 3013\tfrac{3}{4} : 780. \tag{2}$$

Drugi korak dokaza

Neka je AE bisektrisa ugla $\angle BAD$, koja seče krug u tački E. Na isti način kao u prvom koraku dokazuje se da važi:

$$
\begin{aligned}
AE : EB &= (BA + AD) : BD\\
&< (3013\tfrac{3}{4} + 2911) : 780,
\end{aligned}
$$

iz (1) i (2) važi:

$$
\begin{aligned}
&< 5924\tfrac{3}{4} : 780\\
&< (5924\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{13}) : (780 \cdot \tfrac{4}{13})\\
&< 1823 : 240. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Kako je:

$$
\begin{aligned}
AB^2 : BE^2 &< (1823^2 + 240^2) : 240^2\\
&< 3380929 : 57600,
\end{aligned}
$$

važi da je:

$$AB : BE < 1838\tfrac{9}{11} : 240. \tag{4}$$

Treći korak dokaza

Neka je AF bisektrisa ugla $\angle BAE$, koja seče krug u tački F. Važi sledeće:

$$AF : FB = (BA + AE) : BE.$$

Iz (3) i (4) sledi:

$$\begin{aligned} AF : FB &< 3661\tfrac{9}{11} : 240 \\ &< ((3661\tfrac{9}{11}) \cdot \tfrac{11}{40}) : (240 \cdot \tfrac{11}{40}) \\ &< 1007 : 66. \end{aligned} \tag{5}$$

Tako da važi:

$$\begin{aligned} AB^2 : BF^2 &< (1007^2 + 66^2) : (66^2) \\ &< 1018405 : 4356, \end{aligned}$$

pa je:

$$AB : BF < 1009\tfrac{1}{6} : 66. \tag{6}$$

Četvrti korak dokaza

Neka je AG bisektrisa ugla $\angle BAF$, koja seče krug u tački G. Onda je:

$$AG : GB = (BA + AF) : BF.$$

Iz (5) i (6) sledi da je:

$$AG : GB < 2016\tfrac{1}{6} : 66$$

i

$$\begin{aligned} AB^2 : BG^2 &< ((2016\tfrac{1}{6}^2 + 66^2) : 66^2 \\ &< 4069284\tfrac{1}{36} : 4356. \end{aligned}$$

Zato je:

$$AB : BG < 2017\tfrac{1}{4} : 66$$

ili

$$BG : AB > 66 : 2017\tfrac{1}{4}. \tag{7}$$

Kako je ugao $\angle BAG$ rezultat četiri bisekcije ugla $\angle BAC$, koji je 1/3 pravog ugla, onda je on jednak $\frac{1}{48}90^o$. Centralni ugao za ugao $\angle BAG$ je duplo veći i iznosi $\frac{1}{24}90^o$. Tako da je duž BG stranica pravilnog upisanog 96-ougla u krug. Iz (7) sledi da je:

$$\textit{obim mnogougla} : AB > (96 \cdot 66) : 2017\tfrac{1}{4}$$

$$> 6336 : 2017\tfrac{1}{4}.$$

Kako je:

$$6336 : 2017\tfrac{1}{4} > 3\tfrac{10}{71},$$

zaključuje se da je obim kruga veći od prečnika kruga $3\frac{10}{71}$ puta.

Zaključak

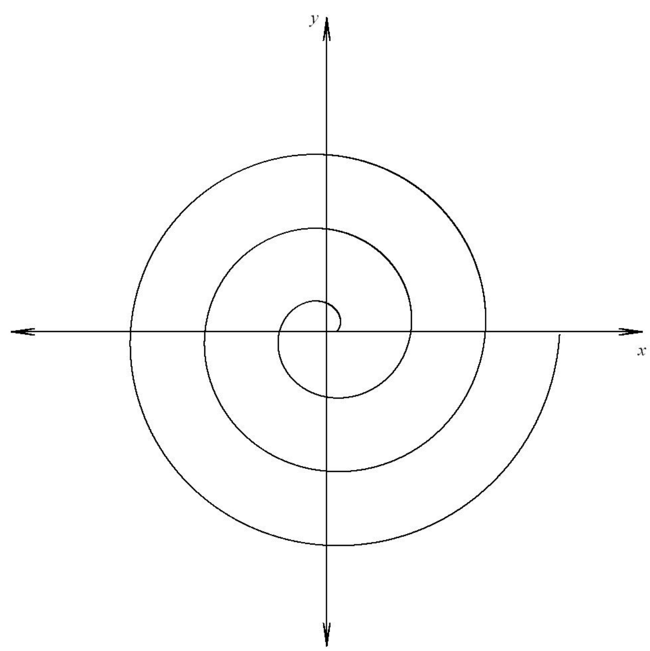
Ako je O obim kruga, a d prečnik kruga onda važi odnos:

$$3\tfrac{10}{71} < O/d < 3\tfrac{1}{7}.$$

3.2.2 Arhimedova spirala

Arhimedova spirala je rani primer mehaničke krive koja nastaje pomeranjem tačke. Nju je prvo proučavao Konon (280 – 220. stare ere) sa Samosa, grčki astronom i matematičar, a zatim Arhimed u svoj delu *O spiralama*.

Arhimedov opis konstrukcije njegove spirale



Slika 3.13: Arhimedova spirala

Lenjir se fiksira u jednoj tački. Zamislimo da u trenutku kada lenjir počne da rotira oko pomenute tačke, oko nje takođe počinje istom brzinom da se kreće mrav i to po lenjiru od zadate tačke. Taj bi mrav opisao „pravu” geometrijsku spiralu, koja se dobija kombinacijom dva kretanja: rotacijom oko tačke i kretanjem uzduž lenjira.

Jednačina Arhimedove spirale u polarnim koordinatama

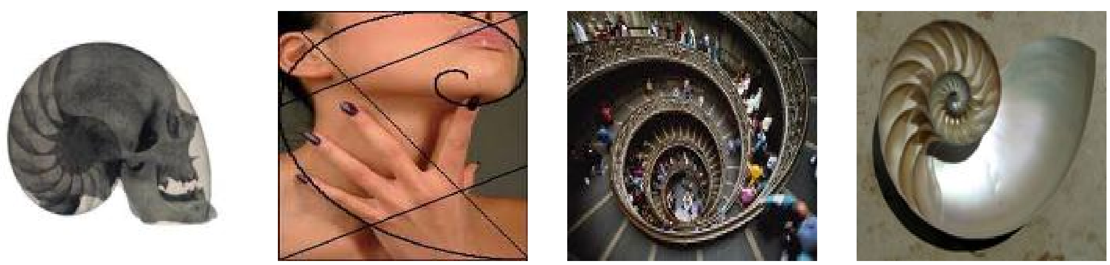
Arhimedova spirala može se opisati jednačinom:

$$r = a + b\theta,$$

pri čemu su (r, θ) koordinate proizvoljne tačke u polarnom koordinatnom sistemu. r je rastojanje tačke od koordinatnog početka, $r \geq 0$, θ je ugao koji zaklapa radijus vektor date tačke sa pozitivnim smerom x-ose, $\theta \geq 0, a, b > 0$.

Primena Arhimedove spirale i njeno pojavljivanje u prirodi

Arhimedova spirala se primenjuje u konstrukciji raznih alata kao što su pločasta glodala, kod centrifugalnih sisaljki, ventilatora, otpornika... Umetnički posmatrano, Arhimedova spirala može se prepoznati u svakodnevnom čovekovom okruženju.



Slika 3.14: Sličnosti sa Arhimedovom spiralom

Iz Arhimedovog dela *O spiralama*

U ovom delu rada će biti navedene neke teoreme koje se primenjuju kao teorijska osnova za geometrijsko rešavanje kvadrature kruga korišćenjem Arhimedove spirale [8, str. 151 – 176]. To su teoreme pod rednim brojevima: 2, 5, 7, 8, 14, 16 i 20 – I.

Teorema 2

Ako se svaka od dve tačke na dvema različitim pravama respektivno kreće ravnomerno po njima, i ako se izmere pređene dužine, parovi dužina izmerenih u isto vreme su proprcionalni.

Dokaz

Dokaz sledi iz proporcionalnosti parova pređenih dužina izmerenih u različito vreme na svakoj od pravih.

Teorema 5

Neka je dat krug sa centrom u tački O. U tački A kružnice konstruiše se tangenta na krug. Moguće je iz tačke O konstruisati duž OPF koja seče krug u tački P i tangentu u tački F, tako da ako je c obim kruga, važi nejednakost:

$$FP : OP < (luk\ AP) : c.$$

Dokaz

Neka je dužina proizvoljne duži d veća od obima kruga c. Iz centra kruga O konstruiše se duž OH paralelna tangenti u tački A. Iz tačke A konstruiše se duž APH, koja seče krug u tački P i duž OH u tački H, tako da je duž PH jednaka dužini duži d. Produženje duži OP seče tangentu u tački F. Važi sledeće:

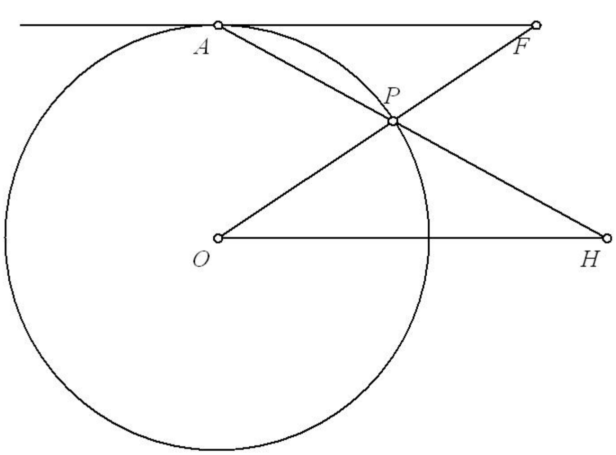
$$FP : OP = AP : PH,$$

tj.

$$FP : OP = AP : d,$$

jer su trouglovi ΔAPF i ΔHPO slični. Kako je $AP < (luk\ AP)$ i $c < d$ važi nejednakost:

$$FP : OP < (luk\ AP) : c.$$



Slika 3.15: Teorema 5

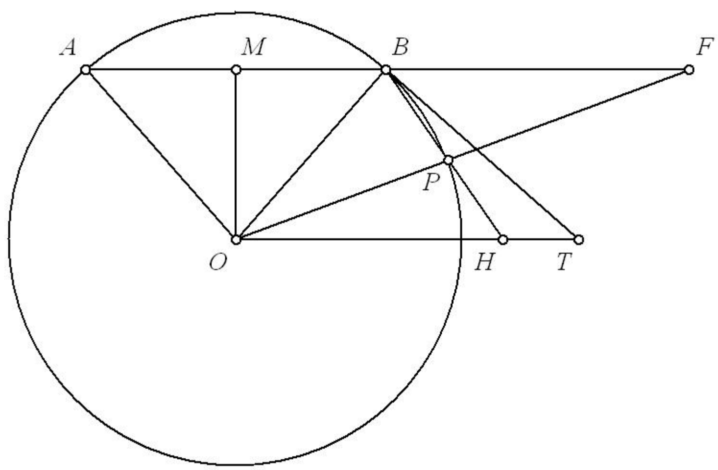
Teorema 7

Neka je dat krug sa centrom u tački O i tetiva AB, i neka je duž OM normalna na tetivu AB. Moguće je povući iz tačke O pravu liniju OPF, koja seče krug u tački P i produženje duži AB u tački F, tako da je:

$$FP : PB = D : E,$$

gde je $D : E$ neki zadat odnos veći od $BM : MO$.

Dokaz



Slika 3.16: Teorema 7

Konstruiše se prava OT paralelna pravoj AB tako da je OT upravna na OB. Trouglovi ΔBMO i ΔOBT su slični jer su uglovi $\angle BOM$ i $\angle BTO$ podudarni kao uglovi sa normalnim kracima. Kako iz pretpostavke teoreme važi da je:

$$D : E > BM : MO,$$

a iz sličnosti navedenih trouglova:

$$BM : MO = OB : BT,$$

sledi da je:

$$D : E > OB : BT.$$

Konstruiše se duž PH tako da je: $PH < BT$, pa je i:

$$D : E = OB : PH,$$

pri čemu tačka P pripada krugu, tačka H je na pravoj OT i tačke P, H i B su kolinearne, tj. produženje duži HP prolazi kroz tačku B. Onda je:

$$FP : PB = OB : PH = D : E.$$

Teorema 8

Neka je dat krug K sa centrom u tački O i tetiva kruga AB. U tački B se konstruiše tangenta t na krug, a iz tačke O normala na tetivu AB, koja je seče u tački M. Iz tačke O moguće je konstruisati pravu OFP koja seče tetivu AB u tački F, krug u tački P i tangentu t u tački G, tako da je:

$$FP : BG = D : E,$$

pri čemu je $D : E$ bilo koji odnos manji od odnosa $BM : MO$.

Dokaz

Kroz tačku O konstruiše se prava paralelna sa tetivom AB, koja seče tangentu t u tački T. Važi da je:

$$BM : MO = OB : BT.$$

Neka je

$$D : E < OB : BT.$$

Na tangenti t konstruiše se tačka C, tako da važi raspored tačaka $T - B - C$ i odnos

$$D : E = OB : BC,$$

jer je: $BC > BT$. Kroz tačke O, T i C konstruiše se krug $k1$, i neka prava OB seče krug $k1$ u tački K.

Kako je $BC > BT$ i prava OB normalna na pravu CT, moguće je iz tačke O povući pravu koja seče krug $k1$ u tački Q i duž CT u tački G tako da je: $GQ = BK$. Neka prava OGQ seče duž AB u tački F i krug k u tački P.

Važi da je:

$$CG \cdot GT = OG \cdot GQ$$

i

$$OF : OG = BT : GT,$$

tj.

$$OF \cdot GT = OG \cdot BT.$$

Sledi da je:

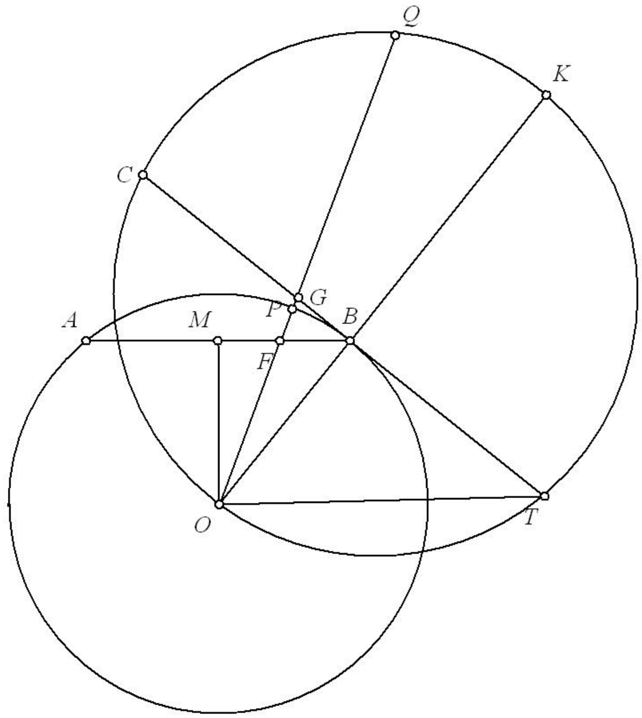
$$CG \cdot GT : OF \cdot GT = OG \cdot GQ : OG \cdot BT,$$

tj.

$$CG : OF = GQ : BT.$$

Kako je prema konstrukciji: $GQ : BT = BK : BT$, pa važi i

$$GQ : BT = BC : OB = BC : OP.$$



Slika 3.17: Teorema 8

Takođe je:

$$OP : OF = BC : CG$$

i

$$PF : BG = OP : BC.$$

Kako je: $OP : BC = OB : BC = D : E$, konačno je i : $PF : BG = D : E$.

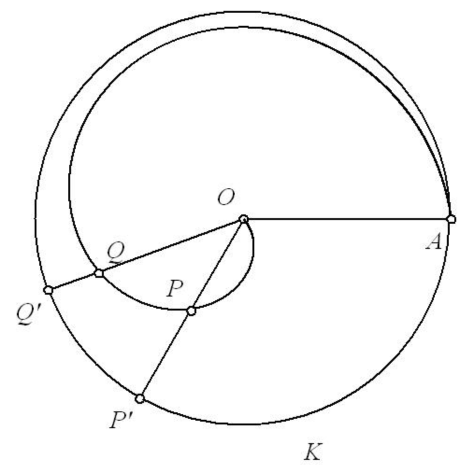
Teorema 14

Ako je tačka O početak, a tačke P i Q dve tačke na prvom okretu spirale, ako produženja duži OP i OQ seku „prvi krug" $AKP'Q'$ u tačkama P' i Q' i ako je OA inicijalna linija spirale, onda je:

$$OP : OQ = (luk\, AKP') : (luk\, AKQ').$$

Dokaz

Prava AO rotira ravnomerno oko tačke O i tačka A opisuje kružnicu kruga $AKP'Q'$, a u isto vreme tačka koja opisuje spiralu se ravnomerno pomera duž prave OA. Zato, dok tačka A opisuje luk AKP', tačka koja opisuje spiralu opisuje (prelazi) dužinu OP i



Slika 3.18: Teorema 14

dok tačka A opiše luk AKQ', tačka koja opisuje spiralu opisuje dužinu OQ. Iz Teoreme 2 sledi da je:

$$OP : OQ = (luk\ AKP') : (luk\ AKQ').$$

Teorema 16

Neka je prava BC tangenta u tački P prvog okreta spirale sa početnom tačkom O i neka je duž PC „prednji" segment duži BC, onda je ugao $\angle OPC$ tup, a ugao $\angle OPB$ oštar.

Dokaz

Neka je tačka OA inicijalna linija spirale i AKP' „prvi krug". Konstruiše se krug DLP sa centrom u tački O i poluprečnikom OP, koji seče pravu OA u tački D.

Krug DLP u „pozitivnom" smeru od tačke P upada u spiralu, a u „suprotnom" smeru od tačke P je oko nje, jer je radijus vektor spirale na „pozitivnoj" strani spirale veći, a na „negativnoj" manji od duži OP.

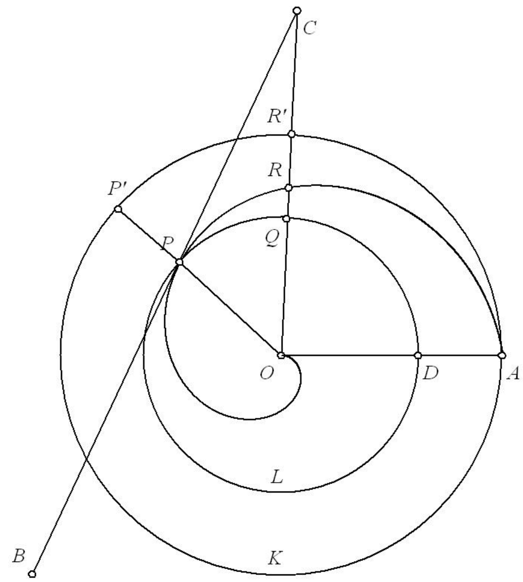
Ugao $\angle OPC$ nije oštar, jer nije manji od pravog ugla između prave OP i tangente na krug u tački P. Ugao $\angle OPC$ nije prav ugao, što se dokazuje kontrapretpostavkom.

Ako bi ugao $\angle OPC$ bio prav, onda bi prava BC dodirivala krug DLP u tački P. Prema Teoremi 5 moguće je konstruisati pravu OQC, koja seče krug DLP u tački Q, a pravu BC u tački C, tako da važi:

$$CQ : OQ < (luk\ PQ) : (luk\ DLP).$$

Neka prava OC seče spiralu u tački R i „prvi krug" u tački R', i neka produženje duži OP seče „prvi krug" u tački P'. Iz prethodne nejednakosti sledi da je:

$$CO : OQ < (luk\ DLQ) : (luk\ DLP)$$



Slika 3.19: Teorema 16

i

$$CO : OQ < (luk\ AKR') : (luk\ AKP').$$

Na osnovu Teoreme 14 sledi da je:

$$CO : OQ < OR : OP,$$

što je nemoguće jer je $OQ = OP$ i $OR < OC$.

Kako je u prethodnom dokazano da ugao $\angle OPC$ nije ni oštar, ni prav, zaključak je da je on tup ugao.

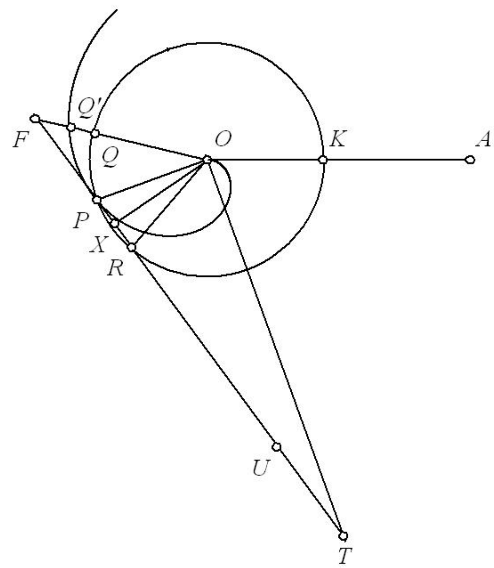
Teorema 20, I deo

Neka je P tačka na prvom okretu spirale u kojoj se konstruiše tangenta na nju. Kroz početnu tačku spirale O konstruiše se normala na duž OP. Neka je T presečna tačka normale i tangente. Konstruiše se krug sa centrom u tački O poluprečnika OP. Neka je K presečna tačka kruga i inicijalne linije spirale OA. Onda je dužina duži OT jednaka dužini luka kruga KP merenog u pozitivnom smeru kretanja spirale.

Dokaz

Neka je P tačka na prvom okretu spirale i neka je konstruisana tangenta na spiralu u tački P. Presek tangente i kruga poluprečnika OP je tačka R. Prema Teoremi 16 ugao $\angle OPR$ je oštar. Ako dužina duži OT ne bi bila jednaka dužini luka KRP, morala bi biti veća ili manja od njega.

Prvo se pretpostavi da je dužina OT veća od luka KRP.



Slika 3.20: Teorema 20

Na duži OT uočimo tačku U tako da je $OU < OT$ i $OU > (luka\ KRP)$. Na osnovu toga važi nejednakost:

$$\frac{PO}{OU} > \frac{PO}{OT}.$$

Ako sa X označimo središte duži RP, trouglovi ΔOPT i ΔOPX su slični, pa važi jednakost:

$$\frac{PO}{OT} = \frac{PX}{OX}.$$

Prema Teoremi 7 moguće je konstruisati pravu OQF, koja seče krug u tački Q i produženje duži RP u tački F, tako da važi odnos:

$$FQ : PQ = PO : OU.$$

Neka OF seče spiralu u tački Q'. Kako je $OP = OQ$ iz prethodne jednakosti sledi:

$$FQ : QO = PQ : OU.$$

Prema pretpostavci je :

$$PQ : OU < (luk\ PQ) : (luk\ KRP).$$

Sledi da je:

$$FO : QO < (luk\ KRQ) : (luk\ KRP).$$

Kako na osnovu Teoreme 14 važi:

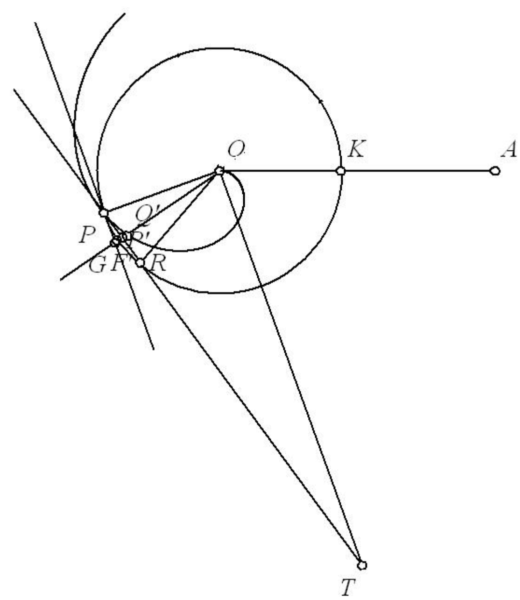
$$(luk\ KRQ) : (luk\ KRP) = OQ' : OP,$$

onda bi trebalo da važi i:

$$\frac{FO}{QO} < \frac{OQ'}{OP}.$$

Ali kako je $QO = OP$ onda bi bilo i $FO < OQ'$, što je nemoguće, pa kontrapretpostavka da je dužina OT veća od luka KRP ne važi.

U sledećem koraku se pretpostavi da je dužina OT manja od luka KRP.



Slika 3.21: Teorema 20a

Neka je data proizvoljna duž OU tako da važi:

$$OT < OU < (luk\ KRP),$$

pa važi i sledeća nejednakost:

$$\frac{PO}{OU} < \frac{PO}{OT}.$$

Ako se sa X označimo središte duži RP, trouglovi ΔOPT i ΔOPX su slični, pa važi jednakost:

$$\frac{PO}{OT} = \frac{PX}{OX}.$$

Prema Teoremi 8 može se konstruisati prava $OF'P'G$ koja seče duž PR u tački F', krug u tački P' i tangentu (na krug u tački P) u tački G, tako da važi nejednakost:

$$F'P' : PG = PO : OU.$$

Neka prava $OF'P'G$ seče spiralu u tački Q'. Tada je:

$$F'P' : P'O = PG : OU,$$

tj.

$$F'P' : P'O > (luk\ AP') : (luk\ KRP),$$

jer je: $PG > (luk\ AP')$ i $OU < (luk\ KRP)$. Sledi da je:

$$F'O : P'O < (luk\ PKP') : (luk\ KRP)$$

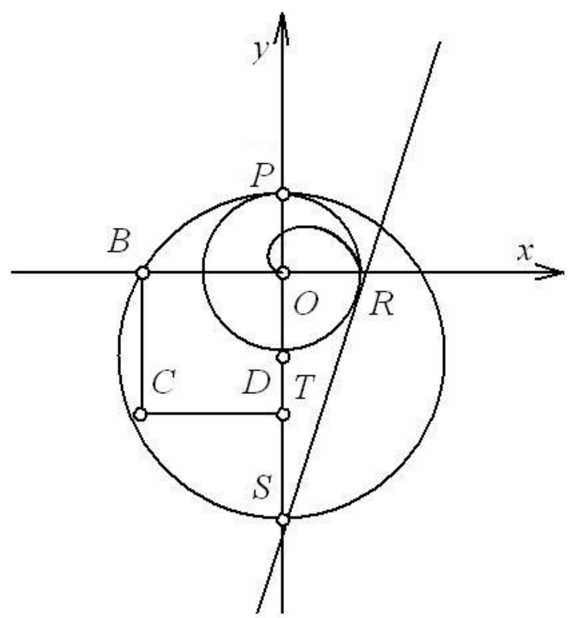
tj.

$$F'O : P'O < OQ' : OP,$$

što se zaključuje iz Teoreme 14. Prethodno je nemoguće jer je: $OP = OP'$ i $OQ' < OF'$, pa je i kontrapretpostavka da je $OT < (luka\ KRP)$ neodrživa.

Zaključak je da mora biti $OT = (luk\ KRP)$.

Kvadrtura kruga pomoću Arhimedove spirale



Slika 3.22: Kvadrtaura kruga korišćenjem Arhimedove spirale

1. Konstruiše se jedinični krug sa centrom u tački O.

2. U pomenutom krugu konstruiše se Arhimedova spirala koja čini jedan poluobrt pre nego što preseče krug.

3. Iz presečne tačke R konstruiše se tangenta na spiralu. Presek normale na poluprečnik kruga (prava OP) i tangente je tačka S. $OS = \pi$, što se zaključuje na osnovu prethodnih teorema.

4. Konstriše se tačka T, tako da je $TS = TP$, centar novog kruga.

5. Opiše se krug poluprečnika TS, da bi se izračunao kvadratni koren iz broja π.

6. Presek prave koja prolazi kroz tačku O i koja je normalna na duž TS sa kružnicom poluprečnika TS je tačka B. Duž OB je stranica kvadrtata površine π.

Glava 4

NUMERIČKA KVADRATURA

Numerička kvadratura je metoda kojom se broj π aproksimira nekim razlomkom ili algebarskom vrednošću do željene tačnosti, pa se pristupa konstrukciji tog broja.

4.1 O broju π

Broj π je matematička konstanta, koja se široko primenjuje u matematici i fizici. Njena približna vrednost je 3.14159, a definiše se kao odnos obima i prečnika kruga, ili kao odnos površine kruga i kvadrata nad njegovim poluprečnikom. π je takođe poznat i kao Arhimedova konstanta. Oznaka za broj π potiče od grčke reči *perimetros*, što znači meriti okolo. U matematiku ju je uveo matematičar Vilijem Džouns 1707. godine, kada je objavio *Novi uvod u matematiku*, mada je korićena ranije za označavanje obima kruga. Oznaka π je postala standardna nakon što ju je usvojio Leonard Ojler[1] 1734. godine.

π je iracionalan broj, što znači da se njegova vrednost ne može izraziti preko razlomaka. Zbog toga njegov decimalni zapis nema kraja i nije periodičan. Ovu njegovu osobinu je dokazao Johan Hajnrih Lambert 1761. godine. π je takođe transcedentan broj, što znači da ga nije moguće izraziti korišćenjem konačnog broja celih brojeva uz četiri osnovne računske operacije (sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje) i korenovanje. To je dokazao Ferdinand fon Lindeman 1882. godine, što znači da ne postoji polinom sa racionalnim koeficijentima čiji bi koren bio broj π. Tokom istorije matematike vršeno je mnogo pokušaja da se što preciznije izračuna vrednost broja π i razume njegova priroda.

Numerička vrednost broja π

Numerička vrednost broja π zaokružena na 64 decimalna mesta je:

$$\pi \approx 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923.[12]$$

[1] Leonard Ojler je bio švajcarski matematičar i fizičar, koji je živeo i radio u XVIII veku. Dao je doprinos nauci značajnim otkrićima u oblastima matematičke analize i teorije grafova, kao i na poljima mehanike, optike i astronomije.

Iako se vrednost broja π izračunava do više od 2 biliona decimala, osnovne primene kao što je računanje obima kruga, retko zahtevaju više od nekoliko decimala. Beskonačan niz cifara u decimalnom zapisu broja π vekovima je predmet interesovanja matematičara i laika.

Formule sa π

U matematici broj π se izražava i koristi na dosta različitih načina, od oblika beskonačnih redova i proizvoda do integrala i specijalnih funkcija. Neke od tih formula su:

- Fransoa Vijetova aproksimacija, 1593. godina:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot ..$$

- Lajbnicova aproksimacija:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

- Valisov proizvod:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot ..$$

- Bazelski problem, koji je prvi rešio Ojler:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

- Verižni razlomak (jedan od primera)

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{9}{7 + \frac{16}{9 + \cdots}}}}.$$

Aproksimacije broja π

Najstarija poznata aproksimacija broja π potiče od Vavilonjana, koji su u XX veku stare ere vrednost za ovaj broj približno odredili sa $25/8 \approx 3.125$. U istom periodu u Rindovom papirusu π je aproksimirano sa $(16/9)^2 = 3.160493...$. U III veku stare ere Arhimed je odredio donju i gornju granicu za broj π: $223/71 < \pi < 22/7$ tj. $3.140845... < \pi < 3.142857...$.

Vremenom su razni naučnici izračunavali vrednost broja π sa sve većom tačnošću, tj. sa sve većim brojem tačnih decimalnih mesta. Od 1949. godine svi rekordi su izračunati pomoću elektronskih računara. Npr. 2004. godine kanadski tim naučnika izračunao je broj π za čiji je decimalni zapis potrebno 1.3511 biliona cifara ukupno. Francuski stručnjak za računare Fabris Belar je u januaru 2010. godine u računanju numeričke vrednosti za π došao do 2.7 triliona decimala. Prethodni rekord postigao je japanski naučnik Daisuke Takahaši avgusta 2009. godine sa 2.6 triliona decimala.

Zbog transcedentnosti broja π, ne postoje prikladni zatvoreni izrazi za taj broj, pa se u numeričkim izračunavanjima koriste približne aproksimacije. Za puno potreba 3.14 ili 22/7 je dobra aproksimacija, i ako inženjeri često koriste 3.1416 (5 značajnih cifara) ili 3.14159 (6 značajnih cifara) radi veće preciznosti. Aproksimacije 22/7 i 355/113, sa 3 i 7 značajnih cifara, dobijaju se iz jednostavnog razvoja π u verižni razlomak. Njih je dao kineski matematičar i astronom Zu Čongži u V veku.

Numerička formula:

$$\left(\frac{63}{25}\right)((17+15\sqrt{5})(7+15\sqrt{5}))$$

aproksimira π sa 9 sigurnih cifara.

Za brza izračunavanja, mogu se koristiti formule poput Mejčinove:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

zajedno sa Tejlorovim razvojem funcije arctan. Formule ove vrste su poznate kao formule slične Mejčinovoj. Približne vredosti za broj π sa ogromnim brojem decimala, nemaju više nikakvu praktičan značaj, osim za testiranje novih superračunara ili za dostizanje novih rekorda u broju decimalnih mesta.

1996. godine Dejvid H. Bejli, zajedno sa Piterom Borvajnom i Sajmonom Pluferom, otkrio je novu formulu za π u obliku zbira beskonačnog reda:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right).$$

Ova formula omogućava da se lako izračuna k-ta binarna ili heksadecimalna cifra broja π bez potrebe za računanjem prethodnih k-1 cifara. U ostale formule koje se koriste za računanje približne vrednosti broja π spadaju:

- $$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!!} = 1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{5}\left(1 + \frac{3}{7}\left(1 + \frac{4}{9}\left(1 + ...\right)\right)\right)\right)$$

  (Njutn[2])

[2]Isak Njutn (1643 – 1727) je bio engleski fizičar, matematičar, astronom, alhemičar i filozof prirode. On je razvio infitezimalni račun, pronašao zakon gravitacije i zakon kretanja.

- $$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

  (Ramanudžan)

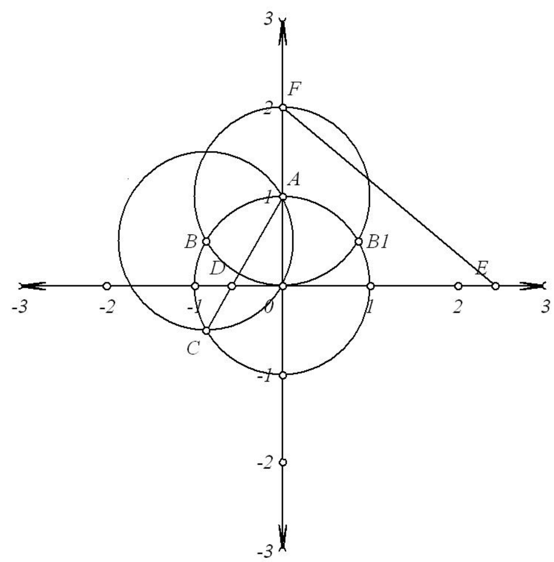
- $$\pi = 20 \arctan \frac{1}{7} + 8 \arctan \frac{3}{79}$$

  (Ojler)

- $$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k!)(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$$

  (David Čudnovski i Grigorij Čudnovski).

4.2 Aproksimacija Kočanskog



Slika 4.1: Aproksimacija Kočanskog

Kočanski, poljski jezuitski sveštenik, 1685. godine, aproksimirao je broj π sledećom formulom:

$$\pi \approx \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}} \approx 3.141533....$$

Konstrukcija

U Dekartovom koordinatnom sistemu xOy konstruiše se jedinični krug O sa centrom u koordinatnom početku $O(0,0)$. Zatim se u tački $A(0,1)$ takođe konstruiše jedinični krug A. Njegovoj kružnici pripada tačka $F(0,2)$, pri tome je $AF = AO = 1$. Jedna od dve presečne tačke navedena dva kruga je tačka $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Zatim se konstruiše jedinični krug B sa centrom u tački B. Presečne tačke krugova O i B su tačke A i $C(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$. Presek duži AC i x-ose je tačka $D(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$. Zatim se konstriše tačka E tako da je njeno rastojanje od tačke D jednako 3, pa su njene koordinate $E(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$. Dužina duži EF je:

$$EF = \sqrt{2^2 + (3 - \frac{1}{3}\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}.$$

Glava 5

REŠIVOST PROBLEMA KVADRATURE KRUGA

5.1 Uvod

Konačnom rešenju problema kvadrature kruga tj. dokazu da je nemoguće konstruisati kvadrat iste površine kao unapred zadati krug samo uz pomoć šestara i lenjira, prethodila su mnoga matematička saznanje prvenstveno iz oblasti algebre. Iz tog razloga u ovom uvodnom delu će biti navedene neke osnovne definicije i teoreme koje su bitne za dalje izlaganje.

5.1.1 Rešavanje algebarskih jednačina

Jednačina oblika:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

pri čemu su a_i proizvoljni kompleksni brojevi i x nepoznat kompleksan broj, je numerička (brojna) algebarska jednačina n-tog stepena. Ako je bar jedan od koeficijenata a_i promenljiva (proizvoljan broj), reč je o opštoj algebarskoj jednačini.

Teorija o rešavanju algebarskih jednačina oblikovana je u XIX veku kada se došlo do bitnih rezultata iz ove oblasti. Hronološki gledano, još su drevni Egipćani umeli da odrede rešenja (korene) kvadartne jednačine. U doba renesanse (XV – XVI vek) jednačinu trećeg stepena (kubnu jednačinu) je delimično rešio italijanski matematičar Fero. Nezavisno od njega, 1535. godine, italijanski naučnici Tartalja i Kardano, su takođe objasnili način rešavanja kubne jednačine. Kardano je u delu *Ars magna* iz 1545. godine objavio metode rešavanja jednačina trećeg i četvrtog stepena. Rešenje kubne jednačine pripada Tartalji, a jednačine četvrtog stepena Ferariju, što je Kardano u svom delu i naglasio.

Sledeći bitan korak u teoriji rešavanja algebarskih jednačina pripisuje se Lagranžu[1], koji je 1770. godine, u svom delu *Reflexions sur la resolution algebrique des equations* analizirao sve njemu poznate metode za rešavanje jednačina drugog, trećeg i četvrtog stepena, pokušavši da utvrdi njihove zakonitosti i mogućnost njihove generalizacije za rešavanje jednačina petog i višeg stepena. Nije uspeo u svom nastojanju.

Norveški matematičar Abel (1802 – 1829) je 1824. godine objavio dokaz da se u opštem slučaju jednačine petog ili višeg stepena ne mogu rešiti algebarski, tj. preko radikala. On je primerom pokazao da su neke jednačine petog stepena rešive pomoću radikala i to veoma lako, npr. , jednačina $x^5 - 1 = 0$, čiji je jedan koren $x = 1$, dok se preostala četiri određuju nalaženjem kvadratnih, a ne četvrtih korena. Abel je postavio pitanje: „Koje jednačine stepena većeg od četiri su rešive pomoću radikala?” , umro je u 26. godini, 1829. godine, a nije rešio ovaj problem.

Značajne rezultate iz teorije algebarskih jednačina dao je Galoa (1811 – 1832), francuski matematičar, koji je 1829. godine, na Akademiji nauka predstavio novu teoriju jednačina. Galoova teorija jednačina se razvila kao deo teorije grupa. Prema Galou svakoj jednačini odgovara određena grupa sa određenom strukturom podgrupa. Galoa je pokazao da ako rešivost polinoma zavisi od rešivosti njegove odgovarajuće permutacione grupe (grupe Galoa) [1].

5.1.2 Polinomi

U ovom delu teksta su navedene definicije i teoreme koje će se koristiti u daljem izlaganju [4, str. 363].

Neka je $F = (F, +, \cdot, 0, 1)$ polje i neka $a_0, ..., a_n \in F$. Algebarski izraz oblika :

$$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

je polinom nad poljem F sa koeficijentima $a_0, a_1...a_n$.

Ako je $a_n \neq 0$, sledi da je stepen polinoma jednak n.

Skup svih polinoma nad poljem F označava se sa $F[x]$.

Element $a \in F$ je koren polinoma $p \in F[x]$ ako je $p(a) = 0$.

Polinom $p \in F[x]$ je svodljiv nad F ako je p proizvod polinoma nad F stepena manjeg od stepena polinoma p.

5.1.3 Raširenje polja

Neka su F i K polja takva da je $F \subset K$. F je podpolje polja K, a K je raširenje polja F.

Svako polje L za koje važi $F \subset L \subset K$ je međupolje.

Takođe važi da je K vektorski prostor nad F. Dimenzija ovog prostora označava se sa $|K : F|$. Ako je ova dimenzija konačna onda je K konačno raširenje polja F.

[1] J. L. Lagranž (1736 – 1812), istaknuti francuski matematičar.

Element $a \in K$ je algebarski nad F ako je a koren nekog polinoma nad F.
Element $A \in K$ je transcedentan nad F ako i samo ako nije algebarski nad F.

Teorema

Neka su F i K polja takva da je:

$$F \subset L \subset K.$$

Tada je:

$$|K : L| \cdot |L : F| = |K : F|.$$

Dokaz

Neka je A baza vektorskog prostora K nad L i B baza vektorskog prostora L nad F. Prema definiciji vektorskog prostora važi $|K : L| = |A|$ i $|L : F| = |B|$. Prvo se dokazuje da je: $C = \{ab | a \in A, b \in B\}$ baza prostora K nad F, tj. da je generatrisa vektorskog prostora K i da su vektori iz skupa C linearno nezavisni.

1. Prvo se dokazuje da je svako $x \in K$ linearna kombinacija vektora iz skupa C.

   Kako je A baza vektorskog prostora K nad L, postoji $n \in N$, $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n \in L$ i $a_1, a_2 ... a_n \in A$ tako da je: $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$.

   Kako je B baza vektorskog prostora L nad F, svako $\alpha_i, i = 1...n$ je linearna kombinacija nekih vektora $\beta_1, \beta_2 ... \beta_m$ iz B. Tako da važi: $\alpha_i = \beta_{i1} b_1 + ... + \beta_{im} b_m$ za neke $\beta_{i1}, \beta_{i2} ... \beta_{im} \in F$ i za $i = 1...n$.

   Iz prethodnog sledi da je:

   $$x = \beta_{11} b_1 a_1 + \beta_{12} b_2 a_1 + ... + \beta_{1m} b_m a_1 + ... + \beta_{n1} b_1 a_n + \beta_{n2} b_2 a_n + ... + \beta_{nm} b_m a_n,$$

   tj. skup $C = \{ab | a \in A, b \in B\}$ je generatrisa vektorskog prostora K nad F.

2. Skup C je linearno nezavisan.

   Neka su $\lambda_{ij} \in F, a_i \in A, b_j \in B, i = 1...n, j = 1...m$ takvi da je:

   $$\sum_{i,j} \lambda_{ij} a_i b_j = 0.$$

   Tada je:

   $$\sum_i (\sum_j \lambda_{ij} b_j) a_i = 0$$

   za svako $i = 1...n$. Zbog linearne nezavisnosti vektora a_i nad poljem L sledi da je

   $$\sum_j \lambda_{ij} b_j = 0$$

   za $i = 1...n$.Takođe zbog linearne nezavisnosti vektora b_j sledi da je $\lambda_{ij} = 0, j = 1...m$, $i = 1...n$, što znači da je skup C linearno nezavisan.

Iz prethodnog se zaključuje da je skup C baza prostora K nad poljem F, tj. $|K:F| = |C|$. Kako je preslikavanje $\varphi : (a,b) \to a \cdot b$ bijekcija, pri čemu je $a \in A$ i $b \in B$, onda važi:

$$|K:F| = |C| = |AB| = |A| \cdot |B| = |K:L| \cdot |L:F|.$$

5.2 Transcedentnost broja π

Konačnu prekretnicu u razmatranju rešivosti drevnog problema kvadrature kruga prestavlja matematičko otkriće u XIX veku da je broj π transcedentan. Zasluge se u najvećoj meri pripisuju nemačkim matematičarima Ferdinandu fon Lindemanu (1852 – 1939) i Karlu Vajerštrasu (1815 – 1897), kao i francuskom matematičaru Čarlsu Hermitu (1822 – 1901).

Transcedentnost broja π kao i broja e je direktna posledica Vajerštras-Lindemanove teoreme [2].

I formulacija teoreme

Ako su: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ algebarski brojevi, linearno nezavisni nad skupom racionalnih brojeva (skupom Q), onda su : $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, ..., e^{\alpha_n}$ linearno nezavisni nad poljem Q.

II formulacija teoreme

Ako su: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ različiti algebarski brojevi, tada su : $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, ..., e^{\alpha_n}$ linearno nezavisno nad skupom algebarskih brojeva.

Teorema je poznata i kao Hermit-Lindemanova teorema ili Hermit-Lindeman-Vajerštrasova teorema. Čarls Hermit je prvi dokazo pojednostavljenu gornju teoremu, pri čemu su: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ racionalni brojevi, a linearna nezavisnost je jedino osigurana takođe nad skupom racionalnih brojeva. Ovaj rezultat se često pominje kao Hermitova teorema.

Skica dokaza

Dokazuje se da ako su: $a_1, a_2, ..., a_n$ algebarski brojevi tako da važi: $(a_1, a_2, ..., a_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ i $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ različiti algebarski brojevi, onda je:

$$a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + ... + a_n e^{\alpha_n} \neq 0.$$

Lema A

Ako su K i c celi brojevi različiti od nule, i $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ koreni polinoma sa celobrojnim koeficijentima: $T(x) = vx^m + ... + u$, pri čemu su: $v, u \neq 0$, onda je:

$$K + c(e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + ... + e^{\beta_m}) \neq 0.$$

Dokaz

Uoči se sledeća funkcija:

$$f(x) = \frac{v^{(m-1)p}T^p(x)x^{p-1}}{(p-1)!},$$

pri čemu je p prost broj, i integral :

$$I(s) = \int_0^s e^{s-x} f(x)dx.$$

Iz prethodnog sledi da je:

$$I(s) = e^s \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(s),$$

pri čemu je $n = mp + p - 1$ stepen od funkcije f (f je n puta diferencijabilna), i $f^{(j)}$ je j-ti izvod funkcije f.

Razmatra se sledeća suma:

$$c\sum_{i=1}^{m} I(\beta_i) = c\sum_{i=1}^{m} e^{\beta_i} \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) - c\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(\beta_i) =$$

$$= \left(K + c\sum_{i=1}^{m} e^{\beta_i}\right) \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) - K\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) - c\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(\beta_i).$$

Izraz na levoj strani jednakosti $\to 0$, kada $p \to \infty$, tj:

$$c\sum_{i=1}^{m} I(\beta_i) \to 0, p \to \infty,$$

jer je:

$$|I(s)| \leq |s| \cdot max_{x\in[0,s]}[|T(x)|] \cdot \frac{(max_{x\in[0,s]}[|xT(x)|])^{(p-1)}}{(p-1)!}.$$

Za dato s desna strana nejednakosti je jednaka izrazu:

$$c_1 \frac{c_2^k}{k!},$$

pri čemu su c_1, c_2 konstante i $k = p - 1$, koji $\to 0$, kada $k \to \infty$.

Dalje iz definicije funkcije f, da je za svako $j < p - 1$, $f^{(j)} = 0$, a za svako $j \geq p$ je: f$^{(j)} = 0\ (mod\, p)$. Takođe je:

$$f^{(p-1)} = v^{(m-1)p}T^p(0) = v^{(m-1)p}u^p,$$

tako da je:

$$\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) = v^{(m-1)p}u^p\ (mod\, p).$$

Iz definicije funkcije f i brojeva: $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ sledi da je:

$$f(x) = (v^m(x-\beta_1)(x-\beta_2)...(x-\beta_m))^p \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Prema tome, za svako $1 \leq i \leq n$ i za svako $j < p$ je $f^{(j)}(\beta_i) = 0$, dok za svako $j \geq p$, $\frac{1}{pv^{mp}} \sum_{i=1}^{m} f^{(j)}(\beta_i)$ je vrednost simetričnog polinoma sa celobrojnim koeficijentima, stepena manjeg od mp, u tačkama β_i. Takođe je za svako j, $\frac{1}{pv^{mp}} \sum_{i=1}^{m} f^{(j)}(\beta_i)$ vrednost polinoma sa celobrojnim koeficijentima, najvišeg stepena mp, u celim brojevima deljenim sa v, zato je to ceo broj deljen sa v^{mp}. Zaključuje se da je za svako j, $\sum_{i=1}^{m} f^{(j)}(\beta_i)$ ceo broj jednak nuli po modulu p, i takođe je: $c\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(\beta_i) = 0 \ (mod\, p)$. Tako da je: $K\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) + c\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(\beta_i) = Kv^{(m-1)p}u^p \ (mod\, p)$. Za $p > K$,u,v, leva i desna strana prethodne jednakosti jednake su celom broju različitom od nule (po modulu p). Iz prethodnog se zaključuje da je: $K + c(e^{\beta_1} + ... + e^{\beta_m}) \neq 0$, i lema A je dokazana.

Lema B

Ako su K i $c(1)$, $c(2)$,..., $c(n)$ celi brojevi različiti od nule, i ako su za svako $k = 1...n$, $\{\beta(k)_i\}(i = 1...m(k))$ koreni polinoma sa celobrojnim koeficijentima $T_k(x) = v(k)x^{m(k)} + ... + u(k)$, pri čemu su $v(k), u(k) \neq 0$, onda važi:

$$K + c(1)\cdot(e^{\beta(1)_1} + e^{\beta(1)_2} + ... + e^{\beta(1)_{m(1)}})$$

$$+c(2)\cdot(e^{\beta(2)_1} + e^{\beta(2)_2} + ... + e^{\beta(2)_{m(2)}}) + ...$$

$$+c(n)\cdot(e^{\beta(n)_1} + e^{\beta(n)_2} + ... + e^{\beta(n)_{m(n)}}) \neq 0.$$

Dokaz

Prvo treba napomenuti da koreni svakog polinoma $T_k(x)$ ostaju nepromenjeni nakon njegovog množenja brojem različitim od nule. Polinomi $T_k(x)$ određuju se tako da je proizvod $u(k)v(k)^{m(k)-1}$nezavisan od k, inače se svaki polinom $T_k(x)$ množi odgovarajućim celobrojnim faktorom, npr. :

$$\frac{1}{u(k)v(k)^{n(k)-1}} \prod_{j=1}^{n} u(j)v(j)^{m(j)-1}.$$

Za svako $k = 1..n$ važi $u(k)v(k)^{m(k)-1} = U$, pri čemu je U ceo broj. Prateći dokaz Leme A i definisanjem sličnih funkcija $f_k(x)$ i integrala $I_k(x)$ za svaki polinom $T_k(x)$, za svako $k = 1...n$ važi sledeće:

$$c(k)\sum_{i=1}^{m(k)} I_k(\beta(k)_i) = \left(K_k + c(k)\sum_{i=1}^{m(k)} e^{\beta(k)i}\right) \sum_{j=0}^{m(k)p+p-1} f_k^{(j)}(0)$$

$$-K_k \sum_{j=0}^{m(k)p+p-1} f_k^{(j)}(0) - c(k) \sum_{i=1}^{m(k)} \sum_{j=0}^{m(k)p+p-1} f_k^{(j)}(\beta(k)_i) =$$

$$= \left(\left(K_k + c(k) \sum_{i=1}^{m(k)} e^{\beta(k)_i} \right) U^p - K_k U^p \right) (mod \;\; p).$$

Za svaki ceo broj K_k postoje brojevi K_k-s tako da je njihova suma K. Sabiranjem n jednačina z,a svako $k = 1...n$, leva strana jednačine $\to 0$ kada $p \to \infty$, dok desna postaje jednaka izrazu:

$$\left(\left(K + \sum_{k=1}^{n} c(k) \sum_{i=1}^{m(k)} e^{\beta(k)_i} \right) U^p - K U^p \right),$$

tj. važi jednakost:

$$0 = \left(\left(K + \sum_{k=1}^{n} c(k) \sum_{i=1}^{m(k)} e^{\beta(k)_i} \right) U^p - K U^p \right) \; (mod\, p).$$

Kao u dokazu Leme A izborom broja p, $p > K, U$, i ako je $K \neq 0$, važi:

$$K + \sum_{k=1}^{n} c(k) \sum_{i=1}^{m(k)} e^{\beta(k)_i} \neq 0,$$

pa je Lema B dokazana.

Lema C

Ako su $b(0)$, $b(1)$,...,$b(n)$ celi brojevi različiti od nule i $\gamma(0)$, $\gamma(1)$, ..., $\gamma(n)$ različiti algebarski brojevi, onda je:

$$b(0)e^{\gamma(0)} + b(1)e^{\gamma(1)} + ... + b(n)e^{\gamma(n)} \neq 0.$$

Dokaz

Pretpostavi se da pod datim uslovima teoreme važi suprotno, tj. da je:

$$b(0)e^{\gamma(0)} + b(1)e^{\gamma(1)} + ... + b(n)e^{\gamma(n)} = 0.$$

Pokazaće se da je kontrapretpostavka neodrživa. Prvo se prethodna jednačina podeli sa $e^{\gamma(0)}$. Dobija se izraz:

$$K + b(1)e^{\alpha(1)} + ... + b(n)e^{\alpha(n)} = 0,$$

pri čemu je: $K = b(0)$ i $\alpha(i) = \gamma(i) - \gamma(0)$, za svako $i = 1...n$. Kako su $\gamma(i)$, za $i = 1...n$, različiti algebarski brojevi, takvi su i brojevi $\alpha(i)$, za $i = 1...n$, i oni su takođe različiti od nule. Za svako $k = 1...n$, $\alpha(k)$ je algebarski, pa je koren polinoma sa celobrojnim koeficijentima:

$$T_k = v(k)x^{m(k)} + ... + u(k),$$

za neke cele brojeve $v(k)$ i $u(k)$ različite od nule i za neki pozitivan ceo broj $m(k)$. Neka su $\alpha(k)_1$, $\alpha(k)_2$,...,$\alpha(k)_{m(k)}$ koreni polinoma T_k i $\alpha(k)_1 = \alpha(k)$. Neka je σ funkcija koja bira po jedan element iz svakog od nizova: $(1...m(1))$, $(1...m(2))$,..., $(1...m(k))$, tako da je $\sigma(k)$ ceo broj između 1 i $m(k)$. Iz polazne pretpostavke sledi da je:

$$\prod_{\{\sigma\}}(K + b(1)e^{\alpha(1)_{\sigma(1)}} + b(2)e^{\alpha(2)_{\sigma(2)}} + ... + b(n)e^{\alpha(n)_{\sigma(n)}}) = 0.$$

Prethodna jednakost ekvivalentna je sledećoj jednakosti:

$$K' + c(1)(e^{\beta(1)_1} + e^{\beta(1)_2} + ... + e^{\beta(1)_{\mu(1)}}) + c(2)(e^{\beta(2)_1} + e^{\beta(2)_2} + ... + e^{\beta(2)_{\mu(2)}})$$

$$+... + c(N)(e^{\beta(N)_1} + e^{\beta(N)_2} + ... + e^{\beta(N)_{\mu(N)}}) = 0,$$

pri čemu su K', N, $c(1), ...c(N)$, $\mu(1), ..., \mu(N)$ celi brojevi različiti od nule, a β-koeficijenti međusobno različiti i različiti od nule. Za svako $i = 1...N$ i svako $j = 1...\mu(i)$, $\beta(i)_j$ je suma izraza oblika $\alpha(k)_l$, za ($k = 1...n$ i $l = 1...m(k)$). Kako je $\prod$ proizvod za sve moguće izbore funkcije σ, sledi da je za svako i i za svako k, svaki (simetričan) polinom sa celobrojnim koeficijentima u tačkama : $\beta(i)_1, ..., \beta(i)_{\mu(i)}$, takođe simetričan, odakle sledi da je i svaki polinom sa celobrojnim koeficijentima, u tačkama: $\alpha(k)_1, ..., \alpha(k)_{m(k)}$, takođe simetričan. Kako je navedeni skup-skup korena polinoma sa celobrojnim koeficijentima, navedeni simetrični polinomi su racionalni brojevi (što sledi iz dokaza Leme A). Zato su: $\beta(i)_1, ..., \beta(i)_{\mu(i)}$ koreni polinoma sa racionalnim koeficijentima:

$$(x - \beta(i)_1)(x - \beta(i)_2)...(x - \beta(i)_{\mu(i)}).$$

Množenjem ovog polinoma odgovarajućim celim brojem (proizvodom imenilaca koeficijenata), dobija se polinom sa celobrojnim koeficijentima, čiji su koreni: $\beta(i)_1, ..., \beta(i)_{\mu(i)}$. Prema Lemi B prethodna suma ne može biti jednaka nuli, pa je kontrapretpostavka neodrživa, tj. Lema C je dokazana.

Finalni korak

Ako su: $a(1), a(2), ..., a(n)$ algebarski brojevi različiti od nule, i $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ različiti algebarski brojevi, onda je:

$$a(1)e^{\alpha(1)} + a(2)e^{\alpha(2)} + ... + a(n)e^{\alpha(n)} \neq 0.$$

Dokaz

Pretpostavi se da pod datim uslovima teoreme važi suprotno tj. da je:

$$a(1)e^{\alpha(1)} + a(2)e^{\alpha(2)} + ... + a(n)e^{\alpha(n)} = 0.$$

Pokazuje se da je kontrapretpostavka neodrživa. Dokaz je sličan dokazu Leme C. Za svako $i = 1...n$, $a(i)$ je algebarski broj, pa je koren nekog polinoma sa celobrojnim koeficijentima stepena $d(i)$, čiji su koreni: $a(i)_1, a(i)_2, ..., a(i)_{d(i)}$. Posebno je $a(i)_1 = a(i)$. Neka je σ funkcija koja bira po jedan element iz svakog od nizova: (1...d(1)),...,(1...d(n)), tako da je za svako $i = 1...n$, $\sigma(i) \in (1...d(i))$. Prema polaznoj pretpostavci je:

$$\prod_{\{\sigma\}}(a(1)_{\sigma(1)}e^{\alpha(1)} + a(2)_{\sigma(2)}e^{\alpha(2)} + ... + a(n)_{\sigma(n)}e^{\alpha(n)}) = 0,$$

za sve moguće izbore funkcije σ. Raspisivanjem prethodnog proizvoda dobijamo sumu oblika:

$$b(1)e^{\beta(1)} + b(2)e^{\beta(2)} + ... + b(N)e^{\beta(N)} = 0.$$

Za neki ceo broj N različit od nule, i za neke različite algebarske brojeve: $\beta(1), \beta(2), ..., \beta(N)$ (koji su algebarski kako suma algebarskih koeficijenata α), $b(1), b(2), ..., b(N)$ su polinomi u tačkama: $a(i)_j$ ($i = 1...n$ i $j = 1...d(i)$), sa celobrojnim koeficijentima. Kako je $\prod$ proizvod za sve moguće izbore funkcije σ, svaki od polinoma: $b(1), b(2), ..., b(N)$ je simetričan polinom sa celobrojnim koeficijentima u elementarno simetričnim polinomima skupa $a(i)_1...a(i)_{d(i)}$ za svako i. $b(1), b(2), ..., b(N)$ su racionalni brojevi (kao u dokazu Leme C) , i množenjem jednačine sa odgovarajućim celobrojnim faktorom, dobijamo identičnu jednačinu osim što su sada $b(1), ..., b(N)$ celi brojevi. Prema Lemi C kontrapretpostavka je neodrživa, pa važi teorema.

Napomena

Lema A je dovoljna za dokaz da je π iracionalan broj, inače bi važila jednakost: $\pi = k/n$, (k, n su celi brojevi) i onda bi $i\pi$ i $-i\pi$ bili koreni jednačine: $x^2 + k^2/n^2 = 0$ i važilo bi: $2 + e^{i\pi} + e^{-i\pi} \neq 0$, što je pogrešno.

Takođe, Lema C je dovoljna da se dokaže da je π transcedentan broj, inače bi bilo $1 + e^{i\pi} \neq 0$.

Transcedentnost brojeva e i π

Transcedentnost brojeva e i π je direktna posledica Lindeman-Vajerštrasove teoreme. Pretpostavi se da je α algebarski broj različit od nule. Onda je α linearno nezavisan skup nad skupom Q, pa je prema prvoj formulaciji teoreme skup $\{e^\alpha\}$ algebarski nezavisan skup ili drugim rečima e^α je transcedentan. Posebno je $e^1 = e$ transcedentan broj.

Alternativno, koristeći drugu formulaciju teoreme, može se dokazati da ako je α algebarski broj različit od nule, onda je skup $\{0, \alpha\}$ skup različitih algebarskih brojeva, pa je skup $\{e^0, e^\alpha\}$=$\{1, e^\alpha\}$ linearno nezavisan nad skupom algebarskih brojeva. Tako da e^α ne može biti algebarski, pa je transcedentan.

Zatim se dokazuje transcedentnost broja π. Ako bi π bio algebarski, tada bi i broj $2\pi i$ bio algebarski (jer je $2i$ algebarski). Prema Lindeman-Vajerštrasovoj teoremi $e^{2\pi i} = 1$ bio bi transcedentan, što je apsurd. Kontrapretpostavka je neodrživa, znači da je π transcedentan broj.

Takođe važi da ako je α algebarski broj različit od nule, onda su: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ i njihove odgovarajuće hiperboličke funkcije transcedentni brojevi.

5.3 Broj π nije konstruktabilan

Tačke u Euklidskoj ravni koje se mogu dobiti konstrukcijama primenom lenjira i šestara su konstruktabilne. Koristeći metode analitičke geometrije tačke se označe kao uređeni parovi realnih brojeva. Broj x je konstruktabilan ako je par $(x, 0)$ konstruktabilan. Takođe, a i b su konstruktabilne tačke ako i samo ako je par (a, b) je konstruktabilan. Za konstruktabilne tačke važe sledeće osobine, tj. sve dozvoljene konstrukcije su svodljive na sledeće koje se navode. Ako su A, B, C i D različite konstruktabilne tačke, tada važi:

1. Ako se prave AB i CD seku, onda je i njihova presečna tačka konstruktabilna.
2. Ako je K krug sa centrom u tački A i poluprečnikom AB koji seče pravu CD, tada su presečne tačke kruga K i prave CD konstruktabilne.

Ako se pretpostavi da koordinate tačaka A, B, C i D leže u nekom podpolju F realnih brojeva, koristeći se metodama analitičke geometrije neposredno se nalazi da:

- Ako važi navedeni slučaj 1, koordinate nove tačke leže u polju F.
- Ako važi navedeni slučaj 2, koordinate nove tačke leže u F ili u $F(\sqrt{a})$, gde je $a \in F$ neki pozitivan broj.

Zaključak je da za svaki konstruktabilan broj a postoji $n \in N$ tako da je:

$$Q = F_o \subset F_1 \subset ... \subset F_n$$

i $a \in F_n$, gde za $i \leq n$ važi $F_i = F_{i-1}(\sqrt{a_i})$, a_i je neki pozitivan broj iz F_{i-1}. Prema Teoremi iz dela 5.1.3 važi da je

$$|F_n : Q| = 2^m,$$

za neki $m \in N$, pa je i $|F(a) : Q|$ stepen broja 2. Otuda važi sledeće tvrđenje.

Teorema

Svaki konstruktibilan realan broj je algebarski nad poljem Q i njegov stepen nad Q jednak je stepenu broja 2.

Kako broj π nije algebarski nad poljem Q, nije ni konstruktabilan, tj. problem kvadrature kruga nije moguće rešiti pomoću lenjira i šestara.

Bibliografija

[1] Emil Artin, *Galois Theory*, Dover Publications, 1998.
http://en.wikipedia.org/wiki/Galois_theory

[2] Alan Baker, *Transcedental Number Theory*, Cambridge University Press, 1975. http://en.wikipedia.org/wiki/Lindemann%E2%80%93Weierstrass_theorem

[3] David Blatner, *The Joy of Pi*, Walker Publishing Company, Inc. New York, 1997.

[4] N. Božović, Ž. Mijajilović *Uvod u teoriju grupa*, Naučna knjiga, Beograd, 1983.

[5] H. Diels, *Predsokratovci, fragmenti, vol. I-II*, Naprijed, Zagreb, 1983.

[6] Euklid, *Elementi*, Naučna knjiga, Beograd, 1957.

[7] T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics, vol. I-II*, Dover, New York, 1981.

[8] T. L. Heath , *The works of Archimedes*, Dover Publications, New York, 1959.

[9] W. R. Knorr, *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1986.

[10] Zoran Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, JP Službeni glasnik, 2009.

[11] Plutarch's *Morals*, Litle, Brown and Company, Boston, 1878.

[12] N. J. A. Sloane *A Handbook of Integer Sequences*, Academic Press, 1973.
http://oeis.org/A000796

[13] D. E. Smith, *History of Mathematics, vol. I-II*, Dover, New York, 1958.

[14] Velika sovjetska enciklopedija, III izdanje
http://slovari.yandex.ru/art.xml?art=bse/00057/24900.htm