

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАСТЕР РАД

---

**Вајерштрасова репрезентација  
минималних површи**

---

*Аутор:*  
Милош Ђорић

*Ментор:*  
др Мирјана Ђорић

септембар 2011.

## Садржај

Предговор	2
<b>1 Историјски осврт и мотивација</b>	<b>3</b>
<b>2 Класичне минималне површи у <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>6</b>
2.1 Дефиниције минималних површи . . . . .	6
2.2 Примери минималних површи . . . . .	10
2.3 Неке особине минималних површи . . . . .	19
<b>3 Изотермалне координате</b>	<b>22</b>
<b>4 Вајерштрасова репрезентација</b>	<b>37</b>
4.1 Локална Вајерштрасова репрезентација . . . . .	37
4.2 Глобална Вајерштрасова репрезентација . . . . .	45
<b>5 Бјорлингова формула</b>	<b>49</b>
<b>6 Новији резултати</b>	<b>53</b>
Биографија	57

## Предговор

У овом раду изложени су основи теорије дводимензионалних минималних површи. У првом поглављу приказан је кратак историјски развој ове тематике, са посебним акцентом на томе где се све појављују минималне површи и одакле потиче мотивација за њихово проучавање. Класични примери минималних површи приказани су у другом поглављу и првенствено истакнуте оне у класама ротационих, праволинијских и Монжових површи. Увођење изотермалних координата на површи је основ за изучавање ових површи и то је изложено у трећем поглављу. Дате су формуле у овим координатама, уведен је појам минималне криве и у новим терминима преформулисани неки добијени резултати. Четврто поглавље, које представља главни део рада, садржи прво локални облик Вајерштрасове репрезентације минималне површи, илустрован кроз примере из другог поглавља. Тиме су добијене неке информације о геометрији тих површи, што је и био један од циљева рада. Након тога укратко је приказано како се прелази на глобалну верзију репрезентације, само на случају оријентабилних површи. Бјорлингова формула, приказана у петом поглављу, даје начин за генерисање нових минималних површи са унапред задатим условима. У последњем, шестом поглављу, описан је метод деформације минималних кривих и његова веза са минималним површима.

Захваљујем се свом ментору др Мирјани Ђорић на великој подршци, разумевању и помоћи током писања овог рада. Такође, захваљујем се члановима комисије др Мирослави Антић и др Срђану Вукмировићу на бројним корисним примедбама и пажљивом читању рада, као и Тијани Шукиловић на помоћи око цртања слика у програму Mathematica.

## 1 Историјски осврт и мотивација

Теорија минималних површи развија се од 18. века до данас, користећи апарат диференцијалне геометрије, комплексне анализе, парцијалних диференцијалних једначина и варијационог рачуна. Спој њихове богате математичке структуре и практичног значаја у другим наукама заинтересовали су неке од највећих научника овог времена. Почети ове теорије могу се пронаћи у радовима Ојлера из 1744. и Лагранжа из 1760. Ојлер је показао да је *катеноид* минимална површ, док је Лагранж први дошао до парцијалних једначина које функција облика  $z = f(x, y)$  (тзв. Монжова површ) мора да задовољава да би њен график одређивао минималну површ. Ово су били први нетривијални примери, након површи која представља део равни. 1776. Мејснер<sup>1</sup> је доказао да је и *хеликоид* минимална површ. Математички свет је морао да чека још 50 година за нове примере минималних површи, и то *Шеркову минималну површ*, *Шеркову пету минималну површ*, као и фамилију површи која представља изометричну деформацију између хеликоида и катеноида. 1866. Вајерштрас је направио велики помак објавивши своју формулу која је омогућила генерисање нових примера минималних површи из већ постојећих. Данас је испитивање минималних површи тесно повезано са употребом рачунара и визуелизацијом јер нам омогућавају дискретно задавање минималних површи и извођење 'експеримената' у разним софтверским окружењима. Управо тако је откривена фасцинантна *Костина минимална површ* не тако давне 1984. године.

Замислимо један једноставан кухињски екперимент: у сапуницу заронимо произвољну затворену контуру направљену од металне жице. Када пажљиво извучемо контуру напоље, видимо да је над њом разапета површ од сапунице. Иако крајње једноставан, овај експеримент практично решава математички проблем налажења површи најмање површине међу свим довољно блиским површима са задатом границом (на пример жицом). Наиме, природа тежи да минимизује потенцијалну енергију површи, која је пропорционална површини сапунице. Дакле, формирана површ у стању стабилне равнотеже заиста има минималну површину, одакле и потиче назив *минималне површи*. Физичар Плато<sup>2</sup> први је изводио многе експерименте са сапуницом средином 19. века. Он је формулисао 4 постулата који описују сингуларитете које може имати оваква површ од сапунице у равнотежном стању. Постоје два типа:

- 1° глатка сингуларна ивица по којој се секу три сингуларне равни, сваке две под углом од  $120^\circ$ ;
- 2° сингуларна тачка у којој се спајају четири глатке сингуларне ивице, при чему је

<sup>1</sup> *Jean Baptiste Meusnier de la Place* (1754 – 1793), француски математичар

<sup>2</sup> *Joseph Antoine Ferdinand Plateau* (1801 – 1883), белгијски физичар

угао између сваке две од њих приближно  $109^\circ 28'16''$  (угао чији је косинус  $-\frac{1}{3}$ ).

Најбољи примери ових сингуларитета виде се код минималних површи разапетих над границом тетраедра и коцке, редом. Треба бити пажљив са терминологијом јер ово нису примери регуларних површи у смислу диференцијалне геометрије.

Платоова прецизна мерења разних површи користила су касније као потврда многих теоријских резултата. Одатле је проистекла хипотеза:

*Да ли за произвољну затворену просторну криву која нема самопресека постоји минимална површ чија је то граница?*

Проблем проналажења такве површи се зато назива *Платоов проблем*. Комплетан математички доказ овог проблема први је објавио Даглас<sup>3</sup> 1931. и независно од њега Радо<sup>4</sup>, користећи потпуно нов математички апарат, тзв. варијациони рачун чији се назив претходних 200 година везивао за Лагранжово дело. Прецизније, они су доказали да постоји минимална површ која минимизује површину и чија је граница произвољна Жорданова крива, а област параметара јединични диск (граница диска слика се на криву). Године 1936, Даглас је за свој подухват награђен Филдсовом медаљом. Доказ овог проблема не описује геометријске особине те површи и не даје начин како се та површ ефективно налази, што је отворило нова питања и правце истраживања. Поред егзистенције, може нас занимати јединственост решења овог проблема. На ово питање одговор је негативан, а један од примера је тзв. Дагласова контура.

Површи од сапунице су само један од примера где се минималне површи појављују. Било какве мембране између хомогених медија/средина у природи имају приближно облик минималних површи: ћелијске мембране, мембрана средњег уха, разни облици кристала... Ако границу између два хомогена медија третирамо као површ (јер нема дебљину), њена средња кривина  $H$  је пропорционална разлици притисака тих медија и резултујући притисак је у смеру нормале на површ. Ово описује тзв. Лаплас-Јангова једначина

$$\Delta p = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1)$$

где је  $\Delta p$  разлика притисака са различитих страна површи,  $\gamma$  површински напон течности (константа везана за површ једнака енергији површи по јединици површине, енг. surface tension), а  $R_1$  и  $R_2$  главни полупречници кривине у два нормална главна правца (можемо сматрати да је произвољно мали део површи ограничен деловима кругова ових полупречника). Према томе, средња кривина површи је  $2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ,

<sup>3</sup>Jesse Douglas (1897 – 1965), амерички математичар

<sup>4</sup>Tibor Radó (1895 – 1965), мађарски математичар

па једначина (1) постаје

$$\Delta p = 2\gamma H.$$

За површ од сапунице важи  $\Delta p = 0$ , па је  $H \equiv 0$ . Ово узимамо за основну дефиницију минималне површи, а у наредном поглављу ћемо видети везу између претходног описа и њиховог назива. У вези са минималним површима свакако би требало поментути и површи константне средње кривине  $H \equiv \text{const}$  (тзв. СМС surfaces), чији су основни примери мехурови од сапунице, код којих је разлика унутрашњег и спољашњег притиска на сапуницу константна.

Минималне површи се захваљујући мешавини естетских и практичних особина често могу сусрести и у архитектури. Због минимизирања површине оне значајно смањују количину утрошеног материјала и самим тим веома су лаке. Најчешће се употребљавају за лаке кровне и шаторасте конструкције и имају облик огромних површи од сапунице са одређеном границом, које су због стабилности фиксирани у неким тачкама. Архитекта Ото Фреј<sup>5</sup> је на тај начин конструисао кровове Олимпијског стадиона у Минхену, Конгресне дворане у Берлину, као и павиљон Западне Немачке на престижној изложби Ехро 67 одржаној у Монтреалу. Међутим, минималне површи су поприлично 'равне' површи за архитекте, па су понекада подложне подрхтавању од ветра и снега. Често се употребљава и хиперболички параболоид (пример линијске површи) као приближни модел минималне површи, иако то наравно није минимална површ.

---

<sup>5</sup>Frei Paul Otto (1925—), немачки архитекта и инжењер

## 2 Класичне минималне површи у $\mathbb{R}^3$

### 2.1 Дефиниције минималних површи

Сада ћемо показати везу између поменутих дефиниција минималне површи. Нека је  $\mathcal{M}$  површ у  $\mathbb{R}^3$  задата параметризацијом  $\mathbf{r} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ . Надаље подразумевамо Лагранжову дефиницију из 1760. године којом се минималне површи карактеришу средњом кривином која је идентички једнака нули. Формула за средњу кривину у терминима коефицијената прве и друге фундаменталне форме је

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}. \quad (2)$$

Предност ове дефиниције је у томе што је локална јер се средња кривина дефинише у тачки, за разлику од друге дефиниције као површи која минимизује површину јер тада морамо поредити површину целе површи са њој блиским површима. Такође, не зависи од граничне криве и самим тим површи без границе могу такође бити минималне. Мана је у томе што није одмах јасно да ли је дефиниција геометријско својство површи, односно да ли ће се променити ако одаберемо неку другу параметризацију.

Дефинисаћемо фамилију површи  $\mathcal{M}(t)$  које настају малим променама површи  $\mathcal{M}$  у правцу нормалном на површ. Означимо са  $A(t)$  површину површи  $\mathcal{M}(t)$ . Подсетимо се да је површина дела површи  $\mathbf{r}(Q)$  за произвољан компактан скуп  $Q \subset \mathcal{U}$  задата формулом  $\iint_Q \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv$ .

**Дефиниција 2.1.** Нека је  $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијабилна функција и  $\varepsilon > 0$  произвољно. **Нормална варијација** површи  $\mathbf{r}$  задата функцијом  $h$  је пресликавање  $\mathbf{r} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times Q \rightarrow \mathbb{R}^3$  одређено са

$$\mathbf{r}(t, u, v) = \mathbf{r}(u, v) + th(u, v)\mathbf{n}(u, v) \quad (3)$$

за  $(u, v) \in Q$  и  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Покажимо прво да је ово заиста регуларна параметризација за довољно мало  $\varepsilon$ . Диференцирајући (3) по  $u$  и  $v$  добијамо

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u + th_u\mathbf{n} + thn_u$$

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v + th_v\mathbf{n} + thn_v.$$

Уз стандардне ознаке коефицијената прве форме, важи  $E(t) = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u$ ,  $F(t) = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v$ ,  $G(t) = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$ . Специјално је  $E = E(0)$ ,  $F = F(0)$ ,  $G = G(0)$ . Након краћег рачуна

имамо

$$\begin{aligned} E(t) &= (r_u + th_u n + thn_u) \cdot (r_u + th_u n + thn_u) \\ &= E + 2thr_u \cdot n_u + O(t^2) \\ &= E - 2the + O(t^2). \end{aligned}$$

Слично се добијају и остали коефицијенти

$$\begin{aligned} F(t) &= F - 2thf + O(t^2), \\ G(t) &= G - 2thg + O(t^2). \end{aligned}$$

Детерминанта прве форме износи

$$\begin{aligned} I(t) &= E(t)G(t) - F(t)^2 \\ &= (E - 2the + O(t^2))(G - 2thg + O(t^2)) - (F - 2thf + O(t^2))^2 \\ &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + O(t^2) \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + O(t^2). \end{aligned} \tag{4}$$

Како је  $I$  непрекидна функција променљиве  $t$  и  $I(0) = EG - F^2 > 0$ , постоји довољно мало  $\varepsilon > 0$  тако да је  $I(t) > 0$  за  $|t| < \varepsilon$ . Према томе, за довољно мало  $\varepsilon$  нормална варијација дате површи је опет регуларна параметризована површ.

Површина  $r(\mathcal{Q})$  дата је формулом  $A(t) = \iint_{\mathcal{Q}} \sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2} dudv$ .

**Лема 2.1.** *Важна*

$$A'(0) = -2 \iint_{\mathcal{Q}} hH \sqrt{EG - F^2} dudv, \tag{5}$$

при чему је  $H$  средња кривина површи  $\mathcal{M}$ .

*Доказ.* Користећи (4) добијамо

$$\begin{aligned} \sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2} &= \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + O(t^2)} \\ &= \sqrt{EG - F^2} \sqrt{(1 - 4thH) + O(t^2)} \\ &= \sqrt{EG - F^2}(1 - 2thH) + O(t^2), \end{aligned}$$

одакле је даље

$$\begin{aligned} A(t) &= \iint_{\mathcal{Q}} (\sqrt{EG - F^2}(1 - 2thH) + O(t^2)) dudv \\ &= \iint_{\mathcal{Q}} \sqrt{EG - F^2} dudv - 2t \iint_{\mathcal{Q}} hH \sqrt{EG - F^2} dudv + O(t^2). \end{aligned} \tag{6}$$

Диференцирајући (6) по  $t$  и замењујући  $t = 0$  добијамо тражену формулу.



**Теорема 2.1.** Нека је  $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  регуларна параметризована површ и  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{U}$  компактан скуп. Тада је површ  $\gamma$  минимална на  $\mathcal{Q}$  ако је  $A'(0) = 0$  за нормалну варијацију површи  $\gamma$  у односу на произвољну  $h : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Доказ.* Ако је  $H \equiv 0$ , онда на основу (5) добијамо  $A'(0) = 0$  за произвољну  $h$ . Обрнуто, претпоставимо да је  $A'(0) = 0$  за произвољну диференцијабилну функцију  $h$  и да постоји тачка  $q \in \mathcal{Q}$  у којој је  $H(q) \neq 0$ . Тада можемо наћи околину  $\mathcal{V}$  тачке  $q$  у којој је  $H(u) \neq 0$ , нека је без умањења општости  $H(u) > 0$  за  $u \in \mathcal{V}$ . Можемо одабрати глатку функцију  $h$  такву да је  $h(q) > 0$ ,  $h(u) \geq 0$  за све  $u$  и  $h(u) = 0$  ван  $\mathcal{V}$ . Тада је интеграл на десној страни (5) негативан, што повлачи  $A'(0) < 0$ . Контрадикција! Дакле  $H(q) = 0$ , и пошто је  $q$  произвољно,  $\gamma$  је минимална.  $\square$

Приметимо да немамо никакву информацију о  $A''(0)$ , тј. минимална површ, иако је критична тачка функционала површине, не мора заиста бити и локални минимум. Довољно мале делове минималних површи које су заиста локални минимуми функционала површине можемо реализовати помоћу жице која одговара њиховој граници и сапунице. Оне минималне површи које су само седласте критичне тачке функционала не можемо реализовати на поменути начин јер представљају стања нестабилне равнотеже потенцијалне енергије и зовемо их *нестабилним минималним површима*. Наиме, мале деформације тако формиране површи одмах би довеле до њеног пуцања, док би се код оних у стабилној равнотежи деформисана површ одмах вратила у свој првобитни положај (леп пример видећемо ускоро код катеноида). Такође, интуитивно је јасно да је било коју површ у  $\mathbb{R}^3$  коначне површине увек могуће овако деформисати тако да се њена површина повећа. Према томе, минималне површи не могу бити тачке локалног максимума функционала површине, тј. нема смисла дефинисати *максималне површи*. Напоменимо још нешто: ако бисмо уместо нормалне варијације површи, односно оне деформације код које се свака тачка помера мало у правцу нормале, посматрали деформације са довољно малим компактним носачем на коме се одвија нормална варијација, минималне површи би заиста биле локални минимуми придруженом функционалу, односно заиста би минимизовале површину. Управо ово је случај код површи чија је граница унапред задата крива.

Површи константне средње кривине су такође критичне тачке истог функционала, али су дозвољене деформације само оне које чувају запремину (детаљније у [3]). Наравно, сужавањем дозвољених деформација повећали смо број критичних тачака, тј. површи јер сада у обзир долазе и површи константне нула средње кривине које нису минималне, па самим тим нису критичне тачке функционала површине на простору свих нормалних варијација.

Нека је  $J(\mathbf{r}) = \iint_{\mathcal{Q}} L(u, v, \mathbf{r}(u, v), r_u(u, v), r_v(u, v)) dudv$  функционал површи  $\mathcal{M}$  задате параметризацијом  $\mathbf{r} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , при чему је Лагранжијан  $L$  дефинисан на тангентном раслојењу  $T\mathcal{M}$ . Подразумевамо да је скуп  $\mathcal{Q}$  компактан, са глатком или део-по-део глатком границом  $\mathcal{C}$ , као и да  $J = J(\mathbf{r})$  припада векторском простору  $\mathcal{F}$  свих глатких векторских функција на  $\mathcal{Q}$ . Посматрајмо варијацију  $\mathbf{r}(\varepsilon, u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \varepsilon\eta(u, v)$  са фиксираним границом  $\eta|_{\mathcal{C}} = 0$ . Како је  $\varepsilon = 0$  очигледно локални минимум функције  $J(\mathbf{r}(\varepsilon, u, v))$ , посматране као функције једне променљиве  $\varepsilon$ , важи  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\mathbf{r} + \varepsilon\eta) - J(\mathbf{r})}{\varepsilon} = \left. \frac{\partial J(\mathbf{r} + \varepsilon\eta)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$ . Извод може ући под интеграл, па добијамо

$$\iint_{\mathcal{Q}} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \eta + \frac{\partial L}{\partial r_u} \eta_u + \frac{\partial L}{\partial r_v} \eta_v \right) dudv = 0.$$

Ако у Гриновој теореме одаберемо  $P = \eta \frac{\partial L}{\partial r_v}$  и  $Q = \eta \frac{\partial L}{\partial r_u}$ , последња два члана интеграла нам због  $\eta|_{\mathcal{C}} = 0$  дају

$$\iint_{\mathcal{Q}} \left( \frac{\partial L}{\partial r_u} \eta_u + \frac{\partial L}{\partial r_v} \eta_v \right) dudv = - \iint_{\mathcal{Q}} \eta \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial r_u \partial u} + \frac{\partial^2 L}{\partial r_v \partial v} \right] dudv.$$

Према томе

$$\iint_{\mathcal{Q}} \eta \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial^2 L}{\partial r_u \partial u} - \frac{\partial^2 L}{\partial r_v \partial v} \right] dudv = 0. \quad (7)$$

Слично као у доказу Теореме (2.1), да би формула (7) важила за произвољну функцију  $\eta$  која задовољава услов  $\eta|_{\mathcal{C}} = 0$ , израз у заградама мора бити идентички једнак нули. Управо то је тзв. Ојлер-Лагранжова једначина

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial L}{\partial r_u} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial L}{\partial r_v} \right) = 0.$$

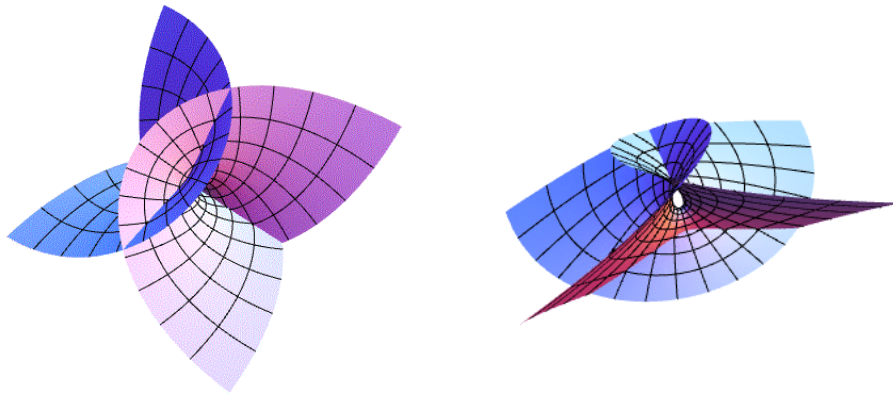
Ако је  $J = A(\mathbf{r})$  функционал површине задат Лагранжијаном

$$L(u, v, \mathbf{r}(u, v), r_u(u, v), r_v(u, v)) = L(r_u, r_v) = \sqrt{(r_u, r_u)(r_v, r_v) - (r_u, r_v)^2}$$

и  $\mathbf{r}(u, v) = (r^1(u, v), r^2(u, v), r^3(u, v))$  екстремум тог функционала, тада Ојлер-Лагранжова једначина постаје

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial L}{\partial r_u^i} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial L}{\partial r_v^i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Слично као код геодезијских линија и функционала дужине, Ојлер-Лагранжове једначине нам дају потребан услов при коме нека површ (само) локално минимизује површину. Као последица ових формула може се директно добити тежи смер Теореме (2.1), али су нам потребне специјалне координате на површи о којима ће бити речи у наредном поглављу.



Слика 1: Енеперова површ

## 2.2 Примери минималних површи

### Раван

Тривијалан пример минималне површи је део равни (нпр.  $z = 0$ ) и добија се од сапунице ако је крива од жице раванска.

### Енеперова минимална површ

Ово је једна од најједноставнијих минималних површи у  $\mathbb{R}^3$  јер је њена параметризација полиномна. Открио ју је Енепер<sup>6</sup> 1864. године.

$$r(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Упркос својој једноставној дефиницији, ова површ има 'рупу' у средини и самопресеке, односно није регуларна параметризована површ (биће ако узмемо довољно мали део равни, на основу теореме о имплицитној функцији). Прва форма површи  $r$  је  $ds^2 = (u^2 + v^2 + 1)(du^2 + dv^2)$ , друга форма је  $2(du^2 - dv^2)$ , главне кривине су  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{(u^2 + v^2 + 1)^2}{2}$ , па је  $H = 0$  и површ је минимална.

Имплицитна једначина ове површи је

$$\left( \frac{y^2 - x^2}{2z} + \frac{2z^2}{9} + \frac{2}{3} \right)^2 = 6 \left( \frac{y^2 - x^2}{4z} - \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + \frac{8}{9}z^2) + \frac{2}{9} \right)^2, \quad z \neq 0.$$

### Катеноид

Катеноид је ротациона површ која се добија ротацијом ланчанице  $x = \frac{1}{a} \cosh az$  око  $z$ -осе. Њена параметризација (за  $a = 1$ ) је

$$r(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

<sup>6</sup> *Alfred Enneper* (1830 – 1885), немачки математичар

Прва форма површи је  $ds^2 = \cosh^2 v(du^2 + dv^2)$ , друга форма је  $du^2 - dv^2$  и користећи формулу (2), добијамо  $H = 0$ .

Докажимо да је катеноид једина ротациона површ, поред равни, која је минимална. Претпоставимо да имамо стандардну параметризацију

$$r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

где профилна крива  $u \mapsto (f(u), 0, g(u))$  лежи у  $xz$ -равни, природно је параметризована и  $f > 0$ . Једноставним рачуном добијају се прва и друга форма површи  $du^2 + f(u)^2 dv^2$  и  $(f'g'' - f''g')du^2 + fg'dv^2$ , као и

$$H = \frac{1}{2} \left( f'g'' - f''g' + \frac{g'}{f} \right).$$

Претпоставимо да за неко  $u = u_0$  важи  $g'(u_0) \neq 0$ . Тада је  $g'(u) \neq 0$  у некој околини тачке  $u_0$ . Нека је  $u \in (\alpha, \beta)$  највећи такав интервал. Због услова природне параметризације  $f'^2 + g'^2 = 1$  добијамо  $f'g'' - f''g' = -\frac{f''}{g'}$ , одакле је  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'} \right)$ . Према томе, ова површ је минимална акко је  $1 - f'^2 = g'^2 = ff''$ , тј. ако глатка функција  $f > 0$  задовољава диференцијалну једначину

$$ff'' = 1 - f'^2.$$

Уводећи смену  $f' = h$  добијамо  $f'' = \frac{dh}{dt} = \frac{dh}{df} \frac{df}{dt} = h \frac{dh}{df}$  и претходна једначина постаје  $fh \frac{dh}{df} = 1 - h^2$ . Због  $g' \neq 0$  је  $h^2 \neq 1$ , па можемо интегралити

$$\begin{aligned} \int \frac{hdh}{1-h^2} &= \int \frac{df}{f}, \\ \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} &= af, \\ h &= \frac{\sqrt{a^2 f^2 - 1}}{af}, \end{aligned}$$

где је  $a \neq 0$  константа (избацили смо  $\pm$  јер знак можемо променити заменом  $u$  са  $-u$  ако је неопходно). Враћајући смену  $h = \frac{df}{du}$  и интегралећи поново имамо

$$\begin{aligned} \int \frac{afdf}{\sqrt{a^2 f^2 - 1}} &= \int du, \\ f &= \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2(u+b)^2}, \end{aligned}$$

где је  $b$  константа. Можемо претпоставити надаље  $b = 0$  јер је промена координата  $u \mapsto u + b$  дифеоморфизам. Дакле  $f = \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2 u^2}$ . Из  $g'^2 = 1 - f'^2 = 1 - h^2 = \frac{1}{a^2 f^2}$

добијамо

$$\begin{aligned} \frac{dg}{du} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1+a^2u^2}}, \\ g &= \pm \frac{1}{a} \sinh^{-1}(au) + C, \\ au &= \pm \sinh^{-1}(a(g-C)), \\ f &= \frac{1}{a} \cosh(a(g-C)), \end{aligned}$$

за прозивољну константу  $C$ . Профилна крива је  $x = \frac{1}{a} \cosh(a(z-C))$ . Транслацијом дуж  $z$ -осе можемо постићи  $C = 0$ , чиме добијамо стандардни катеноид. За сада смо показали да део површи који одговара параметру  $u \in (\alpha, \beta)$  представља део катеноида, због ограничења  $g' \neq 0$ . Претпоставимо да је  $\beta < +\infty$  и да је профилна крива дефинисана и у тачкама  $u \geq \beta$ . Тада мора да важи  $g'(\beta) = 0$  јер би у супротном  $g'$  било различито од нуле у околини тачке  $\beta$ , што противречи услову да је  $(\alpha, \beta)$  највећи интервал који садржи  $u_0$  и на коме је  $g' \neq 0$ . Претходне формуле дају  $g'^2 = \frac{1}{1+a^2u^2}$  за  $u \in (\alpha, \beta)$ , па због непрекидности функције  $g'$  мора бити  $g'(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2\beta^2}} \neq 0$ . Ово показује да профилна крива није дефинисана у тачкама  $u \geq \beta$ , што наравно тривијално важи за  $\beta = +\infty$ . Сличан аргумент важи и за  $\alpha$ , што значи да је профилна крива дефинисана само на  $(\alpha, \beta)$ . Остаје да размотримо случај  $g'(u) \equiv 0$  на целом домену. Међутим, тада је  $g(u)$  константа, рецимо  $d$ , и површ је део равни  $z = d$ . Овим је доказ завршен.

Имплицитна једначина катеноида је  $\cosh z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Катеноид можемо реализовати сапуницом. Посматрајмо два подударна круга који се налазе у паралелним равнима тачно један изнад другог. Означимо са  $h$  растојање између равни и са  $\rho$  полупречник кругова. Испоставља се да за мало  $h$  постоје тачно два катеноида  $r = a_i \cosh\left(\frac{z}{a_i}\right)$ ,  $i = 1, 2$ ; један од њих близу тога да постане цилиндар, други конус. Како  $h \rightarrow 0$  имаћемо  $a_1 \rightarrow \rho$  и  $a_2 \rightarrow 0$ . Ако повећавамо  $h$ , спољни катеноид се све више улубљује ( $a_1$  се смањује), а унутрашњи постаје све мање општар ( $a_2$  расте). Дакле, повећавањем  $h$  катеноиди се приближавају један другом. Најзад, у неком тренутку за  $h = h_{cr}(\rho)$  катеноиди се „залепе” један за други. Над том контуром постоји јединствен катеноид. Ако наставимо да раздвајамо кругове, у пракси ће се десити да катеноид који одговара  $h_{cr}(\rho)$  пређе у два диска од сапунице над поменутиим круговима. Када је  $h > h_{cr}$ , не постоји ниједан катеноид над овом контуром.

Оправдајмо сада формално аналитички ова запажања. Уведимо цилиндричне координате  $(r, \phi, z)$ ; кругови полупречника  $\rho$  леже у равнима  $z = \pm \frac{h}{2}$ , са центрима на  $z$ -оси. Тада катеноиди одређени овом контуром задовољавају једначину  $r = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right)$ , односно  $\rho = a \cosh\left(\frac{h}{2a}\right)$  за наше конкретне вредности. Број тих катеноида једнак је броју решења последње једначине по променљивој  $a > 0$ . Посматрајмо

график функције  $y = a \cosh\left(\frac{h}{2a}\right)$ , за фиксирано  $h$ . Тражена решења добијају се у пресеку графика и праве  $y = \rho$ . Ако  $a \rightarrow 0$  или  $a \rightarrow +\infty$ , очигледно  $y \rightarrow +\infty$ . Показаћемо да за  $a > 0$  функција  $y(a) = a \cosh\left(\frac{h}{2a}\right)$  има јединствени локални екстремум, и то минимум. Први извод

$$\frac{dy}{da} = \cosh \frac{h}{2a} - \frac{h}{2a} \sinh \frac{h}{2a} = 0$$

има јединствено позитивно решење  $a = a_0$  пошто је еквивалентна једначини  $\coth\left(\frac{h}{2a}\right) = \frac{h}{2a}$ ,  $a > 0$ . Нека је  $t_0$  јединствено позитивно решење једначине  $\coth t = t$ . Тада је  $a_0 = a_{cr} = \frac{h}{2t_0}$ . Ако повећамо  $h$ , график се помера навише. Како  $h \rightarrow +\infty$ , критична тачка  $a_0 = \frac{h}{2t_0} \rightarrow +\infty$  и самим тим критична вредност  $y_0 = a_0 \cosh\left(\frac{h}{2a}\right) = a_0 \cosh t_0 \rightarrow +\infty$ . Обрнуто, ако  $h \rightarrow +\infty$ , тада  $a_0 \rightarrow +\infty$  и  $y_0 \rightarrow +\infty$ .

**Закључак:** За свако  $\rho > 0$  постоји критична вредност  $h_{cr}(\rho)$  таква да за  $h < h_{cr}(\rho)$  права  $y = \rho$  сече график функције  $y(a) = a \cosh\left(\frac{h}{2a}\right)$  у тачно двема тачкама које се приближавају једна другој како  $h \rightarrow h_{cr}(\rho)$ ; за  $h = h_{cr}(\rho)$  права  $y = \rho$  додирује график функције; за  $h > h_{cr}(\rho)$  права и график немају пресечних тачака. Овим смо оправдали геометријску слику о понашању катеноида описану раније при промени удаљености  $h$ . Наравно, јако је важно приметити да у реалним експериментима за  $h < h_{cr}(\rho)$  добијамо само један од два катеноида, и то онај ближи цилиндру за мало  $h$  јер је његова површина очигледно мања. Други катеноид је нестабилна минимална површ и не може се реализовати сапуницом.

### Хеликоид

Хеликоид је линијска површ која се добија истовременим равномерним ротирањем и подизањем (дела) праве дуж фиксиране праве (рецимо  $z$ -осе). Нека је  $\omega$  угаона брзина ротације и  $a$  брзина подизања дуж  $z$ -осе. Ако се права на почетку поклапа са  $x$ -осом, у тренутку  $v$  налази се на висини  $av$ , заротирана за угао  $\omega v$ . Према томе, вектор положаја тачке  $(u, 0, 0)$  након времена  $v$  је  $(u \cos \omega v, u \sin \omega v, av)$ . Уводећи одговарајуће смене можемо хеликоид параметризовати са

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av).$$

Прва форма је  $(a^2 + u^2)du^2 + dv^2$ , друга форма је  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}}dudv$ , па се користећи формулу (2) тривијално добија да је  $H = 0$ , тј. хеликоид је минимална површ. Хеликоид је, поред равни, једина праволинијска минимална површ. Овај нетривијалан резултат доказао је још Каталан 1842. године. Варијација његовог доказа може се наћи у [3], а нешто другачији доказ изложићемо сада.

Посматрајмо стандардну параметризацију праволинијске површи

$$r(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u),$$

где је  $\delta$  векторско поље дуж криве  $\gamma$ . Можемо претпоставити да је поље јединично, тј.  $\|\delta(u)\| = 1$  за све  $u$ , као и да је  $\delta'(u) \neq 0$  (касније ћемо размотрити и  $\delta'(u) = 0$ ).  $\delta$  можемо третирати као природно параметризовану криву, одакле је  $\delta \cdot \delta' = \delta' \cdot \delta'' = 0$ . Приметимо да нисмо претпоставили да је крива  $\gamma$  природно параметризована. Посматрајмо сада криву

$$\bar{\gamma}(u) = \gamma(u) - (\gamma'(u) \cdot \delta'(u))\delta(u).$$

Ако означимо  $\bar{v} = v + \gamma'\delta'$ , површ можемо репараметризовати користећи  $\bar{\gamma}$  и параметре  $u, \bar{v}$  као

$$r(u, \bar{v}) = \bar{\gamma}(u) + \bar{v}\delta(u),$$

с тим што сада имамо  $\bar{\gamma}'\delta' = 0$ . То значи да смо могли на почетку да претпоставимо да је  $\gamma'\delta' = 0$ , што ћемо сада учинити. Коефицијенти прве форме су  $E = \|\gamma' + v\delta'\|^2$ ,  $F = (\gamma' + v\delta') \cdot \delta$ ,  $G = 1$ ; коефицијенти друге форме су  $e = \frac{(\gamma'' + v\delta'') \cdot ((\gamma' + v\delta') \times \delta)}{\sqrt{EG - F^2}}$ ,  $f = \frac{\delta' \cdot (\gamma' \times \delta)}{\sqrt{EG - F^2}}$ ,  $g = 0$ , па из формуле (2) добијамо услов да је праволинијска површ минимална

$$(\gamma'' + v\delta'') \cdot ((\gamma' + v\delta') \times \delta) = 2(\delta \cdot \gamma') \cdot (\delta' \cdot (\gamma' \times \delta)),$$

који мора важити за све  $(u, v)$ . Изједначавајући коефицијенте уз степене  $v$  добијамо

$$\gamma'' \cdot (\gamma' \times \delta) = 2(\delta \cdot \gamma') \cdot (\delta' \cdot (\gamma' \times \delta)), \quad (9)$$

$$\gamma'' \cdot (\delta' \times \delta) + \delta'' \cdot (\gamma' \times \delta) = 0, \quad (10)$$

$$\delta'' \cdot (\delta' \times \delta) = 0, \quad (11)$$

Једначина (11) нам даје линеарну зависност  $\delta, \delta', \delta''$ . Како су  $\delta$  и  $\delta'$  ортогонални јединични вектори, постоје глатке функције  $\alpha(u)$  и  $\beta(u)$  такве да је  $\delta'' = \alpha\delta + \beta\delta'$ . Диференцирањем два пута добијамо  $\alpha = 1$  и  $\beta = 0$ , односно  $\delta'' = -\delta$ . Заједно са чињеницом  $\delta'' \cdot \delta = -1$ , добијамо да је кривина криве једнака 1, вектор нормале је  $-\delta$ , бинормале  $\delta'' \times (-\delta)$ , а због  $\frac{d}{du}(\delta' \times \delta) = \delta'' \times \delta + \delta' \times \delta' = 0$  је торзија једнака нули. Према томе,  $\delta$  представља до на изометрију круг полупречника 1. Можемо претпоставити да је у  $xy$ -равни, тј.

$$\delta(u) = (\cos u, \sin u, 0).$$

Из  $\delta'' \cdot (\gamma' \times \delta) = -\delta \cdot (\gamma' \times \delta) = 0$  и једначине (10) добијамо  $\gamma'' \cdot (\delta' \times \delta) = 0$ , па је  $\gamma''$  паралелна  $xy$ -равни и облика је

$$\gamma(u) = (f(u), g(u), au + b),$$

за неке глатке функције  $f$  и  $g$  и константе  $a$  и  $b$ . Ако је  $a = 0$ , површ је део равни  $z = b$ . Иначе, једначина (9) нам даје  $g'' \cos u - f'' \sin u = 2(f' \cos u + g' \sin u)$ . Овде коначно користимо услов  $\gamma' \cdot \delta' = 0$ , тј.  $f' \sin u = g' \cos u$  и након диференцирања  $f'' \sin u + f' \cos u = g'' \cos u - g' \sin u$ . Из ових једначина следи  $f' = g' = 0$ , односно  $f$  и  $g$  су константне функције. Транслирањем површи можемо постићи да су  $f, g$  и  $b$  нуле, односно  $\gamma(u) = (0, 0, au)$  и  $r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$ , тј. у питању је хеликоид. Претпоставка са почетка да је  $\delta'$  свуда различито од нуле се отклања на сличан начин као у случају катеноида.

Имплицитна једначина хеликоида за  $a = 1$  је  $\operatorname{tg} z = \frac{y}{x}$ .

Хеликоид је такође могуће добити као површ од сапунице. Потребно је направити контуру која се састоји од две завојнице (спирале) које се "укрштају" и затворене су двома дужима са обе стране. За довољно велику висину периоде хеликоида (односно спирала), површ од сапунице разапета овом контуром биће заиста хеликс. Како смањујемо висину периоде сабијајући завојнице, у неком тренутку хеликоид ће прећи у траку мале ширине која представља растојање између завојница. Ово је последица чињенице да је хеликоид нестабилна минимална површ, бесконачног индекса. Више о (не)стабилности минималних површи и њиховом индексу може се наћи у [3]. Додајмо само да Енеперова површ и катеноид имају индексе 1, део Шеркове површи над јединичним диском индекс 0, а све периодичне минималне површи индексе  $+\infty$  као и хеликоид.

У Поглављу 5 видећемо да су катеноид и хеликоид изометричне површи, као и саме формуле деформације.

### Хенебергова површ

Параметризација ове површи је

$$r(u, v) = \left( 2 \sinh u \cos v - \frac{2}{3} \sinh 3u \cos 3v, 2 \sinh u \sin v + \frac{2}{3} \sinh 3u \sin 3v, 2 \cosh 2u \cos 2v \right).$$

Површ је регуларна у свим тачкама осим у  $\left(0, \frac{n\pi}{2}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Приметимо да је  $r(u, v) = r(-u, v + \pi)$ , па за сваки отворен скуп  $\mathcal{U}$  у десној полуравни  $\{(p, q) | p > 0\}$  постоји одговарајући скуп  $\tilde{\mathcal{U}}$  у левој полуравни  $\{(p, q) | p < 0\}$  такав да је траг површи дефинисане на њима исти подскуп од  $\mathbb{R}^3$ . Такође, за јединичну нормалу  $n$  ове површи важи  $n(u, v) = -n(-u, v + \pi)$ , па су површи дефинисане овом параметризацијом на скуповима  $\{(p, q) | p > 0, -\pi < v < \pi\}$  и  $\{(p, q) | p < 0, -\pi < v < \pi\}$  супротно оријентисане.

### Монжове минималне површи

Претпоставимо да је површ задата као график глатке функције  $(u, v) \mapsto (u, v, h(u, v))$ . Користећи формулу (2) добијамо  $H = (1 + h_v^2)h_{uu} - 2h_u h_v h_{uv} + (1 + h_u^2)h_{vv}$ , што значи



да су минималне површи одређене функцијама  $h$  које задовољавају парцијалну диференцијалну једначину 2. реда

$$H = (1 + h_v^2)h_{uu} - 2h_u h_v h_{uv} + (1 + h_u^2)h_{vv} = 0. \quad (12)$$

Приметимо да смо исту једначину могли да добијемо као последицу једначине

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_x}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h_y}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} \right) = 0,$$

која следи из (8), јер при малим деформацијама ова површ остаје график глатке функције. Парцијална једначина (12) понекад се назива *једначином минималне површи*, јер се свака површ може локално приказати као график глатке функције. Она самим тим даје потребне и довољне услове да би Монжова<sup>7</sup> површ била минимална, али проблем је у томе што је у општем случају нерешива. Међутим, Шерк<sup>8</sup> је први покушао да нађе њена решења која раздвајају променљиве, тј. оне функције облика  $h(u, v) = f(u) + g(v)$ . Имамо  $h_{uu} = f''(u)$ ,  $h_{uv} = 0$ ,  $h_{vv} = g''(v)$ , па једначина (12) постаје  $\frac{f''(u)}{1 + f'(u)^2} = \frac{-g''(v)}{1 + g'(v)^2}$ . Како су  $u$  и  $v$  независне променљиве, обе стране морају бити једнаке некој константи  $a$ . Ако је  $a = 0$ , тада  $f$  и  $g$  морају бити линеарне функције, па је површ део равни. Иначе, обе једначине

$$\frac{f''(u)}{1 + f'(u)^2} = a = \frac{-g''(v)}{1 + g'(v)^2}$$

имају нетривијална решења  $f(u) = -\frac{1}{a} \log \cos(au)$  и  $g(v) = \frac{1}{a} \log \cos(av)$ , одакле је  $h(u, v) = \frac{1}{a} \log \left( \frac{\cos(av)}{\cos(au)} \right)$ . Дакле, Монжова површ  $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$  задата функцијом  $h(u, v) = f(u) + g(v)$ , тј. параметризацијом  $\gamma(u, v) = (u, v, f(u) + g(v))$  је минимална акко је део равни или постоји константа  $a \neq 0$  таква да је  $h(u, v) = \frac{1}{a} \log \left( \frac{\cos(av)}{\cos(au)} \right)$ . Оваква површ назива се **Шеркова минимална површ**. Ради једноставности узмимо  $a = 1$ . Највећи отворен скуп на коме је ова површ дефинисана је

$$\mathcal{U} = \{(u, v) \mid \cos u \cos v > 0\} = \left\{ \left( m\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

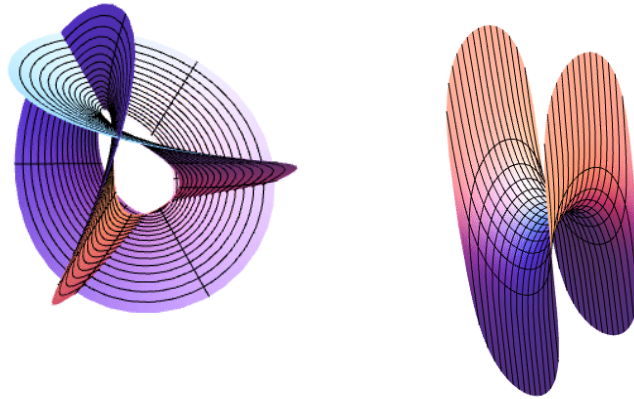
Означимо са

$$\mathcal{U}(m, n) = \left\{ (u, v) \mid m\pi - \frac{\pi}{2} < u < m\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi - \frac{\pi}{2} < v < n\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$$

и обојимо  $\mathcal{U}(m, n)$  црно ако је  $m + n$  парно и бело ако је  $m + n$  непарно. Тиме је  $uv$ -раван представљена као бесконачна шаховска табла и  $\mathcal{U}$  је унија црних квадрата

<sup>7</sup> *Gaspard Monge* (1746 – 1818), француски математичар

<sup>8</sup> *Joël Scherk* (1946 – 1980), француски физичар



Слика 2: Хенебергова и Шеркова минимална површ

те 'табле', над којима је дефинисана Шеркова минимална површ. Како је  $h(u, v) = h(u + 2m\pi, v + 2n\pi)$  за све реалне бројеве  $u, v$  и целе бројеве  $m, n$ , Шеркова минимална површ над произвољним црним  $\mathcal{U}(m, n)$  квадратом је транслат дела површи над квадратом  $\mathcal{U}(0, 0)$ . Праве нормалне на  $uv$ -раван које садрже темена црних квадрата не припадају површи, али им се делови површи над 'суседним' квадратима произвољно близу приближавају и симетрични су у односу на њих.

### Каталанова површ

Задата је параметризацијом

$$r(u, v) = \left( u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, -4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2} \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Ова површ очигледно има самопресеке, слично Енеперовој површи. Параметарска крива  $u = 0$  је права линија, параметарска крива  $u = \pi$  је парабола, док је параметарска крива  $v = 0$  циклоида. Све ове криве су геодезијске на Каталановој<sup>9</sup> површи.

### Шеркова пета минимална површ

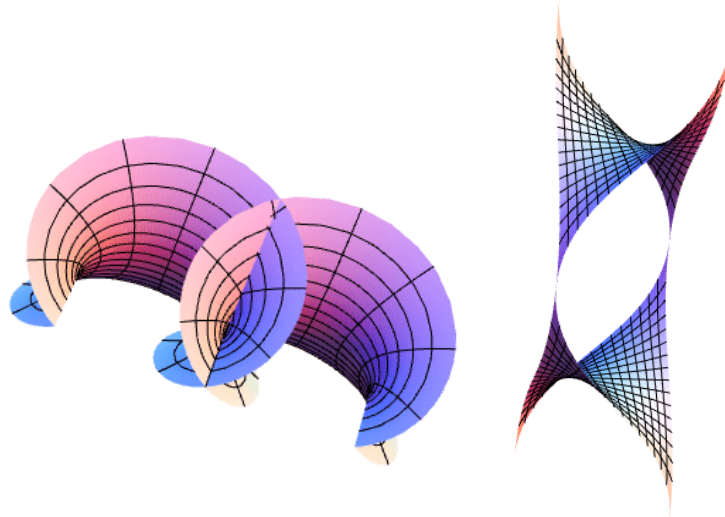
Ова површ најчешће је дефинисана имплицитно једначином

$$\sin z = \sinh x \sinh y.$$

Можемо је параметризовати на следећи начин:

$$r(u, v) = (\operatorname{arcsinh} u, \operatorname{arcsinh} v, \operatorname{arcsin} uv).$$

Ова површ такође има рупе, али нема самопресека. Наиме, постоји само 5 комплетних минималних површи без самопресека, и то су: катеноид, хеликоид, Шеркова минимална површ, Шеркова пета минимална површ и Костина минимална површ.



Слика 3: Каталанова и Шеркова пета минимална површ

### Шварц-Риманова површ

Конструкција ове површи заснива се на Шварц-Римановим<sup>10</sup> принципима:

1. Ако граница минималне површи  $M \in \mathbb{R}^3$  садржи сегмент  $I$  праве линије  $l$ , тада је унија  $M \cup M^*$  површи  $M$  и њене слике  $M^*$  при рефлексiji у односу на праву  $l$  глатка минимална површ (тј. минималне површи  $M$  и  $M^*$  се глатко спајају дуж сегмента  $I$  у нову минималну површ).
2. Ако се површ  $M \in \mathbb{R}^3$  и раван  $\Pi$  ортогонално секу дуж глатке регуларне криве  $\gamma$ , тада је унија  $M \cup M^*$  површи  $M$  и њене слике  $M^*$  при рефлексiji у односу на раван  $\Pi$  глатка минимална површ (тј. минималне површи  $M$  и  $M^*$  се глатко спајају дуж криве  $\gamma$  у нову минималну површ).

Посматрајмо произвољну коцку и четири тачке: средишта  $A, B, C$  трију ивица које имају заједничко теме коцке и центар коцке  $O$ . Ове тачке очигледно чине правилан тетраедар  $OABC$ , над којим разапнемо површ. Ако је рефлектујемо преко ивица  $OA$  и  $OB$ , добијемо још један тетраедар чији је једно теме  $O$  и преостала три су средишта ивица које имају заједничко теме коцке. Понављајући сличне рефлексije за новодобијене тетраедре, добијемо као резултат шест тетраедара који имају заједничко теме  $O$  и сваки од њих још по три средишта ивица које се спајају у истом темену

<sup>9</sup> *Eugène Charles Catalan* (1814 – 1894), француски математичар белгијског порекла

<sup>10</sup> *Georg Friedrich Bernhard Riemann* (1826 – 1866), немачки математичар

коцке. Резултујућа минимална површ се цела налази унутар коцке и разапета је над контуром која се састоји од 12 сегмената који спајају средишта суседних ивица коцке. Ако ову „хелију” рефлектујемо преко свих страна коцке, добијамо Шварц-Риманову површ која је периодична и нема самопресеке.

### 2.3 Неке особине минималних површи

Средњу кривину  $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  можемо дефинисати и са

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S(p),$$

где је  $S : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{M}_p$  оператор облика и представља негативно тангентно пресликавање нормалног векторског поља површи. Формула (2) за средњу кривину добија се када за базу тангентног простора одаберемо  $\{r_u, r_v\}$  и њен значај је у томе што нам даје начин да одмах оперативно рачунамо средњу кривину само преко коефицијената фундаменталних форми. Међутим, оператор облика је линеарно пресликавање тангентног простора који је геометријски објекат и самим тим траг тог пресликавања не зависи од базе у којој је представљен, односно средња кривина се неће променити при промени параметризације. Ако одаберемо ортонормирану базу сопствених вектора која дијагонализује оператор облика, добијамо теоријски битну формулу

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2},$$

где су  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  главне кривине. У свакој тачки минималне површи главне кривине су једнаке по апсолутној вредности и супротног су знака. Главне кривине представљају максимум и минимум до којих се површ криви у околини одређене тачке (прецизније, до којих се криве на површи које садрже ту тачку криве), што значи да се минимална површ 'подједнако криви' на обе стране, тј. у оба међусобно нормална главна правца. Ова равнотежа кривина даје естетски квалитет минималним површима. Такође, њихова Гаусова кривина је очигледно непозитивна због  $K = -\kappa^2 \leq 0$ , што значи да је свака тачка минималне површи седласта (хиперболичка или планарна) и она у произвољној околини најчешће изгледа као коњско седло. Самим тим за многе површи можемо одмах да препознамо да нису минималне.

За разлику од Гаусове кривине, средња кривина није унутрашње својство површи. Другим речима, средња кривина површи  $\mathcal{M}$  зависи од начина на који је површ смештена у  $\mathbb{R}^3$ . На пример, кружни цилиндар полупречника  $a$  има средњу кривину  $-\frac{1}{2a}$ , а раван 0. Међутим, раван и цилиндар су изометричне површи. Самим тим нема смисла дефинисати средњу кривину апстрактних површи задатих само првом формом, као ни које су минималне међу њима.

Нека је  $p \in \mathcal{M}$  произвољна тачка минималне површи,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  главне кривине и  $e_1$  и  $e_2$  одговарајући јединични главни вектори. Ако са  $\theta$  означимо угао између произвољног вектора  $u_p$  и  $e_1$ , тада нам Ојлерова теорема даје формулу за нормалну кривину  $\kappa(u_p)$  само у терминима главних кривина и угла  $\theta$

$$\kappa(u_p) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta.$$

Одавде лако следи да у формули за средњу кривину не морамо узети полубир главних кривина, већ је могуће узети полубир нормалних кривина дуж два произвољна нормална правца. Ако је тачка  $p \in \mathcal{M}$  хиперболичка, постоје тачно два нормална асимптотска правца у  $p$  и њихове симетрале су главни правци. Заиста, због  $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 < 0$ , главне кривине  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  су супротног знака. То специјално значи да је за неки угао  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  главна кривина једнака 0, односно  $\operatorname{tg}^2 \theta = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ . Означимо  $u_p(\theta) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ . Тада из Ојлере теореме следи да су  $u_p(\theta)$  и  $u_p(-\theta)$  линеарно независни асимптотски вектори у тачки  $p$ . Угао између њих је  $2\theta$  и  $e_1$  је самим тим симетрала угла између њих. Како је површ додатно минимална, добијамо  $\operatorname{tg}^2 \theta = 1$ , тј.  $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ . У околини тачке  $p$  постоје две различите фамилије асимптотских кривих. Диференцијална једначина асимптотских кривих је

$$eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 0,$$

а једначина  $ea^2 + 2fab + gb^2 = 0$  има реалне корене у околини хиперболичке тачке; можемо је факторисати као  $ea^2 + 2fab + gb^2 = (Aa + Bb)(Ca + Db)$ , за неке реалне бројеве  $A, B, C, D$ . Самим тим се једначина асимптотских кривих факторише у  $(Au' + Bv')(Cu' + Dv') = 0$ , за реалне функције  $A, B, C, D$ . Једна фамилија је решење диференцијалне једначине  $Au' + Bv' = 0$ , а друга једначине  $Cu' + Dv' = 0$ .

Ако је површ  $\mathcal{M}$  у  $\mathbb{R}^3$  компактна, постоји тачка у којој је Гаусова кривина позитивна (доказ се може наћи у [8]). Другим речима, не постоји компактна површ у  $\mathbb{R}^3$  чија је Гаусова кривина свуда непозитивна. Самим тим, не постоји компактна минимална површ у  $\mathbb{R}^3$ .

Наредне Теореме дајемо без доказа (они се могу наћи у [3]). Приметимо да формулације подсећају на сличне особине хармонијских функција у комплексној анализи. У наредном поглављу видећемо да то није случајност.

**Теорема 2.2.** *Нека је  $\mathcal{M}$  компактна повезана глатка минимална површ у  $\mathbb{R}^3$  са границом  $\partial\mathcal{M}$ . Тада се  $\mathcal{M}$  налази унутар конвексног омотача  $\mathcal{C}(\partial\mathcal{M})$  своје границе. Специјално, свака површ од сапунице разапета неком затвореном кривом мора лежати унутар конвексног омотача те криве.*

**Теорема 2.3.** (јединственост) *Ако две глатке минималне површи  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  садрже отворен скуп у пресеку, тада је њихова унија  $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$  глатка минимална површ.*

**Теорема 2.4.** (принцип максимума) *Нека се минималне површи  $M_1$  и  $M_2$  у  $\mathbb{R}^3$  без самопресецања додирују у тачки  $P$  која је у њиховој унутрашњости. Претпоставимо да се површ  $M_1$  локално (у некој околини тачке  $P$ ) налази са једне стране површи  $M_2$ . Тада се површи  $M_1$  и  $M_2$  поклапају у некој околини тачке  $P$ .*

### 3 Изотермалне координате

**Дефиниција 3.1.** Нека је  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  отворен скуп. За елементарну површ задату параметризацијом  $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  кажемо да је **изотермална** ако постоји диференцијабилна функција  $\lambda : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  таква да је  $\gamma_u \cdot \gamma_u = \gamma_v \cdot \gamma_v = \lambda^2$  и  $\gamma_u \cdot \gamma_v = 0$ , односно  $E = G$  и  $F = 0$ . Функцију  $\lambda$  називамо **функцијом скалирања**, а координате на површи **изотермалним координатама**.

Оваква параметризација шаље бесконачно мале квадрате у  $\mathcal{U}$  на бесконачно мале квадрате на површи (уместо у произвољне четвороуглове у општем случају) јер су  $\gamma_u$  и  $\gamma_v$  једнаки, међусобно ортогонални вектори. Углови из карте се чувају јер је пресликавање  $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \gamma(\mathcal{U})$  конформно, па се овакве површи понекад називају конформним.

Испоставља се да на свакој површи могу локално да се уведу изотермалне координате. Гаус је 1822. добио награду Универзитета у Копенхагену јер је показао да је могуће пресликати једну површ на другу тако да су оне „сличне до најситнијих делова”.

**Теорема 3.1.** Нека је  $\mathcal{M}$  површ са метриком  $ds^2$  задата параметарски  $x = x(p, q)$ ,  $y = y(p, q)$ ,  $z = z(p, q)$  и  $P \in \mathcal{M}$ . Тада постоји отворен скуп  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  и изотермална параметризација  $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$  таква да је  $P \in \gamma(\mathcal{U})$  и

$$ds^2 = \lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2).$$

*Доказ.* Посматрајмо формалну факторизацију

$$ds^2 = (\sqrt{E}dp + \frac{F + i\sqrt{I}}{\sqrt{E}}dq)(\sqrt{E}dp + \frac{F - i\sqrt{I}}{\sqrt{E}}dq),$$

где је  $I = EG - F^2$ . Тражимо функције  $u(p, q)$ ,  $v(p, q)$  и  $\mu(p, q)$  за које важи

$$\mu(\sqrt{E}dp + \frac{F + i\sqrt{I}}{\sqrt{E}}dq) = du + idv,$$

$$\bar{\mu}(\sqrt{E}dp + \frac{F - i\sqrt{I}}{\sqrt{E}}dq) = du - idv.$$

За такве функције имали бисмо  $|\mu|^2 ds^2 = du^2 + dv^2$ , односно  $ds^2 = \frac{1}{|\mu|^2}(du^2 + dv^2)$ .

Како је

$$\mu(\sqrt{E}dp + \frac{F + i\sqrt{I}}{\sqrt{E}}dq) = du + idv = \left(\frac{\partial u}{\partial p} + i\frac{\partial v}{\partial p}\right)dp + \left(\frac{\partial u}{\partial q} + i\frac{\partial v}{\partial q}\right)dq,$$

имамо

$$\begin{aligned} \mu\sqrt{E} &= \frac{\partial u}{\partial p} + i\frac{\partial v}{\partial p}, \\ \mu\frac{F + i\sqrt{I}}{\sqrt{E}} &= \frac{\partial u}{\partial q} + i\frac{\partial v}{\partial q}. \end{aligned}$$

Дакле

$$(F + i\sqrt{I}) \left( \frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right) = E \left( \frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right),$$

односно

$$\begin{aligned} F \frac{\partial u}{\partial p} - \sqrt{I} \frac{\partial v}{\partial p} &= E \frac{\partial u}{\partial q}, \\ \sqrt{I} \frac{\partial u}{\partial p} + F \frac{\partial v}{\partial p} &= E \frac{\partial v}{\partial q}. \end{aligned}$$

Тако добијамо систем

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial p} = \frac{F \frac{\partial u}{\partial p} - E \frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{I}}, & \frac{\partial v}{\partial q} = \frac{G \frac{\partial u}{\partial p} - E \frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{I}}, \\ \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{E \frac{\partial v}{\partial q} - F \frac{\partial v}{\partial p}}{\sqrt{I}}, & \frac{\partial u}{\partial q} = \frac{F \frac{\partial v}{\partial q} - G \frac{\partial v}{\partial p}}{\sqrt{I}}. \end{cases}$$

Сада користећи једнакост поновљених парцијалних извода  $\frac{\partial^2}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2}{\partial q \partial p}$  имамо да за тражене функције  $u, v$  важи  $L(u) = 0, L(v) = 0$ , где је

$$L = \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{F \frac{\partial}{\partial p} - E \frac{\partial}{\partial q}}{\sqrt{I}} \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{F \frac{\partial}{\partial q} - E \frac{\partial}{\partial p}}{\sqrt{I}} \right]$$

линеарни парцијални оператор другог реда. Тврђење сада следи из нетривијалних општих ставова о решивости једначине облика  $L(u) = 0$ .  $\square$

Претходна Теорема је егзистенцијалне природе и из доказа се не може добити алгоритам за налажење изотермалних координата на датој површи. Међутим, за минималне површи се могу добити конкретне формуле за изотермалне координате. Одаберимо Декартов координатни систем са координатним почетком у тачки  $P$ , такав да је тангентна раван  $T_P \mathcal{M}$  површи у тачки  $P$  управо  $xy$ -раван. Површ се у околини тачке  $P$  може описати као график функције, тј. као Монжова површ:  $x = x, y = y, z = f(x, y)$ . Све такве функције  $f$  задовољавају једначину минималних површи

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0. \quad (13)$$

Означимо  $p = f_x, q = f_y$  и  $\omega = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ . Приметимо да је  $\omega dx dy$  површински елемент површи. Директним рачуном добијамо

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 + f_x^2}{\omega} \right)_y - \left( \frac{f_x f_y}{\omega} \right)_x &= -\frac{f_y}{\omega} ((1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy}), \\ \left( \frac{1 + f_y^2}{\omega} \right)_x - \left( \frac{f_x f_y}{\omega} \right)_y &= -\frac{f_x}{\omega} ((1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy}), \end{aligned}$$



па из (13) следи

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+p^2}{\omega}\right)_y &= \left(\frac{pq}{\omega}\right)_x, \\ \left(\frac{1+q^2}{\omega}\right)_x &= \left(\frac{pq}{\omega}\right)_y.\end{aligned}$$

Самим тим у свакој простоповезаној околини координатног почетка  $P$  у тангентној равни  $T_P\mathcal{M}$  постоје функције  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  које задовољавају једначине

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1+p^2}{\omega}, & \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{pq}{\omega}, \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{pq}{\omega}, & \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{1+q^2}{\omega}.\end{aligned}$$

Нека је  $\Phi : (x, y) \rightarrow (u, v)$  пресликавање одређено са

$$\begin{aligned}u &= x + F(x, y), \\ v &= y + G(x, y).\end{aligned}$$

Тада су  $(u, v)$  изотермалне координате. Заиста, за јакобијан  $J$  пресликавања  $\Phi$  важи  $J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{(1+\omega)^2}{\omega} > 0$ , па је  $\Phi$  локални дифеоморфизам. На основу Теореме о инверзној функцији, у некој околини координатног почетка постоји диференцијабилно пресликавање  $\Phi^{-1}$  са Јакобијевом матрицом

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \omega + q^2 & -pq \\ -pq & 1 + \omega + p^2 \end{pmatrix} \frac{1}{(1 + \omega)^2}.$$

У  $(u, v)$  координатама површ  $\mathcal{M}$  задата је пресликавањем  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v)))$  и важи

$$\begin{aligned}r_u &= \left( \frac{\omega + 1 + q^2}{(1 + \omega)^2}, \frac{-pq}{(1 + \omega)^2}, p \left( \frac{\omega + 1 + q^2}{(1 + \omega)^2} \right) + q \left( \frac{-pq}{(1 + \omega)^2} \right) \right), \\ r_v &= \left( \frac{-pq}{(1 + \omega)^2}, \frac{\omega + 1 + p^2}{(1 + \omega)^2}, p \left( \frac{-pq}{(1 + \omega)^2} \right) + q \left( \frac{\omega + 1 + p^2}{(1 + \omega)^2} \right) \right),\end{aligned}$$

одакле се директно добија  $E = G = \frac{\omega^2}{(1 + \omega)^2}$  и  $F = 0$ , односно координате су заиста изотермалне.

### Пример 3.1. Стереографска пројекција

Посматрајмо јединичну сферу  $\mathbb{S}^2$  у  $\mathbb{R}^3$ . Параметризација  $\bar{\pi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus N$  дела сфере без северног пола  $N = (0, 0, 1)$  дата је са

$$\bar{\pi}(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Прва фундаментална форма је  $\frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} du^2 + \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} dv^2$ , што значи да су координате изотермалне.

Још једна изотермална параметризација сфере (без једног меридијана) је такозвана *Меркаторова параметризација*

$$r(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, \tanh u).$$

Самим тим видимо да изотермалне координате нису јединствене на површи.

**Пример 3.2.** Изотермалне координате на Енеперовој површи, Каталановој површи и катеноиду су управо оне дате у претходној глави. Једино параметризације катеноида за  $a = \pm 1$  су изотермалне, иако су све минималне површи. Изотермалне координате на хеликоиду су

$$r(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, av).$$

**Пример 3.3.** Полуравански модел  $\mathcal{L}^2$  хиперболичке геометрије са првом формом  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  је изотермална површ. То нам даје могућност да углове између 2 праве у хиперболичкој равни рачунамо у карти као угао између 2 еуклидска круга, или између еуклидске праве и еуклидског круга.

Сада можемо доказати важно тврђење везано за Гаусово пресликавање минималне површи.

**Теорема 3.2.** Гаусово пресликавање оријентабилне минималне површи  $\mathcal{M}$  у  $\mathbb{R}^3$  је конформно.

*Доказ.* Нека је  $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  изотермално параметризована површ и  $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$  Гаусово пресликавање. Важи формула

$$n_u \times n_v = K r_u \times r_v,$$

где је  $K$  Гаусова кривина површи, па је Гаусово пресликавање регуларно ако је  $K \neq 0$  у свим тачкама површи. Такође, Гаусово пресликавање је само локални дифеоморфизам, па не можемо тврдити да је конформни дифеоморфизам.

Потребно је да докажемо да важи  $\|G_*(v_p)\| = \rho(u, v) \|v_p\|$  за све  $p \in \mathcal{M}$  и тангентне векторе  $v_p$  на  $\mathcal{M}$  у тачки  $p$ , где је  $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијабилна позитивна функција скалирања. У том циљу доказаћемо  $G_*(r_u) \cdot G_*(r_v) = \rho^2(u, v) r_u \cdot r_v$ , одакле ће следити  $\|G_*(r_u)\| = \rho(u, v) \|r_u\|$  и  $\|G_*(r_v)\| = \rho(u, v) \|r_v\|$ . Користећи  $E = G$  и  $F = 0$ , као и специјалан облик Вајнгартенових једначина за минималне површи

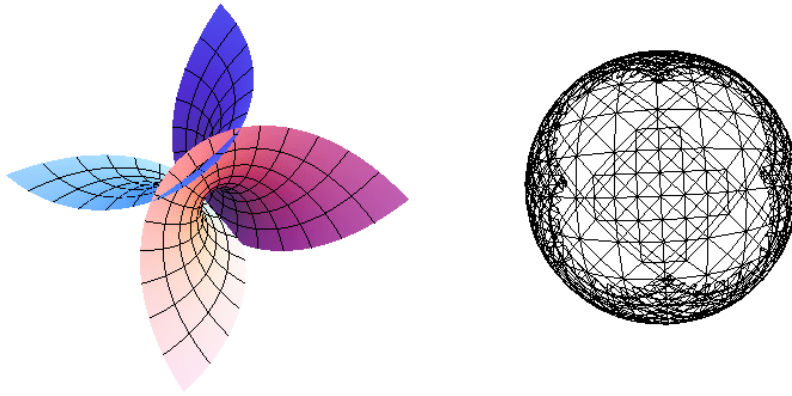
$$\begin{aligned} S(r_u) &= -n_u = \frac{e}{\lambda^2} r_u + \frac{f}{\lambda^2} r_v, \\ S(r_v) &= -n_v = \frac{f}{\lambda^2} r_u + \frac{g}{\lambda^2} r_v, \end{aligned}$$

добивамо

$$G_*(\mathbf{r}_u) = n_u = \frac{e}{E}\mathbf{r}_u - \frac{f}{E}\mathbf{r}_v,$$

$$G_*(\mathbf{r}_v) = n_v = \frac{f}{E}\mathbf{r}_u - \frac{g}{E}\mathbf{r}_v,$$

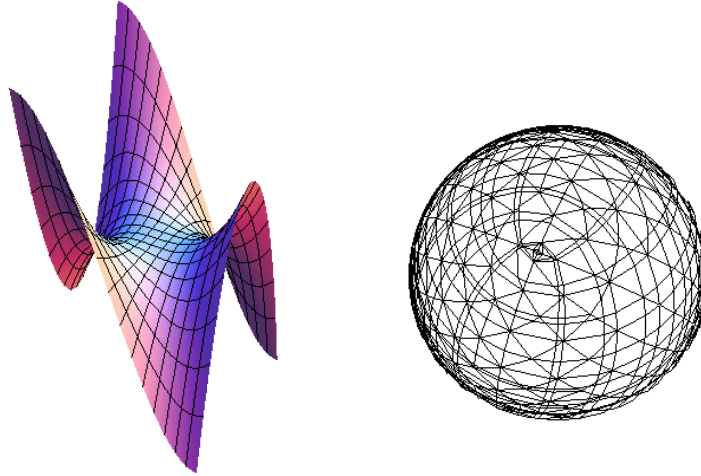
Одавде је  $\|n_u\|^2 = \frac{1}{E}(e^2 + f^2)$ ,  $\|n_v\|^2 = \frac{1}{E}(f^2 + g^2)$  и  $n_u \cdot n_v = \frac{f}{E}(e + g)$ . Из формуле (17) имамо  $e = -g$ , па је  $n_u \cdot n_v = 0$ . Такође, због изотермалних координата важи  $\|\mathbf{r}_u\| = \|\mathbf{r}_v\| = \sqrt{E}$  и  $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0$ , па је Гаусово пресликавање конформно, са функцијом скалирања  $\rho = \frac{\sqrt{e^2 + g^2}}{E} = \sqrt{|K|}$ .  $\square$



Слика 4: Енеперова површ и њена слика при Гаусовом пресликавању

Специјално, Гаусово пресликавање минималне површи очувава однос дужина страна, као и углове бесконачно малих правоугаоника (нпр. добијених од координатних линија на површи). Ова особина се лепо осликава на сфери упоређујућу пример Енеперове површи, која је минимална, и површи мајмунског седла, која није минимална. Може се показати да површ чије је Гаусово пресликавање конформно обавезно мора бити део сфере или део неке минималне површи.

**Пример 3.4. (Бернштајнов проблем)** У претходном поглављу извели смо тзв. једначину минималних површи. Поставља се једно природно питање: да ли постоји функција  $z = f(x, y)$  дефинисана на целој равни која задовољава једначину (12), односно чији је график минимална површ  $\mathcal{M}$  над целим  $\mathbb{R}^2$ ? Једно очигледно решење је раван задата линеарном функцијом, али да ли постоје нека нетривијална решења? Испоставља се да је одговор одречан, тј. нема других комплетних графика (над целом равни) у  $\mathbb{R}^3$  који су минималне површи. Нека је  $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$  Гаусово пресликавање, а  $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus S \rightarrow \mathbb{R}^2$  стереографска пројекција из јужног пола  $S = (0, 0, -1)$ . Очигледно



Слика 5: Мајмунско седло и његова слика при Гаусовом пресликавању

је  $G(\mathcal{M})$  у горњој полусфери јер се ради о графику функције. Можемо да уведемо изотермалне координате на површи  $\mathcal{M}$ , али само локално. Међутим, испоставља се да се функције  $F$  и  $G$  из доказа Теореме (3.1) могу продужити на целу раван, односно  $\Phi$  је дифеоморфизам (видети [3], довољно је доказати да  $\Phi$  не повећава растојање између тачака). Нека су у  $uv$ -равни уведене комплексне координате  $\xi = u + iv$ , а у  $xy$ -равни координате  $\eta = x + iy$ . Тако добијамо пресликавање комплексне равни  $\mathbb{C}_\xi \approx \mathbb{R}_{(u,v)}^2$  у саму себе  $\mathbb{C}_\eta \approx \mathbb{R}_{(x,y)}^2$

$$\mathbb{C}_\xi \approx \mathbb{R}_{(u,v)}^2 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\nu} \mathbb{S}^2 \setminus N \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathbb{R}_{(x,y)}^2 \approx \mathbb{C}_\eta.$$

Ово пресликавање  $\mathbb{C}_\xi \rightarrow \mathbb{C}_\eta$  је холоморфно јер је композиција таквих-координате на површи су изотермалне, а Гаусово пресликавање је конформно. Слика при стереографској пројекцији дела горње полусфере је ограничен подскуп од  $\mathbb{C}_\eta$ , па Гаусово пресликавање одређује једно ограничено пресликавање целе комплексне равни у себе. Према Лиувиловој теореме из комплексне анализе, оно мора бити константно. То значи да се при Гаусовом пресликавању цела површ  $\mathcal{M}$  слика у једну тачку, па су све нормале на површ међусобно паралелне и површ је раван. Наравно, не бисмо могли да применимо Лиувилу теорему да координате  $(u, v)$  не узимају све вредности из  $\mathbb{R}^2$ .

Многе формуле се знатно поједностављују у овим координатама. Означимо са  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$  Лапласијан у  $\mathbb{R}^2$ .

**Теорема 3.3.** Гаусова кривина  $K$  изотермално параметризоване површи  $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  дата је у терминима функције скалирања  $\lambda$  са

$$K = \frac{-\Delta \log \lambda}{\lambda^2}. \tag{14}$$

Кристофелови симболи дати су формулама

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \frac{\lambda_u}{\lambda} \\ \Gamma_{12}^1 &= -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{\lambda_v}{\lambda}.\end{aligned}\tag{15}$$

*Доказ.* Формуле се добијају из општих формула, користећи  $E = G = \lambda^2$  и  $F = 0$ . Прецизније

$$\begin{aligned}K &= \frac{-1}{\lambda^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) \right\} \\ &= \frac{-1}{\lambda^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} \log \lambda + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \log \lambda \right\} \\ &= \frac{-\Delta \log \lambda}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

□

Формула (14) лепо описује тврђење Гаусове брилијантне теореме јер  $K$  зависи само од  $\lambda$ , односно само од коефицијената прве фундаменталне форме.

**Теорема 3.4.** *Средња кривина  $H$  регуларне изотермално параметризоване површи  $\mathbf{r} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  са функцијом скалирања  $\lambda$  дата је формулом*

$$H = \frac{e + g}{2\lambda^2}.\tag{16}$$

*Такође важи*

$$\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 2\lambda^2 H \mathbf{n},\tag{17}$$

где је  $\mathbf{n}$  јединична нормала на површи.

*Доказ.* Диференцирајући  $E = G = \lambda^2$  и  $F = 0$  добијамо  $\mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_u = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_v$  и  $\mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{r}_u = -\mathbf{r}_{vu} \cdot \mathbf{r}_v$ . Сабирајући ове једнакости добијамо

$$(\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}) \cdot \mathbf{r}_u = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_v - \mathbf{r}_{vu} \cdot \mathbf{r}_v = 0.$$

Слично је  $(\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}) \cdot \mathbf{r}_v = 0$ , одакле следи да је вектор  $\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}$  колинеаран са вектором нормале  $\mathbf{n}$ . Користећи формулу за средњу кривину добијамо

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{e + g}{2\lambda^2} = \frac{(\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}) \cdot \mathbf{n}}{2\lambda^2},$$

и самим тим формуле (16) и (17). □

**Дефиниција 3.2.** *Нека је  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  отворен скуп и  $\mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  параметризоване елементарне површи. Кажемо да је параметризација  $\mathbf{x}$  хармонијска ако је  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ . Такође,  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  су конјуговано хармонијске ако су задовољене релације  $\mathbf{x}_u = \mathbf{y}_v$  и  $\mathbf{x}_v = -\mathbf{y}_u$ .*

Из чињенице да су две параметризације конјуговано хармонијске следи и да су хармонијске, слично као код Коши-Риманових услова за реални и имагинарни део комплексно вредносне функције. Из (17) добијамо:

**Последица 3.1.** *Регуларна изотермална површ  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  је минимална површ ако и само ако је хармонијска.*

Сада постаје јасно да су минималне површи и комплексно аналитичке (холоморфне) функције у тесној вези. До сада смо разматрали само минималне површи у  $\mathbb{R}^3$ . Претходна Последица нам даје један начин да проширимо дефиницију на произвољни  $\mathbb{R}^n$  јер појам хармонијских функција и тамо постоји.

**Дефиниција 3.3.** *Минимална изотермална површ  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  је она елементарна површ чија је параметризација изотермална и хармонијска.*

Описаћемо метод за генерисање фамилије оваквих површи, генерализацију деформације између хеликоида и катеноида.

**Дефиниција 3.4.** *Нека су  $x, y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  конјуговано хармонијске изотермалне површи. Придружена фамилија за  $x$  и  $y$  је једнопараметарска фамилија површи  $z(t, x, y) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  дата са*

$$z(t, x, y) = \Re(e^{-it}(x + iy)) = x \cos t + y \sin t. \quad (18)$$

За сада немамо начина да нађемо тачне једначине ове фамилије јер још увек не знамо практично да нађемо конјуговану површ површи  $x$ . Наредне формуле су директна последица Коши-Риманових услова и дају нам информације о првој и другој фундаменталној форми придружене фамилије површи. Јасно је да су  $z(t, x, y)$  и  $z\left(t + \frac{\pi}{2}, x, y\right)$  конјуговано хармонијске за свако  $t$ .

$$\begin{aligned} z(t, x, y)_u &= x_u \cos t - x_v \sin t, \\ z(t, x, y)_v &= x_u \sin t + x_v \cos t, \\ z(t, x, y)_{uu} &= x_{uu} \cos t - x_{uv} \sin t = -z(t, x, y)_{vv}, \\ z(t, x, y)_{uv} &= x_{uu} \sin t + x_{uv} \cos t. \end{aligned}$$

Јасно је да је  $z(t, x, y)$  минимална изотермална површ за свако  $t$  и да све површи фамилије имају исту прву фундаменталну форму. Зато се  $z$  назива и **изометрична деформација** између  $x$  и  $y$ . Такође, из  $z(t, x, y)_u \times z(t, x, y)_v = x_u \times x_v$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , следи да све површи фамилије  $z(t, x, y)$  имају исту нормалу и тангентну раван, до

на паралелност. Дакле, можемо поистоветити јединичну нормалу површи  $z$  и јединичну нормалу површи  $x$ , па све површи придружене фамилије имају исто Гаусово пресликавање.

Убудуће ће нам бити корисно да са стандардних  $u, v$  координата у  $\mathbb{R}^2$  пређемо на комплексне координате  $z, \bar{z}$ . Смена координата дата је формулама  $z = u + iv$ ,  $\bar{z} = u - iv$ , односно

$$\begin{aligned} u &= \frac{z + \bar{z}}{2}, \\ v &= \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{aligned}$$

Ово значи да можемо  $z$  и  $\bar{z}$  посматрати као апстрактне координате у  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ , иако су то заправо комплексни бројеви. Уведимо и стандардне диференцијалне операторе

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Коши-Риманове једначине сада постају  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z, \bar{z}) = 0$ . Диференцирањем се лако добија  $dz = du + idv$ ,  $d\bar{z} = du - idv$ , па је

$$\begin{aligned} |dz|^2 &= dzd\bar{z} = du^2 + dv^2 \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Параметризација површи  $x$  у  $\mathbb{R}^3$  састоји се од три реалне функције. Комплексни извод параметризоване површи  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  представља деловање оператора  $\frac{\partial}{\partial z}$  на  $x$  и дат је формулом

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}(x_u - ix_v),$$

где је  $z = u + iv$ .

Ако су  $(u, v)$  и  $(u', v')$  изотермалне координате у некој околини површи  $\mathcal{M}$ , промена координата  $(u, v) \mapsto (u', v')$  која чува оријентацију је конформно пресликавање (видети [3]). На оријентабилној површи  $\mathcal{M}$  све могуће изотермалне координате, са функцијама преласка које чувају координате, одређују комплексну структуру на површи. Координате  $(u, v)$  замењујемо комплексним  $u + iv$ , па промена координата постаје аналитичка функција (комплексна функција је аналитичка ако и само ако је конформна и чува оријентацију, њена матрица је композиција матрице ротације и хомотетије). У овом запису, диференцијалима функција преласка координатних пресликавања одговарају уобичајни комплексни изводи одговарајућих координатних холоморфних функција, који делују на комплексне координате тангентних вектора

обичним множењем. Површи на којима се може увести комплексна структура називају се **Риманове површи**.

Ако уведемо ознаке

$$(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)) = \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_1}{\partial u} - i \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial u} - i \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial u} - i \frac{\partial x_3}{\partial v} \right), \quad (19)$$

лако следе идентитети

$$4 \sum_{k=1}^3 \varphi_k(x)^2 = x_u \cdot x_u - x_v \cdot x_v - 2ix_u \cdot x_v = E - G - 2iF, \quad (20)$$

$$4 \sum_{k=1}^3 |\varphi_k(x)|^2 = x_u \cdot x_u + x_v \cdot x_v = E + G. \quad (21)$$

Следећа Теорема нам локално описује минималне површи преко тројке холоморфних функција чији је збир квадрата нула, што омогућава употребу моћних теорема комплексне анализе у испитивању дводимензионалних минималних површи.

**Теорема 3.5.** *Нека је  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  параметризована елементарна површ. Тада*

а)  $x$  је хармонијска ако и само ако је  $\frac{\partial x}{\partial z}$  аналитичка функција;

б)  $x$  је изотермална ако и само ако је  $\sum_{k=1}^3 \varphi_k(x)^2 = 0$ ;

в) ако је  $x$  изотермална, тада је  $x$  регуларна ако и само ако је  $\sum_{k=1}^3 |\varphi_k(x)|^2 \neq 0$ .

Обрнуто, претпоставимо да је  $\mathcal{U}$  простоповезан, и нека аналитичке функције  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^3$  задовољавају услове  $\sum_{k=1}^3 \varphi_k(x)^2 = 0$  и  $\sum_{k=1}^3 |\varphi_k(x)|^2 \neq 0$ . Тада постоји регуларна минимална изотермална површ  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  која задовољава (19).

*Доказ.* Део а) проистиче из чињенице да Коши-Риманове једначине за  $\frac{\partial x}{\partial z}$  гласе  $x_{uu} + x_{vv} = 0$  и  $x_{uv} - x_{vu} = 0$ , што је идентитет. Сада је б) последица (20), а в) последица (21).

У супротном смеру, претпоставимо да аналитичке функције  $\varphi_j$  задовољавају дате услове. Одаберимо

$$x = \left( \Re \int \varphi_1(z) dz, \Re \int \varphi_2(z) dz, \Re \int \varphi_3(z) dz \right).$$

Интеграција се заправо спроводи дуж произвољне део-по-део глатке криве у  $\mathcal{U}$  која спаја фиксирану тачку  $z_0$  и тачку  $z$ . Услов "простоповезаности" гарантује нам да су



ови интеграли добро дефинисане аналитичке функције које не зависе од пута интеграције, док су њихови реални делови хармонијске функције. Сада, (20) имплицира да је површ  $x$  изотермална, а (21) да је регуларна. Дакле,  $x$  је регуларна минимална изотермална површ.  $\square$

Познато је да пар конјуговано хармонијских функција одређује аналитичку функцију. Нека су  $x, y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  конјуговано хармонијске површи. Тада је пресликавање  $x + iy : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^3$  аналитичко и важи

$$2 \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x + iy). \quad (22)$$

Занимају нас геометријске особине овог пресликавања.

**Дефиниција 3.5.** Нека је  $\mathcal{U}$  отворен скуп у  $\mathbb{C}$ . **Минимална крива** је комплексно аналитичка функција  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^3$  за коју важи

$$\Psi'(z) \cdot \Psi'(z) = 0 \quad (23)$$

за све  $z \in \mathcal{U}$ . Ако је додатно  $\Psi'(z) \cdot \overline{\Psi'(z)} \neq 0$  за све  $z \in \mathcal{U}$ , кажемо да је  $\Psi$  **регуларна минимална крива**.

Минималне криве први је проучавао Ли. Минималне криве можемо схватити с једне стране као уопштење минималних изотермалних површи, а с друге стране као уопштење реалних кривих у  $\mathbb{R}^3$ . За задату минималну криву  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^3$ , површи  $x, y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  дефинисане са

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \Re \Psi(u + iv), \\ y(u, v) &= \Im \Psi(u + iv), \end{aligned}$$

су конјуговано хармонијске изотермалне минималне површи. Стога их називамо **конјуговано хармонијским изотермалним површима придруженим кривој**  $\Psi$ . Такође, ако је  $\Psi$  минимална крива која одговара минималној површи  $x$ , тада је и крива  $i\Psi$  минимална и одговара конјугованој минималној површи од  $x$ . Помоћу њих формирамо придружену фамилију површи  $z(t, u, v) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$z(t, u, v) = \Re(e^{-it}\Psi(u + iv)). \quad (24)$$

Напомињемо да је  $z(t, u, v)$  површ у реалним координатама и није исто што и  $\Psi(u + iv) = x + iy$ . Већ смо видели да су све ове површи минималне и изотермалне и представљају изометричну деформацију између  $x$  и  $y$ . Интерпетирајмо неке од претходних резултата у терминима минималних кривих  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^3$ . На пример, директна последица (6) је

$$z_u - iz_v = e^{-it}\Psi'.$$

Такође важи

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Psi' &= \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}(x_u - ix_v) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \\ \frac{1}{2}\overline{\Psi}' &= \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(x_u + ix_v) = (\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}, \overline{\varphi_3}).\end{aligned}$$

**Пример 3.5.** Нађимо конјуговану површ катеноида са параметризацијом  $r(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ . Имамо

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= r_u - ir_v \\ &= (\sinh u \cos v + i \cosh u \sin v, \sinh u \sin v - i \cosh u \cos v, 1) \\ &= (\sinh(u + iv), -i \cosh(u + iv), 1) \\ &= (\sinh z, -i \cosh z, 1).\end{aligned}$$

Приметимо да су услови Теореме (3.5) задовољени јер је очигледно  $\Psi \neq 0$  и збир квадрата њених компоненти је  $\sinh^2 z - \cosh^2 z + 1 = 0$ . Конјугована површ катеноиду (до на translацију) је

$$\begin{aligned}\bar{r}(u, v) &= \Re \int (i \sinh z, \cosh z, i) dz \\ &= \Re(i \cosh z, \sinh z, iz) \\ &= (\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, -u).\end{aligned}$$

Након репараметризације  $(u, v) \mapsto \left(\sinh u, v + \frac{\pi}{2}\right)$  и translације за  $\frac{\pi}{2}$  дуж  $z$ -осе видимо да је добијена површ хеликоид.

**Дефиниција 3.6.** Гаусово пресликавање минималне криве  $\Psi$  је Гаусово пресликавање произвољне површи из фамилије придружене  $\Psi$  (по обичају идентификујемо Гаусово пресликавање са јединичном нормалом).

За минималну криву  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^3$  важи идентитет

$$-i\Psi' \times \overline{\Psi}' = 2(\Im(\phi_2\overline{\phi_3}), \Im(\phi_3\overline{\phi_1}), \Im(\phi_1\overline{\phi_2})) = \|\Psi'\|^2 n, \quad (25)$$

одакле имамо и формулу за јединичну нормалу  $n$  и Гаусово пресликавање минималне криве.

Вратимо се сада на јако важно пресликавање из претходног поглавља, стереографску пројекцију, која нам успоставља везу између јединичне сфере у  $\mathbb{R}^3$  и комплексне равни. Нека је  $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{S}^2(1)$  произвољна тачка различита од северног пола  $N = (0, 0, 1)$ . Означимо са  $Q = (q_1, q_2, 0)$  продор праве  $PN$  кроз комплексну раван. Након краћег рачуна добија се

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{p_1}{t_0} = \frac{p_1}{1 - p_3}, \\ q_2 &= \frac{p_2}{t_0} = \frac{p_2}{1 - p_3}.\end{aligned}$$

Дакле, пресликавање  $\pi : \mathbb{S}^2(1) \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  је у комплексним координатама дато формулом

$$\pi(p_1, p_2, p_3) = \frac{p_1 + ip_2}{1 - p_3}.$$

Следећа Лема даје нам једноставну формулу за композицију стереографске пројекције и Гаусовог пресликавања за минималну криву у  $\mathbb{C}^3$ .

**Лема 3.1.** *Нека је  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$  минимална крива и  $\Psi' = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ . Нека је  $\mathbf{n}$  јединично нормално векторско поље придружене минималне површи. Тада је*

$$\pi \circ \mathbf{n} = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}.$$

*Доказ.* Користећи добијене формуле за јединичну нормалу и стереографску пројекцију у комплексним координатама добијамо

$$\begin{aligned} \pi \circ \mathbf{n} &= \frac{2(\Im(\varphi_2\overline{\varphi_3}) + i\Im(\varphi_3\overline{\varphi_1}))}{1 - \frac{2\Im(\varphi_1\overline{\varphi_2})}{\|\Psi'\|^2}} = \frac{2(\Im(\varphi_2\overline{\varphi_3}) + i\Im(\varphi_3\overline{\varphi_1}))}{\|\Psi'\|^2 - 2\Im(\varphi_1\overline{\varphi_2})} \\ &= \frac{\varphi_3(\overline{\varphi_1} + i\overline{\varphi_2}) - \overline{\varphi_3}(\varphi_1 + i\varphi_2)}{\|\Psi'\|^2 - 2\Im(\varphi_1\overline{\varphi_2})} \\ &= \frac{\varphi_3(\overline{\varphi_1} + i\overline{\varphi_2}) + \overline{\varphi_3} \left( \frac{\varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2} \right)}{\|\Psi'\|^2 - 2\Im(\varphi_1\overline{\varphi_2})} \\ &= \frac{\varphi_3(\|\Psi'\|^2 + i\overline{\varphi_2}\varphi_1 - i\varphi_2\overline{\varphi_1})}{(\varphi_1 - i\varphi_2)(\|\Psi'\|^2 - 2\Im(\varphi_1\overline{\varphi_2}))} \\ &= \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}. \end{aligned}$$

□

Коефицијенти друге фундаменталне форме придружене фамилије површи  $z(t, u, v)$  су

$$\begin{aligned} e(t, u, v) &= -g(t, u, v) = \Re((e^{-it}\Psi'') \cdot n), \\ f(t, u, v) &= -\Im((e^{-it}\Psi'') \cdot n). \end{aligned}$$

Како су све површи придружене фамилије изометричне, оне имају исту Гаусову кривину, па можемо говорити о **Гаусовој кривини минималне криве**.

**Лема 3.2.** *Гаусова кривина минималне криве  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$  је*

$$K = \frac{-4(\|\Psi'\|^2 \|\Psi''\|^2 - |\Psi'' \cdot \overline{\Psi'}|^2)}{\|\Psi'\|^6}.$$

Доказ. Користећи  $\|\Psi'\|^2 = 2\lambda^2$  и формулу (14) имамо

$$\begin{aligned} K &= -\frac{4}{\|\Psi'\|^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} \log(\Psi' \cdot \bar{\Psi}') = -\frac{2}{\|\Psi'\|^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\Psi'' \cdot \bar{\Psi}'}{\|\Psi'\|^2} \right) \\ &= -\frac{4(\|\Psi'\|^2 \|\Psi''\|^2 - (\Psi'' \bar{\Psi}')(\Psi' \cdot \bar{\Psi}''))}{\|\Psi'\|^6} \\ &= -\frac{-4(\|\Psi'\|^2 \|\Psi''\|^2 - |\Psi'' \cdot \bar{\Psi}'|^2)}{\|\Psi'\|^6}. \end{aligned}$$

□

Поставља се питање како конструисати минималне криве. Знамо да је минимална изотермална површ  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  реални део минималне криве, односно тројке  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  аналитичких функција. Како тачно њих одређујемо ако знамо  $x$ ? Стандардан метод за одређивање (до на константу) аналитичке функције  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  чији је реални део дата хармонијска функција  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  користи Коши-Риманове услове и захтева интеграцију, као што смо већ видели. Међутим, постоји и један другачији, алгебарски метод користећи комплексне координате формално уместо реалних  $u, v$  у  $h(u, v)$ .

**Лема 3.3.** Нека је  $\mathcal{U}$  отворен подскуп  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  на коме је дефинисана хармонијска функција  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $z_0 = u_0 + iv_0 \in \mathcal{U}$  фиксирана тачка.

а) Нека је  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  аналитичка функција чији је реални део  $\Re f(u + iv) = h(u, v)$  и имагинарни део у тачки  $z_0$   $\Im f(z_0) = 0$ . Тада важи

$$f(z) = 2h\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2}\right) - h(u_0, v_0). \quad (26)$$

б) Обрнуто, ако је  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  дефинисана са (26), тада је она аналитичка и задовољава  $f(z_0) = h(u_0, v_0)$ .

Нека за минималну изотермалну површ  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  важи  $x(u, v) = (h_1(u, v), h_2(u, v), h_3(u, v))$ . Примењујући претходну Лему на сваку компоненту  $h_j$  у произвољној фиксираној тачки  $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$  добијамо аналитичке функције  $\psi_j$  које задовољавају услове

$$\begin{aligned} \Re \psi_j(u + iv) &= h_j(u, v), \\ \Im \psi_j(z_0) &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

**Дефиниција 3.7.** Пресликавање  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  чије компоненте задовољавају услове (27) назива се **комплексификација** површи  $x$ .

Свака компонента површи  $x$  је реални део одговарајуће компоненте од  $\Psi$ , при чему се поклапају у тачки  $z_0$ . Дакле, важи

**Теорема 3.6.** Нека је  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  минимална изотермална површ и  $(0,0) \in \mathcal{U}$ . Означимо са  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  комплексификацију површи  $x$  одређену условом  $\Im\Psi(0) = 0$ . Тада је

$$\Psi(z) = 2x\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - x(0,0),$$

док је конјуговано хармонијска изотермална површ у површи  $x$  одређена условом  $y(0,0) = 0$  дата са

$$y(u,v) = \Im\left(2x\left(\frac{u+iv}{2}, \frac{u+iv}{2i}\right) - x(0,0)\right).$$

**Пример 3.6.** Применимо претходну Теорему узимајући за  $x$  параметризацију Енеперове површи. Замењујући  $u$  и  $v$  редом са  $\frac{z}{2}$  и  $-\frac{iz}{2}$  добијамо минималну криву

$$\Psi(z) = \left(z - \frac{z^3}{3}, iz + i\frac{z^3}{3}, z^2\right). \quad (28)$$

Конјугована Енеперова површ дата је са

$$\begin{aligned} y(u,v) &= \Im\Psi(u+iv) \\ &= \left(v + \frac{v^3}{3} - u^2v, u + \frac{u^3}{3} - uv^2, 2uv\right). \end{aligned}$$

Сада се лако може показати да су све површи придружене Енеперовој површи добијене само ротацијом око  $z$ -осе. Формула (28) може се генерализовати са

$$\Psi(z) = \left(z - \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, iz + i\frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \frac{2z^{n+1}}{n+1}\right).$$

Диференцирањем добијамо  $\varphi_1(z) = 1 - z^{2n}$ ,  $\varphi_2 = i + iz^{2n}$ ,  $\varphi_3 = 2z^n$ , па се лако проверавају услови Теореме (3.5):  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$  и  $|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 \neq 0$ , што значи да је реални део ове минималне криве минимална површ.

## 4 Вајерштрасова репрезентација

### 4.1 Локална Вајерштрасова репрезентација

Теорема (3.5) даје нам локални опис минималне површи преко тројке  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  аналитичких функција које задовољавају услов  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$ , односно преко минималне криве  $\Psi$  која задовољава услов  $\Psi' \cdot \Psi' = 0$ . Испоставља се да је ова диференцијална једначина решива експлицитно по  $\Psi$ .

**Теорема 4.1.** *Нека су  $f$  и  $g$  аналитичке функције дефинисане на отвореном просто-повезаном подскупу  $\mathcal{U}$  комплексне равни. За фиксирано  $z_0 \in \mathcal{U}$  крива  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^3$  дата са*

$$\begin{cases} \psi_1(z) = \int_{z_0}^z \frac{f(\omega)}{2} (1 - g(\omega)^2) d\omega, \\ \psi_2(z) = \int_{z_0}^z \frac{if(\omega)}{2} (1 + g(\omega)^2) d\omega, \\ \psi_3(z) = \int_{z_0}^z f(\omega)g(\omega) d\omega \end{cases} \quad (29)$$

је минимална.

*Доказ.* Комплексни извод аналитичке функције  $\Psi$  једнак је

$$\Psi' = \Phi = \left( \frac{1}{2}f(z)(1 - g(z)^2), \frac{1}{2}if(z)(1 + g(z)^2), f(z)g(z) \right),$$

одакле се лако проверава да је задовољен услов  $\Psi'(z) \cdot \Psi'(z) = 0$ . □

Криву  $\Psi$  називамо **Вајерштрасовом минималном кривом** са почетком у  $z_0$  и одређеном функцијама  $f$  и  $g$ . Како су  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  аналитичке функције, формулама

$$\begin{cases} x(u, v) = \Re(\psi_1(u, v), \psi_2(u, v), \psi_3(u, v)), \\ y(u, v) = \Im(\psi_1(u, v), \psi_2(u, v), \psi_3(u, v)), \end{cases} \quad (30)$$

одређене су минималне изотермалне елементарне површи  $x$  и  $y$  такве да је  $\Psi(z) = (x + iy)(z)$  комплексификација од  $x$ . Називамо их редом **Вајерштрасова** и **конјугована Вајерштрасова** површ са почетком у  $z_0$ , одређене функцијама  $f$  и  $g$ , тј. формулама  $\psi_k(z, \bar{z}) = c_k + 2\Re \int_{z_0}^z \varphi_k dz$ ,  $c_k = \text{const}$ , при чему се интеграл по произвољној део-део глаткој кривој која спаја тачке  $z$  и  $z_0$ .

Услов да функције  $f$  и  $g$  буду аналитичке је доста јак. Многе познате минималне површи не могу се добити на овај начин, већ као Вајерштрасове површи одређене функцијама  $f$  и  $g$  које имају изоловане сингуларитете. Прецизније, дозвољавамо и да функције  $f$  и  $g$  буду мероморфне, тј. да имају евентуалне сингуларитете који су обавезно полови. Заправо, у [9] се узима да је  $f$  холоморфна на неком отвореном

скупу  $\mathcal{U}$  комплексне равни, а  $g$  мероморфна на  $\mathcal{U}$ , при чему је сваки пол  $z_0$  функције  $g$  реда  $m \geq 1$  уједно и нула функције  $f$  вишеструкости бар  $2m$ . Због овог услова Лоранов ред функција  $f(1 \pm g^2)$  у околини тачке  $z_0$  садржи само позитивне степене од  $z - z_0$ , па су оне холоморфне у околини сваке такве тачке  $z_0$ , а самим тим је и функција  $\phi$  холоморфна. Други начин је да се наметне услов да функција  $fg^2$  мора бити холоморфна.

Лако се доказује да је метрика на овим површима задата са

$$ds^2 = \frac{1}{4} |f(z)|^2 (1 + |g(z)|^2)^2 |dz|^2,$$

што специјално значи да су оне изометричне. Из облика метрике се види да је функција скалирања  $\lambda = 2|\phi|^2 = |f|(1 + |g|^2)$ . Такође, оне су регуларне у оним тачкама у којима је функција  $f$  различита од нуле. Како је  $g$  мероморфна, могуће је да у тачки  $z_0$  буде  $f(z_0) = 0$  и  $fg^2(z_0) \neq 0$ , па су и у таквим тачкама минималне површи регуларне. Ако дозволимо сингуларитете на минималним површима, такве минималне површи називамо *генерализованим минималним површима*. Сингуларне тачке  $z_0$  на њима називамо *грананама* или *тачкама гранања* и оне су одређене условима  $f(z_0) = 0$  и  $fg^2(z_0) = 0$ .

Пре него што пређемо на примере, постоји још један облик (локалне) Вајерштрасове<sup>11</sup> репрезентације. Претпоставимо да је функција  $g$  холоморфна, са холоморфном инверзном функцијом  $g^{-1}$ . Тада  $g$  сматрамо новом комплексном променљивом  $\tau = g$  са  $d\tau = g'dz$ . Дефинишимо  $F(\tau) = \frac{f}{g'}$ , одакле добијамо  $F(\tau)d\tau = fdz$ . Дакле, ако заменимо  $g$  са  $\tau$  и  $fdz$  са  $F(\tau)d\tau$ , добијамо

**Теорема 4.2.** *За сваку холоморфну функцију  $F(\tau)$ , површ дата параметризацијом*

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= \Re \int (1 - \tau^2)F(\tau)d\tau, \\ x_2(u, v) &= \Re \int i(1 + \tau^2)F(\tau)d\tau, \\ x_3(u, v) &= \Re \int (1 + \tau^2)F(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

*је минимална површ.*

Тада је  $\Phi = \left( \frac{1}{2}(1 - \tau^2)F(\tau), \frac{i}{2}(1 + \tau^2)F(\tau), \tau F(\tau) \right)$ . Прва репрезентација је општија јер важи при слабијим условима. Овим добијамо да свака холоморфна функција  $F(\tau)$  одређује минималну површ. Наравно, тешко је очекивати да ће свака дати комплексне интеграле које је могуће представити лепим формулама. Упркос томе, из саме Вајерштрасове репрезентације могуће је добити доста информација о самој површи.

<sup>11</sup>*Karl Theodor Wilhelm Weierstrass* (1815 – 1897), немачки математичар

**Пример 4.1.** Најједноставнију Вајерштрасову репрезентацију има Енеперова површ, одређену функцијама  $f(z) = 1$  и  $g(z) = z$  на целој комплексној равни.

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \Re \int (1 - z^2, -i(1 + z^2), 2z) dz \\ &= \Re \left( z - \frac{z^3}{3}, -i \left( z + \frac{z^3}{3} \right), z^2 \right) \\ &= \left( u + uv^2 - \frac{u^3}{3}, v + \frac{v^3}{3} + u^2v, 2(u^2 - v^2) \right), \end{aligned}$$

до на translацију. Сменом координата  $(u, v) \mapsto \left( \frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}} \right)$  добијамо стандардну параметризацију.

**Пример 4.2.** Једна Вајерштрасова репрезентација катеноида је одређена функцијама  $f(z) = -\frac{1}{2z^2}$ ,  $g(z) = z$ , дефинисаних на скупу  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Иако скуп  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  није простоповезан, ипак можемо коректно дефинисати Вајерштрасову репрезентацију. Наиме, потребно нам је да скуп  $\mathcal{U}$  буде простоповезан да интеграл  $\int_{z_0}^z \phi_k dz$  не би зависио од пута. У случају скупова који нису простоповезани, дефинишемо периоде, тј. интеграле дуж произвољне затворене криве која се не може непрекидно скупити у тачку. Да би смо имали коректну дефинисаност, потребно је да реални периоди интеграла буду нула, односно да вредност  $\int_{z_0}^z \phi_k dz$  буду чисто имагинарни бројеви. Ако су  $(\rho, \phi)$  поларне координате у комплексној равни, тада је катеноид задат формулама

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \rho \right) \cos \phi, \quad y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \rho \right) \sin \phi, \quad z = -\log \rho.$$

Према томе, веза између координата је  $\rho = e^{-z}$ . Како  $\rho \rightarrow 0$ , то  $z \rightarrow +\infty$ . Паралеле  $z = \text{const}$  одговарају концентричним круговима  $\rho = |z| = \text{const}$ , који се скупљају у тачку  $\rho = 0$  како  $z \rightarrow +\infty$ .

Ако мало варирамо Вајерштрасову репрезентацију катеноида стављајући  $f(z) = -\frac{i}{2z^2}$ ,  $g(z) = z$ , добићемо реалне периоде на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Да бисмо их се ослободили, избацићемо из комплексне равни полуправу одређену непозитивним реалним бројевима, чиме добијамо простоповезану област. Тиме добијамо један део хеликоида задатог једначинама

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \phi = \sinh a \sin b, \\ y &= \frac{1}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos \phi = -\sinh a \cos b, \\ z &= \phi = b, \end{aligned}$$

где је  $|\phi| < \pi$ ,  $\rho > 0$  и  $\rho = e^{-a}$ ,  $\phi = b$ . Ако сада залепимо пребројиво много копија  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  на природан начин (горњи део  $k$ -те на доњи део  $(k+1)$ -ве,  $k \in \mathbb{Z}$ ), добијамо

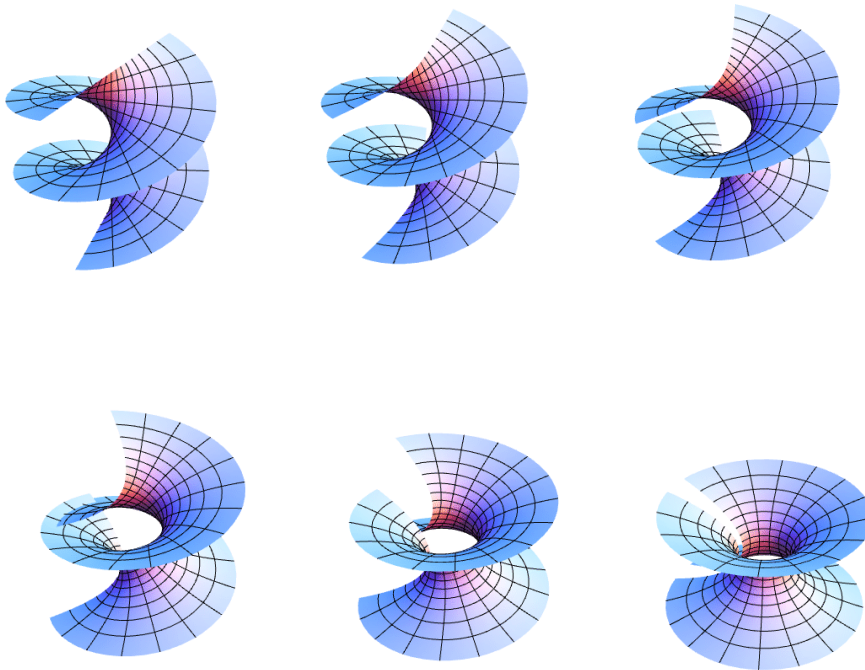


цео хеликоид. Ово је заправо еквивалентно томе да се угао  $\phi$  креће од  $-\infty$  до  $+\infty$ . Желимо да нађемо промену координата одређену са  $e^z$ . Комплетан хеликоид можемо добити Вајерштрасовом репрезентацијом одређеном функцијама  $f = -\frac{i}{2}e^{-z}$ ,  $g(z) = e^z$  на  $\mathbb{C}$ , и то

$$x = -\sinh u \sin v, \quad y = \sinh u \cos v, \quad z = v,$$

где је  $z = u + iv$ . Функцијама  $f = e^{-z}$ ,  $g(z) = e^z$  на  $\mathbb{C}$  одређено је наткривање катеноида са бесконачно листова, задато формулама

$$x = -\cosh u \cos v, \quad y = -\cosh u \sin v, \quad z = u.$$



Слика 6: Трансформација хеликоида у катеноид

**Пример 4.3.** Вајерштрасова репрезентација Шеркове површи над јединичним диском  $|z| < 1$  одређена је функцијама  $f = \frac{1}{1-z^4}$  и  $g(z) = z$ . Ако посматрамо репрезентацију на  $\mathbb{C} \setminus \{z \mid z^4 = 1\}$ , интеграл  $\int_{z_0}^z \phi_k dz$  имаће реалне периоде. Аналогним поступком као код хеликоида, добићемо репрезентацију целе Шеркове површи.

**Пример 4.4.** Вајерштрасова површ одређена функцијама  $f(z) = 1 - \frac{1}{z^4}$  и  $g(z) = z$  је репараметризација Хенебергове површи. Заиста, важи

$$\Phi(z) = \left( \frac{1}{2}(1 - z^{-4})(1 - z^2), \frac{i}{2}(1 - z^{-4})(1 + z^2), z(1 - z^{-4}) \right)$$

и

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \Re \left( \frac{1}{2} \left( z - \frac{z^3}{3} - z^{-1} + \frac{z^{-3}}{3} \right), \frac{i}{2} \left( z + \frac{z^3}{3} + z^{-1} + \frac{z^{-3}}{3} \right), \frac{z^2}{2} + \frac{z^{-2}}{2} \right) \\ &= \Re \left( -\frac{1}{6}(z - z^{-1})^3, \frac{i}{6}(z + z^{-1})^3, \frac{1}{2}(z + z^{-1})^2 \right), \end{aligned}$$

до на трансляцију. Ако уведемо смене  $z = e^{\bar{z}}$ ,  $\bar{z} = \bar{u} + i\bar{v}$ , добићемо

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x(\bar{u}, \bar{v}) = \Re \left( -\frac{4}{3} \sinh^3 \bar{z}, \frac{4i}{3} \cosh^3 \bar{z}, 2 \cosh^2 \bar{z} \right) \\ &= \left( 2 \sinh \bar{u} \cos \bar{v} - \frac{2}{3} \sinh 3\bar{u} \cos 3\bar{v}, 2 \sinh \bar{u} \sin \bar{v} + \frac{2}{3} \sinh 3\bar{u} \sin 3\bar{v}, 2 \cosh 2\bar{u} \cos 2\bar{v} \right). \end{aligned}$$

Аналогно се добија површ конјугована Хенеберговој

$$y(u, v) = (2 \cosh u \sin v - \frac{2}{3} \cosh 3u \sin 3v, 2 \cosh u \cos v + \frac{2}{3} \cosh 3u \cos 3v, 2 \sinh 2u \sin 2v).$$

**Пример 4.5.** Опис Костине<sup>12</sup> минималне површи први су дали Барбоса и Коларес и то користећи Вајерштрасову  $\wp$  функцију. Ми ћемо приказати параметризацију користећи Вајерштрасову  $\zeta$  функцију која је прихватљивија за рачунар због избегавања једне нумеричке интеграције која следи из  $\zeta'(z) = -\wp(z)$ . Вајерштрасова  $\zeta$  функција дефинисана је са

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \mathcal{L}^*} \left( \frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right),$$

где је  $\mathcal{L}^* = \{m + in \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)\}$  скуп свих ненула Гаусових целих бројева. За разлику од  $\wp$  функције,  $\zeta$  функција није периодична, али за целе бројеве  $m, n$  важи

$$\zeta(z + m + in) = \zeta(z) + 2m\zeta\left(\frac{1}{2}\right) + 2n\zeta\left(\frac{i}{2}\right).$$

Костина минимална површ је Вајерштрасова површ одређена функцијама  $f(z) = \wp(z)$  и  $g(z) = \frac{A}{\wp'(z)}$ . Да не бисмо имали самопресецања, треба одабрати  $A = 2\sqrt{2\pi e} \approx 34.46707$ . Дефинишимо сада Костину минималну криву  $\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ . Како је  $2\Psi'(z) = \left( \frac{1}{2}f(z)(1 - g(z)^2), \frac{1}{2}if(z)(1 + g(z)^2), f(z)g(z) \right)$ , узећемо да нам је  $\Psi$  примитивна функција од  $\Psi'$  нормализован условом  $\Psi\left(\frac{1+i}{2}\right) = 0$ . Показаћемо сада како се изражава  $\Psi$  преко  $\zeta$  функције и то без интеграције. Користићемо следеће једнакости без доказа

$$\begin{aligned} \wp\left(z - \frac{1}{2}\right) - \wp\left(z - \frac{i}{2}\right) - 2e &= \frac{16e^3\wp(z)}{\wp'(z)}, \\ \zeta\left(\frac{1}{2}\right) &= i\zeta\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \\ \zeta\left(\frac{1+i}{2}\right) &= \frac{(1-i)\pi}{2}. \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Celso José da Costa, (1949–), бразилски математичар

Како је

$$\begin{aligned}
 f(\omega)(1 - g(\omega)^2) &= \wp(\omega) - \frac{A^2 \wp(\omega)}{\wp'(\omega)^2} \\
 &= \wp(\omega) - \frac{A^2}{16e^3} \left( \wp\left(z - \frac{1}{2}\right) - \wp\left(z - \frac{i}{2}\right) - 2e \right) \\
 &= \wp(\omega) - \frac{\pi}{2e} \left( \wp\left(z - \frac{1}{2}\right) - \wp\left(z - \frac{i}{2}\right) - 2e \right) \\
 &= \wp(\omega) + \pi - \frac{\pi}{2e} \left( \wp\left(z - \frac{1}{2}\right) - \wp\left(z - \frac{i}{2}\right) \right),
 \end{aligned}$$

интеграцијом обе стране добијамо

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \int_{\frac{1+i}{2}}^z f(\omega)(1 - g(\omega)^2) d\omega \\
 &= \left( \zeta(\omega) + \pi\omega + \frac{\pi}{2e} \left( \zeta\left(\omega - \frac{1}{2}\right) - \zeta\left(\omega - \frac{i}{2}\right) \right) \right) \Big|_{\frac{1+i}{2}}^z \\
 &= -\zeta(z) + \pi z + \frac{\pi}{2e} \left( \zeta\left(z - \frac{1}{2}\right) - \zeta\left(z - \frac{i}{2}\right) \right) + \zeta\left(\frac{1+i}{2}\right) - \frac{\pi(1+i)}{2} - \\
 &\quad \frac{\pi}{2e} \left( \zeta\left(\frac{i}{2}\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \right) \\
 &= -\zeta(z) + \pi z + \frac{\pi}{2e} \left( \zeta\left(z - \frac{1}{2}\right) - \zeta\left(z - \frac{i}{2}\right) \right) - i\pi + \frac{\pi^2(1+i)}{4e}.
 \end{aligned}$$

Формуле за  $\psi_2$  и  $\psi_3$  добијају се слично. Дакле, Костина минимална крива

$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  дата је формулама

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \frac{1}{2} \left( -\zeta(z) + \pi z - i\pi + \frac{\pi^2(1+i)}{4e} + \frac{\pi}{2e} \left( \zeta\left(z - \frac{1}{2}\right) - \zeta\left(z - \frac{i}{2}\right) \right) \right), \\
 \psi_2 &= \frac{i}{2} \left( -\zeta(z) - \pi z + \pi - \frac{\pi^2(1+i)}{4e} - \frac{\pi}{2e} \left( \zeta\left(z - \frac{1}{2}\right) - \zeta\left(z - \frac{i}{2}\right) \right) \right), \\
 \psi_3 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \left( \log \left( \frac{\wp(z) - e}{\wp(z) + e} \right) - \pi i \right),
 \end{aligned}$$

а Костина минимална површ  $\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$  параметризацијом

$$\begin{aligned}
 x_1(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left( -\zeta(u + iv) + \pi u + \frac{\pi^2}{4e} + \frac{\pi}{2e} \left( \zeta\left(u + iv - \frac{1}{2}\right) - \zeta\left(u + iv - \frac{i}{2}\right) \right) \right), \\
 x_2(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left( -i\zeta(u + iv) + \pi v + \frac{\pi^2}{4e} - \frac{\pi i}{2e} \left( \zeta\left(u + iv - \frac{1}{2}\right) - \zeta\left(u + iv - \frac{i}{2}\right) \right) \right), \\
 x_3(u, v) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \log \left| \frac{\wp(u + iv) - e}{\wp(u + iv) + e} \right|.
 \end{aligned}$$

Непосредно се проверава да важи и обрат Теореме о Вајерштрасовој репрезентацији.

**Лема 4.1.** Нека је  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^3$  минимална крива и  $\Psi' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ . Претпоставимо да  $\varphi_1 - i\varphi_2$  није идентички једнако нули и дефинишимо функције  $f = \varphi_1 - i\varphi_2$  и

$g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}$ . Управо овим функцијама одређено је да је крива  $\Psi$  Вајерштрасова, тј. важи

$$\Psi' = \left( \frac{1}{2}f(z)(1 - g(z)^2), \frac{1}{2}if(z)(1 + g(z)^2), f(z)g(z) \right).$$

Из формуле (24) директно следи да је придружена фамилија  $t \mapsto z(t, u, v) = (z_1(t, u, v), z_2(t, u, v), z_3(t, u, v))$  Вајерштрасовој површи  $x$  одређеној мероморфним функцијама  $f$  и  $g$  опет фамилија Вајерштрасових површи, придружена функцијама  $e^{-it}f$  и  $g$ :

$$\begin{aligned} z_1(t, u, v) &= \Re \left( e^{-it} \int_{z_0}^z \frac{f(\omega)}{2} (1 - g(\omega)^2) d\omega \right), \\ z_2(t, u, v) &= \Re \left( e^{-it} \int_{z_0}^z \frac{if(\omega)}{2} (1 + g(\omega)^2) d\omega \right), \\ z_3(t, u, v) &= \Re \left( e^{-it} \int_{z_0}^z f(\omega)g(\omega) d\omega \right). \end{aligned}$$

Конјугована површ има Вајерштрасову репрезентацију одређену функцијама  $\pm if$  и  $g$ .

**Пример 4.6.** Размотримо функције  $f(z) = -e^{-z}$  и  $g(z) = -e^z$ . Узимајући  $z_0 = 0$  у формули (29) добијамо

$$\Psi(z) = (i(1 - \cos z), -i \sin z, z).$$

Користећи обрасце за изражавање тригонометријских функција комплексне променљиве преко комплексних функција реалних променљивих, тачно добијамо формуле деформације између катеноида и хеликоида

$$z(t, u, v) = \sin t(\sinh v \sin u, -\sinh v \cos u, u) + \cos t(\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v), \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right].$$

За  $t = 0$  добијамо катеноид, а за  $t = \frac{\pi}{2}$  хеликоид. Директним рачуном добијају се коефицијенти прве фундаменталне форме  $E = G = \cosh^2 v$ ,  $F = 0$  и коефицијенти друге фундаменталне форме  $e = -g = \cos t$ ,  $f = \sin t$ . Видимо да прва форма, за разлику од друге, не зависи од  $t$ , тј. све површи ове деформације јесу локално изометричне изотермалне минималне површи.

**Теорема 4.3.** Гаусова кривина Вајерштрасове површи одређене мероморфним функцијама  $f$  и  $g$  дата је формулом

$$K = \frac{-16|g'|^2}{|f|^2(1 + |g|^2)^4}. \quad (31)$$

Иста формула важи за све површи из придружене фамилије, укључујући и конјуговану Вајерштрасову површ.

Доказ. Имамо

$$\Delta \log |f(z)| = 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} (\log |f(z)|^2) = 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} (\log f(z) + \log \overline{f(z)}) = 0,$$

и

$$\begin{aligned} \Delta \log(1 + |g(z)|^2) &= 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} \log(1 + g(z)\overline{g(z)}) \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{g'(z)\overline{g(z)}}{1 + |g(z)|^2} \right) = \frac{4 |g'(z)|^2}{(1 + |g(z)|^2)^2}. \end{aligned}$$

Тражену формулу добијамо користећи управо добијене формуле и облик функције скалирања

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} K &= \frac{-\Delta \log(1 + |g(z)|^2)}{|f|^2 (1 + |g|^2)^2} = \frac{-\Delta \log(1 + |g|^2)}{|f|^2 (1 + |g|^2)^2} \\ &= \frac{-\frac{4|g'|^2}{(1+|g|^2)^2}}{|f|^2 (1 + |g|^2)^2} = \frac{-4 |g'|^2}{|f|^2 (1 + |g|^2)^4}. \end{aligned}$$

□

Одавде следи да су нуле Гаусове кривине Вајерштрасове површи управо нуле функције  $g'$ . Ако  $g'$  није идентички једнако нули, нуле Гаусове кривине су изоловане тачке (познато тврђење из комплексне анализе о нулама мероморфне функције). Приметимо да су тачке минималне површи у којима је Гаусова кривина нула планарне и умбиличке. Постоји веома једноставна формула за јединичну нормалу, а самим тим и за Гаусово пресликавање Вајерштрасове површи.

**Теорема 4.4.** *Нека је  $n$  јединична нормала Вајерштрасове површи одређене мероморфним функцијама  $f$  и  $g$  и  $\pi : \mathbb{S}^2(1) \rightarrow \mathbb{C}$  стереографска пројекција. Тада је  $\pi \circ n$ , као функција комплексне променљиве, управо једнако функцији  $g$ , и важи формула*

$$n(z) = \left( \frac{2\Re g(z)}{|g(z)|^2 + 1}, \frac{2\Im g(z)}{|g(z)|^2 + 1}, \frac{|g(z)|^2 - 1}{|g(z)|^2 + 1} \right). \quad (32)$$

Како све површи из придружене фамилије имају исто Гаусово пресликавање, формула (32) важи за све површи придружене фамилије Вајерштрасовој површи одређеној мероморфним функцијама  $f$  и  $g$ . Користећи њу директно се показује и да за произвољну Вајерштрасову криву  $\Psi$  одређену мероморфним функцијама  $f$  и  $g$  важи једнакост  $\Psi' \circ n = -fg'$ .

Доказ наредне Теореме може се наћи у [9].

**Теорема 4.5.** *Нека је  $M$  комплетна регуларна минимална површи у  $\mathbb{R}^3$ . Тада је или  $M$  део равни, или јер скуп тачака сфере  $\mathbb{S}^2$  које не припадају слици Гаусовог пресликавања површи  $M$  мере нула.*

Гаусово пресликавање катеноида је  $1 - 1$ , његова слика покрива јединичну сферу без две тачке (без полова). Слика Гаусовог пресликавања хеликоида такође представља јединичну сферу без полова, али није  $1 - 1$ ; у сваку тачку сфере слика се бесконачно много тачака са хеликоида. Слика Гаусовог пресликавања Шеркове површи покрива јединичну сферу без четири тачке, али опет се у сваку тачку сфере слика бесконачно много тачака површи. Слика Гаусовог пресликавања Енеперове површи покрива јединичну сферу без једне тачке.

## 4.2 Глобална Вајерштрасова репрезентација

До сада смо показали да се свака минимална површ  $\mathcal{M}$  може локално описати преко пара  $(f, g)$  комплексно вредносних функција, што представља локалну Вајерштрасову репрезентацију. Показаћемо сада да је могуће „залепити“ ове локалне репрезентације које одговарају различитим картама површи у једну глобалну Вајерштрасову репрезентацију која описује целу површ  $\mathcal{M}$ .

Сматраћемо од сада да је површ дата имерзијом  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  повезане дводимензионалне многострукости  $\mathcal{M}$  у  $\mathbb{R}^3$  и подразумевамо да се на то односи термин ”површ  $\mathcal{M}$ ”. Све до сада поменуте класичне минималне површи јесу површи у овом контексту: Енеперова површ је имерзија равни  $\mathbb{R}^2$  у  $\mathbb{R}^3$ , катеноид је улагање равни без тачке  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  у  $\mathbb{R}^3$ . Претпостављамо да је метрика  $ds^2$  на површи  $\mathcal{M}$  она индукована имерзијом: дефинишемо скаларни прозивод  $ds(\xi, \eta)$  тангентних вектора  $\xi$  и  $\eta$  из  $T_P\mathcal{M}$  као скаларни производ из  $\mathbb{R}^3$  њихових слика  $\psi_*(\xi)$  и  $\psi_*(\eta)$  при тангентном пресликавању  $\psi_*$ . Појам друге фундаменталне форме дефинише се као и пре; то је вектор-вредносна квадратна форма  $Q(v)$  на  $T_P\mathcal{M}$  која представља нормалну компоненту (ортогонална пројекција нормална на  $T_P\mathcal{M}$ ) вектора убрзања криве  $\gamma(t)$  која лежи на површи  $\mathcal{M}$ , пролази кроз тачку  $P$  и  $v$  јој је тангентни вектор  $Q(v) = \left( \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} \right)^N$ . Видели смо да је на оријентабилној површи  $\mathcal{M}$  могуће увести комплексну структуру помоћу изотермалних координата у картама, односно да је у питању Риманова површ. На Римановој површи могуће је увести реално-вредносну другу фундаменталну форму  $Q(v)$ . Довољно је одабрати фамилију јединичних нормала  $n(P)$  површи  $\mathcal{M}$  које глатко зависе од тачке  $P$  (што специјално значи и да је Гаусово пресликавање  $n : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$  такве површи глатко) и ставити  $Q(v) = \left\langle \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} \Big|_{t=0}, n \right\rangle$ . Нека су  $G = (g_{ij})$  и  $Q = (h_{ij})$  матрице прве и друге фундаменталне форме у некој карти. Локално дефинисане функције  $H = \text{tr}G^{-1}Q$  могу се спојити у једну глобално дефинисану функцију на  $\mathcal{M}$  коју називамо средњом кривином површи  $\mathcal{M}$ . Површ  $\mathcal{M}$  је минимална ако је опет  $H \equiv 0$ .

У свакој тачки  $P$  Риманове површи  $\mathcal{M}$  дефинисани су комплексни тангентни простор

${}^{\mathbb{C}}T_P\mathcal{M}$  и котангентни простор  ${}^{\mathbb{C}}T_P^*\mathcal{M}$ . Елементи простора  ${}^{\mathbb{C}}T_P\mathcal{M}$  су линеарне комбинације  $\alpha \frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial v}$  са коефицијентима  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , где су  $(u, v)$  локалне координате на  $\mathcal{M}$ . Можемо их схватити као диференцирања у комплексним правцима комплексно-вредносних функција дефинисаних у околини тачке  $P$ . Елементе простора  ${}^{\mathbb{C}}T_P^*\mathcal{M}$  можемо схватити као диференцијале у тачки  $P$  комплексно вредносних функција на  $\mathcal{M}$ . Сваки такав диференцијал одређује на природан начин  $\mathbb{R}$ -линеарно пресликавање реалног тангентног простора  $T_P\mathcal{M}$  у  $\mathbb{C}$ , које се може продужити на  $\mathbb{C}$ -линеарно пресликавање комплексног тангентног простора  ${}^{\mathbb{C}}T_P\mathcal{M}$  у  $\mathbb{C}$ , тј.  $\mathbb{C}$ -линеарни функционал. Дакле, простор  ${}^{\mathbb{C}}T_P^*\mathcal{M}$  је конјугован простору  ${}^{\mathbb{C}}T_P\mathcal{M}$ . Базе (над  $\mathbb{C}$ )  $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$  од  ${}^{\mathbb{C}}T_P\mathcal{M}$  и  $du, dv$  за  ${}^{\mathbb{C}}T_P^*\mathcal{M}$  су дуалне. Други пар дуалних база су  $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  и  $dz, d\bar{z}$ .

Комплексно-вредносна 1-форма је фамилија  $\mathbb{C}$ -линеарних форми  $\omega_P : {}^{\mathbb{C}}T_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  која глатко зависи од тачке. У локалним  $(u, v)$  координатама,  $z = u + iv$ , форма  $\omega$  може се записати као  $\omega = \omega_1 dz + \omega_2 d\bar{z}$ , где су  $\omega_k(u, v)$  глатке комплексно вредносне функције од  $u, v$ . 1-форма  $\omega$  на Римановој површи је холоморфна ако у сваком координатном систему  $z = u + iv$  може да се запише у облику  $\omega = \omega_1 dz$ , где је  $\omega_1(z) = \omega_1(u, v)$  холоморфна функција, односно  $\frac{\partial \omega_1}{\partial \bar{z}} = 0$ . Да бисмо конструисали глобалну Вајерштрасову репрезентацију, потребно је још да дефинишемо интеграл 1-форме  $\omega$  на  $\mathcal{M}$  дуж глатке криве  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ . Тада је  $\gamma^*(t)$  тангентно векторско поље дуж  $\mathcal{M}$ , па има смисла посматрати функцију  $\omega(\gamma^*(t))$  на  $[a, b]$ . Управо интеграл ове функције дуж  $[a, b]$  представља интеграл 1-форме  $\omega$  дуж криве  $\gamma$ :  $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma^*(t)) dt$ .

Нека је  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  имерзија оријентабилне минималне површи. Сматраћемо  $\mathcal{M}$  Римановом површи са комплексном структуром индукованом изотермалним координатама. Нека је  $(U, \eta)$  карта за комплексним координатама  $z = u + iv$  и  $\phi = \frac{\partial \psi}{\partial z}$  холоморфни радијус вектор, где је  $\psi(u, v) = \psi \circ \eta^{-1}(u, v)$ . Ако је  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ , тада комплексно вредносне функције на  $\mathcal{U}$   $f = \varphi_1 - i\varphi_2$  и  $g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}$  одређују локалну Вајерштрасову репрезентацију. Формирајмо локално на  $\mathcal{U}$  холоморфну 1-форму  $\omega = f dz$ . Ако у другом координатном систему  $z'$  посматрамо локалну 1-форму  $\omega' = f' dz'$ , где је  $\varphi' = \frac{\partial \psi}{\partial z'} = (\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3)$ ,  $f' = \varphi'_1 - i\varphi'_2$ , тада се форме  $\omega$  и  $\omega'$  поклапају на preseку области дефинисаности координатних карти. Из  $\varphi'_k = \frac{\partial \psi_k}{\partial z'} = \frac{\partial \psi_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'}$ , имамо  $f'(z') = f(z(z')) \frac{\partial z}{\partial z'}$  и  $\omega' = f \frac{\partial z}{\partial z'} dz' = f dz$ , пошто се при холоморфној промени координата  $z \mapsto z'$  базни ковектор  $dz \in {}^{\mathbb{C}}T_P^*\mathcal{M}$  слика у ковектор  $\frac{\partial z}{\partial z'} dz'$ . Дакле, локалне форме  $\omega = f dz$  могу се „залепити“ заједно у једну холоморфну 1-форму на Римановој површи  $\mathcal{M}$ . Такође, локално дефинисане функције  $g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}$  такође се могу

спојити у једну мероморфну функцију на  $\mathcal{M}$ : ако је  $g' = \frac{\varphi_3'}{\varphi_1' - i\varphi_2'}$ , тада

$$g' = \frac{\varphi_3 \frac{\partial z}{\partial z'}}{\varphi_1 \frac{\partial z}{\partial z'} - i\varphi_2 \frac{\partial z}{\partial z'}} = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} = g.$$

Ово нам омогућава да дефинишемо три холоморфне 1-форме  $\frac{1}{2}(1 - g^2)\omega$ ,  $\frac{i}{2}(1 + g^2)\omega$  и  $g\omega$ . Локално ове форме можемо записати као  $\varphi_1 dz$ ,  $\varphi_2 dz$ ,  $\varphi_3 dz$ , па ћемо их надаље означавати са  $\varphi^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Ако је  $\gamma$  произвољна део-по-део глатка крива која спаја произвољне тачке  $P, Q \in \mathcal{M}$ , тада је  $\psi^k(Q) = \psi^k(P) + 2\Re \int_{\gamma} \varphi^k$ . Заиста, ако  $\gamma$  цела лежи у једној карти, тада

$$2\Re \int_{\gamma} \varphi^k = \int_{\gamma} \frac{\partial \psi^k}{\partial u} du + \frac{\partial \psi^k}{\partial v} dv = \int_{\gamma} d\psi^k = \psi^k(Q) - \psi^k(P).$$

Иначе криву  $\gamma$  поделимо на делове који цели леже у једној карти. Самим тим је реални део интеграла  $\int_{\gamma} \varphi^k$  једнак нули дуж произвољне затворене део-по-део глатке криве на  $\mathcal{M}$ , односно форме  $\varphi^k$  немају реалне периоде.

**Дефиниција 4.1.** *Уређени пар  $(\omega, g)$  холоморфне 1-форме  $\omega$  и мероморфне функције  $g$  на Римановој површи  $\mathcal{M}$ , такав да су 1-форме  $\varphi^1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\omega$ ,  $\varphi^2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega$  и  $\varphi^3 = g\omega$  холоморфне и немају реалне периоде назива се **глобална Вајерштрасова репрезентација**.*

Ако имамо задату глобалну Вајерштрасову репрезентацију, тада је  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  дефинисано са  $\psi^k(Q) = c_k + 2\Re \int_{\gamma} \varphi^k$ , где је  $\gamma$  произвољна део-по-део глатка крива на  $\mathcal{M}$  која спаја фиксирану тачку  $P \in \mathcal{M}$  и променљиву тачку  $Q \in \mathcal{M}$  и  $c = (c_1, c_2, c_3) = \psi(P)$ , имерзијом задата минимална површ, осим у одређеном броју изолованих тачака. Тачке у којима минимална површ није регуларна називају се *тачкама гранања*. Тачка  $Q \in \mathcal{M}$  је тачка гранања ако су форме  $\omega$  и  $g^2\omega$  истовремено у тој тачки нула. Минимална површ која има тачке гранања назива се *генерализована минимална површ*. Већ смо видели да функција  $g$  одређује Гаусово пресликавање минималне површи, ако претпоставимо координате на  $\mathbb{S}^2$  добијене стереографском пројекцијом из северног пола. Полови функције  $g$  су тачке које се Гаусовим пресликавањем сликају у северни пол, а нуле функције  $g$  се сликају у јужни пол. Доказали смо следећу

**Теорема 4.6.** *Све генерализоване оријентабилне минималне површи у  $\mathbb{R}^3$  описане су глобалном Вајерштрасовом репрезентацијом, односно свим могућим паровима  $(\omega, g)$  холоморфне 1-форме  $\omega$  и мероморфне функције  $g$  дефинисаним на Римановој површи  $\mathcal{M}$ , таквих да су форме  $\varphi^1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\omega$ ,  $\varphi^2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega$  и  $\varphi^3 = g\omega$  холоморфне и немају реалне периоде на  $\mathcal{M}$ .*



Закључак: Пар  $(\omega, g)$  одређује минималну површ  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  задату имерзијом са изолованим тачкама гранања на следећи начин:

$$\psi^k = c_k + 2\Re \int_{\gamma} \varphi^k, \quad c_k = \text{const} \in \mathbb{R},$$

при чему се интеграл дуж произвољне део-по-део глатке криве која спаја фиксирану тачку  $P \in \mathcal{M}$  и произвољну тачку  $Q \in \mathcal{M}$ ,  $\psi(P) = (c_1, c_2, c_3)$ .

Конструкција глобалне Вајерштрасове репрезентације неоријентабилне минималне површи  $\mathcal{M}$  може се наћи у [3].

## 5 Бјорлингова формула

Бјорлинг<sup>13</sup> је 1844. први поставио проблем налажења минималне површи која садржи дату траку, који је касније решио Шварц. Прецизирајмо о чему се ради. Нека је  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  крива. Под **холоморфним продужењем** криве  $\alpha$  подразумевамо аналитичко пресликавање  $\tilde{\alpha} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}^3$  дефинисано на правоугаонику

$$\mathcal{R} = \{u + iv : u \in (a, b), v \in (c, d)\},$$

где је  $c < 0 < d$  и  $\tilde{\alpha}(u) = \alpha(u)$  за све  $u \in (a, b)$ . Такво продужење је јединствено ако постоји ( $\alpha$  је реална аналитичка), па можемо задржати убудуће исти симбол  $\alpha$  и  $\mathcal{R} = (a, b) \times (c, d)$ .

**Дефиниција 5.1.** Нека су  $\alpha, \gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  криве које задовољавају

$$\begin{aligned} \|\gamma\| &= 1, \\ \alpha' \cdot \gamma &= 0, \end{aligned} \tag{33}$$

такве да постоје холоморфна продужења  $\alpha, \gamma : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}^3$  за које услови (33) важе за све  $z \in (a, b) \times (c, d)$ . За фиксирано  $z_0 \in (a, b) \times (c, d)$ , **Бјорлингова крива** која одговара кривама  $\alpha$  и  $\gamma$  дата је са

$$b(\alpha, \gamma, z) = \alpha(z) - i \int_{z_0}^z \gamma(z) \times \alpha'(z) dz.$$

Покажимо да је Бјорлингова крива минимална, као и како је повезана са кривама  $\alpha$  и  $\gamma$ .

**Теорема 5.1.** Претпоставимо да важе услови из Дефиниције (5.1). Тада

- а) Бјорлингова крива  $z \mapsto b(\alpha, \gamma, z)$  је минимална крива;
- б) Пресликавање  $u \mapsto \Re(b(\alpha, \gamma, u)) - \alpha(u)$  је константно;
- в) Ако је  $n$  нормала површи  $(u, v) \mapsto b(\alpha, \gamma, u + iv)$ , важи  $n(u, 0) = \gamma(u)$ .

*Доказ.* Део а) је последица једнакости  $\Psi' = \alpha' - i\gamma \times \alpha'$ . Део б) важи јер су  $\alpha(u)$  и  $\gamma(u)$  реални кад год је  $u$  реалан. Део в) следи из идентитета  $\Psi'(u) \cdot \overline{\Psi'(u)} = 2\alpha'(u) \cdot \alpha'(u)$ ,  $\Psi'(u) \times \overline{\Psi'(u)} = 2i(\alpha'(u) \cdot \alpha'(u))\gamma(u)$  и Леме (25)

$$n(u, 0) = \frac{\Psi'(u) \times \overline{\Psi'(u)}}{i \|\Psi'(u)\|^2} = \gamma(u).$$

□

<sup>13</sup> Emanuel Gabriel Björling (1808 – 1872), шведски математичар

Бјорлинггов проблем се негде баш и формулише као проблем проналажења минималне површи која садржи дату реалну аналитичку криву  $\alpha$  и чије се јединично поље нормала поклапа са задатим  $\gamma$ , односно чије су тангентне равни дуж криве задате. Његово решење је опет јединствено, аналогно Кошијевом проблему за диференцијалне једначине.

На основу претходне Теореме можемо конструисати многе занимљиве минималне површи. Нека је  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  регуларна раванска крива која има регуларно холоморфно продужење  $\alpha : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Дефинишимо  $\gamma = \frac{J\alpha'}{\|\alpha'\|}$  ( $J$  је комплексна структура у равни). Тада је  $\gamma \times \alpha' = -\|\alpha'\| e_3$ , па је

$$b(\alpha, \gamma, z) = \alpha(z) + i \left( \int_{z_0}^z \sqrt{\alpha'(z) \cdot \alpha'(z)} dz \right) e_3,$$

где је  $e_3$  јединични вектор у  $\mathbb{R}^3$ .

**Дефиниција 5.2.** Нека је  $\alpha = (a_1, a_2) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  раванска крива која има холоморфно продужење  $\alpha : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Бјорлингова крива која одговара криви  $\alpha$  има параметризацију

$$b(\alpha, z) = \left( a_1(z), a_2(z), i \int_{z_0}^z \sqrt{a_1'(z)^2 + a_2'(z)^2} dz \right).$$

Наредна Теорема о пресеку површи и равни у  $\mathbb{R}^3$  је добро познат резултат.

**Теорема 5.2.** Нека је  $\beta$  природно параметризована крива која лежи у пресеку регуларне површи  $M \subset \mathbb{R}^3$  и равни  $\Pi$ . Претпоставимо да су  $M$  и  $\Pi$  ортогоналне дуж криве  $\beta$ . Тада је  $\beta$  геодезијска у  $M$ .

**Теорема 5.3.** Нека је  $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  раванска крива која има холоморфно продужење  $\beta : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $c < 0 < d$ . Тада је

$$\Re b(\beta) : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

минимална површи која садржи криву  $\beta$  као геодезијску.

*Доказ.* Непосредно се проверава да за  $\Psi' = b(\beta)$  важи  $\Psi \cdot \Psi' = 0$ , односно да је  $\Psi$  минимална крива. Ако ставимо  $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ , на основу (25) изразићемо јединичну нормалу од  $\Psi$

$$n = \frac{2(\Im(-ib_2' \sqrt{b_1'^2 + b_2'^2}), \Im(ib_1' \sqrt{b_1'^2 + b_2'^2}), \Im(b_1' \overline{b_2}'))}{|b_1'|^2 + |b_2'|^2 + \left| \sqrt{b_1'^2 + b_2'^2} \right|^2}.$$

Како су  $b_1'(z)$  и  $b_2'(z)$  реални за  $z \in \mathbb{R}$ , добијамо

$$n(u, 0) = \frac{2(-b_2' \sqrt{b_1'^2 + b_2'^2}, b_1' \sqrt{b_1'^2 + b_2'^2}, 0)}{2(b_1'^2 + b_2'^2)} \Big|_{z=(u,0)} = \frac{(-b_2', b_1', 0)}{\sqrt{b_1'^2 + b_2'^2}} \Big|_{z=(u,0)}.$$

Дакле, нормала  $n$  је ортогонална на  $e_3$ , јединичну нормалу  $xy$ -равни  $\Pi$ . Сада из претходне Теореме следи да је крива  $\beta$  геодезијска у  $\Re\Psi$ .  $\square$

Узимајући имагинарни уместо реалног дела, добијамо конјуговану минималну површ.

**Последица 5.1.** Нека је  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  регуларна раванска крива која има холоморфно продужење  $\alpha : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $c < 0 < d$ . Тада је

$$\Re b(\alpha) : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

минимална површ која садржи криву  $\alpha$  као геодезијску (када се репараметризује природним параметром).

**Пример 5.1.** Нађимо минималну површ која садржи циклоиду  $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$  као геодезијску. Тада је  $a_1(z) = z - \sin z$ ,  $a_2(z) = 1 - \cos z$  и  $\int_{z_0}^z \sqrt{a_1'(u)^2 + a_2'(u)^2} du = \int_0^z 2 \sin \frac{u}{2} du = -4i \cos \frac{z}{2}$ . Бјорлингова крива дата је параметризацијом

$$\Phi(z) = \left( z - \sin z, 1 - \cos z, -4 \cos \frac{z}{2} \right).$$

Узимајући реални део добијамо одговарајућу минималну површ

$$x(u, v) = \left( u - \cosh v \sin u, 1 - \cos u \cosh v, -4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2} \right).$$

Добијена површ је Каталанова површ.

Посматрајмо параболу  $t \mapsto (2t, t^2)$ . Одговарајућа Бјорлингова крива дата је са

$$\Phi(z) = \left( 2z, z^2, i \int_0^z \sqrt{1 + u^2} du \right).$$

Ако имплементирамо реални део ове криве користећи програм Mathematica, добићемо површ која садржи део праве линије у граници и самим тим не може бити минимална. Проблем је у комплексном интегралу. Наиме, ако интегралимо од 0 до  $2i$  рецимо, можемо добити различите вредности дуж различитих путања, све са истим имагинарним делом. Подинтегрална функција је вишезначна, због тачака  $i$  и  $-i$  имамо више грана. Компјутер ове "прекиде" поравна уместо да површ продужи преко њих. Једно могуће решење је увести смену  $z = \sinh \omega$  којом добијамо једнозначну функцију. Сада крива постаје

$$\Phi(\omega) = (2 \sinh \omega, \sinh^2 \omega, 2i \cosh(\omega \sinh \omega) + \omega).$$

Добили смо опет Каталанову површ; она садржи параболу и циклоиду које су међусобно нормалне. Хенебергова површ садржи као  $u$ -параметарску линију  $v = \frac{\pi}{2}$  тзв. Нејлову параболу  $(z - 2)^3 = 9x^2$ . Њена конјугована површ садржи астроиду  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$  као геодезијску.

**Пример 5.2.** Нађимо минималну површ која садржи елипсу  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a > b$ , као геодезијску. Одговарајућа Бјорлингова крива

$$\Phi(z) = \left( a \cos z, b \sin z, i \int_0^z \sqrt{1 - e^2 \sin^2 u} du \right),$$

где је  $e$  ексцентрицитет елипсе. Слично као у претходном примеру, површ која је реални део ове Бјорлингове криве није минимална. Она очигледно има делове који подсећају на канале, на којима је једна главна кривина близу нуле, а друга јако велика. Самим тим то није део минималне површи. Уместо директне примене формуле, користимо Јакобијеве елиптичке функције:

- елиптичка синусна функција  $\phi = \text{sn}(v, k)$  која је инверзна функција интегралу

$$\int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

- Јакобијев елиптички косинус  $\text{cn}(v, k) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(v, k)}$ ,
- Јакобијева делта функција  $\text{dn}(v, k) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(v, k)}$ .

Као и тригонометријске функције (које се добијају за  $k = 0$ ), ове функције се могу продужити до комплексно променљивих, само што постану мероморфне и дупло периодичне, уместо холоморфне и периодичне. Сада, помоћу параметра  $u$  задатог са  $\text{sn}(u, e) = \sin z$ , добијамо минималну површ

$$\Psi(z) = \left( b \text{cn}(u, e), a \text{sn}(u, e), ia \int_0^u \text{dn}^2(\sigma, e) d\sigma \right).$$

Подинтегрална функција је мероморфна, али су сви њени резидууми нула, па је интеграл добро дефинисана функција од  $u$ . Добијену површ називамо **елиптички катеноид**, а њој конјуговану **елиптички хиперболоид**. Ако је специјално у питању круг, добијамо обичан катеноид.

Истим методом добијамо Бјорлингову криву која настаје од хиперболе

$$\Psi(u) = \left( b \text{dn} \left( \frac{u}{k}, k \right), ia k \text{sn} \left( \frac{u}{k}, k \right), a \int_0^u \text{cn}^2 \left( \frac{\sigma}{k}, k \right) d\sigma \right),$$

где је  $k = \frac{1}{e} < 1$ .

Напоменимо на крају још да се могу наћи и минималне површи чија је дата крива асимптотска линија или линија кривине.

## 6 Новији резултати

Теорија минималних површи још увек се развија и за њу се везује неколико актуелних отворених проблема. У овом Поглављу ћемо приказати неке од резултата из [4] и [5] у теорији деформација минималних кривих. Размотрићемо алгебарске формуле за мероморфне криве у  $\mathbb{C}^3$  инфинитезималне дужине лука, односно оператор који тројци  $(f, h, d)$  мероморфних функција додељује мероморфне криве  $\Phi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z))^T$  дужине лука  $d$ . Тиме добијамо сва решења диференцијалне једначине  $\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2 = 0$  само преко  $f, h, d$  и без интеграције, коришћењем програма Mathematica. У случају  $d = 0$  тако се конструишу неке минималне површи и испитују њихове геометријске особине као што су симетрије и периодичност при деформацијама.

Дефинишимо неке термине који уопштавају оне из Поглавља 3 и 4.

**Изотропни конус**  $\mathcal{I} \subset \mathbb{C}^3$  састоји се од свих вектора  $z = (z_1, z_2, z_3)^T \in \mathbb{C}^3$ ,  $z \neq 0$  за које је  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ . **Нула крива**  $\Phi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z))^T$  је крива у  $\mathbb{C}^3$  чија је тангента у свакој тачки права на  $\mathcal{I}$ , тј.  $\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2 = 0$ . Претпостављамо да је крива **потпуна**, тј. да су вектори  $\Phi', \Phi'', \Phi'''$  линеарно независни.

Посматрајмо густу подскуп  $\mathcal{I}_0 = \{z = (z_1, z_2, z_3)^T \in \mathcal{I} \mid z_1 - iz_2 \neq 0\}$ . Већ смо видели да је параметризација  $\mathcal{I}_0$  дата бијекцијом

$$\mathbf{W} : (f, g) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \longrightarrow \frac{g}{2} \begin{pmatrix} 1 - f^2 \\ i(1 + f^2) \\ 2f \end{pmatrix},$$

чији је инверз

$$\mathbf{W}^{-1} : (z_1, z_2, z_3)^T \in \mathcal{I}_0 \longrightarrow \left( \frac{z_3}{z_1 - iz_2}, z_1 - iz_2 \right).$$

Замењујући  $f$  и  $g$  мероморфним функцијама  $f(z)$  и  $g(z)$ , интеграцијом добијамо Вајерштрасове репрезентационе формуле

$$\mathbf{WEI}_{g,f}(z) = \int \mathbf{W}(f(z), g(z)) dz \quad (34)$$

за нула криве у  $\mathbb{C}^3$ . Формулом (34) је, до на translацију, јединствено дата параметризација сваке нула криве која задовољава  $\varphi_1' \neq i\varphi_2'$ . Понекада се функције  $f$  и  $g$  називају Вајерштрасовим подацима криве  $\Phi$ . **Природни параметар** потпуне криве  $\Phi(z)$  у  $\mathbb{C}^3$  дефинише се са  $p'(z) = \sqrt[4]{\langle \Phi''(z), \Phi''(z) \rangle}$ . **Кривина**  $\kappa_\Phi^2$  нула криве  $\Phi(z)$  дефинисана је формулом

$$\kappa_\Phi^2 = \sqrt{\left\langle \frac{d^3\Phi}{dp^3}, \frac{d^3\Phi}{dp^3} \right\rangle}.$$

Функције  $p$  и  $\kappa$  су комплетне инваријанте нула кривих. У терминима Вајерштрасових података  $(f, g)$  криве  $\Phi$ , природни параметар дат је са  $p'(z) = \sqrt{f'(z), g(z)}$ . Ако ставимо  $g(z) = \frac{1}{f'(z)}$ , тада је  $\mathbf{WEI}_f^* = \mathbf{WEI}_{\frac{1}{f'}, f}$  природно параметризована нула крива, чија је кривина дата Шварцовим изводом  $S(f)$  функције  $f$

$$\kappa_{\mathbf{WEI}_f^*}^2(z) = S(f)(z) = \frac{3f''(z) - 2f'(z)f'''(z)}{f'(z)^2}.$$

Оригинална крива  $\Phi$  може се реконструисати из  $p$  и  $\kappa$  решавајући линеаран систем, сличан Френеовим једначинама у  $\mathbb{R}^3$ .

**Теорема 6.1.** *Претпоставимо да је  $\Phi$  потпуна природно параметризована нула крива ( $p'(z) = 1$ ),  $h(z)$  произвољна мероморфна функција и  $\kappa_\Phi(z)$  кривина од  $\Phi$ . Тада је следећа линеарна комбинација  $\Phi', \Phi'', \Phi'''$*

$$\Delta = (h\kappa_\Phi^2 + h'')\Phi' - h'\Phi'' + h\Phi'''$$

такође нула крива, као и сума  $\Phi(z) + \Delta(z)$ .

Доказ Теореме може се наћи у [4]. Посматрајмо  $\Delta$  за  $h = \varepsilon h_0$ , где је  $h_0$  фиксирана функција и  $\varepsilon$  комплексни параметар. Како је  $\Delta$  линеарна по  $h$ , тежи ка 0 како  $\varepsilon \mapsto 0$  и  $\Phi + \Delta$  тежи ка  $\Phi$ . Одатле мотивација за наредну дефиницију.

**Дефиниција 6.1.** *Операторе  $\mathbf{VAR} : (\Phi, h) \mapsto \mathbf{VAR}_{\Phi, h} := \Delta$  и  $\mathbf{DEF}_{\Phi, h} := \Phi + \mathbf{VAR}_{\Phi, h}$  називамо **варијацијом** и **деформацијом** криве  $\Phi$  функцијом  $h$ .*

Ако изразимо криву  $\Phi$  помоћу њених Вајерштрасових података  $(f, g)$ , добијамо алгебарске формуле репрезентације за  $\mathbf{VAR}_{\Phi, h}$  у којима нема интеграције. За криву  $\Phi(z) = \mathbf{WEI}_{g, f}$  пресликавање  $(g, f, h) \rightarrow \mathbf{VAR}_{\Phi, h}$  је диференцијални оператор од  $g, f, h$ , линеаран по  $h$ . У случају природно параметризоване Вајерштрасове криве  $\Phi(z) = \mathbf{WEI}_f^*$ , добијамо диференцијални оператор  $(f, h) \mapsto \mathbf{VAR}_{\Phi, h} := \mathbf{VAR}_{\mathbf{WEI}_{\Phi, h}}$  по  $f, h$ , означен истим симболом, у експлицитној форми

$$\mathbf{VAR}_{f, h} = \frac{1}{2f'^3} \begin{pmatrix} i\{f'((h'f'' + f'h'')f^2 - 2f'^2h'f - h'f'' - f'h'') \\ + h(2f'^4 - 2ff''f'^2 + (f^2 - 1)f'''f' - (f^2 - 1)f''^2)\} \\ f'((h'f'' + f'h'')f^2 - 2f'^2h'f + h'f'' + f'h'') \\ - h(2f'^4 - 2ff''f'^2 + (f^2 + 1)f'''f' - (f^2 + 1)f''^2) \\ 2i(h'f'^3 - (fh'' - hf'')f'^2 - f(h'f'' + hf''')f' + fhf''^2) \end{pmatrix}.$$

Инфинитезимални природни параметар од  $\mathbf{VAR}_{f, h}$  је диференцијални оператор, линеаран по  $h$ , чији се коефицијенти могу изразити у терминима Шварцовог извода  $S(f)$

$$\begin{aligned} p_{f, h}^2 &= i \left( h''' + \frac{2f'f'''}{f'^2}h' + \frac{3f''^3 - 4f'f''f'''}{f'^3}h \right) \\ &= i(h''' - S(f)h' - \frac{1}{2}S(f)'h). \end{aligned}$$

Слично је кривина од  $\mathbf{VAR}_{f,h}$  линеарни диференцијални оператор реда 5 по  $h$  чији коефицијенти зависе само од  $S(f)$ . Реални део  $x(u, v) = \Re(\Phi(u + iv))$  произвољне нула криве  $\Phi(z)$  у  $\mathbb{C}^3$  је изотермална минимална површ у  $\mathbb{R}^3$ .

Ово можемо применити рецимо на катеноид и хеликоид (нпр. катеноид задат као  $\mathbf{VAR}_{f,h}$ ,  $f(z) = e^{7z}$  и функција деформације  $h(z) = \frac{e^{2z} + \sin(\frac{z}{7})}{17}$  као што је приказано у [4]).

Нека је сада  $\Phi(z) \in \mathbb{C}^3$  потпуна нула крива и  $z$  природни параметар криве  $\Phi$ , тј.  $\langle \Phi''(z), \Phi''(z) \rangle = 1$ . Такође, нека је  $\kappa(z)$  минимална кривина криве  $\Phi$ , тј.  $\langle \Phi'''(z), \Phi'''(z) \rangle = \kappa^2(z)$ . Узастопним диференцирањем можемо добити све скаларне производе облика  $\langle \Phi^{(i)}(z), \Phi^{(j)}(z) \rangle$ . За  $1 \leq i, j \leq 4$  важи

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(z), \Phi'(z) \rangle &= 0 & \langle \Phi'(z), \Phi''(z) \rangle &= 0 & \langle \Phi'(z), \Phi'''(z) \rangle &= -1 & \langle \Phi'(z), \Phi^{(4)}(z) \rangle &= 0 \\ \langle \Phi''(z), \Phi''(z) \rangle &= 1 & \langle \Phi''(z), \Phi'''(z) \rangle &= 0 & \langle \Phi''(z), \Phi^{(4)}(z) \rangle &= -\kappa^2 \\ \langle \Phi'''(z), \Phi'''(z) \rangle &= \kappa^2 & \langle \Phi'''(z), \Phi^{(4)}(z) \rangle &= \kappa^3 \kappa' \\ \langle \Phi^{(4)}(z), \Phi^{(4)}(z) \rangle &= \kappa^4. \end{aligned}$$

Вајерштрасова репрезентација овакве криве добија се заменом  $g = \frac{1}{f}$  у (34) и дата је са

$$\Phi(z) = \mathbf{WEI}_f^*(z) = \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{1}{f'} \begin{pmatrix} 1 - f^2 \\ i(1 - f^2) \\ 2f \end{pmatrix} d\xi.$$

Уведимо ознаку

$$\mathbf{K}_f(z) = \begin{pmatrix} -if(z) \\ -f(z) \\ i \end{pmatrix}.$$

Тада имамо

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K}_f(z), \mathbf{WEI}'_{g,f}(z) \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{K}_f(z), \mathbf{WEI}_f^{*'}(z) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{WEI}''_{g,f}(z) &= \frac{g'(z)}{g(z)} \mathbf{WEI}'_{g,f}(z) - if(z)g'(z)\mathbf{K}_g(z), \\ \mathbf{WEI}_f^{*''}(z) &= -\frac{f''(z)}{f'(z)} \mathbf{WEI}_f^{*'}(z) + \mathbf{K}_f(z). \end{aligned}$$

Нека је  $\mathcal{A}$  скуп свих неконстантних мероморфних функција. Оператор  $\mathbf{VAR}_{f,h}$  може се уопштити на  $(f, h, d) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \Delta_{f,h,d}$  који представља криве произвољне дужине лука у  $\mathbb{C}^3$  и такав да је  $\mathbf{VAR}_{f,h} = \Delta_{f,h,0}$ . Поделитемо скуп  $\mathcal{C}$  свих



параметризованих мероморфних кривих  $\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$  на међусобно дисјунктне подскупове  $\mathcal{C}_d$  према инфинитезималној комплексној дужини лука  $d(z)$ ; за фиксирано  $d \in \mathcal{A}$  скуп  $\mathcal{C}_d$  се састоји од свих кривих  $\Psi \in \mathcal{C}$  које задовољавају  $\langle \Psi'(z), \Psi'(z) \rangle = d^2(z)$ . Скуп  $\mathcal{C}_0$  је заправо скуп свих мероморфних минималних кривих. Следећа Теорема даје нам алгебарске формуле репрезентације мероморфних кривих  $\Phi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z))^T$  инфинитезималне дужине лука  $d$ , односно цео скуп решења диференцијалне једначине  $\varphi_1^2(z) + \varphi_2^2(z) + \varphi_3^2(z) = d^2$  само преко  $f, d, h$  и без интеграције.

**Теорема 6.2.** *Пресликавање*

$$\Delta : (\Phi, h, d) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \Delta_{\Phi, h, d} = (h'' - h\kappa_{\Phi}^2 + d)\Phi' - h'\Phi'' + h\Phi'''$$

је сурјективно пресликавање скупа  $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}$  на  $\mathcal{D}$ , које пресликава  $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{A} \times \{d\}$  на  $\mathcal{D}_d$ . Инверзни оператор оператора  $\Delta = \Delta_{\Phi, h, d}$  се добија на следећи начин: прво се одреди  $d(z)$  из услова

$$d^2(z) = \langle \Delta', \Delta' \rangle,$$

затим се добија  $\Phi$  из услова

$$\Delta'(z) = \begin{pmatrix} \delta_1(z) \\ \delta_2(z) \\ \delta_3(z) \end{pmatrix}, \quad f(z) = \frac{\delta_3(z) + d(z)}{\delta_1(z) - i\delta_2(z)}, \quad \Phi(z) = \mathbf{WEI}_f^*(z),$$

и коначно

$$h(z) = \langle \Phi'(z), \Delta(z) \rangle.$$

**Последица 6.1.**  $\Delta_{\Phi, h, d}$  је афино пресликавање по  $h$  са придруженим линеарним пресликавањем  $\Delta_{\Phi, h, 0}$ .

Овим смо добили потпун опис инверзне слике мероморфне криве при деловању оператора  $\Delta$ . Може се показати да је у случају  $\Phi = \mathbf{WEI}_f^*$  језгро оператора  $\Delta_{\Phi, h, 0}$

$$\text{KerVAR}_{f, \cdot} = \left\{ \frac{a + bf(z) + cf^2(z)}{f'(z)} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\},$$

односно тако изгледају минималне криве чија је Вајерштрасова репрезентација одређена само функцијом  $f$ .

## Литература

- [1] Блажић Н., Бокан Н., *Увод у диференцијалну геометрију*, Веста, Математички факултет, Београд, 1998.
- [2] Драговић В., Миљинковић Д., *Анализа на многострукостима*, Математички факултет, Београд, 2003.
- [3] Fomenko A. T., Tuzhilin A. A. , *Elements of the geometry and topology of minimal surfaces in three-dimensional space*, American Mathematical Society, 1991.
- [4] Gollek Hubert, *A representation formula for curves in  $\mathbb{C}^3$  with preset infinitesimal arc length*, Filomat 23:2 (2009), 12-27
- [5] Gollek Hubert, *Deformations of minimal curves in  $\mathbb{C}^3$* , Proc. of 1-st NOSONGE Conf., Warsaw, Sept. 1996 Polish Scientific Publishers PWN. (1998), 269-286.
- [6] Gray Alfred, *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, CRC Press LLC, Florida, 1998.
- [7] Hugo Jiménez-Pérez, *On the Alfred Gray's Elliptical Catenoid*, pdf документ доступан на arXiv:1106.2354v1
- [8] Oprea John, *Differential geometry and its applications*, Pearson Prentice Hall, 2004.
- [9] Osserman Robert, *A survey of minimal surfaces*, Dover publications, INC. New York, 1969.
- [10] Pressley Andrew, *Elementary differential geometry*, Springer-Verlag London, 2001.