Морсова хомологија,
диференцијално-тополошки и аналитички приступ

Александра Перишић

Ментор: др Дарко Милинковић

Математички факултет

децембар, 2009.

Садржај

Предговор

У овом раду су описани основни елементи Морсове теорије и Морсове хомологије, као и веза топологије многострукости и аналитичких појмова. У првој глави се показује да свака многострукост има структуру $CW-$комплекса, при чему за унапред изабрану Морсову функцију на њој, свакој ћелији одговара јединствена критична тачка те функције. Дакле, хомологију многострукости можемо рачунати само на основу аналитичких својстава Морсове фунције на њој. То је доказао *Marston Morse*, тридесетех година прошлог века. У другој глави се посматра простор негативних градијентних трајекторија, који је одређен Морсовом функцијом f, описују се његова тополошка својства, и на њему задаје хомологија. Наиме, ланчасти комплекс $(C_*(f), \partial_*)$ чине слободне Абелове групе генерисане критичним тачкама истог Морсовог индекса, а гранични оператор ∂ је одређен бројем трајекторија између критичних тачака чији се индекс разликује за 1. То је тзв. $Mors - Smale - Witten$-ов комплекс. Показује се да је Морсова хомологија изоморфна сингуларној хомологији многострукости ([15]). У трећој глави се простор трајекторија описује помоћу Фредхолмових оператора, тачније тај простор се задаје као језгро Фредхолмовог пресликавања. Овај приступ је развијен доста касније, осамдесетих година. Четврта глава је кратак преглед основних појмова и теорема које су коришћене у раду.

У целом раду радимо са коначнодимензионим многострукостима. И у трећој глави, где се скуп трајекторија посматра као подскуп у бесконачнодимензионом простору, помажу нам Фредхолмова пресликавања, која имају коначнодимензионо језгро. Проблем уопштавања Морсове хомологије и прелазак на бесконачнодимензиони случај, проучавао је *Floer* и основне идеје су изложене на крају додатка.

Захваљујем се мом ментору, Дарку Милинковићу, као и члановима комисије Зорану Петровићу и Јелени Катић, на свим коментарима и саветима које су ми упутили приликом читања рада.

ГЛАВА 1

Класичан приступ теорији Морса

1.1 Морсове функције

Нека је M глатка многострукост димензије n и $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција.

Дефиниција 1.1.1. Тачка $p \in M$ је *критична тачка пресликавања* f ако је $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ нула пресликавање.

Нека је (φ, U) карта око тачке p, дакле $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$. Тада је p критична тачка ако важи:

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^1}\Big(\varphi(p)\Big) = \cdots = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^n}\Big(\varphi(p)\Big) = 0.$$

Пример 1.1.1. Посматрајмо функцију висине на торусу $f : T \to \mathbb{R}$, дефинисану са $f(x,y,z) = z + a + b$, $a > b > 0$. На основу параметризације торуса, можемо дефинисати карте са:

$$\varphi^{-1}(u,v) = (b\sin u, (a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v)$$

па је запис функције f у локалним координатама:

$$\tilde{f}(u,v) = f(\varphi^{-1}(u,v)) = (a + b\cos u)\sin v + a + b.$$

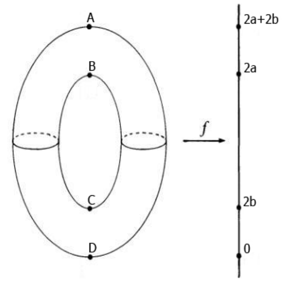
Критичне тачке задовољавају услов:

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}(u,v) = -b\sin u \sin v = 0, \qquad \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}(u,v) = (a + b\cos u)\cos v = 0.$$

Следи, $u \in \{0, \pi\}$, $v \in \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$, па функција висине на торусу има 4 критичне тачке:

$$A = \varphi^{-1}(0, \frac{\pi}{2}) = (0, 0, a + b), \;\; B = \varphi^{-1}(\pi, \frac{\pi}{2}) = (0, 0, a - b),$$

$$C = \varphi^{-1}(\pi, \frac{3\pi}{2}) = (0, 0, -a + b), \;\; D = \varphi^{-1}(0, \frac{3\pi}{2}) = (0, 0, -a - b).$$



Слика 1.1: Критичне тачке функције висине на торусу

Дефиниција 1.1.2. Критична тачка $p \in M$ функције f је *недегенерисана* ако је матрица другог извода

$$D^2 \widetilde{f}_p = \Big[\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^i \partial x^j}(\varphi(p))\Big]_{i,j=\overline{1,n}}$$

инвертибилна, тј. ранга n.

Пример 1.1.2. Све критичне тачке функције висине на торусу су недегенерисане.

$$D^2 \widetilde{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v} \\ \dfrac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \cos u \sin v & -b \sin u \cos v \\ -b \sin u \cos v & -(a + b \cos u) \sin v \end{bmatrix}$$

Следи,

$$D^2 \widetilde{f}_A = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & -a-b \end{bmatrix}, \qquad D^2 \widetilde{f}_B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & -a+b \end{bmatrix},$$

$$D^2 \widetilde{f}_C = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}, \qquad D^2 \widetilde{f}_D = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix}.$$

Матрице другог извода свих критичних тачака су ранга 2, дакле инвертибилне.

Напомена 1.1.1. Приметимо да смо недегенерисаност критичне тачке дефинисали локално, тј. у карти. Поставља се питање шта ако узмемо неку другу карту, да ли ће то променити недегенерисаност. Одговор је не. Иако $D^2 \widetilde{f}_p$ зависи од локалне карте, недегенерисаност не зависи од избора карте. Да бисмо то видели помоћи ће нам билинеарно пресликавање $H_pf : T_pM \times T_pM \to \mathbb{C}$ дефинисано са

$$H_pf(X_p, Y_p) = X_p(\widetilde{Y}f), \quad X_p, Y_p \in T_pM$$

где је $\widetilde{Y} : M \to TM$ произвољно векторско поље такво да $\widetilde{Y}(p) = Y_p$. H_pf називамо *Хесијаном функције f у тачки p*.

Нека је $\widetilde{X}$ произвољно векторско поље такво да је $\widetilde{X}(p) = X_p$. Тада је

$$X_p(\widetilde{Y}f) - Y_p(\widetilde{X}f) = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_p(f) = df(p)([X, Y]_p) = 0,$$

јер је p критична тачка. Значи,

$$X_p(\widetilde{Y}f) = Y_p(\widetilde{X}f).$$

Лева страна ове једнакости не зависи од вредности векторског поља $\widetilde{X}$ ван тачке p, а десна не зависи од вредности векторског поља $\widetilde{Y}$ ван тачке p, дакле, обе стране зависе од вредности векторских поља $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ само у тачки p, тј. од вектора X_p и Y_p, што значи да је Хесијан добро дефинисан (не зависи од избора раширења $\widetilde{Y}$).

Представимо сада Хесијан у локалним координатама. Пошто је

$$X_p = \sum a_k \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p, \;\; Y_p = \sum b_k \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p \;\text{ и }\; \widetilde{Y} = \sum b_k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

где су $a_k, b_k : M \to \mathbb{R}$ глатке функције, тада важи

$$H_pf(X_p, Y_p) = X_p\Big(\sum_j b_j \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^j}\Big) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x^i \partial x^j}$$

Из линеарне алгебре је познато да, ако фиксирамо базу, свако билинеарно пресликавање је јединствено одређено својом матрицом и да је инвертибилно ако и само ако је и та матрица инвертибилна. Пошто се Хесијан H_pf у локалним координатама изражава преко матрице другог извода функције $\widetilde{f}$, следи да је критична тачка p недегенерисана ако и само ако је Хесијан инвертибилно, (тј. недегенерисано) пресликавање.

H_pf је дефинисан глобално, значи не зависи од карата, па тако и недегенерисаност критичне тачке p не зависи од избора карте.

Приметимо и да је H_pf симетрична билинеарна форма тј.

$$H_pf(X_p, Y_p) = H_pf(Y_p, X_p)$$

па има само реалне сопствене вредности.

Дефиниција 1.1.3. Функција f је *Морсова* ако су све њене критичне тачке недегенерисане.

Пример 1.1.3. Функција висине на торусу је Морсова.

Теорема 1.1.1. Функција f је Морсова ако и само ако је диференцијал df трансверзалан на нулто сечење котангентног раслојења T^*M.

Доказ: Нека је $s : M \to T^*M$ нулто сечење и $M_0 = s(M)$ скуп свих нула ковектора из T^*M. Ако је p произвољна критична тачка, онда је $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ нула пресликавање, тј. $df_p \in M_0$.

Пошто $df : M \to T^*M$ онда $d(df_p) = d^2 f_p : T_pM \to T_{df_p}(T^*M)$, па ако је $\dim M = n$, онда је $d^2 f_p$ недегенерисано ако и само ако је димензија његове слике n. Да је df трансверзалан на нулто сечење, ознака $df \pitchfork M_0$, по дефиницији значи да, ако $df_p \in M_0$ онда важи

$$T_{df_p}(T^*M) \cong T_{df_p}(M_0) + d^2 f_p(T_pM).$$

Ако је $\dim M = n$, онда је и $\dim M_0 = n$, а $\dim T^*M = 2n$, па су и њихове тангентне равни у одговарајућим тачкама тих димензија. Закључујемо, ако је трансверзалност испуњена онда је $\dim d^2 f_p(T_pM) = n$, тј. p је недегенерисана критична тачка. С друге стране, ако је $\dim d^2 f_p(T_pM) = n$, онда треба проверити да су векторски простори $T_{df_p}(M_0)$ и $d^2 f_p(T_pM)$ дисјунктни, па ће онда њихова директна сума бити $2n-$димензиони векторски потпростор од $T_{df_p}(T^*M)$, тј. цео $T_{df_p}(T^*M)$.

Ако је $X_p \in T_pM$ произвољан ненула вектор, дакле $X_p = \frac{d\gamma}{dt}|_{t=0}$, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \gamma(0) = p$, онда је $d^2 f_p(X_p) = \frac{d}{dt} df \circ \gamma|_{t=0}$. Пошто је $d^2 f_p$ недегенерисано, онда је $\widetilde{\gamma} = df \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to T^*M$ неконстантна крива. $df(\gamma(0)) = df(p)$ је нула пресликавање, па постоји неко t тако да не важи $df(\gamma(t)) \in M_0$, па зато $d^2 f_p(X_p) \in T_{df_p}(T^*M) \setminus T_{df_p}(M_0)$. Слично, ни један вектор из $T_{df_p}(M_0)$ не припада $d^2 f_p(T_pM)$. $\square$

Дефиниција 1.1.4. *Индекс критичне тачке p функције f*, ознака $\mathrm{Ind}_f(p)$, је индекс Хесијана H_pf.

Индекс симетричног билинеарног пресликавања је број негативних сопствених вредности. Сваком картом око тачке p одређена је и матрица Хесијана. Све матрице су сличне зато што се база задаје инвертибилном матрицом. Пошто сличне матрице имају исте сопствене вредности, следи да индекс не зависи од карте. Даље, број негативних сопствених вредности пресликавања је управо димензија највећег потпростора домена на коме је то пресликавање негативно дефинитно. У случају Хесијана H_pf то значи $H_pf(X_p, X_p) \lneq 0$, за сваки вектор X_p из негативног потпростора. Значи, $0 \leqslant \mathrm{Ind}_f(p) \leqslant n$.

Пример 1.1.4. Нека је f функција висине на торусу. Тада је

$$\mathrm{Ind}_f(A) = 2,\ \mathrm{Ind}_f(B) = 1,\ \mathrm{Ind}_f(C) = 1 \ \text{и}\ \mathrm{Ind}_f(D) = 0.$$

У наставку ће бити показано како се понашање Морсове функције у околини критичне тачке p може описати помоћу индекса тачке p. То је тзв. Морсова лема, за њен доказ ће нам требати једна помоћна лема.

Лема 1.1.1. Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ функција у конвексној отвореној околини V тачке $0 \in \mathbb{R}^n$, тако да је $f(0) = 0$. Тада постоје $\mathcal{C}^\infty$ функције g_k, $k = \overline{1,n}$ на V тако да

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k g_k(x_1, \ldots, x_n), \quad g_k(0) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(0).$$

Доказ:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \int_0^1 \frac{df(tx_1, \ldots, tx_n)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}(tx_1, \ldots, tx_n) \frac{d(tx_k)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}(tx_1, \ldots, tx_n) x_k dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}(tx_1, \ldots, tx_n) dt \end{aligned} .$$

Дефинишимо функције g_k, $k = \overline{1,n}$ са

$$g_k(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^k}(tx_1, \ldots, tx_n) dt.$$

Пошто $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, онда и $g_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $g_k(0) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(0)$, $k = \overline{1,n}$ па су то тражене функције. $\square$

Теорема 1.1.2. (Морсова лема) Нека је p недегенерисана критична тачка функције f индекса k. Тада постоји локални координатни систем $(y_1, \ldots, y_n)$ у околини U тачке p тако да $y_j(p) = 0$, $j = \overline{1,n}$ и

$$f(y_1, \ldots, y_n) = f(p) - {y_1}^2 - \cdots - {y_k}^2 + {y_{k+1}}^2 + \cdots + {y_n}^2.$$

Доказ: Претпоставимо да је $M = \mathbb{R}^n$, због једноставнијег записа локалних координата и да је p координатни почетак и $f(0) = 0$ (у супротном

извршимо трансформацију координатног система тако да то важи).
На основу леме 1.1.1. постоји околина $V \ni 0$ тако да је

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=1}^{n} x_j g_j(x_1,\ldots,x_n),\ \ g_j(0)=\frac{\partial f}{\partial x^j}(0),\ \ j=\overline{1,n}.$$

Пошто је 0 критична тачка, следи, $g_j(0)=0,\ j=\overline{1,n}$. Сада применимо лему 1.1.1. на функције g_j. Следи, постоје околине $V_j \ni 0$ и функције $h_{ij},\ \ i=\overline{1,n}$ такве да је

$$g_j(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i h_{ij}(x_1,\ldots,x_n),\ \ h_{ij}(0)=\frac{\partial g_j}{\partial x^i}(0),\ \ j=\overline{1,n}.$$

Значи, на пресеку свих V_j околина,$j=\overline{1,n}$ и околине V је

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x_1,\ldots,x_n).$$

Нека је $H_{ij}(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{2}(h_{ij}+h_{ji})$. Тада $H_{ij}=H_{ji}$ и

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j H_{ij}(x_1,\ldots,x_n). \tag{1.1.1}$$

Сада два пута диференцирамо функцију f, па је $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)=2H_{ij}(0)$, тј.

$$\Big[H_{ij}\Big]_{i,j=\overline{1,n}}=\Big[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^i \partial x^j}(\varphi(p))\Big]_{i,j=\overline{1,n}}$$

Значи, матрица $\Big[H_{ij}\Big]$ је симетрична и недегенерисана, јер је 0 недегенерисана критична тачка, па је $det\Big[H_{ij}\Big]\neq 0$. Зато претпоставимо да је $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x^1}(0)\neq 0$. (Ако није, извршимо линеарну трансформацију координатног система). Следи и $H_{11}(0)\neq 0$. Даље, H_{11} је непрекидна функција, па постоји околина U на којој је $H_{11}\neq 0$, тј. сталног знака. Претпоставимо да је $H_{11}<0$.

Да се функција f може написати у облику

$$f(y_1,\ldots,y_n)=-{y_1}^2-\cdots-{y_k}^2+{y_{k+1}}^2+\cdots+{y_n}^2 \tag{1.1.2}$$

показаћемо индукцијом по димензији простора n.

Нека је $n=1$. Функција f задовољава услове (1.1.1), тј. $f(x)=x^2H(x)$, затим, $f(0)=0, f'(0)=0$ и $f''(0)<0$, па постоји довољно мала околина

U на којој је $f(x) = cx^2,\ c < 0$. Сада уведемо нови координатни систем $(u) = (\sqrt{-c}x)$, па је $f(u) = -u^2$, тј. важи једначина (1.1.2).

Претпоставимо да (1.1.1) важи за $n-1$ и докажимо за n.

Прво уводимо нови координатни систем, тј. нову базу $(y_1, \ldots, y_n)$ на следећи начин:

$$y_1 = \sqrt{-H_{11}}\Big(x_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i \frac{H_{1i}}{H_{11}}\Big), \quad y_k = x_k, \ \ k = \overline{2,n}.$$

Тачније, матрица преласка са базе $(x_1, \ldots, x_n)$ на базу $(y_1, \ldots, y_n)$ је

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-H_{11}} & \frac{H_{12}}{H_{11}} & \cdots & \frac{H_{1n}}{H_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Матрица је инвертибилна па је $(y_1, \ldots, y_n)$ заиста нови координатни систем. Следи,

$$y_1^2 = -H_{11}x_1^2 - 2\sum_{i=2}^{n} x_1 x_i H_{1i} - (\sum_{i=2}^{n} x_i H_{1i})^2 \frac{1}{H_{11}},$$

па на основу (1.1.1) важи:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = -y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} x_i x_j H_{ij} - (\sum_{i=2}^{n} x_i H_{1i})^2 \frac{1}{H_{11}}.$$

Дефинишимо функцију

$$F(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=2}^{n} x_i x_j H_{ij} - (\sum_{i=2}^{n} x_i H_{1i})^2 \frac{1}{H_{11}}.$$

На основу индуктивне хипотезе функцију F можемо написати у облику:

$$F(y_2, \ldots, y_n) = -{y_2}^2 - \cdots - {y_k}^2 + {y_{k+1}}^2 + \cdots + {y_n}^2.$$

Пошто је $f(y_1, \ldots, y_n) = -y_1^2 + F(y_2, \ldots, y_n)$, следи

$$f(y) = -{y_1}^2 - \cdots - {y_k}^2 + {y_{k+1}}^2 + \cdots + {y_n}^2.$$

□

Напомена 1.1.2. Морсову лему можемо доказати и применом Картанове формуле [1] на фамилију диференцијалних форми $\alpha_t : M \to T^*M$, тј:

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha_t = \phi_t^*(d(X\lrcorner\alpha_t) + X\lrcorner d\alpha_t + \frac{\partial\alpha_t}{\partial t}).$$

Претпоставимо да је $M = \mathbb{R}^n$, недегенерисана критична тачка p координатни почетак и $f(0) = 0$. Дакле $df(0) = 0$ и матрица $d^2f(0)$ је недегенерисана. Нека су $\alpha_0(x) = d^2f(0)(x,\cdot)$ и $\alpha_1(x) = df(x)$ диференцијалне форме. Дефинишимо фамилију $\alpha_t = \alpha_0 + t(\alpha_1 - \alpha_0) : M \to T^*M$. Тада фамилија дифеоморфизама $\phi_t, \phi_0 = \mathrm{Id}$ задовољава $\phi_t^*\alpha_t = \alpha_0$ ако важи $\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha_t = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\phi_t^*\alpha_t - \alpha_0}{t} = 0$. Даље, ако је $g(x) = \frac{1}{2}d^2f(0)(x,x)$, онда је $dg = \alpha_0$ па важи

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha_t = \phi_t^*(d(X\lrcorner\alpha_t) + X\lrcorner d\alpha_t + \alpha_1 - \alpha_0) = \phi_t^*d(X\lrcorner\alpha_t + f - g) = 0.$$

Решавањем ове једначине у малој околини нуле U добија се дифеоморфизам ϕ_1, који задовољава $\phi_1^*\alpha_1 = \alpha_0$. Дакле, у карти (ϕ_1, U) је $dg = \alpha_0 = \alpha_1 = df$, тј. $f(x) = \frac{1}{2}d^2f(0)(x,x)$. $\square$

Пример 1.1.5. Применимо резултате Морсове леме на функцију висине на торусу. $\mathrm{Ind}_f(A) = 2$ и $f(A) = 2a + 2b$ следи у некој околини тачке A постоји карта тако да је $f(x,y) = 2a+2b-x^2-y^2$. Слично, локални запис у околини тачака B, C и D је, редом, $f(x,y) = 2a-x^2+y^2$, $f(x,y) = 2b-x^2+y^2$, $f(x,y) = x^2+y^2$.

Последица 1.1.1. Све критичне тачке Морсове функције су изоловане.

Доказ: На основу Морсове леме постоји карта око критичне тачке p у којој се функција може написати у облику:

$$f(y_1,\dots,y_n) = f(p) - {y_1}^2 - \dots - {y_k}^2 + {y_{k+1}}^2 + \dots + {y_n}^2.$$

Значи:

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) = \begin{cases} -2y_j, & j \leqslant k; \\ \;\;\, 2y_j, & k < j \leqslant n \end{cases}$$

Око тачке p бирамо околину у којој је бар једно $y_j \neq 0$, у тој околини нема других критичних тачака. $\square$

Последица 1.1.2. Ако је M компактна многострукост, број критичних тачака Морсове функције је коначан.

[1]Општи облик Картанове формуле гласи $\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha = \phi_t^*(d(X\lrcorner\alpha) + X\lrcorner d\alpha)$, при чему је α к-форма, $\phi_t : M \to M$, фамилија дифеоморфизама која задовољава: $X(\phi_t(x)) = \frac{d}{dt}\phi_t(x)$ и $\lrcorner$ унутрашњи производ. Погледати [3].

Доказ: Претпоставимо супротно, тј. да постоји бесконачно много критичних тачака Морсове фукције. Око сваке критичне тачке бирамо околину у којој нема других критичних тачака. Нека се покривач многострукости M састоји од тих околина а све друге околине нека не садрже ни једну критичну тачку. Овај покривач нема коначан потпокривач. $\square$

Следећа теорема показује егзистенцију Морсових функција.

Теорема 1.1.3. Нека је M компактна многострукост без границе. Скуп свих Морсових функција је отворен и свуда густ подскуп функција из скупа $\mathcal{C}^2(M)$.

Доказ: Нека је f Морсова функција и

$$v = \{h \in \mathcal{C}^2(M) | \|h - f\|_{\mathcal{C}^2} < \varepsilon\}$$

отворен скуп у $\mathcal{C}^2$ топологоји. Значи, ако $h \in v$ онда важи

$$\sup_{x\in M} |h(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

$$\sup_{x\in M,\varphi} \sup_{i} \frac{\partial(\widetilde{h} - \widetilde{f})}{\partial x^i}(\varphi(x)) < \varepsilon,$$

$$\sup_{x\in M,\varphi} \sup_{i,j} \frac{\partial^2(\widetilde{h} - \widetilde{f})}{\partial x^i \partial x^j}(\varphi(x)) < \varepsilon,$$

где се супремум узима и по свим картама. Зато важи и $\|dh - df\|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon$. Пошто је f Морсова онда је df трансверзалан на нулто сечење. На основу леме 4.3.4. следи да је за довољно мало ε и диференцијал dh трансверзалан на нулто сечење, тј. h је Морсова, па је отворен скуп v, скуп Морсових функција. Тиме је доказан први део.

Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ произвољна $\mathcal{C}^2$ функција. Показаћемо да у њеној произвољно малој $\mathcal{C}^2-$околини постоји Морсова функција. Прво уложимо M у неко $\mathbb{R}^k$ (то је могуће на основу Витнијеве теореме [3]). Скуп

$$(\mathbb{R}^k)^* = \{L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} | \ L \text{ је линеарно}\}$$

је $\mathcal{C}^\infty$ глатка многострукост [2]

Покажимо да су скоро све функције $f + L$ Морсове. Нека је

$$\sum = \{(x, L) \in M \times (\mathbb{R}^k)^* | \ x \text{ је критична тачка за } f + L\}.$$

[2]Ако је M глатка многострукост класе $\mathcal{C}^r$ и $f : M \to N$ хомеоморфизам, онда је и N глатка многострукост класе $\mathcal{C}^r$.

Важи $(x, L) \in \sum$ ако и само ако $d(f+L)(x) = (df + dL)(x) = df(x) + L = 0$ тј. ако и само ако $L = -df(x)$. Значи,

$$\sum = \{(x, -df(x)) | x \in M\},$$

па је $\sum$ $\mathcal{C}^\infty$ глатка многострукост [3]. Нека је

$$\pi : \sum \to (\mathbb{R}^k)^*, \quad \pi(x, L) = L.$$

Пројекција π је глатко пресликавање, па на основу Сардове теореме [3] скуп свих критичних вредности пресликавања π је мере нула. Локалне координате на M дефинишу и локалне координате на $\sum$, па се π може изразити и као $\pi(x_1 \cdots x_n) = -df(x_1 \cdots x_n)$. L је критична вредност за π ако и само ако је $-df(x)$ критична вредност за π, за неко x које је критична тачка за $f + L$. Даље, $-df(x)$ је критична вредност за π ако и само ако је $d^2\pi(x) = -d^2f(x)$ дегенерисано пресликавање, тј. у локалним координатама, ако је матрица $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j})$ сингуларна. Пошто је $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j})$, значи $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j})$ је сингуларна ако и само ако је $d^2(f+L)(x)$ дегенерисано, за x које је критична тачка за $f + L$. Коначно, L је критична вредност за π ако и само ако је x дегенерисана критична тачка за $f+L$. Скоро сва L нису критична (Сардова теорема), значи скоро сва $d^2(f+L)(x)$ нису сингуларна, за критичну тачку x тј. скоро све функције $f + L$ су Морсове. $\square$

Последица 1.1.3. На свакој компактној многострукости без границе постоји Морсова функција.

1.2 Критичне тачке и хомотопски тип

Нека је M глатка многострукост димензије n, $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција и

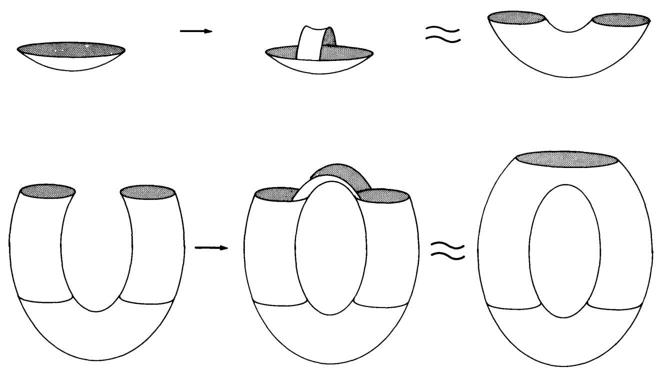
$$M^c = f^{-1}((-\infty, c]) = \{x | f(x) \leqslant c\}$$

Класична Морсова теорија се заснива на проучавању хомотопског типа простора M^c за различите c. То ћемо илустровати на примеру торуса у Еуклидском простору и функције висине на њему. Када c расте посматрамо како се хомотопски тип од M^c мења.

Запажамо да када c узима вредности између две критичне вредности тип остаје исти, а проласком кроз четири критичне вредности тип се

[3] Ако је M многострукост класе $\mathcal{C}^r$ и $f \in \mathcal{C}^k(M), k \geqslant 0$, тада је график функције f многострукост класе $\mathcal{C}^r$.

мења и то на следећи начин:
-Ако је $c < 0$ онда је $M^c = \emptyset$;
-Када c „прође” нулу M^c постаје дводимензиони диск;
-Када c прође другу критичну вредност $(2b)$ M^c се мења лепљењем једне траке на супротне ивице диска;
-Када c прође трећу критичну вредност на M^c лепимо још једну траку на супротне ивице;
-На крају, када c пролази и четврту критичну тачку на границу постојећег M^c лепимо дводимензиони диск, тј. компактификујемо га једном тачком.



Слика 1.2: Пролазак кроз критичне тачке

Претходне идеје ће бити уопштене и детаљно доказане у следећим теоремама.

Теорема 1.2.1. Нека је $f^{-1}([a,b])$ компактан скуп, без критичних тачака. Тада:

1. M^a је дифеоморфно са M^b.
2. M^a је деформациони ретракт од M^b.
3. Постоји дифеоморфизам F тако да следећи дијаграм комутира

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}\{a\} \times [a,b] & \xrightarrow{F} & f^{-1}([a,b]) \\ \pi \searrow & \circlearrowright & \big\downarrow f \\ & & [a,b] \end{array}$$

Доказ: Пошто је M глатка многострукост, на њој постоји Риманова метрика, тј. постоји фамилија скаларних производа $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на T_pM, која глатко зависи од $p \in M$. Она дефинише векторско поље $\bigtriangledown f : M \to TM$ са

$$\langle X_p, \nabla f(p) \rangle = \frac{d}{dt} f \circ \gamma|_{t=0}$$

при чему је $\gamma : \mathbb{R} \to M$ крива таква да је $\gamma(0) = p$ и $\frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} = X_p$.
Дефинишимо функцију $\rho : M \to \mathbb{R}$ са

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\langle \nabla f(p), \nabla f(p) \rangle}, & x \in U; \\ 0, & x \in V^c \end{cases}$$

при чему је $f^{-1}([a,b]) \subset U \subset \overline{U} \subset V$, V компактан, а на $V \setminus U$ дефинишемо функцију тако да буде глатка.

Дефинишимо векторско поље $X : M \to TM$ са

$$X(p) = \rho(p) \nabla f(p).$$

Дакле X ишчезава на V^c, па има компактан носач, па на основу теореме 4.2.1. X генерише једнопараметарску фамилију дифеоморфизама $\phi_t : M \to M$ тако да

$$\frac{d\phi_t}{dt}(p) = X(\phi_t(p)), \;\; \phi_0(p) = p, \;\; p \in M.$$

Фиксирајмо $p \in M$.
Нека је функција $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $\tau(t) = f(\phi_t(p))$. Тада је

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt} f \circ \phi_t(p) =& \langle \frac{d\phi_t}{dt}(p), \nabla f(\phi_t(p)) \rangle = \langle X(\phi_t(p)), \nabla f(\phi_t(p)) \rangle \\ =& \rho(\phi_t(p)) \langle \nabla f(\phi_t(p)), \nabla f(\phi_t(p)) \rangle \\ =& \begin{cases} 1, & \phi_t(p) \in U; \\ 0, & \phi_t(p) \in V^c \end{cases} \end{aligned}$$

Значи, ако $\phi_t(p) \in f^{-1}([a,b])$, тј. $a \leqslant f(\phi_t(p)) \leqslant b$ онда је $\frac{d\tau}{dt}(p) = 1$. Следи, за сваку тачку $p \in M$ такву да је $a \leqslant f(\phi_t(p)) \leqslant b$ је $f(\phi_t(p)) = \tau(t) = t + c(p)$, а константу $c(p)$ одређујемо на основу услова $\phi_0 = \mathrm{Id}_M$. Следи $f(\phi_0(p)) = 0 + c(p)$ тј. $c(p) = f(p)$. Коначно,

$$f(\phi_t(p)) = t + f(p).$$

1. Посматрајмо рестрикцију дифеоморфизма

$$\phi_{b-a} : M^a \to M^b$$

Ако $x \in M^a$ тј ако је $f(x) \leqslant a$ онда је $f(\phi_{b-a}(x)) = b - a + f(x) \leqslant b$ па $\phi_{b-a}(x) \in M^b$, тј. кодомен је заиста M^b. Даље, ϕ_{b-a} је дифеоморфизам па је 1-1. Покажимо да је НА. Нека је $x \in M^b$ произвољан. Треба показати да $\phi_{b-a}^{-1}(x) \in M^a$. Важи:

$$f(\phi_{b-a}^{-1}(x)) = f(\phi_{a-b}(x)) = a - b + f(x) \leqslant a - b + b = a.$$

Дакле, јесте и НА, па је и сама рестрикција један дифеоморфизам између M^a и M^b.
2. Дефинишимо пресликавање $r : M^b \to M^a$ са

$$r(x) = \begin{cases} x, & x \in M^a; \\ \phi_{a-f(x)}(x), & x \in M^b \setminus M^a. \end{cases}$$

Ако $x \in M^b \setminus M^a$ онда $f(\phi_{a-f(x)}(x)) = a - f(x) + f(x) = a$. Дакле $\phi_{a-f(x)}(x) \in M^a$, тј. кодомен је заиста M^a. Пошто је $r \circ i = \mathrm{Id}_{M^a}$ значи r је ретракција. Дефинишимо пресликавање $H : I \times M^b \to M^a$ са

$$H(t,x) = \begin{cases} x, & x \in M^a; \\ \phi_{t(a-f(x))}(x), & x \in M^b \setminus M^a. \end{cases}$$

Ако $x \in M^b \setminus M^a$ и $t \in I = [0,1]$ онда је

$$f(\phi_{t(a-f(x))}(x)) = t(a - f(x)) + f(x) \leqslant a - f(x) + f(x) = a.$$

Дакле $\phi_{t(a-f(x))}(x) \in M^a$, тј. кодомен је заиста M^a. Ако је $f(x) = a$ онда је $\phi_{t(a-f(x))}(x) = \phi_0(x) = x$ па је H непрекидно. Даље,

$$H(1,x) = \begin{cases} x, & x \in M^a; \\ a, & x \in M^b \setminus M^a \end{cases} = i \circ r(x) \quad \text{и} \quad H(0,x) = x = \mathrm{Id}_{M^b}(x),$$

па је H хомотопија тј. $i \circ r \simeq \mathrm{Id}_{M^b}$. Дакле r је деформациона ретракција.
3. Дефинишимо пресликавање $F : f^{-1}(a) \times [a,b] \to f^{-1}([a,b])$ са

$$F(x,t) = \phi_{t-a}(x).$$

По услову теореме $[a,b]$ је скуп регуларнох вредности, па је $f^{-1}(a)$ глатка многострукост димензије $n-1$ и $f^{-1}([a,b])$ глатка многострукост димензије n (леме 4.3.1. и 4.3.2.). Ако $t \in [a,b]$ и $f(x) = a$ онда је $f(\phi_{t-a}(x)) = t - a + f(x) = t \in [a,b]$. Значи кодомен је заиста $f^{-1}([a,b])$.
Приметимо да су домен и кодомен исте димензије, n.
-F је НА:
Нека је $x \in f^{-1}[a,b]$ произвољан. Тада,

$$F(\phi_{a-f(x)}(x), f(x)) = \phi_{f(x)-a}(\phi_{a-f(x)}(x)) = x$$

и $f(\phi_{a-f(x)}(x)) = a - f(x) + f(x) = a$, значи $(\phi_{a-f(x)}(x), f(x))$ је заиста у домену пресликавања F.
-F је 1-1:
Нека је $F(x_1,t_1) = F(x_2,t_2)$, тј. $\phi_{t_1-a}(x_1) = \phi_{t_2-a}(x_2)$. Онда је и $f(\phi_{t_1-a}(x_1)) = f(\phi_{t_2-a}(x_2))$, тј. $t_1 - a + f(x_1) = t_2 - a + f(x_2)$, и пошто $x_1, x_2 \in f^{-1}(a)$, следи $t_1 = t_2$. Сада је $\phi_{t_1-a}(x_1) = \phi_{t_1-a}(x_2)$, а ϕ_{t_1-a} је дифеоморфизам, па и 1-1,

следи $x_1 = x_2$.
-ϕ_t је фамилија дифеоморфизама, па су глатка пресликавања, па је F глатка бијекција.
-$DF_{(x,t)}$ је инвертибилна матрица:
На основу дефиниције диференцијала је:

$$DF_{(x,t)} : T_{(x,t)}(f^{-1}(a) \times [a,b]) \to T_{F(x,t)} f^{-1}[a,b],$$

$$DF_{(x,t)}(\xi,\eta) = D(\phi_{t-a}(x))(\xi,\eta) = d\phi_{t-a}(x)(\xi) + \eta \frac{d\phi_{t-a}}{dt}(x)$$

(Подсетимо се: $T_{(x,t)}(f^{-1}(a) \times [a,b]) \cong T_x f^{-1}(a) \times T_t[a,b]$ и $T_t[a,b] \cong \mathbb{R}$; дакле $\xi \in T_x f^{-1}(a)$ и $\eta \in \mathbb{R}$). Даље је

$$\frac{d\phi_{t-a}}{dt}(x) = X(\phi_{t-a}(x)) = \frac{1}{\|\nabla f(\phi_{t-a}(x))\|^2} \nabla(f(\phi_{t-a}(x))) \neq \overrightarrow{0}.$$

Последња једнакост важи зато што $\phi_{t-a}(x) \in f^{-1}[a,b]$. Тачније, $f(\phi_{t-a}) = t - a + f(x) = t - a + a = t$, а $t \in [a,b]$. На основу леме 4.2.1. је

$$\nabla f(\phi_{t-a}(x)) \perp T_{\phi_{t-a}(x)} f^{-1}(t),$$

па

$$\frac{d\phi_{t-a}}{dt}(x) \in (T_{\phi_{t-a}(x)} f^{-1}(t))^{\perp}$$

(Приметимо да је овај ортогонал димензије 1, зато што $\dim T_{\phi_{t-a}(x)} f^{-1}(t) = \dim f^{-1}(t) = n-1$, јер је t регуларна вредност.) Даље, $\phi_{t-a} : f^{-1}(a) \to f^{-1}(t)$ је дифеоморфизам па је

$$d\phi_{t-a}(x) : T_x(f^{-1}(a)) \to T_{\phi_{t-a}(x)} f^{-1}(t)$$

бијекција. Значи, $\frac{d\phi_{t-a}}{dt}(x)$ разапиње $(T_{\phi_{t-a}(x)} f^{-1}(t))^{\perp}$, а $d\phi_{t-a}(x)$ разапиње $T_{\phi_{t-a}(x)} f^{-1}(t)$, па $DF_{(x,t)}$ разапиње $T_{F(x,t)} f^{-1}[a,b]$, тј. $DF_{(x,t)}$ је инвертибилно пресликавање.
Коначно, F је глатка бијекција, $DF_{(x,t)}$ инвертибилна матрица, па на основу теореме о инверзној функцији следи да је и F^{-1} глатко, тј. F је дифеоморфизам. $\square$

Последица 1.2.1. Нека је M компактна многострукост, $\partial M = A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$ и нека постоји глатка функција $f : M \to \mathbb{R}$ која нема критичних тачака и нека је $f^{-1}(\{0\}) = A$, $f^{-1}(\{1\}) = B$. Тада је $M \cong A \times [0,1] \cong B \times [0,1]$.

Доказ: Важи $f^{-1}([0,1]) \cong M$, даље теорема. $\square$

Последица 1.2.2. ($Reeb$–ова теорема) Ако је M компактна многострукост без границе и ако постоји Морсова функција $f : M \to \mathbb{R}$ која има тачно две критичне тачке, онда је M хомеоморфна сфери $\mathbb{S}^n$.

Доказ: Нека су p и q недегенерисане критичне тачке. M је компактна многострукост, па f достиже минимум и максимум. Пошто је у тачкама екстремних вредности df нула оператор, онда су $f(p)$ и $f(q)$ минимум и максимум, тј.

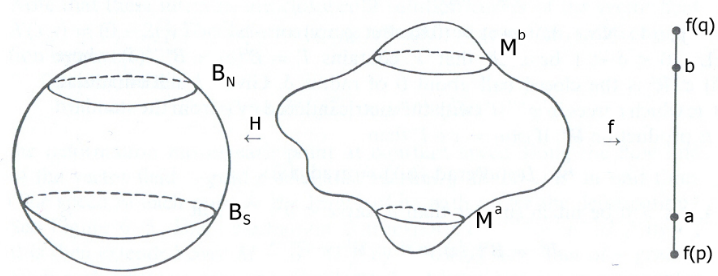
$$M = f^{-1}([f(p), f(q)]).$$

На основу Морсове леме око тачке p постоји околина U и координатни систем $(y_1, \ldots, y_n)$ тако да је $y_k(p) = 0,\ k = \overline{1, n}$ и

$$f(y_1, \ldots, y_n) = f(p) + {y_1}^2 + \cdots + {y_n}^2$$

Значи, постоје $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ тако да за свако $y = (y_1, \ldots, y_n) \in M^a$, важи: $|f(y) - f(p)| = (y_1^2 + \ldots + y_n^2) \leqslant \varepsilon$ тј. M^a је дифеоморфан затвореном диску полупречника ε, и да за свако $y \in f^{-1}(a)$ важи: $|f(y) - f(p)| = \varepsilon$, тј. ∂M^a је дифеоморфна сфери $\mathbb{S}^{n-1.}$ Слично за тачку q постоји $b \in \mathbb{R}$, тако да је $\overline{(M^b)^c}$ дифеоморфан затвореном диску, па је на основу последице 1.2.1.

$$f^{-1}([a, b]) \cong f^{-1}(b) \times [a, b] \cong \mathbb{S}^{n-1} \times [a, b].$$



Слика 1.3: Сфера и многострукост

Нека су B_N и B_S дисјунктне, затворене околине северног пола N и јужног пола S сфере $\mathbb{S}^n$, и дифеоморфне са D^n и нека је $C = \mathbb{S}^n \setminus \mathrm{Int}(B_N \cup B_S)$ (слика). Значи, $C \approx \mathbb{S}^{n-1} \times I$ и $\partial C = \partial B_N \cup \partial B_S$. Конструишимо хомеоморфизам између $M = M^a \cup f^{-1}([a, b]) \cup M^b$ и $B_N \cup B_S \cup C$. Прво, нека је

$$h_0 : \overline{(M^b)^c} \to B_N$$

дифеоморфизам. Знамо да је $\partial M^b = \partial (M^b)^c$, па је на основу теореме о инверзној функцији

$$h_0\Big|_{\partial M^b} : \partial M^b \to \partial B_N.$$

Даље, проширимо $h_0\Big|_{\partial M^b}$ до дифеоморфизма

$$h : \partial M^b \times [a,b] \to \partial B^N \times [a,b].$$

Сада можемо да проширимо h_0 до хомеоморфизма

$$h_1 : \overline{(M^b)^c} \cup f^{-1}([a,b]) \to B_N \cup \partial B_N \times [a,b],$$

$$h_1(x) = \begin{cases} h_0(x), & x \in \overline{(M^b)^c}; \\ h(x), & x \in f^{-1}([a,b]). \end{cases}$$

Проширимо $h_1\Big|_{\partial M^a} : \partial M^a \to \partial B_S$ радијално до хомеоморфизма

$$h_2 : M^a \to B_S.$$

То је заправо проширење хомеоморфизма $g : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ до

$$\widetilde{g} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n \quad \widetilde{g}(x) = \begin{cases} |x| g\Big(\dfrac{x}{|x|}\Big), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

И коначно тражени хомеоморфизам $H : M \to \mathbb{S}^n$ дефинишемо са:

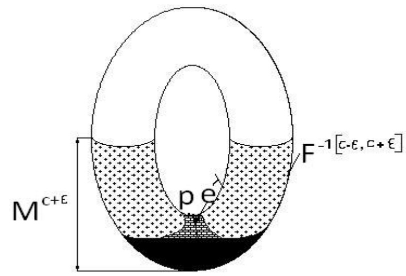
$$H(x) = \begin{cases} h_2(x), & x \in M^a; \\ h_1(x), & x \in \overline{(M^b)^c} \bigcup f^{-1}([a,b]) \end{cases}$$

$\square$

Напомена 1.2.1. Није увек могуће конструисати дифеоморфизам између M и $\mathbb{S}^n$. John Milnor је 1956. године нашао пример многострукости која је хомеоморфна, али није дифеоморфна сфери $\mathbb{S}^7$. Такве многострукости се називају егзотичним сферама. Погледати [7].

Теорема 1.2.2. Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција, $p \in M$ недегенерисана критична тачка индекса λ и $f(p) = c$. Претпоставимо да за неко $\varepsilon > 0$ важи да је $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ компактан скуп који нема других критичних тачака осим тачке p. Тада је $M^{c+\varepsilon}$ хомотопно са $M^{c-\varepsilon}$ са залепљеном e^λ ћелијом, $M^{c-\varepsilon} \cup_\varphi e^\lambda$ [4].

Доказ: Доказ ће бити изведен за специјалан случај, функцију висине на торусу. Идеја је да се уведе помоћно пресликавање F на које ћемо применити теорему 1.2.1. Скуп $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ неће имати критичних тачака, то је тачкасти део на слици, док ће скуп $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ садржати



Слика 1.4: Многострукост M

скуп $M^{c-\varepsilon}$, који је на слици тамно сиве боје, и скуп хомотопан e^λ ћелији, пругасти део на слици.

На основу Морсове леме око тачке p постоји околина U и координатни систем $(y_1, \ldots, y_n)$ такав да је $y_k(p) = 0, \;\; k = \overline{1,n}$ и

$$f(y_1, \ldots, y_n) = f(p) - {y_1}^2 - \cdots - {y_\lambda}^2 + {y_{\lambda+1}}^2 + \cdots + {y_n}^2.$$

Изаберимо $\varepsilon > 0$ тако да:
1. $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ је компактан скуп и осим p нема других критичних тачака функције f.
2. скуп $\{(y_1, \ldots y_n) \Big| \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leqslant 2\varepsilon\}$ је садржан у скупу $(y_1, \ldots, y_n)(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Нека је

$$e^\lambda = \{(y_1, \ldots, y_n) \Big| \sum_{k=1}^{\lambda} y_k^2 \leqslant \varepsilon, \;\; y_{\lambda+1} = \ldots y_n = 0\}.$$

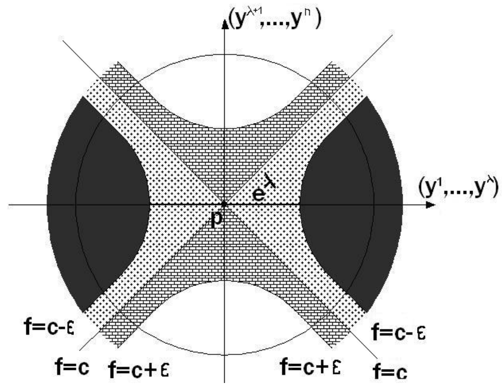
Приметимо да је $e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon}$ граница од e^λ, што значи да је e^λ залепљен за $M^{c-\varepsilon}$.

Покажимо да је $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ деформациони ретракт од $M^{c+\varepsilon}$.

Нека је $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^\infty$ функција која задовољава:

$$\begin{aligned}
&\mu(0) > \varepsilon,\\
&\mu(r) = 0, r \geqslant 2\varepsilon,\\
&-1 < \mu'(r) \leqslant 0, r \in (-2\varepsilon, 2\varepsilon),\\
&\mu(r) > 0, r \in (-2\varepsilon, 2\varepsilon).
\end{aligned}$$

[4] e^λ ћелија је тополошки простор хомеоморфан λ–димензионом затвореном диску D, а граница $\dot{e}^\lambda$ је хомеоморфна сфери. У општем случају, лепљење је непрекидно пресликавање $\varphi : \dot{e}^\lambda \to X$, а $X \cup_\varphi e^\lambda$ је количник простор $X \cup e^\lambda /_{x \sim \varphi(x), x \in \dot{e}^\lambda}$. Дакле, граница ћелије e^λ припада скупу $M^{c-\varepsilon}$.



Слика 1.5: Многострукост M у околини тачке p

Дефинишимо функцију $F : M \to \mathbb{R}$ тако да се поклапа са f ван околине U, а на околини U нека је:

$$F = f - \mu(y_1^2 + \ldots + y_\lambda^2 + 2y_{\lambda+1}^2 + \ldots + 2y_n^2).$$

Пошто су f и μ глатке функције и $\mu(r) = 0, r \geqslant 2\varepsilon$, онда је и F глатка. Уведимо и функције $\xi, \eta : U \to [0, \infty)$ са

$$\xi = y_1^2 + \ldots + y_\lambda^2$$
$$\eta = y_{\lambda+1}^2 + \ldots + y_n^2.$$

Значи,

$$e^\lambda = \{q \in M \mid \xi(q) \leqslant \varepsilon, \eta(q) = 0\}$$
$$F = f - \mu(\xi + 2\eta).$$

Следи, f и F се разликују само на скупу $\{\xi + 2\eta \leqslant 2\varepsilon\}$. На околини U важи $f = c - \xi + \eta$, и $F = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$. Наставак доказа биће подељен у неколико корака.

Корак 1: $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) = f^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$
Доказ: Ако је $\xi + 2\eta > 2\varepsilon$ онда је $F = f$; а ако је $\xi + 2\eta \leqslant 2\varepsilon$ онда је $f = c - \xi + \eta \leqslant c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leqslant c + \varepsilon$. Следи:
$\subseteq$: Ако $x \in F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$ онда и $x \in f^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$;
$\supseteq$: Ако $x \in f^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$ онда $f(x) \leqslant c + \varepsilon$; па и $F + \mu(\xi + 2\eta) \leqslant c + \varepsilon$, тј. $F \leqslant c + \varepsilon - \mu(\xi + 2\eta) \leqslant c + \varepsilon$, јер је $\mu \geqslant 0$.

Корак 2: Критичне тачке за f и F се поклапају.
Доказ: Посматрајмо само на скупу $\{\xi + 2\eta \leqslant 2\varepsilon\}$, јер се ту разликују функције f и F. На овом скупу p је једина критична тачка функције f. Даље је

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} < -1 + 1 = 0,$$

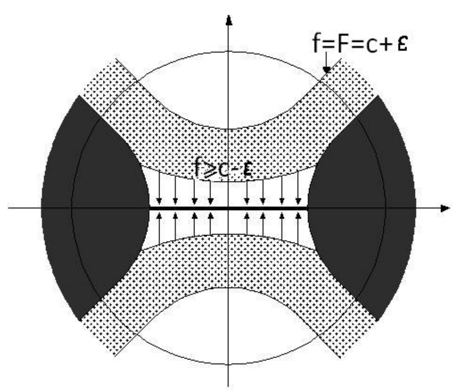
$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \geqslant 1 - 0 = 1.$$

Пошто је $dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta$ следи dF је нула ковектор ако и само ако су $d\xi$ и $d\eta$ нула ковектори. $d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial \xi}{\partial y_\lambda} dy_\lambda = 2y_1 dy_1 + \ldots + 2y_\lambda dy_\lambda$ Значи, $d\xi$ је нула ковектор само у тачки p и слично $d\eta$, па је p једина критична тачка за F.

Корак 3: $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ нема ни једну критичну тачку функције F.
Доказ: Ако је $x \in F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ тј, $c-\varepsilon \leqslant F(x) \leqslant c+\varepsilon$ онда је на основу првог корака $f(x) \leqslant c+\varepsilon$ и $f = F + \mu(\xi + 2\eta) \geqslant c - \varepsilon$, јер је $\mu \geqslant 0$. Значи,$F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \subseteq f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, па је једина могућа критична тачка p. Али, $F(p) = f(p) - \mu(0) < c - \varepsilon$, па p не припада скупу $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$.

Корак 4: $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ је деформациони ретракт од $M^{c+\varepsilon}$.
Доказ: F је глатка функција па је $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ затворен. Пошто је садржан у компакту $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ онда је и сам компактан. На основу претходног корака нема критичних тачака, па је на основу теореме 1.2.1. $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ деформациони ретракт од $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$.

Означимо скуп $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon])$ са $M^{c-\varepsilon} \cup H$, где је H затворење скупа $F^{-1}((-\infty, c-\varepsilon]) \backslash M^{c-\varepsilon}$. На слици је скуп H означен стрелицама, скуп $M^{c-\varepsilon}$ је сиве боје, а $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ је тачкаст.



Слика 1.6: Многострукост M у околини тачке p

Корак 5: $e^\lambda \subseteq H$.
Доказ: Ако $q \in e^\lambda$ онда $\xi + 2\eta \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon$ па $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$. Значи, F опада дуж координатних оса $y^1, \ldots, y^\lambda$.
Даље, $\xi(p) = \eta(p) = 0$, а $\xi(q) \geqslant 0$, па следи $F(q) \leqslant F(p) = f(p) - \mu(0) < c - \varepsilon$.
И због $f(q) = c - \xi + \eta \geqslant c - \varepsilon$ важи $q \in \overline{F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon] \backslash M^{c-\varepsilon}}$.

Корак 6: $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ је деформациони ретракт од $M^{c-\varepsilon} \cup H$.
Доказ: Дефинишимо пресликавање $r : M^{c-\varepsilon} \cup H \to M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$

на U :

$$r(y_1,\ldots,y_n)=\begin{cases}(y_1,\ldots,y_\lambda,0,\ldots,0), & \xi\leqslant\varepsilon;\\ (y_1,\ldots,y_\lambda,s_0y_{\lambda+1},\ldots,s_0y_n), & \varepsilon<\xi\leqslant\eta+\varepsilon;\\ (y_1,\ldots,y_n), & \eta+\varepsilon<\xi\end{cases}$$

ван $U : r=\mathrm{Id}$,
при чему је $s_t=t+(1-t)\sqrt{\frac{\xi-\varepsilon}{\eta}},\ \ s_t\in[0,1]$.
$r|_{e^\lambda}=\mathrm{Id}_{e^\lambda}$, па је r ретракција.
Сада дефинишимо $h: I\times M^{c-\varepsilon}\cup H\to M^{c-\varepsilon}\cup H$ на следећи начин
на U :

$$h(t,y_1,\ldots,y_n)=\begin{cases}(y_1,\ldots,y_\lambda,ty_{\lambda+1},\ldots,ty_n), & \xi\leqslant\varepsilon;\\ (y_1,\ldots,y_\lambda,s_ty_{\lambda+1},\ldots,s_ty_n), & \varepsilon<\xi\leqslant\eta+\varepsilon;\\ (y_1,\ldots,y_n), & \eta+\varepsilon<\xi;\end{cases}$$

ван U :

$$h(t,y)=y.$$

Важи: $h(0,\cdot)=i\circ r$; $h(1,\cdot)=\mathrm{Id}$, и пошто је непрекидно, следи да је h хомотопија, тј. $i\circ r\simeq\mathrm{Id}$ и r је деформациона ретракција.

Дакле, $M^{c-\varepsilon}\cup e^\lambda$ је деформациони ретракт од $M^{c-\varepsilon}\cup H=F^{-1}(-\infty,c-\varepsilon]$ који је деформациони ретракт од $M^{c+\varepsilon}$, па је $M^{c-\varepsilon}\cup e^\lambda$ деформациони ретракт од $M^{c+\varepsilon}$. □

Теорема 1.2.3. Нека је $f^{-1}(c)=\{p_1,\ldots,p_k\}$, где су $p_1,\ldots,p_k$ недегенерисане критичне тачке са индексима редом $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ и $f^{-1}([c-\varepsilon,c+\varepsilon])$ компактан скуп који нема других критичних тачака.Тада је $M^{c+\varepsilon}$ хомотопно са $M^{c-\varepsilon}\cup e^{\lambda_1}\cup\ldots\cup e^{\lambda_k}$ [5] .

Доказ: Индукцијом по броју критичних тачака, као претходна теорема. □

Напомена 1.2.2. Слично се показује да је M^c хомотопно са

$$M^{c-\varepsilon}\cup e^{\lambda_1}\cup\ldots\cup e^{\lambda_k}.$$

Пре него што покажемо да се хомотопски тип многострукости у потпуности може одредити помоћу критичних тачака Морсове функције биће доказане помоћне леме.

Лема 1.2.1. Ако пресликавање F има леви хомотопни инверз L и десни хомотопни инверз R, онда је F хомотопна еквиваленција и његов хомотопни инверз је L (или R).

[5] $e^{\lambda_1},\ldots,e^{\lambda_k}$ су ћелије димензија, редом, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, чије границе припадају скупу $M^{c-\varepsilon}$.

Доказ: Ако је $F \circ R \simeq \mathrm{Id}$ онда је $L \circ F \circ R \simeq L$ и ако је $L \circ F \simeq \mathrm{Id}$ онда и $L \circ F \circ R \simeq R$. Хомотопност је транзитивно својство па је $L \simeq R$. Даље је $L \circ F \simeq R \circ F$ и због $L \circ F \simeq \mathrm{Id}$ следи $R \circ F \simeq \mathrm{Id}$. Значи, R је и леви хомотопни инверз. Слично се показује за L. $\square$

Лема 1.2.2. Нека су $\varphi_0,\ \varphi_1 : \dot{e}^\lambda \to X$ хомотопна пресликавања ($\varphi_0 \simeq \varphi_1$). Тада постоји хомотопна еквиваленција

$$k : X \cup_{\varphi_0} e^\lambda \to X \cup_{\varphi_1} e^\lambda$$

тако да је $k|_X = \mathrm{Id}_X$.

Доказ: Дефинишимо k са

$$\begin{aligned} &k(x) = x,\ \ x \in X \\ &k(tu) = 2tu,\ \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2},\ u \in \dot{e}^\lambda \\ &k(tu) = H(2-2t, u),\ \ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1,\ u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

где је $H(t,u)$ хомотопија између φ_0 и φ_1 и то

$$H(0,u) = \varphi_0(u)\ \ u\ \ H(1,u) = \varphi_1(u).$$

Присетимо се да је $X \cup_{\varphi_1} e^\lambda = X \cup e^\lambda /_{x \sim \varphi_1(x), x \in \dot{e}^\lambda}$, тј. $\varphi_1(u) = u$, у количник простору $X \cup_{\varphi_1} e^\lambda$, ако $u \in \dot{e}^\lambda$, па је k добро дефинисано . Дефинишимо $l : X \cup_{\varphi_1} e^\lambda \to X \cup_{\varphi_0} e^\lambda$ са

$$\begin{aligned} &l(x) = x,\ \ x \in X \\ &l(tu) = 2tu,\ \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2},\ u \in \dot{e}^\lambda \\ &l(tu) = H(2t-1, u),\ \ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1,\ u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

Нека је $\widetilde{H} : I \times X \cup_{\varphi_1} e^\lambda \to X \cup_{\varphi_1} e^\lambda$ дефинисано са

$$\begin{aligned} &\widetilde{H}(\tau, x) = x,\ \ x \in X \\ &\widetilde{H}(\tau, tu) = \tau 4tu + (1-\tau)tu,\ \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4},\ u \in \dot{e}^\lambda \\ &\widetilde{H}(\tau, tu) = \tau H(2-4t, u) + (1-\tau)tu,\ \ \frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2},\ u \in \dot{e}^\lambda \\ &\widetilde{H}(\tau, tu) = \tau H(2t-1, u) + (1-\tau)tu,\ \ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1,\ u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

Тада је $\widetilde{H}(0, tu) = tu$, $\widetilde{H}(1, tu) = k(l(tu))$, па је $\widetilde{H}$ хомотопија и

$$k \circ l \simeq \mathrm{Id}_{X \cup_{\varphi_1} e^\lambda},$$

па k има десни хомотопни инверз. Слично се показује да има и леви хомотопни инверз, даље доказ следи на основу претходне леме. $\square$

Лема 1.2.3. Нека је $\varphi : \dot{e}^\lambda \to X$ лепљење. Свака хомотопна еквиваленција $f : X \to Y$ се може проширити до хомотопне еквиваленције $F : X \cup_\varphi e^\lambda \to Y \cup_{f\circ\varphi} e^\lambda$.

Доказ: Дефинишимо пресликавање F са

$$F(x) = f(x),\ \ x \in X$$
$$F(u) = u,\ \ u \in e^\lambda.$$

f је хомотопна еквиваленција, па постоји функција $g : Y \to X$ тако да је $f\circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$ и $g\circ f \simeq \mathrm{Id}_X$. Даље је и $g\circ f\circ\varphi \simeq \varphi$, па на основу претходне леме постоји хомотопна еквиваленција $k : X \cup_{g\circ f\circ\varphi} e^\lambda \to X \cup_\varphi e^\lambda$; дефинишемо је на исти начин као у претходној леми:

$$\begin{aligned} &k(x) = x,\ \ x \in X \\ &k(tu) = 2tu,\ \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2},\ u \in \dot{e}^\lambda \\ &k(tu) = H(2-2t, u),\ \ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1,\ u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned},$$

при чему је H хомотопија, $H(0,u) = g\circ f\circ\varphi(u)$ и $H(1,u) = \varphi(u)$. Дефинишимо пресликавање $G : Y \cup_{f\circ\varphi} e^\lambda \to X \cup_{g\circ f\circ\varphi} e^\lambda$ са

$$G(x) = g(x),\ \ x \in X$$
$$G(u) = u,\ \ u \in e^\lambda.$$

Корак 1: $k\circ G$ је леви хомотопни инверз за F.
Доказ: Нека је $h : I\times X \to Y$ хомотопија између $g\circ f$ и $\mathbf{1}_X$. Дакле, $H(t,u) = h(t,\varphi(u))$. Дефинишимо пресликавање $q : I\times X\cup_\varphi e^\lambda \to X\cup_\varphi e^\lambda$ са

$$\begin{aligned} &q(\tau,x) = h(\tau,x),\ \ x\in X, \\ &q(\tau,tu) = \frac{2}{1+\tau}tu,\ \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1+\tau}{2},\ u\in\dot{e}^\lambda \\ &q(\tau,tu) = h(2-2t+\tau,\varphi(u)),\ \ \frac{1+\tau}{2} \leqslant t \leqslant 1,\ u\in\dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

q је хомотопија, па је $k\circ G\circ F \simeq \mathrm{Id}_{X\cup_\varphi e^\lambda}$, тј. F има леви хомотопни инверз $k\circ G$.

Корак 2: $k\circ G$ је десни хомотопни инверз за F.
Доказ: Аналогно доказу за F показује се да G има леви хомотопни инверз. Даље, на основу $k\circ G\circ F \simeq \mathrm{Id}_{X\cup_\varphi e^\lambda}$ значи да је $G\circ F$ десни хомотопни инверз за k. Пошто је k хомотопна еквиваленција $G\circ F$ је и леви хомотопни инверз за k, тј. $G\circ F\circ k \simeq \mathrm{Id}_{X\cup_\varphi e^\lambda}$. Слично, $G\circ F\circ k \simeq \mathrm{Id}_{X\cup_\varphi e^\lambda}$ значи да је $F\circ k$ десни хомотопни инверз за G. Пошто G има леви хомотопни инверз, на основу леме 2.1 $F\circ k$ је и леви хомотопни инверз тј. $F\circ k\circ G \simeq \mathrm{Id}_{X\cup_\varphi e^\lambda}$, тј. $k\circ G$ је десни хомотопни инверз за F. $\square$

Теорема 1.2.4. Нека је M компактна многострукост без границе и $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција. Тада је M хомотопског типа CW комплекса тако да за сваку критичну тачку индекса λ постоји тачно једна ћелија e^λ димензије λ и нема других ћелија.

Доказ: На основу последице 1.1.2. број критичних тачака је коначан, па и број критичних вредности. Нека су то $c_1 < \cdots < c_m$. Пошто је M компактна и f непрекидна онда f достиже минимум и максимум; у њима је $df = 0$, па је $c_1 = \min f$ и $c_m = \max f$ и важи $M^{c_1} = f^{-1}(c_1)$ и $M^{c_m} = M$. Теорема ће бити доказана индукцијом, где је индуктивни корак

$$I(k): \ c_{k-1} < a < c_k, \ M^a \text{ је типа } CW \text{ комплекса.}$$

$I(1): \ a < c_1, \ M^a = \emptyset$ па је CW комплекс.
Претпоставимо да је тачно $I(k-1)$ тј. за $c_{k-1} < a' < c_k, \ M^{a'}$ је типа CW комплекса. Значи да постоји хомотопска еквиваленција $h' : M^{a'} \to K$, где је K CW комплекс.
Докажимо $I(k):$ за $a' < c_k < a < c_{k+1}$ треба показати да је M^a типа CW комплекса.
Уочимо $\varepsilon > 0$ тако да $a' < c_k - \varepsilon < c_k < c_k + \varepsilon < a < c_{k+1}$.
$f^{-1}([c_k + \varepsilon, a])$ је затворен у компакту M па је компактан и пошто нема критичних тачака, на основу теореме 1.2.1. $M^{c_k+\varepsilon}$ је дифеоморфан са M^a. Значи ако је $M^{c_k+\varepsilon}$ типа CW комплекса онда је и M^a. Даље, $f^{-1}([a', c_k - \varepsilon])$ је компактан, без критичних тачака па је $M^{a'}$ дифеоморфно са $M^{c_k-\varepsilon}$, тј. постоји дифеоморфизам, који је самим тим и хомотопна еквиваленција, $h : M^{c_k-\varepsilon} \to M^{a'}$. Нека је $f^{-1}(c_k) = \{p_1, \ldots, p_l\}$, $p_1, \ldots, p_l$ критичне тачке са индексима $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$. Тада је $M^{c_k+\varepsilon}$ хомотопно са $M^{c_k-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \ldots \cup_{\varphi_l} e^{\lambda_l}$ при чему су $\varphi_j : \dot{e}^{\lambda_j} \to M^{c_k-\varepsilon}, \ j = \overline{1,l}$ лепљења. Даље, $h' \circ h : M^{c_k-\varepsilon} \to K$ је хомотопска еквиваленција и може се продужити до

$$H : M^{c_k-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \ldots \cup_{\varphi_l} e^{\lambda_l} \to K \cup_{h' \circ h \circ \varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \ldots \cup_{h' \circ h \circ \varphi_l} e^{\lambda_l}.$$

Пошто је $K \cup_{h' \circ h \circ \varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \ldots \cup_{h' \circ h \circ \varphi_l} e^{\lambda_l}$ CW комлекс, онда и $M^{c_k-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \ldots \cup_{\varphi_l} e^{\lambda_l}$ има стуктуру CW комплекса. Следи, $M^{c_k+\varepsilon}$ има структуру CW комлекса па и M^a.
Коначно, M^a има структуру CW комлекса за свако $a \in [c_1, c_m]$, па и за $c_{m-1} < a < c_m$. Пошто је $M^{c_m} = M^a \cup e^{\lambda_1} \cup \ldots \cup e^{\lambda_s}$ онда и $M = M^{c_m}$ има структуру CW комплекса. □

Последица 1.2.3. Компактна, глатка, коначнодимензиона многострукост без границе је хомотопског типа CW комлекса.

Доказ: На основу последице 1.1.3. на M постоји Морсова функција, даље претходна теорема. □

Напомена 1.2.3. Слично се показује да је компактна, глатка, коначнодимензиона многострукост са границом хомотопског типа CW-пара. Такође, и услов компактности се може ослабити, погледати [1].

Пример 1.2.1. Функција висине на торусу је Морсова; има 4 критичне тачке са индексима 0,1,1 и 2. Значи, торус је CW комплекс састављен од четири ћелије e^0, e^1_1, e^1_2 и e^2.

1.3 Морсове неједнакости

Нека је X CW комплекс димензије n и X_k k-скелетон, тј. скуп ћелија димензије највише k. Значи $X_n = X$, а са X_{-1} означаваћемо празан скуп. У наставку ћемо претпоставити да су све хомолошке групе са коефицијентима у произвољном пољу F и користићемо следеће појмове:
Бетијев број

$$\beta_k(X) = \dim H_k(X)$$
$$\beta_k(X_i, X_{i-1}) = \dim H_k(X_i, X_{i-1}).$$

Ојлерова карактеристика

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \beta_k(X)$$
$$\chi(X_i, X_{i-1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \beta_k(X_i, X_{i-1}).$$

У општем случају за дуг тачан низ хомоморфизама g_j и векторских простора G_j:

$$\ldots \xrightarrow{g_{k+1}} G_k \xrightarrow{g_k} G_{k-1} \xrightarrow{g_{k-1}} \ldots \to G_0 \xrightarrow{g_0} 0$$

важи $\mathrm{Ker}(g_j) \cong \mathrm{Im}(g_{j+1})$, а на основу теореме о хомоморфизмима важи да је $G_j / \mathrm{Ker}(g_j) \cong \mathrm{Im}(g_j)$. Зато је

$$\dim G_j = \mathrm{rang}(g_{j+1}) + \mathrm{rang}(g_j). \tag{1.3.1}$$

Даље,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rang}(g_{k+1}) &= \dim G_k - \mathrm{rang}(g_k) \\
&= \dim G_k - (\dim G_{k-1} - \mathrm{rang}(g_{k-1})) \\
&= \dim G_k - \dim G_{k-1} + \dim G_{k-2} - \mathrm{rang}(g_{k-2}) \\
&\vdots \\
&= \dim G_k - \dim G_{k-1} + \ldots \pm G_0.
\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Ако је $A \subseteq B \subseteq C$ онда постоји дуги тачан низ:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(B,A) \xrightarrow{i_*} H_k(C,A) \xrightarrow{j_*} H_k(C,B) \to \dots$$

Сада применимо (1.3.1) па следи:

$$\dim H_k(C,A) = \operatorname{rang}(i_*) + \operatorname{rang}(j_*).$$

Ранг инклузије једнак је димензији домена, а ранг сваког пресликавања је највише димензија кодомена. Зато је $\dim H_k(C,A) \leqslant \dim H_k(B,A) + \dim H_k(C,B)$, па важи

$$\beta_k(C,A) \leqslant \beta_k(C,B) + \beta_k(B,A).$$

Применимо претходно код скелетона $X_{k-2} \subseteq X_{k-1} \subseteq X_k$, CW-комплекса X :

$$\beta_k(X_k, X_{k-2}) \leqslant \beta_k(X_k, X_{k-1}) + \beta_k(X_{k-1}, X_{k-2})$$

Индукцијом долазимо до

$$\beta_k(X) \leqslant \sum_{i=0}^{n} \beta_k(X_i, X_{i-1})$$

Слично, важи и

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{n} \chi(X_i, X_{i-1}).$$

$H_k(X_k, X_{k-1})$ је слободна абелова група која има по један генератор за сваку ћелију димензије k и $H_j(X_k, X_{k-1}) = 0$, ако је $j \neq k$. Значи, $\dim H_k(X_k, X_{k-1})$ је број ћелија димензије k и

$$\dim H_j(X_k, X_{k-1}) = \beta_i(X_k, X_{k-1}) = 0, \ \ j \neq k.$$

Из претходног параграфа знамо да је свака компактна глатка, коначнодимензиона многострукост M типа CW комплекса. Са M_k означићемо њен k-скелетон.
Број критичних тачака индекса k, произвољне Морсове функције на њој означимо са C_k.

Теорема 1.3.1. Нека је M произвољна компактна глатка многострукост. Тада важи

$$\beta_k(M) \leqslant C_k, \quad k = \overline{1,n}$$

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k.$$

Доказ: На основу теореме 1.2.4. број ћелија димензије k је број критичних тачака индекса k, па важи:

$$\dim H_k(M_k, M_{k-1}) = C_k.$$

Зато је $\beta_k(M) \leqslant \sum_{i=0}^{n} \beta_k(M_i, M_{i-1}) = \beta_k(M_k, M_{k-1}) = C_k$. Даље,

$$\chi(M_k, M_{k-1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^k \beta_i(M_k, M_{k-1}) = \begin{cases} \beta_k(M_k, M_{k-1}), & k \in 2\mathbb{N}; \\ -\beta_k(M_k, M_{k-1}) & k \in 2\mathbb{N} - 1, \end{cases}$$

тј.

$$\chi(M_k, M_{k-1}) = \begin{cases} C_k, & k \in 2\mathbb{N}; \\ -C_k & k \in 2\mathbb{N} - 1. \end{cases}$$

Зато је $\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} \chi(M_k, M_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k$. □

Вратимо се поново на дуги тачан низ

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(B, A) \xrightarrow{i_*} H_k(C, A) \xrightarrow{j_*} H_k(C, B) \to \ldots$$

На основу (1.3.2.) је

$$\operatorname{rang} \partial_{k+1} = \dim H_k(B, A) - \dim H_k(C, A) + \dim H_k(C, B) - \ldots$$

тј.

$$\operatorname{rang} \partial_{k+1} = \beta_k(B, A) - \beta_k(C, A) + \beta_k(C, B) - \ldots .$$

Уведимо ознаке:

$$\chi_k(C, B) = \beta_k(C, B) - \beta_{k-1}(C, B) + \ldots \pm \beta_0(C, B)$$

$$\chi_k(C) = \beta_k(C) - \beta_{k-1}(C) + \ldots \pm \beta_0(C)$$

Једноставним рачуном закључујемо

$$\operatorname{rang} \partial_{k+1} = \chi_k(C, B) + \chi_k(B, A) - \chi_k(C, A).$$

Пошто је ранг сваког пресликавања ненегативан следи

$$\chi_k(C, A) \leqslant \chi_k(C, B) + \chi_k(B, A).$$

Ако применимо све ово на скелетоне добијамо

$$\chi_k(X_k, X_{k-2}) \leqslant \chi_k(X_k, X_{k-1}) + \chi_k(X_{k-1}, X_{k-2}).$$

Индукцијом следи

$$\chi_k(X) \leqslant \sum_{i=0}^{k} \chi_k(X_i, X_{i-1})$$

Теорема 1.3.2. Нека су услови као и у претходној теореми. Тада за свако $k = \overline{1, n}$ важи

$$\beta_k(M) - \beta_{k-1}(M) + \ldots \pm \beta_0(M) \leqslant C_k - C_{k-1} + \ldots \pm C_0.$$

Доказ: На основу дефиниције χ_k је

$$\chi_k(M) = \beta_k(M) - \beta_{k-1}(M) + \ldots \pm \beta_0(M)$$

као и

$$\chi_k(M_i, M_{i-1}) = \begin{cases} \beta_i(M_i, M_{i-1}), & k - i \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}; \\ -\beta_i(M_i, M_{i-1}) & k - i \in 2\mathbb{N} - 1, \end{cases}$$

тј.

$$\chi_k(M_i, M_{i-1}) = \begin{cases} C_i, & k - i \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}; \\ -C_i & k - i \in 2\mathbb{N} - 1. \end{cases}$$

Пошто је $\chi_k(M) \leqslant \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \chi_i(M_i, M_{i-1})$ коначно је:

$$\beta_k(M) - \beta_{k-1}(M) + \ldots \pm \beta_0(M) \leqslant C_k - C_{k-1} + \ldots \pm C_0.$$

□

Ове неједнакости су познате као Морсове неједнакости. Оне представљају везу између аналитичког појма критичне тачке и топологије многострукости.

ГЛАВА 2

Морсова хомологија, диференцијално-тополошки приступ

2.1 Стабилна и нестабилна многострукост критичне тачке

Нека је M компактна глатка многострукост и $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција. Решење диференцијалне једначине

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = -\nabla f(\phi_t(x)), \;\; \phi_0 = \mathrm{Id} \tag{2.1.1}$$

је једнопараметарска фамилија дифеоморфизама $\phi_t : M \to M, \;\; t \in \mathbb{R}$ генерисана векторским пољем $-\nabla f$ коју називамо *негативни градијентни ток.* (Приметимо да је фамилија дефинисана на целој реалној правој зато што је многострукост M компактна, па векторско поље $-\nabla f$ има компактан носач.) Као што смо видели у глави 1 ова фамилија остварује дифеоморфизам између M^b и M^a, када $M^b \setminus M^a$ нема критичних тачака. Пошто је

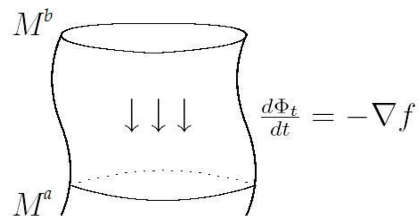
$$\frac{d}{dt}f(\phi_t(x)) = \nabla f(\phi_t(x))\frac{d}{dt}\phi_t(x) = -|\nabla f(\phi_t(x))|^2 \leqslant 0$$

значи да f опада дуж ϕ_t, тј. ϕ_t „спушта” тачке са M^b на M^a.

Дефинишимо криву $\gamma : \mathbb{R} \to M$ са $\gamma(t) = \phi_t(x)$, где је x фиксирана регуларна тачка. Значи ова крива је градијентна трајекторија, тј. решење диференцијалне једначине

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\nabla f \circ \gamma, \;\; \gamma(0) = x \tag{2.1.2}$$

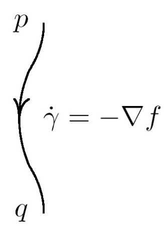
која помера тачку x, тачније „спушта” је.



Слика 2.1: Дифеоморфизам многострукости M^a и M^b

Опишимо још шта се дешава ако је x критична тачка. У том случају решење једначине (2.1.2) је крива $\gamma(t) = \phi_t(x)$, али и крива $\gamma(t) = x$, што је немогуће на основу теореме о егзистенцији и јединствености диференцијалних једначина. Дакле, закључак је да неконстантна градијентна трајекторија не пролази кроз критичну тачку, али важи следеће:

Лема 2.1.1. Свака градијентна трајекторија почиње и завршава се у критичној тачки.



Слика 2.2: Градијентна трајекторија

Доказ: Треба показати да ако је крива γ решење једначине (2.1.1.) онда постоје критичне тачке p и q функције f тако да је

$$\lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = p \text{ и } \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = q.$$

Нека је t_n произвољан низ такав да $\lim_{n\to+\infty} t_n = -\infty$. Пошто је M компактна значи да низ $\gamma(t_n)$ има конвергентан подниз, означимо га исто са $\gamma(t_n)$, тј. постоји тачка $p \in M$ таква да $\lim_{n\to+\infty} \gamma(t_n) = p$.
Нека је $h = f \circ \gamma$ и $\varepsilon > 0$ произвољно. На основу Лагранжеве теореме је $h(t_n + \varepsilon) - h(t_n) = \varepsilon h'(c_n);\ t_n < c_n < t_n + \varepsilon$. Пошто постоји $\lim_{n\to+\infty} \gamma(t_n)$, а f је непрекидна онда је $\lim_{n\to+\infty} h(t_n+\varepsilon) - h(t_n) = 0$ па је $\lim_{n\to+\infty} h'(c_n) = 0$ и коначно $\lim_{n\to+\infty} h'(t_n) = 0$. Даље, $h' = df\frac{d\gamma}{dt} = -\|\nabla f(\gamma)\|$ па је $\lim_{n\to+\infty} \nabla f(\gamma(t_n)) = 0$, тј. $\nabla f(p) = 0$. Значи p јесте критична тачка. Дакле, сваки подниз низа t_n

конвергира ка некој критичној тачки. Пошто је функција f Морсова, онда су критичне тачке изоловане, па сви поднизови конвергирају ка истој тачки, дакле $\lim\limits_{t\to-\infty}\gamma(t)=p$. Слично се показује за q. $\square$

Напомена 2.1.1. Битно је да је f Морсова, јер су тада критичне тачке изоловане. У супротном за различите низове $s_n\to-\infty$ и $\gamma(s_n)$ би могао да тежи различитим критичним тачкама.

Нека је $p\in M$ критична тачка и ϕ_t фамилија која задовољава (2.1.1). Тада дефинишемо:

$$W^u(p)=\{x\in M|\lim_{t\to-\infty}\phi_t(x)=p\}$$

и

$$W^s(p)=\{x\in M|\lim_{t\to+\infty}\phi_t(x)=p\}$$

нестабилну и стабилну многострукост тачке p. Оне заправо представљају скуп свих градијентних трајекторија које извиру у тачки p, у случају $W^u(p)$, односно увиру у тачку p, у случају $W^s(p)$. Показаћемо да су оне заиста многострукости, а да су подмногострукости[1] од M, може се прочитати у додатку 4.7.

На основу Морсове леме постоји околина U тачке p и координатни систем $(x_1,\dots,x_n)$ тако да је $x_j(p)=0,\ \ j=\overline{1,n}$ и

$$f(x_1,\dots,x_n)=f(p)-{x_1}^2-\cdots-{x_k}^2+{x_{x+1}}^2+\cdots+{x_n}^2,$$

где је k индекс критичне тачке p. У тој околини је и

$$\nabla f(x_1,\dots,x_n)=(-2x_1,\dots,-2x_k,2x_{k+1},\dots,2x_n),$$

где је градијент у односу на Риманову метрику која је задата стандардним еуклидским скаларним производом у $\mathbb{R}^n$ [2]. Ако и решење једначине (2.1.1) изразимо у локалним кординатама, тј

$$\phi_t(x)=(x_1(t),\dots,x_n(t)),$$

[1] Подскуп $N\subseteq M$ је подмногострукост ако постоји улагање $i:N\hookrightarrow M$. То је пресликавање које је 1-1, хомеоморфизам на слику и имерзија, тј. диференцијал је инјективан у свакој тачки.

[2] Ако је Риманова метрика задата матрицом $g=g_{ij}$ онда је локална формула за градијент $\nabla f=\sum_{i,j}g_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$. Коришћењем глатке функције која је једнака 1 у малој околини критичне тачке и 0 ван мало веће околине , можемо модификовати метрику g, тако да се она поклапа са стандардном еуклидском. Значи, за сваку Риманову многострукост постоји карта око критичне тачке у којој градијент има облик $\nabla f=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}$. Погледати [15].

следи

$$(x_1'(t), \ldots, x_n'(t)) = -(-2x_1(t), \ldots, -2x_k(t), 2x_{k+1}(t), \ldots, 2x_n(t)).$$

Решавањем ових једначина и на основу почетног услова $\phi_0 = \mathrm{Id}$ следи

$$\phi_t(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 e^{2t}, \ldots, x_k e^{2t}, x_{k+1} e^{-2t}, \ldots, x_n e^{-2t}).$$

Сада је $\lim\limits_{t \to -\infty} \phi_t(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$ (то су локалне координате тачке p) ако и само ако је $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$. Значи у локалним координатама је

$$W^u(p) = \{x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

и слично се показује

$$W^s(p) = \{x_1 = \ldots = x_k = 0\},$$

па су $W^u(p) \cap U$ и $W^s(p) \cap U$ многострукости, (хиперравни) димензија, редом k и $n-k$. Важи и више:

Теорема 2.1.1. $W^u(p)$ и $W^s(p)$ су многострукости, чиме оправдавамо њихове називе.

Доказ: Докажимо прво да су $W^u(p)$ и $W^s(p)$ стабилни у односу на градијентни ток ϕ_t, тј да је $\phi_t(W^u(p)) = W^u(p)$ и $\phi_t(W^s(p)) = W^s(p)$, за свако $t \in \mathbb{R}$. Фиксирамо $t_0 \in \mathbb{R}$. Нека је $x \in W^s(p)$ произвољан. Пошто је ϕ_{t_0} дифеоморфизам, дакле и НА, онда постоји $y \in M$ тако да је $x = \phi_{t_0}(y)$. Покажимо да $y \in W^s(p)$, тј. да је $\lim\limits_{t \to +\infty} \phi_t(y) = p$. Важи

$$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) = \lim_{t \to +\infty} \phi_t(\phi_{t_0}(y) = \lim_{t \to +\infty} \phi_{t+t_0}(y)) = \lim_{t \to +\infty} \phi_t(y).$$

С друге стране пошто $x \in W^s(p)$ онда је $\lim\limits_{t \to +\infty} \phi_t(x) = p$ па и $\lim\limits_{t \to +\infty} \phi_t(y) = p$. Дакле $y \in W^s(p)$, тј. $W^s(p) \subseteq \phi_{t_0}(W^s(p))$. Слично важи и $W^s(p) \subseteq \phi_{-t_0}(W^s(p))$, па је $\phi_{t_0}(W^s(p)) \subseteq \phi_{t_0}(\phi_{-t_0}(W^s(p)))$, тј. $\phi_{t_0}(W^s(p)) \subseteq W^s(p)$.
Даље, очигледно $p \in W^s(p)$ и нека је (U_p, φ_p) карта око тачке p многострукости $W^s(p) \cap U$. Ако је $x \in W^s(p)$ произвољна тачка, онда је $\lim\limits_{t \to +\infty} \phi_t(x) = p$, па за довољно велико t постоји околина U_x тачке x тако да је $\phi_t(U_x) \subseteq U_p$. На основу инваријантности је $U_x \subseteq \phi_t^{-1}(U_p) \in W^s(p)$, а $\varphi_p \circ \phi_t$ је глатко, па је са $(U_x, \varphi_p \circ \phi_t)$ добро дефинисана карта око тачке x. Сагласност карата је очигледна. $\square$

2.2 Трансверзалност пресека

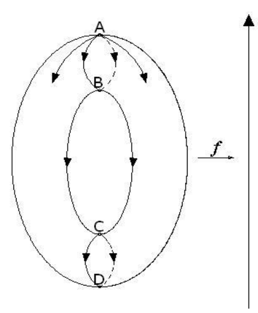
Опишимо прво $Thom-$ову декомпозицију многострукости M. Нека је $x \in M$ произвољна тачка. Као што смо већ видели крива $\gamma(t) = \phi_t(x)$ задовољава диференцијалну једначину:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\nabla f \circ \gamma, \;\; \gamma(0) = x.$$

Дакле, γ је градијентна трајекторија, па на основу леме 2.1.1. почиње у некој критичној тачки p, значи $x \in W^u(p.)$ Долазимо до закључка да се многострукост M може представити у облику дисјунктне декомпозиције:

$$M = \bigcup_{p \in \mathrm{Crit}\, f} W^u(p).$$

Пример 2.2.1. У глави 1 смо видели да је функција висине на торусу Морсова. Решавањем диференцијалних једначина долазимо до закључка да је нестабилна многострукост $W^u(D)$ само тачка D, нестабилна многострукост $W^u(C)$ кружница кроз C и D, али без тачке D, $(b \sin u, 0, -a - b \cos u), u \in (0, 2\pi)$, и нестабилна многострукост $W^u(B)$ кружница кроз B и C, $(0, (a-b)\cos v, (a-b)\sin v), v \in [0, 2\pi]$, али без тачке C. Свака друга тачка торуса припада $W^u(A)$.



Слика 2.3: Нестабилне многострукости на торусу

Зато се торус може написати у облику дисјунктне уније:

$$T = W^u(A) \cup W^u(B) \cup W^u(C) \cup W^u(D).$$

Томова декомпозиција је хомотопски еквивалентна ћелијској декомпозицији многострукости M, објашњеној у глави 1. Проблем је што она не задаје увек на M структуру $CW-$ комплекса, нпр. у случају функције висине на торусу, пример 2.2.1. *Smale* је открио неопходан услов да би то важило. То је тзв. $Morse-Smale-$ов услов трансверзалности и гласи:

$$W^u(p) \pitchfork W^s(q), \text{за сваке две критичне тачке}\, p \,\text{и}\, q.$$

Функцију f тада називамо $Morse - Smale$−ова функција. Овај се услов може обезбедити за скоро сваку Риманову метрику на M. Доказ овог тврђења се може наћи у [4] и заснива се на модерним техникама $Floer$−ове хомологије.

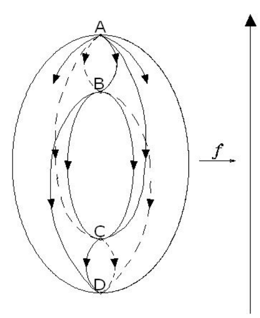
Претпоставимо да је функција f $Morse - Smale$−ова. Дефинишимо скуп

$$\mathcal{M}(p,q) = W^u(p) \pitchfork W^s(q).$$

Значи, $\mathcal{M}(p,q)$ је скуп свих градијентних линија које почињу у тачки p и завршавају се у тачки q. На основу леме 4.3.3. закључујемо да је $\mathcal{M}(p,q)$ многострукост димензије:

$$\begin{aligned}\dim(W^u(p) \pitchfork W^s(q)) &= \dim W^u(p) + \dim W^s(q) - n \\ &= \mathrm{Ind}(p) + n - \mathrm{Ind}(q) - n \\ &= \mathrm{Ind}(p) - \mathrm{Ind}(q).\end{aligned}$$

Пример 2.2.2. Као што смо видели у примеру 2.2.1. постоји градијентна линија од тачке B до тачке C, али пошто ове тачке имају исти индекс, онда би на основу претходног многострукост $\mathcal{M}(B,C)$ била димензије нула, што је немогуће. Дакле, функција висине на торусу није $Morse - Smale$−ова. Постоји произвољно мала пертурбација ове функције, која ће бити $Morse - Smale$−ова. Тада би градијентне линије изгледале као на слици.



Слика 2.4: Нестабилне многострукости на модификованом торусу

2.3 Морсова хомологија

Покажимо прво да се многострукост $\mathcal{M}(p,q)$ може оријентисати. Претпоставимо да је M оријентабилна. Прво изаберемо оријентацију на $W^u(p)$, која затим индукује оријентацију на $W^s(p)$, за сваку критичну тачку p. Даље, на основу трансверзалности стабилне и нестабилне многострукости за сваку регуларну тачку $x \in \mathbb{R}$ постоји кратак тачан низ:

$$0 \to T_x(W^u(p) \cap W^s(q)) \xrightarrow{i} T_xW^u(p) \oplus T_xW^s(q) \xrightarrow{j} T_xM \to 0$$

при чему је $i(u) = (u, -u)$ и $j(v, w) = v + w$.
Пошто имамо оријентацију на $T_xW^u(p), T_xW^s(q)$ и на T_xM, овај низ индукује оријентацију и на $\mathcal{M}(p, q)$. За детаље погледати [4]. Чињеница да се многострукост $\mathcal{M}(p, q)$ може оријентисати омогућава да се хомологија дефинише и са коефицијентима у $\mathbb{Z}$ (а тиме и у сваком комутативном прстену), а не само у $\mathbb{Z}_2$. Ипак овде ће због једноставности бити изложен метод за $\mathbb{Z}_2$.

Нека група $\mathbb{R}$ дејствује на $\mathcal{M}(p, q)$ на следећи начин:

$$\gamma(\cdot) \xrightarrow{s} \gamma(\cdot + s), \;\; s \in \mathbb{R}.$$

Значи идентификујемо све криве које имају исти траг. Количнички простор означавамо са:

$$\widehat{\mathcal{M}}(p, q) = \mathcal{M}(p, q)/\mathbb{R}.$$

Да бисмо описали структуру тог простора дефинишимо пресликавања

$$E_0 : \mathcal{M}(p, q) \hookrightarrow M$$

$$\gamma \mapsto \gamma(0).$$

и

$$\varphi = f \circ E_0 : \mathcal{M}(p, q) \to \mathbb{R}.$$

Нека је $a \in (f(q), f(p))$ регуларна вредност за φ и нека је

$$\mathcal{M}^a(p, q) = \varphi^{-1}(a).$$

Тада је $\mathcal{M}^a(p, q)$ подмногострукост од $\mathcal{M}(p, q)$ димензије $\mathrm{Ind}(p) - \mathrm{Ind}(q) - 1$ и за све $\gamma \in \mathcal{M}^a(p, q)$ важи $f(\gamma(0)) = a$. Пресликавање

$$\Psi^a : \mathbb{R} \times \mathcal{M}^a(p, q) \to \mathcal{M}(p, q)$$

$$(t, \gamma(\cdot)) \to \gamma(\cdot + t)$$

остварује глатко и слободно дејство, па индукује дифеоморфизам:

$$\mathcal{M}^a(p, q) \cong \widehat{\mathcal{M}}(p, q).$$

Дакле $\widehat{\mathcal{M}}(p, q)$ је многострукост димензије $\dim \mathcal{M}(p, q) - 1$. Ова многострукост је кључна за дефинисање Морсове хомологије.

Теорема 2.3.1. Ако је $\mathrm{Ind}(p) - \mathrm{Ind}(q) = 1$ онда је $\widehat{\mathcal{M}}(p,q)$ компактна многострукост димензије 0, дакле коначан број тачака.

Доказ ће бити подељен у неколико корака.

Лема 2.3.1. Сваки низ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(p,q)$ има подниз u_{n_k} који $\mathcal{C}^\infty_{loc}$ конвергира ка градијентној трајекторији $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$, тј.

$u_{n_k}|_{[-R,R]} \overset{\mathcal{C}^k([-R,R])}{\longrightarrow} v|_{[-R,R]}$, за свако $k \in \mathbb{N}$ и свако $R \geqslant 0$.

Доказ: Показаћемо да је произвољан низ u_n равностепено непрекидан и униформно ограничен, што на основу теореме $Arzela - Ascoli$ значи да има локално конвергентан подниз. Пошто су u_n градијентне трајекторије важи

$$\int_s^t |\dot{u}_n(\tau)|^2 d\tau = \int_s^t \langle \dot{u}_n, -\nabla f \circ u_n \rangle d\tau \leqslant -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\tau}(f(u_n(\tau))d\tau = f(p) - f(q).$$

Даље, ака је d Риманова метрика на M онда је

$$d(u_n(t), u_n(s)) \leqslant \int_s^t |\dot{u}_n(\tau)| d\tau \leqslant \sqrt{|t-s|}\sqrt{\int_s^t |\dot{u}_n(\tau)|^2 d\tau}.$$

Друга неједнакост у формули је Хелдерова. Значи, за унапред дато $\varepsilon > 0$ бирамо да $|t-s| < (\frac{\varepsilon}{f(p)-f(q)})^2$, па ће за свако $n \in \mathbb{N}$ бити $d(u_n(t), u_n(s)) < \varepsilon$, тј. низ u_n јесте равномерно непрекидан. С друге стране скуп свих $u_n(t)$, за све $t \in \mathbb{R}$ и све $n \in \mathbb{N}$ је ограничен јер је садржан у компактној многострукости M, одакле следи униформна ограниченост. Ако исто применимо на све изводе низа u_n добијамо $\mathcal{C}^\infty$ конвергенцију.$\square$

Лема 2.3.2. Нека је $X : U \to \mathbb{R}^n$ непрекидно векторско поље дефинисано на околини $0 \in \mathbb{R}$ тако да је 0 критична тачка поља X за коју је линеаризација $DX(0)$ недегенерисана и симетрична. Тада постоји $\varepsilon > 0$ тако да за свако решење

$$\dot{s} = X(s), \quad \lim_{t\to+\infty} s(t) = 0$$

постоје константа $c \in \mathbb{R}^+$ и $t_0 = t_0(s) \in \mathbb{R}$ за које важи:

$$t \geqslant t_0 \Rightarrow |s(t)| \leqslant ce^{-\varepsilon t}.$$

Доказ: [4].

Лема 2.3.3. Ако низ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(p,q)$ конвергира $\mathcal{C}^\infty_{loc}$ ка градијентној трајекторији $v \in \mathcal{M}(p,q)$, онда он конвергира и у $H^{1,2}$ норми.

Доказ: Покажимо прво да низ u_n униформно тежи ка p, односно q, кад $t \to \mp\infty$. Претпоставимо супротно, тј. да постоји низ реалних бројева $t_k \to +\infty$ и подниз u_{n_k} тако да је $d(q, u_{n_k}(t_k)) > \varepsilon$. Нека је U околина тачке q тако да је $y_j(p) = 0$, $j = \overline{1, n}$ и

$$f(y_1, \dots, y_n) = f(p) - {y_1}^2 - \dots - {y_k}^2 + {y_{k+1}}^2 + \dots + {y_n}^2.$$

Претпоставимо да је U садржана у $\varepsilon-$ околини тачке q. Тада, за довољно велико t, $u_n(t) \in U$. Ово можемо да закључимо из једначина градијентних трајекторија у локалним координатама, тј.

$$\dot{u}_i = 2u_i,\ i = 1, \dots, k, \quad \dot{u}_i = -2u_i,\ i = k+1, \dots, n.$$

Пошто је $\lim\limits_{t \to +\infty} u_n(t) = q$, у локалним координатама $\lim\limits_{t \to +\infty} (u_1(t), \dots, u_n(t)) = (0, \dots, 0)$, следи

$$u_i = 0,\ i = 1, \dots, k, \quad u_i = c_i e^{-2t},\ i = k+1, \dots, n,$$

где је k Морсов индекс критичне тачке q. Дакле за довољно велико t је $d(q, u_n(t)) < \varepsilon$. Добили смо контрадикцију са претпоставком да је $d(q, u_{n_k}(t_k)) > \varepsilon$, дакле $u_n \rightrightarrows q$, када $t \to +\infty$. На исти начин се доказује и униформна конвергенција ка p.

Из Леме 2.2.2. следи да постоји $t_0 \geqslant 0$ тако да је, у локалним координатама у околинама p и q :

$$|u_n(t)| \leqslant c_{p,q} e^{-\varepsilon_{p,q}|t|},$$

за $|t| \geqslant t_0$ и свако n. Сада на основу Лебегове теореме о доминантној конвергенцији следи $H^{1,2}-$ конвергенција. $\square$

Доказ теореме 2.2.1: Нека је $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(p, q)$ произвољан низ. На основу леме 2.2.1. он има подниз који $\mathcal{C}^\infty_{loc}$ конвергира ка градијентној трајекторији $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$. Пошто је $f(q) \leqslant f(u_n) \leqslant f(p)$ онда је и $f(q) \leqslant f(v) \leqslant f(p)$. Претпоставимо да је $v(+\infty) \neq q$, дакле $v \in \mathcal{M}(p, p_1)$, за неку критичну тачку $p_1 \neq p$. Следи $f(q) < f(p_1) \leqslant f(v) \leqslant f(p)$ и $\mathrm{Ind}(q) < \mathrm{Ind}(p_1) < \mathrm{Ind}(p)$, што је немогуће зато што је $\mathrm{Ind}(p) - \mathrm{Ind}(q) = 1$. Закључујемо $v(+\infty) = q$. Слично се показује и $v(-\infty) = p$, па $v \in \mathcal{M}(p, q)$. Даље на основу претходне леме следи да подниз низа u_n конвергира у норми простора $\mathcal{M}(p, q)$, па је $\mathcal{M}(p, q)$, а самим тим и $\widehat{\mathcal{M}}(p, q)$ компактан. $\square$

Дефинишимо *Морсов комплекс.* Нека је $\mathrm{Crit}_k(f)$ скуп свих критичних тачака функције f индекса k и нека је $C_k(f, \mathbb{Z}_2)$ слободна Абелова група генерисана елементима из $\mathrm{Crit}_k(f)$, а са коефицијентима ± 1 и $C_{-1}(f) = 0$.

Сада дефинишемо гранични оператор $\partial_k : C_k(f, \mathbb{Z}_2) \to C_{k-1}(f, \mathbb{Z}_2)$ прво на критичним тачкама, па га продужимо линеарно

$$\partial_k(p) = \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f)} n(p,q)q$$

где $n(p,q)$ представља број тачака многострукости $\widehat{\mathcal{M}}(p,q)$, по модулу 2. На основу претходне теореме ∂_k је добро дефинисан.

Теорема 2.3.2. $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$.

Доказ: Нека је $p \in \mathrm{Crit}_k(f)$ произвољна тачка. Тада је

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1}(\partial_k(p)) &= \partial_{k-1}\Big(\sum_{q \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f)} n(p,q)q\Big) \\
&= \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f)} n(p,q)\partial_{k-1}(q) \\
&= \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f)} \sum_{r \in \mathrm{Crit}_{k-2}(f)} n(p,q)n(q,r)r.
\end{aligned}$$

$n(p,q)n(q,r)$ представља број кривих,по модулу 2, које почињу у тачки p и завршавају се у тачки r, али пролазе кроз тачку q. Ове криве се састоје из две градијентне трајекторије, али саме нису градијентне трајекторије, зато што градијентне трајекторије не пролазе кроз критичне тачке, дакле то су изломљене криве. Унија свих ових кривих,за све тачке $q \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f)$, заправо представља границу многострукости $\widehat{\mathcal{M}}(p,r)$, теорема 3.4.1. Ова многострукост је једнодимензиона, па њена граница има паран број тачака [3] , тј. по модулу 2, нула. Дакле

$$\sum_{q \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f)} n(p,q)n(q,r) = 0.$$

□

Следи да је $(C_*(f), \partial)$ ланчасти комплекс, па можемо дефинисати Морсову хомологију:

$$H_k(f) = \ker(\partial_k) / \operatorname{Im}(\partial_{k+1}).$$

[3] Свака глатка, повезана једнодимензиона многострукост је дифеоморфна кружници $\mathbb{S}^1$ или интервалу реалних бројева, дакле њена граница или нема тачака или има две тачке. Доказ:[2] Зато следи да је свака глатка једнодимензиона многострукост дифеоморфна унији кружница $\mathbb{S}^1$ и интервала реалних бројева, дакле њена граница има паран број тачака.

Пример 2.3.1. Ако је функција висине на торусу као у примеру 2.2.2. онда дефинишемо ланчасти комплекс торуса на следећи начин. На основу броја критичних тачака имамо Абелове групе:

$$C_0(f,\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2,\ \ C_1(f,\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\ \text{ и }\ C_2(f,\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2.$$

Са слике 2.4. видимо да за сваке две критичне тачке чији се индекс разликује за један, постоје тачно две трајекторије, тј. нула у $\mathbb{Z}_2$. Зато важи:

$$\partial_0\equiv 0;$$
$$\partial_1(B)=n(B,D)D=\partial_1(C)=n(C,D)D=0;$$
$$\partial_2(A)=n(A,B)B+n(A,C)C=0,$$

па је

$$H_k(T)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & k=0,2;\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2, & k=1.\end{cases}$$

Пример 2.3.2. Нека је $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}$ функција висине на кружници. Дакле, за $\mathbb{S}^1\subseteq\mathbb{R}^2$, је $f(x,y)=y+1$. Ако је $p\in\mathbb{S}^1\setminus N$ произвољна тачка, различита од северног пола, онда је локални запис функције f :

$$\widetilde{f}(x)=f\circ\varphi^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}+1,$$

где је $\varphi:\mathbb{S}^1\setminus N\to\mathbb{R}$ стереографска пројекција из северног пола, $\varphi(x,y)=\frac{x}{1-y}$ и $\varphi^{-1}(x)=(\frac{2x}{x^2+1},\frac{x^2-1}{x^2+1})$. Даље важи

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}\quad\text{и}\quad\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial x^2}=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}.$$

Дакле, критична тачка је $S=\varphi^{-1}(0)=(0,-1)$ и пошто је $\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial x^2}(0)=4$, то је недегенерисана критична тачка индекса 0. Узимајући карту $\mathbb{S}^1\setminus S$ и стереографску пројекцију из јужног пола добијамо и другу недегенерисану критичну тачку N, индекса 1, па је функција f Морсова и важи

$$C_0(f,\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2\quad\text{и}\quad C_1(f,\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2.$$

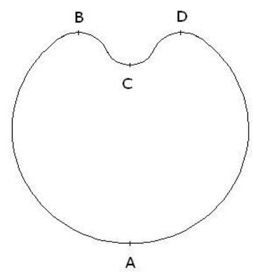
Посматрајмо Морсов ланчасти комплекс

$$0\to C_1(f,\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{\partial_1}C_0(f,\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{\partial_0}0.$$

На основу Томове декомпозиције знамо да је кружница садржана у скупу свих нестабилних многострукости, значи да постоје бар две негативне градијентне трајекторије од тачке N до S. То су леви и десни полукругови. Свака друга трајекторија би била намотавање кружнице, односно поновни пролазак кроз критичне тачке, што је немогуће, дакле $n(N, S) = 0$, па и $\partial_1 \equiv 0$. Пошто је и $\partial_0 \equiv 0$, следи $\operatorname{Ker} \partial_0 = C_0(f, \mathbb{Z}_2)$, $\operatorname{Ker} \partial_1 = C_1(f, \mathbb{Z}_2)$ и $\operatorname{Im} \partial_1 = \operatorname{Im} \partial_0 = 0$. Дакле

$$H_0(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{и} \quad H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}_2$$

Пример 2.3.3. Посматрајмо сада глатку затворену криву K у равни хомеоморфну кружници и функцију висине на њој.



Слика 2.5: крива K

Уводећи одговарајуће карте показује се да је ова функција Морсова са критичним тачкама A, B, C и D, и индексима $\operatorname{Ind}(A) = \operatorname{Ind}(C) = 0$ и $\operatorname{Ind}(B) = \operatorname{Ind}(D) = 1$. Дакле,

$$C_0(f, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \quad \text{и} \quad C_1(f, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Постоји само једна негативна градијентна трајекторија од тачке B до A, зато што би свака друга пролазила кроз критичну тачку C или D, што је немогуће. И слично, постоји једна негативна градијентна трајекторија од тачке B до C. Дакле $\partial_1(B) = n(B, A)A + n(B, C)C = A + C$ и слично $\partial_1(D) = A + C$. Зато је $\partial_1(B + D) = 0$, па следи $\operatorname{Ker} \partial_1 \cong \mathbb{Z}_2$, $\operatorname{Im} \partial_1 \cong \mathbb{Z}_2$. Коначно,

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{и} \quad H_1(K) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Слично се показује да свака затворена крива хомеоморфна кружници има исте хомолошке групе као кружница. Важи и више, Морсова хомологија је тополошка инваријанта.

ГЛАВА 3

Морсова хомологија, аналитички приступ

Овај приступ Морсовој теорији изложен је доста касније, тек осамдесетих година прошлог века, захваљујући $Witten-$у и $Floer-$у.
Као и до сада, нека је M компактна глатка, коначнодимензиона, многострукост, функција $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова, а p и q њене произвољне критичне тачке. Посматраћемо простор негативних градијентних трајекторија, које почињу у тачки p и завршавају се у тачки $q:$

$$\mathcal{M}(p, q; f) = \{\gamma : \mathbb{R} \to M \mid \frac{d\gamma}{dt} = -\nabla f \circ \gamma, \gamma(-\infty) = p, \gamma(+\infty) = q\}.$$

Доказаћемо да је $\mathcal{M}(p, q; f)$ глатка многострукост за скоро сваку Морсову функцију на начин који се затим може уопштити и представља увод у Флорову хомологију.

3.1 Конструкција многострукости $\mathcal{M}$

Нека је

$$\mathcal{C}^{\infty}_{p,q}(\overline{\mathbb{R}}, M) = \{h \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}, M) \mid h(-\infty) = p, h(+\infty) = q\}.$$

Дакле, $\mathcal{C}^{\infty}_{p,q}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ је скуп глатких и компактних кривих. Даље, ако је $(\xi, \overline{\mathbb{R}}, \pi)$ векторско раслојење, тј. $\xi \in Vec(\overline{\mathbb{R}})$, нека је

$$H^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, \xi) = \{s : \overline{\mathbb{R}} \to \xi \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 + |\dot{s}(t)|^2 dt < \infty\}.$$

Ако је $\phi : \xi \to \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^n$ тривијализација, тј $\phi : \pi^{-1}(t) \xrightarrow{\cong} \{t\} \times \mathbb{R}^n$, онда имамо и индуковано пресликавање $\phi_* : H^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, \xi) \to H^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n)$ дефинисано са $\phi_*(s) = \phi \circ s$. Дефинишимо пресликавање

$$H^{1,2}_{\mathbb{R}} : Vec(\overline{\mathbb{R}}) \to Ban$$

$$H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\xi) = \phi_*^{-1}(H^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n)) = \{\phi_*^{-1}(g) \mid g \in H^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n)\}.$$

Пошто је $\pi \circ \phi_*^{-1}(g)(t) = t$ и $\phi_*^{-1}(g) \in H^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, \xi)$, значи да $H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\xi)$ представља скуп свих $H^{1,2}$ сечења раслојења ξ и не зависи од избора тривијализације. Даље, пошто је $H^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n)$ Банахов простор и његовом нормом је индукована норма на $H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\xi)$ онда је и $H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\xi)$ Банахов простор.

Сада све то применимо на раслојења $(h^*TM, \overline{\mathbb{R}}, \pi')$ и $(h^*D, \overline{\mathbb{R}}, \pi')$, при чему је $h \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ произвољна крива, $D \subset TM$ отворен подскуп који садржи све нула векторе, $h^*TM = \{(t,v) \in \overline{\mathbb{R}} \times TM \mid h(t) = \pi(v)\}$ и $\pi' : h^*TM \to \overline{\mathbb{R}}$ пројекција на прву координату, тј. $\pi'(t,v) = t$. Дакле,

$$h^*TM, h^*D \in Vec(\overline{\mathbb{R}}),$$

па за све криве $h \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ важи:

$$H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D) = \{s \in H^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, h^*D) \mid \pi' \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}.$$

Пошто је $s(t) = (t, v_{h(t)})$, значи да је $H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D)$ скуп свих $H^{1,2}$ векторских поља дуж криве h.

Аналогно се дефинише пресликавање $L^2_{\mathbb{R}} : Vec(\overline{\mathbb{R}}) \to Ban$ и Банахови простори $L^2_{\mathbb{R}}(h^*D)$ и $L^2_{\mathbb{R}}(h^*TM)$.

Даље, уводимо експоненцијално пресликавање

$$\exp_h : H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D) \to \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, M)$$

дефинисано са

$$\exp_h s(t) = \exp_{h(t)} s(t) = \gamma_{v_{h(t)}}(1),$$

где је γ јединствена геодезијска крива на M тако да је $\gamma(0) = h(t)$ и $\frac{d\gamma}{d\tau}\mid_{\tau=0} = s(t) = v_{h(t)}$.

Ако је $t = -\infty$, пошто $s \in H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D)$ онда је $s(\pm\infty) = 0$. Даље је $\gamma_{v_p}(0) = h(-\infty) = p$ и $\frac{d\gamma}{d\tau}\mid_{\tau=0} = s(-\infty) = v_p = 0$, тј $\gamma \equiv p$, па важи

$$\exp_h s(-\infty) = \gamma_{v_p}(1) = p$$

и слично

$$\exp_h s(+\infty) = \gamma_{v_{h(+\infty)}}(1) = q.$$

Нека је

$$\mathcal{P}^{1,2}_{p,q} = \{\exp_h s \mid s \in H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D), h \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}(\overline{\mathbb{R}}, M)\}.$$

Дакле, све криве из $\mathcal{P}^{1,2}_{p,q}$ почињу у тачки p и завршавају се у тачки q.

Теорема 3.1.1. $\mathcal{P}^{1,2}_{p,q}$ има структуру Банахове многострукости, при чему је атлас $\{\exp_h(U_h), (\exp_h)^{-1}\}_{h\in\mathcal{C}^\infty_{p,q}(\overline{\mathbb{R}},M)}$, где су околине $U_h \subseteq H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D)$ изабране тако да $\exp_h$ на њима буде бијекција. При том важи и

$$\mathcal{C}^\infty_{p,q}(\overline{\mathbb{R}},M) \subseteq \mathcal{P}^{1,2}_{p,q} \subseteq \mathcal{C}^0_{p,q}(\overline{\mathbb{R}},M)$$

и подскупови су густи у свом надскупу у одговарајућој топологији.

Доказ: [4].

Дефиниција 3.1.1. Нека је B Банахова многостукост, E тополошки простор, пресликавање $\pi : E \to B$ непрекидно, НА и такво да $\pi^{-1}(x)$ има структуру Банаховог простора за свако $x \in B$. *Банахово раслојење* је тројка (E, B, π) тако да постоји фамилија Банахових простора $\{X_i, i \in I\}$ и фамилија пресликавања $\{\phi_i, i \in I\}$ тако да је $\phi_i : U_i \times X_i \to \pi^{-1}(U_i)$ хомеоморфизам и $\phi_i : X_i \xrightarrow{\cong} \pi^{-1}(x)$ изоморфизам, при чему је $\{U_i \mid i \in I\}$ покривач многострукости B. Фамилију $\{\phi_i, i \in I\}$ називамо *тривијализација раслојења*, а Банахове просторе $\{X_i, i \in I\}$ *влакна* (или фибре) раслојења. И сам простор E називамо раслојење.

Теорема 3.1.2.
$$L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}^{1,2*}_{p,q}TM) = \bigcup_{\gamma\in\mathcal{P}^{1,2}_{p,q}} L^2_{\mathbb{R}}(\gamma^*TM)$$

је Банахово раслојење над $\mathcal{P}^{1,2}_{p,q}$. При томе су влакна Банахови простори $L^2_{\mathbb{R}}(h^*TM),\ h \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}(\overline{\mathbb{R}},M)$, а тривијализације су пресликавања

$$\nabla_2 : \exp_h(U_h) \times L^2_{\mathbb{R}}(h^*TM) \to L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}^{1,2*}_{p,q}TM)\mid_{\pi^{-1}(\exp_h(U_h))},$$

где је $\nabla_2 \exp_h \xi \cdot \eta$ извод векторског поља $\xi \in U_h$ у правцу векторског поља $\eta \in L^2_{\mathbb{R}}(h^*TM)$. Слично,

$$H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}^{1,2*}_{p,q}TM) = \bigcup_{\gamma\in\mathcal{P}^{1,2}_{p,q}} H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\gamma^*TM)$$

је тангентно Банахово раслојење над $\mathcal{P}^{1,2}_{p,q}$, тј $T\mathcal{P}^{1,2}_{p,q} = H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}^{1,2*}_{p,q}TM)$.

Доказ: [4].

Приметимо да је коваријантни извод $\nabla_2 \exp_h \xi : L^2_{\mathbb{R}}(h^*TM) \to L^2_{\mathbb{R}}(h^*TM)$ пресликавање у влакну.

Теорема 3.1.3. Нека је $X : M \to TM$ векторско поље $\mathcal{C}^\infty$ глатко и $X(p) = X(q) = 0$. Тада се пресликавање

$$\mathcal{C}^\infty_{p,q}(\overline{\mathbb{R}},M) \ni \gamma \mapsto \dot\gamma + X\circ\gamma \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}(\overline{\mathbb{R}},\gamma^*TM)$$

може продужити до глатког сечења раслојења $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}^{1,2*}_{p,q}TM)$:

$$\Gamma : \mathcal{P}^{1,2}_{p,q} \to L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}^{1,2*}_{p,q}TM)$$

при чему је

$$\Gamma(\gamma) = \dot{\gamma} + X \circ \gamma.$$

Доказ: Пошто је $\mathcal{P}^{1,2}_{p,q}$ многострукост довољно је показати да је Γ глатко у карти. Нека је $\gamma \in \mathcal{P}^{1,2}_{p,q}$ произвољна крива. Тада постоје функција $h \in \mathcal{C}^{\infty}_{p,q}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ и векторско поље $\xi \in U_h \subseteq H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*\mathcal{D})$, тако да је $(\exp_h(U_h), (\exp_h)^{-1})$ карта око γ и $\gamma = \exp_h \xi$. Нека је $\nabla_1 \exp_h \xi$ извод криве $\exp_h \xi$ по првој координати, дакле по функцији h и нека је $\nabla_2 \exp_h \xi$ извод по другој координати, тј. по векторском пољу ξ. Тада је тотални извод криве $\exp_h \xi$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp_h \xi = \nabla_1 \exp_h \xi \cdot \dot{h} + \nabla_2 \exp_h \xi \cdot \nabla_t \xi$$

Имајући у виду и локалну тривијализацију $\nabla_2 \exp_h \xi$ онда Γ има локалну репрезентацију $\Gamma_{loc} = (\nabla_2 \exp_h \xi)^{-1} \circ \Gamma \circ \exp_h$ и

$$\Gamma_{loc} : H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D) \to L^2_{\mathbb{R}}(h^*D)$$

и

$$\Gamma_{loc}(\xi) = \nabla_2 \exp_h(\xi)^{-1}(\frac{\partial}{\partial t} \exp_h \xi + X(\exp_h \xi)).$$

Због горње једнакости следи:

$$\Gamma_{loc}(\xi) = \nabla_t \xi + \nabla_2 \exp_h(\xi)^{-1}(\nabla_1 \exp_h \xi \cdot \dot{h} + X(\exp_h \xi)).$$

Нека је $g : \overline{\mathbb{R}} \times h^*\mathcal{D} \to h^*TM$ дефинисано са

$$g(t, \xi(t)) = \nabla_2 \exp_h(\xi)^{-1}(\nabla_1 \exp_h \xi \cdot \dot{h} + X(\exp_h \xi))(t).$$

Пошто $\xi \in H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*\mathcal{D})$, онда $\xi(\pm\infty) = 0$. Даље, $\exp_h \xi(-\infty) = p$ и $\exp_h \xi(+\infty) = q$, па $X(\exp_h \xi))(\pm\infty) = 0$ и $\nabla_1 \exp_h \xi \cdot \dot{h}(\infty) = 0$ па је $g(\pm\infty, 0) = 0$. Показује се да је g глатко, $\nabla_t \xi, g(\cdot, \xi) \in L^2_{\mathbb{R}}(h^*D)$ и ако је $D_2 g$ извод функције g по другој координати, тј

$$D_2 g = \nabla_2 \exp_h(\xi)(g(t, \xi(t)))$$

онда је $D_2 g(\pm\infty, 0)$ у локалним координатама извод векторског поља X у тачки p односно q. □

Последица 3.1.1. Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција, p и q произвољне критичне тачке. Тада ∇f индукује глатко сечење

$$\mathcal{F} : \mathcal{P}^{1,2}_{p,q} \to L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}^{1,2*}_{p,q}TM)$$

дефинисано са

$$\mathcal{F}(\gamma) = \dot{\gamma} + \nabla f \circ \gamma$$

чија је локална реперезентација, за произвољно $h \in \mathcal{C}^{\infty}_{p,q}(\overline{\mathbb{R}}, M)$:

$$\mathcal{F}_{loc} : H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D) \to L^2_{\mathbb{R}}(h^*D)$$

и

$$\mathcal{F}_{loc}(\xi)(t) = \nabla_t \xi + g(t, \xi(t))$$

где је $g : \overline{\mathbb{R}} \times h^*\mathcal{D} \to h^*TM$ глатко, $g(\pm\infty, 0) = 0$ и

$$D_2 g(-\infty, 0) = H_p f \quad \text{и} \quad D_2 g(+\infty, 0) = H_q f.$$

Сада долазимо до везе пресликавања $\mathcal{F}$ и простора трајекторија $\mathcal{M}(p, q; f)$:

Теорема 3.1.4. Језгро пресликавања $\mathcal{F}$ чине све глатке криве које су решења диференцијалне једначине

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\nabla f \circ \gamma$$

и задовољавају услове $\gamma(-\infty) = p, \gamma(+\infty) = q$. Дакле,

$$\mathcal{F}^{-1}(0) = \mathcal{M}(p, q; f).$$

3.2 Фредхолмова пресликавања

Посматрајмо пресликавање

$$F : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, End(\mathbb{R}^n)) \to \mathcal{L}(H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)),$$

$$F(A) = F_A : H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

дефинисано са

$$(F_A s)(t) = \dot{s}(t) + A(t) \cdot s(t).$$

Приметимо да је F непрекидно:

$$\|(F_A - F_B)(s)\|_{L^2} = (\int_{\mathbb{R}} |(A(t) - B(t))(s(t))|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \|A - B\|_{\infty} \|s\|_0 \leqslant \|A - B\|_{\infty} \|s\|_{H^{1,2}},$$

дакле,

$$\|F_A - F_B\|_{\mathcal{L}} \leqslant \|A - B\|_\infty.$$

Нека је $\mathcal{A}$ скуп свих пресликавања $A \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, End(\mathbb{R}^n))$ тако да су $A^+ = A(+\infty)$ и $A^- = A(-\infty)$ самоадјунговане, инвертибилне матрице реда n. Дакле, $A^+, A^- \in GL(n, \mathbb{R})$ и

$$\langle A^\pm f, g\rangle = \langle f, A^{\pm t} g\rangle,$$

за све $f, g \in H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. И, нека је $\mu(A^\pm)$ Морсов индекс оператора $A^\pm$, тј. број свих негативних сопствених вредности матрице A^+ односно A^-.

Дефиниција 3.2.1. *Фредхолмов оператор* је ограничено, линеарно пресликавање Банахових простора, коме су језгро и којезгро коначнодимензиони, а слика је затворен скуп. *Фредхолмово пресликавање* је функција чији диференцијал је Фредхолмов оператор. *Фредхолмов индекс* Фредхолмовог оператора F је цео број

$$\mathrm{Ind}(F) = \dim \mathrm{Ker}(F) - \dim \mathrm{Coker}(F).$$

Фредхолмов индекс $\mathrm{Ind} : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathbb{Z}$ је непрекидно пресликавање у односу на операторску норму, па повезане скупове слика у повезане. Пошто узима вредности у $\mathbb{Z}$, он је константан на повезаним скуповима.

Теорема 3.2.1. За свако $A \in \mathcal{A}$ оператор F_A је Фредхолмов.

За доказ ће нам требати следећа лема.

Лема 3.2.1. Нека су X, Y и Z Банахови простори и $F \in \mathcal{L}(X, Y), K \in \mathcal{K}(Y, Z)$ (K је компактан оператор.) Ако постоји $c > 0$ тако да је

$$\|x\|_X \leqslant c(\|Fx\|_Y + \|Kx\|_Z), \text{за све} \ \ x \in X,$$

тада F има коначнодимензионо језгро и затворену слику.

Доказ: [3].

Доказ теореме 3.2.1. Нека је $A \in \mathcal{A}$ произвољан. Да бисмо применили претходну лему треба да нађемо одговарајући компактан оператор $\mathcal{K}$. Може се показати да, за свако $A \in \mathcal{A}$ које је константно пресликавање, постоји $c > 0$ тако да је

$$\|s\|_{H^{1,2}} \leqslant c\|F_A s\|_{L^2}, \text{за свако} \ \ s \in H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

за детаље погледати [4]. Даље, покажимо да постоје константе $T > 0$, $c(T) > 0$ тако да је

$$\|s\|_{H^{1,2}} \leqslant c(T)\|F_A s\|_{L^2}, \text{за свако} \ \ s \in H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), s\,|_{[-T,T]} = 0.$$

Представимо s као $s = s^+ + s^-$ при чему $s^-, s^+ \in H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ и $s^- \mid_{[-T,+\infty)} = 0$ и $s^+ \mid_{(-\infty,T]} = 0$. Пошто су A^- и A^+ константни онда, за $c = \max\{c(A^+), c(A^-)\}$ важи

$$\|s\|_{H^{1,2}} \leqslant c\|F_{A^\pm}s\|_{L^2}, \text{за свако } \ s \in H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

Даље, пошто је A непрекидан, за довољно велико $\varepsilon > 0$ и T важи :

$$\|A^- - A(t)\| < \varepsilon, \text{за све } t \leqslant -T,$$

$$\|A^+ - A(t)\| < \varepsilon, \text{за све } t \geqslant T,$$

па је

$$\|F_{A^\pm}s^\pm\|_{L^2} \leqslant \|F_A s^\pm\|_{L^2} + \|(F_{A^\pm} - F_A)s^\pm\|_{L^2} \leqslant \|F_A s^\pm\|_{L^2} + \varepsilon\|s^\pm\|_{L^2}.$$

Следи,

$$\begin{aligned}\|s\|_{H^{1,2}} =&\|s^+\|_{H^{1,2}} + \|s^-\|_{H^{1,2}} \leqslant c(\|F_{A^+}s^+\|_{L^2} + \|F_{A^-}s^-\|_{L^2})\\ \leqslant& c(\|F_A s^+\|_{L^2} + \|F_A s^+\|_{L^2}) + c\varepsilon(\|s^-\|_{H^{1,2}} + \|s^+\|_{H^{1,2}})\\ =&c\|F_A s\|_{L^2} + c\varepsilon\|s^-\|_{L^2} \leqslant c\|F_A s\|_{L^2} + c\varepsilon\|s\|_{H^{1,2}}.\end{aligned}$$

Зато је $\|s\|_{H^{1,2}} \leqslant \frac{c}{1-c\varepsilon}\|F_A s\|_{L^2}$, где је ε изабрано тако да је $\varepsilon < \frac{1}{c}$, да би норма била позитивна.
Нека је $\beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ функција сечења, тако да је

$$\beta(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geqslant T+1; \\ 1, & |t| \leqslant T \end{cases} \quad \text{и } \dot\beta(t) \neq 0, \text{за све } |t| \in (T, T+1).$$

Дакле $(1-\beta)s \mid_{[-T,T]} = 0$, па на основу претходног следи

$$\|(1-\beta)s\|_{H^{1,2}} \leqslant \tilde c\|F_A((1-\beta)s)\|_{L^2}.$$

Коришћењем неједнакости $|\dot s + 2As| \geqslant 0$ и $\|As\| \leqslant \|A\||s|$, ако је $\tilde c = \max_{[-T-1,T+1]}\|A(t)\|$, показује се

$$\int_{-T-1}^{T+1} |\dot s(t)|^2 + |s(t)|^2 dt \leqslant \tilde c \int_{-T-1}^{T+1} |\dot s(t) + A(t)s(t)|^2 + |s(t)|^2 dt,$$

тј.

$$\|\beta s\|_{H^{1,2}} \leqslant \tilde c(\|F_A(\beta s)\|_{L^2} + \|\beta s\|_{L^2}).$$

Даље,

$$\|F_A(\beta s)\|_{L^2} = \|\dot\beta s + \beta(\dot s + As)\|_{L^2} \leqslant \|\dot\beta s\|_{L^2} + \|\beta(\dot s + As)\|_{L^2} = \|\dot\beta s\|_{L^2} + \|\beta F_A(s)\|_{L^2}.$$

На основу свих претходних неједнакости, за довољно велико c, следи,

$$\begin{aligned}\|s\|_{H^{1,2}} =&\|(1-\beta)s+\beta s\| \leqslant \|(1-\beta)s\|_{H^{1,2}} + \|\beta s\|_{H^{1,2}}\\ \leqslant&\tilde{c}(\|F_A((1-\beta)s)\|_{L^2} + \|F_A(\beta s)\|_{L^2} + \|\beta s\|_{L^2})\\ \leqslant&\tilde{c}(\|(1-\beta)F_A(s)\|_{L^2} + \|\beta F_A(s)\|_{L^2} + 2\|\dot{\beta}s\|_{L^2} + \|\beta s\|_{L^2})\\ \leqslant&c(\|F_A(s)\|_{L^2} + \|s\|_{L^2([-T-1,T+1])}).\end{aligned}$$

Нека је $Z = L^2([-T-1, T+1], \mathbb{R}^n)$, и оператор

$$K : H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to L^2([-T-1, T+1], \mathbb{R}^n)$$

дефинисан са

$$K(s) = s\mid_{L^2([-T-1,T+1])}.$$

Дакле важи:

$$\|s\|_{H^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} \leqslant c(\|F_A s\|_{L^2} + \|Ks\|_Z), \text{за све} \;\; s \in H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

Пошто је Z Банахов простор, а оператор K компактан, следи на основу претходне леме, да F_A има коначнодимензионо језгро и затворену слику. Треба још показати и да има коначнодимензионо којезгро. Пошто је

$$\operatorname{Coker} F_A = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)/\operatorname{Im}(F_A) \cong \operatorname{Im}(F_A)^{\perp},$$

ако је $r \in \operatorname{Im}(F_A)^{\perp}$ произвољан, онда следи:

$$\langle r, \dot{s} + As\rangle_{L^2} = 0, \text{за све } s \in H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

Користећи једнакост

$$\langle Ar, s\rangle = \langle r, A^t s\rangle_{L^2},$$

следи

$$\langle r, \dot{s}\rangle_{L^2} = -\langle A^t r, s\rangle_{L^2}, \text{за све } s \in H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

Дакле, $A^t r$ је слаби извод функције r. Даље је

$$F_{-A^t}(r) = \dot{r} - A^t r = 0, \text{тј. } r \in \operatorname{Ker}(F_{-A^t}),$$

Следи,

$$\operatorname{Coker} F_A \cong \operatorname{Ker}(F_{-A^t}).$$

Пошто F_A има коначнодимензионо језгро, за произвољан $A \in \mathcal{A}$ и $-A^t \in \mathcal{A}$, следи F_{-A^t} има коначнодимензионо језгро, тј. F_A којезгро. □

Нека је

$$\sum = \Big\{F_A \in \mathcal{L}(H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)) \mid A \in \mathcal{A}\Big\}.$$

На $\sum$ уводимо релацију $\sim$ са

$$A \sim B \text{ ако и само ако } A^{\pm} = B^{\pm}.$$

$\sim$ је релација еквиваленције, па су класе:

$$\theta_A = \{F_B \in \sum \mid A^{\pm} = B^{\pm}\}.$$

Лема 3.2.2. Класа θ_{A_0} је контрактибилна у простору $\sum$.

Скица доказ: Хомотопија између идентичког пресликавања на класи θ_{A_0} и константног пресликавања $c(F_A) = F_{A_0} \in \Sigma$, се успоставља помоћу пресликавања $H : [0,1] \times \theta \to \theta$ дефинисаног са

$$H(t, F_A) = F_{A(t)}, \text{и } A(t) = (1-t)A + tA_0.$$

□

Пошто је θ_A контрактибилан, значи да је повезан, па је пресликавање Ind на њему константно, тј. за све $F_B \in \theta_A$ важи: $\mathrm{Ind}(F_B) = \mathrm{Ind}(F_A)$. Дакле, индекс оператора F_A зависи само од $A^{\pm}$. Важи и више:

Теорема 3.2.2. За свако $A \in \mathcal{A}$, за Фредхолмов оператор F_A важи:

$$\mathrm{Ind}(F_A) = \mu(A^-) - \mu(A^+).$$

Доказ: Нека је $A \in \mathcal{A}$ произвољан. Пошто су A^+ и A^- инвертибилне матрице, оне су сличне дијагоналним. Дакле постоје инвертибилне матрице C^+ и C^- тако да је $C^{\pm}A^{\pm}(C^{\pm})^{-1} = D^{\pm}$, где је $D^+ = \mathrm{diag}(\lambda_1^+, \ldots, \lambda_n^+)$ и $D^- = \mathrm{diag}(\lambda_1^-, \ldots, \lambda_n^-)$. Матрице $C^{\pm}$ се могу изабрати тако да важи $\lambda_k^{\pm} \geqslant \lambda_{k+1}^{\pm}$. Нека је сада $C \in \mathcal{A}$ тако да важи

$$C(t) = \begin{cases} C^+, & t \geqslant T; \\ C^-, & t \leqslant -T \end{cases} \text{ за неко } T > 0.$$

Уведимо пресликавања

$$C_1 : H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to H^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \text{ и } C_2 : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

са

$$C_1(s) = Cs \text{ и } C_2(s) = Cs.$$

Нека је $F_D = C_2 F_A (C_1)^{-1}$. Пошто су пресликавања C_1 и C_2 изоморфизми, они чувају димензије језгра и којезгра, па важи

$$\mathrm{Ind}(F_D) = \mathrm{Ind}(F_A).$$

Даље је

$$\begin{aligned} F_D(s) =& C_2F_A(C_1)^{-1}(s) = C\cdot(\frac{\partial}{\partial t}+A)\cdot(C^{-1})(s)\\ =& C(\frac{\partial C^{-1}}{\partial t}s + C^{-1}\frac{\partial s}{\partial t}+AC^{-1}s)\\ =& \frac{\partial s}{\partial t}+(C\frac{\partial C^{-1}}{\partial t}+CAC^{-1})s\\ =& F_{C\frac{\partial C^{-1}}{\partial t}+CAC^{-1}}(s). \end{aligned}$$

Пошто је $\frac{\partial C^{-1}}{\partial t}=0$ за $|t|>T$, следи

$$(C\frac{\partial C^{-1}}{\partial t}+CAC^{-1})^{\pm} = C^{\pm}A^{\pm}(C^{\pm})^{-1} = D^{\pm}.$$

Дакле,

$$F_D \in \theta_{D^{\pm}}.$$

Долазимо до закључка да $\operatorname{Ind} F_A$ зависи само од $D^{\pm}$. Зато без губитка општости можемо претпоставити да је

$$\begin{aligned} &A(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t),\dots,\lambda_n(t)),\\ &\lambda_k(\pm\infty)\geqslant\lambda_{k+1}(\pm\infty), \qquad .\\ &\lambda_k(t) = \text{const},\ \text{ за све }\ |t|\geqslant 1 \end{aligned}$$

Одредимо $\dim\operatorname{Ker} F_A$. Ако је $s\in\operatorname{Ker} F_A\subseteq H^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ произвољно, онда је

$$s(t) = (s_1(t),\dots,s_n(t)) \ \text{ и }\ \dot{s}(t) = -\lambda_k(t)\cdot s_k(t),\ k=1,\dots,n.$$

За $|t|\geqslant 1$. где је $\lambda_k = \text{const}$ важи

$$s_k(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_k^- t}, & t<-1;\\ e^{-\lambda_k^+ t} & t>1. \end{cases}$$

При том је $\lambda_k^-<0$ и $\lambda_k^+>0$ јер је $\lim\limits_{t\to\pm\infty} s_k(t)=0$. Дакле, базу у $\operatorname{Ker} F_A$ чине функције $e_j\in H^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ облика

$$e_k(t) = \begin{cases} (0,\cdots,e^{-\lambda_k^- t},\cdots,0), & t<-1,\\ (0,\cdots,e^{-\lambda_k^+ t},\cdots,0) & t>1 \end{cases} \quad \text{где су }\ \lambda_k^-<0\ \text{ и }\ \lambda_k^+>0.$$

Дакле, димензија језгра једнака је укупном броју оних $k-$ова за које је $\lambda_k^-<0$ и $\lambda_k^+>0$, тј.

$$\dim\operatorname{Ker} F_A = \max\{\mu(A^-)-\mu(A^+),0\}.$$

Слично се показује и $\dim\operatorname{Coker} F_A = \max\{\mu(A^+)-\mu(A^-),0\}$. □

Сада ћемо претходна разматрања да уопштимо на нетривијална раслојења. Нека је $\xi \in Vec(\overline{\mathbb{R}})$ произвољно раслојење и нека је $\mathcal{A}_\xi$ скуп свих пресликавања $A \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}}, End(\xi))$ тако да су $A^+ = A(+\infty)$ и $A^- = A(-\infty)$ самоадјунговани и недегенерисани. Посматрајмо пресликавање

$$F_A : H^{1,2}(\xi) \to L^2(\xi)$$

дефинисано са

$$F_A(s) = \nabla_t s + As$$

где је $\nabla_t : H^{1,2}(\xi) \to L^2(\xi)$ коваријантни извод. Нека је

$$\Sigma_{\xi,\nabla} = \{F_A \in \mathcal{L}(H^{1,2}(\xi), L^2(\xi)), | \, A \in \mathcal{A}_\xi\}.$$

У односу на тривијализацију $\phi : \xi \to \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^n$ и индукована пресликавања $\phi_* : H^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, \xi) \xrightarrow{\cong} H^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n)$ и $\phi_* : L^2(\overline{\mathbb{R}}, \xi) \xrightarrow{\cong} L^2(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n)$ имамо тривијализацију $\nabla_t^{triv} : H^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n) \to L^2(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n)$ коваријантног извода $\nabla_t s$

$$\nabla_t^{triv} s = \frac{\partial}{\partial t} s + \Gamma s,$$

где $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, \mathrm{End}(\mathbb{R}^n))$ представља Кристофелове симболе и тривијализацију $A^{triv} = \phi A \phi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}}, \mathrm{End}(\mathbb{R}^n))$ пресликавања A. Тада је

$$F_A = (\phi_*)^{-1} F_A^{triv} \phi_*$$

и

$$F_A^{triv} = \nabla_t^{triv} + A^{triv} = \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma + A^{triv}.$$

Даље, за $s \in H^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}, \xi)$ важи:

$$\nabla_t^{triv}(\phi_* s) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi_* s) + \Gamma(\phi_* s) = \frac{\partial \phi_*}{\partial t} s + \phi_* \frac{\partial s}{\partial t} + \Gamma(\phi_* s).$$

Пошто је $\nabla_t = (\phi_*)^{-1} \nabla_t^{triv} \phi_*$ онда је

$$\begin{aligned} F_A = (\phi_*)^{-1} F_A^{triv} \phi_* =& (\phi_*)^{-1}\left(\frac{\partial \phi_*}{\partial t} + \phi_* \frac{\partial}{\partial t}\right) + (\phi_*)^{-1}\Gamma(\phi_*) + (\phi_*)^{-1} A^{triv}(\phi_*) \\ =& \frac{\partial}{\partial t} + (\phi_*)^{-1}\left(\frac{\partial \phi_*}{\partial t}\right) + (\phi_*)^{-1}\Gamma(\phi_*) + A. \end{aligned}$$

Ако претпоставимо да је $\Gamma(\pm\infty) = 0$ (тј. да је коваријантни извод *Фредхолм-допустив*), онда $\Gamma + A^{triv} \in \mathcal{A}$, па на основу теореме 3.2.2. закључујемо да је F_A^{triv} Фредхолмов оператор. Пошто је ϕ_* изоморфизам онда је и $F_A = (\phi_*)^{-1} F_A^{triv} \phi_*$ Фредхолмов оператор, истог индекса као и F_A^{triv}. Ако је $\Gamma(\pm\infty) = 0$, због $\frac{\partial \phi_*}{\partial t}(\pm\infty) = 0$, на основу последње једнакости следи да Фредхолмове особине од F_A зависе само од $A^{\pm} = A(\pm\infty)$. Даље је

$$A^{\pm} = \phi^{-1}(\pm\infty)A^{triv}(\pm\infty)\phi(\pm\infty),$$

а пошто сличне матрице имају исте сопствене вредности следи

$$\mathrm{Ind}(F_A) = \mu(A^-) - \mu(A^+).$$

Тако долазимо до закључка:

Теорема 3.2.3. Нека је пресликавање $F : H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D) \to L^2_{\mathbb{R}}(h^*D)$ дефинисано са

$$F(\xi)(t) = \nabla_t \xi + g(t, \xi(t))$$

при чему је $g : \mathbb{R} \times h^*D \to h^*TM$ глатко, $g(\pm\infty, 0) = 0$, извод по влакнима је недегенерисан и $D_2 g(\pm\infty, 0)$ је самоадјунгован. Тада је, за свако $s \in H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D)$, диференцијал DF_s Фредхолмов оператор индекса

$$\mu(D_2 g(-\infty, 0)) - \mu(D_2 g(+\infty, 0)).$$

Доказ:(скица) Пошто $DF_s : T_s H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D) \to T_{F(s)} L^2_{\mathbb{R}}(h^*D)$, на основу теореме 3.1.3. је $DF_s : H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D) \to L^2_{\mathbb{R}}(h^*D)$ и

$$DF_s(\xi) = \nabla_t \xi + D_2 g(\cdot, s(\cdot))\xi$$

Функција $D_2 g(t, s(t)) : h^*D \to h^*D$ представља извод по другој координати, у правцу вектора $\xi(t) \in h^*D$, па је $D_2 g(\cdot, s(\cdot))$ одговарајуће $A \in \mathcal{A}_{h^*D}$. Дакле $DF_s = F_{D_2 g \cdot s} \in \sum_{h^*D,\nabla}$ па је на основу претходног Фредхолмов оператор индекса

$$\mu(D^2 g(-\infty, 0)) - \mu(D^2 g(+\infty, 0)). \qquad \square$$

Пошто је индекс критичне тачке једнак броју негативних сопствених вредности Хесијана, тј.

$$\mathrm{Ind}(p) = \mu(H_p f) \quad \text{и} \quad \mathrm{Ind}(q) = \mu(H_q f),$$

на основу последице 1.1. следи:

Последица 3.2.1. За свако $h \in \mathcal{C}^{\infty}_{p,q}(\overline{\mathbb{R}}, M)$ пресликавање

$$\mathcal{F}_{loc} : H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D) \to L^2_{\mathbb{R}}(h^*D)$$

дефинисано у последици 1.1. је Фредхолмово пресликавање индекса

$$\mathrm{Ind}(p) - \mathrm{Ind}(q).$$

3.3 Трансверзалност

Теорема 3.3.1. Нека су G и M Банахове многострукости и $\pi : E \to M$ Банахово раслојење. Нека је $\Phi : G \times M \to E$ глатко $G-$ параметарско сечење, тј. $\Phi_g = \Phi(g, \cdot) : M \to E$ је глатко сечење, за свако $g \in G$. Даље, нека постоји пребројива тривијализација $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times X_i$, раслојења E, тако да за свако $i \in \mathbb{N}$ важи:
а) $0 \in X_i$ је регуларна вредност за $pr_2 \circ \phi_i \circ \Phi : G \times U_i \to X_i$ и
б) $pr_2 \circ \phi_i \circ \Phi_g : U_i \to X_i$ је Фредхолмово пресликавање индекса r, за све $g \in G$, при чему је pr_2 пројекција на другу координату.
Тада је скуп $\Phi_g^{-1}(0) = \{m \in M \mid \Phi_g(m) = 0\}$ подмногострукост од M, за скоро све $g \in G$.

Теорема 3.3.2. За погодно изабран низ $(\epsilon_n)_{n \in N}$ позитивних реалних бројева, скуп

$$\mathcal{C}^\infty_\epsilon(M, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \|f\|_{\mathcal{C}^n} < \infty\}$$

је Банахов простор, густ у $L^2(M)$.

Доказ обе теореме: [4].

За Банахове многострукости $\mathcal{C}^\infty_\epsilon(M, \mathbb{R})$ и $\mathcal{P}^{1,2}_{p,q}$ и за раслојење $L^2_\mathbb{R}(\mathcal{P}^{1,2*}_{p,q}TM)$, дефинишемо пресликавање

$$\Phi : \mathcal{C}^\infty_\epsilon(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{P}^{1,2}_{p,q} \to L^2_\mathbb{R}(\mathcal{P}^{1,2*}_{p,q}TM)$$

$$\Phi(f, \gamma) = \frac{d\gamma}{dt} + \nabla f \circ \gamma.$$

На основу последице 3.1.1. $\Phi_f = \mathcal{F}$ је глатко сечење за свако $f \in \mathcal{C}^\infty_\epsilon(M, \mathbb{R})$. Слично се показује локална репрезентација

$$\Phi_{loc} : \mathcal{C}^\infty_\epsilon(M, \mathbb{R}) \times H^{1,2}(h^*D) \to L^2(h^*D)$$

$$\Phi_{loc}(f, \xi) = \nabla_t \xi + \nabla_2 \exp_h(\xi)^{-1}(\nabla_1 \exp_h \xi \cdot \dot{h} + \nabla f(\exp_h \xi)).$$

Тривијализација раслојења $L^2_\mathbb{R}(\mathcal{P}^{1,2*}_{p,q}TM)$ је

$$\nabla_2 : \exp_h(U_h) \times L^2_\mathbb{R}(h^*TM) \to L^2_\mathbb{R}(\mathcal{P}^{1,2*}_{p,q}TM) \mid_{\pi^{-1}(\exp_h(U_h))},$$

где је $\nabla_2 \exp_h \xi \cdot \eta$ извод векторског поља $\xi \in U_h$ у правцу векторског поља $\eta \in L^2_\mathbb{R}(h^*TM)$. Тада је $pr_2 \circ \nabla_2^{-1} \circ \Phi \exp_h = \Phi_{loc,f} = \mathcal{F}_{loc} : H^{1,2}_\mathbb{R}(h^*D) \to L^2_\mathbb{R}(h^*D)$ Фредхолмово пресликавање (последица 3.1.2.).

Теорема 3.3.3. Пресликавање $\Phi_{loc} : \mathcal{C}^\infty_\epsilon(M, \mathbb{R}) \times H^{1,2}_\mathbb{R}(h^*D) \to L^2_\mathbb{R}(h^*D)$ је трансверзално на нулто сечење, за скоро сваку Риманову метрику на M. Дакле $0 \in L^2_\mathbb{R}(h^*D)$ је регуларна вредност пресликавања Φ_{loc}.

Доказ:[4].

На основу теореме 3.1.4. је $\Phi_f^{-1}(0) = \mathcal{M}(p, q; f)$, па применом теореме 3.3.1. долазимо до закључка:

Теорема 3.3.4. $\mathcal{M}(p, q; f)$ је многострукост димензије $\mathrm{Ind}(p) - \mathrm{Ind}(q)$, за скоро сваку Морсову функцију f.

3.4 Компактност и лепљење

Као и у глави 2. нека група $\mathbb{R}$ дејствује на скупу $\mathcal{M}(p, r; f)$, $(\gamma, s) \mapsto \gamma(s + \cdot)$. Количнички скуп означићемо са

$$\widehat{\mathcal{M}}(p, r; f) := \mathcal{M}(p, r; f)/\mathbb{R}.$$

Теорема 3.4.1. Ако је $\mathrm{Ind}(p) - \mathrm{Ind}(r) = 2$ онда је $\widehat{\mathcal{M}}(p, r; f)$ многострукост са границом

$$\partial\widehat{\mathcal{M}}(p, r; f) = \bigcup_{\mathrm{Ind}(q)=\mathrm{Ind}(p)-1} \widehat{\mathcal{M}}(p, q; f) \times \widehat{\mathcal{M}}(q, r; f).$$

Доказ се састоји из два дела. Први смер се доказује поступком који се зове компактност, а други лепљење. Топологија на многострукости $\widehat{\mathcal{M}}(p, r; f)$ је $H^{1,2}$ топологија.

Лема 3.4.1. Нека је $\gamma_n \subset \widehat{\mathcal{M}}(p, r; f)$, произвољан низ. Тада или постоји $H^{1,2}$ конвергентан подниз, или постоји подниз (исто означен) γ_n, и критична тачка q, трајекторије

$$\gamma^1 \in \mathcal{M}(p, q; f),$$

$$\gamma^2 \in \mathcal{M}(q, r; f)$$

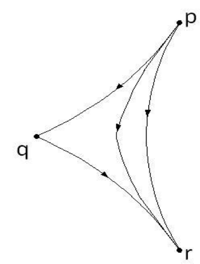
и низови t_n^1 и t_n^2 реалних бројева тако да

$$\gamma_n \cdot t_n^1 \overset{C^\infty_{loc}}{\rightrightarrows} \gamma^1,$$

$$\gamma_n \cdot t_n^2 \overset{C^\infty_{loc}}{\rightrightarrows} \gamma^2,$$

где је $\gamma \cdot t(s) := \gamma(s + t)$.

Доказ: Посматрамо низ $\gamma_n \in \mathcal{M}(p, r; f)$ чији је траг дати низ. Слично као у теореми 2.2.1. на основу леме 2.2.1. следи да низ γ_n има $C^\infty_{loc}-$конвергентан подниз (поново исто означен). Гранична трајекторија $\gamma^1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$ је локално такође градијентна трајекторија (јер низ γ_n конвергира локално униформно са свим изводима, а f је класе C^∞, па је



Слика 3.1: Понашање низа γ_n

∇f непрекидно). Свака градијентна трајекторија почиње и завршава се у критичној тачки. Ако је $\gamma^1(-\infty) = p, \gamma^1(+\infty) = r$, онда је овај подниз и $H^{1,2}-$конвергентан (Лема 2.2.3.). Сада претпоставимо да је $\gamma^1 \in \mathcal{M}(p,q;f)$, где је $r \neq q$ и означимо подниз γ_n са $\gamma_n \cdot t_n^1$. Пошто f опада дуж негативних градијентних трајекторија, онда је $f(q) < f(\gamma^1(t)) < f(p)$. Исто је и $f(r) < f(\gamma_n(t)) < f(p)$ за свако $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ па $f(r) < f(\gamma^1(t)) < f(p)$, за свако $t \in \mathbb{R}$. Важи $f(q) \geqslant f(r)$, у супротном би крива γ^1 пролазила кроз критичну тачку r што је немогуће. (Можемо да претпоставимо и да су вредности функције f у критичним тачкама различите; ако то није случај, мала пертурбација функције f у околини критичних тачака ће то омогућити.) Изаберимо сада регуларну вредност $a \in [f(r), f(q)]$, и изаберимо низ $t_n^2 \in \mathbb{R}$ тако да је $f(\gamma_n(t_n^2)) = a$. Пошто су $\gamma_n \cdot t_n^2$ градијентне трајекторије, оне не пролазе кроз критичне тачке, а почињу и завршавају се у њима, дакле $f(r) < f(\gamma_n \cdot t_n^2) < f(q)$. Сада лему 2.7. применимо на низ $\gamma_n \cdot t_n^2$, па он има $C^\infty_{loc}-$конвергентан подниз и опет гранична трајекторија γ^2 задовољава $f(r) < f(\gamma^2) < f(q)$. Даље се исто као у теореми 2.2.1. показује да та трајекторија мора бити у $\mathcal{M}(q,r;f)$. $\square$

Пошто се низови $\gamma_n \cdot t_n^1$ и $\gamma_n \cdot t_n^2$ на многострукости $\widehat{\mathcal{M}}(p,r;f)$ поклапају,тј. представљају низ $\gamma_n \in \widehat{\mathcal{M}}(p,r;f)$ значи да овај низ конвергира ка изломљеној трајекторији (γ^1,γ^2). Пошто је граница од $\widehat{\mathcal{M}}(p,r;f)$ скуп свих граничних трајекторија низова из $\widehat{\mathcal{M}}(p,r;f)$, на основу ове леме закључујемо

$$\partial\widehat{\mathcal{M}}(p,r;f) \subseteq \bigcup_{\mathrm{Ind}(q)=\mathrm{Ind}(p)-1} \widehat{\mathcal{M}}(p,q;f) \times \widehat{\mathcal{M}}(q,r;f).$$

Тиме је доказан један смер теореме 3.4.1. Други смер се доказује техником лепљења. Требаће нам следеће функције сечења $\beta^{\pm} : \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$, дефинисане са

$$\beta^-(t) := \begin{cases} 1, & t \leqslant -1, \\ 0, & t \geqslant 0, \end{cases} \qquad \beta^+(t) := \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1, & t \geqslant 1. \end{cases}$$

Нека је $K \subset \mathcal{M}(p,q;f) \times \mathcal{M}(q,r;f)$ компактан скуп и нека је $\rho = \rho_K \geqslant 0$. Дефинишимо пресликавање

$$\sharp^0 : K \times [\rho_K, +\infty) \hookrightarrow \mathcal{P}^{1,2}_{p,r}, \quad (\gamma_1, \gamma_2, \rho) \mapsto \gamma_1 \sharp^0_\rho \gamma_2$$

са

$$\gamma_1 \sharp^0_\rho \gamma_2(s) := \begin{cases} \gamma_1(s+\rho), & s \leqslant -1, \\ \exp_q(\beta(-s)\xi_1(s+\rho)), & -1 \leqslant s \leqslant 0, \\ \exp_q(\beta(s)\xi_2(s-\rho)), & 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ \gamma_2(s-\rho), & s \geqslant 1, \end{cases}$$

где је ρ довољно велико тако да је $\exp_q \xi_1(t) = \gamma_1(t)$, за $t \geqslant \rho$, а $\exp_q \xi_2(t) = \gamma_2(t)$, за $t \leqslant -\rho$. Дакле, овим пресликавањем изломљеној трајекторији (γ_1, γ_2) придружујемо криву из $\mathcal{P}^{1,2}_{p,r}$, која не мора бити у $\widehat{\mathcal{M}}(p,r;f)$. Зато треба модификовати пресликавање $\sharp^0$, тј. дефинисати $\sharp$ тако да важи $\mathcal{F}(\gamma_1 \sharp \gamma_2) = 0$, где је

$$\mathcal{F} : \mathcal{P}^{1,2}_{p,r} \to L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}^{1,2*}_{p,r} TM)$$

дефинисано са

$$\mathcal{F}(\gamma) = \dot{\gamma} + \nabla f \circ \gamma.$$

На основу последице 3.1.1. имамо и његову локалну репрезентацију, за произвољно $h \in \mathcal{C}^\infty_{p,r}(\overline{\mathbb{R}}, M)$:

$$\mathcal{F}_{loc} : H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*D) \to L^2_{\mathbb{R}}(h^*D)$$

и

$$\mathcal{F}_{loc}(\xi)(t) = \nabla_t \xi + \nabla_2 \exp_h(\xi)^{-1}(\nabla_1 \exp_h \xi \cdot \dot{h} + \nabla f(\exp_h \xi))(t).$$

Па ако $\gamma_1 \sharp \gamma_2 \in \mathcal{P}^{1,2}_{p,r}$ онда је $\gamma_1 \sharp \gamma_2 = \exp_\omega \xi$ Сада, пресликавање $\sharp$ треба да задовољава

$$\mathcal{F}_{loc}(\xi) = 0.$$

У наставку ће нам требати следећа лема:

Лема 3.4.2. Нека је $\varphi : E \to F$ глатко пресликавање између Банахових простора E и F облика

$$\varphi(x) = \varphi(0) + D\varphi(0)x + N(x),$$

тако да $D\varphi(0)$ има коначнодимензионо језгро и десни инверз $G : F \to E$ који задовољава услов

$$\|GN(x) - GN(y)\|_E \leqslant C(\|x\|_E + \|y\|_E) + \|x - y\|_E$$

за неку константу $C > 0$ и за све $x, y \in B_\varepsilon(0)$, где је $\varepsilon = \frac{1}{5C}$. Тада, ако је $\|G\varphi(0)\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, онда постоји јединствена нула пресликавња φ, $x_0 \in B_\varepsilon(0) \cap G(F)$.

Нека је $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{M}(p, q; f) \times \mathcal{M}(q, r; f)$ произвољна изломљена трајекторија и $\omega = \gamma_1 \sharp^0_\rho \gamma_2 \in \mathcal{P}^{1,2}_{p,r} \subseteq \mathcal{C}^0_{p,r}(\overline{\mathbb{R}}, M)$. Тада $\mathcal{F}_{loc} : H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\omega^* D) \to L^2_{\mathbb{R}}(\omega^* D)$ и њему одговарајуће $\mathcal{G}$ задовољавају услове леме, па постоји јединствена $\xi \in \mathcal{G}(L^2_{\mathbb{R}}(\omega^* D))$ тако да је $\mathcal{F}_{loc}(\xi) = 0$.

Сада можемо дефинисати лепљење

$$\sharp : K \times [\rho_K, +\infty) \hookrightarrow \mathcal{M}(p, r; f), \quad (\gamma_1, \gamma_2, \rho) \mapsto \gamma_1 \sharp_\rho \gamma_2$$

$$\gamma_1 \sharp_\rho \gamma_2 = \exp_{\gamma_1 \sharp^0_\rho \gamma_2} \xi,$$

при чему је $\xi \in H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\omega^* D), \omega = \gamma_1 \sharp^0_\rho \gamma_2$ јединствена тако да је $\mathcal{F}_{loc}(\xi) = 0$. Дакле, на основу претходног закључујемо $\mathcal{F}(\gamma_1 \sharp_\rho \gamma_2) = 0$ и лепљење је добро дефинисано.

Сада ове резултате треба пренети на количник простор $\widehat{\mathcal{M}}(p, q; f)$. Као што смо видели у глави 2.

$$\widehat{\mathcal{M}}(p, q; f) \cong \mathcal{M}^a(p, q; f),$$

где је $a \in (f(q), f(p))$ регуларна вредности и за све криве $\gamma \in \widehat{\mathcal{M}}(p, q; f)$ важи $f(\gamma(0)) = a$. Нека је $\widehat{K} \subseteq \widehat{\mathcal{M}}(p, q; f) \times \widehat{\mathcal{M}}(q, r; f)$ компактан скуп. Дефинишемо лепљење

$$\widehat{\sharp} : \widehat{K} \times [\rho_K, +\infty) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{M}}(p, r; f)., \quad (\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2, \rho) \mapsto \gamma_1 \widehat{\sharp}_\rho \gamma_2$$

$$\gamma_1 \widehat{\sharp}_\rho \gamma_2 = (\gamma_1 \sharp_\rho \gamma_2)_{\tau(\rho, \gamma_1, \gamma_2)},$$

где је τ транслација која омогућује $f(\gamma_1 \widehat{\sharp}_\rho \gamma_2(0)) = a$, дакле $\gamma_1 \widehat{\sharp}_\rho \gamma_2 \in \widehat{\mathcal{M}}(p, r; f)$. Може се показати да важи следећа теорема:

Теорема 3.4.2. За сваку изломљену трајекторију

$$(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2) \in \widehat{\mathcal{M}}(p, q; f) \times \widehat{\mathcal{M}}(q, r; f)$$

и сваки растући низ $\rho_n \to \infty$ постоји оператор лепљења $\widehat{\sharp}$ тако да

$$\widehat{\gamma}_1 \widehat{\sharp}_{\rho_n} \widehat{\gamma}_2 \overset{C_loc^\infty}{\rightrightarrows} (\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2),\ \rho_n \to \infty.$$

Доказ: [4].

Дакле, ка свакој изломљеној трајекторији конвергира неки низ из $\widehat{\mathcal{M}}(p, r; f)$, што значи да су изломљене трајекторији у граници те многострукости. Тиме је доказан и други смер теореме 3.4.1. $\square$

ГЛАВА 4

Додатак

4.1 Многострукости

Дефиниција 4.1.1. Скуп X је *Банахова многострукост* ако постоји фамилија Банахових простора $\{E_i \mid i \in I\}$ и атлас класе $\mathcal{C}^r, r \geqslant 0$ $\{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ тако да важи

а) $\bigcup_{i \in I} U_i = X$,

б) $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ је бијекција на отворен подскуп $\varphi_i(U_i)$ Банаховог простора E_i и $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ је отворен скуп у E_i, за све $i, j \in I$,

в) сваке две карте су сагласне, значи

$$\mathrm{d}^r\big(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\big) : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \mathrm{Lin}\big(E_i^r; E_j\big)$$

је непрекидно у односу на норму на E_i и операторску норму на $\mathrm{Lin}\big(E_i^r; E_j\big)$, за све $i, j \in I$.

Ако уместо фамилије $\{E_i \mid i \in I\}$ имамо $\mathbb{R}^n$, онда се претходна дефиниција односи на сваку тополошку, глатку многострукост, димензије n.

Лема 4.1.1. Нека је M глатка многострукост и нека група G дејствује слободно и дискретно на M. Тада је количник простор M/G многострукост.

Доказ: [3]

Дефиниција 4.1.2. *Симплектичка многострукост* (P, ω) је многострукост на којој постоји затворена, недегенерисана 2-форма. Дакле, $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ и важи:
1. $d\omega = 0$
2. за сваки вектор X_p постоји вектор Y_p тако да је $\omega(X_p, Y_p) \neq 0$.

4.2 Тангентни простор

Дефиниција 4.2.1. Вектор $V_p \in \mathbb{R}^n$ је *тангентни вектор* на многострукост M у тачки p, ако постоји крива $\gamma : \mathbb{R} \to M$, тако да је $\gamma(0) = p$ и $\frac{d\gamma}{dt} \mid_{t=0} = V_p$. Скуп свих вектора V_p називамо *тангентна раван* на многострукост M, а унију свих тангентних равни T_pM, за све тачке $p \in M$ називамо *тангентни простор* многострукости M и означавамо TM.

Дефиниција 4.2.2. *Риманова метрика* g је глатко пресликавање које свакој тачки p многострукости M додељује скаларни производ на тангентној равни T_pM. Глатку многострукост M са Римановом метриком g називамо *Риманова* многострукост (M, g). Показује се (видети [3]), да на свакој глаткој многострукости постоји глатка Риманова метрика.

Нека је $f : M \to N$ глатко пресликавање многострукости M и N, тј. пресликавања у одговарајућим картама су глатка. Тада дефинишемо диференцијал пресликавања f, $df : M \to \mathrm{Lin}(TM, TN)$ на следећи начин:

$$df(p) = df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

при чему је

$$df_p(V_p) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma \mid_{t=0},$$

извод функције f у правцу вектора V_p, а $\gamma : M \to \mathbb{R}$ крива која задовољава $\gamma(0) = p$ и $\frac{d\gamma}{dt} \mid_{t=0} = V_p$. Користи се и ознака $f_{*p} \equiv df_p$.

Специјално, ако је (φ, U) карта многострукости M у тачки p, дакле $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, онда је $d\varphi_p : TpM \to \mathbb{R}^n$ пресликавање дефинисано са $d\varphi_p(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0)$. Показује се да је ово пресликавање бијекција, па се све операције са векторског простора $\mathbb{R}^n$ преносе на T_pM, дакле тангентна раван је $n-$димензиони векторски простор. Ако његову базу означимо са e_p^k, $k = 1, \dots, n$, онда је сваки вектор $V_p \in T_pM$ облика

$$V_p = \sum_{k=1}^{n} V_k(p) e_p^k,$$

где су $V_k(p)$, $k = 1, \dots, n$, реални бројеви.

Дефиниција 4.2.3. *Векторско поље* на многострукост M је глатко пресликавање $V : M \to TM$ тако да, за сваку тачку $p \in M$, важи $V(p) \equiv V_p \in T_pM$. Имајући у виду презентацију тангентне равни, свако векторско поље се може представити у облику

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_k e^k,$$

где су $V_k : M \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$, глатке функције, а $e^k, k = 1, \dots, n$ базна векторска поља.

Пример векторског поља је градијент ∇f, где је $f : M \to \mathbb{R}$ произвољна глатка функција. Он задовољава једначину

$$df_p(V_p) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma \mid_{t=0} = g(\nabla f(p), V_p),$$

при чему је $g(\cdot,\cdot)$ скаларни производ дефинисан на T_pM. Ако је и V произвољно векторско поље на M онда је $Vf : M \to \mathbb{R}$ глатка функција дефинисана са

$$Vf(p) = df_p(V_p).$$

Ако је $\widetilde{f}$ локални запис функције f, у карти са стандардном еуклидском метриком, онда је

$$Vf(p) = \sum_{k=1}^{n} V_k(p) \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^k},$$

па је зато оправдано узети локално за базна векторска поља

$$\frac{\partial}{\partial x^k}, k = 1, \ldots, n.$$

Даље, ако су $V = \sum_{k=1}^{n} V_k \frac{\partial}{\partial x^k}$ и $W = \sum_{k=1}^{n} W_k \frac{\partial}{\partial x^k}$ на околини U, онда је и метрика g на T_pU задата глатким функцијама $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$, па је

$$g(V, W) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} V_i W_j : U \to \mathbb{R}.$$

Лема 4.2.1. Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција и $f(p) = a$. Тада је $\overrightarrow{\nabla f}(p) \perp T_p f^{-1}(a)$.

Доказ: Нека је $X_p \in T_p f^{-1}(a)$ произвољан вектор. Тада постоји крива $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to f^{-1}(a)$ таква да је $\gamma(0) = p$ и $\frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} = X_p$. Следи,

$$g(X_p, \nabla f(p)) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma|_{t=0} = 0.$$

Последња једнакост важи зато што је $f \circ \gamma = a$. $\square$

Лема 4.2.2. У локалним координатама, за глатку функцију $f : M \to \mathbb{R}$ важи

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Доказ: [15].

Лема 4.2.3. Нека је $f : M \to N$ глатко пресликавање многострукости. Тада за свако $p \in f^{-1}(a)$ важи $T_p f^{-1}(a) \cong \operatorname{Ker} df(p)$.

Доказ: Нека је $X_p \in T_p f^{-1}(a)$ произвољан вектор. Као и у леми 4.2.1. је

$$df(p)(X_p) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma|_{t=0} = 0,$$

а последња једнакост важи зато што је $f \circ \gamma = a$. Дакле, $X_p \in \operatorname{Ker} df(p)$.$\square$

Дефиниција 4.2.4. *Комутатор векторских поља* X и Y је векторско поље $[X, Y]$ задато са

$$[X, Y](f) = XYf - YXf,$$

за сваку глатку функцију $f : M \to \mathbb{R}$.

Ако векторска поља X и Y напишемо у локалним координатама:

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial}{\partial x^k} \text{ и } Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

онда комутатор гласи:

$$[X, Y] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j \frac{\partial Y_k}{\partial x^j} - Y_j \frac{\partial X_k}{\partial x^j}) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Дакле, комутатор заиста јесте векторско поље.

Теорема 4.2.1. (Теорема о егзистенцији и јединствености решења диференцијалне једначине) Нека је M глатка многострукост, $X : M \to TM$ векторско поље. Посматрајмо следећу диференцијалну једначину:

$$\frac{d\phi(t, x)}{dt} = X \circ \phi(t, x), \;\; \phi(0, x) = x. \tag{4.2.1}$$

Тада важи:
а) За сваку тачку $p \in M$ постоји јединствена крива

$$\gamma_p = \phi(\cdot, p) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

која је решење дате диференцијалне једначине. Дакле:

$$\frac{d\gamma_g}{dt} = X \circ \gamma_p, \gamma_p(0) = p.$$

б)Ако је X векторско поље са компактним носачем, онда је решење дефинисано глобално, дакле решење је јединствена фамилија дифеоморфизама $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ и $\phi_t : M \to M$.
Важи и обрнуто, за сваку фамилију дифеоморфизама ϕ_t, $t \in \mathbb{R}$ постоји јединствено векторско поље које је њом генерисано, тј. тако да важи (4.2.1).

Наведимо још неке особине те фамилије:

1. $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} = \phi_s \circ \phi_t$
   дакле, дифеоморфизми комутирају.

2. $d\phi_t(p) : T_pM \to T_qM$, $q = \phi_t(p)$ је бијекција, за све $t \in \mathbb{R}$ и све тачке $p \in M$.
   Доказ: Нека је $Y_q \in T_qM$ произвољан вектор. Дакле, постоји крива γ, тако да је $\frac{d\gamma}{dt}\mid_{t=0}= Y_q$ и $\gamma(0) = q$. Нека је $\Gamma = \phi_t^{-1} \circ \gamma$. Тада за вектор $X_p = \frac{d}{dt}\Gamma \mid_{t=0}$ важи

$$d\phi_t(p)(X_p) = \frac{d}{dt}\phi_t \circ \Gamma \mid_{t=0}= \frac{d}{dt}\phi_t \circ \phi_t^{-1} \circ \gamma \mid_{t=0}= \frac{d\gamma}{dt} \mid_{t=0}= Y_q.$$

   Дакле $d\phi_t(p)$ је сурјективно, пошто је и линеарно, следи и инјективност.

4.3 Трансверзалност

Дефиниција 4.3.1. Нека је $f : M \to N$ $\mathcal{C}^r$ глатко пресликавање, $r \geqslant 1$ и $A \subseteq N$ глатка подмногострукост. Кажемо да је f *трансверзално на* A, ознака $f \pitchfork A$, ако у свакој тачки $p \in M$ важи

$$f(p) \in A \text{ и } T_{f(p)}N \cong T_{f(p)}A + df_p(T_pM)$$

или $f(p)$ није у A. Ако су $A, B \in N$ две глатке подмногострукости, кажемо да се оне *секу трансверзално* или да су *у општем положају,* ознака $A \pitchfork B$, ако је инклузија једне од њих у N трансверзална на другу.

Нека је $i : B \hookrightarrow N$ инклузија. Пошто је $di_p(X_p) = X_p$, онда је и $di_p(T_pB) \cong T_pB$, па важи

$$A \pitchfork B \text{ ако је } T_pN \cong T_pA + T_pB,$$

за сваку тачку $p \in A \cap B$.

Лема 4.3.1. Нека је $f : M \to N$ $\mathcal{C}^r$ глатко пресликавање, глатких многострукости и $r \geqslant 1$. Ако је $y \in f(M)$ регуларна вредност онда је $f^{-1}(y)$ подмногострукост од M.

Доказ: [2].

Лема 4.3.2. Нека је $f : M \to N$ $\mathcal{C}^r$ глатко пресликавање, $r \geqslant 1$. Ако је f трансверзално на $A \subseteq N$, онда је $f^{-1}(A)$ подмногострукост у M и $\operatorname{Codim} f^{-1}(A) = \operatorname{Codim}(A)$.

Доказ: [9].

Лема 4.3.3. Ако се две многострукости $A, B \in N$ секу трансверзално, онда је и њихов пресек многострукост, чија је димензија $\dim A + \dim B - \dim N$.

Доказ: Нека је $i : B \hookrightarrow N$ инклузија и $i \pitchfork A$. На основу претходне леме је $i^{-1}(A) = A \cap B$ подмногострукост од A, а самим тим и једна многострукост. Даље је $\operatorname{Codim} A \cap B = \operatorname{Codim} A$, тј. $\dim B - \dim A \cap B = \dim N - \dim A$ одакле следи тврђење. $\square$

Дефиниција 4.3.2. Нека су $f : M \to N$ и $g : W \to N$ глатка пресликавања. Пресликавање f је *трансверзално на* g, ознака $f \pitchfork g$, ако је

$$T_{f(x)}N = df(x)(T_xM) + dg(p)(T_pW),$$

за све $x \in M, p \in W$ за које је $f(x) = g(p)$.

Лема 4.3.4. Ако је $f \pitchfork g$ и $\|f - h\|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon$, за довољно мало ε, онда је и $h \pitchfork g$. Дакле, трансверзалност је $\mathcal{C}^1$ локално својство.

Доказ: [15].

4.4 Векторска раслојења

Дефиниција 4.4.1. Нека су B и E тополошки простори, пресликавање $\pi : E \to B$ непрекидно, НА и такво да је $\pi^{-1}(x)$ векторски простор над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, за свако $x \in B$. *Векторско раслојење* је уређена тројка (E, B, π) за коју постоји фамилија пресликавања $\{\phi_i, i \in I\}$ где је $\phi_i : U_i \times \mathbb{K}^n \to \pi^{-1}(U_i)$ хомеоморфизам и $\phi_i : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} \pi^{-1}(x)$ изоморфизам, при чему је $\{U_i \mid i \in I\}$ покривач простора B. Фамилију $\{\phi_i, i \in I\}$ називамо *тривијализацијом раслојења*, векторске просторе $\{\pi^{-1}(x), i \in I\}$ *влакнима* (или фибрама), а природан број n *рангом* раслојења. Некада и сам простор E називамо раслојењем. Скуп свих векторских раслојења са *базом* B означавамо $Vec(B)$. Ако постоји тривијализација $\phi_i : B \times \mathbb{K}^n \to E$, онда раслојење (E, B, π) називамо *тривијалним.*

Примери векторског раслојења су тангентно раслојење TM, где је $\pi : TM \to M$ дефинисано тако да је $\pi^{-1}(p) = T_pM \cong \mathbb{R}^n$ и његов дуал, котангентно раслојење T^*M. Погледати [3].

Дефиниција 4.4.2. *Сечење* векторског раслојења (E, B, π) је непрекидно пресликавање $s : B \to E$, које сваку тачку $x \in B$ слика у слој $\pi^{-1}(x)$, дакле важи $\pi \circ s = \mathrm{Id}_B$.

Свако векторско поље је сечење тангентног раслојења.

Лема 4.4.1. Векторско раслојење ранга k је тривијално ако и само ако постоји k сечења s_j, таквих да су $s_j(b)$ линеарно независни, за свако $b \in B$.

Доказ: Ако постоји тривијализација $\phi : B \times \mathbb{K}^k \stackrel{\cong}{\to} E$, онда сечења дефинишемо са $s_j(b) = \phi(b, e_j), j = 1, \ldots, k$, где су e_j, $j = 1, \ldots, k$, базни вектори у $\mathbb{R}^k$. У другом смеру, ако постоји k линеарно независних сечења, пошто је раслојење ранга k, дакле $\pi^{-1}(b) \cong \mathbb{R}^k$, онда су $s_1(b), \ldots, s_k(b)$ база за $\pi^{-1}(b)$, па је са

$$\phi(b, v) = v_1 s_1(b) + \cdots + v_k s_k(b)$$

дефинисана тривијализација раслојења E. □

Последица 4.4.1. Пошто је свако векторско раслојење локално тривијално, онда се свако сечење s локално може представити у облику

$$s = a_1 s_1 + \cdots + a_k s_k, \tag{4.4.1}$$

где су $a_j : B \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$ глатке функције.

Индуковано векторско раслојење. Нека је $h : B' \to B$ непрекидна функција и нека је (E, B, π) векторско раслојење. Тада је и (h^*E, B', π') векторско раслојење, где је

$$h^*(E) = \{(x, e) \in B' \times E \mid h(x) = \pi(e)\} \subset B' \times E, \quad \pi'(x, e) = x.$$

Локална тривијализација се остварује пресликавањима $\phi' : x \times \mathbb{R}^k \to \pi'^{-1}(x)$ дефинисаним са

$$\phi'(x, v) = (x, \phi(h(x), v)),$$

где је $\phi : h(x) \times \mathbb{R}^k \stackrel{\cong}{\to} \pi^{-1}(h(x))$ локална тривијализација раслојења (E, B, π).

4.5 Коваријантно диференцирање

Ако је $X : M \to TM$ векторско поље и

$$DX(p) : T_pM \to T_{X_p}TM$$

његов диференцијал, онда је *извод векторског поља X у правцу вектора Y_p* вектор $DX(p)(Y_p)$ који, осим у случају да је $M = \mathbb{R}^n$, не припада тангентној равни T_pM. Зато посматрамо његову пројекцију на T_pM.

Дефиниција 4.5.1. *Коваријантни извод векторског поља X* у правцу векторског поља Y је векторско поље

$$\nabla_Y X : M \to TM$$

дефинисано са

$$\nabla_{Y_p} X : p \mapsto \pi_p(DX(p)(Y_p)),$$

при чему је $\pi : M \to \mathrm{Lin}(TTM, TM)$ фамилија пројекција коју називамо *конексија.*

Оператор ∇ има следећа својства:

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + df(X)Y.$$

Ако оператор ∇ задовољава још и *Лајбницово правило:*

$$X_p\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_{X_p} Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_{X_p} Z\rangle$$

и *симетричност*:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

онда се он назива *Риманова* или *Леви-Чивитина конексија.*

Ако су e^k базна векторска поља, онда је

$$\nabla_{e^j} e^k = \sum_{i=1}^{n} \theta^i_{jk} e^i,$$

при чему глатке функције $\theta_{jk} : M \to \mathbb{R}$ називамо *Кристофеловим симболима.*

Ако векторско поље X представимо локално:

$$X_p = \sum_{k=1}^{n} a_k e^k_p$$

онда применом претходних формула добијамо:

$$\nabla_{Y_p} X_p = \sum_{k=1}^{n} \nabla_{Y_p} a_k e^k_p = \sum_{k=1}^{n} [da_k(p)(Y_p) e^k_p + a_k \nabla_{Y_p} e^k_p].$$

Даље,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \nabla_{Y_p} e^k_p = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1} b_j \sum_{i=1} \theta^i_{jk} e^i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_k \theta^i_k(p)(Y_p)) e^i,$$

где су $\theta_k^i : M \to T^*M$ 1-форме које називамо *формама конексије.* Дакле,

$$\nabla_{Y_p} X_p = \sum_{k=1}^{n} [da_k(p)(Y_p) + \sum_{i=1}^{n} a_i \theta_i^k(p)(Y_p)] e_p^k,$$

и

$$\nabla X = \sum_{k=1}^{n} [da_k + \sum_{i=1}^{n} a_i \theta_i^k] e^k \tag{4.5.1}$$

Нека је $\zeta = (E, B, \pi)$ векторско раслојење и $\mathcal{C}^\infty(\zeta)$ скуп свих сечења раслојења ζ. Тада је и $\xi = (\mathrm{Hom}(TB, E), B, \pi')$ векторско раслојење, при чему је $\pi'^{-1}(b) = \mathrm{Hom}(T_b B, \pi^{-1}(b) \equiv E_b)$ и $\mathcal{C}^\infty(\xi)$ скуп свих сечења раслојења ξ.

Дефиниција 4.5.2. *Конексија* на ζ је $\mathbb{R}$ линеарно пресликавање

$$\nabla : \mathcal{C}^\infty(\zeta) \to \mathcal{C}^\infty(\xi)$$

које задовољава Лајбницово правило

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla(s),$$

за свако сечење $s \in \mathcal{C}^\infty(\zeta)$ и сваку функцију $f \in \mathcal{C}^\infty(B, \mathbb{R})$, при чему је $df \otimes s : B \to \mathrm{Hom}(TB, E)$ тензорски производ и $df \otimes s(b)(X_b) = df(b)(X_b)s(b)$.

Дакле,

$$\nabla(s) : B \to \mathrm{Hom}(TB, E)$$

и

$$\nabla(s)(b) : T_b B \to \pi^{-1}(b) \equiv E_b.$$

Тада $\nabla(s)$ називамо *коваријантним изводом сечења* s, и користимо ознаку $\nabla_{X_b}(s) \equiv \nabla(s)(b)(X_b) \in E_b$.

Ако је (4.4.1) запис сечења s у околини U и ако сваки од сечења ∇s_k напишемо у облику

$$\nabla s_k = \sum_{k=1}^{n} \theta_i^k \otimes s_k,$$

где су θ_i^k 1-форме на U, онда применом претходних особина добијамо:

$$\nabla(s) = \sum_{k=1}^{n} [da_k + \sum_{i=1}^{n} a_i \theta_i^k] \otimes s_k,$$

што је у складу и са коваријантним изводом векторског поља 4.5.1.

Нека је $s : B \to E$ произвољно сечење. Тада је диференцијал

$$ds(b) : T_b B \to T_{s(b)} E.$$

Важи

$$T_{s(b)}E = V_{s(b)} \oplus H_{s(b)},$$

при чему је $V_{s(b)} = \operatorname{Ker} \pi_{*s(b)}$ вертикална компонента извода сечења s, а њена ортогонална допуна до $T_{s(b)}E$ је $H_{s(b)}$, хоризонтална компонента извода сечења s. Ако је $X_{s(b)} \in T_{s(b)}E_b$ произвољан вектор, дакле постоји крива $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E_b = \pi^{-1}(b)$ таква да је $\gamma(0) = s(b)$ и $\frac{d\gamma}{dt} \mid_{t=0} = X_{s(b)}$, онда је $\pi_{*s(b)}(X_{s(b)}) = \frac{d}{dt}\pi \circ \gamma \mid_{t=0} = 0$, јер је $\pi \circ \gamma = b$. Дакле, $X_{s(b)} \in \operatorname{Ker} \pi_{*s(b)} = V_{s(b)}$, па долазимо до закључка $E_b \cong T_{s(b)}E_b \cong V_{s(b)}$ и важи следећа лема:

Лема 4.5.1. Коваријантни извод сечења векторског раслојења је пројекција извода на вертикалну компоненту:

$$\nabla(s)(b) : T_bB \to V_{s(b)}.$$

Лема 4.5.2. Извод сечења је сурјекција на хоризонталну компоненту.

Доказ: Нека је $Y_{s(b)} \in H_{s(b)}$ произвољан вектор. Значи, постоји крива $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_{s(b)}E \mid_{H_{s(b)}}$ таква да је $\gamma(0) = s(b)$ и $\frac{d\gamma}{dt} \mid_{t=0} = Y_{s(b)}$. Тада је $Z_b = \pi_{*s(b)}(Y_{s(b)}) = \frac{d}{dt}\pi \circ \gamma \mid_{t=0}$ ненула вектор из T_bB. Следи, $ds(b)(Z_b) = \frac{d}{dt}s \circ \pi \circ \gamma \mid_{t=0} = \widetilde{Y}_{s(b)}$. Пошто је

$$\pi_*(\widetilde{Y}_{s(b)}) = \frac{d}{dt}\pi \circ s \circ \pi \circ \gamma \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}\pi \circ \gamma \mid_{t=0} = \pi_*(Y_{s(b)}),$$

а π_* је инјективно на $H_{s(b)}$, следи $\widetilde{Y}_{s(b)} = Y_{s(b)}$, тј. $ds(b)(Z_b) = Y_{s(b)}$. □

Последица 4.5.1. Сечење s је трансверзално на нулто сечење ако и само ако је коваријантни извод $\nabla s(b)$ сурјективан за свако $b \in B$такво да је $s(b)$ на нултом сечењу.

4.6 Уопштење-Флорова хомологија

Као што смо видели, Морсова теорија се бави проучавањем коначнодимензионих многострукости. Један облик уопштења на бесконачнодимензионе увео је *Floer* на следећи начин. Уместо коначнодимензионе многострукости M посматрамо Ω, бесконачнодимензиони простор глатких путева у T^*M [1] и Ω_1, потпростор путева који почињу и завршавају се у истој тачки, тј. задовољавају периодичне граничне услове. Дакле,

[1] уместо T^*M може се посматрати и произвољна тачна симплектичка многострукост, или многострукост чија је друга хомотопска група тривијална. За детаље погледати [4],[5],[10], [16]

$\Omega := \{\gamma : [0,1] \to T^*M\}$ и $\Omega_1 := \{\gamma : [0,1] \to T^*M \mid \gamma(0) = \gamma(1)\}$. Уместо Морсове функције посматрамо функционал дејства:

$$\mathcal{A}_H : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{A}_H(\gamma) := \int_0^1 \gamma^*\theta - H_t(\gamma(t))dt,$$

при чему је θ Лиувилова форма на симплектичкој многострукости (T^*M, ω) тј. $d\theta = -\omega$ и H глатка функција (Хамилтонијан), тако да је $\omega(X_H, \cdot) = dH$. Његове екстремале су Хамилтонови путеви. Заиста, ако је $\xi \in T_\gamma\Omega$ произвољан вектор, следи

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)(\xi) = -\int_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma} - X_H(\gamma))dt + \theta(\gamma(1))\xi - \theta(\gamma(0))\xi.$$

За $\gamma \in \Omega_1$ последња два сабирка у горњем изразу су једнака нули, па су критичне тачке рестрикције функционала дејства на Ω_1, због недегенерисаности форме ω, путеви који задовољају услов $\dot{\gamma} = X_H(\gamma)$, односно периодични Хамилтонови путеви. Дакле генератори Флорове хомологије су решења система

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = X_H(\gamma) \\ \gamma(0) = \gamma(1) \end{cases} \tag{4.6.1}$$

Ако је Хамилтоново векторско поље X_H генерисано фамилијом $\phi_t^H : M \to M$, онда је број решења овог система једнак броју фиксних тачака дифеоморфизма ϕ_1^H. Заиста, ако γ задовољава 4.6.1, онда због јединствености решења диференцијалних једначина, следи да је $\gamma(t) = \phi_t(x)$, за неко фиксирано $x \in M$. Даље је

$$\phi_1^H(x) = \gamma(1) = \gamma(0) = \phi_0^H(x) = x.$$

Дифеоморфизам ϕ_1^H је хомотопан идентитети, па на основу Лефшецове теореме важи да је број фиксних тачака већи или једнак од $\chi(M)$, Ојлерове карактеристике многострукости. Међутим, како је код неких многострукости, нпр. торуса, Ојлерова карактеристика једнака нули, онда нам ова оцена не значи ништа. Зато треба искористити Морсове неједнакости. Претпоставимо да је Хамилтонијан Морсова функција. Ако је $x \in M$ фиксна тачка за ϕ_1^H онда је $\phi_1^H(x) = x = \phi_0^H(x)$. Пошто је ϕ_t^H градијентна трајекторија, онда H опада дуж ϕ_t^H, али пошто је $H(\phi_1^H(x)) = H(\phi_0^H(x)))$ следи да је трајекторија константна тј. $\phi_t^H(x) = x$. Пошто је

$$\frac{d\phi_t^H(x)}{dt} = -\nabla H \circ \phi_t^H(x)$$

следи да је $dH(x) = 0$, тј. фиксна тачка дифеоморфизма $\phi_1^H(x)$ је критична тачка Хамилтонијана H. Дакле, број Хамилтонових орбита једнак је броју критичних тачака Морсове функције H, па на основу теореме 1.3.1. следи да је тај број већи или једнак од $\sum_{k=0}^n \dim H_k(M)$, што значи да сваки систем (4.6.1) има бар једно решење.

4.7 Теореме о стабилној и нестабилној многострукости

Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција на компактној Римановој многострукости (M, g) и нека је $\dim M = n$. На основу Теореме о егзистенцији и јединствености решења диференцијалних једначина (Теорема 4.2.1.) постоји јединствена фамилија дифеоморфизама $\varphi_t : M \to M,\ t \in \mathbb{R}$ таква да важи

$$\frac{d\varphi_t}{dt} = -\nabla f \circ \varphi_t,\ \ \varphi_0(p) = p.$$

Нека је $p \in M$ недегенерисана критична тачка функције f. Као што смо видели у глави 2. *стабилна многострукост тачке* p је

$$W^s(p) = \{x \in M \mid \lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = p\},$$

а *нестабилна многострукост тачке* p је

$$W^u(p) = \{x \in M \mid \lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x) = p\}.$$

Лема 4.7.1. Ако је $p \in U$ критична тачка, а $\frac{\partial}{\partial x^k},\ k = 1, \ldots, n$ ортонормирана база на T_pU, дакле

$$g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

тада је матрица диференцијала од $\nabla f : U \to R^n$ једнака матрици Хесијана H_pf.

Доказ: [15].

Лема 4.7.2. Ако је $p \in U$ критична тачка, а $\frac{\partial}{\partial x^k},\ k = 1, \ldots, n$ ортонормирана база на T_pU, тада је матрица диференцијала од φ_t у тачки p једнака матрици од e^{-H_pft}.

Доказ: [15].

Дефиниција 4.7.1. Фиксна тачка $p \in M$ дифеоморфизма $\varphi : M \to M$ је *хиперболичка* ако ниједна сопствена вредност диференцијала $d\varphi_p : T_pM \to T_pM$ није једнака 1.

Дефиниција 4.7.2. Пресликавање $G : E \to E'$ Банахових простора је *Липшицово* ако постоји $k \geqslant 0$ тако да за све $x, y \in E$ важи

$$\| G(x) - G(y) \| \leqslant k \| x - y \| .$$

Липшицова константа $Lip(G)$ је најмање такво k :

$$Lip(G) = \inf\{k \geqslant 0 \mid \ \| G(x) - G(y) \| \leqslant k \| x - y \|, \text{ за све } x, y \in E\}.$$

Ако је $0 < Lip(G) < 1$ онда кажемо да је пресликавање G *контрактибилно.*

Ако је p недегенерисана критична тачка индекса k, онда постоји база на T_pU тако да је матрица од H_pf дијагонална,а на дијагонали се налази k негативних $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и $n-k$ позитивних сопствених вредности $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n$. На основу претходне леме, тада је матрица диференцијала $d\varphi_t$ једнака:

$$\begin{bmatrix} e^{-\alpha_1 t} & & \cdots & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{-\alpha_k t} & & & \vdots \\ & & & e^{-\beta_{k+1} t} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & & e^{-\beta_{k+1} t} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Дакле, ако је $t \neq 0$, онда је p хиперболичка тачка дифеоморфизма φ_t. Тангентни простор T_pM се може представити у облику $T_pM \approx T_p^sM \oplus T_p^uM$, при чему је Хесијан H_pf позитивно-дефинитан на T_p^sM и негативно-дефинитан на T_p^uM, а пресликавање

$$d\varphi_t(p) : T_p^sM \to T_p^sM$$

је контрактибилно.

За произвољно пресликавање $\varphi : E_s(r) \times E_u(r) \to E_s(r) \times E_u(r)$ дефинишимо *стабилан скуп* од φ са

$$W_r^s(\varphi) = \{x \in E_s(r) \times E_u(r) \mid \forall n \geqslant 0,\ \varphi^n(x) \text{ је дефинисано и } \|\varphi^n(x)\| \leqslant r\}$$

и *нестабилан скуп* од φ са

$$W_r^u(\varphi) = W_r^s(\varphi^{-1}).$$

Теорема 4.7.1. (Локална теорема за стабилне многострукости) Постоји $\varepsilon > 0$, које зависи само од k, и за све $r > 0$ и $\delta > 0$ такве да, ако $\varphi : E_s(r) \times E_u(r) \to E_s(r) \times E_u(r)$ задовољава $Lip(\varphi - T) < \varepsilon$ [2] и $\|\varphi(0)\| < \delta$ онда је W_r^s график Липшицове функције $g : E_s(r) \to E_u(r)$ при чему је $Lip(g) \leqslant 1$. Ако је φ глаткости $\mathcal{C}^1$,$\varphi(0) = 0$ и $d\varphi_0 = T$, онда је $g(0) = 0$ и $dg_0 = 0$, па је

$$T_0W_r^s(\varphi) \cong E_s.$$

Доказ: [15].

Теорема 4.7.2. (Глобална теорема за стабилне многострукости) Ако је $\varphi : M \to M$ дифеоморфизам коначнодимензионе многострукости M и ако је $p \in M$ хиперболичка фиксна тачка, онда је

$$W_p^s(\varphi) = \{x \in M \mid \lim_{n\to+\infty} \varphi^n(x) = p\}$$

[2] $T : E_s(r) \times E_u(r) \to E_s(r) \times E_u(r)$ је *Липшицова пертурбација* од φ

подмногострукост од M и $T_pW_p^s(\varphi) \cong T_p^sM$. Такође, постоји и глатка, 1-1 имерзија

$$E^s : T_p^sM \to W_p^s(\varphi).$$

Доказ: [15].

Ако у претходној теореми уместо φ посматрамо φ^{-1} имамо и следећу теорему:

Теорема 4.7.3. (Глобална теорема за нестабилне многострукости) Ако је $\varphi : M \to M$ дифеоморфизам коначнодимензионе многострукости M и ако је $p \in M$ хиперболичка фиксна тачка, онда је

$$W_p^u(\varphi) = \{x \in M \mid \lim_{n \to -\infty} \varphi^n(x) = p\}$$

подмногострукост од M и $T_pW_p^u(\varphi) \cong T_p^uM$. Такође, постоји и глатка, 1-1 имерзија

$$E^u : T_p^uM \to W_p^u(\varphi).$$

Дефиниција 4.7.3. Нека је ξ векторско поље на коначнодимензионој многострукости M. Критична тачка $p \in M$, тј. таква да је $\xi(p) = 0$, је *хиперболичка* ако $d\xi(p) : T_pM \to T_pM$ нема јединичне сопствене вредности.

Показује се да је тачка p хиперболичка за векторско поље ако и само ако је хиперболичка за сваки дифеоморфизам ϕ_t генерисан тим векторским пољем. И специјално за $\xi = \nabla f$ постоје хомеоморфизми на слике:

$$E^s : T_p^sM \to W_p^s(\varphi)$$
$$E^u : T_p^uM \to W_p^u(\varphi)$$

што заједно са претходним теоремама значи да су $W_p^s(\varphi)$ и $W_p^u(\varphi)$ подмногострукости од M. За детаље погледати [15].

Литература

[1] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.

[2] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Univerity of Virginia Press, Charlottesville,1965.

[3] В. Драговић, Д. Милинковић, Анализа на многострукостима, Математички факултет, Београд, 2003.

[4] M. Schwarz, *Morse Homology,* Birkhauser, 1993.

[5] D. Salamon, *Lectures on Floer homology, in: Symplectic Geometry and Topology*, (L. Traynor and Ya. Eliashberg, eds.), IAS Park City Math. Series, AMS, 7, 1999.

[6] Н. Блажић, Н. Бокан, Увод у диференцијалну геометрију, Математички факултет, Београд, 1996.

[7] J. Plotkin, *Cobordism and Exotic Spheres*, A Senior Honors Thesis Submitted to The Department of Mathematics, Harvard Univeristy, Cambridge, 1999.

[8] Y. Chen, *A brief history of Morse homology,* student work.

[9] M. Hirsh, *Differential topology*, SpringerVerlag, New York, 1976.

[10] Ј. Катић, Градијентне трајекторије, холоморфни дискови и комутативност дијаграма у Морс- Флоровој теорији, Магистарски рад одбрањен на Математичком факултету Универзитета у Београду, 2004.

[11] M. Spivak, *Differential geometry*, Houston, Texas, 1999.

[12] Yukio Matsumoto, *An introduction to Morse theory*, the American Mathematical society, 2002.

[13] M. Goresky, R MacPherson *Stratified Morse theory*, SpringerVerlag, 1987.

[14] J. Milnor, J. Stasheff *Characteristic classes*, Princeton, New Jersey 1974.

[15] A. Banyaga, D. Hurtubise *Lectures on Morse Homology*, The Pennsylvania State University, 2004.

[16] J. Катић, Модулски простори комбинованог типа у Морс-Флоровој теорији Докторска дисертација, Математички факултет Универзитета у Београду, 2008.