

UNIVERZITET U BEOGRADU

Matematički
fakultet

Jovana Mišić

*Čandrasekarova masa za bele patuljke
u tesnim dvojnim sistemima*

Diplomski master rad

BEOGRAD, 2011.

Zahvaljujem se doc. dr Bojanu Arbutini za svu pomoć i strpljenje koje je imao za mene tokom mog studiranja i pri izradi ovog rada. Takođe se zahvaljujem prof. dr Trajku Angelovu i dr Gojku Djuraševiću koji su rad pročitali, a posebno prof. dr Trajku Angelovu koji je svojim sugestijama i lekturom doprineo poboljšanju rada koji je tako dobio svoj konačni oblik.

U Beogradu, juna 2011.

J.M.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Usamljeni beli patuljci	2
2.1	Klasifikacija belih patuljaka	2
2.2	Hlađenje belih patuljaka	3
3	Beli patuljci u tesnim dvojnim sistemima	4
3.1	Dvojni sistemi	4
3.2	Formiranje tesnih dvojnih sistema sa dva bela patuljka	4
3.2.1	Dvojni helijumski beli patuljci	5
3.2.2	Dvojni CO beli patuljci	5
3.2.3	CO beli patuljci sa helijumskim pratiocem	6
3.3	Mase relativističkih belih patuljaka u TDS	7
3.3.1	Rošov model	7
3.3.2	Lejn-Emdenova jednačina	8
3.3.3	Rezultati	11
4	Zaključak	17
	Dodatak A	18
	Dodatak B	20
	Literatura	22

1 Uvod

Jedan od najlepši prizora na svetu, i na sreću onaj koji možete videti gde god da ste, je noćno nebo. Sve te svetleće tačkice i fina prašina koje možemo videti na crnom platnu su oduvek budile ljudsku radoznalost. Sa razvojem nauke pred nama se otvorio jedan novi svet u kome se nalaze različiti objekti, galaksije, planetarne magline, jata zvezda i mnogi drugi, svi zanimljivi i lepi na svoj način. Za mene su od malena zvezde bile nešto jako zanimljivo i misteriozno i kako sam rasla, raslo je i moje interesovanje za njihov nastanak i život.

Zvezde nastaju gravitacionim sažimanjem međuzvezdane materije koje može biti spontano, izazvano gubitkom unutrašnje energije oblaka (spontani gravitacioni kolaps) ili indukovano, izazvano udarnim talasima bliskih supernovih, vetrovima vrelih masivnih zvezda i dr. Kada počne gravitaciono sažimanje povećava se temperatura i gustina dok se u jednom trenutku ne ostvare uslovi za sagorevanje vodonika. Tada prestaje gravitaciono sažimanje i zvezda se nalazi na glavnom nizu H-R dijagrama sve dok ne potroši vodonično gorivo u jezgrou. Kada se ovo dogodi zvezda napušta glavni niz, postaje nestabilni crveni džin sa jezgrou od helijuma i omotačem od vodonika. Jezgro počinje da se sažima i zagreva, a omotač se širi i hladi. Ako početna masa zvezde nije bila veća od $8M_{\odot}$ ona će kroz fazu planetarne magline odbaciti omotač i ostaće samo vrelo jezgro - budući beli patuljak, koji će nastaviti da se hladi. U slučaju da je njena masa bila $8M_{\odot} < M < 30M_{\odot}$ zvezda će nekoliko puta proći kroz stabilna (izvor energije je u jezgrou) i nestabilna stanja (izvor energije je u omotaču). Sve teži elementi će postajati nuklearno gorivo dok se ne stvori jezgro od gvožđa. Dolazi do eksplozije supernove od čijeg jezgra ostaje neutronska zvezda. Crne rupe su treća moguća krajnja faza evolucije zvezda. One nastaju ako je početna masa zvezda bila veća od $30M_{\odot}$.

Ovakav tok evolucije se odnosi na usamljene zvezde. Međutim, najveći broj zvezda koje vidimo na nebu pripadaju višestrukim sistemima tj. sistemima koji se sastoje od dve ili više zvezda koje orbitiraju oko zajedničkog centra mase pod dejstvom uzajamne gravitacije. U ovom radu ćemo posvetiti pažnju upravo jednoj vrsti dvojnih sistema kod kojih može doći do razmene mase u toku evolucije - tesnim dvojnim sistemima čije su komponente beli patuljci. Na početku će biti reči o usamljenim belim patuljcima, a zatim o dvojnim belim patuljcima. Na kraju će pažnja biti posvećena masama belih patuljaka u tesnim dvojnim sistemima i utvrđivanju kako se njihova maksimalna masa (Čandrasekarova masa) menja usled rotacije i prisustva pratioca.

2 Usamljeni beli patuljci

Beli patuljci su zvezde slabog sjaja ($M_v > 10^m$) i efektivnih temperatura od oko 4000 K pa do iznad 80 000 K. Na H-R dijagramu nalaze se ispod glavnog niza (klasa sjaja VII), a najveći broj (75%) je u donjem levom uglu dijagrama - ispod zvezda spektralne klase A (otuda i naziv "beli" u njihovom imenu, mada ih ima različitih boja). Njihovi radijusi su reda $0.01R_\odot \approx 7 \times 10^8 \text{ cm}$, prosečna masa je $0.6M_\odot$, a period rotacije je uglavnom duži od nekoliko časova.

2.1 Klasifikacija belih patuljaka

Spektroskopska posmatranja otkrivaju da se atmosferski sastav belih patuljaka može mnogo razlikovati od jednog do drugog tako da spektralni tip D (eng. "dwarf") ima nekoliko podtipova. Najveću grupu čine DA beli patuljci ($2/3$ ukupnog broja¹) u čijim spektrima se vide samo apsorpcione linije vodonika proširene pritiskom. Slede DB beli patuljci (8%), koji pokazuju samo apsorpcione linije helijuma i DC beli patuljci (14%) čiji je spektar bez linija - kontinuum lišen karakteristika. Preostali tipovi uključuju DQ bele patuljke sa karakteristikama ugljenika i DZ bele patuljke sa tragovima metala u spektru.

Za usamljene bele patuljke prosečnih masa $0.6M_\odot$ najdalje dokle evolucija može da ide je stvaranje jezgra od ugljenika i kiseonika koji su produkti sagorevanja helijuma. Ovo jezgro je obavijeno tankim slojem helijuma čija masa ne sme biti iznad $10^{-2}M_\odot$. Spoljašnji sloj se sastoji od vodonika i njegova masa mora biti manja od $10^{-4}M_\odot$ jer bi u suprotnom počelo nuklearno sagorevanje.

Ovakva struktura jezgara se objašnjava visokom površinskom gravitacijom belih patuljaka koja vuče teža atomska jezgra ka centru dok lakša isplivavaju pa zato imamo gotovo čistu vodoničnu atmosferu kod DA belih patuljaka.² Međutim, može da se dogodi da je ceo vodonični omotač odbačen u fazi crvenog džina tako da imamo bele patuljke tipa DB. Takođe postoje indicije da se površinski sastav, a sa njim i tip belog patuljka može promeniti u toku njegove evolucije: konvektivnim mešanjem spoljašnjih slojeva helijum može prodreti u tanki omotač vodonika, pa beli patuljak DA prelazi u tip DB.

¹Zastupljenost je uzeta iz Carroll & Ostlie (2007).

²Na razdvajanje lakših i težih elemenata utiču i gradijent pritiska i neravnoteža sila koje deluju na jone.

2.2 Hlađenje belih patuljaka

Model koji se koristi pri proučavanju belih patuljaka ima sledeće elemente: jezgro zvezde, koje sadrži skoro svu masu, je degenerisano i okruženo tankim omotačem od nedegenerisanog materijala. Ako bismo pretpostavili da u jezgru belog patuljka važi jednačina idealnog gasa, dobili bismo da je njegova temperatura reda veličine 10^9 K. Na ovoj temperaturi ne može da postoji vodonik, a ako ima helijuma, u njegovim reakcijama bi se oslobodila velika količina energije što je u suprotnosti sa posmatranim niskim luminoznostima. Dakle, u jezgru belih patuljaka važi jednačina degenerisanog elektronskog gasa. S druge strane visoke efektivne temperature nam govore da se površinski slojevi sastoje od nedegenerisanog gasa.

Pretpostavljamo da ne postoje unutrašnji izvori energije kao što su nuklearno sagorevanje ili gravitaciono sažimanje. Pošto nema gravitacionog sažimanja onda radijus ostaje približno konstantan u toku vremena. Jedini izvor energije kada je najveći deo niskoenergetskih stanja već popunjen je toplotno kretanje visokoenergetskih degenerisanih elektrona, koji mogu da prevale velike razdaljine pre nego izgube energiju u sudaru sa jezgrima. Energija se u belim patuljcima, dakle, prenosi toplotnim provođenjem (pre nego zračenjem) koje je toliko efikasno da je unutrašnjost zvezde skoro izotermalna. Temperatura značajno opada tek u površinskim nedegenerisanim slojevima, gde usled gradijenta temperature dominira prenos energije zračenjem. Upravo je omotač taj koji kontroliše stopu hlađenja. Vreme hlađenja je dato jednačinom³

$$t_{\text{cool}} = 8.8 \cdot 10^6 \left(\frac{A}{12}\right)^{-1} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\frac{5}{7}} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-\frac{2}{7}} \left(\frac{L}{L_{\odot}}\right)^{-\frac{5}{7}} \quad (1)$$

gde je A (AJM) srednja atomska masa jezgra u atomskim jedinicama mase. Vidimo da se najvreliji, a samim tim i najluminozniji beli patuljci najbrže hlade. Sa druge strane, vreme hlađenja za najhladnije bele patuljke sa $L = 10^{-4.5} L_{\odot}$ je reda 10^{10} godina. Dakle, najhladniji beli patuljci imaju vreme života koje povezujemo sa najstarijim zvezdama.

³Jednačina je preuzeta iz Hansen & Kawaler (1994)

3 Beli patuljci u tesnim dvojnim sistemima

3.1 Dvojni sistemi

Kao što je već rečeno najmanje polovina svih zvezda koje vidimo pripadaju dvojnim sistemima. Treba razlikovati optički dvojne sisteme (zvezde u ovim sistemima nemaju ništa zajedničko osim što se vide u istom pravcu) od fizički dvojnih. Da bi odredili da li dve prividno bliske zvezde zaista predstavljaju fizički dvojni sistem potrebno je višiti posmatranja visoke tačnosti u dužem periodu vremena. Proučavanje ovih sistema omogućava određivanje parametara zvezda kao što su masa, temperatura, radijus i dr, a pošto su zvezde u dvojnim sistemima iste starosti značajni su i za proučavanje evolucije zvezda.

Fizički dvojne sisteme delimo, prema načinu detektovanja i uzajamnom položaju zvezda u sistemu, na: *vizuelno dvojne* (zvezde su dovoljno udaljene da se mogu videti odvojeno), *spektralno dvojne* (u spektrima zvezda se zapaža periodično Doplerovo pomeranje linija što je posledica orbitalnog kretanja), *eklipsno dvojne* (zapažamo periodične promene sjaja kao posledicu uzajamnog pomračenja komponentata) i *tesne dvojne sisteme* (TDS) kod kojih je rastojanje između komponentata uporedivo sa njihovim dimenzijama tako da tokom vremena dolazi do razmene mase među komponentama što menja sam tok njihove evolucije.

Tesne dvojne sisteme delimo na tri podgrupe: *odvojene*, kod kojih su obe komponente duboko unutar svojih Rošovih ovala, *polu-kontaktne*, kod kojih samo jedna zvezda ispunjava svoj Rošov oval i *kontaktne*, kod kojih obe komponente ispunjavaju svoje Rošove ovale (o definiciji Rošovog ovala vidi §3.3.1).

3.2 Formiranje tesnih dvojnih sistema sa dva bela patuljka

Tesni dvojni sistemi kod kojih su obe komponente beli patuljci (u daljem tekstu dvojni beli patuljci) predstavljaju vrlo interesantne objekte za proučavanje. Na njima možemo vršiti proveru teorija o evoluciji dvojnih sistema, pošto su najmanje dva puta prošli kroz fazu prenosa mase, i testirati modele hlađenja za bele patuljke. Zatim, smatra se da supernove tipa Ia (SN Ia) mogu nastati spajanjem dva CO bela patuljka (beli patuljci čija su jezgra sastavljena od kombinacije ugljenika i kiseonika), a predstavljaju i potencijalne izvore gravitacionih talasa.

Postoje dva "standardna" scenarija po kojima se formiraju dvojni beli patuljci. U prvom, TDS prolazi kroz dve faze nestabilnog prenosa mase u kojima se stvara zajednički omotač, a na promenu orbitalnog rastojanja utiče ravnoteža između orbitalne energije i vezivne energije omotača zvezde koja gubi masu. U drugom scenariju se pretpostavlja da se jedan beli patuljak formira pri stabilnom prenosu mase, a drugi preko zajedničkog omotača.

Nelemans et al. (2001a) su procenili da je ukupan broj dvojnih belih patuljaka u Galaksiji 2.5×10^8 . Od toga 53% čine helijumski dvojni beli patuljci, dok su 25% CO beli patuljci. CO-He beli patuljci čine 14% ukupnog broja, a He-CO 6%. Svega 1% dvojnih belih patuljaka sadrži ONeMg belog patuljka.

Slede scenariji formiranja ovih dvojnih sistema koje su dali Nelemans et al. (2001a).

3.2.1 Dvojni helijumski beli patuljci

Tesni dvojni sistemi sa dva helijumska bela patuljka potiču iz sistema kod kojih obe zvezde imaju $M \lesssim 2.3M_{\odot}$. Na početku imamo dvojni sistem sa orbitalnim periodom od 40 dana i komponentama od 1.4 i $1.1M_{\odot}$ uzete kao primer. Kada posle 3 Ggod primarna zvezda ispuni svoj Rošov oval, ona je već crveni džn u čijem jezgru još nije počelo sagorevanje helijuma, a deo početne mase je izgubila putem zvezdanog vetra. Pošto ima dubok konvektivni omotač dolazi do nestabilnog prenosa mase i odbacivanja omotača. Jezgro crvenog džina postaje prvi helijumski beli patuljak mase $0.31M_{\odot}$. Orbitalni period se ne menja mnogo.

Posle 4 Ggod prvi beli patuljak se već ohladio, a sekundarna zvezda ispunjava svoj Rošov oval i ima dubok konvektivni omotač. Pošto je sada odnos masa ekstremno dolazi do formiranja zajedničkog omotača i orbita se dramatično smanjuje.

3.2.2 Dvojni CO beli patuljci

Većina CO belih patuljaka se formira u sistemima koji su toliko široki (sa orbitalnim periodom od npr. 100 dana) da njegove komponente ispunjavaju svoje Rošove ovale tek kada se zvezda nađe na asimptotskoj grani džinova tj. kada se jezgra zvezde već sastoji od ugljenika i kiseonika. Kod prvog prenosa mase promena orbitalnog rastojanja nije velika i prilikom odbacivanja omotača, regulisana je očuvanjem momenta impulsa, dok kod drugog prenosa mase imamo spiralno približavanje. Na ovaj način CO beli patuljci se formiraju direktno.

Manji deo CO belih patuljaka se formira od zvezda čije su mase veće od $2.3M_{\odot}$. Ove zvezde ispune svoj Rošov oval dok još imaju nedegenerisano jezgro od helijuma. Posle prelivanja Rošovog ovala ostaje helijumska zvezda male mase. Ako se ova helijumska zvezda raširi do džinovskih dimenzija za vreme sagorevanja helijumske ljuske, doći će do još jednog kratkog prenosa mase. Pošto potroši sav helijum u jezgru ona postaje CO beli patuljak.

CO beli patuljci takođe mogu biti tzv. hibridni CO beli patuljci koji imaju jezgra od ugljenika i kiseonika i debele omotače od helijuma. Kod 6% CO dvojnih belih patuljaka jedna komponenta je hibridni CO beli patuljak, a kod 5% su obe komponente hibridni CO beli patuljci.

3.2.3 CO beli patuljci sa helijumskim pratiocem

Početni sistem ima ekstremniji odnos masa i relativno široku orbitu. Primarna zvezda ispunjava svoj Rošov oval tek kada je stvorila jezgro od ugljenika i kiseonika. Prilikom faze odbacivanja omotača dolazi do smanjivanja orbite. Sekundarna zvezda ne vrši akreciju i ispunjava svoj Rošov oval u stadijumu crvenog džina. Ima degenerisano helijumsko jezgro i od nje nastaje helijumski beli patuljak.

Drugi način formiranja ovog sistema je kada primarna zvezda ima radijativni omotač pa dolazi do stabilnog prenosa mase kada ispuni svoj Rošov oval. Deo prenesene mase se gubi iz sistema, orbita se širi i primarna zvezda postaje helijumski beli patuljak. Ona je svoj omotač prenela na pratioca koji je sad suviše masivan da bi se od njega formirao helijumski beli patuljak. Sekundarna zvezda ispunjava svoj Rošov oval kada se nalazi na asimptotskoj grani džinova. Stvara se zajednički omotač u kome se orbitalno rastojanje jako smanjuje i formira se CO beli patuljak. Zbog diferencijalnog hlađenja CO beli patuljak može postati bleđi od svog helijumskog pratioca iako je stvoren kasnije. Ovaj scenario formiranja dvojnog sistema sa CO i helijumskim belim patuljkom je manje verovatan jer je verovatnoća ispunjavanja Rošovog ovala kada zvezda ima radijativni omotač mala za zvezde malih masa.

Od ukupnog broja ovih sistema 20% su sistemi sa hibridnim CO belim patuljkom.

3.3 Mase relativističkih belih patuljaka u TDS

3.3.1 Rošov model

Kada su dve zvezde u tesnom dvojnem sistemu na dovoljno velikom rastojanju te tako izazivaju samo mala odstupanja od sfernog oblika kod svog pratioca, za njihovo opisivanje koristimo Ležandrove polinome. Međutim, prolazeći kroz različite faze evolucije zvezde povećavaju svoj radijus pa se rastojanje između njih smanjuje što dovodi do sve većih odstupanja od sfernog oblika i Ležandrovi polinomi više nisu pogodni za njihovo opisivanje. Umesto njih koristimo Rošov model.

Rošov model se zasniva na razmatranju gravitacionog potencijala u sistemu dve tačkaste mase koje se kreću po kružnoj orbiti oko svog baricentra. Oko ovih tačkastih masa mogu se konstruisati površi na kojima bi treća čestica mirovala u koordinatnom sistemu koji uniformno rotira sa dve tačkaste mase. To su površi konstantnog gravitacionog potencijala u sistemu dva tela i koriste se za opisivanje oblika gravitacionih površi zvezda u tesnim dvojnim sistemima.

Ekvipotencijalne površi u odvojenim TDS, u presecima sa (x, y) , (y, z) i (z, x) -ravni su odvojene kružnice oko centara zvezda. Dakle, zvezde u odvojenim tesnim dvojnim sistemima su sfernog oblika. Sa smanjenjem rastojanja između komponenata, površi postaju sve deformisanije, a najveću deformaciju trpe duž linije koja spaja centre masa zvezda. Na ovoj liniji se nalazi unutrašnja Lagranževa tačka, L_1 , u kojoj se ekvipotencijalne površi obe zvezde dodiruju i prave "osmicu" u ravni centara zvezda. Površni koje prolaze kroz ovu tačku ograničavaju maksimalnu oblast u kojoj svaka zvezda još uvek ima sve svoje elemente mase i nazivaju se (kritičnim) Rošovim ovalima (rezultantna gravitaciona sila sistema u L_1 jednaka je nuli). U trenutku kada neka od zvezda ispuni svoj Rošov oval (polukontaktni tesni dvojni sistem), preko tačke L_1 dolazi do pretakanja materije na njenog pratioca. Zapremina ograničena ovim ekvipotencijalnim površima zavisi od rastojanja između zvezda, a , i njihovog odnosa masa, q . Ako je $q = M_2/M_1 = 1$, tada su zapremine iste veličine, a sa smanjenjem q veličina Rošovog ovala masivnije zvezde se povećava, a manje masivne se smanjuje.

Gubitak mase iz sistema može da se dogodi preko spoljašnje Lagranževe tačke, L_2 , kroz koju prolazi ekvipotencijalna površ koja okružuje ceo dvojni sistem. Kod kontaktnih sistema, zvezde razmenjuju masu preko uskog "vrata" u oblasti tačke L_1 i okružene su zajedničkim omotačem koji se nalazi između ekvipotencijalnih površi kroz tačke L_1 i L_2 .

Mochnacki (1984) je dao tabele za normalizovani potencijal, radijuse, površine, srednju gravitaciju i inverznu srednju gravitaciju primarne i sekun-

darne komponente u odvojenim, polukontaktanim i kontaktanim sistemima u zavisnosti od odnosa masa i faktora popunjenosti Rošovih ovala.

3.3.2 Lejn-Emdenova jednačina

Da bismo dobili strukturu zvezde od centra do površine tj. gustinu ρ , pritisak P , temperaturu T , gravitacioni potencijal Φ , masu M i dr, potrebno je da rešimo sistem jednačina strukture zvezde. Prilikom rešavanja pretpostavljamo da su zvezde sferno simetrične i da promenljive ne zavise od vremena (statičnost). Jednačine koje koristimo su:

1) jednačina hidrostatičke ravnoteže

$$\rho \nabla \Phi = -\nabla P \quad (2)$$

2) Poasonova jednačina

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (3)$$

3) jednačina održanja mase

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (4)$$

i

4) politropska jednačina stanja

$$P = K \rho^{\Gamma_1} = K \rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (5)$$

gde su K , Γ_1 i n pozitivne konstante (za $n=0$ je $\rho = \text{const}$).

Imajući u vidu zavisnost samo od radijalne koordinate r , jednačina (2) glasi

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm}{r} \quad (6)$$

i Laplasijan je

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \quad (7)$$

pa kombinacijom prethodnih jednačina dobijamo Lejn-Emdenovu jednačinu:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (8)$$

gde je $\theta^n = \rho/\rho_c$ i $\xi = r/r_n$; ovde je ξ bezdimenzioni radijus, $r_n^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1}{n}-1}$, ρ_c je gustina u centru, n - indeks politrope. Granični uslovi u centru su $\theta(0) = 1$ i $\frac{d\theta}{d\xi}|_{\xi=0} = 0$. Radijus zvezde R_1 , nalazimo iz uslova $\theta(\xi_1) = 0$ gde je $\xi_1 = \frac{R_1}{r_n}$, a ukupnu masu iz jednačine

$$M_1 = 4\pi r_n^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi = -4\pi r_n^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi = -4\pi r_n^3 \rho_c \xi_1^2 \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1} \quad (9)$$

Lejn-Emdenovu jednačinu za proizvoljno n rešavamo numerički, a za $n=0$, 1 i 5 postoje analitička rešenja; pri tome za $n=0$ imamo homogenu strukturu ($\rho = const$), a za $n = \infty$ - izotermičku strukturu ($T = const$).

Ovaj oblik Lejn-Emdenove jednačine važi za nerotirajuće zvezde. Ako, pak, uzmemo da se zvezda nalazi u dvojnog sistema i da rotira ugaonom brzinom $\Omega = \sqrt{\frac{G(M_1+M_2)}{a^3}}$, jednačina hidrostatičke ravnoteže i Poasonova jednačina imaće nešto izmenjen oblik:

$$\rho \Delta \Phi_{\text{eff}} = -\Delta P \quad (10)$$

$$\Delta \Phi_{\text{eff}} = 4\pi G \rho - 2\Omega^2 \quad (11)$$

gde je $\Phi_{\text{eff}} = \Phi - \frac{1}{2}\Omega^2 \varrho^2 - \frac{GM_2}{r_2}$ efektivni gravitacioni potencijal. Drugi i treći član u efektivnom gravitacionom potencijalu su redom doprinosi rotacije i sekundarne komponente, a ϱ i r_2 redom su rastojanja od ose rotacije i centra sekundarne komponente.

Ako srednji radijus R definišemo kao

$$\frac{4\pi}{3} R^3 = V \quad (12)$$

gde je V zapremina obuhvaćena ekvipotencijalnom površi Φ_{eff} i pošto je $\Phi_{\text{eff}} = \Phi_{\text{eff}}(R)$ i $\rho = \rho(R)$ Poasonovu jednačinu možemo napisati u obliku:

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} \right) = 4\pi G \rho - 2\Omega^2 \quad (13)$$

gde su h_1 , h_2 i h_3 Laméovi koeficijenti.

Integraljenjem prethodne jednačine i korišćenjem Gausove teoreme dobijamo:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} \right) dR d\theta d\varphi = 4\pi G \int_V \rho h_1 h_2 h_3 dR d\theta d\varphi - 2\Omega^2 \int_V h_1 h_2 h_3 dR d\theta d\varphi \quad (14)$$

$$\Rightarrow \oint_S \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} dS = 4\pi G \int_V \rho dV - 2\Omega^2 \int_V dV \quad (15)$$

$$\Rightarrow 4\pi R^2 \frac{d\Phi_{\text{eff}}}{dR} \approx 4\pi G m(R) - 2\Omega^2 V(R) \quad (16)$$

Kada ovo ubacimo u jednačinu hidrostatičke ravnoteže dobijamo jednačinu koju je dao Eggleton (2006, str. 119)

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dR} = \frac{d\Phi_{\text{eff}}}{dR} \approx \frac{Gm}{R^2} - \frac{2}{3} \Omega^2 R \quad (17)$$

Kombinujući ovu jednačinu sa jednačinama održanja mase i politropske strukture (4) i (5)⁴ dobijamo modifikovanu Lejn-Emdenovu jednačinu:

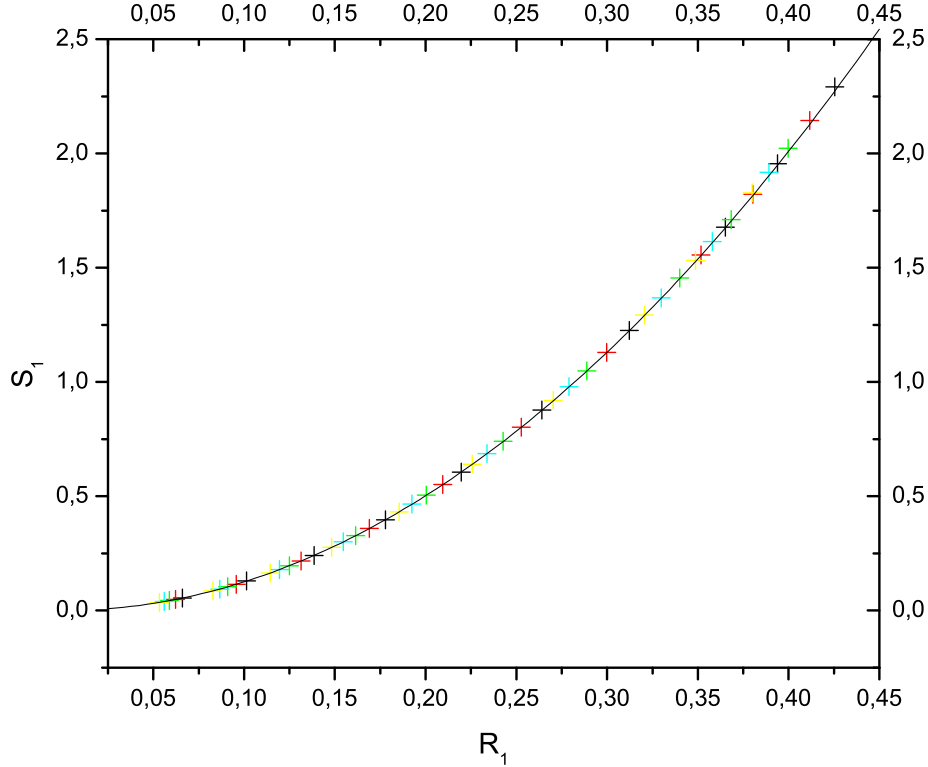
$$\frac{1}{\Xi^2} \frac{d}{d\Xi} \left(\Xi^2 \frac{d\Theta}{d\Xi} \right) = -\Theta^n + v \quad (18)$$

gde je $\Theta^n = \rho/\rho_c$, $\Xi = R/r_n$ i $v = \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_c}$. Ukupna masa je sada:

$$\begin{aligned} M_1 &= 4\pi r_n^3 \rho_c \int_0^{\Xi_1} \Xi^2 \Theta^n d\Xi \\ &= 4\pi r_n^3 \rho_c \left[\int_0^{\Xi_1} \frac{d}{d\Xi} \left(\Xi^2 \frac{d\Theta}{d\Xi} \right) d\Xi + \int_0^{\Xi_1} v \Xi^2 d\Xi \right] \\ &= 4\pi r_n^3 \rho_c \left(-\Xi_1^2 \frac{d\Theta}{d\Xi} \Big|_{\Xi=\Xi_1} + v \frac{\Xi_1^3}{3} \right) \\ &= 4\pi r_n^3 \rho_c \left[-\Xi_1^2 \frac{d\Theta}{d\Xi} \Big|_{\Xi=\Xi_1} + \frac{M_1(1+q)}{6\pi r_n^3 \rho_c} \left(\frac{R_1}{a} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (19)$$

gde je $\Xi_1 = R_1/r_n$ vrednost bezdimenzionog radijusa na površini. Iz ove jednačine dobijamo jednačinu (9) za nerotirajuće politrope ($v = 0$).

⁴U ovim jednačinama sada umesto radijalne koordinate r , koristi se srednji radijus R .



Slika 1: Zavisnost površine od radijusa za primarnu zvezdu. Krstićima su predstavljeni podaci na osnovu tabela koje je dao Mochnaki (1984), a punom linijom jednačina $S_1 = 4\pi R_1^2$.

3.3.3 Rezultati

Iskoristili smo tabele koje je dao Mochnaki (1984) za pravljenje grafika zavisnosti $S = S(R)$ i $S \cdot g = S(R)g(R)$ za primarnu i sekundarnu komponentu u odvojenim sistemima za različite odnose masa, gde je S površina zvezde, g srednja gravitacija, a R radijus zvezde. Grafici su napravljeni tako što su za svako q dato u tabeli eliminisani faktori popunjenosti tj. radijusu za dati faktor popunjenosti pridružena je odgovarajuća površina, odnosno proizvod površine i srednje gravitacije.

Pošto je

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} = |\text{grad} \Phi_{\text{eff}}| = g, \quad (20)$$

a definicija srednje gravitacije

$$\bar{g} = \frac{\oint_S g dS}{S}, \quad (21)$$

jednačinu (16) možemo napisati u sledećem obliku:

$$\bar{g}S = 4\pi GM_1(R) - \frac{8}{3}\Omega^2 R^3 \quad (22)$$

gde smo za V iskoristili jednačinu (12), a M_1 predstavlja masu primarne zvezde. Jednačinu (22) je potrebno napisati u bezdimenzionom obliku pa realne vrednosti R , S i \bar{g} zamenjujemo jednačinama:

$$R = aR_1 \quad (23)$$

$$S = a^2 S_1 \quad (24)$$

$$\bar{g} = \frac{G(M_1 + M_2)}{2a^2} g_1 \quad (25)$$

Sređivanjem, jednačina (22) postaje

$$g_1 S_1 = 8\pi \frac{1}{1+q} - \frac{16}{3}\pi R_1^3 \quad (26)$$

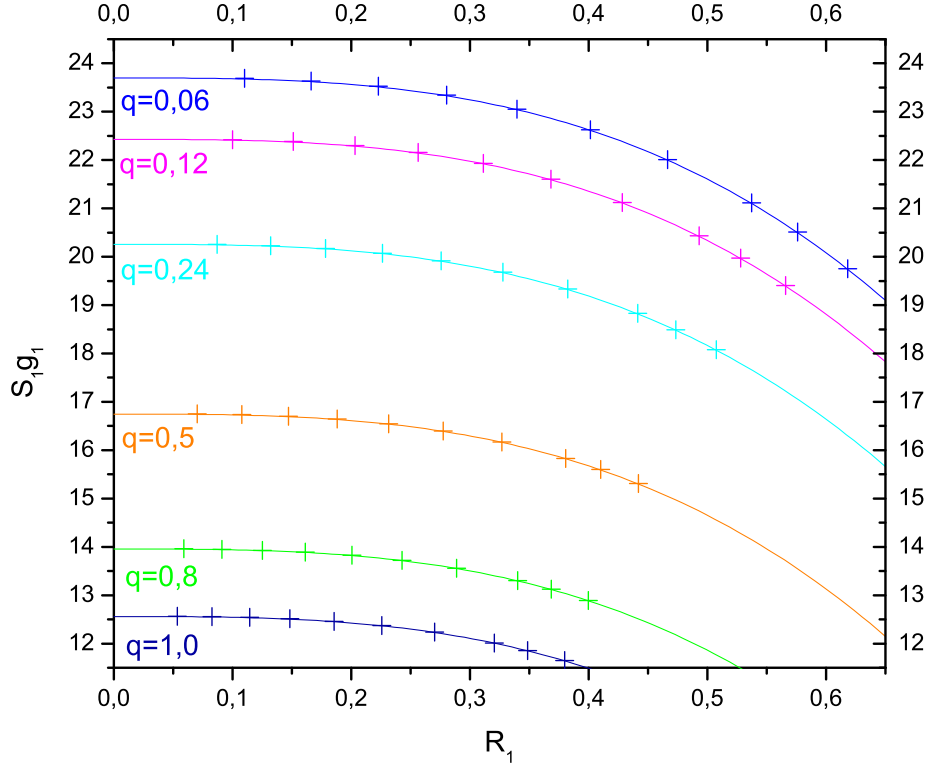
gde su vrednosti sa indeksom 1 bezdimenzione. Na slici 1 data je zavisnost $S_1 = S_1(R_1)$ za primarnu zvezdu (greška formule je 2%), a na slikama 2 i 3 $S_1 g_1 = S_1(R_1) g_1(R_1)$ za primarnu i sekundarnu zvezdu, respektivno (greške su reda 10^{-4}).

Osnovni cilj ovog diplomskog master rada jeste da utvrdimo kako se Čandrasekarova masa za bele patuljke u tesnim dvojnim sistemima menja usled rotacije i prisustva pratioca. U tom cilju pokušaćemo da pronađemo jednačinu koja će omogućiti izračunavanje mase belog patuljka u funkciji radijusa za zadati odnos masa. Da bismo ovo postigli, prvo ćemo pokušati da masu izrazimo preko nekih promenljivih.

U jednačini (19) zamenjujemo $r_n^2 = \frac{K(1+n)}{4\pi G} \rho^{\frac{1}{n}-1}$ za indeks politrope $n = 3$ koji odgovara relativističkim belim patuljcima i sređivanjem dobijamo:

$$M_1 = \frac{4\pi \left(\frac{K}{\pi G}\right)^{\frac{3}{2}} (-\Xi_1^2 \Theta_1')}{1 - \frac{2}{3}(1+q)\left(\frac{R_1}{a}\right)^3} \quad (27)$$

$$\frac{M_1}{M_{ch}} = \frac{\Xi_1^2 \Theta_1'}{(\Xi_1^2 \Theta_1')_0} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}(1+q)\left(\frac{R_1}{a}\right)^3} \quad (28)$$



Slika 2: Zavisnost $S_1g_1 = S_1g_1(R_1)$ za primarnu zvezdu. Krstići označavaju podatke, a pune linije jednačinu (26) za odgovarajuće q .

gde je $M_{ch} = 4\pi\left(\frac{K}{\pi G}\right)^{\frac{3}{2}}(-\Xi_1^2\Theta_1')_0$ Čandrasekarova masa za nerotirajuće bele patuljke tj. za $v = 0$. Odavde izražavamo prvu promenljivu:

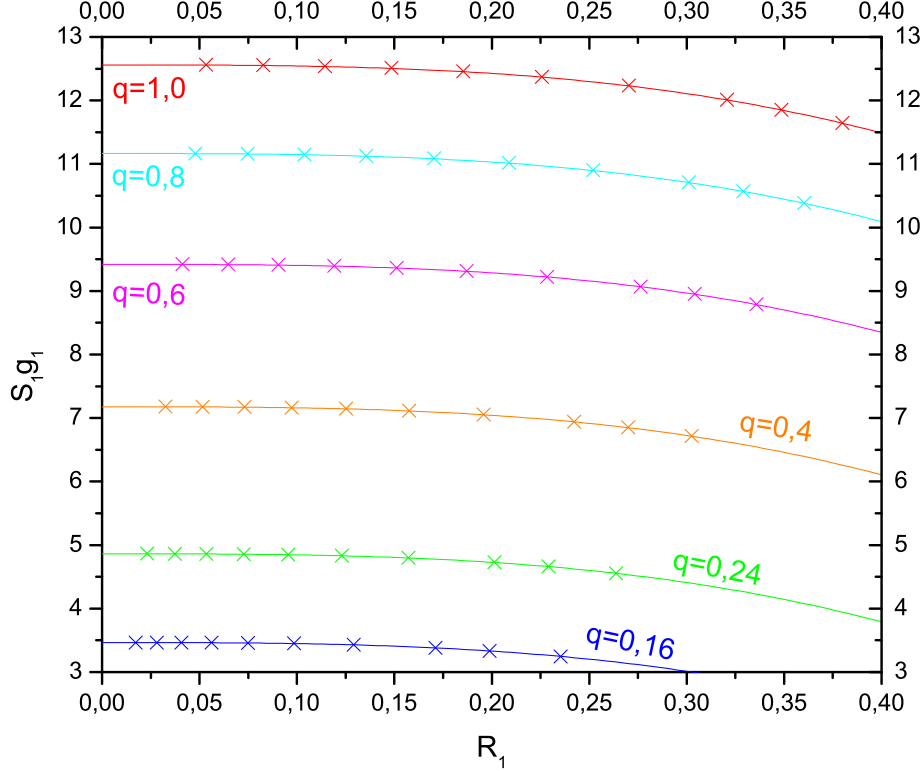
$$y_1 = \frac{\Xi_1^2\Theta_1'}{(\Xi_1^2\Theta_1')_0} = \frac{M_1}{M_{ch}}\left(1 - \frac{2}{3}(1+q)\left(\frac{R_1}{a}\right)^3\right) \quad (29)$$

S druge strane iz

$$v = \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_c} = \frac{G(M_1 + M_2)/a^3}{2\pi G\rho_c} = \frac{M_1(1+q)}{2\pi a^3\rho_c} \quad (30)$$

zamenom $\rho_c^{-1} = \frac{R_1^3}{\Xi_1^3}\left(\frac{\pi G}{K}\right)^{\frac{3}{2}}$ dobijamo

$$v = \frac{M_1(1+q)}{2\pi a^3} \frac{R_1^3}{\Xi_1^3} \left(\frac{\pi G}{K}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (31)$$



Slika 3: Zavisnost $S_1 g_1 = S_1(R_1)g_1(R_1)$ za sekundarnu zvezdu. Krstići označavaju podatke, a pune linije jednačinu (26) za odgovarajuće q .

odakle izvlačimo drugu promenljivu

$$x = \frac{v\Xi_1^3}{(-\Xi_1^2\Theta_1')_0} = 2\frac{M_1}{M_{ch}}(1+q)\left(\frac{R_1}{a}\right)^3 \quad (32)$$

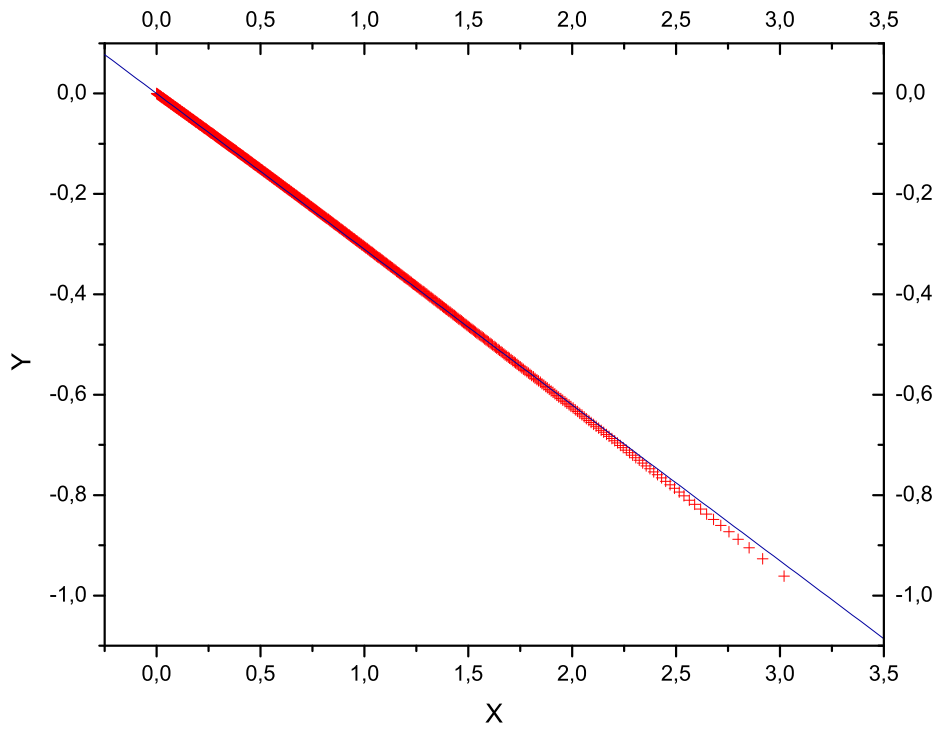
Da bi izračunali vrednosti promenljivih x i $y = y_1 - 1$ potrebno je pronaći vrednosti Ξ_1 i $\frac{d\Theta}{d\Xi}|_{\Xi=\Xi_1}$ tj. metodom Runge-Kuta rešiti modifikovanu Lejn-Emdenovu jednačinu za različite stepene deformisanosti ($v = 0 - 0.00654$) i indeks politrope $n = 3$ koji odgovara relativističkim belim patuljcima. Metoda Runge-Kuta je objašnjena u dodatku A, a program u kome se rešava jednačina strukture i računaju promenljive x i y dat je u dodatku B.

Kada izračunamo vrednosti x i y , crtamo grafik zavisnosti $y = y(x)$ i vidimo da je u pitanju približno linearna zavisnost (slika 4). Koristimo promenljivu y umesto y_1 da bi nam prva tačka bila $y = 0$. Metodom na-

jmanjih kvadrata dobijamo da je koeficijent pravca -0.310268 .

$$y_1 - 1 = -0.310268x \quad (33)$$

$$\frac{\Xi_1^2 \Theta_1'}{(\Xi_1^2 \Theta_1')_0} = 1 - 0.310268 \frac{v \Xi_1^3}{(-\Xi_1^2 \Theta_1')_0} \quad (34)$$



Slika 4: Krstićima je predstavljena računata zavisnost promenljivih $y = y(x)$ gde je $y = \frac{\Xi_1^2 \Theta_1'}{(\Xi_1^2 \Theta_1')_0} - 1$, a $x = \frac{v \Xi_1^3}{(-\Xi_1^2 \Theta_1')_0}$. Punom linijom je data jednačina (33).

Kada u jednačinu (34) zamenimo jednačine (29) i (32) imamo

$$\frac{M_1}{M_{ch}} \left(1 - \frac{2}{3}(1+q)\left(\frac{R_1}{a}\right)^3\right) = 1 - 0.310268 \cdot 2 \frac{M_1}{M_{ch}} (1+q) \left(\frac{R_1}{a}\right)^3. \quad (35)$$

Sređivanjem dobijamo formulu za računanje mase primarne zvezde

$$\frac{M_1}{M_{ch}} = \frac{1}{1 - p(1 + q)\left(\frac{R_1}{a}\right)^3}. \quad (36)$$

Analogno za masu sekundarne zvezde dobijamo

$$\frac{M_2}{M_{ch}} = \frac{1}{1 - p\left(1 + \frac{1}{q}\right)\left(\frac{R_1}{a}\right)^3}. \quad (37)$$

Generalizovanjem ova dva slučaja dobijamo formulu za računanje mase zvezde u tesnom dvojnemu sistemu tj. funkciju zavisnosti mase od odnosa masa i radijusa koja važi za svako $0 < q < \infty$ definisano kao $q = M/M_p$. Za $q > 1$, M predstavlja masu primarne zvezde, a za $q < 1$ masu sekundarne dok je M_p masa pratioca.

$$\frac{M}{M_{ch}} = \frac{1}{1 - p\frac{1+q}{q}\left(\frac{R}{a}\right)^3} \quad (38)$$

gde je $p = 0.04613$. Očekujemo da će se najveća masa dobiti kada zvezda ispunjava Rošov oval. U tom slučaju R/a je dao Eggleton (1983a) za $0 < q < \infty$

$$\frac{R}{a} = \frac{0.49q^{\frac{2}{3}}}{0.6q^{\frac{2}{3}} + \ln(1 + q^{\frac{1}{3}})} \quad (39)$$

Diferenciranjem jednačine (38) i izjednačavanjem sa nulom uz pomoć jednačine (39) dobijamo

$$(1 + 2q) \ln 1 + q^{\frac{1}{3}} = q + q^{\frac{1}{3}} - 0.4q^{\frac{2}{3}} \quad (40)$$

Rešenje ove jednačine je $q = 0.212327$ i predstavlja minimum funkcije (38). Za ovu vrednost odnosa masa dobija se $M = 1.00444M_{ch}$.

U slučaju $q = \infty$ dobijamo da je primarna zvezda beli patuljak mase $M = 1.02577M_{ch}$ što znači da bi sekundarna zvezda trebalo da bude još manjih dimenzija. Pošto su crne rupe i neutronske zvezde generalno masivnije, normalne zvezde većih dimenzija, a i za nerelativističke bele patuljke važi približno $M \propto R^{-3}$, ovaj slučaj je isključen.

Za $q = 1$ dobijamo masu $M = 1.00504M_{ch}$, što je manje nego za $q = 0$, i imali bismo formiranje sistema sa dva identična bela patuljka u marginalnom kontaktu što je teško zamisliti.

Ostaje još slučaj za $q = 0$ u kome je beli patuljak sekundarna zvezda, a masivna crna rupa primarna. Čak i u ovom slučaju Čandrasekarova masa se promeni za samo 0.5% ($M = 1.00546M_{ch}$).

4 Zaključak

U ovom radu pažnju smo posvetili belim patuljcima u tesnim dvojnim sistemima i došli smo do sledećih rezultata:

- 1) Na osnovu slika 2 i 3 zaključujemo da jednačina (16) dobro opisuje ekvipotencijalne površi Rošovog modela i za male radijuse zvezda i kada je ona u velikoj meri deformisana i dostiže Rošov oval.
- 2) Dobili smo približan jednodimenzioni model strukture zvezde tj. jednačinu kojom možemo proceniti masu relativističkog belog patuljka u zavisnosti od radijusa za zadati odnos masa.

$$\frac{M}{M_{ch}} = \frac{1}{1 - p^{\frac{1+q}{q}} \left(\frac{R_1}{a}\right)^3} \quad (41)$$

- 3) Na osnovu ove jednačine tražili smo maksimalnu masu koju može imati beli patuljak u tesnom dvojnog sistema. Došli smo do zaključka da se maksimalna masa dobija za $q = \infty$ i da iznosi $M = 1.02577M_{ch}$. Međutim, ovakve sisteme u kojima je primarna zvezda Čandrasekarov beli patuljak je teško zamisliti (formalno, za $M \rightarrow M_{ch}$ $R \rightarrow 0$ u Čandrasekarovom modelu). Ostaje još mogućnost da je beli patuljak sekundarna komponenta ($q < 1$, u ekstremnom slučaju $q \rightarrow 0$), ali ni to ne daje neke kvalitativne promene. Dakle, čak i pod uslovom da postoje sistemi kod kojih su komponente beli patuljak i crna rupa i da su oni mogući sa aspekta evolucije zvezda (do sada nisu posmatrani), maksimalna masa koju bi beli patuljak mogao da ima je samo za 0.5% veća od Čandrasekareve mase.

S druge strane, neka razmatranja stabilnosti prenosa mase ukazuju da beli patuljak koji ispunjava Rošov oval ne može da dostigne Čandrasekarovu masu ($M \sim 0.738M_{ch}$, Arbutina 2009).

Možemo da zaključimo da relativistički beli patuljak u tesnom dvojnog sistemu koji se nalazi unutar Rošovog ovala ima masu praktično jednaku Čandrasekarovoj i da su efekti rotacije i pratioća zanemarljivi, te da su verovatno značajniji drugi fizički procesi poput kulonovskih interakcija (neidealni gas), uticaja temperature, inverznog β raspada i drugih.

Dodatak A

Metoda Runge-Kuta

Ova metodom vršimo numeričku integraciju običnih diferencijalnih jednačina pomoći koraka u sredini intervala kako bi se smanjile greške nižeg reda. Pomoću nje rešavamo strukturu zvezde u jednom prolazu od centra ka površini za zadate početne uslove.

Modifikovanu Lejn-Emdenovu jednačinu:

$$\frac{1}{\Xi^2} \frac{d}{d\Xi} \left(\Xi^2 \frac{d\Theta}{d\Xi} \right) = -\Theta^n + v \quad (42)$$

rastavljamo pomoću promenljivih $x = \Xi$, $y = \Theta$ i $z = \frac{d\Theta}{d\Xi} = \frac{dy}{dx}$ na dve jednačine

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \quad (43)$$

$$z' = \frac{dz}{dx} = -y^n - \frac{2}{x}z + v \quad (44)$$

Početni uslovi u centru su $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, a funkcija $y = \Theta$ je data polinomom koji, kada se uvrste granični uslovi, ima oblik

$$\Theta(\Xi) = 1 + c_1 \Xi^2 + c_2 \Xi^4 + \dots \quad (45)$$

Ovaj polinom treba da bude rešenje jednačine (39) pa dobijamo

$$6c_1 + 20c_2 \Xi^2 + \dots \approx -(1 + c_1 n \Xi^2 + \dots) + v \quad (46)$$

i pronalazimo koeficijente

$$c_1 = -\frac{1-v}{6} \quad (47)$$

$$c_2 = -\frac{n}{20} c_1 = \frac{1-v}{120} n \quad (48)$$

Jednačinu (42) koristimo za računanje početnih vrednosti x_i , y_i i z_i , a radijus politrope Ξ_1 nalazimo iz uslova $y = \Theta = 0$. Na osnovu početnih vrednosti za dati korak $h = x_{i+1} - x_i$ računamo veličine

$$\begin{aligned} k_1 &= hy'(x_i, y_i, z_i), \\ l_1 &= hz'(x_i, y_i, z_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= hy'(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}), \\
l_2 &= hz'(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}), \\
k_3 &= hy'(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}), \\
l_3 &= hz'(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}), \\
k_4 &= hy'(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3), \\
l_4 &= hz'(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)
\end{aligned} \tag{49}$$

gde y' i z' računamo preko jednačina (40) i (41), a zatim vrednosti u tački x_{i+1} nalazimo kao

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} \tag{50}$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{l_1}{6} + \frac{l_2}{3} + \frac{l_3}{3} + \frac{l_4}{6} \tag{51}$$

Dodatak B

Program za rešavanje modifikovane Lejn-Emdenove jednačine i računanje promenljivih

Sledi program koji rešava modifikovanu Lejn-Emdenovu jednačinu i računa promenljive $\frac{\Xi_1^2 \Theta_1'}{(\Xi_1^2 \Theta_1)_0}$ i $\frac{v \Xi_1^3}{(-\Xi_1^2 \Theta_1)_0}$.

```
pro mase
n=3.0
h=1.d-4
v=0.d
w=0.00654d
filename1='povrsina.dat'
filename2='unstruktura.dat'
filename3='lsqf-in.dat'
openw, 1, filename1
while v lt w do begin
x=0.d
y=1.d
z=0.d
openw,2,filename2
printf, 2, x, y, z
x=x+h
y=1.0-x^2*(1.0-v)/6.0+n*(1.0-v)/120.0*x^4
z=-x*(1.0-v)/3.0+n*(1.0-v)/30.0*x^3
repeat begin
printf, 2, x, y, z
k1=h*z
l1=h*(-y^n-2*z/x+v)
k2=h*(z+l1/2.)
l2=h*(-(y+k1/2)^n-2*(z+l1/2)/(x+h/2)+v)
k3=h*(z+l2/2.)
l3=h*(-(y+k2/2)^n-2*(z+l2/2)/(x+h/2)+v)
k4=h*(z+l3)
l4=h*(-(y+k3)^n-2*(z+l3)/(x+h)+v)
x=x+h
y=y+k1/6+k2/3+k3/3+k4/6
z=z+l1/6+l2/3+l3/3+l4/6
```

```
endrep until ((y lt h^5))
close,2
openr,2,filename2
while not eof(4) do begin
readf,2,x,y,z
endwhile
close,2
printf,1,v,x,y,z
v=v+0.00001d
endwhile
close, 1
openr,1,filename1
openw,3,filename3
while not eof(1) do begin
readf,1,v,x,y,z
if v eq 0.d then begin
x0=x
z0=z
endif
p1=x^3*v/(-x0^2*z0)
p2=x^2*z/(x0^2*z0)-1
printf,3,p1,p2
endwhile
close,1
close,3
end
```

Literatura

- Arbutina B., 2009, *Minimalni odnos masa za kontaktne tesne dvojne sisteme tipa W Ursae Majoris*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu
- Carroll B. W., Ostlie D. A., 2007, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. izd., Pearson Education, Addison-Wesley
- Eggleton P. P., 2006, *Evolutionary Processes in Binary and Multiple Stars*, Cambridge: Cambridge University Press
- Hansen C. J., Kawaler S. D., 1994, *Stellar interiors-Physical Principles, Structure and Evolution*, New York: Springer
- Hilditch R. W., 2001, *An Introduction to Close Binary Stars*, Cambridge: Cambridge University Press
- Mochnacki S.W., 1984, ApJS, **55**, 551
- Nelemans G., Yungelson L. R., Portegies Zwart S. F., Verbunt F., 2001a, A&A, **365**, 491
- Nelemans G., Portegies Zwart S. F., Verbunt F., Yungelson L. R., 2001b, A&A, **368**, 939