UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

mr RADIVOJE P. DESPOTOVIĆ

GRANIČNI PROCESI U NASTAVI MATEMATIKE POZIVNOUSMERENOG SREDNJEG OBRAZOVANJA

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 1983.god.

S A D R Ž A J

i korigovanja dotadašnjeg toka "modernizacije" nastave matematike. U tom smislu je veliki broj saopštenja bio posvećen načinu interpretacije pojedinih značajnih programskih sadržaja na pojedinim stupnjevima matematičkog obrazovanja (predškolski, osnovni, srednji, viši i visoki).

Održavanje svetskih kongresa za nastavu matematike i prisustvo na njima, pored neposrednih izvodjača nastave matematike i najeminentnijih matematičara sveta, samo potvrdjuju mišljenje o neophodnosti posvećivanja pune pažnje pitanjima nastave matematike i to sa tri osnovna stanovišta: sadržaji metode i sredstva. Ovome treba dodati i jedno od najznačajnijih pitanja vezanih za proces matematičkog obrazovanja, a to je pitanje pripremanja nastavnika koji će ne samo dobro poznavati matematičke sadržaje obuhvaćene nastavnim programom, već i koji će imati znatno širu matematičku kulturu i obrazovanje i koji će biti tako pripremljeni u metodičkom pogledu da mogu uspešno koristiti u nastavnom procesu najsavremenije didaktičke principe, metode i oblike, kao i najsavremenija sredstva (ne samo udžbenik). Sve to treba da doprinosi racionalizaciji i intenzifikaciji nastavnog procesa a samim tim i većim efektima u matematičkom obrazovanju. Logično je da se ovakva pripremljenost nastavnika može ostvariti ne samo solidnim savladjivanjem stručnih sadržaja pojedinih matematičkih disciplina, već i kroz dobro koncipiran i solidno realizovan kurs metodike matematike na fakultetima za obrazovanje nastavnika matematike.

Teorijski posmatrano, pitanja metodike matematike kao posebne matematičke discipline i odnos matematike kao nauke i nastave matematike, dovoljno su razradjena, objašnjena i precizirana, tako da tim pitanjima nećemo posvećivati ovde posebnu pažnju. Medjutim izuzetnu pažnju zaslužuje pitanje praktične realizacije metodike nastave matematike u kontekstu ukupnog pripremanja (školovanja) izvodjača nastave matematike na svim stupnjevima matematičkog obrazovanja. Ovo ...

pitanje:se ne može više tretirati kao nešto što će doći samo po sebi, odnosno da će se izvodjači nastave matematike metodički osposobiti kroz rad sa učenicima, pod uslovom da oni samo dobro znaju struku. Takvo gledanje se zasniva na pojedinačnim primerima nastavnika matematike koji su se samostalno osposobili i razvili u dobre nastavnike, a da prethodno nisu prošli kroz metodičko pripremanje za nastavu koju obavljaju. Takvi primeri su pre rezultat idealnog spoja svih činjenica koji će jednog nastavnika učiniti dobrim po rezultatima koje učenici postižu i po razvijenom interesu za matematiku itd., nego što su zaista posledica prave metodičke osposobljenosti samog nastavnika. Ni za jedan posao, a posebno za one veće složenosti u koje spada i obrazovanje i vaspitanje, ne mogu se dati samo opšta i uže stručna znanja za njegovo uspešno obavljanje, već i solidna praktična znanja, veštine i navike. Kada je reč o nastavničkom kadru za nastavu matematike u osnovnoj i srednjoj školi, mora postojati sistem u pripremanju nastavnika i njihovom daljem usavršavanju, koji obuhvata matematičko, pedagoško, psihološko, metodičko i opšte idejno obrazovanje.

Na nastavničkim fakultetima u SFRJ pitanje metodičkog obrazovanja i osposobljavanja nastavnika je u procesu rešavanja i rezultati tog procesa su vrlo različiti idući od republike do republike, odnosno od fakulteta do fakulteta. Te razlike se ogledaju pre svega u zastupljenosti predmeta METODIKA MATEMATIKE u natavnom planu pojedinih fakulteta (većina fakulteta ga ima, ali u nekim nastavnim planovima taj predmet ne postoji!), zatim u fondu časova sa kojim se taj predmet realizuje i najzad u programskim sadržajima tog predmeta i načinu njihove interpretacije i realizacije. S obzirom da su prve dve navedene razlike takve prirode da zahtevaju ne samo stručna razmatranja, to se na njima nećemo zadržavati. Pozabavićemo se samo programom metodike matematike na fakultetima sa stanovišta po kome on treba da obezbedi fundamentalnu predspremu i pripremljenost budućeg nastavnika matematike bilo u osnovnoj, bilo u srednjoj školi.

Uvidom u sadržaje programa METODIKE MATEMATIKE nekih fakulteta [2] konstatovali smo da postoje značajne razlike, kako u njihovoj strukturi, tako i po izboru sadržaja gradiva.

Najpre ćemo se ukratko zadržati na onome što im je zajedničko. Svi ovi programi sadrže uglavnom dva osnovna dela: opšti i posebni. Opšti se javlja pod različitim nazivima ali najčešće kao opšta metodika ili metodika I, dok se posebni sreće najčešće pod nazivom: posebna metodika ili metodika II. Treba naglasiti da ovakva podela potiče iz ranijeg perioda, gde se pod prvim delom podrazumevala DIDAKTIKA, a pod drugim METODIKA predmeta. Takva podela danas nema opravdanja, jer je METODIKA MATEMATIKE samostalna jedinstvena naučna disciplina, isto kao što važi i za DIDAKTIKU. Problemi vaspitanja i obrazovanja danas najčešće zahtevaju interdisciplinarnost u njihovom izučavanju, pa se otuda i ove posebne discipline često upućuju jedna na drugu. Iako metodiku matematike smatramo

---

2) To su: a) Plan i program metodike matematike Prirodno matematičkog fakulteta u Novom Sadu, predvidjen za A smer (nastavnički) u školskoj 1981/82. godini; b) Program metodike matematike na Prirodno matematičkom fakultetu u Zagrebu u školskoj 1970/71. godini i c) Program metodike matematike Pedagoškog fakulteta u Osijeku za školsku 1981/82. godinu, a taj program se od pre nekoliko godina realizuje i na Prirodoslovno matematskom fakultetu u Zagrebu.

samostalnom disciplinom, ona mora da koristi saznanja i rezultate drugih nauka, a pre svega saznanja do kojih se došlo u savremenim teorijama učenja. Mi ćemo ukratko analizirati programe nastave metodike matematike na nekim fakultetima na osnovu postojećih programa koji po pravilu sadrže prvi i drugi deo.

U prvom delu ovih programa najčešće se nalaze i pitanja iz sistema vaspitanja i obrazovanja, ciljevi i zadaci nastave matematike, modernizacija nastave matematike, didaktički principi i metode u nastavi matematike, tipovi časova u nastavi matematike i njihova struktura itd. Razlike u ovom delu kod razmatranih programa uglavnom se odnose na odredjene elemente savremenijeg pristupa nastavi matematike (neki programi na pr. imaju i ovo: kibernetski model učenja i nastave, obrazovna tehnologija u nastavi matematike i sl.)

U drugom delu se javljaju velike razlike, kako po obimu predvidjenog gradiva, tako i po njihovom sadržaju. Analizirajući i uporedjujući posebno ove delove programa metodike matematike sa tri fakulteta (u Zagrebu, Osijeku i u Novom Sadu), dolazimo do zaključka da je nedovoljna pažnja posvećena stručnoj i metodičkoj obradi najvažnijih sadržaja koje će budući nastavnici matematike imati da realizuju u školi. Zato smatramo da bi POSEBNA METODIKA kao deo programa METODIKE MATEMATIKE morala da sadrži stručno-metodičku razradu najvažnijih pojmova i oblasti iz programa matematike za osnovnu i srednju školu. Ako student matematike, pored pedagoško-psihološkog obrazovanja, ima u programu studija i metodiku nastave matematike, u tom slučaju bi ta metodika mogla da da obuhvati u ovom drugom delu i sledeće teme: 1) Istorijska evolucija, stručno tumačenje i metodička interpretacija pojma broja (prirodni, racionalni, celi, realni i kompleksni) u zavisnosti od uzrasta učenika; 2) Propedevtika euklidske geometrije; 3) Sistematski kurs euklidske geometrije i različiti načini njegove interpretacije

(Hilbertov sistem aksioma i njegove modifikacije, Klajnove grupe transformacija, vektorski - Vejl); 4) Geometrijske konstrukcije; 5) Izgradjivanje pojmova vezanih za matematičke sttukture; 6) Matematički jezik, logika i skupovi i njihovo mesto u nastavi matematike; 7) Relacije, preslikavanja (funkcije) i operacije; 8) Elementarne funkcije - priprema za uvodjenje, način definisanja (posebno algebarske i transcedentne) i njihovo proučavanje; 9) Približna izračunavanja u nastavi matematike u osnovnim školama; 10) Granični prelaz i granica u nastavi matematike srednje škole; 11) Mera skupa i metodička interpretacija pojma merenja i mere u osnovnoj i srednjoj školi; 12) Jednačine, nejednačine, sistemi jednačina, sistemi nejednačina; pojam, ekvivalentnost, rešivost, rešavanje i primena; 13) Sintetička i analitička metoda u nastavi matematike kroz konkretne sadržaje; 14) Propedevtika topologije u nastavi matematike; 15) Klasična i aksiomatska teorija verovatnoće i metodička interpretacija u nastavi matematike; 16) Opisna i teorijska statistika u nastavi matematike; 17) Osnovi diskretne matematike i njeno mesto u nastavnim programima; 18) Osnovna područja primene matematike; 19) Istorijski razvoj i geneza najvažnijih pojmova iz programa matematike za osnovnu i srednju školu; 20) Savremena nastavna tehnologija i njena funkcija u nastavi matematike i sl.

Budući izvodjači nastave matematike trebali bi u toku studija u okviru kursa METODIKE MATEMATIKE da pripreme bar jedan seminarski rad iz neke od navedenih tema, prikazujući genezu najvažnijih pojmova te teme, zatim stručnu interpretaciju tih pojmova na današnjem nivou razvoja matematike i metodičku interpretaciju onih pojmova koji se nalaze u školskim programima i to zavisno od uzrasta učenika (za osnovnu i za srednju školu).

Savremena didaktika i pojedina istraživanja u okviru školske psihologije, posebno razne teorije učenja, imaju jedan isti cilj, da obrazovanje bude uspešnije, učenje ekonomičnije i nastavni proces savremeniji u nastavi svakog predmeta i na svim stupnjevima obrazovanja i vaspitanja. To je polazna osnova i za savremenu metodiku matematike. Imajući u vidu da savremena metodika matematike sve više postaje samostalnija naučna disciplina koja se u isto vreme javlja i kao interdisciplinarna nauka koristeći rezultate drugih nauka, a pre svega matematike, pedagogije, psihologije, teorije intelektualnog vaspitanja i didaktike, ističemo da se ona mora baviti unapredivanjem nastave matematike na svim nivoima obrazovanja (predškolskom, osnovnom, srednjem, višem i visokom), što zahteva šire i dublje matematičke studije i šira matematička, pedagoška i psihološka znanja. Po našem mišljenju metodikom matematike ne mogu se suvereno i izolovano baviti samo pedagozi i psiholozi (jer im nedostaje šire i dublje matematičko obrazovanje), već prvenstveno njome treba da se bave oni matematičari koji imaju i odredjena znanja iz pedagogije i psihologije. Ipak, do sada su se problemima nastave matematike i uzrocima neuspeha u ovoj nastavi najviše bavili pedagozi, nešto manje psiholozi, a najmanje matematičari. To potvrdjuju brojna istraživanja u oblasti raznih teorija učenja, zatim istraživanja u domenu razvijanja intelektualnih sposobnosti učenika za savladjivanje matematičkih sadržaja i najzad veliki broj istraživanja o uzrocima neuspeha u nastavi matematike. Kao uzroci tog neuspeha najčešće se spominju: nedovoljna stručna i didaktičko-metodička osposobljenost nastavnika za realizaciju pojedinih programa; organizacija, izvodjenje i didaktička artikulacija nastave; nesklad izmedju zahteva nastavnog programa i intelektualnog razvoja, odnosno mogućnosti učenika i dr. Medjutim, metodika matematike nije jedini faktor koji utiče na neuspeh u nastavi matematike, iz čega proizilazi da se samo poboljšanjem nastave metodike matematike neće otkloniti i svi uzroci tog neuspeha. Ona -analizom programa i planova, strukturiranjem nastavnih programa, ispitivanjem psiholoških faktora koji utiču na nastavu, traženjem metodičkih rešenja, odnosno traženjem najoptimalnijih uslova za ostvarivanje zadataka nastave ili ukazivanjem na nedostatke rešenja za obradu pojedinih pojmova" ('124', str. 95), samo delimično otklanja uzroke neefikasnosti nastave i pomaže da se ostvare bolji efekti, dok mnogi drugi faktori ostaju neobuhvaćeni, posebno oni iz domena materijalnih, socijalnih i drugih uslova života i rada učenika i nastavnika. Većim nastavnim efektima kroz intenzivniji i produktivniji nastavni proces treba da doprinesu i rezultati raznih istraživanja iz oblasti teorije učenja. Ali, da bi jedna savremena teorija bila prihvaćena i široko primenjivana u nastavnoj praksi odredjenog predmeta, neophodno je učiniti napor da se ta i takva teorija aplicira na sadržaje baš tog predmeta. Bez obzira što se u svakoj teoriji učenja utvrdjuju opšti zaključci i daju mišljenja i predlozi za rad u nastavnom procesu kroz istraživanje na jednom odredjenom gradivu, ipak je potrebno za neke predmete ili grupe predmeta istraživati i utvrdjivati i posebne zaključke i metode rada u nastavnom procesu. Zato su se "fizičari, biolozi, matematičari, istoričari, pedagozi i psiholozi okupili da iznova razmotre prirodu procesa učenja, njegov značaj za proces obrazovanja, kao i sva ona pitanja proizišla iz nastojanja da se unapredi postojeći kurikulum"[3] ('19', strana 276). Isto tako često se dešava da je nastavnik upoznao teorijski-didaktiku, i metodiku svoga predmeta, ali je on nedovoljno osposobljen da je primenjuje u svojoj svakodnevnoj praksi, jer su ta teorijska znanja najčešće nedovoljno aplikativna. Pojednostavljeno rečeno nastavniku matematike u osnovnoj i srednjoj školi potrebno je sistematsko osposobljavanje u primeni tih teorijskih znanja na konkretne sadržaje iz programa koje on realizuje. Tendencije da se zadovolje ovakve potrebe potvrdjuje i činjenica da se pitanjima didaktike i metodike matematike

---

3) Pod kurikulumom ovde treba podrazumevati uglavnom tok nastavnog procesa počev od odabiranja programskih sadržaja nekog predmeta, zatim razradu tih sadržaja na nastavne jedinice, pisane pripreme tih nastavnih jedinica u formi kako bi trebalo da teče čas u učionici, nastavna i tehnička sredstva potrebna za realizaciju programskih sadržaja, metode i oblike rada na času itd.

bavi u poslednje vreme i "Referativni žurnal - Matematika" koji izdaje Akademija nauka SSSR (Moskva), prikazujući posebno saopštenja iz nastave matematike. Takodje, pojedini brojevi poznatog časopisa "Der Mathematikunterricht" (Ernst Klett Verlag, Stuttgart) posvećeni su pitanjima nastave osnova matematičke analize u srednjoj školi, kao i drugih nastavnih matematičkih disciplina.

Sve što je napred izloženo ukazuje sasvim dovoljno i jasno na potrebu i opravdanost da se pristupi svestranoj obradi - stručnoj i metodičkoj - jedne tako značajne teme kao što je tema GRANIČNI PROCESI[4] U NASTAVI MATEMATIKE POZIVNOUSMERENOG SREDNJEG OBRAZOVANJA, koja je vezana za program matematike, posebno matematičke analize, u srednjoj školi. Primena graničnih procesa u nastavi matematike u velikoj meri je povećana poslednjih godina. Sve to uslovljava potrebu za temeljnim naučnim istraživanjima ove problematike sa stanovišta realizacije graničnih procesa u nastavi matematike na srednjem stupnju, što temu čini reprezentativnom i u podjednakoj meri značajnom za matematiku kao nauku, a posebno za nastavu matematike.

Pod graničnim procesom ovde se podrazumeva takav tok i način promena u kome neka veličina teži svojoj graničnoj vrednosti u zavisnosti od promena, na odredjeni način, neke druge veličine. Granični proces karakteriše ponašanje nezavisno promenljive, tok njenih promena, granični prelaz i sama granica. Najčešće je reč o dve osnovne vrste graničnih procesa: prvi procesi se odnose na odredjivanje relativne brzine dveju promena, što se matematički svodi na traženje granice količnika dveju beskonačno malih veličina, a drugi procesi se odnose na traženje granice zbira u kojem broj sabiraka neograničeno raste, dok sami ti sabirci teže nuli.

---

4) Stewart, Ian: Concepts of Modern Mathematics, 1975., Chapter 16, Real Analysis, str. 299. "The three cornerstones of modern mathematics are algebra, topology, and <u>analysis</u> .. Analysis might be described as the study of <u>infinite processes</u>, such as infinite series, limits differentiation and integration". ("Algebra topologija i <u>analiza</u> su tri kamena temeljca savremene matematike. Analiza se može opisati kao ispitivanje <u>beskonačnih procesa</u> takvih kao što su beskonačni redovi, granice, diferenciranje i integraljenje" (podvukao R.D.)

Bez tih pojmova ne mogu se ni zamisliti mnoge današnje matematičke discipline u prvom redu teorija realnih funkcija jedne i više promenljivih, teorija kompleksnih funkcija, funkcionalna analiza, teorija diferencijalnih i parcijalnih jednačina, teorija redova, diferencijalna geometrija, teorija linearnih operatora i dr. Pojmovi iz graničnih procesa spadaju medju najznačajnije pojmove savremene matematike, posebno matematičke analize, ali su istovremeno najsloženiji i najsuptilniji pojmovi u nastavi matematike srednje škole. Od načina na koji se interpretiraju programski sadržaji iz graničnih procesa, od uočavanja stožernih pojmova i logičkog vezivanja ostalih pojmova za ove predhodne, od strukturiranja gradiva pojedinih tema, osnosno celina u kojima se javljaju granični procesi, umnogome zavise i efekti u nastavi matematike srednje škole. Zato je naš zadatak bio da se istraži, prouči i savremenije postavi nastava o graničnim procesima u srednjoj školi sa stanovišta njihove istorijsko-genetske osnove, teorijsko-stručne interpretacije najvažnijih pojmova, programsko-sadržajnog prisustva tih procesa u školskim programima, didaktičko-metodičkog pristupa njihovoj obradi u srednjoj školi i eksperimentalne provere efikasnosti obrade jedne od najvažnijih tema iz graničnih procesa - GRANICA FUNKCIJE - pomoću posebno strukturiranog gradiva ove teme. Ovakav pristup u obradi teme GRANIČNI PROCESI U NASTAVI MATEMATIKE POZIVNOUSMERENOG SREDNJEG OBRAZOVANJA uslovilo je sledeću strukturu rada: I UVOD, II ISTORIJSKI RAZVOJ GRANIČNIH PROCESA, III GRANIČNI PROCESI U ŠKOLSKIM PROGRAMIMA, IV NEKA STRUČNO-METODIČKA PITANJA INTERPRETACIJE SADRŽAJA IZ GRANIČNIH PROCESA i V DIDAKTIČKO-METODIČKA OBRADA TEME: GRANICA FUNKCIJE (istraživanje).

U UVODU je dat pristup temi i istaknut je njen značaj za nastavu graničnih procesa u srednjoj školi.

Drugi deo sadrži hronološki istorijski razvoj najvažnijih pojmova iz graničnih procesa, odnosno pojma beskonačnosti, pojma graničnog prelaza i pojma granice. Počinje se sa tim pojmovima u vidu nagoveštaja kod nekih starih naroda, da bi se posebno mesto dalo metodi ekshaustije i metodi nedeljivih. Naš matematičar J.Karamata u jednom svom naučnom saopštenju ([66], str. 99) ističe: "Iako pojam g r a n i c e, prelaz ka g r a n i c i i granični procesi nisu postojali (u antičkoj matematici – naša napomena) u današnjem smislu, ipak Eudoxosova ekshaustiona metoda i izvanredni radovi Arhimeda o komplanaciji i kubaturi, kao i kvadraturi kruga i parabole pokazuju sa kolikom se brižljivošću već tada pristupalo ovim suptilnim problemima". Posebno je istaknut doprinos Leibnitza i Newtona u razvoju graničnih procesa, a kasnije i Eulera i drugih matematičara XVIII i XIX veka. Ovaj deo se završava istorijskim prikazom konstituisanja teorije granica radovima i monografijama francuskog matematičara A.Cauchya u prvoj polovini XIX veka.

Ceo treći deo je posvećen analizi nastavnih planova i programa u svetu i kod nas sa stanovišta prisutnosti graničnih procesa u njima. Tu je dat i program matematičke analize za III i IV razred pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja za matematičku struku u SAP Vojvodini, pri čemu je izvršena odredjena komparacija sa ostalim programima u pogledu sadržaja iz graničnih procesa. Analizirani su i različiti putevi i načini u realizaciji programskih sadržaja iz graničnih procesa u srednjoj školi.

Četvrti deo sadrži stručno-metodičku interpretaciju najvažnijih pojmova iz graničnih procesa na nivou srednje škole. Naime, najčešće se ovi sadržaji interpretiraju isto onako kao se to čini na višim školama i fakultetima, iako je poznato da se i ovde moraju uvažavati psihofizičke odlike učenika srednjoškolskog uzrasta. Zato su posebno obradjena neka pitanja iz graničnih procesa sa stanovišta njihove metodičke interpretacije na nivou srednje škole. Pri tome je posebna pažnja poklonjena temi GRANICA FUNKCIJE, čiji su sadržaji bili predmet eksperimentalne provere.

U petom delu dat je kompletan prikaz sprovedenog istraživanja na temu GRANICA FUNKCIJE. Dalje sledi objašnjenje teorijske osnove i metodologije istraživanja, zatim kratak prikaz korišćenih instrumenata i najbitnije karakteristike istraživanja. Posebnu pažnju smo posvetili interpretaciji dobijenih rezultata, posle čega su izvedeni odredjeni sudovi o celokupnom istraživanju i njegovim rezultatima.

Naučno-stručnu osnovu za gradivo koje je bilo predmet istraživanja predstavljale su pojedine sekvence iz trećeg i četvrtog dela, dok su didaktičko-metodičku osnovu celokupnog istraživanja predstavljali radovi J.S.Brunera (O podstate a problemoch vyučovania - Suština teorije instrukcija, Proces obrazovanja), zatim monografija S.Arkljuša: Učenje u nastavi otkrivanjem - otkrivajuće vodjenje u nastavi matematike i najzad monografija R.Ničkovića: Učenje putem rešavanja problema u nastavikao i radovi niza drugih autora. Pri tome smo nastojali da odemo korak dalje, primenivši savremena teorijska saznanja o nastavi na konkretne sadržaje iz matematičke anlize u pozivnousmerenom srednjem obrazovanju i vaspitanju. Pošli smo od toga da se elementi MATEMATIČKE ANALIZE javljaju kao jedan od osnovnih školskih predmeta i da je zato neophodno utvrditi puteve i načine kako da učenici ovladaju osnovnim pojmovima i idejama iz ANALIZE, odnosno iz GRANIČNIH PROCESA i to onim sadržajima koji predstavljaju osnovu za dalje izučavanje ne samo MATEMATIČKE ANALIZE, već i mnogih drugih matematičkih disciplina. Dosadašnja istraživanja koja su bila vezana za nastavu matematike imala su u dobrom broju slučajeva za glavni cilj da istraže, provere ili konstituišu neku novu vrstu nastave i njene organizacije ili da uvedu neke nove oblike rada, posmatrano sve sa didaktičko-psihološkog stanovišta. Redje je bilo takvih istraživanja kojima je bio osnovni zadatak da rezultate dobijene nekim od sprovedenih istraživanja (koji najviše odgovaraju), aplicira na nastavu jednog odredjenog predmeta, odnosno na nastavu matematike i pojedinih njenih disciplina, ili programskih celina - tema.

Naše opredeljenje je bilo da se u okviru razmatranja celokupnog kurikuluma graničnih procesa u srednjem obrazovanju, osmisli i proveri način primene Brunerove teorije instrukcija u obradi teme GRANICA FUNKCIJE, koristeći se pri tome posebno struktuiranim gradivom te teme. Naša je pretpostavka bila da će se na taj način usavršiti proces učenja i postići veći nastavni efekti nego što bi se ostvarilo klasičnom nastavom. Pošli smo od toga da od načina kako će se interpretirati sadržaji teme GRANICA FUNKCIJE, zavisiće da li će učenici u većoj ili manjoj meri shvatiti osnovne pojmove, ideje i činjenice o granici funkcije, koji spadaju u dosta složene i suptilne pojmove u matematici.

Po Bruneru, svaka teorija nastave ima sledeće četiri osnovne karakteristike: prva je, motivacija, spremnost i sposobnost za učenje; druga - mora se odrediti način saopštavanja optimalne strukture[5] znanja koja se prezentiraju učenicima; treća, mora se odrediti najefikasniji oblik interpretiranja nastavnog gradiva i četvrta je, evaluacija. Polazeći od druge i treće osnovne karakteristike nastave i najnovijih istraživanja u nastavi prema kojima se skoro svi školski nastavni predmeti mogu "prevesti u oblik koji stavlja ju akcenat na delatnost, na razvoj odgovarajućih pojmova ili simboličko-leksičke kodove" ([20], str. 41), nastojali smo da to primenimo u nastavi ANALIZE, odnosno jedne njene celine-teme: GRANICA FUNKCIJE. Cilj nam je prema tome bio da ispitamo da li je moguće realizovati deo graničnih procesa u srednjoj školi na jednostavniji i prihvatljiviji način, što bi omogućilo da učenici pri tome lakše i doslednije napreduju ka potpunom savladjivanju programa. Polaznu osnovu za ovakav cilj predstavljala su gledanja poznatog psihologa Brunera i drugih (Osubel,D- 1963; Gagne,R-1970) po

5) J.I.Bruner: "Optimalna struktura" znanja se odnosi na komplet iskaza na osnovu kojih se može savladati veća količina znanja. Karakteristično je da stvaranje ovakvih struktura zavisi od stanja odgovarajuće naučne discipline (...) kvalitet strukture zavisi od njene sposobnosti da pojednostavi informacije, da stvara nove iskaze i da podiže sposobnost korišćenja kompleta znanja" ([20], str. 50).

kojima efekti u nastavi umnogome zavise i od načina na koji se interpretiraju programski sadržaji (teorija instrukcija) – u ovom slučaju iz graničnih procesa u srednjoj

školi, od uočavanja stožernih pojava i logičkog vezivanja ostalih pojmova za ove prethodne i od struktuiranja gradiva pojedinih tema, odnosno celina – u ovom slučaju teme GRANICA FUNKCIJE.

U celini posmatrano obradom teme GRANIČNI PROCESI U NASTAVI MATEMATIKE POZIVNOUSMERENOG SREDNJEG OBRAZOVANJA trebalo je dati odredjeni doprinos utvrdjivanju mogućnosti i načina obrade graničnih procesa u srednjoj školi: kroz prikaz njihovog istorijskog razvoja i genezu najvažnijih pojmova koji se zasnivaju na graničnim procesima; kroz analizu programa nastave matematike u srednjim školama u svetu i kod nas sa stanovišta prisutnosti graničnih procesa u njima i njihove primerenosti uzrastu učenika; kroz osmišljavanje stručno-metodičke obrade najvažnijih pojmova iz graničnih procesa u srednjoj školi i najzad kroz eksperimentalnu proveru mogućnosti realizacije jedne od najznačajnijih celina iz graničnih provesa – GRANICE FUNKCIJE u srednjoj školi, pomoću posebno struktuiranog gradiva o granici funkcije.

Pri izradi ovog rada glavnu pomoć su mi pružili akademik Stanković dr Bogoljub, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu; Krkljuš dr Slavko, vanredni profesor Filozofskog fakulteta u Novom Sadu; Skendžić dr Marija, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu i dr Janež Ušan, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na čemu im se najtoplije zahvaljujem. Takodje se zahvaljujem profesoru dr Djordju Djuriću na pomoći pri merenju opštih sposobnosti učenika i profesorima matematike srednje škole: Stevanki Dražić, Dušanki Vlatković i Dragoljubu Raduloviću na savesnom sprovodjenju delova eksperimenta i kolegijalnoj saradnji. Posebno se zahvaljujem mojoj supruzi dr Danici Nikolić Despotović koja mi je svojim sugestijama u toku rada značajno pomogla u celokupnom ovom poslu.

II ISTORIJSKI RAZVOJ GRANIČNIH PROCESA

Beskonačno je oduvek uzbudjivalo ljudsku ćud tako duboko kao ni jedno drugo pitanje; beskonačno je delovalo na razum s toliko poticaja i tako plodonosno kao jedva ikoja druga ideja; na beskonačnom je takodje potrebno razjašnjenje kao ni jednom drugom pojmu.

David Hilbert

Da bi se odredjeni matematički sadržaji uspešno interpretirali u nastavi matematike srednje škole i da bi ih učenici bolje razumeli, neophodno je obezbediti neke osnovne preduslove. Ovde ćemo navesti osnovne preduslove koji se odnose na profesore i nastavnike matematike u školi, ne ulazeći u niz drugih faktora koji utiču na uspeh, a u prvom redu na one faktore koji su vezani za učenike. Svaki profesor, pre svega, treba da vlada stručnim sadržajima koje interpretira i da prati dalji razvoj odgovarajućih matematičkih disciplina, zatim treba da poznaje istorijski razvoj i genezu najvažnijih pojmova iz programskih sadržaja i najzad treba da poznaje i da ume da primenjuje osnovne didaktičke i metodičke zakonitosti izvodjenja nastave uopšte, a posebno nastave matematike. U ovoj glavi biće posvećena pažnja jednom od tih preduslova, odnosno istorijskom razvoju graničnih procesa, posebno pojma beskonačnosti i pojma granice. Pri tome će se nastojati da se što vernije prikažu pojedine ideje iz graničnih procesa, oslanjajući se kada god je to moguće na primarne izvore podataka.

2.1. Stari vek i prve ideje o graničnim procesima

Za mnoge fundamentalne pojmove današnje matematike često nalazimo začetke tih pojmova kod matematičara Starog veka. Istina, najčešće se ti pojmovi ne javljaju eksplicitno i nisu tada mogli biti oblikovani u današnjem smislu, ali su osnovne ideje starih naroda bile ponekad toliko značajne da se bez njih ne može potpuno i objektivno prikazati geneza odredjenog pojma. Nastojaćemo da u najkraćim crtama navedemo one probleme i rešenja iz matematike Starog veka koji su direktno ili indirektno uticali na razvoj graničnih procesa.

2.1.1. Narodi Starog Istoka, posebno narodi Vavilona i Egipta kao prvih država u istoriji ljudskog društva, ostavili su nam prve začetke savremene nauke, a posebno matematike.

Za Vavilon je vezana upotreba šestdesetičnog sistema brojanja, a taj sistem se i danas koristi pri deljenju časa i stepena na 60 minuta, a minuta na 60 sekundi. Uopšte, oni su imali dobro razvijen sistem zapisivanja brojeva. Posebno treba istaći da su Vavilonjani znali da izračunavaju kvadratni i treći koren. Pri tome su koristili gotove tablice, jer je način izračunavanja bio dosta komplikovan. Oni su dali i načine za *približno izračunavanje* kvadratnog korena, a imali su i *pojam progresije*—prva vrsta tablica mesečevih faza predstavljala je geometrijsku progresiju, a druga aritmetičku sa razlikom 16. Vavilonjani su znali da izračunaju površinu trougla i trapeza, kao i zapreminu prizme i valjka (cilindra). Sve su to bila samo neka praktična znanja, a ne matematička teorija ili nauka. Čak su neka od tih znanja bila takva da su davala nedovoljno tačne rezultate (na pr. obim i površina kruga, zapremina zarubljene kupe i zarubljene piramide).

Rajndov i Moskovski papirus iz vremena 2000-1800 god. pre n.e. ukazuje na domet matematičkih znanja starih naroda. Rajndov papirus, ili kako se često naziva Ahmesova računica, smatra se prvim školskim udžbenikom. On sadrži i tablicu alikvotnih razlomaka (razlomaka koji se mogu predstaviti u obliku zbira dva ili više razlomaka čiji su brojioci 1, na pr. $\frac{2}{61} = \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}$).

I kod Egipćana se javljaju pitanja vezana za aritmetičku i geometrijsku progresiju, što navodi na zaključak da se nizovi slične strukture dovoljno često sreću u životu. Pored toga što su znali metode za tačno odredjivanje površine i zapremine nekih geometrijskih figura, Egipćani su često koristili i *približno izračunavanje*. Na primer, njihovo približno izračunavanje površine kruga (prečnik kruga su delili na 9 jednakih delova i konstruisali su kvadrat, čija je stranica bila jednaka 8 takvih delova) razlikuje se od današnjeg izračunavanja površine te iste figure u nastavi matematike osnovne škole u tome što je broj π kod Egipćana uziman da je jednak 3,16.

U Vavilonu i Egiptu nije postojala matematika kao nauka, ali se u to vreme odvijao proces nagomilavanja matematičkih znanja, koja su u kasnijem periodu pomogla razvoj nauke. Sa stanovišta razvoja graničnih procesa iz tog perioda se mogu izdvojiti znanja o približnom izračunavanju, odnosno pojam o približnoj vrednosti i nagoveštaji o pojmu niza (aritmetička i geometrijska progresija).

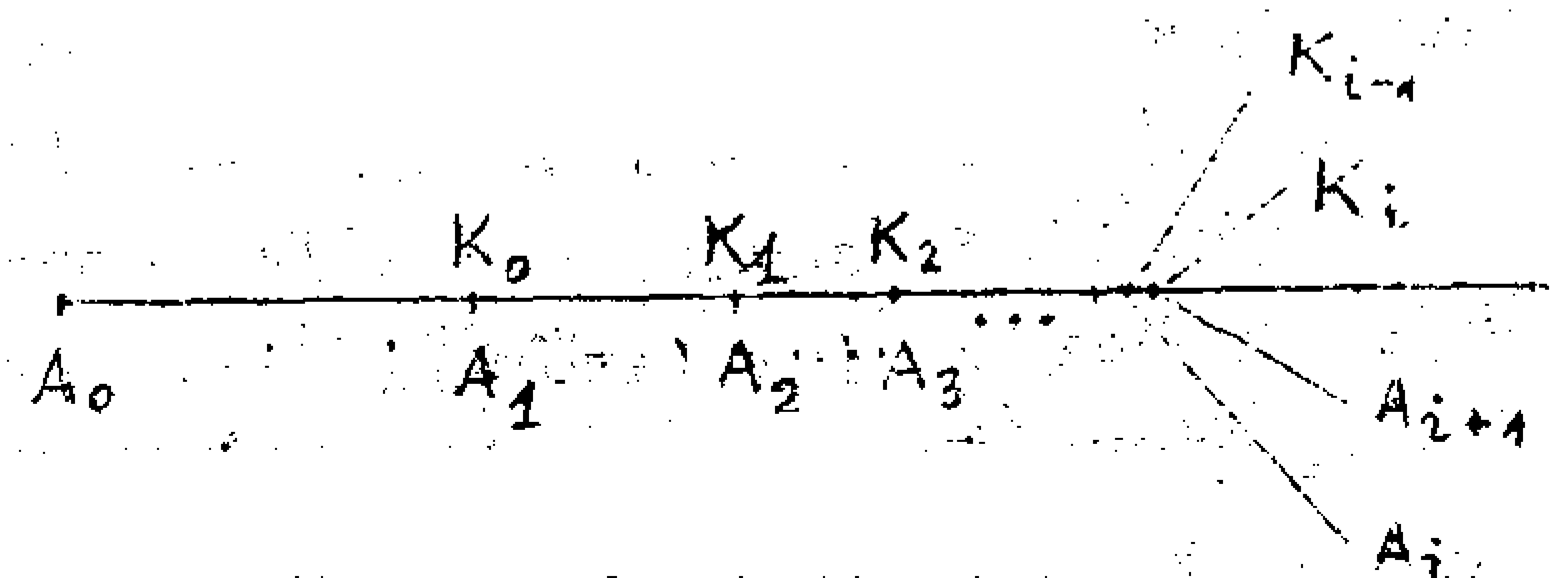
Kineska kultura, kao jedna od najstarijih na zemljinoj kugli, izmedju ostalog ostavila je i spis "Matematika u devet knjiga" ([15], s. 39), čiji je autor verovatno Ли Шоу, a spis potiče iz 2637. godine pre n.e. Pomenimo da je u jednoj od knjiga korišćen pojam progresije, zatim da su se i Kinezi bavili izračunavanjem kvadratnog i kubnog korena i najzad u više knjiga posvećenih geometrijskim sadržajima bavili su se izračunavanjem površine i zapremine geometrijskih figura, dok su za izračunavanje površine kruga koristili da je π jednak 3.

2.1.2. Dok je matematika starih istočnih naroda uglavnom predstavljala skupljena iskustva i rezultate raznih merenja i računanja, dotle je matematika starih Grka bila već izdignuta na nivo jedne teorijsko-naučne discipline. Kod njih nisu rešavani samo zadaci vezani za praktične čovekove potrebe, kako je to pretežno bilo kod njihovih prethodnika, već su bila razmatrana, rešavana i uopštavana i razna pitanja iz matematike čisto teorijskog karaktera. Pomenimo i to da su oni jako razvili i druge discipline, kao što su: filozofija, vaspitanje (pedagogija), medicina, istorija i dr. U staroj Grčkoj i njenim kolonijama postojao je čitav niz filozofsko-matematičkih škola. Takodje, u staroj Grčkoj, počev od VII veka pre n.e. pa u toku nekoliko sledećih stoleća, delovalo je više istaknutih filozofa i matematičara, koji su svojim delima i doprinosom nauci zadužili čovečanstvo. Pomenimo samo one najznačajnije za razvoj u prvom redu matematike: Tales (624-547 pre n.e.), Anaksimander (oko 610-546 pre n.e.), Anaksimen (oko 585-525 pre n.e.), Pitagora (oko 580-500 pre n.e.,), Anaksagora (oko 500-428 pre n.e.), Zenon iz Eleje (oko 490-430 pre n.e.), Demokrit (oko 460-370 pre n.e.), Antifon (druga polovina V veka pre n.e.), Hipokrat (460- oko 377 pre n.e.), Platon (427-347 pre n.e.), Eudoks (oko 408 - oko 355 pre n.e.), Aristotel (384-322 pre n.e.), Euklid (365-oko 300 pre n.e.), Arhimed (oko 287-212 pre n.e.), Eratosten (oko 276-194 pre n.e.) i dr.

Za nas je od interesa da izložimo one radove nekih od pomenutih grčkih matematičara i filozofa, koji u sebi sadrže ideje o graničnim procesima, odnosno pojam beskonačnosti. Recimo najpre da je *Anaksagora* prvi uveo u matematiku pojam o beskonačno velikim i beskonačno malim veličinama, dok je *Aristotel* pojmu beskonačnosti prilazio sa filozofske tačke gledišta. Tom pojmu Aristotel daje sledeće tumačenje: "Beskonačnost to nije to, posle čega nema ništa, već to, posle čega je uvek nešto"(|15|, str. 68) i takav pojam beskonačnosti ne protivureči njegovoj današnjoj definiciji.

Kada se u *Pitagorejskoj školi* došlo do saznanja da stranica kvadrata i njegova dijagonala nisu samerljive duži nastala je kriza matematike kao nauke. Naime, iako su matematičari Pitagorejske škole naslutili iracionalan broj (beskonačan neperiodičan decimalan broj), oni nisu bili u stanju da savladaju teškoće koje su se u vezi s tim pojavile. Oni su smatrali, s jedne strane, da je broj "množina sastavljena iz jedinica", ostajući tako u stvari na pojmu prirodnog broja, a s druge strane, tvrdili su da se "nesamerljive veličine ne odnose kao brojevi". Ipak, "najznačajnije od otkrića koja su pripisivana pitagorejcima bilo je otkriće iracionalnosti u vidu nesamerljivih duži" (|152|, str. 67).

Zenonove aporije[6], a posebno aporija o Ahilu i kornjači, vrlo su značajne za razvoj pojma beskonačnosti i graničnih procesa uopšte. Naime, Zenon je negirao aktualno beskonačno malo (ono beskonačno koje je u sebi završeno), a isticao je nezavršenu - potencijalnu beskonačnost. On govori o beskonačno maloj veličini, kako se to danas kaže, o veličini čija je granica nula. Njegove aporije su protivurečile nekim starim i intuitivnim predstavama o beskonačno malim i beskonačno velikim veličinama. Naime, "oduvek se smatralo da se zbir beskonačno mnogo veličina može učiniti koliko se želi velikim, pa čak i ako je svaka od tih veličina beskonačno mala ($\infty \times \varepsilon = \infty$, $\varepsilon \neq 0$), kao i da je zbir konačnog ili beskonačnog broja veličina reda nule jednak nuli ($n \times 0 = 0$, $\infty \times 0 = 0$)" (|152|, str. 68.). U svojim aporijama Zenon je kritikovao takve predstave o beskonačnosti. Tekstovi Zenonovih aporija nisu sačuvani, ali se za njih zna posredstvom Aristotela. Navodimo aporiju "Ahil" prema Strojku (|152|, str. 68), uz našu geometrijsku interpretaciju. "Ahil i konjača kreću se u istom smeru po pravoj (v. sl.2.1., gde A_o i K_o označavaju početne položaje Ahila i kornjače). Ahil je brži od kornjače, ali da bi je stigao, on mora najpre da prodje tačku K_o, iz koje je kornjača počela kretanje. Kada Ahil stigne u tačku K_o, kornjača će se pomeriti u tačku K_1. Ahil ne



Slika 2.1.

može da stigne kornjaču dok ne stigne u tačku K_1, ali kornjača će se za to vreme pomeriti u tačku K_2. Kada se Ahil

---

6) *Aporija (grč. "bezizlaz"), u starogrčkoj filozofiji teorijski teško rešiv, ili nerešiv problem.*

nadje u K_2, kornjača će biti u novoj tački K_3, itd. Prema tome, Ahil nikada ne može da stigne kornjaču". Zenon je otkrio slabu tačku monade[7] - najmanjeg odsečka, ukazujući na nespojivost monada i beskonačne deobe. Ovo je naročito značajno za oblast infinitezimalne matematike. Svoj stav protiv monada Zenon ovako obrazlaže: Ako se odsečak može beskonačno deliti, onda je finalni deo nula (onda je beskonačno mali). Ako je pak: a) finalni deo nula, onda je nemoguće da zbir nula daje odsečak, b) ili ako finalni deo nije nula, onda je i odsečak beskonačno veliki, što je nemoguće. Kod Zenona ovo ima filozofsku podlogu, ali je značajno za matematičko poimanje beskonačnosti i njegove kritike su imale pozitivan uticaj na razvijanje strogosti u matematici. Može se reći, da su grčki mislioci i matematičari jasno uočili dva ispoljavanja ideje beskonačnosti: prvi, *dodavanjem* jedinice i produžavanjem niza celih brojeva bez kraja i drugi, *deljenjem* datog odsečka (odnosno razmaka izmedju dvaju datih racionalnih brojeva), pri čemu se uočava da toj podeli nema kraja, odnosno da izmedju svaka dva racionalna broja ima beskonačno mnogo racionalnih brojeva (pojavljivanje novih racionalnih brojeva izmedju već poznatih nema kraja).

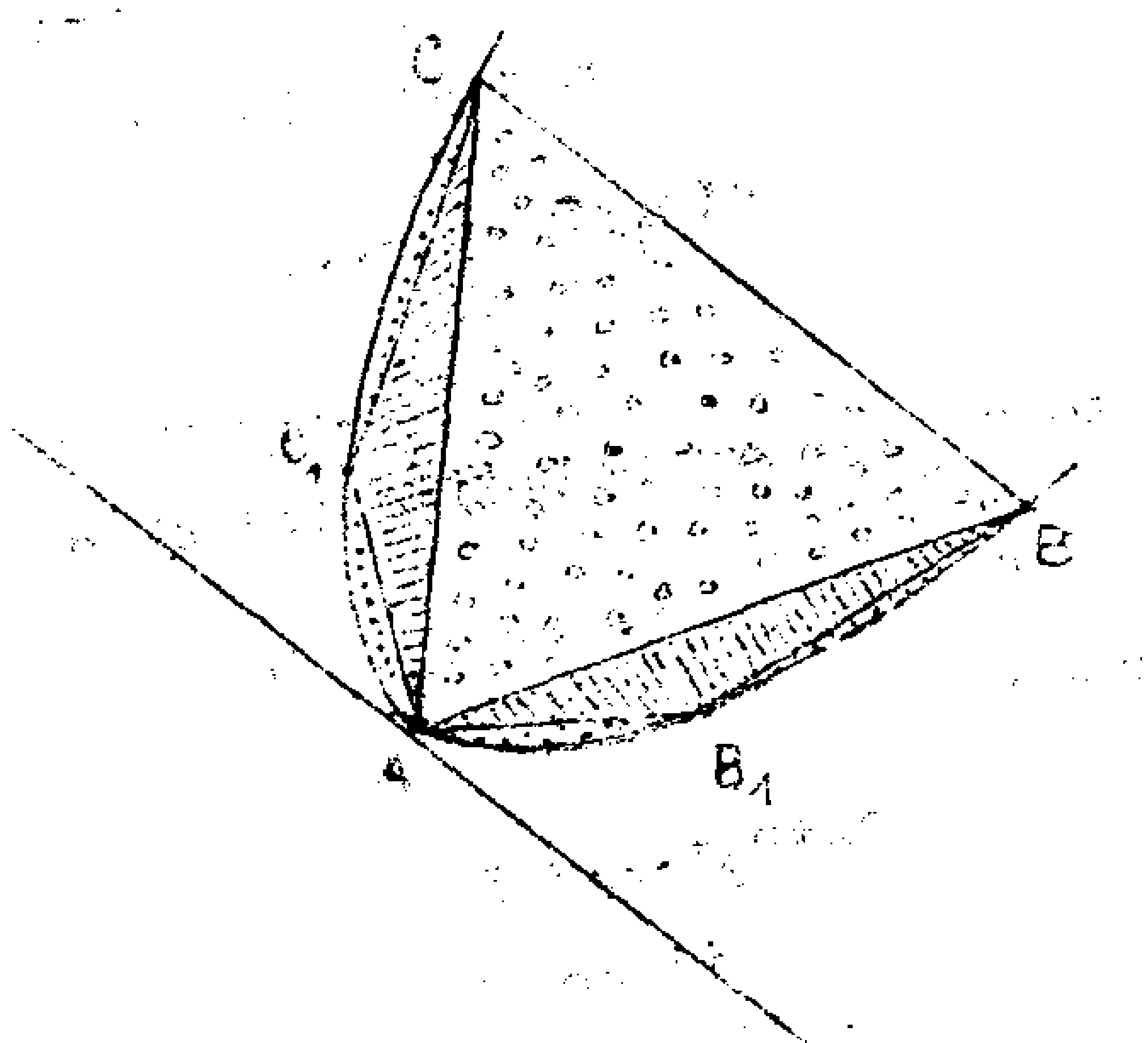
Demokrit je bio tvorac tzv. *matematičkog atomizma*, a nastao je kao reakcija na filozofiju Elaćana. Time je Demokrit hteo da parira Zenonovoj kritici monada, odnosno da negira hipotezu beskonačne deljivosti, a da ponovo afirmiše ideju o nedeljivoj jedinici. Za njega je ta jedinica atom (grč. atomos- "nedeljiv") i svet se sastoji iz bezbroj atoma koji se kreću i praznog svemirskog prostora. Zato on i liniju (duž) shvata kao zbir atom-duži (tačaka), površ kao agregat tetiva (atom-linija), a telo kao skup atom-listova (površi). Na ovom Demokritovom shvatanju tela zasnovan je poznati Kavaljerijev princip, a to znači da se i kod Demokrita javljaju ideje o infinitezimali.

---

7) Monada (grč. "Jedinica"), u grčkoj filozofiji i nauci broj jedan je monada; ovo gledišta jasno je izraženo kod Pitagore i Euklida; po Lajbnicu, monade su proste, nedeljive.

Ime *Eudoksa* vezano je za *teoriju odnosa (proporcija)*, koju Euklid daje u svojoj V knjizi "Elemenata", kao i za tzv. *metodu ekshaustije (iscrpljivanja)*, koja je omogućila rigorozniji tretman izračunavanja površina i zapremina geometrijskih figura. Ta metoda je predstavljala odgovor Platonove škole Zenonu i njegovim aporijama, jer se njome zaobilaze sve zamke koje postavlja beskonačno mala veličina. To se postizalo na taj način što su se svi problemi u kojima se mogla pojaviti beskonačno mala veličina svodili na probleme koji se rešavaju sredstvima formalne logike. Ipak ta metoda je imala i jedan veliki nedostatak, zbog toga što se unapred morao znati rezultat kojeg je trebalo dokazati. Medjutim, značaj ove metode za izgradjivanje graničnih procesa i pojma granice je nesumnjiv.

Zbog značaja metode ekshaustije za granične procese reći ćemo nešto više o toj metodi. U svom radu "Kvadratura parabole" *Arhimed* je na osnovu nekih osobina parabole, primenom metode ekshaustije dokazao da je površina segmenta parabole za jednu trećinu veća od površine trougla koji sa segmentom ima zajedničku osnovicu i visinu (sl. 2.2.). Kako tada nije postojao opšti metod za izračunavanje površine (danas je to metod integralnog računa), Arhimed je vrlo oštroumno primenio metodu ekshaustije, koja potiče od Eudoksa. Ta metoda je na odredjeni način predstavljala granični proces u današnjoj matematičkoj terminologiji, iako se ovde radilo o dokazivanju jednakosti dveju unapred zadanih veličina, a ne o odredjivanju konačne vrednosti pomoću graničnog procesa.



Slika 2.2.

Ukratko ćemo prikazati metodu ekshaustije na primeru segmenta parabole. U dati segment parabole upišemo

$$P = \frac{4}{3} p_1 .$$

Pri dokazu ove jednakosti Arhimed je koristio metodu ekshaustije i zakon trihotomije. Naime, on je pretpostavio da je

$$P > \frac{4}{3} p_1 \quad \text{ili} \quad P < \frac{4}{3} p_1$$

i dokazao da je to nemoguće, prema tome je $P = \frac{4}{3} p_1$.

Pretpostavimo prvo da je

$$P > \frac{4}{3} p_1 . \tag{3}$$

Navedeni proces upisivanja trouglova u novodobijene segmente parabole dovodi do toga da je zbir površina preostalih segmenata proizvoljno mali. To znači da se uvek može tako odabrati n, da razlika

$$P - (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$$

bude manja od ma kojeg unapred zadanog pozitivnog broja. Kako je prema (3)

$$P - \frac{4}{3} p_1 > 0,$$

to ćemo odabrati n tako da važi nejednakost

$$P - (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) < P - \frac{4}{3} p_1 .$$

Tada je

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n > \frac{4}{3} p_1 ,$$

a to je, s obzirom na relaciju (2) nemoguće. Znači, nejednakost (3) ne važi.

Pretpostavimo sada da je

$$P < \frac{4}{3} p_1 .$$

Kako članovi niza (1) teže ka nuli, to se n može tako izabrati da važi sledeća nejednakost:

$$\frac{4}{3} p_n < \frac{4}{3} p_1 - P .$$

Prema (2) tada je

$$P < p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} ,$$

što je takodje nemoguće.

Na taj način dokazano je da je $P = \frac{4}{3} P_1$.

Način rasudjivanja Arhimeda u rešavanju problema izračunavanja površine segmenta parabole blizak je po svojoj idejnoj zamisli savremenom integralnom računu. Pa ipak postoji principijelna razlika u karakteru mišljenja matematičara stare Grčke i načina razmišljanja matematičara novijeg vremena. Na primer, Arhimed ne izračunava P segmenta parabole kao graničnu vrednost zbira površina p_n kada $n \to \infty$, već dokazuje pomoću kontradikcije da je $P = \frac{4}{3} P_1$.

S stanovišta graničnih procesa treba spomenuti Arhimedovo delo "Metoda", koje nije sačuvano u celosti, već samo jedan deo. Ne umanjujući vrednost ostalih rezultata do kojih je Arhimed došao, za današnju matematiku najveći značaj ima njegova *metoda*, jer je kroz uvodjenje *dve medje koje odozgo i odozdo teže jedna drugoj*, ustvari uveo *pojam granice*. Uvodeći u geometriju *infinitezimalnu proceduru*, Arhimed je zaista otvorio put plodnog rada budućim stvaraocima infinitezimalnog računa.

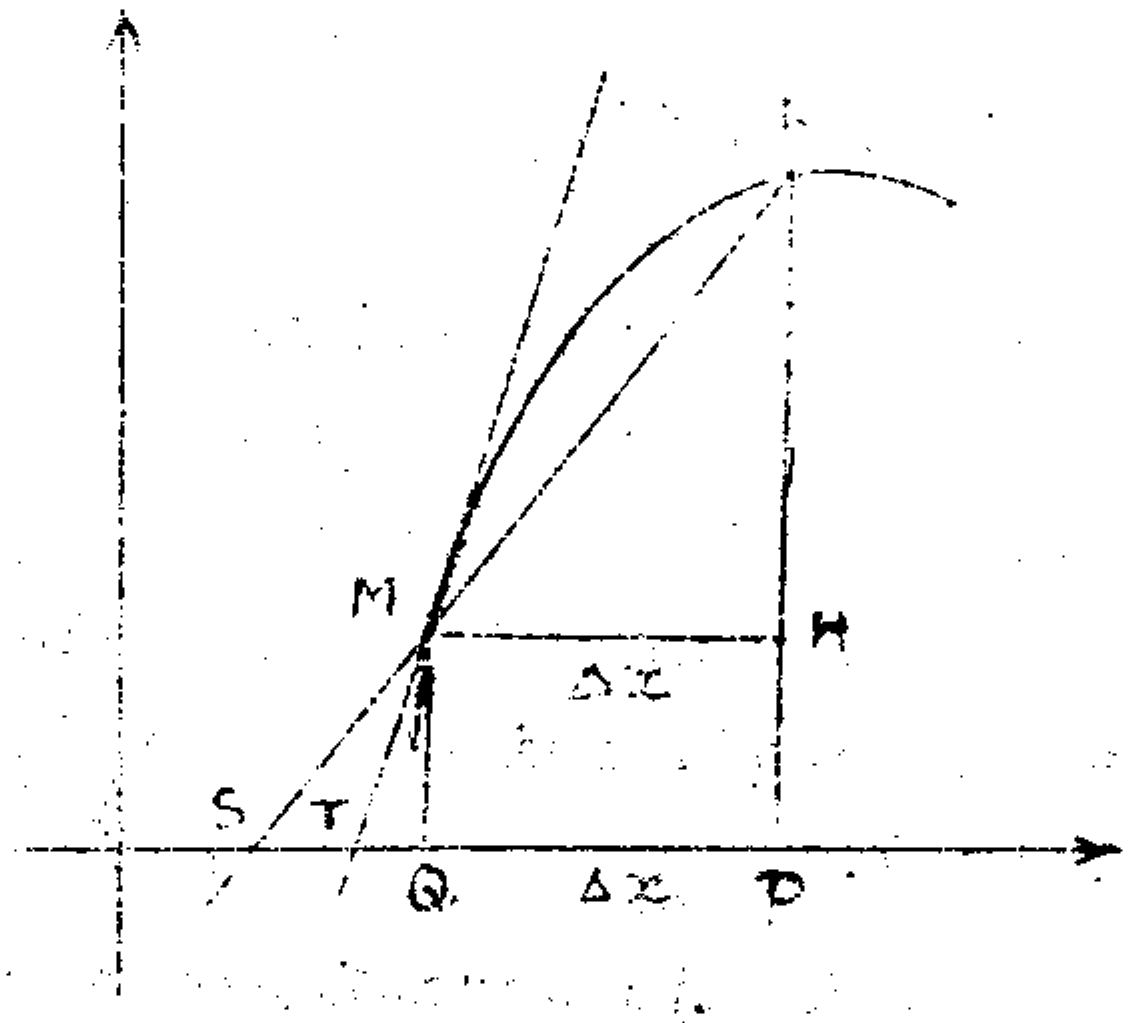
2.2. Oživljavanje ideja starih naroda o granici u srednjem veku i razvoj graničnih procesa u prvim stolećima novog veka

2.2.1. Nakon samo nekoliko vekova n.e. dolazi period od više stoleća kada se u matematici (a i u nauci uopšte) nije ništa značajnije uradilo. Posebno nije ništa vredno uradjeno u tom periodu na tlu Evrope, jer je tu dugo trajao period dekadencije matematičkih znanja. Ispred i iza X veka n.e. daljem razvoju matematike dali su svoj udeo narodi Srednje Azije i Bliskog istoka, a posebno narod Indije. Ako se u celini posmatra razvoj matematike u Indiji u srednjem veku, onda se kao karakteristika tog razvoja može istaći značajan uspeh u algebri i trigonometriji. Od XII veka i u Evropi počinje postepeno da se javlja interesovanje za grčku i arapsku matematiku, što je bilo podstaknuto razvojem društva u celini, a posebno razvojem trgovine. Iz tog perioda (od XII do XV veka) pomenimo sledeće matematičare: Leonardo Pisano Fibonacci (oko 1170 - posle 1228), Thomas Bradwardine (1290-1349), Nicolaus Oresme (1323-1382) i dr. Ideje o beskonačnim geometrijskim redovima Arhimeda prenele su se i u srednji vek. Tim redovima se bavio i N. Orem.

2.2.2. Od sredine XV veka pa do kraja XVI veka u Evropi nastaje period preporoda nauke i umetnosti. U ovom razdoblju radili su i sledeći poznatiji matematičari: Johannes Müller, Regiomontanus (1436-1476), Mihael Stifel (1486/7 - 1567), Leonardo da Vinci (1452-1519), Hieronimo Cardano (1501-1576), Rafael Bombelli (oko 1530-1572), N. Chuquet (? - 1500), François Viète (1540-1603), Simon Stevin (1546-1620), Jost Bürgi (1552-1632/33), John Napier (1550-1617), Grégoire de Saint Vincent (1584-1667) i dr. Karakteristika ovog perioda razvoja matematike ukratko bi se mogla svesti na sledeće: evropska matematika prevazilazi granice koje je nasledila od Grka i drevnih naroda Istoka, stvoreni su uslovi za razvoj simboličkog računa, naglo se razvija algebra, javlja se funkcionalna zavisnost i njeno grafičko prikazivanje, nazire se kraj epohe matematike konstantnih veličina, pojavljuje se Vietova simbolička algebra, utrt je put za razvoj analitičke geometrije. Sa stanovišta razvoja graničnih procesa može se reći da u ovom periodu nije bilo nekih posebnih rezultata, ali su stvoreni preduslovi da su se i na ovom planu mogla očekivati nova saznanja o pojmovima beskonačnosti i granice. Pomenimo da je G. Vincent uvideo pravu prirodu granične tačke baveći se geometrijskim redom u delu "Geometrijsko izvodjenje kvadrature kruga i preseka stošca"..

2.2.3. Sa XVII vekom počinje period izgradnje matematike promenljivih veličina. Taj se vek može označiti kao jedan od najznačajnijih u novoj eri, za razvoj matematike u celini. Pomenućemo neke od matematičara iz tog vremena, izuzev Njutna i Lajbnica o kojima će biti posebno reči. To su: Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Blaise Pascal (1623-1662), Johannes Kepler (1571-1630), Galileo Galilei (1564-1642), Bonaventura Cavalieri (1598-1647) P. Mengoli (1626-1686), James Gregory (1638-1675), Giles Persone de Roberval (1602-1675), John Willis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677), Gerard Desargues (1631-1662) i dr. U ovom veku su se dalje razvile dotadašnje matematičke discipline, ali su stvorene i nove. Ukratko to je vek u kojem se konstituiše analitička geometrija (Descartes je u svojoj "La geometrie" dao osnovu koordinatne metode); u kojem se intenzivno razmatraju problemi tangente, maksimuma i minimuma, kvadrature i kubature čime se dolazi na sam prag diferencijalnog i integralnog računa, odnosno infintezimalni račun se konstituiše geometrijski; fundirana je projektivna geometrija (Kepler uvodi pojam beskrajno daleke žiže, a to naročito dolazi do izražaja kod Desarguesa); značajno dostignuće predstavljaju logaritmi; počinje se razvijati teorija brojeva, kombinatorika, teorija verovatnoće; formulisana je potpuna indukcija i konstruisane su prve računske mašine. Mi ćemo se osvrnuti na one radove i rezultate i one matematičare XVII veka koji su neposredno imali uticaja na dalji razvoj graničnih procesa, odnosno pojma beskonačnosti i pojma granice.

Francuski matematičari *Fermat, Descartes i Pascal* su, pored ostalih doprinosa razvoju matematike, pripremili osnovu za izgradjivanje metoda analize beskonačno malih veličina. To se posebno odnosi na P. Fermat, jer su njegovi radovi iz oblasti matematičke analize, kao što su: "Metodi ispitivanja najvećih i najmanjih vrednosti" i radovi koji se odnose na kvadraturu svih hiperbola obuhvatili metode odredjivanja tangente ravnih krivih i utvrdjivanje metoda integraljenja nekih prostih funkcija. Pri tome Fermat koristi za odredjivanje ekstremnih vrednosti funkcije f priraštaj argumenta, dok za konstrukciju tangente krive linije, pored priraštaja argumenta, koristi i granični prelaz za dobijanje subtangente. "Rešavajući zadatke vezane za odredjivanje ekstremnih vrednosti funkcije i za konstrukciju tangenti, Fermat je došao sasvim blizu do pitanja koja su kasnije postala fundamentalni zadaci diferencijalnog računa. Ipak time se nisu još iscrpli problemi matematičke analize koje je umeo da rešava Fermat, Rešavajući geometrijske zadatke iz kvadrature ravnih krivih, tj. iz odredjivanja površina ograničenih ravnim krivim, Ferma je izgradjivao metode vrlo bliske integralnom računu". (|15|, str. 178). Važno je istaći da se Fermat koristio karakterističnim trouglom (naziv potiče od Leibniza) MKH (v.sl.2.3.) čije su katete priraštaji argumenta i funkcije i da je taj trougao imao ogroman značaj za dalji razvitak matematičke analize. Treba istaći da se sada opet ističe rigoroznost u matematici."U ovo vreme se ova preciznost ponovo javlja, naročito u radovima Pascala i Fermata, gde su granični procesi sprovedeni sa najvećom rigoroznošću" (|66|, str. 99).



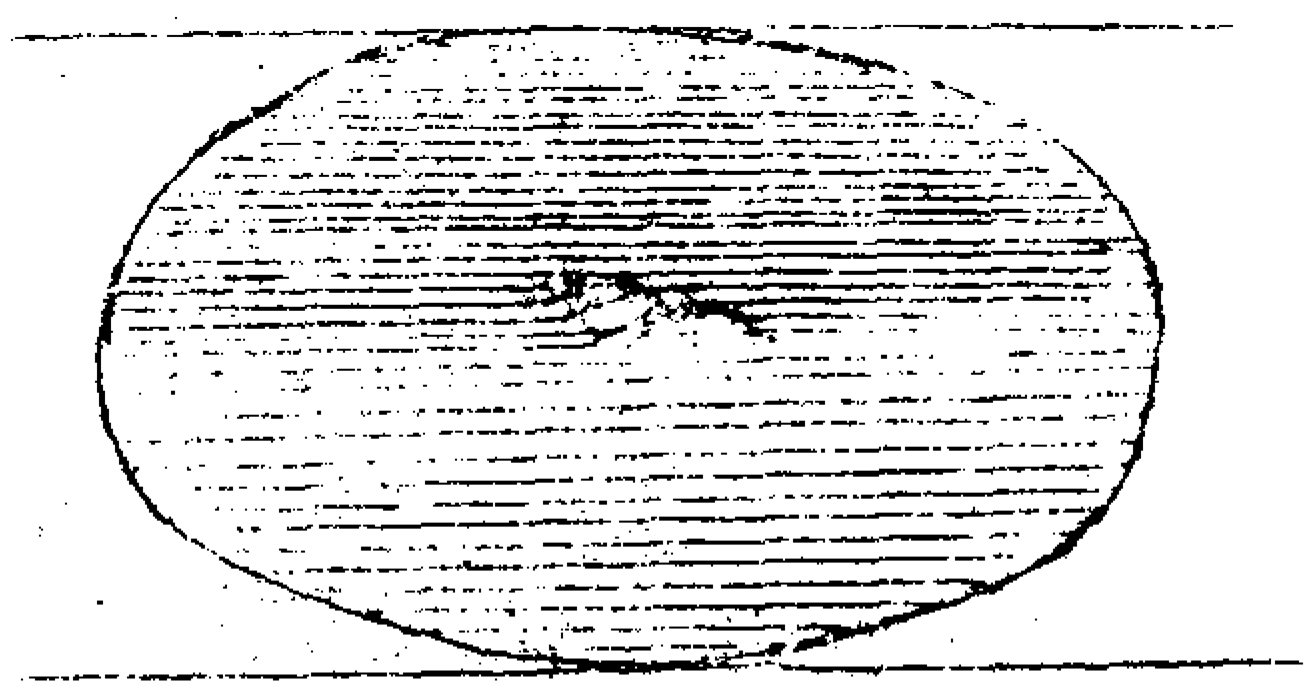
Slika 2.3.

U svojim "Besedama" (ili Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica ed ai movimenti locali - Razgovori i matematički dokazi o dve nove nauke koje se tiču mehanike i lokalnih kretanja, Leyden 1638.) *Galilei* matematički proučava kretanje i dolazi do zavisnosti izmedju rastojanja, brzine i ubrzanja; originalno dolazi do zaključka da broj kvadrata prirodnih brojeva nije manji od skupa svih tih brojeva, a ovaj pak nije veći od prvog, čime stavlja u zaštitu aktualnu beskonačnost suprotstavljajući se Aristotelu. Proučavajući ubrzano kretanja Galilei je došao do pojma trenutne brzine kao zbira svih priraštaja brzine tela dobijenih od početka kretanja. On se koristio i atomističkim predstavama o strukturi materije, obraćajući pažnju na formalno protivurečne odnose prekidnog, kao i na osobine beskonačno velikih i beskonačno malih veličina. Došao je do zaključka da ne treba bez rezerve prenositi na beskonačnost one odnose koji su tačni za konačne veličine. "Jedan od sabesednika u poznatim Galilejevim 'Besedama', izražavajući misli autora, završava diskusiju ovako:... mi se nalazimo u oblasti beskonačnih i nedeljivih". (|152|, str. 135.).

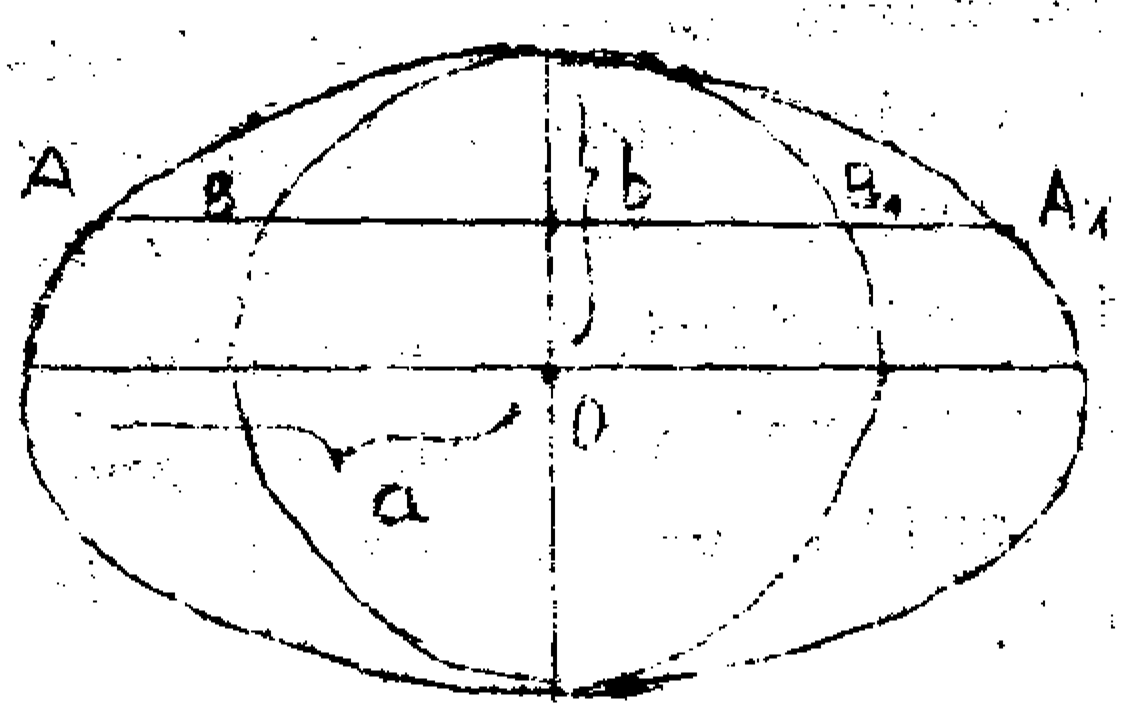
Iako *Kepler* ne koristi termin "beskonačno mala veličina", ipak njegov način oredjivanja dužine linije, površine ravne figure ili zapremine tela ukazuje da su u njegovim rasudjivanjima sadržani beskonačno mali elementi. "Izlažući svoju teoriju u 'Stereometriji', Kepler je pretpostavljao da on sledi metodu ekshaustije, razradjenu u radovima Arhimeda. Ipak treba priznati da se metod Keplera jako razlikovao od načina koje je upotrebljavao Arhimed, i da je taj metod bio stvaralački korak napred u procesu razvoja metoda primene infinitezimalnih veličina". (|15|, str. 196).

Učenje *Cavalieria o sumiranju nedeljivih* izloženo u njegovoj "Geometriji" nije bilo od koristi samo za elementarnu geometriju, već je to učenje predstavljalo preteču integraljenja, mada se Cavalieri nije služio simbolikom integralnog računa. Njegova metoda "nedeljivih" predstavljala je značajnu etapu u razvoju graničnih procesa, a ta metoda je začeta još kod Demokrita u njegovom "atomističkom" metodu ("dokaz" jednakosti zapremina dveju piramida sa jednakim osnovama i visinama, pomoću jednakosti suma površina njihovih poprečnih preseka). U svom radu "Stereometrija vinskih buradi" (1615. god.) Kepler je odredio zapreminu 92 obrtna tela, dok je Cavalieri u svom delu "Geometrija izložena na nov način pomoću nedeljivih elemenata neprekidnih figura" (Geometria indivisibilibus continuorum nova quandam ratione promota - Bologna, 1635.), već naznačio opštu i zajedničku metodu odredjivanja površine i zapremine geometrijskih figura proizvoljnog oblika. Napomenimo da je Cavalieri pod "nedeljivim" podrazumevao paralelne odsečke unutar ravne figure i paralelne ravne ograničene površi unutar tela. Za medjusobno uporedjivanje površina ravnih figura i zapremina tela on je uveo pojam "sume svih nedeljivih" koje ispunjavaju datu geometrijsku figuru. Odnos tih "suma" za Cavalieria je predstavljao odnos površina i zapremina.

Metodu "nedeljivih" Cavalieria ilustrovaćemo na primeru površine elipse. Ukupnost "nedeljivih" za elipsu po Cavalieriu predstavljena je šematski na slici 2.4. i na primemu elipse biće prikazan tok rasudjivanja Cavalieria pri odredjivanju površine i zapremine geometrijskih figura. Naime, nad malom osom 2b elipse opiše se krug i povuku se tetiva ("nedeljive") paralelne velikoj osi - 2a (sl. 2.5.). Iz definicije elipse može se zaključiti da se svaki nedeljivi element elipse odnosi prema odgovarajućem nedeljivom elementu kruga, kao što se odnose poluose elipse, odnosno kao a:b. Na slici 2.5. to je $AA_1 : BB_1 = a : b$. To znači da se ukupnost svih "nedeljivih" elipse, a ima ih beskonačno mnogo, odnosno površina P_e elipse, odnosi prema ukupnosti svih "nedeljivih" kruga, odnosno prema površini kruga kao a:b. Na osnovu toga sledi:



Slika 2.4.



Slika 2.5.

$$P_e : b^2\pi = a : b$$

$$P_e = ab\pi$$

Sličan postupak Cavalieri je primenjivao za uporedjivanje zapremina.

Metoda "nedeljivih" Cavalieria nije posedovala onaj stepen strogosti u dokazivanju kao što je to bio slučaj dokazivanja kod Arhimeda, primenom metode ekshaustije. Medjutim, Cavalierieva metoda je omogućila da se reši znatno veći broj zadataka odredjivanja površina i zapremina, nego što je to bio slučaj kod Arhimeda, a isto tako metoda "nedeljivih" je otvarala nove mogućnosti u pogledu poimanja beskonačnih veličina i graničnih procesa, dajući posebno osnovu za konstituisanje integralnog računa.

Odredjeni doprinos u razvoju graničnih procesa dao je i italijanski matematičar *Mengoli*. On je pomoću osobine harmonijskog reda da je zbir tri uzastopna njegova člana veći od trostruke vrednosti srednjeg člana zasnovao *prvi dokaz divergencije harmonijskog reda:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, a dokazao je i konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. "No i opća teorija redova dobiva sasvim nov oblik istraživanjima talijanskog matematičara P. Mengolija koji, polazeći od rezultata Arhimedovih o kvadraturi parabole, promatra beskonačne redove s općijeg gledišta i dolazi do osnovnih spoznaja o njihovoj konvergenciji i divergenciji". (|102|, str. 89).

Škotskom matematičaru Gregoryju pripisuje se da je prvi upotrebio termin "konvergentan" govoreći o nizu mnogouglova koji aproksimiraju kružnicu. Za taj niz Gregory kaže da je konvergentan, a uočio je i to da se graničnim prelazom otvaraju nove mogućnosti za uvodjenje i odredjivanje veličina (njegovo značajno delo: Vera circuli et hyperbolae quadratura - Prva kvadratura kruga i hiperbole, Padova, 1667). Na metodi "nedeljivih" "je počivao i rad Jamesa Gregoryja koji je u geometrijskom obliku predočio (1668.) osnovne rezultate kasnije zvanog infinitezimalnog računa".(|102|, str. 407).

Iz mnoštva radova engleskog matematičara *Wallisa* izdvajamo "Aritmetiku beskonačnih veličina" (Arithmetica infinitorum, Oxford, 1655.), jer tu on uvodi definiciju granice promenljive veličine na sledeći način: "granica promenljive veličine je konstantna veličina, kojoj se promenljiva približava tako, da se razlika izmedju njih može učiniti manjom od ma koje date veličine". (|15|, str. 210.). On je uveo i znak ∞ za beskonačnost, mada se u graničnim prelazima nije služio simbolikom. "Metode kojima se Wallis koristio u proučavanju beskonačnih procesa bile su često primitivne, ali je on ipak, koristeći se njima, dolazio do novih rezultata. On je uvodio beskonačne redove i beskonačne proizvode i veoma smelo operisao sa imaginarnim izrazima, negativnim i razlomljenim izložiocima". (|152|, str. 142.).

I engleski matematičar *Barrow* je dao znatan doprinos razvoju graničnih procesa. On je, ne samo uveo termin "uglovni koeficient tantente", već ga je i pojmovno objasnio kao granični odnos beskonačno malog priraštaja funkcije i beskonačno malog priraštaja argumenta. "Posebno važan zaključak, do kojeg je došao Barrow, treba smatrati to, što je on shvatio uzajamno-inverznu zavisnost izmedju zadataka integraljenja i diferenciranja" (|15|, str. 211.).

Na kraju ove tačke navodimo dva mišljenja o doprinosu matematičara XVII veka razvoju graničnih procesa. Najpre naš matematičar Ž. Marković: "... Sustavnim uvodjenjem tog pojma (misli se na pojam granične vrednosti, naša primedba) od druge polovine 17. stoleća ušao je u matematiku sasvim nov duh. *Uvodjenje novih matematičkih tvorevina graničnim prijelazom* dalo je matematičkom istraživanju veliku slobodu koja i označuje bitnost razvoja matematike od ovih vremena. Stari grčki matematici svijesno su se klonili u svojim istraživanjima izravne upotrebe pojma beskonačnosti i graničnoga prijelaza koji je s njim u vezi, premda je tok njihovih razmatranja često bio takav da je mogao voditi do graničnog prijelaza" (|102|, str. 64). A sovjetski istoričar matematike Бологарский kaže: "Druga polovina XVII veka bila je epoha daljeg oživljavanja u razvitku ideje beskonačno malih veličina i matematičke analize. Interes za ta pitanja probudio se u svim zemljama Zapadne Evrope, i mnogi naučnici matematičari i fizičari, doticali su se ideje o beskonačno malim veličinama, stvorili su svoje teorije, oslanjajući se na njih i samim tim pomažući formiranje osnovnih delova analize: diferencijalnog i integralnog računa" (|15|, str. 204. - naš prevod, R.D.)

2.3. Granični procesi u radovima matematičara krajem XVII i tokom XVIII veka

Poseban doprinos u razvoju i usavršavanju graničnih procesa, odnosno u izgradnji diferencijalnog i integralnog računa dali su engleski matematičar i fizičar Isac Newton (1643-1727) i nemački matematičar Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

2.3.1. Iako se "Philosophiae naturalis principia mathematica", 1687. (Matematički principi prirodne filozofije) smatra glavnim Newtonovim delom, za nas su od posebnog interesa njegovi radovi: "De analysi per aequationes numero terminorum infinitas", 1711. (O analizi pomoću jednačina sa beskonačno mnogo članova); "Tractatus de quadratura curvem", 1704. (Rasprava o kvadraturi krivih) i "Methodus fluxionum et serierum infinitarum", 1736. (Metoda flukcija i beskonačnih redova), jer se u njima Newton bavi graničnim procesima. Mada su pored navedenih dela stavljene godine njihovog objavljivanja, treba naglasiti da je do rezultata koji se u njima nalaze Newton došao znatno ranije, ali ih nije publikovao.

U svom delu "De analysi per aequationes numero terminorum infinitas" Newton se bavio beskonačnim redovima, pri čemu kod njega konvergencija nema onu važnost koju ona danas ima u proučavanju beskonačnih redova. Polazeći od svojih rezultata u razvijanju binoma oblika

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

Newton je razvijao u red i izraze oblika

$$\ell n\ (1+x) \quad \text{i} \quad \text{arc sin } x$$

Ovi rezultati su znatno doprineli razvoju matematičke analize i nekih drugih oblasti matematike.

Newtonova dela: "Tractatus de quadratura curvem" i "Methodus fluxionum et serierum infinitarum" predstavljaju uobličavanje i praktičnu primenu računa o beskonačno malim veličinama, odnosno infinitezimalnog računa. Iako je njegovo tumačenje pojma granice teško razumljivo, on je "... potpuno jasno razumevao uzajamnu inverznost dveju operacija: nalaženje fluksija na osnovu date fluente i fluente na osnovu date flukcije. Na taj način, on je tačno utvrdio vezu izmedju diferenciranja i integraljenja..." (|15|, str. 214.). Problem koji Newton ovde razmatra može se ovako iskazati: prvo, data je dužina opisanog puta u ma kojem trenutku vremena $s(t)$, a treba odrediti brzinu kretanja - $v(t)$, što je ustvari problem izvoda; drugo, data je brzina kretanja u ma kom tenutku vremena $-v(t)$, a treba odrediti dužinu puta $- s(t)$, što je problem odredjivanja *primitivne funkcije* kad je dat izvod - ustvari problem integraljenja. Vreme je po Newtonu univerzalna promenljiva i sve zavisi od vremena. On promenljive zove *fluentama* (od lat. fluere - teći)[8] i označava ih sa x, y i z, dok *fluksijom* (brzina kojom se fluenta uvećava) zove izvod fluente po vremenu (u današnjoj terminologiji) i označava ih sa $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$. Ovaj račun Newton zove ***račun fluente i flukcije*** (diferencijalni i integralni račun). D. Strojk (|152|, str. 150) navodi sledeći primer Newtonovog objašnjavanja metode fluksija. Najpre, Strojk ističe da se beskonačno male veličine kod Newtona nazivaju *"momentima fluksije"* koje on označava sa $\dot{x}0$, $\dot{y}0$ i $\dot{z}0$, gde 0 predstavlja "beskonačno malu veličinu". Newton nastavlja:

"Dakle, neka je data jednačina $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, stavimo $x+\dot{x}0$ umesto x, a $y+\dot{y}0$ umesto y. Tada ćemo dobiti

$$x^3+3x^2\dot{x}0+3x\dot{x}0\dot{x}0+\dot{x}^3 0^3-ax^2-2ax\dot{x}0+axy+ay\dot{x}0+a\dot{x}0\dot{y}0+ax\dot{y}0-y^3-$$
$$-3y^2\dot{y}0-3y\dot{y}0\dot{y}0-\dot{y}^3 0^3=0$$

Na osnovu pretpostavke da je $x^3-ax^2+axy-y^3=0$ i posle izostavljanja te jednačine i deljenja preostalih članova sa 0, ostaće nam

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-3y^2\dot{y}+3x\dot{x}\dot{x}0-a\dot{x}\dot{x}0+a\dot{x}\dot{y}0-$$
$$-3y^2\dot{y}0+\dot{x}^3 00-\dot{y}^3 00=0$$

No, ukoliko nulu smatramo beskonačno malom veličinom, tako da ona može predstavljati moment količine kretanja, tada će članovi koji su pomnoženi njom u stvari biti ništa u poredjenju sa ostalima; zato ih ja odbacujem i ostaje nam

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-3y^2\dot{y}=0"$$

Isti primer navodi i O. Becker (|12|, str. 150.). Iz primera se vidi da se Newtonova definicija fluksije (izvoda) zasniva

---

8) I danas se često koristi u nastavi matematike termin "tekuće" koordinate za promenljive x,y na primer, u jednačini elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

na pojmu granice, mada ne u današnjem smislu tog pojma.

Newton se uspešno bavio i problemom tangente, zatim problemom maximuma i minimuma krive, konveksne i konkavne krive, rektifikacije i kvadrature, pri čemu su takođe korišćeni u odredjenoj meri granični procesi onako kako ih je on shvatao i formulisao.

2.3.2. Mada se dosta raspravljalo o prioritetu izmedju Newtona i Leibniza u izgradnji diferencijalnog i integralnog računa, najispravnije je konstatovati da je doprinos i jednog i drugog ogroman i da se sastoji u tome što su uspeli da na osnovu do tada stečenih znanja i rezultata konstituišu infinitezimalni račun, odnosno posebnu granu matematike nazvanu "matematička analiza". Ž. Marković (|102|, str. 288) konstatuje: "... Ali tek pošto su I. Newton i G.W. Leibniz iz tih postupaka (misli se na odredjivanje brzine kretanja, odredjivanje tangente na krivu, iznalaženje maksimuma i minimuma funkcije i sl. - naša napomena) izlučili ono što je zajedničko i shvatili ih kao nove analitičke operacije koje trebaju i nov formalizam, mogao je nastati diferencijalni račun kao nova grana matematičke znanosti".

Već svojim prvim publikovanim radom: "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculigenus", 1684. (Nova metoda za maksimum i minimum, kao i za tangente, kojoj ne smetaju ni razlomljene ni iracionalne veličine, a posebno vrsta računa za njih) Leibniz je dao osnovu svog diferencijalnog računa (na sledećoj strani se nalazi fotokopija jedne stranice tog rada). Imajući u vidu da su izvodi granične vrednosti količnika diferencija zavisno promenljive i argumenta, onda se može reći da je Leibniz znatno doprineo izgradnji teorije graničnih procesa. Kao i kod Newtona i kod Leibniza ima neodredjenosti i nejasnosti u objašnjenjima pojmova iz graničnih procesa. "Ponekad su njegovi dx i dy bile konačne veličine, a ponekad veličine manje od ma koje odredjene veličine, koje ipak nisu bile jednake nuli. U odsutnosti strogih definicija on je pribegavao analogijama,.... U pitanjima koja tretiraju problem beskonačnosti on je menjao svoja shvatanja. U jednom od svo-

II.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS*).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, z, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $d\overline{ax}$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuivis ordinatae respondenti curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam *Additio et Subtractio*: si sit z — y + w + x aequ. v, erit $d\overline{z - y + w + x}$ seu dv aequ. dz — dy + dw + dx. *Multiplicatio*: $d\overline{xv}$ aequ. xdv + vdx, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. xdv + vdx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi Porro *Divisio*: $d\frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$.

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro + z scribi + dz, pro — z scribi — dz, ut ex addi-

*) **Act. Erud. Lips. an. 1684.**

Први Лајбницов рад из анализе
(према издању C. I. Gerhardta, 1858)

... dakle u onom, što je stavljeno kao zadato, treba da se ona može umanjiti ispod svake zadane veličine i in quaesitis, ili u onom što iz datog izlazi; ili da govorimo razumljivije, kada se slučajevi (ili što je dano) približuju bez prekida i napokon se gube jedan u drugom, treba da posljedice i dogadjaji (ili što se traži) čine isto" (prema |102|, str. 271.).

U svom radu "O prikrivenoj geometriji i analizi nedeljivih i beskonačnih", 1686. Leibniz polazi od kvadrature figura ograničenih krivim linijama i dolazi do pojma integrala, uvodeći i simbol $\int$ koji se i danas upotrebljava u integralnom računu. Pri tome se Leibniz koristi ranijim istraživanjima o rektifikaciji, kvadraturi i kubaturi, a posebno istraživanjima Arhimeda, tvrdeći "da se novi integralni račun razlikuje od prvobitne Arhimedove metode, kojom je on dolazio do otkrića , samo u tome što se u njemu uvode novi simboli i što se sustavno izradjuje nov način analitičkog računanja". (|102|, str. 407). I kod pojma integrala glavna nejasnoća za Leibnizove savremenike dolazila je otuda što još nije bio razjašnjen pojam granične vrednosti. "U početku integralnog računa, kada pojam granične vrednosti nije bio jasno shvaćen, značenje integrala se opisivalo ovakvim rečenicama - konačna razlika Δx zamenjuje se beskonačno malom veličinom dx, a sam integral je zbir beskonačno mnogo beskonačno malih veličina f(x) dx. - Mada beskonačno mala veličina ima izvesnu privlačnost za spekulativne duhove, njoj nema mesta u modernoj matematici. Ništa se ne dobija ako se jasan pojam o integralu okruži nizom fraza koje nemaju značenja. Ali se čak i Leibniz poveo za sugestivnom moći simbola; oni se ponašaju kao da označavaju zbir - beskonačno malih - veličina sa kojima se ipak može raditi kao i sa običnim veličinama. U stvari, reč integral napravljena je da ukaže na celu ili integralnu površinu koja je sastavljena od - infinitezimalnih - delova f(x)dx. U svakom slučaju, trebalo je skoro sto godina posle Newtona i Leibniza da bi se shvatilo da je *osnova integrala* samo *pojam granice* i ništa drugo" (|24|, str. 328).

Jedno od najlepših matematičkih otkrića XVIII veka jeste Leibnizov dokaz da red

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \dots$$

ima zbir $\frac{\pi}{4}$, a taj red je konvergentan po Leibnizovom kriterijumu za alternativne redove (Leibnizov kriterijum glasi: alternativni red konvergira, ako se apsolutne vrednosti njegovih članova monotono smanjuju i teže nuli).

Leibniz se smatra i jednim od osnivača matematičke logike, pa je otuda njegov doprinos u simbolima i formalizaciji matematike, posebno infinitezimalnog računa, ogroman. Većina najvažnijih simbola diferencijalnog i integralnog računa potiču od Leibniza i u upotrebi su još i dan danas.

Doprinos Newtona i Leibniza razvoju graničnih procesa je vrlo značajan, jer su oni ustvari konstituisali matematičku analizu i time omogućili da se dobije moćan matematički aparat za rešavanje mnogih problema i ispitivanje raznih pojava. Medjutim, oni nisu dali dovoljno jasna objašnjenja principa na kojima je konstituisana matematička analiza, odnosno nisu dovoljno precizno objasnili granične procese. O tome Болгарский kaže: "Хотя Ньютон и развил довольно строгую теорию пределов, в ней имесь неясности. Кроме того Ньютон, оперируя с бесконачно мальми величинами, не проводил последовательно и до конца перехода к пределу. Что же касается Лейбница и ближайших его последователей, то у них мы не находим даже ясного и точного определения понятия бесконечно малой величины; это понятие в различных случаях получает различное толкование" (|15|, стр. 224)[9]

2.3.3. Daljoj dogradnji i razradi diferencijalnog i integralnog računa, krajem XVII i tokom XVIII veka, svoj doprinos su dali mnogi matematičari medju kojima treba istaći sledeće: Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre Simon Laplace (1749-1827), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) i Lazare Carnot (1753-1823). "Posle 1687. godine Lajbnicu su se pridružili braća Bernuli, koji su oduševljeno prihvatili njegove metode. Još u periodu pre 1700. godine njih trojica su otkrili značajan deo našeg osnovnog kursa analize..." (|152|, str. 155.). Prvi udžbenik analize pod nazivom "Analyse des infiniments petits", 1696 ("Analiza beskonačno malih") napisao je učenik Johanna Bernoullija francuski matematičar Guillaume François Antoine Marquis de l'Ho-

---

9) *"Iako je Njutn i razvio dovoljno strogu teoriju granica, u njoj je bilo nejasnoća. Sem toga, Njutn, operišući sa beskonačno malim veličinama nije sprovodio dosledno i do kraja prelaz ka granici. Što se tiče Lajbnica i najbližih njegovih sledbenika, kod njih se ne nalazi čak jasna i tačna definicija pojma beskonačno male veličine; taj pojam u različitim slučajevima dobija različito tumačenje" (Naš prevod - R.2.).*

spital (1661-1704). Tu se nalazi i poznato "Lopitalovo pravilo" za odredjivanje granične vrednosti razlomka kada i brojilac i imenilac teže nuli. Inače, knjiga je nastala na osnovu predavanja Johanna Bernoullija iz diferencijalnog računa. U njoj nije ipak razrešeno pitanje korektnosti i jasnosti osnovnih pojmova analize, kako sa filozofskog tako i sa strogo matematičkog gledišta. "Эти понятия по-прежнему носили мистический характер. Поэтому нет ничего удивительного в том, что уже к концу XVIII в., а именно в 1784. г., Берлинская академия наук объявила конкурс, целью которого было установление „строгой и ясной теории того, что в математике называют бесконечным"" 10) (|15|, стр. 230).

Jedan od najplodnijih matematičara svih vremena u pogledu pisanih radova, monografija, udžbenika i drugih matematičkih publikacija - *Euler*, dao je znatan doprinos u razvoju teorijske matematike, odnosno teorijske analize. Iz te oblasti najznačajnija su mu dela: "Introductio in analysin infinitorum, 1748. ("Uvod u infinitezimalnu analizu"); "Institutiones calculi differentialis", 1755. ("Osnovi diferencijalnog računa"); "Institutiones calculi integralis", 1768-70 ("Osnovi integralnog računa") i "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimivi proprietate gaudentes", 1774. ("Metode za nalaženje krivih linija koje poseduju osobine maksimuma ili minimuma"). Posebnu pažnju Euler je posvetio pojmu funkcije, a zatim redovima, imaginarnim i kompleksnim brojevima, odredjenom integralu (Gama i Beta funkcija), diferencijalnim jednačinama, teoriji brojeva, variacionom računu itd. Njegova dela su imala ogromnog uticaja na dalji razvoj matematike uopšte, a posebno matematičke analize. Za ilustraciju ovog mišljenja navodimo sledeće: " 'Čitajte Ojlera', obično je mladim matematičarima govorio Laplas, 'čitajte Ojlera, to je naš zajednički učitelj'. A Gaus se još odredjenije izražavao: 'Proučavanje Ojlerovih radova je najbolja škola u raznim oblastima

---

10) *"Ti pojmovi su kao i raniji imali mistički karakter. Zbog toga nije ništa neobično što je već krajem XVIII v., upravo 1784. g., Berlinska akademija nauka objavila konkurs, čiji je cilj bio da se konstituiše 'Stroga i jasna teorija o tome šta se u matematici naziva beskonačnim'". (Naš prevod - R.D.).*

matematike i ništa drugo ne može to zameniti'" (|152|, str. 167.). Ukratko ćemo pomenuti one matematičke rezultate Eulera koji su u posrednoj ili neposrednoj vezi sa graničnim procesima. Od Eulera potiče oznaka za broj e, odnosno za

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2,718281828459...$$

a kasnije je dokazano da je taj broj iracionalan. Za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

se znalo i pre Eulera da je konvergentan, ali niko nije uspeo da mu odredi sumu. To je pošlo za rukom Euleru 1736. godine i on je našao da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

U svom delu "Uvod u infinitezimalnu analizu" Euler je prvi razvio datu funkciju u red kosinusa, a prvi je došao i do izraza

$$\pi \operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-4} + \ldots \qquad x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{a}$$

takodje i do izraza

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2}) = \pi x (1 - \frac{x^2}{1^2})(1 - \frac{x^2}{2^2}) \ldots \text{ Pozna-}$$

te su i Eulerove formule

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \ ; \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

koje čine osnovu kompleksne analize. Služeći se navedenim formulama i vršeći operacije sa beskonačnim redovima, Euler je ustanovio zavisnost izmedju beskonačnih redova i beskonačnih proizvoda. Za beta funkciju

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx,$$

kao i za gama funkciju

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx$$

upotrebljavaju se nazivi Eulerov integral prve vrste, odnosno Eulerov integral druge vrste. Granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0{,}577215\ldots$$

zove se Eulerova konstanta. Većina Eulerovih radova (prema |152| bilo ih je ukupno 865) odnosila se na matematičku analizu. Prema tome njegov udeo u daljoj dogradnji graničnih procesa je ogroman, ali više u razradi odredjenih algoritama i formula, nego u strogom teorijskom zasnivanju graničnih procesa. To se posebno odnosi na njegov način upotrebe beskonačno malih veličina. O tome Strojk kaže: "Medjutim, mi se ne možemo oduševljavati načinom na koji je Ojler zasnivao analizu uvodeći nule različitog reda. Beskonačno mala veličina, pisao je Ojler u "Diferencijalnom računu" (1755), to je stvarno nula: $a \pm ndx = a$, $dx \pm (dx)^{n+1} = dx$, $a\sqrt{dx} + C\,dx = a\sqrt{dx}$.

Pitanje o zasnivanju analize u celini je ostalo predmet diskusije, kao i sva pitanja koja se odnose na beskonačne procese.

Mada je Ojlerovo zasnivanje analize imalo nedostataka, on je u svakom slučaju svoja shvatanja iskazao potpuno odredjeno". (|152|, str. 169-170.).

... Iz obilnog *Lagrangeovog* matematičkog stvaralaštva izdvajamo ono što je vezano za matematičku analizu u delima: "Théorie des fonctions analytiques", 1797 ("Teorija analitičkih funkcija") i "Leçons sur le calcul des fonctions", 1801. ("Predavanja iz računa funkcija"). Iako je Lagrange pokušao da se matematička analiza oslobodi upotrebe beskonačno malih veličina i granica, on je ipak uspešno razradio mnoga pitanja matematičke analize, kao što su: formuła za izračunavanje člana - ostatka Taylorovog reda, teorija uslovnih maksimuma i minimuma, metod varijacije proizvoljnih konstanata pri rešavanju linearnih diferencijalnih jednačina i dr. "Попытку дат строгое обоснование математическому анализу делал[11] и французский математик и философ Жан Лерон д'Аламбер" (|15|, str. 232). Za

---

11) "Pokušaj da dâ strogo zasnivanje matematičke analize učinio je i francuski matematičar i filozof d'Alembert" (Naš prevod - R.D.).

njegovo ime vezan je jedan od kriterijuma za konvergenciju redova (bavio se dosta teorijom redova), a značajno je za analizu to što je on prvi uveo pojam granice i hteo je da zasnuje matematičku analizu na teoriji granica. Njegova definicija granice glasi: "Одна величина является пределом другой величины, если ета вторая может стать к первой ближе, чем на любую данную величину, как бы ни была мала эта последняя, причем, однако, приближающаяся величина никогда не может превзойти величину, к которой приближается. Таким образом, разность такого количества и его предела абсолютно неуказуема" (prema |15|, str. 232)[12]. Zasluga je d'Alemberta što je učinio ozbiljan korak napred u strogom zasnivanju matematičke analize na osnovu teorije granica, ali je ipak njegova definicija granice se odnosila samo na monotono rastuće veličine. Dok je Lagrange pokušavao da potpuno odustane od pojma beskonačno malih veličina, a d'Alembert ih obilato koristio, dajući im teorijsku osnovu pomoću metode granica, dotle se *Carnot* opredelio za treći pristup različit od oba ova. Naime, on je hteo da opravda i protumači osnovni algoritam beskonačno malih veličina. Tome je posvetio svoje delo: "Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal", 1797 ("Razmišljanje o metafizici računa beskonačno malih"). Iako je Carnot dosta truda uložio u razjašnjavanje pojma beskonačno male veličine, dajući prednost metodu kojim se služio Leibniz, ipak se njegovo teorijsko zasnivanje analize beskonačno malih moralo staviti pod sumnju. Osnovu njegovih razmišljanja predstavljalo je to da se u analizi jedna greška eliminiše drugom, tako da se rezultat dobija ispravan. Prva greška se javlja kada se umesto tačnih jednačina uzimaju približne, odnosno one koje sadrže beskonačno male veličine, a druga, kada se te beskonačno male potom odbacuju. O strogom zasnivanju matematičke analize Болгарский kaže: "...в работах Д'Аламбера и Карно не было дано полного оправдания методам, применявшимся в математическом анализе. Вследствие этого мысль передовых математиков продолжала работать над утверждением

---

12) "Jedna veličina je granica druge veličine, ako ta druga može postati bliža prvoj od ma koje date veličine, pa ma kako bila mala ta poslednja, pri čemu, ipak, veličina koja se približava nikada ne može prevazići veličinu kojoj se približava. Na taj način, razlika takve veličine i njene granice je apsolutno beznačajna". (Naš prevod - R.D.).

методов математических исследований на более прочных основах. Эти основы были найдены другим французским математиком – Коши" (|15|, str. 235).[13)]

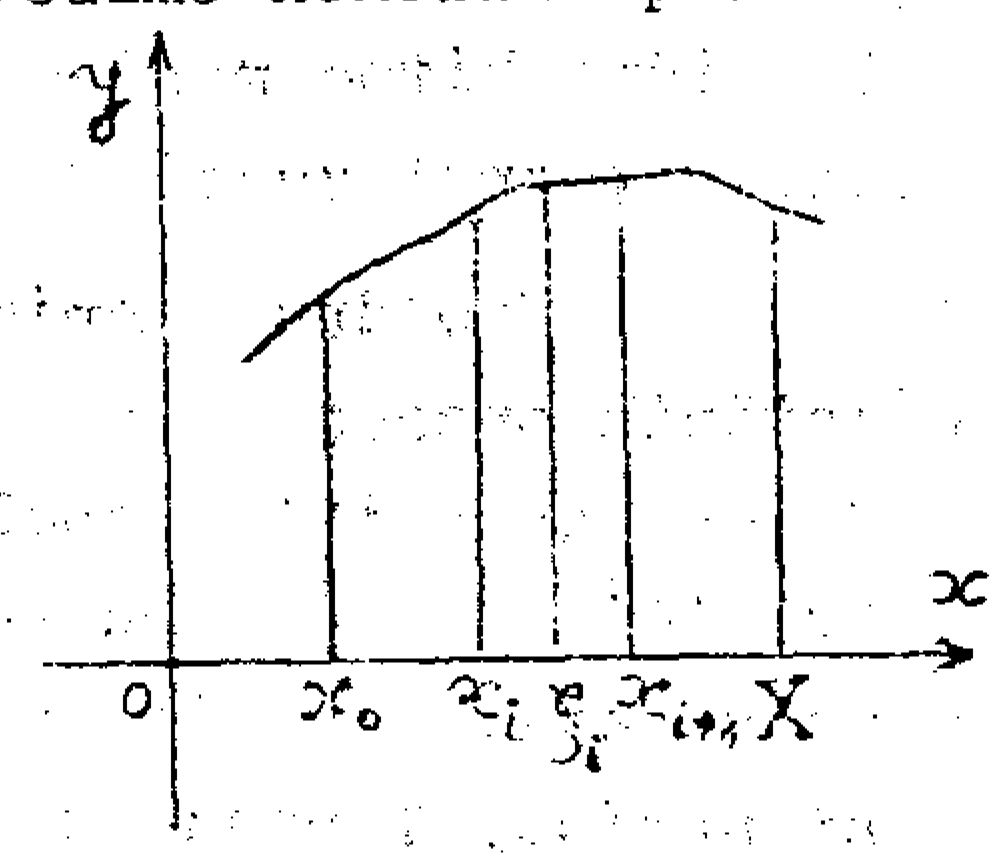
2.4. *Zasnivanje teorije granica tokom XIX veka*

Krajem XVIII i početkom XIX veka počinju se javljati pokušaji više matematičara, da se dâ rigorozna zasnovanost matematičke analize, odnosno graničnih procesa. I pored toga što je svaki takav pokušaj predstavljao jedan odredjeni korak bliže konačnom cilju, ipak je prva i prava teorija granica delo francuskog matematičara *Augustina Cauchya* (1789-1857). Naime, Cauchy je uspeo da teorijski obrazloži i objasni skoro sve one granične procese, odnosno stavove, teoreme i pojmove iz matematičke analize, koje su njegovi prethodnici uzimali kao tačne, ali bez dovoljno argumentacije, ili je ta argumentacija imala nedostataka, nedoslednosti i protivurečnosti. U to vreme su bili sazreli uslovi da se medju istaknutim matematičarima počelo postavljati pitanje osnova infintezimalnog računa i strogog zasnivanja diferencijalnog i integralnog računa. To je vreme kada su se metode Newtona i Leibniza počele naglo razvijati i primenjivati u prirodnim naukama i tehnici, tako da je ubrzo narastao jedan ogroman novi matematički aparat, a uporedo s tim počele su se javljati i posebne oblasti matematičke analize kao što su: teorija beskonačnih redova, varijacioni račun, teorija diferencijalnih jednačina, teorija funkcija i sl. Posebno je posvećivana pažnja pojmu funkcije i pojmu granične vrednosti. Osnovni problem u tom novom matematičkom aparatu predstavljao je račun beskonačno malih i pojam granične vrednosti, odnosno problem su bili granični procesi uopšte, razlikujući pri tome dve vrste tih procesa. Prva vrsta tih procesa sastoji se u odredjivanju relativne br-

---

13) "... u radovima d'Alemberta i Carnota nije bilo dato potpuno opravdanje za metode koje su bile primenjene u matematičkoj analizi. Sledeći tu misao vodeći matematičari su produžili da rade na utvrdjivanju metoda matematičkih ispitivanja na solidnijim osnovama. Te osnove je našao drugi francuski matematičar - Cauchy" (Naš prevod - R.D.).

zine dveju promena i matematički se svodi na traženje granice količnika dvaju beskonačno malih priraštaja - priraštaja funkcije i priraštaja nezavisno promenljive (*diferenciranje*), a druga se sastoji u traženju granice zbira u kojem broj sabiraka neograničeno raste, dok sami ti sabirci teže nuli (*integraljenje*). Pitanje osnova matematike i njenog strogog zasnivanja, što je bila odlika ove nauke u XIX veku, Cauchy je razradio u infinitezimalnoj analizi. Naime, on je precizirao pojam funkcije, granične vrédnosti, izvoda, neprekidnosti funkcije, diferencijabilnost, integrabilnost itd., uvodeći za te pojmove stroge definicije i dajući im algebarsku interpretaciju. Osnove matematičke analize, koje se i danas nalaze u udžbenicima ove naučne discipline, Cauchy je dao u delima: "Cours d'analyse", 1821 ("Kurs analize") i "Resumé des leçons données a l'école royale polytechnique", 1823 ("Rezime predavanja održanih u Kraljevskoj politehničkoj školi"). I jedno i drugo delo citiraju se i pod drugim nazivom i to: prvo, kao "Algebarska analiza" (v. na sledećoj strani fotokopiju naslovne strane I^{re} PARTE, II^{E}SÉRIE. - TOME III, OEUVRES COMPLÈTES D'AUGUSTIN CAUCHY[14]), a drugo, kao "Rezime predavanja o infintežimalnom računu". Navodimo nekoliko primera Cauchyjeve aritmetizacije analize, odnosno njegove rigoroznosti zasnivanja odredjenih pojmova iz graničnih procesa.



Slika 2.7.

U 21. i 22. predavanju "Rezemea predavanja o infinitezimalnom računu" Cauchy daje *definiciju odredjenog integrala* na sledeći način. On posmatra funkciju f(x) neprekidnu u intervalu $[x_0, X]$ i formira ovu sumu:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i).(x_{i+1}-x_i), \quad (x_n = X, \; x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}).$$

---

14) *Predusretljivošću Sveučilišne biblioteke u Zagrebu koja mi je, u okviru bibliotečke razmene, posudila sabrana dela Cauchya, štampana počev od 1882. godine u Parizu u 26 tomova, omogućena je ova fotokopija, kao i drugi izvori podataka o Cauchyjevom matematičkom stvaralaštvu, na čemu joj se najlešće zahvaljujem.*

Pošto je dokazao da za funkciju f(x) ovo postoji, Cauchy nastavlja:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max(x_{i+1}-x_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

i naglašava da je ovo nezavisno od podele intervala $[x_0, X]$. Dalje Cauchy kaže: "Vrednost od S dostići će izvesnu granicu koja će zavisiti jedino od oblika funkcije f(x) i od krajnjih (ekstremnih) vrednosti x_0 i X koje dobija promenljiva. *Ta granica se zove odredjeni integral*".[15] Ovo je prvi put da je dokazano postojanje odredjenog integrala neprekidnih funkcija strogim graničnim procesom. (Za te funkcije se kaže da su integrabilne u Cauchyjevom smislu). Sa svom doslednošću, potpunošću i rigoroznošću Cauchy nastavlja sa uopštavanjem pojma odredjenog integrala, definišući slučajeve kada je bar jedna od granica integrala beskonačna, ili ako f(x) bar u jednoj tački $x \in [x_0, X]$ dobija beskonačnu vrednost, odnosno ako je f(x) u toj tački diskontinuirana. U njegovoj definiciji odredjenog integrala i u ovim slučajevima Riemann nije ništa bitno menjao i zato bi bilo pravilnije ovaj odredjeni integral zvati Cauchy - Riemannov integral.

Kao drugi primer Cauchyjeve strogosti u zasnivanju graničnih procesa poslužiće definicije nekoliko vrlo važnih pojmova matematičke analize. Najpre definicija beskonačno male veličine, pri čemu se koristi pojam o graničnom prelazu. Cauchy kaže: "On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numerique décroit indéfiniment de maniere à converger vers la limite zéro".[16] (|22|, str.37). Zahvaljujući ovakvoj definiciji beskonačno male veličine stvorena je mogućnost da se zasnuju sve operacije sa tom veličinom u diferencijalnom i integralnom računu. Cauchyjeva definicija

----

15) Na osnovu predavanja Dr Ernesta Stipanića iz Istorije i metodologije matematike.

16) "Kaže se da promenljiva veličina postaje beskonačno mala, kada se njena numerička vrednost neograničeno smanjuje da teži prema granici nula" (naš prevod - R.D.)

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821

neprekidnosti funkcije glasi: "La fonction f(x) restera *continue* par rapport à x entre les limiters données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle - même".[17] (|22|, str. 43). Ovde se koristi pojam beskonačno male veličine, koji je ranije definisan.

"Koši je koristio Dalamberov pojam granice da bi definisao izvod funkcije i na taj način je solidnije zasnovao taj pojam nego što su to mogli da učine njegovi prethodnici.

Polazeći od definicije granice, Koši daje primere kao što je $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ za $\alpha = 0$. On, zatim, definiše 'beskonačno malu promenljivu' kao promenljivi broj čija je granica nula i dalje postuliše da će Δx i Δy 'biti beskonačno male količine'. On tada piše $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ i graničnu vrednost za $i \to 0$ naziva 'izvod funkcije y' ili f'(x)'. Stavljajući zatim $i = \alpha h$, gde je α 'beskonačno malo' a h 'konačna količina', dobija:

$$\frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} h$$

i h naziva 'diferencijal funkcije $y = f(x)$'. Dalje je $dy = df(x) = hf'(x)$; $dx = h$". (|152|, str. 206).

Cauchy je dosta pažnje posvetio konvergenciji beskonačnih redova, tako da nekoliko kriterijuma konvergencije ovih redova nose njegovo ime. Njegova je zasluga i to što se teorija redova javlja kao posebna oblast analize, pri čemu Cauchy posebno precizira pojmove konvergencije i divergencije redova. Naime, on je razrešio pitanje - šta znači sabrati beskonačno mnogo sabiraka, kao i pitanje - da li se beskonačnoj sumi može pridružiti jednoznačan broj. Cauchy u beskonačnom zbiru $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ uzima parcijalne konačne zbirove i definiše

---

17) *"Funkcija f(x) će biti neprekidna za x izmedju datih granica, ako, izmedju tih granica, beskonačno malom priraštaju promenljive x odgovara uvek beskonačno mali priraštaj te iste funkcije". (Naš prevod - R.D.).*

$$s_1 = u_1$$
$$s_2 = u_1 + u_2$$
$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Ako je $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, onda je $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ i red konvergira. Od kolikog je značaja Cauchyjev doprinos u teoriji redova mogu da posluže neka shvatanja o redovima i najistaknutijih matematičara. Newton je smatrao da su redovi na koje se nailazi u fizici divergentni (koliko tu ima nepreciznosti!). Za d'Alemberta su sva razmišljanja i računi zasnovani na redovima koji nisu konvergentni uvek vrlo sumnjivi, dok je Gauss smatrao da čim jedan red prestane da bude konvergentan, njegova suma kao suma nema smisla. Abel kaže: "U matematici teško da postoji i jedan beskonačan red čiji bi zbir bio strogo odredjen" (pismo Holbou, 1826.).[18]

U XIX veku, pored Cauchyja, na izgradnji teorije granica, odnosno na strogom zasnivanju matematičke analize i matematike kao nauke uopšte, radili su mnogi matemaričari. Pomenućemo one najistaknutije. Rigorozan pojam granice razradio je nemački matematičar *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) još pre Cauchyja, oko 1800. godine, ali on svoje rezultate nije objavio. Ipak treba reći da su se Cauchy i Gauss prvi eksplicitno bavili problemima osnova matematike i njenog strogog zasnivanja. Takodje je karakteristično da Gauss, Cauchy i Bolzano zasnivaju analizu na realnom broju, oslobadjajući se prisustva geometrije u analizi. Pored teorije funkcija realne promenljive konstituiše se i teorija funkcija kompleksne promenljive, zahvaljujući u prvom redu Cauchyju, Gaussu i Reimannu. Cauchyjeva definicija odredjenog integrala otvorila je novo razdoblje u čitavoj teoriji odredjenog integrala. Na osnovu te definicije usledila su dalja uopštenja pojma integrala. Tako je *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805-1859) proširio po-

---

18) Citat je preuzet iz monografije "KRATAK PREGLED ISTORIJE MATEMATIKE" Dirka Strojka, str. 209.

jam odredjenog integrala na funkciju koja u intervalu $[x_o, X]$ ima transfinitni skup diskontinuiteta, a čiji je izvodni skup konačan. Odlučniji korak u preciziranju pojma odredjenog integrala učinio je nemački matematičar *Bernhard Riemann* (1826-1866), ali se i on oslanjao na Cauchyjevu analitičku interpretaciju. Poznat je Riemannov stav da se od semikonvergentnog reda pogodnom permutacijom članova može dobiti divergentan ili konvergentan red. On je posebno doprineo razvoju teorije funkciji kompleksne promenljive i topologije. Značajan doprinos u razvoju integralnog računa dali su i: *George Green* (1793-1841) - teorema koja daje vezu dvostrukog i krivolinijskog integrala; *George Gabriel Stokes* (1819-1903) - uopštenje Greenove teoreme za prostor; Михаил Васильевич Остроградский (1801-1861) - transformacija zapreminskog integrala u površinski i uopštenje za višedimenzionalne prostore. Čehoslovački matematičar *Bernard Bolzano* (1781-1848) prvi je 1817. godine dokazao teoremu da funkcija f(x), neprekidna u zatvorenom intervalu $[a, b]$, koja ima na krajevima intervala različite vrednosti f(a) i f(b) uzima u unutrašnjosti tog intervala bar jednom svaku vrednost izmedju f(a) i f(b). To je dokazao i nemački matematičar *Karl Weierstrass* (1815-1897) znatno kasnije, odnosno 1861. godine. Njima dvojici pripada i dokaz poznate teoreme za nizove - da svaki ograničen, beskonačan niz tačaka ima bar jednu tačku nagomilavanja. Weierstrass se posebno bavio problemima matematičke analize, tako da se dobar broj teorema koje je on dokazao i danas nalazi u kursevima matematičke analize i teorije funkcija. Pomenimo samo njegov kriterijum za uniformnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ i njegov primer funkcije predstavljene kao zbir konvergentnog reda: $y(x) = \sum_{0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, gde je $0 < a < 1$, a $\underline{b}$ ceo neparan broj takav da je $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, koja je neprekidna na $[a, b]$, a nema izvod ni u jednoj tački. Norveški matematičar *Abel Niels Henrik* (1802-1829) je dokazao stav da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira za svako $|x| < |x_o|$ ako konvergira za $|x| = |x_o|$ i on je svojim istraživanjima usavršio teoriju redova.

Izrazita nastojanja u XIX veku da se analiza aritmetizuje podstakla su razmatranja o pojmu broja. Tako nemački matematičar *Leopold Kronecker* (1829-1891) daje čuvenu raspravu "O pojmu broja", izdižući aritmetiku na pijedestal medju matematičkim disciplinama: "Matematika je kraljica nauka, a aritmetika je kraljica matematike". Ova rečenica verno predstavlja Kroneckerova nastojanja da aritmetizuje celokupnu matematiku. On je odbacivao pojam aktuelne beskonačnosti i zalagao se za definisanje matematičkih pojmova korišćenjem samo konačnog broja koraka. Potpuno suprotno shvatanje aktuelne beskonačnosti imao je drugi nemački matematičar *Dedekind Julius Wilhelm Richard* (1831-1916), poznat po logičkom zasnivanju aritmetike i teorije iracionalnih brojeva. Značajne su mu monografije: Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872 (Neprekidnost i iracionalni brojevi) i Was sind und was sollen die Zahlen, 1882 (Šta su brojevi i čemu oni služe). Kao što je pojam beskonačnosti bio nedovoljno razjašnjen sve do XIX veka, tako isto se može reći i za pojam neprekidnosti, jer se on uvek vezivao za pojam beskonačnosti. Tek je Dedekind dao odgovor na pitanje šta se podrazumeva pod pojmom neprekidnosti, postulišući činjenicu: "... svaka tačka p prave proizvodi podelu iste na dva komada, tako da svaka tačka jednog komada leži levo od svake tačke drugog komada. Nalazim da je suština neprekidnosti u interviziji, dakle, i sledećem principu:

Ako se sve tačke prave podele u dve klase, tako da svaka tačka jedne klase leži levo od svake tačke druge klase, tada postoji jedna i samo jedna tačka koja proizvodi tu podelu svih tačaka u dve klase, to rasecanje na dva komada". (|99|, str. 26). Ta Dedekindova polazna istina objašnjava u čemu se sastoji neprekidnost prave. Navedeno svojstvo prave, koje se ne dokazuje, znači da svaki niz intervala, takvih da se uvek sledeći može smestiti u prethodni i čije se dužine smanjuju približavajući se nuli, jednoznačno odredjuje jednu tačku numeričke prave. Da tačke prave stoje u obostrano jednoznačnoj korespondenciji sa realnim brojevima postavili su kao aksiom Dedekind i *Georg Cantor* (1845-1918), osnivač teorije skupova. Cantor je 1872. godine precizirao da je tačka nagomilavanja takva tačka numeričke prave da se u svakoj, pa i u po volji maloj njenoj okolini, nalazi beskonačno mnogo članova niza.

Niz koji zadovoljava Cauchyjevo opšte pravilo konvergencije zove se *osnovni* ili *fundamentalni* niz. Pomoću takvih nizova Cantor je definisao realne brojeve, a dao je i "teoriju transfinitnih kardinalnih brojeva, koja se zasniva na sistematskom matematičkom korišćenju aktuelne beskonačnosti" (|27|, str. 221). Pokazavši da skup prirodnih i skup racionalnih brojeva imaju istu moć, a da je moć skupa realnih brojeva veća (C $>\chi_o$), Cantor je time otvorio velike mogućnosti za dalji razvoj matematike. Na njegovoj teoriji skupova, posebno beskonačnih skupova, počelo je preispitivanje osnova i buran razvoj mnogih matematičkih disciplina. To je imalo odraza i na dalji razvoj matematičke analize, odnosno graničnih procesa. "Teorijsko zasnivanje matematičke analize Cauchyja bilo je toliko solidno da je ono sačuvalo svoju vrednost sve do poslednjih godina XIX veka. Tek krajem XIX veka pojavila se neophodnost da se ponovo preispitaju te osnove i da se uvede još strožija zasnovanost za pojmove koji ulaze u klasičnu matematičku analizu. To su uradili tvorci novog pravca u matematičkim koncepcijama - pristalice teorijskoskupovnog tumačenja funkcionalne zavisnosti" (|15|, str. 237; naš prevod - R.D.). Ako se tokom XIX veka došlo do jedne konzistentne teorije granica, to nikako ne znači da je time bio završen proces usavršavanja, daljeg razvijanja i primene graničnih procesa.Ako bi se drugačije smatralo, onda bi to bilo u suprotnosti sa osnovnim zakonitostima dijalektike. Potvrdu daljih kretanja ilustruju mnogi rezultati u matematičkoj analizi prvih decenija XX veka u kojima se nalaze granični procesi. Pri tome se uvek uvažavalo ono do čega se ranije došlo, što nije izazivalo nikakvih dilema i što je izdržavalo sve kriterijume matematičke strogosti. Kao potvrdu za takva rasudjivanja navodimo mišljenje Davida Hilberta ("Über des Unendliche", Mathematische Annalen, sv. 95 (1926), s. 161-190): "Uglavnom je zasluga Weierstrassove naučne delatnosti što danas u analizi postoji potpuna usaglašenost i sigurnost u odnosu na one vrste rasudjivanja koje se zasnivaju na pojmu *iracionalnog broja i granice* uopšte. Njemu dugujemo za jedinstveni tretman svih rezultata, čak i onih koji se odnose na najsloženija pitanja, a tangiraju oblast teorije diferencijalnih i integralnih jednačina, bez obzira na veoma smele i raznovrsne kombinacije *primene superpozicija, kombinacija i transpozicija granica*".[19] (U citatu mi smo podvukli karakteristične reči). Dalji razvoj matematičke analize pokazao je da postoje odredjene protivurečnosti u zasnivanju pojedinih pojmova, baš zahvaljujući činjenici da se dobar broj njenih pojmova interpretira sa teorijsko-skupovnog stanovišta. "Die klassische Analysis hat bekanntlich nicht nur Arithmetik und Logik zur Grundlage, sondern auch die naive Mengenlehre" (|12|, s. 399).[20] Zato se u klasičnoj analizi uvek koriste sledeća tri pojma: skup, term i funkcija, a suštinu odnosa izmedju njenih objekata predstavljaju granični procesi.

*

* *

Ovaj kratak pregled istorijskog razvoja graničnih procesa pokazuje da je od prvih ideja o pojmu beskonačnosti i pojmu granice kod starih naroda, pa do Cauchyjevog konstituisanja teorije granice u XIX veku, bilo više vremenskih etapa izgradjivanja tih pojmova, pri čemu se mogu uočiti dva osnovna pristupa rešavanju odredjenih problema. Naime, zadaci u kojima je trebalo koristiti pojmove: beskonačnost, granični prelaz, granica, u suštini su se svodili na *dva osnovna granična procesa*. U prvom od tih procesa trebalo je odrediti relativnu brzinu dveju promena i on se svodi na odredjivanje granice količnika dvaju beskonačno malih priraštaja (diferenciranje), dok se u drugom traži granica zbira, u kojem broj sabiraka neograničeno raste, dok sami ti sabirci teže nuli (*integraljenje*). Ti granični procesi imaju veliki broj značajnih primena u geometriji i prirodnim naukama. Tim primenama u nastavi matematike ne treba prilaziti formalistički rešavanjem većeg broja odgovarajućih za-

---

19) Citat je preuzet iz monografije "KRATAK PREGLED ISTORIJE MATEMATIKE" Dirka Strojka, str. 219.

20) "Kao što je poznato klasična analiza nema kao osnovu samo aritmetiku i logiku, već takodje i naivnu teoriju skupova" (naš prevod - R.D.).

dataka, već postavljanjem problema iz navedenih disciplina koji dovode do potrebe upoznavanja i primene infinitezimalne metode. Ako izvodjač nastave diferencijalnog i integralnog računa u srednjoj školi ima u vidu ovakav razvoj graničnih procesa, on neće svoju nastavu svesti na mehaničko izračunavanje izvoda i integrala, već će njegov akcenat u nastavi biti na metodama infinitezimalnog računa. Ovo zalaganje za unošenje istorijskih elemenata u interpretaciju matematičkih pojmova, nikako ne znači da te pojmove treba sa učenicima obradjivati onim redom i onako postupno kako su se ti pojmovi razvijali kroz istoriju matematike. Često će biti lakše da se učenicima daju neki pojmovi po ligičkom redosledu, a ne hronološko-istorijskom, vodeći računa o njihovim psiho-fizičkim osobenostima i mogućnostima. Primera radi, u našoj temi istraživanja GRANICA FUNKCIJE bilo bi necelishodno, ponekad čak i besmisleno, sve pojmove poredjati po njihovom istorijskom nastanku. U vezi sa ovim interesantno je mišljenje profesorke Inhelder koje navodi Bruner: "U vezi sa ustrojstvom matematičkog kurikuluma pomenućemo ovde još jedan problem. Često se dogadja da je sled psihološkog razvoja u tešnjoj vezi sa aksiomatskim ustrojstvom gradje nego sa istorijskim sledom razvoja pojmova unutar date oblasti. Na primer, izvesni topološki pojmovi, kao što su svezanost, rasecanje itd. prethode formiranju euklidskih i projektivnih pojmova iz oblasti geometrije, premda su prethodne ideje u svome formalnom obliku novijeg datuma u istoriji matematike" (|19|, str. 296.) Po našem mišljenju istorijski elementi treba svrsishodno da se koriste, u prvom redu radi razumevanja i usvajanja gradiva od strane učenika, a ne radi proučavanja istorije matematike. Na primer, ne može se u srednjoj školi govoriti o problemu kvadrature ravne figure opšteg oblika, a da se ne spomene Eudoksova ekshaustiona metoda i osnovne ideje Arhimeda u rešavanju tog problema. Prema mišljenju provesora Stipanića: "Dobra nastava matematike, metodski i pedagoški svrsishodno zasnovana, naročito kada je u pitanju osnovna i srednja škola, morala bi da vodi računa o genezi i razvitku matematičkih pojmova i teorija i o ulozi matematičke intuicije u tome,... To ovde znači da nastava matematike mora biti takva da, vešto i koncizno, rekapitulira istorijski proces razvitka matematičkih pojmova i teorija, otkrivajući i koristeći pri tom, naročito u didaktičkom smislu, njihove intuitivne korene". ([149], str. 9.). Izneta mišljenja o mestu i ulozi istorije matematike u nastavnom procesu na prvi pogled protivureče jedno drugom. Medjutim, ni jedno od njih se ne zalaže za isključivost u tretiranju istorijskih elemenata u nastavi matematike, već to treba uvek da se posmatra u funkciji razumevanja i shvatanja suštine odredjenih matematičkih pojmova i teorija od strane učenika. Zato se može zaključiti da u nastavi matematičke analize, odnosno u tumačenju pojmova iz graničnih procesa, prikaz istorijskog puta razvoja tih pojmova ima puno opravdanja, u cilju uspešnijeg usvajanja ovih fundamentalnih sadržaja u matematičkom obrazovanju srednjoškolaca.

III GRANIČNI PROCESI U ŠKOLSKIM PROGRAMIMA

Iako je NASTAVNI PLAN I PROGRAM celovit i jedinstven školski dokumenat kojim se utvrdjuje obim i sadržaj obrazovanja u odredjenoj školi, odnosno razredu, mi se nećemo baviti nastavnim planovima (utvrdjuju vaspitno-obrazovna područja, broj i vrstu predmeta po razredima i fond časova), već će predmet našeg razmatranja biti samo nastavni programi (utvrdjuju ciljeve, zadatke i sadržaje obrazovanja), a nastavne planove ćemo spominjati samo kada je to neophodno. Pri razmatranju nastavnih programa plaznu osnovu predstavljaće njihove tri bitne karakteristike: obim, dubina i redosled sadržaja. Posebno ćemo se baviti programima matematike za srednju školu, analizirajući mesto i ulogu graničnih procesa u njima. Izrada školskih programa uopšte, pa i iz matematike danas predstavlja vrlo složen i odgovoran posao, koji je već postavljen i na odredjene teorijske osnove. Ne zadržavajući se na tim teorijskim osnovama, ističemo neke bitne elemente, koji se moraju imati u vidu prilikom izrade programa iz bilo kog predmeta, pa i iz matematike. Ti elementi su: potreba stalnog i sistematskog didaktičkog transformisanja nauke u nastavni predmet u zavisnosti od razvoja nauke i psihofizičkih sposobnosti učenika; potrebe razvoja ljudskih delatnosti pojedinih država, regiona i drugih teritorijalnih oblasti; specifičnost pojedinih vrsta škola i njihovi zahtevi u odnosu na svaki odredjeni predmet; trajanje školovanja i fond časova; obim, dubina i logička povezanost programskih sadržaja, kao i njihov redosled; vrsta obrazovanja - opšte ili profesionalno, stupanj obrazovanja i mogućnosti daljeg nastavljanja obrazovanja i dr. O tim elementima smo i mi vodili računa pri analizi programa matematike za srednje škole, a posebno pri analizi prisutnosti graničnih procesa u tim programima. Ta analiza različitih programa imala je za cilj ne samo da se utvrdi zastupljenost graničnih procesa u njima, već i da se dâ ocena u kom stepenu su primereni učenicima pojedini sadržaji sa pedagoško-psihološkog stanovišta. Analizirani su i različiti pristupi i načini u realizaciji sadržaja iz graničnih procesa. Posebno je razradjena sa stručno-metodičkog aspekta tema: GRANICA FUNKCIJE, čiji su struktuirani sadržaji poslužili su kao osnova za sprovodjenje eksperimenta.

3.1. *Prvi pokušaji i kasnija nastojanja da se granični procesi zastupe u programima srednje škole*

Budući da je krajem XIX veka nastava matematike obuhvatala one sadržaje koji su u matematici kao nauci bili formirani do kraja XVI veka, to je bilo prirodno da se započne sa promenama u sadržajima matematičkog obrazovanja u cilju većeg približavanja matematičke nastave onim sadržajima koji su već davno bili konstituisani u matematici kao nauci. Mi ćemo se usredsrediti na one delove tih promena koji se odnose na granične procese, odnosno na elemente matematičke analize u programima srednje škole.

Najpre spominjemo *Felixa Kleina* (1849-1925) koji je u svom poznatom *Erlangenskom programu* (1872. godine) tražio da se u nastavi ističu elementi teorije grupa i principi transformacija u geometriji, analizi i fizici. On je 1900. godine precizirao svoj program za reformu srednjoškolske nastave matematike, koji je sadržavao uglavnom sledeće bitne ciljeve:

a) Da se programski sadržaji nastave matematike više približe stvarnom životu i da se oni prilagode mentalnom razvoju i intelektualnim potrebama učenika;

b) Da se programski sadržaji nastave matematike modernizuju i vremenski približe razvoju matematičke nauke. U tom duhu novi nastavni programi svakako treba da sadrže pojam funkcije, *elemente diferencijalnog i integralnog računa* (podvukao R.D.) i osnove analitičke geometrije u ravni; i

c) Da se u nastavnom procesu polazi od očiglednosti uz postepeno razvijanje apstraktnog mišljenja i negovanja razvoja deduktivnog i funkcionalnog mišljenja učenika.

Ne ulazeći u to u kojoj meri je bio realan i ostvarljiv Kleinov program reforme nastave matematike u celini, mora se reći da je njegov doprinos unapredjivanju nastave matematike bio ogroman i da je on medju prvima bio za uvodjenje elemenata diferencijalnog i integralnog računa u programe nastave matematike srednjih škola. Pod uticajem ovih nastojanja javljaju se postepeno novi programi u pojedinim zemljama, u kojima se nalaze i elementi infinitezimalnog računa. Ističemo da načelno široko prihvaćena Klein-Borelova reforma nastave matematike nije se tako brzo i bez teškoća odrazila i na izradu novih programa u većini evropskih zemalja. Pominjemo one koji su na tom planu išli napred. Tako je 1902. godine donet novi program u Francuskoj u kojem se izmedju ostalog zahtevalo uvodjenje elemenata diferencijalnog računa i pojmova integralnog računa. U Rusiji je 1905. godine novi program sadržavao i dve nove matematičke oblasti: analitičku geometriju u ravni i osnove diferencijalnog i integralnog računa. Slično se radi u Engleskoj i Nemačkoj, u kojoj se pojavljuje veći broj novih udžbenika elementarne matematike od kojih neki obradjuju i nove sadržaje (|7|, str. 83). U SAD je 1900. godine objavljena vrlo značajna knjiga D.E. Smitha pod nazivom "Nastava elementarne matematike" koja je imala znatnog uticaja na dalju reformu nastave matematike u ovoj zemlji.

Na inicijativu F. Kleina održana je 1905. godine značajna konferencija matematičara, pedagoga, psihologa, lekara i drugih naučnika koji se bave nastavnim pitanjima, u tada nemačkom gradu Meranu. Zaključci ove konferencije, poznati danas pod nazivom *Meranski program*, imali su znatnog uticaja na dalji razvoj nastave matematike u nizu zemalja Evrope, a ne samo u Nemačkoj. Pomenimo samo da je u Rusiji na I Sveruskom kongresu nastavnika matematike u Petrovgradu (današnji Lenjingrad) krajem 1911. i početkom 1912. godine i na II Sveruskom kongresu 1914. godine, pored drugih značajnih ideja, istaknuta je i ideja da se u svim tipovima srednjih škola uvedu osnove analitičke geometrije u ravni i elementi matematičke analize.

Značajnu ulogu u reformisanju nastave matematike preuzela je na sebe Medjunarodna komisija za nastavu matematike, formirana na inicijatuvu američkog matematirača D.E. Smitha,

1908. godine, u Rimu na IV Medjunarodnom kongresu matematičara.

Ova Komisija je trebala, posle četiri godine svog rada, da podnese na sledećem kongresu referat o nastavi matematike u srednjoj školi, jer se svuda ispoljavala težnja za traženjem novih puteva i sadržaja u nastavi matematike. "Francuska, a odmah iza nje Nemačka, pojavile su se na čelu ovog pokreta. Iako je na prvom mestu bio pregled sadržaja programa nastave, radi nalaženja boljeg i prirodnijeg načina njihovog proučavanja, ipak je od najvećeg interesa bilo pitanje uvodjenja u srednju školu analize neprekidnih veličina i osnova infinitezimalnog računa". (|144|, str. 207).

Tek su 1914. godine u Parizu na medjunarodnoj konferenciji za nastavu matematike sumirana prethodna nastojanja da se u programe srednje škole unesu elementi infinitezimalnog računa. "Na toj konferenciji, može se slobodno reći, gradivo infinitezimalnog računa je definitivno zauzelo svoje mesto u programu matematike u većini škola II stupnja, zahvaljujući, u prvom redu, svesrdnoj podršci velikih matematičara toga doba: Borela, Adamara, Klajna, Darbua, H. Fera, Čubera i dr." (|10|, str. 86). Na konferenciji su podneti sledeći referati: prof. E. Becke (Austrougarska) - O postignutim rezultatima uvodjenja diferencijalnog i integralnog računa u srednju školu; prof. Ch. Bioche (Francuska) - O organizaciji i rezulatima nastave infinitezimalnog računa u francuskim licejima i prof. E. Borel (Francuska) - Prilagodjavanje srednjoškolske nastave napretku nauke. Zbog značaja za nastavu sadržaja zasnovanih na graničnim procesima, navodimo šta je na kraju ove konferencije zapisnički konstatovano:

"I. Elementi infinitezimalnog računa bili su uvedeni zvaničnim programima u nemačkim državama Bavarskoj, Virtembergu, Badenu i u Austriji, Danskoj, Francuskoj, Velikoj Britaniji, Italiji, Rumuniji, Rusiji, Švajcarskoj i Švedskoj.

Dotični elementi ne figurišu zvanično u nastavnim programima, ali se ipak predaju u velikom broju škola u Pruskoj, Saksoniji, Madjarskoj i Austriji. Očekuje se uvodjenje elemenata infinitezimalnog računa u nastavne programe u Holandiji, Norveškoj, Belgiji i Srbiji[21].

II. Diferencijalni i integralni račun se većim delom primenjuje na funkcije jedne nezavisno promenljive.

Predaje se diferenciranje polinoma, racionalnih funkcija i, u većem broju zemalja, eksponencijalnih, trigonometrijskih i njihovih inverznih funkcija. U većem delu zemalja preovladjuju oznake Lagrangea nad Leibnitzovim.

U većem delu zemalja uvodi se pojam integrala ili primitivne funkcije. Svugde pojam integrala sledi za pojmom izvoda, dok se u Češkoj i Slovačkoj oba pojma daju istovremeno. U nekim zemljama predaje se najpre odredjeni integral, a posle toga neodredjeni, ali se u većem delu države ide obrnutim redom.

III. Taylorov red nalazi se u manjem broju programa, ali se predaje u školama gde su se i ranije predavali beskonačni redovi. Ali, mora se smatrati da proučavanje Taylorovog reda još nije dovoljno pristupačno učenicima srednjih škola.

IV. Infinitezimalni račun svugde se primenjuje na iznalaženje maksimalnih i minimalnih vrednosti.

Infinitezimalni račun primenjuje se takodje u fizici, najviše za definisanje pojma brzine i ubrzanja, a ponekad se primenjuje i za odredjivanje težišta, momenta inercije, potencijala itd. U Rusiji se obično u fizici služe elementarnom matematikom.

Infinitezimalni račun primenjuje se u geometriji na izračunavanje površina i zapremina i tu je nova metoda veoma korisna sa gledišta ekonomije, ali se takodje iskorišćavaju i stare metode, najviše načelo Cavallieria.

V. Pitanje preciznosti predstavlja osetljiv pojam. S gledišta univerzitetskih nastavnika srednja nastava čini više zla nego dobra ako se ne koristi preciznim metodama naučnog izlaganja. Naprotiv, predstavnici srednje nastave nalaze

---

21) Predstavnik Srbije u Internacionalnoj komisiji za nastavu matematike u to vreme bio je akademik Mihailo Petrović.

da prosečna inteligencija učenika ne dozvoljava precizno izlaganje diferencijalnog i integralnog računa. Profesori srednjih škola moraju poznavati moderni i rigorozni infinitezimalni račun, ali oni su primorani da se u svojim predavanjima koriste intuitivnom metodom, geometrijskim i mehaničkim posmatranjima i da zatim postepeno dovode do neophodnih apstrakcija. Ovo je najbolji način da se u svesti učenika probudi težnja za rigoroznošću.

Iracionalni brojevi skoro se svugde uvode povodom izvlačenja korena. Opšta teorija proučava se samo izuzetno.

Pojam granice uveden je svugde, pa se niko ne zadovoljava intuicijom. Elementarne teoreme koje se odnose na granice skoro svugde se uvode bez dokaza. Nigde se ne pominju neprekidne funkcije koje nemaju izvoda. U izvesnim školama kaže se da u nekim tačkama izvod ne mora postojati.

U većem delu škola ne uvodi se pojam diferencijala i postoji nejasnost u objašnjenju ovog pojma. Ne bi trebalo da metafizička magla beskrajno malih veličina ulazi u srednjoškolsku nastavu.

VI. Nova gradja ne sme da ulazi u program kao zaseban dodatak pored predjašnje, nego treba da oba gradiva budu zajednički spojena u jednu celinu.

Proširenje uloge pojma funkcije i uvodjenje infinitezimalnog računa uspeće samo ako se stari programi skrate i budu sažetiji - ekonomičniji. Do olakšavajućih okolnosti dolazi se spajanjem starog i novog gradiva i izbacivanjem zastarelog gradiva.

VII. Odsudni rezultati našeg pokreta mogu da budu obezbedjeni ako se postigne uspeh i ako zainteresuje predavače. Pokret je naišao svuda na simpatije srednjoškolskih nastavnika. Medjutim, profesori viših škola, koji ovaj pokret posmatraju sa specijalnog gledišta, ne prihvataju uvek naše tendencije.

Čuju se primedbe da nastava diferencijalnog i integralnog računa ne izaziva interesovanje kod učenika koji već nešto o tome znaju. Ali ovo tvrdjenje može se oboriti; dovoljno je napomenuti odobravajuća mišljenja od strane drugih profesora univerziteta sviju zemalja, koji gledaju naš pokret sa višeg stanovišta" (|144|, str. 215-216). Iz ovih zaključaka može se videti obim i dubina obrazovnih sadržaja iz graničnih procesa u srednjim školama Evrope početkom ovog XX veka. Uočava se da je rigoroznosti i dokazima poklanjano manje pažnje i da su neki sadržaji obradjivani nepotpuno, kao napr. teorija realnih brojeva, neprekidnost funkcija i diferencijali. Podaci o svemu ovome prikupljeni su posebnom anketom koju je sprovela Medjunarodna komisija za nastavu matematike. Posle ove konferencije nastupa period u kome se intenzivno radi na usklađivanju sadržaja matematičkog obrazovanja sa razvojem matematike kao nauke, pri čemu su obuhvatani i elementi infinitezimalnog računa. Ovo traje sve do Drugog svetskog rata kada intenzitet ovih aktivnosti znatno opada za jedan duži period.

3.2. *Pregled važnijih aktivnosti za izmene programa nastave matematike u drugoj polovini XX veka i prisutnost graničnih procesa u tim programima*

Promene školskih programa izmedju dva svetska rata uključivale su u velikom broju slučajeve i elemente diferencijalnog i integralnog računa, naravno sa različitim obimom i dubinom ovih sadržaja. Zapaža se, da i oni programi koji nisu sadržavali elemente diferencijalnog i integralnog računa, ipak su imali odredjene teme iz graničnih procesa, a u prvom redu: realne brojeve, nizove i granicu funkcije. Te promene programa ponekad su vršene tako da se išlo korak unatrag, odnosno da su iz programa brisani oni sadržaji koji se zasnivaju na graničnim procesima, da bi ih pri narednoj promeni opet zastupili u programu. To dokazuje da se nije uvek mogla obezbediti dobra osnova za realizaciju tih sadržaja, posebno odgovarajuća metodička interpretacija i osposobljenost nastavničkog kadra.

Nije prošla ni jedna puna decenija posle Drugog svetskog rata, a već su se počele javljati ideje i akcije za renoviranje postojećih programa nastave matematike. To je usledilo prvenstveno zbog naglog napretka kako u razvoju ljudskog društva u celini, tako i u razvoju nauke i tehnike posebno. Tada se ponovo oživljava rad Medjunarodne komisije za nastavu matematike, a organizuju se i drugi oblici medjunarodne saradnje u cilju potpune rekonstrukcije školskog matematičkog obrazovanja. Ubrzo su te aktivnosti prerasle u jednu vrstu pokreta za osavremenjavanje nastave matematike. Tako je 1950. godine formirana internacionalna komisija za proučavanje i unapredjivanje nastave matematike u školama na čijem je čelu bio francuski matematičar GUSTAVE CHOQUET. Održava se u to vreme i više medjunarodnih skupova posvećenih pitanjima sadržaja matematičkog obrazovanja, kako u osnovnim tako i u srednjim školama. Pominjemo održavanje dve značajne konferencije (seminara ili stručna sastanka) i to u Royaumonta (Francuska) 1959. godine i u Dubrovniku (Jugoslavija) 1960. godine. U Rayaumontu se raspravljalo o "novoj koncepciji u matematici", a nakon te konferencije objavljena je posebna knjiga o njenom radu pod naslovom MATHEMATIQUES NOUVELLES, odnosno NEW THINKING IN SCHOOL MATHEMATICS ("Nova koncepcija u školskoj matematici") u izdanju OECD-a[22] (|120|). U zaključcima ove konferencije stavljeno je u zadatak jednoj radnoj grupi stručnjaka sa univerziteta i iz srednjih škola da izradi sinopsis matematičkih sadržaja koji bi trebalo da obuhvate novi programi nastave matematike. Eksperti, odnosno stručna grupa OECD-a je 1960. godine u Dubrovniku izradila jedan sinopsis programa pod naslovom UN PROGRAMME MODERNE DE MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE (|119|), poznat pod skraćenim nazivom Dubrovački program. Pored više predloga za izmene u sadržajima matematičkog obrazovanja sa opširnim obrazloženjima, datih po disciplinama aritmetika, algebra, geometrija i po ciklusima (prvi ciklus - uzrast 11-15 godina i drugi ciklus - uzrast 15-18 godina), u ovom programu se nalazi i dodatak o nastavi analize u prvom i drugom ciklusu, gde su predvidjeni sadržaji koji uključuju pojmove iz gra-

---

22) OECD - Organization for Economic Cooperation and Development (Organizacija za ekonomsku saradnju i razvoj, u kojoj je uključeno više zapadnoevropskih zemalja).

ničnih procesa. U uvodu ovog dela Dubrovačkog programa se ističe da nastava analize u prvom ciklusu ima za cilj da pripremi osnovne ideje i da se steknu potrebna iskustva pristupom na intuitivnoj osnovi, da bi se kasnije mogla izučavati realna analiza. Ta etapa izučavanja analize treba da obuhvati: funkcije, apsolutne vrednosti, nejednačine, neprekidnost, granične vrednosti i izvod najjednostavnijih celih algebarskih izraza. Prve dve godine drugog ciklusa obuhvatile bi integrale i redove, dok bi se u završnom razredu drugog ciklusa izučavao kurs analize, zasnovan na osobinama skupa realnih brojeva. Teme tog kursa analize su sledeće: topologija (okolina tačke, neprekidnost, granica i dr.), redovi, izvodi i integralni račun. (|119|, 238-248).

Dubrovački program je dat kao preporuka i nikoga nije obavezivao, ali je on ipak poslužio kao osnova za kasniju izradu novih programa u mnogim zemljama širom sveta. Iz nekih od tih programa navešćemo one delove koji se odnose na granične procese. Pri tome nećemo uzimati one sadržaje koji na odredjeni način predstavljaju propedevtiku graničnih procesa, kao što su na primer: beskonačni periodični i neperiodični decimalni brojevi, obim i površina kruga, izračunavanje kvadratnog korena iz prirodnog broja koji nije potpun kvadrat, kvadratura i kubatura oblih geometrijskih tela, aritmetička i geometrijska progresija i dr.

U novom programu od 1968. godine u SSSR (|134|, str. 5-20) za IX i X razred (uzrast 15-17 godina) predvidjen je poseban predmet pod nazivom ALGEBRA I OSNOVE ANALIZE. Program za taj predmet, pored ostalog, sadrži i sledeće:

IX r a z r e d. Princip matematičke indukcije. Elementi kombinarotike (15 časova): Primena principa matematičke indukcije u izvodjenju formula (zbir članova geometrijske progresije, zbir kvadrata niza prirodnih brojeva i dr.). Pascalov trougao. Newtonov binomni obrazac.

Beskonačni nizovi i granične vrednosti (15 časova): Definicija granice. Zbir beskonačno opadajuće geometrijske progresije. Periodični decimalni razlomci. Iracionalni brojevi kao neperiodični decimalni brojevi. Dokaz iracionalnosti broja $\sqrt{2}$. Egzistencija granične vrednosti ograničenog monotonog niza (bez dokaza). Broj π. Beskonačno male. Teorema o graničnim vrednostima zbira, proizvoda i količnika (bez dokaza).

Izvod i njegova primena (45 časova): Granična vrednost funkcije. Izvod. Izvod zbira, proizvoda, količnika, stepena x^n za $n \in Z$, inverzne funkcije. Rašćenje i opadanje funkcije, maksimum i minimum. Ispitivanje kvadratnog trinoma. Primena izvoda u geometriji i fizici.

X r a z r e d. Izvod eksponencijalne i logaritamske funkcije (15 časova): Izvod eksponencijalne i logaritamske funkcije. Formula za prelaz iz logaritamskog sistema sa osnovom b u sistem sa osnovom a.

Integral (12 časova): Primitivna funkcija. Odredjeni integral, primena u izračunavanju površine. Newton-Leibnitzova formula.

Prvo što treba istaći u komentaru za ovaj program, jeste činjenica da IX i X razred srednjeg obrazovanja u SSSR spadaju u obavezno školovanje za celu populaciju. Novi program, sovjetski metodičar matematike Stoljar ovako je okarakterisao: "Ovaj program nije rezultat bilo kakvih izmena dosadašnjih programa, nego je to sasvim novi program, sa novom strukturom i novim idejama, koji održava stremljenja u idejnom zbližavanju školske nastave sa savremenom matematičkom naukom i sa potrebama srodnih nauka i tehnike" (|151|, str. 53). Za deo koji se odnosi na osnove analize može se konstatovati da su to uglavnom sadržaji koji su se nalazili u školskim programima nekih zemalja dosta davno pre Drugog svetskog rata (na osnovu zaključaka konferencije u Parizu 1914. godine), a i neposredno posle Drugog svetskog rata. Uočava se da u programu nema neprekidnosti, redova i diferencijala.

U Francuskoj je ne samo najranije započeo pokret "modernizaciju" nastave matematike, već je on tu bio i najširih i najžešćih razmera u koji je bilo uključeno više njihovih poznatih matematičara (Dieudonné, Choquet, Servais, Lichnerowicz i dr.), a posebno jedna grupa matematičara pod zajedničkim pseudonimom N. Bourbaki. Godine 1967. formirana je komisija na čelu sa uglednim matematičarem A. Lichnerowiczem članom Francuske akademije nauka, sa zadatkom da pripremi eksperimentalni program za srednjoškolsku nastavu matematike i da nakon sprovedenog eksperimenta sačini konačnu verziju novog programa. Komisija je imala i druge zadatke, kao što je utvrdjivanje načina realizacije novog programa i osposobljavanje nastavničkog kadra za tu svrhu. Prvu verziju novog programa Komisija je dala 1969. godine (VI i V razred) i 1971. godine (IV i III razred) i on je obuhvatao prvi ciklus srednje škole. U ovom delu srednjeg obrazovanja (uzrast 11-15 godina) u Francuskoj, programom nastave matematike nisu eksplicitno predvidjeni sadržaji iz graničnih procesa. Novi program za drugi ciklus (uzrast 15-18 godina) srednjih opšteobrazovnih škola donet je takodje 1969. godine (II razred), 1970. godine (I razred) i 1971. godine (završni razred) čija je primena tekla sukcesivno od 1969/70. školske godine u svih pet smerova[23].

U programu II razreda D-smer - prirodne nauke nalaze se i ove dve teme: *Realni brojevi* i *Numeričke funkcije jedne realne promenljive*. Iz programa I razreda (16-17. godina) pominjemo temu NUMERIČKE FUNKCIJE JEDNE REALNE PROMENLJIVE koja obuhvata sledeće gradivo: 1. Neprekidnost funkcije u datoj tački. Granična vrednost funkcije. Granična vrednost zbira, proizvoda i količnika funkcija. 2. Tangenta date funkcije; izvod u datoj tački. Izvod funkcije; izvod zbira, proizvoda i količnika funkcija. Geometrijska interpretacija izvoda; jednačina ~~tangente~~. Fizička intepretacija izvoda. Pravolinijsko kretanje tačke; definicija brzine i ubrzanja. 3. Razne primene izvoda.

Program završnog razreda (uzrast 17-18 godina) započinje temom REALNI BROJEVI; NUMERIČKI RAČUN; KOMPLEKSNI BROJEVI iz koje izdvajamo sledeće gradivo: 1. Skup realnih brojeva R; svojstva; komutativno telo. 2. Decimalna aproksimacija realnog broja sa tačnošću da 10^{-n}, greška i ostatak. Pred-

---

23) *Drugi ciklus srednjeg obrazovanja u Francuskoj grana se u pet smerova i to: A-književnost, jezik i filozofija; B-ekonomske i sociološke nauke; C-fizičko-matematičke nauke; D-prirodne nauke i E-tehničke nauke i industrija. Programe koje dalje navodimo preuzeli smo iz monografije - WALUSINSKI (Gilbert): Pourquoi une mathématique moderne? Paris, 1970. god. s. 208.*

stavljanje realnog broja sa neograničenim nizom decimala. Zatim sledi tema DIFERENCIJALNI RAČUN koja obuhvata: 1. Numeričke funkcije jedne realne promenljive: neprekidnost. Neprekidnost u tački i na intervalu; zbir, proizvod i količnik neprekidnih funkcija. Monotona funkcija. Inverzna funkcija. 2. Numeričke funkcije jedne realne promenljive: granična vrednost. Granična vrednost funkcije kada promenljiva teži datom realnom broju. Granična vrednost zbira, proizvoda i količnika funkcija. 3. Numeričke funkcije jedne realne promenljive: izvod. Izvod kompozicije dve funkcije. Izvod inverzne funkcije. Uporedjivanje dve funkcije koje imaju isti izvod u jednom intervalu. Proučavanje toka promene funkcije. Grafičko predstavljanje. 4. Vektorske funkcije jedne realne promenljive. 5. Kinematika tačke. Treća tema u programu je INTEGRALNI RAČUN. Ona obuhvata sledeće gradivo: 1. Neodredjeni i odredjeni integral; jednakost $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. Izračunavanje primitivne funkcije; parcijalna integracija. 2. Primena integralnog računa. U četvrtoj temi koja nosi naslov PRIMERI FUNKCIJA JEDNE REALNE PROMENLJIVE obuhvačene su elementarne funkcije (algebarske i trigonometrijske) za koje se često traži granična vrednost, izvod i integral.

Ovaj deo programa koji se odnosi na granične procese nešto je širi i detaljniji od programa SSSR, ali treba naglasiti da od tri razreda drugog ciklusa srednje škole samo II razred spada u obavezno školovanje. U ostala dva razreda vrši se grananje u pet smerova od kojih neki imaju veliki nedeljni fond časova. Što se tiče samih sadržaja uočava se da su oni pretežno dati u koncentričnim krugovima (na primer, isti zahtev u I i završnom razredu javlja se kod granične vrednosti zbira, proizvoda i količnika funkcije). U pogledu redosleda karakteristično je da se prvo daje neprekidnost, a zatim granična vrednost i izvod.

U programu[24] prvog stupnja (uzrast 11-16 godina) srednjeg obrazovanja u *Engleskoj* koje spada u obavezno školo-

---

24) U Engleskoj postoji više projekt-programa za matematičko obrazovanje u srednjim školama, od kojih je najrasprostranjeniji SMP projekat, čiji program i navodimo.

stavljanje realnog broja sa neograničenim nizom decimala. Zatim sledi tema DIFERENCIJALNI RAČUN koja obuhvata: 1. Numeričke funkcije jedne realne promenljive: neprekidnost. Neprekidnost u tački i na intervalu; zbir, proizvod i količnik neprekidnih funkcija. Monotona funkcija. Inverzna funkcija. 2. Numeričke funkcije jedne realne promenljive: granična vrednost. Granična vrednost funkcije kada promenljiva teži datom realnom broju. Granična vrednost zbira, proizvoda i količnika funkcija. 3. Numeričke funkcije jedne realne promenljive: izvod. Izvod kompozicije dve funkcije. Izvod inverzne funkcije. Uporedjivanje dve funkcije koje imaju isti izvod u jednom intervalu. Proučavanje toka promene funkcije. Grafičko predstavljanje. 4. Vektorske funkcije jedne realne promenljive. 5. Kinematika tačke. Treća tema u programu je INTEGRALNI RAČUN. Ona obuhvata sledeće gradivo: 1. Neodredjeni i odredjeni integral; jednakost $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. Izračunavanje primitivne funkcije; parcijalna integracija. 2. Primena integralnog računa. U četvrtoj temi koja nosi naslov PRIMERI FUNKCIJA JEDNE REALNE PROMENLJIVE obuhvačene su elementarne funkcije (algebarske i trigonometrijske) za koje se često traži granična vrednost, izvod i integral.

Ovaj deo programa koji se odnosi na granične procese nešto je širi i detaljniji od programa SSSR, ali treba naglasiti da od tri razreda drugog ciklusa srednje škole samo II razred spada u obavezno školovanje. U ostala dva razreda vrši se grananje u pet smerova od kojih neki imaju veliki nedeljni fond časova. Što se tiče samih sadržaja uočava se da su oni pretežno dati u koncentričnim krugovima (na primer, isti zahtev u I i završnom razredu javlja se kod granične vrednosti zbira, proizvoda i količnika funkcije). U pogledu redosleda karakteristično je da se prvo daje neprekidnost, a zatim granična vrednost i izvod.

U programu[24] prvog stupnja (uzrast 11-16 godina) srednjeg obrazovanja u *Engleskoj* koje spada u obavezno školo-

---

24) U Engleskoj postoji više projekt-programa za matematičko obrazovanje u srednjim školama, od kojih je najrasprostranjeniji SMP projekat, čiji program i navodimo.

vanje, nalazi se tema ANALIZA[25] koja obuhvata sledeće sadržaje: Pojam i označavanje funkcija. Diferenciranje. Linearna aproksimacija. Brzina promene. Tangenta dijagrama. Ekstremne tačke. Pojam integracije. Primena integrala u izračunavanju površine i zapremine. Osnovna teorema $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. Ispitivanje i grafik jednostavnijih funkcija.

Program drugog stupnja (uzrast 16-18 godina) srednjeg obrazovanja nije dat po razredima, pa su za dvogodišnji kurs izmedju ostalih tema predvidjene i sledeće: FUNKCIJE, INTEGRAL i DIFERENCIJALNE JEDNAČINE. U prvoj temi nalaze se ovi sadržaji: Funkcije kao preslikavanja i kao grafici, oblast definisanosti - domen. Specijalne funkcije: parne, neparne, periodične funkcije. Inverzne funkcije. Neke posebne funkcije i njihovi grafici: algebarske, trigonometrijske, logaritamske i eksponencijalne. Izvodi funkcija. Izvod algebarskih i trigonometrijskih funkcija, izvod proizvoda i količnika, izvod inverzne i složene funkcije. Izvodi drugog i višeg reda. Maksimum i minimum. Primena izvoda u fizici. Linearna aproksimacija: tangenta krive. Newton - Raphsonova metoda rešavanja jednačina. Taylorova aproksimacija za standardne funkcije. Tema INTEGRAL obuhvata: Integral kao sumacija sa primenama (na pr. u izračunavanju površine, zapremine, srednje vrednosti). Numeričke metode integracije: formula trapeza i formula Simpsona. Osnovna teorema integralnog računa i njena primena u izračunavanju integrala. Tablični integrali; delimična integracija, proste zamene.

Zapaža se da je ovaj program dosta opširan kada se radi o sadržajima iz analize, pri čemu se pored nekih sasvim novih sadržaja insistira i na primenama, posebno u fizici. Isto tako je dosta pažnje poklonjeno numeričkoj strani sadržaja i usvajanju odredjenih algoritama iz diferencijalnog i integralnog računa, a manje se insistira na teorijskoj strani i rigoroznosti tih sadržaja.

U Sjedinjenim Američkim Državama ne postoji je-

---

25) *Ova tema je data u okviru dodatne nastave za učenike bolje po uspehu.*

dinstven nastavni plan i program, već je školstvo decentralizovano i postoji više nastavnih planova i programa. Stoga se mi nećemo upuštati u sve njih pojedinačno, već ćemo samo radi ilustracije analizirati jedan noviji program od 1966. godine pod naslovom "Poboljšani nastavni program u srednjoškolskoj matematici - jedinstveni matematički program" čiji je glavni nosilac bio H. Fehr profesor sa Kolumbija univerziteta u Njujorku (|65|). U sprovodjenju eksperimentalne provere ovog programa i izradi njegove konačne verzije učestvovalo je i 15 univerzitetskih provesora.

U X, XI i XII razredu srednje škole program obuhvata, pored ostalih sadržaja, i sledeće gradivo vezano za granične procese: nizovi i redovi (rastući i opadajući nizovi, konačni i beskonačni nizovi, opšti član niza, aritmetika i geometrijska progresija, opšti član i zbir članova); granična vrednost niza, operacije sa graničnim vrednostima; neprekidnog i granična vrednost funkcije u datoj tački i na datom intervalu; linearne aproksimacije i izvodi; osobine izvoda; izvodi pojedinih funkcija; primena diferenciranja; integracija (pojam integrala se uvodi aproksimiranjem površine ispod grafika monotone neprekidne funkcije), tablica osnovnih integrala; tehnika integracije i primena integrala (posebno u geometriji, fizici i u računu verovatnoće).

U prikazu ovog programa (|65|, 45-47) za deo iz analize se kaže: "Pojam neprekidnosti u tački i na odsečku razvijaju se intuitivno i zatim formalizuju; neprekidnost funkcije se koristi za definiciju granične vrednosti funkcije u tački. Izvodu funkcije se prilazi pomoću linearnih aproksimacija grafika funkcije, da bi se nastavilo sa uobičajenim razvitkom teorije, tehnike i primene diferenciranja". Iako ovaj program ne obuhvata neke druge sadržaje iz graničnih procesa, koji nisu već spominjani u prethodnim programima, on se ipak odlikuje nestandardnim pristupom nekim pojmovima. Za njegovu realizaciju se kaže: "Uspeh eksperimentalnog programa kontrolisan je tokom čitave realizacije sistemom testova i uporedjivanjem sa učenicima koji su učili standardne programe. Rezultati su bili više nego zadovoljavajući" (|65|, str. 47.).

U srednjim školama u *Jugoslaviji* gradivo iz osnova matematičke analize, ponovo je uneto u nastavni program 1960. godine i to u oba smera gimnazijskog obrazovanja: društveno-jezički (kraća verzija) i prirodno-matematički (šira verzija programa)[26]. Navodimo deo programskih sadržaja (111 , str. 155-156) za prirodno-matematički smer - IV razred iz 1969. god. u SR Srbiji, koji se odnose na granične procese: Funkcije definisane u skupu prirodnih brojeva - nizovi. Konačni i beskonačni nizovi. Monotoni nizovi. *Granična vrednost niza.* Aritmetički niz: pojam, zakon formiranja članova, opšti član, osobine članova, zbir prvih n članova. Geometrijski niz: pojam, zakon formiranja članova, opšti član, osobine članova, zbir prvih n članova. Pojam beskonačnog reda. Konvergentni i divergentni red. Konvergencija beskonačnih decimalnih razlomaka. Broj e. Beskonačno velike i beskonačno male veličine. Funkcije definisane u skupu realnih brojeva. - Osobine funkcije (ograničenost, parnost, pojam monotonosti, pojam periodičnosti); pojam inverzne funkcije. Pregled i klasifikacija proučavanih funkcija. *Granična vrednost funkcije.* Priraštaj funkcije. Količnik priraštaja funkcije i priraštaja argumenta. Neprekidnost funkcije u tački. *Pojam izvoda funkcije* (problemi tangente i brzine). Izvodi elementarnih algebarskih i trigonometrijskih funkcija. Pravila diferenciranja. Izvod posredne funkcije. Pojam izvoda drugog reda. Primena izvoda na ispitivanje toka funkcije (monotonost, ekstremne vrednosti; pojam konveksnosti i prevojne tačke) - na primerima. Pojam *odredjenog integrala* na primerima rada, puta i površine. Analitička definicija odredjenog integrala. Osnovne osobine odredjenog integrala. Veza odredjenog i neodredjenog integrala. Pojam neodredjenog integrala. Njutn - Lajbnicova formula za odredjeni integral. Osnovni (tablični) integrali. Integracija metodom zamene (supstitucija). Primena integralnog računa na izračunavanje: 1) površtine kruga i elipse; 2) površine ograničene lukom parabole i dvema ordinatama; 3) zapremine loptinog isečka; loptinog odsečka i lopte.

Pomenuti program iz 1960. god. neznatno je korigovan 1965. i 1969. godine, ali bez bitnijih izmena ovog dela programa koji se odnosi na granične procese. Napomenimo i to da je u tom periodu i u skoro svim vrstama tehničkih škola bilo u programu elemenata diferencijalnog i integralnog računa, ali više kao računskog aparata u funkciji odgovarajuće struke. Ovo važi i za programe ostalih naših republika.

I u drugim našim republikama bili su zastupljeni sa-

---

26) Osnovu tog programa dao je Savezni zavod za proučavanje školskih i prosvetnih pitanja u publikaciji GIMNAZIJA u izdanju "Savremene škole", Beograd, 1959. Od njega su polazile i druge republike pri izradi svojih programa.

držaji iz graničnih procesa u programima matematike za prirodno matematički smer gimnazija. Na primer u SR Hrvatskoj program matematike za IV razred matematičko prirodnoposlovnog smera iz 1964. godine[27] sadrži sledeće gradivo

Pregled brojeva. Proširenje skupa brojeva od prirodnih do realnih. Princip permanencije zakona računskih radnji.

Aritmetički niz pojam, zakon formiranja članova opći član zbroj prvih n članova matematička indukcija. Primjene.

Geometrijski niz pojam zakon formiranja članova opći član, zbroj prvih n članova. Primjene.

Složeni procentni račun. Primjene.

Permutacije i kombinacije. Binomni obrazac.

Pojam vjerojatnosti. Pravila zbrajanja i množenja vjerojatnosti. Pravila zbrajanja i množenja vjerojatnosti. Serije srednje vrijednosti. Ispitivanje serija. Krivulje statističke distribucije.

Brojevni pravac kao slika skupa svih realnih brojeva. Interval. okolina.

Pridruživanje skupova, pojam funkcije. Područje funkcije. Graf funkcije kao skup tačaka.

Funkcije definisane u skupu prirodnih brojeva nizovi. Konačni i beskonačni nizovi. Monotoni nizovi. Granična vrijednost niza, konvergentni i divergentni nizovi. Beskonačno velike i beskonačno male veličine.

Pojam reda. Konvergentan geometrijski red. Konvergencija beskonačnih decimalnih razlomaka. Broj e. Prirodni logaritmi.

Funkcije definisane u skupu realnih brojeva. Inverzna funkcija. Granična vrijednost funkcije. Uvjeti za neprekidnost funkcije. Prirast argumenta i prirast funkcije. Koeficijent prirasta.

Pojam derivacije (preko problema tangente i problema brzine). Geometrijska definicija diferencijala. Derivacije obradjenih funkcija.

Derivacije višeg reda.

Primjene diferencijalnog računa na proučavanje toka funkcije.

Primjene diferencijalnog računa u fizici.

Integral kao površina, put i radnja(ekshaustiona metoda). Opći pojam odredjenog integrala. Odredjeni i neodredjeni integral. Elementarni integrali. Metoda supstitucije.

Primjene integralnog računa na izračunavanje površina (specijalno kruga elipse, hiperbole i parabole) i volumena (specijalno valjka stošca kugle rotacionog elipsoida, rotacionog hiperboloida i rotacionog paraboloida).

Primjene integralnog računa u fizici.

U programu matematike za IV razred prirodno matematičkog smera gimnazija u SR Makedoniji iz 1966. godine[28] nalaze se ovi sadržaji

---

27) *"Prosvjetni vjesnik" SR Hrvatske br.6 1964.god. str. 80-83 (Plan i program za gimnaziju).*

28) *PROSVETEN GLASNIK SR Makedonije br. 1-2 1966.god. str. 33,37. (Nastavni plan i program za gimnaziju).*

1) Pregled brojeva. Proširivanje skupova brojeva od prirodnih do kompleksnih. Princip permanencije zakona matematičkih operacija.

2) Aritmetički niz: pojam, zakon formiranja članova, opšti član, zbir prvih n članova. Primena.

3) Geometrijski niz: pojam, zakon formiranja članova, opšti član, zbir prvih n članova. Primena.

4) Složen kamatni račun. Primena.

5) Permutacije i kombinacije. Binomni obrazac.

6) Klasična definicija verovatnoće. ...

7) Pridruživanje skupova. Pojam funkcije. Definiciona oblast funkcije. Grafik funkcije.

8) Funkcije definisane u skupu prirodnih brojeva - nizovi. Konačni i beskonačni nizovi, granična vrednost niza, kovergentni i divergentni nizovi. Konvergentni geometrijski red. Konvergencija beskonačnih decimalnih razlomaka. Broj e. Beskonačno velike i beskonačno male veličine.

9) Funkcije definisane u skupu realnih brojeva. Inverzna funkcija. Granična vrednost funkcije. Uslov neprekidnosti funkcije. Priraštaj nezavisno promenljive i priraštaj funkcije. Uslov neprekidnosti funkcije. Priraštaj nezavisno promenljive i priraštaj funkcije. Količnik priraštaja.

10) Pojam izvoda funkcije (preko problema tangente i problema brzine). Geometrijska definicija izvoda i diferencijala. Izvodi nekih poznatih funkcija. Izvodi višeg reda. Primena diferencijalnog računa na proučavanje toka funkcije. Primena diferencijalnog računa u fizici.

11) Integral kao površina, put i rad. Pojam odredjenog integrala uopšte. Odredjeni i neodredjeni integrali. Elementarni integrali. Metod supstitucije.

Primena integralnog računa na izračunavanje površine (specijalno kruga, elipse, hiperbole i parabole) i zapremine (kao cilindra, konusa, lopte, rotacionog elipsoida, rotacionog hiperboloida i rotacionog paraboloida); primena integralnog računa u fzici.

Uočava se da su citirani programi iz tri naše republike skoro identični i da oni u istoj meri obuhvataju gradivo koje se odnosi na granične procese. To se može reći i za gimnazijske programe u ostale tri naše republike. Neznatne razlike postoje samo u razradi nekih tema.

Iz pregleda dela programa za prirodno-matematički smer, može se videti da je za IV razred bilo obuhvaćeno uglavnom svo ono gradivo iz graničnih procesa kao i u drugim pomenutim inostranim programima i da je ovim sadržajima dato dosta mesta u završnom razredu gimnazijskog obrazovanja. Uočava se da je gradivo najčešće detaljisano i da je pristup sadržajima dosta klasičan. Samo u ovim programima i u programu SSSR-a pojavljuje se beskonačno mala.

Krajem sedme decenije počele su se kod nas formirati i specijalizovane gimnazije sa pojedinim usmerenjima, medju kojima je najčešće bilo matematičko usmerenje. Tako je u Beogradu 1969. godine otvorena Matematička gimnazija sa tri razreda (upisivalo se u tu gimnaziju posle I razreda redovne gimnazije). Kasnije je otvorena i specijalizovana gimnazija u Subotici sa jezičkim i matematičkim usmerenjem. Matematičke gimnazije su otvorene i u još nekoliko gradova u Jugoslaviji (npr. Zagreb, Sarajevo i dr.). Nastavni planovi i programi ovih gimnazija sadržavali su poseban predmet ANALIZA i to je prvi put da se ona kod nas javlja kao predmet u nastavnom planu srednje škole.

Program[29] ANALIZE S ALGEBROM u Matematičkoj gimnaziji u Beogradu obuhvatao je sledeće gradivo, koje navodimo u skraćenom obliku. II razred (4 č. sedmično). *Elementi teorije skupova. Elementi matematičke logike (algebra iskaza). Kratak pregled razvitka pojma broja. Kvadratna funkcija. Kvadratna jednačina i nejednačina. Racionalna funkcija. Eksponencijalna i logaritamska funkcija.* III razred (6 č. sedmično). *Kompleksan broj. Nizovi i redovi.* Niz. Moć skupa realnih brojeva; linijski kontinuum; kardinalni broj. Tačke nagomilovanja niza. Bolcano-Vajerštrasova teorema. Zatvoren i otvoren skup. Topološki prostor; primeri topoloških prostora; prava, ravan, trodimenzionalni i n-dimenzionalni prostor, euklidski prostor. Granična vrednost niza. Konvergencija monotonih nizova. Kantorov princip. Opšti Košijev kriterijum konvergencije niza. Aritmetički i geometrijski niz; aritmetički nizovi višeg reda. Geometrijski red. Beskonačni decimalni brojevi (periodični i neperiodični). *Izvod.* Izvodi i diferencijali višeg reda. Izvod prvog i drugog reda vektorske funkcije. Geometrijsko i mehaničko značenje izvoda drugog reda. Ekstremne vrednosti funkcije. Ispitivanje funkcija. *Integral.* Odredjeni integral: definicija, primeri iz geometrije i mehanike; osnovna svojstva. Neodredjeni integral. Njutn - Lajbnicova formula. Osnovna tablica integrala. Metode integracije: metoda smene, metoda parcijalne integracije; rekurentni postupak. Uopšteni integrali. Primene integrala u geometriji i fizici. IV razred (4 č. sedmično). *Osnovne teoreme diferencijalnog računa.* Rolova, Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti; Košijeva teorema o srednjoj vrednosti i Lopitalovo pravilo. *Tejlorova formula.* Tejlorov red. *Uopšteni integral.* Rimanov integral. Stieltjesov integral. *Diferencijalne jednačine prvog i drugog reda.* - Rešenje diferencijalne jednačine - formiranje diferencijalnih jednačina (primeri iz geometrije, mehanike i fizike). Razdvajanje promenljivih. Homogena diferencijalna jednačina. Linearna diferencijalna jednačina. Linearne jednačine II reda sa konstantnim koeficijentima. Elementarni sistem diferencijalnih jednačina. *Grupe. Elementi teorije verovatnosti.*

U ovom pregledu nismo navodili sadržaje onih tema u

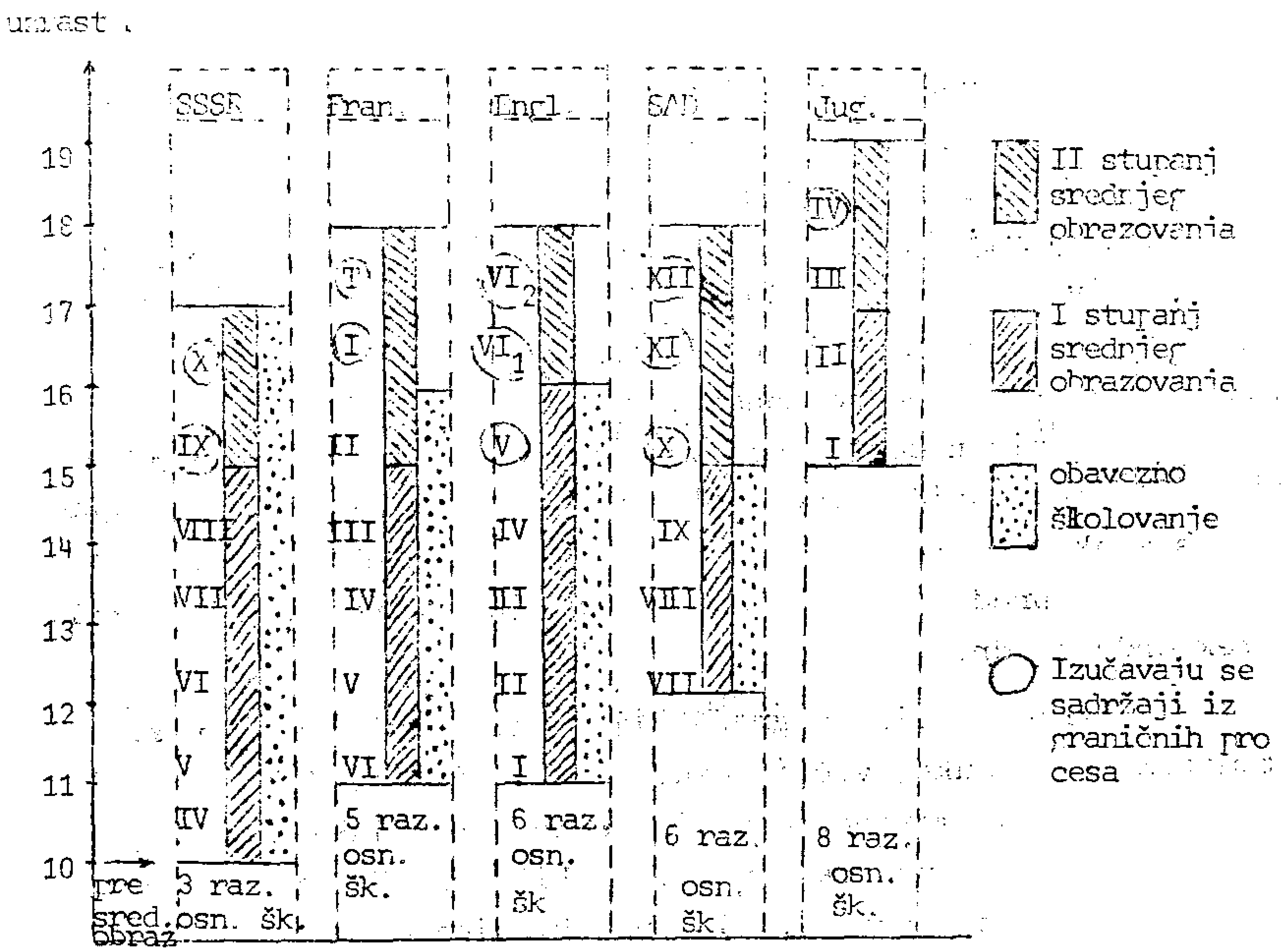
---

29) *Prosvetni glasnik SR Srbije, godina XIX, br. 7/1969. str. 787-789.*

kojima se ne javljaju granični procesi, kao na primer, elementi teorije skupova, Grupe, Elementi teorije verovatnosti i dr. Može se zapaziti da u II razredu nema sadržaja iz graničnih procesa, već su to uglavnom algebarski sadržaji. U ostala dva razreda nalaze se sadržaji koji u nekim detaljima premašuju sve do sada analizirane programe. Na primer, ovde se eksplicitno javljaju topološki prostori, uopšteni integral i dosta gradiva iz diferencijalnih jednačina. I pored toga što je predvidjen znatan broj sedmičnih časova za obradu ovih sadržaja, može se slobodno konstatovati da je ovaj program preopširan. Ozbiljnim nedostatkom ovog programa može se smatrati izostavljanje granične vrednosti funkcije i neprekidnosti funkcije, sem ako ovi sadržaji nisu izostali tehničkom omaškom. I ovaj program predvidja da se prvo obradjuje odredjeni integral, pa tek onda neodredjeni.

Izrada novih programa nije imala u vidu samo razvoj matematike kao nauke, već i rezultate mnogih istraživanja psihologa, pedagoga, matematičara i drugih stručnjaka u oblasti učenja. Pomenimo samo neka imena: I. Piageta, Z. Dienesa, G. Matthewsa, C. Gattengoa, G. Listera, N. Picarda, M. Glaymanna, G. Papya, F. Papy, G. Cuisenairea, E. Beglea, P. Suppesa, R. Davisa, I. Brunera, A.P. Andronova, B.V. Gnedenka, A.I. Markuševića, A.N. Kolmogorova i dr. Pri tome treba naglasiti da se pretežan broj istraživanja odnosio na mladji školski uzrast, ali je predmet preispitivanja bila i nastava matematike u srednjim školama. To znači da su rezultati tih istraživanja doprinosili da se što pravilnije odmere programski sadržaji iz matematike kako za osnovnu, tako i za srednju školu, imajući u vidu psihofizičke mogućnosti učenika.

S obzirom na različite školske sisteme u zemljama čije smo delove programa napred navodili, to nije moguće medjusobno ih uporedjivati po razredima, već samo po uzrastu učenika. Sledeći šematski prikaz daje vreme trajanja, razrede, cikluse (stupnjeve) i obaveznost srednjeg obrazovanja u zemljama čije smo programe analizirali. Uočava se da naši srednjoškolci najkasnije završavaju školovanje, a da najduže obavezno školovanje traje u SSSR. Sadržaji programa matematike koji se odnose na granične procese, iako se po obimu ne razlikuju mnogo, uvode se na različitim uzrastima u pojedinim zemljama i to naj-



ranije u SSSR i SAD, a najkasnije kod nas. I. Smolec ističe: "U našim gimnazijama se diferencijalni račun uči u završnom razredu. Stoga postoje neznatne mogućnosti njegovih primena. Medjutim, kada bi se učio dvije - tri godine ranije, učenici bi ga mogli vrlo efektno i efikasno primenjivati. Naročito u fizici" (|146|, str. 36.). Ovakvo gledište je dobilo svoju realizaciju u planovima i programima od pre nekoliko godina, na primer u SR Srbiji 1976. godine, jer je i kod nas pomereno izučavanje elemenata matematičke analize naniže, odnosno za učenike uzrasta od 16-18 godina, unošenjem tih sadržaja u program II, III i IV razreda srednje škole. Ako se imaju u vidu tendencije osavremenjavanja programa školske matematike, medju kojima je vrlo značajna komponenta pomeranje gradiva naniže, uz oslobadjanje nekih starih sadržaja, onda se mora prihvatiti kao neminovnost da se na uzrastu od 16 godina započinje izučavanje elemenata matematičke analize, odnosno graničnih procesa.

U pogledu obima i dubine programskih sadržaja iz graničnih procesa, konstatovali smo da postoje odredjene manje razlike, s tim što se prema tim razlikama mora imati jedan stepen rezervisanosti, s obzirom na različite sisteme školstva i na nemogućnost da se stekne uvid u udžbeničku interpretaciju tih sadržaja. Na primer, u nekim programima nema eksplicitno navedenih sadržaja o neprekidnosti, ali nije isključeno da je autor udžbenika nije uneo. Bitne razlike postoje u redosledu datih sadržaja i one se ispoljavaju u dva osnovna pitanja: prvo, neprekidnost, pa granična vrednost funkcije ili obrnuto i drugo, neodredjeni integral, pa odredjeni ili obrnuto. Pstoje i druge nijanse u redosledu obrade i načinu intepretacije o kojima će biti reči na kraju ove glave.

3.3. Granični procesi u programima pozivno-usmerenog srednjeg obrazovanja

Rezolucijom Desetog kongresa Saveza komunista Jugoslavije o samoupravnom socijalističkom preobražaju vaspitanja i obrazovanja u SFRJ iz 1974. godine, dati su podsticaji i osnovni pravci reforme vaspitanja i obrazovanja kod nas. Najdublje promene nakon toga odigrale su se u srednjem obrazovanju, koje je u većini republika i pokrajina bilo programski podeljeno u dve faze: na zajedničku opšteobrazovnu osnovu u trajanju od dve godine i na profesionalno stručno obrazovanje takodje u trajanju od dve godine, koje se u SAP Vojvodini naziva pozivnousmereno srednje obrazovanje (III i IV razred srednje škole). Ne ulazeći u nastavne planove i modele organizacije srednjeg obrazovanja u pojedinim republikama, mi ćemo analizirati nove programe, donete posle 1974. godine, sa stanovišta prisutnosti graničnih procesa u njima.

U programima zajedničke osnove usmerenog obrazovanja (prve dve godine srednje škole) nema posebnih sadržaja iz graničnih procesa, sem nešto u programu SR Srbije. Naime, u tom programu[30] nalazi se tema NIZOVI sa sledećim sadržajem:

Pojam niza. Aritmetički niz. Geometrijski niz. Pojam granične vrednosti beskonačnog niza. Beskonačan geometrijski niz (s primenama).

---

30) Prosvetni savet Srbije: Korigovani program zajedničke osnove usmerenog obrazovanja, Beograd, 1981. godine.

Priraštaj funkcija*. Količnik priraštaja i njegova granična vrednost*. Pojam izvoda funkcije i njegovo geometrijsko i mehaničko značenje*. Ispitivanje funkcija*.

Već se ovde ogleda tendencija spuštanja sadržaja naniže pri izradi novih programa, što se odrazilo i na granične procese. Naime, dok su u ranijim programima sadržaji iz graničnih procesa bili zastupljeni samo u završnom razredu srednje škole, sada se ti sadržaji javljaju u III razredu. U to ćemo se uveriti na osnovu pregleda nekih novih programa u SFRJ.

Najpre navodimo programe nekih struka iz SR Srbije (bez pokrajina). Plan i program obrazovno-vaspitnog rada za *matematičko-tehničku struku* sadrži poseban predmet ANALIZA I NUMERIČKA ANALIZA[31] sa po 3 časa u III i IV razredu. Gradivo ovog predmeta obuhvata:

III razred

Realni brojevi. Osvrt na polje racionalnih brojeva. Svojstvo neprekidnosti skupa realnih brojeva. Apsolutna vrednost realnog broja. Nejednakost trougla. Decimalno predstavljanje realnih brojeva. Gustina skupa racionalnih brojeva; gustina skupa iracionalnih brojeva. Osnovna svojstva skupa realnih brojeva...

Beskonačni nizovi. Granična vrednost niza; konvergentan i divergentan niz. Osnovne teoreme o graničnim vrednostima zbira, razlike, proizvoda i količnika nizova. Monotoni nizovi. Broj e. Stepen a^r ($a \in R$, $a \neq 1$, $r \in R$). Beskonačni red; konvergentan i divergentan red. Beskonačni geometrijski red.

Funkcije jedne promenljive. Osnovne elementarne funkcije. Granična vrednost funkcije. Osnovne operacije sa graničnim vrednostima funkcije. Neprekidnost funkcije u tački i na odsečku. Inverzna funkcija neprekidne strogo monotone funkcije. Kompozicija neprekidnih funkcija.

Izvod. Izvod funkcije; geometrijsko i mehaničko značenje. Izvod elementarnih funkcija. Diferencijabilna funkcija. Kompozicija diferencijabilnih funkcija. Izvod inverzne funkcije. Izvod složene funkcije. Izvodi višeg reda. Mehaničko značenje izvoda drugog reda. Rolova teorema. Lagranževa i Košijeva teorema. Lopitalovo pravilo (bez strogog dokaza). Korišćenje izvoda u ispitivanju elementarnih funkcija (rašćenje, opadanje, brzina rašćenja, ekstremumi, konveksnost, prevojne tačke, asimptote)

Aproksimacija. ...

---

*) – *Zvezdom označeni sadržaji realizuju se u okviru izborne nastave.*

31) *Prosvetni glasnik SR Srbije, br. 10, juni 1980. g. str. 1150*

IV razred

Kompleksni brojevi. ...

Integral. Primitivna funkcija. Analitička definicija odredjenog integrala funkcije neprekidne na odsečku. Elementarni primeri integracije. Osnovna svojstva odredjenog integrala. Stav o srednjoj vrednosti odredjenog integrala. Neodredjeni integral (integral kao funkcija gornje granice). Stav o egzistenciji primitivne funkcije. Skup primitivnih funkcija za datu neprekidnu funkciju. Tablica integrala. Metoda smene. Parcijalna integracija. Pojam nesvojstvenih integrala.

Primena odredjenog integrala. Dužina luka krive. Površina i zapremina rotacionog tela. Posebni primeri iz geometrije i fizike. Približna integracija; metoda pravougaonika, trapezno pravilo, Simpsonovo pravilo; procena greške.

Diferencijalne jednačine. Diferencijalna jednačina i njeno rešenje. Primeri formiranja diferencijalnih jednačina: jednačina radioaktivnog raspada, hladjenje tela, opadanje vazdušnog pritiska i dr., Rešavanje diferencijalnih jednačina prvog reda razdvajanjem promenljivih. Homogenena diferencijalna jednačina. Linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Diferencijalne jednačine: $y'' = c$, $y'' = -\alpha^2 y$. Homogena linearna diferencijalna jednačina s konstantnim koeficijentima; problemi oscilovanja.

U planu i programu obrazovno-vaspitnog rada za *elektrotehničku struku*, gradivo iz matematike ima sadržaje iz graničnih procesa samo u IV razredu. Program IV razreda[32] sadrži ovo gradivo:

Diferencijalni račun. Pojam funkcije. Ograničene i neograničene funkcije. Monotone funkcije. Parne i neparne funkcije. Periodične funkcije. Složene i inverzne funkcije. Pregled elementarnih funkcija. Pojam granične vrednosti funkcije. Pojam beskonačno malih i beskonačno velikih veličina. Osnovne granične vrednosti. Izvod funkcije. Fizičko i geometrijsko tumačenje izvoda. Osobine izvoda. Izvodi elementarnih funkcija. Pojam diferencijala. Primena izvoda na ispitivanje funkcija. Zadaci iz diferencijalnog računa.

Integralni račun. Pojam neodredjenog integrala. Primitivna funkcija. Tablica integrala. Osobine neodredjenog integrala. Izračunavanje neodredjenog integrala metodom zamene i parcijalnom integracijom. Integracija polinoma, jednostavnijih racionalnih i trigonometrijskih funkcija. Pojam odredjenog integrala. Integralne sume. Geometrijsko tumačenje odredjenog integrala. Osobine odredjenog integrala. Izračunavanje odredjenih integrala. Veza izmedju odredjenog i neodredjenog integrala. Metod zamene i metod parcijalne integracije. Primena odredjenih integrala za izračunavanje površine ravnih figura i zapremine obrtnih tela. Približne metode za izračunavanje odredjenog integrala. Primena odredjenog integrala u elektrotehnici.

I programi ostalih struka u SR Srbiji (bez pokrajina) sadrže najčešće u IV razredu elemente matematičke analize, od-

---

32) Prosvetni glasnik SR Srbije, br. 8., april 1980.god., str.608 nosno sadržaje u kojima su prisutni granični procesi. Oni se bitnije ne razlikuju od programa za elektrotehničku struku i u svima se pojavljuju iste teme: realni brojevi, beskonačni nizovi, funkcije, izvodi, integrali.

U *SR Hrvatskoj* postoji poseban predmet UVOD U MATEMATIČKU ANALIZU samo u Nastavnom planu i programu obrazovnog profila MATEMATIČAR - INFORMATIČAR. Taj predmet se izučava u III i IV semestru (IV razred srednje škole) sa 5 časova sedmično. Gradivo tog predmeta obuhvata:[33)]

Polje realnih brojeva. Skupovi N, Z, Q i R. Aksiom matematičke indukcije. Binomni teorem. Konačni aritmetički i geometrijski niz. Interpolacija. Brojevni pravac. Decimalni brojevi. Aproksimacija i apsolutna vrijednost broja. Intervali. Supremum i infimum. Pojam limesa niza realnih brojeva. Geometrijski red. Kontinuirano ukamaćivanje. Broj e.

Funkcija. Pojam i zadavanje funkcija. Graf funkcije. Linearna interpolacija. Pregled elementarnih funkcija: polinom nad R, racionalne funkcije, trigonometrijske funkcije, eksponencijalne funkcije. Kompozicija funkcija. Bijekcija. Inverzna funkcija. Logaritamske funkcije. Ciklometrijske funkcije. Funkcija $\sqrt[n]{x}$.

Derivacija. Uvod i motivacija. Limes funkcije u tački. Neprekidnost funkcije u tački. Osnovna svojstva neprekidnih funkcija. Derivacija funkcije u tački. Derivacija funkcije $f(x) = x^n$. Derivacija linearne kombinacije. Derivacija polinoma. Derivacija produkta i kvocijenta. Derivacija trigonometrijskih funkcija. Derivacija eksponencijalnih funkcija. Derivacija kompozicija funkcija. Derivacija linearne funkcije. Derivacija logaritamskih i ciklometrijskih funkcija. Logaritamsko deriviranje. Pojam diferencijala. Primjena derivacija. Jednadžba tangente i normale, geometrijska i fizikalna interpretacija prve derivacije. Derivacija višeg reda. Kriterij za monotonost funkcije. Ekstremi. Geometrijska i fizikalna interpretacija druge derivacije. Konkavnost i konveksnost. Tačke infleksije i primjena ekstrema.

Integralni račun. Problemi površine i radnje. Riemanov integral ograničene funkcije na segmentu. Svojstva integrala. Integrabilnost monotonih funkcija. Riemanov integral i primitivna funkcija. Leibniz-Newtonova formula. Direktna integracija. Integracija uvodjenjem nove varijable. Integracija racionalnih funkcija. Parcijalna integracija. Primjene integrala. Površina, volumen, duljina krivulje. Numerička integracija i trapezna formula. Pojam diferencijalne jednadžbe prvog reda. Metoda separacije varijabli. Primeri i primjene.

U programu matematike za elektrotehničku struku u SR Hrvatskoj nema drugih sadržaja iz graničnih procesa,

---

33) *Republička samoupravna interesna zajednica,... Zajednica programa matematičko-informatičarskih usmjerenja SR Hrvatske, Zagreb, 1982.*

sem u IV godini tema NIZOVI I REDOVI, koja obuhvata ovo gradivo:

Općenito o nizovima. Monotoni i ograničeni nizovi.

Granična vrijednost niza. Aritmetički i geometrijski niz.

Pojam reda, konvergentni i divergentni redovi. Konvergentni geometrijski niz.

I novi programi u *SR Bosni i Hercegovini*, pored ostalog, sadrže i gradivo koje se odnosi na granične procese, sa različitim obimom i sadržajima u zavisnosti od pojedinih struka. Najizrazitije su zastupljeni granični procesi u programu za zanimanje - operator automatske obrade podataka, u kojem se nalazi poseban predmet MATEMATIČKA ANALIZA sa 4 časa sedmično u IV razredu. Nastavni sadržaji[34] ovog predmeta su:

Fundamentalni problemi analize i motivacije. Dva osnovna problema analize; nagib jednostavne krive i površina jednostavne oblasti, intuitivni pojmovi derivacije i integrala. Numeričko i grafičko rješavanje problema nagiba kose prave i poligonalne linije, te problema površine odredjene horizontalnom pravom i step linijom. Ideje Newtona i Leibniza; odnos izmedju nagiba i površine, odnosno derivacije i integrala. Numeričko i grafičko rješavanje dvaju osnovnih problema za jednostavnu krivu, približna derivacija i približni integral. Ideje fundamentalnih teorema; značaj i primjena ideja derivacije i integrala. Intuitivni pojam limesa i motivacija korektnog rješavanja problema analize.

Sistem realnih brojeva. Istorijski osvrt na razvoj skupa realnih brojeva. Skup R sa operacijama sabiranja i množenja i relacijom uredjenja, aksiomi polja i aksiomi uredjenja. Osobine realnih brojeva kao posledice aksioma i druge binarne operacije na R. Skup prirodnih brojeva i matematička indukcija. Cijeli brojevi. Racionalni brojevi. Iracionalni brojevi. Aksiomi kompletnosti. Potencije sa racionalnim i iracionalnim eksponentom. Apsolutna vrijednost. Realna prava, interval i okolina.

Realne funkcije. Geometrijska reprezentacija skupa RxR. Grafovi relacija i simetrije grafa. Neutralna funkcija, stepene funkcije, polinomi, racionalne funkcije, imena i značaj drugih elementarnih funkcija. Sabiranje i množenje funkcija, grafičko odredjivanje zbira i proizvoda funkcija. Složene funkcije i grafičko slaganje funkcija. Inverzne funkcije i grafičko odredjivanje inverzne funkcije. Razlika i kvocijent funkcija.

Limesi, neprekidnost, nizovi. Pojam i jednoznačnost limesa. Limes zbira, proizvoda i kvocijenta funkcija. Limes

---

34) Nastavni plan i program za obrazovanje učenika i polaznika za zanimanje - Operator automatske obrade podataka, SR BiH, str. 29.

složene funkcije. Jednostrani Limesi, prošireni Limesi. Teorem sendviča. Pojam neprekidnosti funkcije. Neprekidnost zbira, proizvoda, kvocijenta neprekidnih funkcija. Neprekidnost složene funkcije. Monotone funkcije. Neprekidnost elementarnih funkcija; stepene i algebarske funkcije; trigonometrijske, eksponencijalne i njihove inverzne funkcije. Asimptote grafa. Nizovi brojeva, konvergentni nizovi i osobine. Monotoni nizovi. Red brojeva kao poseban niz. Osobina konvergentnih redova. Geometrijski redovi i redovi pozitivnih članova. Decimalna reprezentacija realnih brojeva. Teorem ekstremnih vrijednosti i teorem medjuvrijednosti, neprekidna slika zatvorenog intervala (intuitivno).

Diferencijalni račun i primjene. Pojam derivacije. Derivacija zbira, proizvoda i kvocijenta funkcija. Lančano pravilo i derivacija inverzne funkcije. Derivacije elementarnih funkcija. Tangenta i normala u tački grafa. Neki fundamentalni teoremi diferencijalnog računa; teoremi Fermata, Rollea i Lagrangea. Dovoljni uvjeti za monotonost i za postojanja relativnih ekstrema funkcije. Ispitivanje toka funkcije, problemi ekstrema i primjene. Derivacije višeg reda. Približno računanje vrijednosti elementarnih funkcija.

Integralni račun i primjene. Pojam i jednoznačnost odredjenog integrala. Jednostavne osobine integrala. Glatke funkcije, površina jednostavnog skupa i odredjeni integral. Prvi fundamentalni teorem, teorem srednje vrijednosti i drugi fundamentalni teoremi integralnog računa. Pojam antiderivacije i neodredjenog integrala. Antiderivacije elementarnih funkcija. Osobine antiderivacije. Jednostavne metode integracije. Neke primjene integralnog računa; primjene integralnog računa u fizici. Približno računanje odredjenih integrala.

U obrazloženju programa matematike za IV razred metalske struke u SR Bosni i Hercegovini izmedju ostalog stoji: "U realizaciji sadržaja iz matematičke analize učenici i polaznici treba da svate dva osnovna problema matematičke analize, a to su: nagib krive i površina jednostavne oblasti....

Pojam limesa potrebno je tako obraditi da ga učenici i polaznici shvate kao jedan od stubova matematičke analize.

U IV razredu učenici i polaznici treba da upoznaju osnovne zakonitosti diferencijalnog i integralnog računa, osobine elementarnih funkcija, da steknu spretnost i rutinu u računanju derivacija, elementarnih integrala i upoznaju značaj i njihovu osnovnu primjenu naročito u tehničkim disciplinama". Program sadrži sledeće gradivo:

Nomografija....

Realni brojevi. Ograničeni skupovi. Aksioma supremuma. Posledica aksiome supremuma. Arhimedova teorema i teorema o gustini racionalnih brojeva.

Nizovi. Konačni nizovi, opšti član, zbir prvih članova. Beskonačan niz realnih brojeva kao funkcija N→R. Konvergencija beskonačnih nizova i pojam limesa niza. Ograničeni i monotoni nizovi. Limes sume, proizvoda i kvocijenta nizova. Broj e. Pojam beskonačnog reda. Konvergentni i divergentni red.

Funkcije. Relacije i funkcije. Realne funkcije realne promenljive. Primjeri elementarnih funkcija: stepena, eksponencijalne, trigonometrijske, korjene i logaritamske. Operacije sa funkcijama. Pojam limesa funkcije. Definicija limesa funkcije i osnovna svojstva. Neprekidnost funkcije, definicija. Primjeri neprekidnih funkcija: racionalne, eksponencijalne, trigonometrijske, korjene i logaritamske.

Izvodi. Definicija prvog izvoda i osnovne osobine. Fizikalna i geometrijska interpretacija izvoda. Diferencijal. Ispitivanje funkcija pomoću izvoda.

Integrali. Zadatak odredjivanja površine. Odredjeni integrali. Primjena odredjenih integrala. Primitivne funkcije i neodredjeni integral. Osobine neodredjenog integrala i metode integracije. Metod zamjene. Parcijalna integracija.

Sličan je program matematike za IV razred u elektrotehničkoj struci u SR Bosni i Hercegovini. Teme su sledeće: Uvod u matematičku analizu. Nizovi i redovi. Izvodi funkcija. Primjena izvoda. Pojam integrala.

Najnoviji programi za usmereno obrazovanje u *SR Sloveniji* izradjeni su u više varijanti koje sadrže teme sa brojem časova i nisu date po razredima. Pojedine struke su prihvatile onu varijantu koja im po sadržaju najviše odgovara i onda se teme dele na razrede. Navodim teme sa sadržajima iz graničnih procesa za struku: računalništvo, zanimanje - računalniški tehnik. (varijanta XII). U II razredu nalazi se tema UVOD U INFINITEZIMALNI RAČUN (20 č.) sa sledećim gradivom:

Izvod funkcije i tantenta na krivu. Pravila za odredjivanje izvoda. Diferencijal i neodredjeni integral. Primena izvoda. Površina. Odredjeni integral i primena.

Zatim se u IV razredu nalazi sledeće gradivo:

DIFERENCIJALNI RAČUN (25 č.). Granična vrednost i neprekidnost funkcije. Izvod funkcije. Primena izvoda pri proučavanju funkcija.

Integralni račun (25 č.). Diferencijal. Neodredjeni i odredjeni integral funkcije. Primena odredjenog integrala.

Identični su sadržaji ovih tema i kod tehničkih struka (varijanta X), pri čemu se opet diferencijalni i integralni račun javljaju na dva mesta. Ovo se objašnjava time, što je potrebno da nešto znaju o infinitezimalnom računu i oni učenici koji neće produžiti školovanje na IV i V stepenu stručne spreme.

Promenama u društveno-političkom sistemu krajem 70-tih i početkom 80-tih godina u SFRJ, postala je pravo i obaveza *SAP Vojvodine* da zakonski i normativno reguliše sva pitanja u oblasti vaspitanja i obrazovanja. Na osnovu toga su 1977. godine doneti novi planovi i programi za drugu fazu srednjeg obrazovanja, odnosno III i IV razred pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja i vaspitanja.

U gradivu prve faze usmerenog obrazovanja, odnosno u programu nastave matematike za zajedničku osnovu u I i II razredu srednje škole, koji je jedinstven za celu populaciju, ne nalaze se eksplicitno sadržaji iz graničnih procesa. Taj program obuhvata, pored ostalog, i ono gradivo koje predstavlja potrebnu predspremu za izučavanje graničnih procesa, kao što su algebarski i trigonometrijski sadržaji. Prema tome, učenici u SAP Vojvodini za 10 godina školovanja u osnovnoj i srednjoj školi (8 + 2 razreda) imaju prilike da se susretnu samo implicitno sa nekim elementima propedevtike graničnih procesa, kao što su na primer: beskonačnost skupova brojeva, periodični i neperiodični beskonačni decimalni razlomci, obim i površina kruga, beskonačnost nekih algebarskih i trigonometrijskih funkcija za odredjene konačne vrednosti argumenta, itd.

Druga faza usmerenog obrazovanja na srednjem stupnju, odnosno III i IV razred pozivnousmerenog obrazovanja, ima 27 struka od kojih neke nemaju zastupljenu matematiku kao predmet (na pr. medicinska, prevodilačka, kulturološka, pravna, dizajnerska i dr.), druge je imaju sa malim nedeljnim fondom časova - 2 ili 3 časa (poljoprivredna, prehrambena, ekonomska), treće imaju matematiku zastupljenu sa 4, odnosno 3 časa sedmično (sve tehničke struke i prirodne nauke) i najzad u četvrtu grupu ulazi samo jedna struka - matematička, kod koje se u programu nalaze različite matematičke discipline sa znatnim ukupnim nedeljnim fondom časova (oko 40% ukupnog fonda časova otpada na matematičke discipline). U III razredu matematičke struke izučavaju se: algebra sa 3 časa, analiza sa 3 časa, linearna algebra i analitička geometrija sa 3 časa i geometrija sa 3 časa, a u IV razredu: analiza sa 4 časa, verovatnoća i statistika sa 4 časa, linearna algebra sa 2 časa, numerička analiza sa 2 časa i metode i tehnika istraživanja u matematici sa 2 časa.[35)]

U programima matematike onih struka gde je ovaj predmet zastupljen sa 2 ili 3 časa sedmično u IV razredu, nalaze se i elementi diferencijalnog i integralnog računa, zasnovani na graničnim procenama. Tim programima su obuhvaćene sledeće teme: nizovi, redovi, funkcije jedne realne promenljive, granična vrednost funkcije, neprekidnost funkcije, izvod, diferencijal, primena izvoda, neodredjeni integral i odredjeni integral. Najveći broj struka sa 4 časa matematike sedmično ima u programu sadržaje iz graničnih procesa i u III i u IV razredu, a zastupljeno je sledeće gradivo[36)]: *Funkcije.* Pojam funkcije. Vrste funkcija. Granična vrednost funkcije. Veza izmedju graničnih vrednosti nizova i funkcije. Neprekidnost funkcije. *Izvodi.* Definicija izvoda. Geometrijsko tumačenje izvoda. Izvod zbira, proizvoda i količnika. Izvod inverzne funkcije. Izvodi elementarnih funkcija. Izvod posrednih funkcija. Izvodi višeg reda. Diferencijal. Primena izvoda na odredjivanje tangente i normale. Ispitivanje toka funkcija, maksimum i minimum funkcija (sa primenom na zadatke). *Integral.* Zadatak odredjivanja površina. Primitivna funkcija i neodredjeni integral. Osobine i metode integracije neodredjenog integrala. Tablica integrala. Odredjeni integral. Primena integrala na zadatke o rektifikaciji, kvadraturi i kubaturi. Primena diferencijalnog i integralnog računa na probleme iz struke. *Diferencijalne jednačine.* Formiranje diferencijalnih jednačina. Inverzni problem. Postupak integracije: razdvajanje promenljivih. Homogene jednačine. Linearne jednačine. Iz pregleda sadržaja koji se odnosi na granične procese može se zaključiti da se oni skoro ni u čemu ne razlikuju od programa drugih zemalja koje smo naveli u 3.2. i programa drugih republika navedenih u 3.3., niti od našeg ranijeg programa za prirodno-matematički smer u gimnazijama. Kada se poredi sa ovim poslednjim programom može se zaključiti da je ovaj sadašnji više načelan, a onaj raniji je više detaljan. Iz redosleda sadržaja se vidi da je prvo predvidjena granica funkcije, pa onda njena neprekidnost, a kod integralnog računa se ne vidi jasno redosled, ali se može naslutiti da se najpre obradjuje neodredjeni integral. Za realizaciju programa matematike u ovim strukama postoji odgovarajući udžbenik.

---

35) Savremeno obrazovanje, sveska 6, Novi Sad, 1977.god., str.47

36) Savremeno obrazovanje sveska 6, Novi Sad, 1977.god.str. 14

Plan i program matematičkog usmerenja, kao što je napred navedeno, sadrži poseban predmet ANALIZA u III i IV razredu. Prvi program za ovaj predmet[37] iz 1977. godine obuhvatao je sledeće gradivo: III razred. - *Nizovi i redovi* - ponavljanje gradiva o skupovima i operacijama nad njima, skup realnih brojeva. Uredjenost skupova realnih brojeva: interval, okolina tačke. Pojam niza; tačka nagomilavanja niza, Bolcano - Vajerštrasova teorema, zatvoren i otvoren skup. Granična vrednost niza. Aritmetički i geometrijski niz i red. Beskonačni periodičan i neperiodični decimalni brojevi. *Granica funkcije.* - Broj kao granica niza. Granica funkcije; jednostrana granica, granice elementarnih funkcija. ***Neprekidnost funkcije:*** definicija, operacij , sa neprekidnim funkcijama. Neprekidnost složenih, inverznih i elementarnih funkcija. *Izvod funkcije:* definicija, geometrijsko i fizičko značenje izvoda. Neprekidnost diferencijabilnih funkcija; izvod zbira, proizvoda, količnika. Izvod inverzne i složene funkcije. Izvodi višeg reda, diferencijal. *Opšte osobine diferencijabilnih funkcija.* Ekstremne vrednosti. Rolova teorema, Lopitalovo pravilo. *Uvod u integralni račun.* Pojam neodredjenog integrala. Tablice integrala Metode integrala Pojam odredjenog integrala. Osobine Njutn Lajbnicove formule. Primena integralnog računa izračunavanje površina i zapremina obrtnih tela. Primena integrala u fizici i geometriji (izračunavanje reda pritiska tečnosti koordinata težišta) Jednostavnije *diferencijalne jednačine.* Rešenje diferencijalne jednačine formiranje diferencijalnih jednačina. Primeri iz fizike biologije hemije geometrije.

Nakon nekoliko godina primene ovog programa, koji je dosta načelan i koji se realizovao bez odgovarajućeg udžbenika, došlo se do zaključka da ovaj program treba korigovati i što detaljnije razraditi kako bi se iz njega mogla videti ne samo sadržina već i dubina i koncepcija obrade pojedinih sadržaja. Razlog za ovakvu promenu bio je i taj što se uočilo da učenici iz ove oblasti ne stiču ona znanja koja im omogućuju nesmetano nastavljanje daljeg školovanja. Zato je pripremljen predlog novog programa iz ANALIZE za III i IV razred matematičke struke koji je usvojen od strane Samoupravne interesne zajednice za usmereno obrazovanje SAP Vojvodine 1980. godine. U obrazloženju tog predloga izmedju ostalog piše: "Osnova čitavog programa I i II godine ANALIZE je granični proces i pojam funkcije. Taj pojam se razvijao kroz vekove od metode "iscrpljivanja" koju su još grčki matematičari koristili, pa do kraja XIX veka kada je pojam granice dobio današnji rigorozni oblik. Ni svi veliki matematičari XVIII i XIX veka nisu

37) Savremeno obrazovanje, sveska 6, Novi Sad, 1977. godine, str. 52.

prihvatili granični proces kao egzaktan matematički aparat, niti su uvek sa svom preciznošću koristili suptilan pojam granice. Zato treba sa svom pažnjom prići njegovom uvodjenju vodeći računa i o uzrastu učenika koji treba da shvate suštinu tog pojma. Svi ostali pojmovi: neprekidnost, izvod, integral,... mogu se razumeti samo sa raščišćenim pojmom granice. Korišćenje sa razumevanjem graničnog procesa u raznim vidovima, izvoda, integrala,.... u drugim oblastima nauke i primene, moguće je samo jasnom predstavom suštine ovih operacija. U protivnom, vezivanje za njih raznih prirodnih fenomena i vršenje raznih računanja pomoću njih, predstavlja čist formalizam koji učenik brzo zaboravi i nije osposobljen za samostalnu primenu ovih postupaka u novim problemima". Zato je sada trebalo bolje rasporediti i razraditi gradivo postojećeg programa, čime bi se osigurala koncepcija njegove realizacije i više ujednačilo gradivo koje svaki učenik treba da savlada. Zbog važnosti koju pridajemo ovom programu navodimo ga u celini.

III r a z r e d. (3 časa sedmično) *Realni brojevi i nizovi (16 časova).* Konačan i beskonačan skup. Posebno obratiti pažnju na skup prirodnih brojeva, prebrojiv skup, interval realnih brojeva i skup realnih brojeva kao beskonačne skupove; ograničen skup; supremum i infimum skupa - definicija i primeri.

Preslikavanje skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva - niz. Preslikavanje N na jednu tačku, na konačan skup, na prebrojiv skup. Skup članova niza. Razlikovanje skupa vrednosti niza od skupa članova niza (niz f: $n \to (-1)^n$ preslikava N na $\{-1,1\}$, a skup članova niza je $\{-1,1,-1,1,...\}$). Aritmetički i geometrijski niz kao primeri.

Uporedjivanje nizova: 1) koji imaju samo konačan broj istih članova i 2) koji imaju sve iste članove sem konačan broj. Monoton niz. Ograničen niz. Definicija i primeri.

Granica niza (32 časa). Značenje simbola: $n \to \infty$ (nepostojanje najvećeg realnog broja). Prikaz na brojnoj liniji simbola: $n \to \infty$. Ponašanje članova niza kada $n \to \infty$. Geometrijski prikaz početnih članova niza $1/n$; odredjivanje $n_0(\varepsilon)$ za razne vrednosti za koje je $1/n < \varepsilon$. Značenje simbola: $1/n \to 0$ kada $n \to \infty$. Utvrditi isto i za niz $1/n^2$.

Tačka nagomilavanja niza (misli se skupa članova niza). Primeri nizova bez tačke nagomilavanja sa jednom tačkom tačkom, sa konačnim brojem tačaka i sa beskonačnim brojem tačaka nagomilavanja. Pojam lim inf i lim sup. Razlikovati tačku nagomilavanja (članova) niza od tačke nagomilavanja skupa vrednosti niza. Bolcano Weierstrassova teorema (bez kokoza).

Granica niza. Definicija, geometrijska interpretacija, odredjivanje $n_0(\varepsilon)$ kod jednostavnijih primera. Ako $f(n) \to q$ tada je $f(n) = q + f_1(n)$ gde $f_1(n) \to 0$ kada $n \to \infty$.

Konvergentan niz; divergentan niz. Značenje simbola $f(n) \to \pm\infty$ kada $n \to \infty$. Način približavanja članova konvergentnog niza granici.

Uticaj konačnog ili beskonačnog broja članova niza na granicu niza. Osobine niza za sve n počev od jedne utvrdjene vrednosti. Odnos granice prema skupu slika niza i odnos granice i tačke nagomilavanja niza. Konvergentan niz je ograničen (dokaz).

Osciliranje niza; razni slučajevi.

Zbir i proizvod dva niza i njihovo ponašanje kada $n \to \infty$: razni slučajevi (zbir dva divergentna niza može konvergirati).

Zbir, proizvod i količnik dva konvergentna niza (dokaz).

Monoton niz je ili ograničen ili teži $+\infty$ ili $-\infty$. Niz koji je monoton i ograničen je konvergentan (dokaz). Niz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je konvergentan (dokaz); definicija broja e.

Granica niza x^n za različite vrednosti x.

Niz $\sqrt[n]{x}$ za razne vrednosti x. Niz $\sqrt[n]{n}$ $n^b q^n$, $\frac{a^n}{n!}$ $\frac{n^a}{n!}$.

Skala ponašanja nizova za $n \to \infty$: $\log n < n^\alpha < a^n < n! < n^n$ $(\alpha > 0\ a > 1)$

Redovi (6 časova)

Redovi definisani kao specijalni nizovi (nizovi parcijalnih suma). Suma reda definisana kao granica niza parcijalnih suma. Konvergentan red. Divergentan red.

Geometrijski red, razni slučajevi prema vrednosti količnika. Kod konvergentnog reda opšti član $u_n = S_n - S_{n-1}$ teži nuli kada $n \to \infty$. Kontra primer da obrnuto ne mora biti tačno.

Primena pojma granice niza (6 časova). Definicija realnog broja kao beskonačnog ili konačnog decimalnog razlomka posebno iracionalnog, periodično ponavljanje decimala; primena u geometriji; primena u raznim oblastima nauke i prakse.

Aproksimacija granice niza i procena greške kod jednostavnijih primera.

Granica funkcije (20 časova). Gradivo ove teme dato je u glavi V.

Neprekidnost funkcije (8 časova). Definicija neprekidne funkcije, definisane nad intervalom [a,b], preko granice, topološki i preko ε(metrikom); geometrijska interpretacija. Dokazi neprekidnosti elementarnih funkcija: sin x, cos x, x^k, e^x, ℓnx. Odnos neprekidnosti prema operacijama: +, ., : . Tačke prekida funkcije (odnos izmedju f(c-o), f(c), f(c+o)). Za neprekidnu funkciju u tački čija je vrednost u toj tački različita od nule postoji interval u kome ta funkcija ne menja znak (dokaz). Za neprekidnu funkciju u tački postoji interval u kojem je ona ograničena.

Izvod funkcije (11 časova). Definicija izvoda funkcije u tački. Odnos neprekidnosti i izvoda funkcije u tački. Analizirati izvod funkcije $y = |x|$ i $y = x \sin 1/x$. Geometrijsko značenje izvoda, brzina kao izvod. Izvodi elementarnih funkcija : $y = c$, $y = x^n$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$ i $y = \ell n\, x$. Izvod zbira, proizvoda i količnika (dokaz).

IV r a z r e d. (4 časa sedmično). *Izvod funkcije (18 časova)*. Izvod inverzne funkcije (bez dokaza). Izvod složene funkcije (bez dokaza). Izvod funkcije date u parametarskom obliku i pomoću polarnih koordinata. Pojam izvodne funkcije date funkcije. Diferencijal. Značenje diferencijala - približna vrednost funkcije. Beskonačni izvod - geometrijsko značenje. Izvodi višeg reda. Analitički uslov za rašćenje ili opadanje funkcije. Parcijalni izvod. Diferencijal funkcije više realnih promenljivih (R^3).

Neodredjeni integral (18 časova). Primitivna funkcija. Definicija neodredjenog integrala. Osobine neodredjenog integrala: $\int kf(x)dx = k\int f(x)\, dx$; $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$. Neodredjeni integral elementarnih funkcija: konstante, stepena, polinoma, sin x, cos x, 1/x, e^x, a^x, $1/\cos^2 x$, $1/\sin^2 x$, $1/1+x^2$, $1/\sqrt{1-x^2}$ i $1/\sqrt{x^2+a^2}$. Neodredjeni integral racionalnih funkcija R(x), R(sin x, cos x), R(e^x). Metode integraljenja: metoda smene i metoda parcijalnog integraljenja.

Kompaktnost (9 časova). Gornje i donje ograničenje podskupa od R. Supremum i infimum. Ograničen podskup od R ima supremum i infimum (dokaz). Zatvoren skup, otvoren skup u R. Prepokrivač. Heine-Borelova osobina skupa. Pojam kompaktnog skupa kao skupa koji ima Heine-Borelovu osobinu. Zatvoren i ograničen skup ima Heine-Borelovu osobinu (bez dokaza). Neprekidna funkcija preslikava kompaktan skup na kompaktan; neprekidna funkcija na kompaktnom skupu dostiže svoj max i min; na intervalu uzima svaku vrednost izmedju dve vrednosti (dokazi).

Osnovne teoreme diferencijalnog računa (15 časova). Dokazati: Rolleova teorema, Lagrangeova teorema, Taylorova teorema srednje vrednosti. Taylorov polinom funkcije i Taylorov red funkcije, uslovi za konvergenciju Taylorovog reda funkcije ka datoj funkciji (bez dokaza).

Ispitivanje funkcija i njihovi grafici (23 časa). Ponavljanje gradiva o graficima elementarnih funkcija: linearna, funkcija obrnute proporcionalnosti, kvadratna, eksponencijalna, logaritamska i trigonometrijske funkcije. Klasifikacija funkcija prema osobinama (parna, neparna, monotona, ograničena, inverzna, periodična). Stacionarne tačke. Lokalne ekstremne vrednosti i ekstremne vrednosti nad datim intervalom (bez izvoda). Potreban uslov za ekstremnu vrednost neprekidno diferencijalnih funkcija. Odredjivanje minimuma i maksimuma u slučaju neprekidnog drugog izvoda. Konkavnost i konveksnost grafika (analitički uslov bez dokaza). Tačka prevoja. Asimptote. Crtanje grafika funkcija na osnovu njihovog analitičkog ispitivanja.

Odredjeni integral (25 časova). Formiranje donjih i gornjih suma. Monotonost ovih suma kada se broj tačaka povećava ubacivanjem novih. Definicija odredjenog integrala. Neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ je uniformno neprekidna (dokaz). Neprekidna funkcija je R-integrabilna (dokaz). Osobine odredjenog integrala: $\int_a^a f\,dx = 0$; $\int_a^b f\,dx = -\int_b^a f\,dx$; $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$; $\int_a^b (\alpha f+\beta g)dx = \alpha\int_a^b f\,dx + \beta\int_a^b g\,dx$. Veza izmedju odredjenog i neodredjenog integrala za neprekidne funkcije (dokaz). Parcijalna integracija, smena promenljive.

Definicija i izračunavanje površine krivolinijskih figura. Dužina luka krive, definisane neprekidno diferencijabilnom funkcijom. Površina i zapremina obrtnih tela.

Diferencijalne jednačine (9 časova). Definicija diferencijalne jednačine i definicija njenog rešenja. Nejedinstvenost rešenja, početni i granični uslov. Diferencijalne jednačine kao matematički model za praćenje prirodne pojave (formiranje jednog takvog modela). Rešenje diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive i linearne diferencijalne jednačine prvog reda. Homogene linearne diferencijalne jednačine prvog i drugog reda - samo primeri:

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2} - \frac{p(x) - p_0}{\tau} = 0 \quad (\tau \text{ - konstanta) i}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\rho \text{ i } \varepsilon \text{ - konstante).}$$

Analizom i upoređjivanjem najnovijih programa matematike za usmereno srednje obrazovanje u nekim našim republikama i SAP Vojvodini, sa stanovišta zastupljenosti graničnih procesa u njima, uočava se sledeće:

prvo, u svim tim programima zastupljeni su elementi matematičke analize, odnosno diferencijalnog i integralnog računa i to u matematičkim usmerenjima u vidu posebnog predmeta, a u ostalim strukama sadržaji iz graničnih procesa se nalaze u programu predmeta MATEMATIKA;

drugo, postoje bitne razlike u razradi, obimu i dubini obuhvata gradiva po temama (realni brojevi, nizovi i redovi, funkcije, izvodi, integrali) u matematičkom usmerenju, s jedne strane i u ostalim usmerenjima (strukama), s druge strane;

treće, u većini programa kroz razradu gradiva se ističu algoritmi, odnosno akcenat je na usvajanju računske tehnike diferencijalnog i integralnog računa, a manje su programi orijentisani na suštinsko shvatanje pojmova i samih graničnih procesa;

četvrto, u redosledu programskih sadržaja postoje razlike u temi INTEGRALNI RAČUN (negde je prvo odredjeni integral, pa neodredjeni, a negde je obrnuto), dok je svuda isti redosled navodjenja sadržaja u temi FUNKCIJA (najpre se navodi granična vrednost funkcije, pa onda neprekidnost funkcije);

peto, neki programi, u prvom redu u usmerenjima gde je osnova izučavanja matematika, sadrže i temu DIFERENCIJALNE JEDNAČINE;

šesto, u tim programima ima i pojmova koji se nisu do sada izučavali u srednjoj školi, kao što su na primer: teoreme o srednjoj vrednosti, glatke funkcije, nesvojstveni integral, metode približnog integraljenja i dr., i

sedmo, samo u jednom od navedenih programa (elektrotehnička struka u SR Srbiji) nalaze se beskonačno malo i beskonačno velika veličina.

Posebno se moglo zapaziti da nijedan program nije tako detaljno razradjen, kao što je to slučaj sa programom ANALIZE za matematičko usmerenje u SAP Vojvodini. On sadrži, pored gradiva, i elemente metodičkog upućivanja kako da se to gradivo realizuje sa učenicima, kao i sve najvažnije etape u izgradjivanju pojedinih pojmova. Program kosekventno sprovodi ideju graničnog procesa kroz celokupno gradivo. Pa ipak se programom ne mogu, a i ne treba, da predvide svi elementi dubine i redosleda obrade gradiva, već se to ostavlja samom nastavniku, odnosno odgovarajućem udžbeniku. Prateći realizaciju ovog novog programa u toku prve dve godine njegove primene školske 1980/81. i 1981/82. uočili smo da on predstavlja znatnu pomoć profesorima srednje škole u nastavi analize.

Prisutnost graničnih procesa u programima za srednje usmereno obrazovanje u pojedinim republikama i SAP Vojvodini, može se okarakterisati dvojako: prvo, ovi sadržaji (misli se na one u kojima su prisutni granični procesi) su u dovoljnoj meri i prilično na istom nivou prisutni u programima onih usmerenja u pojedinim republikama i SAP Vojvodini, gde je osnova izučavanja - matematika (matematičko-tehničko usmerenje, matematičko usmerenje, matematičko-informatičko usmerenje i sl.) i drugo, ovi sadržaji su nejednako i nedovoljno zastupljeni i razradjeni u ostalim strukama i u tome postoje znatne razlike izmedju republika. Najsažetije su dati ti programi u SR Sloveniji (samo su naznačene programske teme), a najrazradjenije u SR Bosni i Hercegovini, za metalsku struku. Postoje razlike u zastupljenosti ovih programskih sadržaja, po republikama u pogledu razreda u kome se nalaze ti sadržaji. Većina ima te sadržaje u III i IV razredu, neki imaju izvesne elemente u II razredu (SR Srbija i SR Slovenija), a neki ih imaju samo u IV razredu (ovo se odnosi uglavnom na tehnička usmerenja). Očigledno je da se nije svuga imao dovoljno u vidu značaj ovih sadržaja kako za opšte obrazovanje učenika, tako i za znatne mogućnosti primene diferencijalnog i integralnog računa u prirodnim naukama i tehnici.

3.4. Različiti pristupi u realizaciji sadržaja iz graničnih procesa

U transponovanju naučnih činjenica neke oblasti u školske programe odgovarajućeg predmeta, mora se voditi računa u prvom redu o sledeće tri komponente: 1) o logičkoj povezanosti programskog gradiva, 2) o mogućnostima rigoroznog i tačnog prezentiranja činjenica i 3) o psihofizičkoj zrelosti učenika za koje se program priprema. V. Poljak ističe: "... znanost se u nastavni predmet transformira s obzirom na *psihofizičke snage učenika* pojedine dobi, napose s obzirom na njihovu zrelost... Izmedju znanstvenog sistema, s jedne strane, i psihofizičkih mogućnosti učenika, s druge strane, iskazuju se osnovni problemi u izboru sadržaja obrazovanja za pojedini stupanj školovanja" (|129|, str. 32.). Ranije smo konstatovali da se na osnovu rezultata istraživanja u oblasti učenja i na osnovu praćenja realizacije nekih programa u kojima se nalaze i sadržaji iz graničnih procesa, došlo do zaključka da ovi sadržaji odgovaraju uzrasnim mogućnostima učenika i da se sa obradom tih sadržaja može započeti u 16. godini uzrasta. Učenici tog uzrasta poseduju uglavnom sve one sposobnosti za učenje matematike, koje navodi većina istraživača. Tu se posebno misli na faktore sposobnosti učenja matematike koje je identifikovao R. Kvaščev 1969. godine u jednom svom prelimirnom istraživanju. On navodi sledeće "sposobnosti učenja matematike: 1) sposobnost formalizacije gradiva matematike i operisanje formalnim strukturama; 2) sposobnost uopštavanja matematičkih podataka (uopštavanje formalizovanih struktura i kombinovanje datih podataka) i 3) sposobnost matematičkog rezonovanja (operisanje brojevima i simbolima, rešavanje matematičkih problema, dokazivanje, izvodjenje logičkih zaključaka") (|87|, str. 66.).

Iz pregleda izbora gradiva datog u prethodnom poglavlju, može se zaključiti da su sastavljači programa saglasni kada je reč o sadržajima iz graničnih procesa šta oni treba da obuhvate na nivou srednje škole. To su sledeće teme: teorija realnih brojeva, nizovi i njihove granice, redovi, granica funkcije, neprekidnost, diferenciranje i integraljenje. S obzirom da svaka od ovih tema može biti različito data po obimu i dubini obrade i neposredne interpretacije, to je neophodno povesti računa na kom uzrastu će se koja od njih realizovati, sa kojim fondom časova i na kojem usmerenju u srednjem obrazovanju. Svakako da bi veći deo pomenutih sadržaja trebao da udje u fond opšteg obrazovanja učenika skoro cele populacije, ali sa odgovarajućim sadržajima i prilagodjenom interpretacijom. U onim usmerenjima gde je matematika zastupljena sa znatnijim fondom časova može se tražiti rigoroznost i potpunost u interpretaciji gradiva, odnosno da izlaganje ima formu jednog sistematskog kursa, sa odredjenim brojem definicija i teorema.

Ako postoji saglasnost oko toga koje teme iz graničnih procesa treba uneti u program i da interpretacija treba da ima okvire sistematskog kursa, to nikako ne znači da postoji jedinstvo mišljenja i o redosledu izlaganja i načinu interpretacije, kako pojedinih tema, tako i gradiva samo jedne teme. Jedna od najčešćih dilema jeste neprekidnost. Kao što smo videli u nekim programima neprekidnost nije eksplicitno zastupljena, u drugima se daje prvo neprekidnost pa onda granica, a u trećim se radi obrnuto, odnosno na osnovu pojma granice daje se pojam neprekidnosti. Po našem mišljenju, bez odredjene primene i ukazivanja na primere prekidnih funkcija, sam pojam neprekidnosti nije neophodan u programu. U svom stručnom radu "FAUT-IL ENSEIGNER LA CONTINUITE"? G. Noel ukazuje najpre na logičke potoškoće i teškoće vezane za intuiciju, pri uvodjenju pojma neprekidnosti, a zatim izražava mišljenje da bi za nastavu bile dovoljne samo Lipschitzove funkcije, odnosno one funkcije koje ispunjavaju Lipschitzov uslov: $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$ za svako x,y iz oblasti definisanosti funkcije f. I dok se Noel pita treba li učiti neprekidnost, dotle je G. Pickert predlagao da se ceo kurs analize zasnuje na neprekidnosti (|125|, str. 65), a to isto sugerišu i K. Artz i K. Mütz (|9|, str. 47-63). Bez obzira što se ova ideja nije uspešno realizovala u nekim udžbenicima i šire u nastavnoj praksi, G. Pickert i dalje misli da je sa nastavnog aspekta neprekidnost jedan od fundamentalnih pojmova analize i na srednjem stupnju, a ne samo na fakultetu. Imajući u vidu da se školski kurs analize zasniva na uredjenom polju realnih brojeva i njegovim osobinama, medju kojima su i topološke, smatramo da se neprekidnost ne može izostaviti iz programa srednje škole koji obuhvata granične procese. Samo mesto neprekidnosti zavisiće od koncepcije celog programa i uloge koja se pridaje neprekidnosti. Bitno je istaći da postoji dovoljno matematičkih činjenica pristupačnih učenicima sa kojima se može uspešno izgraditi pojam neprekidne i prekidne funkcije na nivou srednjoškolske nastave. Pri tome je važno da sadržaji o neprekidnosti ne budu izolovani, već da budu povezani sa ostalim gradivom o graničnim procesima, a u prvom redu sa diferenciranjem i integraljenjem.

Pojam izvoda se najčešće daje kao granična vrednost količnika dveju promenljivih beskonačno malih, ali ima i drugačijih pristupa. U svom stručnom radu ANALYSIS IN DER KOLLEGSTUFE G. Pickert smatra da se tzv. elementarne funkcije mogu linearno aproksimirati u nekoj tački tih funkcija, što uz postojanje takve aproksimacije, dovodi do pojma izvoda (|125|, str. 65). Naime, on polazi od celih racionalnih funkcija i uzima da je za $(\forall x_o \in R)\ (f(x) = f(x_o) + (x-x_o)\, f_1(x))$, jedna linearna aproksimacija funkcije $f(x)$ pomoću funkcije $f_1(x)$ koju treba odrediti. Tako, na primer, za funkciju $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ aproksimacija u tački $x_o=2$ daje za $f_1(x) = 3x + 11$ i prema tome je $f_1(2) = f'(2)$. To znači da u tački $x_o = 2$ funkcija f_1 predstavlja prvi izvod funkcije f. Od analiziranih programa pristup izvodu na ovaj način preko linearnih aproksimacija javlja se u programu SAD (linearne aproksimacije i izvodi).

Jedan od značajnih problema u nastavi o graničnim procesima jeste prelaz od granice niza ka granici funkcije. Naime, u većini slučajeva se najpre daje granica niza (a_n) kada promenljiva $n \to \infty$ preko diskretnih vrednosti, što predstavlja jedan oblik graničnog prelaza, a zatim se daje pojam granice funkcije f kada x teži nekoj konstanti x_o preko niza neprekidnih vrednosti, što predstavlja drugi oblik graničnog prelaza. Ukoliko se učenicima na ovo ne ukaže, oni neće shvatiti razliku izmedju ovih dvaju graničnih prelaza. Ima i takvih pristupa gde se oba granična prelaza obuhvataju jednom definicijom na sledeći način: promenljiva x u datom procesu ima kao svoju granicu konstantu a, ako razlika $x - a$, počevši od jednog momenta procesa postaje, a u svim daljim momentima i ostaje koliko god hoćemo mala (po apsolutnoj vrednosti). Pojam granice se mora dati u rigoroznom obliku i zbog toga je potrebno da mu se prilazi postupno, svestrano, strpljivo, dovoljno jasno i precizno. Pri tome se mora učenicima dobro objasniti svaki detalj, a ne da se pretpostavlja da je učenicima jasno. Kao primer navodimo da se retko u školskoj praksi ukazuje na ekvivalentet izraza $|x - a| < \delta$ i $x \in (a-\delta, a+\delta)$, što je vrlo bitno u shvatanju pojma granice uopšte.

Sadržaji iz graničnih procesa koje smo analizirali u programima različitih zemalja su takvog obima i dubina da se ne mogu smatrati propedevtičkim kursom, već jednim sistematskim kursom analize. Onda se postavlja pitanje rigoroznosti izlaganja takvog jednog kursa na srednjoškolskom nivou. Po našem mišljenju interpretacija gradiva iz analize mora se oslanjati na nivo matematičkog obrazovanja učenika i pri tome koristiti sve ono što su učenici prethodno stekli (neki pojmovi iz skupova, matematičke logike, skupova brojeva i preslikavanja). Pored toga, neće se ništa oduzeti rigoroznosti ako se pojmovima bude pristupalo preko pogodno odabranih primera i kada je to moguće preko geometrijske interpretacije, pa da se tek onda daje formalna analitička definicija. Hans-Joachim Vollrath ističe da "se definicije centralnih pojmova danas uglavnom posmatraju sa aspekta strogosti, elegancije ili originalnosti, a manje u odnosu na razumevanje učenika" (|164|, s. 7.). On smatra da će se ponovo obraćati veća pažnja didaktičkim komponentama jer su zapostavljene poslednjih godina pod diktatom strogosti. Interpretacija preko pojmova iz skupova i matematičke logike treba da bude zastupljena u onoj meri koliko to doprinosi jasnoći i preciznosti matematičkog izražavanja. Svaki sistematski kurs mora sadržavati odredjeni broj definicija i teorema. Taj broj biće uslovljen kontinuitetom izlaganja i logičkom povezanošću gradiva, pa ukoliko obim i dubina gradiva nisu u skladu sa odgovarajućim fondom časova ili sa psihofizičkim mogućnostima učenika, onda se treba ograničiti na dokaze samo najvažnijih teorema, dok ostale treba dati bez dokaza. Pri tom je bitno da kod učenika ne sme ostati pojmovna praznina, što znači da se moraju dokazati one teoreme koje razjašnjavaju pojmove i povezuju gradivo.

Pitanje redosleda obrade diferencijalnog i integralnog računa, takodje je ponekad predmet razmatranja stručnjaka i metodičara. Oni koji se zalažu da se prvo obradjuje diferencijalni račun, pa onda integralni, potkrepljuju to prirodnošću puta, dok oni koji predlažu obrnuti redosled smatraju da će takav redosled obezbediti bolje razumevanje granične vrednosti.

Medjutim, nema ni sa jedne strane argumenata o doprinosu takvog redosleda postavljenom cilju - uspehu u nastavi analize. Po našem mišljenju bez eksperimentalne provere i potvrde, ne treba menjati redosled koji egzistira u praksi, pa prema tome i u ovom slučaju nije umesno napraviti inverziju u redosledu i prvo obradjivati integralni pa onda diferencijalni račun. Naime, ne može se redosled prepustiti ukusu i originalnosti pojedinaca, pa makar se to činilo i logičnim i prihvatljivim, već se za utvrdjivanje redosleda mora imati prava argumentacija, odnosno eksperimentalno utvrdjen bolji redosled.

I u samoj temi INTEGRALNI RAČUN postoje različiti pristupi u redosledu obrade sadržaja. Najstariji i najčešći redosled ide od pojma neodredjenog integrala kao inverzne operacije diferenciranju, pa se onda daje pojam odredjenog integrala. Medjutim, ima i obrnutih pristupa, u poslednje vreme sve češće, da se prvo uvode pojam odredjenog integrala, pa se onda obradjuje neodredjeni integral, što se objašnjava i činjenicom da se do pojma integrala došlo u početku nezavisno od pojma izvoda. Tek je posle toga došlo do značajnog otkrića o vezi izmedju operacija diferenciranja i integraljenja (Leibnitz i Newton). Ali, u nastavnoj praksi se polazi od toga da je bolje da se na osnovu inverzne operacije diferenciranju uvede pojam neodredjenog integrala i kada se savlada računska tehnika integraljenja da se onda uvede pojam odredjenog integrala i ukaže na sve njegove primene. Iako se u navedenim programima ne vidi precizno kakav se redosled predlaže, ipak se može zapaziti da se kod teme INTEGRAL najčešće polazi od pojma odredjenog integrala. Sve se češće u udžbeničkoj interpretaciji ovih sadržaja polazi od pojma primitivne funkcije (odredjivanje funkcije čiji je izvod zadana funkcija), pa se onda ide na pojam odredjenog integrala, bez ikakvog zadržavanja ili pominjanja neodredjenog integrala (|71|, 172-194.). Izgleda da u ovom pogledu ima dovoljno praktičnih iskustava, da se i bez eksperimentalne provere jednog ili drugog od dva moguća redosleda, može prihvatiti i jedan i drugi i da ostvarenje postavljenog cilja će zavisiti samo od uspešnosti neposrednog nastavnog procesa u svakoj konkretnoj situaciji, a ne od redosleda.

U zaključcima Pariske konferencije o nastavi infinitezimalnog računa, izmedju ostalog, se kaže: "Ne bi trebalo da metafizička magla beskrajno malih veličina ulazi u srednjoškolsku nastavu". Pa ipak i danas se sreću programi za srednju školu u kojima se eksplicitno nalazi "beskonačno mala" (SSSR - IX razred) i "beskonačno velike i beskonačno male veličine (Jugoslavija - IV razred gimnazije). Problemi oko obrade ovog pojma i računa beskonačno malih javljaju se zbog toga što se beskonačno mala u nastavnoj praksi često ne tretira kao promenljiva veličina koja teži nuli, ali nikada nije nula. Razmatrajući primere $1/2^n$ kada $n \to \infty$ i upisivanje u krug mnogouglova sa sve većim brojem stranica Batler i Vren ističu: "Osnovna ideja koja je sadržana u ovim ilustracijama je ideja promenljive razlike, koja progresivno opada prema nuli, izmedju vrednosti promenljive funcije i konstante kojoj se ta funkcija približava kao graničnoj vrednosti. Ovu ideju treba naglašavati u svim upotrebljenim ilustracijama, jer samo kad se ona razume, tehnička definicija granične vrednosti, kakava se obično daje, dobija stvarno značenje. Kad se promenljiva funkcija približava nuli, kao graničnoj vrednosti, onda se ona naziva 'beskonačno mala veličina'. Treba da bude jasno da beskonačno mala veličina nije prosto "vrlo mala veličina" već *promenljiva* veličina koja se može učiniti manjom od svake unapred zadate vrednosti, bez obzira koliko mala bila ta vrednost; tj. ona se približava nuli kao graničnoj vrednosti" (|11|, s. 390). Prema tome ako se u interpretaciji sadržaja iz graničnih procesa u srednjoj školi koristi beskonačno mala, onda se mora strpljivo i dovoljno jasno učenicima predočiti o kakvom se procesu radi, kako ne bi bilo nesporazuma i pogrešnog shvatanja pojma granice.

U različite pristupe realizaciji sadržaja iz graničnih procesa spada i način definisanja granične vrednosti. Naime, često se postavlja kao problem izbora jednog načina definisanja granične vrednosti funkcije u tački, od tri sledeća: 1) pomoću apsolutne vrednosti i brojeva ε i δ (metrička definicija) i 2) pomoću okoline tačke (topološka definicija) i 3) pomoću nizova (u literaturi se sreće naziv : sekven cijalna definicija). Bilo je ispitivanja o toma koja od ovih definicija daje bolje rezultate u obradi gradiva. Ta istraživanja su pokazala (|164|, s. 13), prednosti svake od njih u pojedinim tipovima zadataka iz graničnih procesa, tako da se nije mogla dati prednost samo jednoj definiciji od napred navedenih. Mi smo u okviru istraživanja na temu GRANICA FUNKCIJE proveravali efekte kada se koriste sve tri navedene definicije i o rezultatima tog istraživanja biće više reči u V glavi. Ovde možemo samo konstatovati da je pristup sa sve tri definicije dao bolje rezultate u savladanosti gradiva iz teme GRANICA FUNKCIJE, nego što je dao pristup bez neke od njih.

Na kraju ovog poglavlja želimo da ukažemo i na dva moguća pristupa realizaciji jednog sistematskog kursa diferencijalnog i integralnog računa, odnosno graničnih procesa. U prvom se akcenat stavlja na razumevanje osnovnih pojmova i upoznavanje sa osnovnim formulama, dok je u drugom akcenat na sticanju sposobnosti i veštine korišćenja tih formula i metoda diferencijalnog i integralnog računa. Mi ih namerno razdvajamo, iako oni predstavljaju jedinstven zahtev u obradi ovih sadržaja i samo zajedno posmatrani i ostvarivani mogu dati željene rezultate u savladanosti ovog gradiva. Medjutim, u nastavnoj praksi najčešće se nastavnici zadržavaju dugo na drugom aspektu, a daleko manje na prvom, tako da učenici steknu odredjenu računsku tehniku, ali nisu osposobljeni da razumeju kako i gde može da se primeni ta tehnika i šta znače pojedini rezultati dobijeni računanjem. To je tipičan primer formalizma u nastavi, kojeg se treba sistematski oslobadjati.

Prisutnost graničnih procesa u školskim programima posmatrali smo od prvih inicijativa oko 1900. godine, pa sve do današnjih dana. Na osnovu brojnih dokumenata i stručno-metodičke literature utvrdili smo da je proces unošenja sadržaja iz osnova matematičke analize u programe matematike srednje škole trajao vrlo dugo i sa različitim intenzitetom u pojedinim zemljama. Najvažnije saznanje u tom pogledu svakako je činjenica da su sadržaji iz graničnih procesa danas postali obavezno gradivo u većini srednjoškolskih programa matematike. Naime, prošla su ona vremena kada su se vodile duge rasprave o potrebi i načinu unošenja ovih sadržaja u program i kada su se oni čas unosili, a čas izostavljali iz programa. Posle 60-tih godina ovog veka skoro da nije bilo promene programa matematike za srednju školu pri kojoj se nisu našli u programu i sadržaji iz graničnih procesa, odnosno iz osnova klasične matematičke analize.

Analizom velikog broja programa matematike za srednju školu uočena je razlika u zastupljenosti graničnih procesa po razredima. U prvo vreme se išlo dosta obazrivo i ti sadržaji su pretežno bili zastupljeni u završnom razredu srednje škole, dok je danas preovladalo shvatanje i saznanje da je moguće započeti ranije sa obradom gradiva iz graničnih procesa i to na uzrastu od 16 godina pa nadalje. Ovakvo opredeljenje potkrepljuju i prikazani istorijski razvoj graničnih procesa, kao i rezultati našeg eksperimenta o realizaciji gradiva teme GRANICA FUNKCIJE u pozivnousmerenom srednjem obrazovanju.

U pogledu strukture sadržaja iz graničnih procesa zastupljenih u školskim programima postoji velika sličnost. U najvećem broju programa izučavanje osnova matematičke analize započinje se skupom realnih brojeva, pri čemu se ne izučava potpuna teorija realnih brojeva, već samo oni elementi (na pr. uredjeno polje realnih brojeva, ograničenost podskupa skupa R, infimum i supremum) koji predstavljaju bazu za izučavanje gradiva iz graničnih procesa. Ima programa koji počinju sa nizovima realnih brojeva, a zasnivanje pojma realnog broja se uzima kao jedna o primena granice niza. Dalje se u svim programima javljaju teme: FUNKCIJA, IZVOD, INTEGRAL, a u nekim programima (uglavnom za matematička usmerenja) se javlja još i tema DIFERENCIJALNE JEDNAČINE. Ove teme su različito razradjene i produbljene, u zavisnosti od struke za koju je program namenjen i od fonda časova, a u svim razradama se nalazi i primena diferencijalnog i integralnog računa.

Jedno od pitanja koje se nameće iz analize programa odnosi se na redosled gradiva, mada program ne obavezuje da se tog redosleda pridržavaju nastavnici u školama i pisci odgovarajućih dužbenika. Postoje dve osnovne koncepcije u pogledu redosleda: prva je, da se najpre obradjuje granična vrednost funkcije, pa njena neprekidnost i da se prvo daje pojam neodredjenog integrala, pa odredjenog, a druga je, da se prvo obradjuje neprekidnost funkcije, pa onda njena granična vrednost i da se prvo uvodi pojam odredjenog integrala. Većina programa navodi najpre graničnu vrednost funkcije, pa neprekidnost i prvo pojam odredjenog integrala, pa onda neodredjenog. Naše je mišljenje da treba prvo obradjivati neprekidnost funkcija pa onda njenu graničnu vrednost, jer je takav redosled pristupačniji i jasniji učenicima. Isto tako pojam integrala treba dati onako kako je on i nastao, pa tek onda izučavati algoritme, odnosno neodredjene integrale a njihovu vezu sa odredjenim integralom.

Na osnovu analize navedenih programa može se tvrditi da nijedan od njih ne predstavlja jedan zaokruženi sistematski kurs matematičke analize, koji zahteva potpunu rigoroznost u izlaganju, već se često i u samim programima sugerira da se pojedine teoreme uzmu bez dokaza. Isto tako se ne može tvrditi da ti programi predstavljaju samo jedan propedevtički kurs analize (pogotovu u matematičkom usmerenju), pa je onda najtačnije reći da većina programa predstavlja odredjene modifikacije sistematskog kursa matematičke analize. Izostavljanje nekih dokaza čini se često zbog toga što se smatra da njihova složenost nije dostupna učenicima srednjoškolskog uzrasta, ali da se sadržajem takvih teorema želi obezbediti kontinuitet izlaganja.

Analizom navedenih programa (inostranih i naših) utvrdili smo da oni retko sadrže metodičku razradu koja bi upućivala nastavnike kako će najcelishodnije i najjasnije protumačiti učenicima vrlo složene sadržaje iz graničnih procesa, a da se pri tome ne okrnji ništa od matematičke strogosti i naučnosti. Ovo se može objasniti činjenicom da nije stečeno dovoljno iskustva iz nastavne prakse u realizaciji graničnih procesa u srednjoj školi i na osnovu te prakse nije uobličeno i uopšteno dovoljno metodičkih uputstava, posebno za one sadržaje koji predstavljaju poteškoće u razumevanju i shvatanju od strane učenika.

Uporedjivanjem programa utvrdili smo da nema bitnijih razlika u programima sa sadržajima iz graničnih procesa izmedju pojedinih zemalja u svetu, s jedne strane i programa naših republika i SAP Vojvodine, s druge strane. Pri tome treba reći da program za matematičko usmerenje pozivno-usmerenog srednjeg obrazovanja u SAP Vojvodini spada u red boljih programa. Medjutim, i u tom programu treba izvršiti odredjena poboljšanja i redukcije, na osnovu iskustava koja se dobiju u njegovoj primeni. U njemu treba dati programske sadržaje odvojeno od objašnjenja, jer je to sada dato zajedno, što je necelishodno. U objašnjenjima je potrebno, po našem mišljenju, posebno naglasiti da je osnovni cilj izučavanja graničnih procesa u srednjoj školi da učenici shvate njihovu suštinu i to tako da ih mogu primenjivati na razne probleme. Kod učenika treba najpre formirati način mišljenja i rešavanja zadataka uz pomoć graničnih procesa, pa tek onda posvetiti odredjenu pažnju i usvajanju odredjenih algoritama i daljem izgradjivanju pojmova iz matematičke analize.

IV NEKA STRUČNO-METODIČKA PITANJA INTERPRETACIJE SADRŽAJA IZ GRANIČNIH PROCESA

Posle Cauchyevog sistematskog izlaganja teorije granica nastavljeno je usavršavanje, produbljivanje i proširivanje sadržaja o graničnim procesima tokom XIX i XX veka. Pominjemo samo da je Frechet dao uopštenje pojma granice, a da je Hausdorff dao najopštiji oblik pojma granice. U okviru matematičke analize formirane su nove discipline, kao na primer *harmonijska analiza* (produžetak Fourierove teorije trigonometrijskih redova i integrala) i *funkcionalna analiza*. Matematička analiza ne proučava više samo odredjene funkcije na telu realnih i kompleksnih brojeva, već i na skupovima snabdevenim različitim algebarskim i topološkim strukturama. Na primer, Cauchyevi dokazi teorema o neprekidnim funkcijama sada se preciznije i opštije iskazuju:

"1) Svaka funkcija definisana i neprekidna na jednom *kompaktnom metričkom* prostoru i sa *realnim vrednostima* je ograničena i dostiže svoje medje.

2) Svaka funkcija definisana na jednom *kompaktnom metričkom prostoru* E i sa vrednostima u *metričkom prostoru* F, koja je neprekidna na E, uniformno je neprekidna na E.

3) Svaka funkcija definisana i neprekidna na *koneksnom metričkom prostoru* E i sa *realnim vrednostima* uzima najmanje za jednu tačku iz E svaku vrednost izmedju vrednosti obuhvaćenih za dve tačke iz E" ([39], s. 119).

Medjutim, mi ćemo u ovoj glavi učiniti takav osvrt na granične procese, pri kojem će se voditi računa da budu obuhvaćeni oni granični procesi koji se javljaju u nastavi matematike srednje škole i to na onom nivou koji je dostupan učenicima ovog uzrasta. Pojednostavljenom klasifikacijom može se izdvojiti nekoliko takvih najvažnijih oblasti i to: beskonačni nizovi i redovi, granica funkcije, diferenciranje i integraljenje.

Analizirajući prisutnost graničnih procesa u školpovi, infimum i supremum skupa, prošireni sistem realnih brojeva $(-\infty, +\infty)$, realna prava, apsolutna vrednost realnog broja, interval, okolina. Kasnije, posle obrade granice niza, treba uzeti, kao jedan od primera primene granice niza, definiciju realnog broja kao beskonačnog ili konačnog decimalnog razlomka.

Prilikom realizacije gradiva o realnim brojevima, pored usvajanja napred navedenih pojmova, mora se ukazati da se skup realnih brojeva dobiva kompletiranjem skupa racionalnih brojeva, što predstavlja dalju pripremu za proučavanje i shvatanje graničnih procesa. To je neophodno ako se želi da učenici budu dovoljno pripremljeni za izučavanje osnova matematičke analize, jer kako kaže A.J.Hinčin: "..matematička analiza već na prvim svojim koracima elementarnim operacijama algebre priključuje osnovnu i najvažniju analitičku operaciju - *granični prelaz*" (|54|, s. 6). Kao primere beskonačnih skupova učenicima treba posebno naglasiti skup N kao skup koji je ekvivalentan sa svojim pravim podskupom (na pr. podskup svih parnih brojeva); zatim prebrojive skupove ekvivalentne skupu N i najzad interval realnih brojeva i sam skup R. Granični prelaz se može posmatrati kod osobine skupa realnih brojeva, po kojoj se oni bitno razlikuku od skupa racionalnih brojeva. To je osobina *neprekidnosti* skupa R. Naime, za svaki sistem umetnutih intervala

$$\{[a_n, b_n]\}, \quad a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

postoji bar jedan broj, koji pripada svim intervalima datog sistema. To znači, ako dužina $b_n - a_n$ umetnutih intervala teži ka nuli, kada $n \to \infty$, onda postoji jedinstvena tačka, koja pripada svim tim intervalima. Uz neprekidnost realnih brojeva vezuje se i osobina *potpunosti (kompletnosti)* skupa R. Naime, svaki fundamentalni niz realnih brojeva je konvergentan. Učenicima treba skrenuti pažnju da tu osobinu nema skup racionalnih brojeva, jer u njemu postoje fundamentalni nizovi koji ne konvergiraju ni jednom racionalnom broju (na pr. 1; 1,01: 1,0011; 1,000111;...). Tu treba spomenuti i osobinu *gustine* kako skupa racionalnih, tako i skupa iracionalnih brojeva u skupu svih realnih brojeva. Naime, ma kakva bila dva realna broja a i b, skim programima na više mesta smo ukazali na različite redoslede u rasporedu gradiva iz osnova matematičke analize u pojedinim programima, kao i na često nedovoljnu razradjenost sadržaja, što realno stvara dileme i nesnalaženja u realizaciji tog gradiva u nastavnoj praksi. U ovom delu rada želimo da se pozabavimo najbitnijim temama koje se u navedenim programima pominju i to sa stanovišta njihove stručno-metodičke intepretacije i povezanosti idejom graničnih procesa, ukazujući posebno na strukturu gradiva pojedinih tema.

4.1. *Granični procesi pri obradi realnih brojeva*

Iz pregleda pojedinih programa uočava se da izučavanje elemenata matematičke analize, po pravilu, započinje gradivom o skupu realnih brojeva. To je i prirodno, s obzirom na činjenicu da osnove matematičke analize u srednjoj školi predstavljaju u suštini realne funkcije jedne realne promenljive. Pri tome se mora imati u vidu da se učenici ne sreću prvi put sa realnim brojevima, odnosno da oni već imaju izgradjenu predstavu o njima, istina induktivnim putem i na intuitivnoj osnovi. Isto tako navedenim programima se ne predvidja detaljno proučavanje teorije realnih brojeva. Sve su ovo činjenice koje treba da ima u vidu nastavnik pri realizaciji gradiva o realnim brojevima u srednjoj školi.

U samim programima se ne sugerira način obrade realnih brojeva na početku proučavanja matematičke analize u srednjoj školi, a postoje i razlike u sadržaju gradiva ove teme po pojedinim programima. Zato najpre navodimo, po našem mišljenju, koje gradivo o realnim brojevima treba da bude obuhvaćeno programom. To gradivo treba da predstavlja jedan oblik sistematizacije i dopunjavanja znanja o realnim brojevima, a nikako zasnivanje realnih brojeva i njihovu teorijsku razradu. To znači da se pretpostavlja da je učenicima pojam realnog broja poznat i da su im poznate osnovne operacije i relacije u skupu R. Prema tome program treba da obuhvati sledeće: uredjeno polje realnih brojeva, ograničeni skupovi, infimum i supremum skupa, prošireni sistem realnih brojeva $(-\infty,+\infty)$, realna prava, apsolutna vrednost realnog broja, interval, okolina. Kasnije, posle obrade granice niza, treba uzeti, kao jedan od primera primene granice niza, definiciju realnog broja kao beskonačnog ili konačnog decimalnog razlomka.

Prilikom realizacije gradiva o realnim brojevima, pored usvajanja napred navedenih pojmova, mora se ukazati da se skup realnih brojeva dobiva kompletiranjem skupa racionalnih brojeva, što predstavlja dalju pripremu za proučavanje i shvatanje graničnih procesa. To je neophodno ako se želi da učenici budu dovoljno pripremljeni za izučavanje osnova matematičke analize, jer kako kaže A.J.Hinčin: "..matematička analiza već na prvim svojim koracima elementarnim operacijama algebre priključuje osnovnu i najvažniju analitičku operaciju - *granični prelaz*" (|54|, s. 6). Kao primere beskonačnih skupova učenicima treba posebno naglasiti skup N kao skup koji je ekvivalentan sa svojim pravim podskupom (na pr. podskup svih parnih brojeva); zatim prebrojive skupove ekvivalentne skupu N i najzad interval realnih brojeva i sam skup R. Granični prelaz se može posmatrati kod osobine skupa realnih brojeva, po kojoj se oni bitno razlikuku od skupa racionalnih brojeva. To je osobina *neprekidnosti* skupa R. Naime, za svaki sistem umetnutih intervala

$$\{[a_n,\ b_n]\},\qquad a_n \le a_{n+1} \le \dots \le b_{n+1} \le b_n,\qquad n = 1,2,3,\dots$$

postoji bar jedan broj, koji pripada svim intervalima datog sistema. To znači, ako dužina $b_n - a_n$ umetnutih intervala teži ka nuli, kada $n \to \infty$, onda postoji jedinstvena tačka, koja pripada svim tim intervalima. Uz neprekidnost realnih brojeva vezuje se i osobina *potpunosti (kompletnosti)* skupa R. Naime, svaki fundamentalni niz realnih brojeva je konvergentan. Učenicima treba skrenuti pažnju da tu osobinu nema skup racionalnih brojeva, jer u njemu postoje fundamentalni nizovi koji ne konvergiraju ni jednom racionalnom broju (na pr. 1; 1,01: 1,0011; 1,000111;...). Tu treba spomenuti i osobinu *gustine* kako skupa racionalnih, tako i skupa iracionalnih brojeva u skupu svih realnih brojeva. Naime, ma kakva bila dva realna broja a i b,

$a < b$, postoji takav racionalan broj r, da je $a < r < b$ i takav iracionalan broj s, da je $a < s < b$.

Za obradu skupa realnih brojeva treba brižljivo odabrati odgovarajuće primere i zadatke, s obzirom da se u srednjoj školi ne izučava potpuna teorija realnih brojeva i da odredjene pojmove učenici treba da shvate i usvoje putem indukcije i intuicije. Isto tako treba navesti bar neke razloge za konstituisanje realnih brojeva, kao na primer, ova dva osnovna: prvi, zbog praktične primene matematike u kojoj se javlja potreba za realnim brojevima da bi se izrazile odredjene veličine i drugi, zbog razvoja same matematike unutar nje i to u prvom redu zbog težnje da se proširi oblast primene niza računskih operacija nad racionalnim brojevima (izračunavanje korena, izračunavanje logaritama, rešavanje jednačina i sl.).

U nastavnoj praksi obrada se najčešće započinje aksiomama polja realnih brojeva i aksiomom uredjenja, što nije celishodno i ne obezbedjuje dobro usvajanje gradiva teme "REALNI BROJEVI". Mnogo je korisnije najpre ponoviti neka bitna znanja o skupu racionalnih brojeva u vidu zadataka. Na primer:

1) Za skup racionalnih brojeva Q: a) navesti sve one operacije koje su u Q uvek izvodljive; b) navesti one operacije koje u Q nisu uvek izvodljive; c) navesti oblike algebarskih jednačina koje nisu uvek rešive u skupu Q.

2) Dokazati da izmedju ma koja dva racionalna broja postoji bar jedan racionalan broj.

3) Dokazati da izmedju ma koja dva racionalna broja postoji beskonačan skup racionalnih brojeva.

4) Da li svakom racionalnom broju odgovara tčka koordinatne ose po odredjenom postupku, i obrnuto, da li svakoj tački koordinatne ose odgovara racionalan broj?

Ovde je pogodno da se naglasi da pri predstavljanju skupa Q na koordinatnoj osi, ostaje neprazan skup tačaka koje nisu slike racionalnih brojeva, što sugerira da treba skup Q proširiti novim brojevima tako da budu popunjene sve tačke koordinatne ose.

Već je rešavanjem navedenih i sličnih zadataka izvršena priprema za uvodjenje iracionalnih brojeva, opet preko pogodno odabranih zadataka. Na primer:

6) Dokazati da medju racionalnim brojevima ne postoji takav čiji je kvadrat: a) 2; b) 3; c) 5; d) 6 i e) 7.

7) Koji su od datih brojeva racionalni, a koji iracionalni: a) $\sqrt{7,29}$; b) $\sqrt{333}$; c) $\sqrt{0,64}$; d) $\sqrt{0,064}$; e) $\sqrt[3]{125}$; f) $\sqrt[3]{32}$; g) $\sqrt{22,5}$; h) $\log_2 256$; i) $\log_{10} 9$; j) $\log_{10} 100$; k) $\log_{10} 25$.

8) Predstaviti na koordinatnoj osi brojeve: a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{6}$; c $-\sqrt{5}$; d) $-\sqrt{6}$.

9) Dati su izrazi: a) pq; b) $\sqrt{p+q}$; c) $p+\sqrt{q}$; d) $\sqrt{p}+q$. Koji od tih izraza mogu biti racionalni brojevi, ako je q racionalan, a p iracionalan broj?

10) Koji od brojeva: a) r+s, b) rs, c) $\sqrt{r+s}$, d) $r/\sqrt{s}$ mogu biti racionalni brojevi, ako su r i s iracionalni brojevi?

11) Navesti neke tačke x iz intervala $[-0,01;\ 0,01]$, u kojima su vrednosti funkcije $y = x^2$ iracionalne.

12) Koliko racionalnih i iracionalnih brojeva sadrži interval $]\sqrt{2};\ \sqrt{3}[$?

Posle ovakvih zadataka učenike treba podsetiti da se ma koji racionalan broj može zapisati u obliku konačnog ili beskonačnog periodičnog decimalnog razlomka (sa periodom odmah posle decimalnog zareza ili sa periodom počev od neke decimale), dok se svaki iracionalan broj može zapisati u obliku beskonačnog neperiodičnog decimalnog razlomka. Kako racionalni i iracionalni brojevi čine skup realnih brojeva i kako se konačan decimalni razlomak može napisati i kao beskonačan dopisivanjem beskonačnog niza nula posle poslednje njegove decimale, to se može reći da je svaki realan broj moguće zapisati u obliku beskonačnog decimalnog razlomka i da je ma koji beskonačni decimalni razlomak predstavnik nekog realnog broja.

S obzirom na ranije stečena znanja učenika o algebarskim strukturama i uredjenom polju racionalnih brojeva, ne predstavlja nikakvu poteškoću da se aksiomatski opiše uredjeno Arhimedovo polje ralnih brojeva, odnosno da se navedu osnovne osobine operacija sabiranja i množenja realnih brojeva, zatim distributivnost množenja u odnosu na sabiranje i osobine uredjenja, kao i Arhimedova osobina. Medjutim, odredjene poteškoće u nastavnoj praksi predstavlja shvatanje i usvajanje aksiome neprekidnosti, odnosno njenih ekvivalenata (Aksioma supremuma: svaki neprazan i ograničen sa gornje strane skup realnih brojeva ima supremum; Dedkindov presek: za svaki presek A/B skupa realnih brojeva postoji broj r, koji proizvodi taj presek, r = A/B. Pošto se na srednjoškolskom nivou ne izgradjuje nijedna potpuna teorija realnih brojeva (aksiomatska, Dedekindova na osnovu pojma preseka u skupu racionalnih brojeva, Cantorova pomoću pojma fundamentalnog niza racionalnih brojeva i Weierstrassova pomoću beskonačnih decimalnih razlomaka), odnosno pošto su neki od dokaza dugi i nepristupačni za srednjoškolski uzrast, to je najpogodnije da se neprekidnost realnih brojeva prihvati intuitivno kao obostrano jednoznačna korespodencija izmedju beskonačnič decimalnih razlomaka i tačaka realne prave. Posebno treba ukazati da se skup realnih brojeva dobiva kompletiranjem skupa racionalnih brojeva pomoću graničnog procesa.

Ostalim pojmovima iz teme "REALNI BROJEVI" kao što su: proširenje sistema realnih brojeva, apsolutna vrednost realnog broja, intervali i okolina treba pokloniti posebnu pažnju, jer se njihovom smišljenom obradom mogu izvršiti vrlo dobre pripreme za obradu ostalih sadržaja iz graničnih procesa, posebno sa stanovišta njihovog razumevanja i svesnog usvajanja.

Kako osnove matematičke analize u srednjoj školi obuhvataju izučavanje realnih funkcija realne promenljive, to se sistem realnih brojeva R proširuje sa dva fiktivna (nesvojstvena) elementa $+\infty$ i $-\infty$ u sistem $R^* = R\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$. Tada je $-\infty < x < +\infty$ za bilo koje konačno $x\in R$ i važe osnovne osobine nejednakosti u R^*. Pri tome se za fiktivne elemente $-\infty$ i $+\infty$ (u nastavnoj praksi često se ti elementi tretiraju kao brojevi, što je pogrešno), utvrdjuju poznata pravila računanja:

$(+\infty) + x = +\infty$	ako je $x \neq -\infty$
$(-\infty) + x = -\infty$	ako je $x \neq +\infty$
$(+\infty) + (-\infty)$	nije definisano
$(+\infty) . x = +\infty$	ako je $x > 0$
$(+\infty) . x = -\infty$	ako je $x < 0$
$(-\infty) . x = -\infty$	ako je $x > 0$
$(-\infty) . x = +\infty$	ako je $x < 0$
$(+\infty) . 0$ i $(-\infty) . 0$	nije definisano

Kada se definiše okolina tačke u skupu R, odnosno ε-okolina tačke, pogodno je uvesti i pojam okoline za $-\infty$ i $+\infty$ u R^*. Ako je x proizvoljan realan broj, onda se interval $(x, +\infty]$ naziva x-okolina simbola $+\infty$ u R^*, a interval $[-\infty, x)$ x-okolina simbola $-\infty$ u R^*.

Apsolutnu vrednost realnog broja treba iskoristiti za što bolje povezivanje algebarskog i geometrijskog smisla nejednakosti $|x - a| < r$[38], što će omogućiti uspešnije izučavanje glavnih tema matematičke analize. U tom cilju potrebno je dobro osmisliti izbor zadataka. Kao primer, navodimo nekoliko zadataka čija rešenja treba i geometrijski interpretirati (gde to ima smisla).

1) Neka je $x \in R$ i $|x| = \begin{cases} x & \text{za } x \geq 0 \\ -x & \text{za } x < 0 \end{cases}$. Da li je skup rešenja nejednačine $|x| \leq 5$ sadrži sva rešenja nejednačine $-2 \leq x \leq 5$?

2) Približna vrednost broja 4/7 sa tačnošću od hiljaditih iznosi 0,572. Da li je tačna nejednakost $|\frac{4}{7} - 0{,}572| < 0{,}001$?

Metodički je opravdano i za dalju obradu gradiva vrlo korisno naglasiti vezu izmedju apsolutne vrednosti i intervala realnih brojeva, odnosno da važe sledeće ekvivalencije:

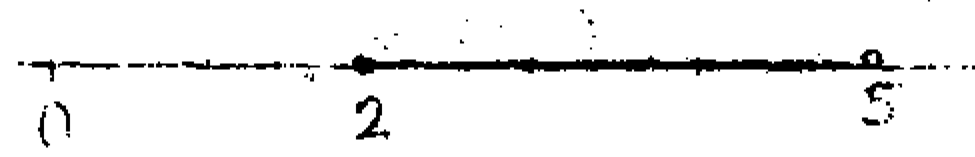
$$|x| < 2 \iff x \in]-2; 2[\quad \text{i} \quad |x| \leq 2 \iff x \in [-2; 2]$$

3) Kako glasi koordinata sredine intervala koji odgovara skupu rešenja nejednačine $|x + 2| < 0{,}4$?

---

38) Pri $r > 0$ imamo da $|x-a| < r$ znači da su to sve tačke $x \in R$ koje imaju rastojanje do a manje od r, pa je to interval $]a-r, a+r[$ sa centrom a dužine $2r$.

4) Promenljiva x uzima sve vrednosti iz intervala sa slike. Napisati tu promenljivu pomoću nejednakosti koja sadrži znak apsolutne vrednosti.



5) Poznato je da se tačna vrednost m nalazi u intervalu $[3{,}8;\ 4]$. Da li je pri tom uslovu tačno tvrdjenje: "Vrednosti m zadovoljavaju nejednačinu $|m - 3{,}9| \leq 0{,}1$"? Obrazložiti odgovor i geometrijski ga interpretirati.

6) Nacrtati na koordinatnoj osi sledeće numeričke intervale: a) $[\sqrt{2};\ 3]$, b) $]-\sqrt{2};\ 3]$, c) $[\sqrt{5};\ \sqrt{5}+3]$ d) $]-\sqrt{5};\ -\sqrt{5}-3]$.

7) Izračunati dužinu i koordinatu sredine sledećih otvorenih numeričkih intervala: a) $]-\pi;\ 2\pi[$, b) $]0;\ \sqrt{\pi}[$ c) $]\ \sqrt{3};\ \frac{3}{4}\pi\ [$.

Posebno treba ukazati na povezanost apsolutne vrednosti realnog broja, intervala i okoline. Na primer:

$$
\begin{aligned}
|x - 2| < 0{,}4 &\iff -0{,}4 < x - 2 < 0{,}4 \\
&\iff 1{,}6 < x < 2{,}4 \\
&\iff x \in\ ]\,1{,}6;\ 2{,}4\,[
\end{aligned}
$$

ili

$$
\begin{aligned}
x \in U(2;\ 0{,}4)^{39)} &\iff x \in\ ]\,2-0{,}4;\ 2+0{,}4\,[\\
&\iff x \in\ ]\,1{,}6;\ 2{,}4\,[\\
&\iff 1{,}6 < x < 2{,}4 \\
&\iff -0{,}4 < x - 2 < 0{,}4 \\
&\iff |x - 2| < 0{,}4
\end{aligned}
$$

8) Odrediti slike okolina: a) $]-1;\ 1[$, b) $U_{1/2}(1)$, c) $U_{1/5}(-1)$, d) $]1;\ 2[$ pri preslikavanju $x \to y = 3x-2$.

Neupućeni smatraju da se izradom ovakvim primera i zadataka gubi dragoceno vreme kojim se raspolaže za obradu programom predvidjenog gradiva. Medjutim, to samo prividno izgleda da je tačno. Ubrzo se pokaže da se vreme utrošeno na pripreme za obradu pojmova iz graničnih procesa ne samo nado-

---

39) Ako je $\varepsilon > 0$, onda se ε-okolinom tačke a naziva skup
$U(a;\varepsilon) = \{x \in R \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = \ ]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[\ = \{x \in R : |x-a| < \varepsilon\}$

knadi, već se postiže znatno kvalitetnija i sigurnija usvojenost gradiva, a posebno se sa znatno većim stepenom razumevanja prihvataju vrlo složeni pojmovi kao što su: pojam granice niza i granice funkcije, neprekidnost funkcije i dr.

U matematičkim usmerenjima može se kao jedna o primena granice niza dati zasnivanje realnih brojeva pomoću beskonačnih decimalnih razlomaka.

Po Weierstrassovoj teoriji *realnim brojem* naziva se svaki beskonačni decimalni razlomak sa znakom plus ili minus

$$\pm N,\ a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots,$$

gde je N nenegativan ceo broj(celi brojevi smatraju se poznatim), dok je a_n; $n = 1,2,3,\ldots$ jedna od cifara $0,1,2,\ldots,9$. Pri tome beskonačni decimalni razlomak sa periodom od devetki (9):

$$N,\ a_1a_2a_3\ldots a_n(9),\ a_n \neq 9$$

smatra se jednakim sa beskonačnim decimalnim razlomkom

$$N,\ a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}(a_n+1)000\ldots0\ldots$$

Taj razlomak se zapisuje takodje kao konačan decimalni razlomak $N,\ a_1a_2a_3\ldots(a_n+1)$, i kaže se da on ima n značajnih cifara posle zareza.

U cilju zasnivanja pojma realnog broja pomoću beskonačnih decimalnih razlomaka, učenicima najpre treba skrenuti pažnju na prethodno upoznatu činjenicu da svakom racionalnom broju odgovara jedna jedina tačka na pravoj, ali da obrnuto nije tačno, odnosno da na pravoj postoje i tačke koje nisu slika nijednog racionalnog broja. Na primer, ako se na koordinatnoj osi konstruiše kvadrat nad jediničnom duži i dijagonala tog kvadrata se prenese od početne tačke na koordinatnoj osi dobiće se tačke r koja nije racionalna (jer $\sqrt{2}$ nije racionalan broj). To omogućuje da se izvede zaključak da i pored gustine skupa racionalnih brojeva, postoje na koordinatnoj osi "praznine", odnosno tačke koje nisu pokrivene racionalnim brojevima. Postavlja se pitanje kako i tim "šupljinama" korespondirati neke nove brojeve i da li ti novi brojevi popunjavaju sve tačke koordinatne ose. Ta korespodencija se ne može ostvariti pomoću racionalnih brojeva, odnosno konačnih ili beskonačnih periodičnih decimalnih razlomaka, ali se može postići pomoću beskonačnih neperiodičnih decimalnih razlomaka. Drugim rečima, postavlja se pitanje izražavanja u obliku beskonačnog decimalnog razlomka koordinata onih tačaka na koordinatnoj osi, koje nisu slika nijednog racionalnog broja. U geometrijskoj interpretaciji na pravoj razlikujemo dve vrste tačaka: *racionalne* tačke - one koje su slika nekog racionalnog broja i *iracionalne* tačke - one koje nisu slika nijednog racionalnog broja. Takva je, na primer, tačka r, koja je odredjena dijagonalom kvadrata konstruisanog nad intervalom $[0; 1]$.

Neka je a tačka na pozitivnom delu koordinatne ose, što ne umanjuje opštost razmatranja, kojoj želimo da korespondiramo neki decimalni razlomak - koordinatu te tačke. U tom cilju na osi se uzmu tačke sa celim koordinatama i one dele poluosu $[0,\infty)$ na beskonačan skup intervala:

$$[0; 1], \quad [1; 2], \quad [2; 3], \quad \ldots, \quad [n; n+1], \ldots$$

U opštem slučaju tačka a pripada samo jednom od tih intervala. Ipak ako je ona identična sa nekom od deonih tačaka, onda a pripada kako intervalu čiji je to kraj, tako i intervalu čiji je to početak.

Neka tačka a pripada intervalu $[4; 5]$. Tada se podeli taj interval na deset jednakih delova tačkama 4,0: 4,1; 4,2;...; 4,9; 5,0. Tačka a pripada jednom od tih delova (ali ako je ona jedna od novih deonih tačaka, onda pripada i jednom i drugom delu, za koje je tačka a zajednički kraj). Neka tačka a pripada, na primer, intervalu $[4,6; 4,7]$. Sada se taj interval podeli na deset jednakih delova tačkama 4,60, 4,61;... 4,69; 4,70 i ponovo se odabere onaj od tih delova kojem pripada tačka a. Neka je to, na primer, interval $[4,63; 4,64]$. Opisani proces se produžava beskonačno, baš kao i geometrijski postupak kojim se pokazuje nesamerljivost stranice i dijagonale kvadrata. "Rezultat" tog procesa može se dati u obliku tzv. "beskonačnog decimalnog razlomka"[40], pri čemu je prvi

40) *Ne pretendujući na preciznije definisanje pojma "beskonačnog decimalnog razlomka", dalje će se upotrebljavati taj termin bez znakova navoda. Decimalni razlomak se zna ako je poznat postupak odredjivanja svake njegove decimale.*

korak predstavljao odredjivanje njegovog celog dela, drugi - odredjivanje prve cifre posle zareza, treći - druge cifre posle zareza itd., što je u navedenom primeru bilo 4,63... .

U opštem slučaju dobije se beskonačni decimalni razlomak oblika $N, a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$, gde je N ceo deo razlomka, a_1 cifra desetih, a_2 cifra stotih itd. Slična razmatranja mogu se sprovesti za bilo koju tačku pozitivnog dela koordinatne ose, a takodje i za bilo koju tačku njenog negativnog dela. Kao rezultat tog procesa dobija se korespodencija izmedju tačaka koordinatne ose i decimalnih razlomaka oblika

$$\pm N,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots,$$

gde znak plus odgovara tačkama desno od koordinatnog početka, a znak minus tačkama koje su levo.

Ovim postupkom po pravilu se dobija za svaku tačku jedinstven decimalni razlomak. Učenicima treba skrenuti pažnju na slučaj kada je tačka $\underline{a}$ deona, odnosno kada se dobijaju i decimalni razlomci koji se završavaju nulama ili devetkama.

Posle ovakvih razmatranja može se uvesti sledeća definicija:

Beskonačni decimalni razlomak $\pm N,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ *naziva se realnim brojem, ako se on ne završava nizom od samih devetki i nema oblik 0,000... .*

Napred navedenim postupkom svakoj tački koordinatne ose odgovara neki realan broj - njena koordinata, pri čemu različitim tačkama ose odgovaraju različiti realni brojevi. Medjutim, postavlja se i pitanje da li se za bilo koji realan broj

$$x = \pm N,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$$

može naći tačka $\underline{a}$ ose, čija je koordinata taj broj. Neka je $x > 0$, što ne umanjuje opštost. Na osi se posmatraju tada intervali oblika:

$$(1)\quad \left[N; N+1\right], \left[N+\frac{a_1}{10}; N+\frac{a_1+1}{10}\right], \left[N+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}; N+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{10^2}\right], \ldots$$

Jasno je da je svaki sledeći od tih intervala sadržan u prethodnom. Dužina n-tog intervala jednaka je $1/10^n$ i on *teži* *nuli kada se n uvećava neograničeno.* Intervali (1) obrazuju tzv. sistem umetnutih intervala[41)] i njihova konstrukcija ne predstavlja za učesnike poteškoću, ukoliko se prethodno daju dobro osmišljeni zadaci o intervalima. Može se dati i sledeća definicija:

Niz intervala $[a_n, a_n']$, $n = 0, 1, 2, \dots$, gde su a_n *i* a_n' *racionalni brojevi i* $a_n < a_n'$, *naziva se niz umetnutih intervala ako ima ove osobine:*

1. Svaki sledeć interval sadržan je u prethodnom, odnosno $\forall n \in N \quad a_n \le a_{n+1}$ *i* $a_n' \ge a_{n+1}'$.

2. Dužina intervala $[a_n, a_n']$ *teži nuli kada n teži beskonačnosti,* odnosno za svaki ma kako mali pozitivan racionalan broj ε postoji dovoljno veliki prirodan broj M tako da je $a_n' - a_n < \varepsilon$ za $n \ge M$.

Geometrijski je očigledno da postoji jedna i samo jedna tačka a koja pripada svim intervalima (1). Njena koordinata i jeste broj x. To što smo rekli da je "geometrijski očigledno" ustvari je jedna od formi kojom se iskazuje *neprekidnost prave,* odnosno *neprekidnost skupa realnih brojeva.* To je jedna od formulacija *aksiome neprekidnosti:*

Ako je dat sistem intervala:

$$[a_1; a_1'],\ [a_2; a_2'],\ [a_3; a_3'], \dots,\ [a_n; a_n'], \dots$$

na pravoj liniji, pri čemu je svaki sledeći sadržan u prethodnom i za bilo koji interval $[c; d]$ *postoji takvo* n, *da je interval* $[a_n; a_n']$ *manji od* $[c; d]$, *onda postoji jedna i samo jedna tačka* $\underline{a}$ *na pravoj, koja pripada svim intervalima* $[a_n, a_n']$.

Time se odstranjuju "šupljine" na pravoj i uspostavlja korespodencija izmedju tačaka koordinatne ose i njihovih koordinata (realnih brojeva) sa sledećim osobinama:

---

41) *Ako je* $[a_n, b_n]$ *sistem umetnutih intervala, koji po dužini teže ka nuli, a* ξ *tačka koja pripada svim intervalima datog sistema, onda je* $\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

1. svakoj tački ose odgovara jedan i samo jedan realan broj, pri čemu raznim tačkama odgovaraju različiti brojevi;

2. svaki realani broj je koordinata jedne tačke koordinatne ose. Dakle, korespodencija izmedju tačaka koordinatne ose i realnih brojeva je uzajamno jednoznačna.

Na taj način, zbog uspostavljene korespodencije, svakom realnom broju r odgovara neki beskonačni decimalni razlomak koji nema period sastavljen od samih devetki. Takvi decimalni razlomci nazivaju se *dopustivi*. Svakom beskonačnom dopustivom decimalnom razlomku $\pm N,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$, kao rezultat opisane korespodencije, odgovara neki realni broj r, i to upravo taj jedinstveni broj koji pripada svim intervalima

$$[N,a_1a_2\ldots a_n;\ N,a_1a_2\ldots(a_n+10^{-n})],\quad n = 1,2,\ldots$$

Kratko rečeno, izmedju skupa svih realnih brojeva i skupa dopustivih decimalnih razlomaka postoji uzajamno jednoznačna korespodencija; pri tome, ako u toj korespodenciji broju r odgovara razlomak $\pm N,a_1a_2\ldots a_n\ldots$, onda je

$$\lim_{n\to\infty} N,a_1a_2\ldots a_n = r.$$

Skup dopustivih beskonačnih decimalnih razlomaka sa definisanom relacijom poretka i računskim operacijama sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja, zadovoljava aksiome uredjenog polja realnih brojeva.

Ovaj način zasnivanja realnih brojeva prihvatljiv je za nastavnu praksu u usmerenjima sa znatnijim fondom časova. Nezavisno od toga za dalje izučavanje graničnih procesa najvažnije je da učenici dobro shvate pojam realnog broja, uzajamno jednoznačnu korespodenciju izmedju skupa realnih brojeva i tačaka koordinatne ose i strukturu polja realnih brojeva. Za izučavanje graničnih procesa takodje je važno naglasiti da skup R mora imati definisanu strukturu topološkog prostora. Pošto se u srednjoj školi radi sa otvorenim intervalima, to nije teško uvesti pojam topologije na realnoj pravoj. Prirodnu topologiju na skupu R čini familija svih otvorenih intervala realne prave, odnosno $U(a_i; b_i)$, pri čemu moraju biti ispunjene aksiome za otvorene skupove:

1. R, Θ su otvoreni skupovi.

2. Konačan broj preseka otvorenih skupova je otvoren skup, odnosno $\cap O_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ je otvoren.

3. Svaka unija otvorenih skupova je otvoren skup, odnosno $\cup O_i$, za sve i je otvoren skup.

4.2. Nizovi i granični procesi

U navedenim programima gradivo o nizovima malo se razlikuje jedno od drugog, mada ima programa koji ne predvidjaju obradu nizova, bilo zbog toga što je planom predvidjeno malo časova, bilo zato što je koncepcija programa takva (to je redji slučaj) da se nizovi tretiraju samo kao specijalan slučaj funkcije sa domenom N. Medjutim, tema o nizovima je najranije uneta u srednjoškolski program i u njenoj obradi je stečeno najviše iskustava, pa se može reći da će se dosledno sprovodjenje ideje o graničnim procesima i usvajanje centralnih tema osnova matematičke analize u srednjoj školi - granica funkcije, izvod, integral - daleko uspešnije realizovati ako se prethodno bude detaljno obradila tema o nizovima. Stožerni pojam u strikturi gradiva o NIZOVIMA svakako je *granica niza*. Pojmovi koji se vezuju za taj stožerni su: najpre, koji prethode pojmu granice - preslikavanje $N \to R$, monotonost niza, ograničenost niza, tačke nagomilavanja niza - i zatim, koji slede posle pojma granice - konvergentni i divergentni nizovi, teoreme o granici zbira, proizvoda i količnika numeričkih nizova, granice nekih posebnih nizova i neke primene granice niza. Najdetaljnija razrada sadržaja o nizovima nalazi se u programu matematičke struke u SAP Vojvodini, pri čemu treba naglasiti da je to gradivo i najobilnije.

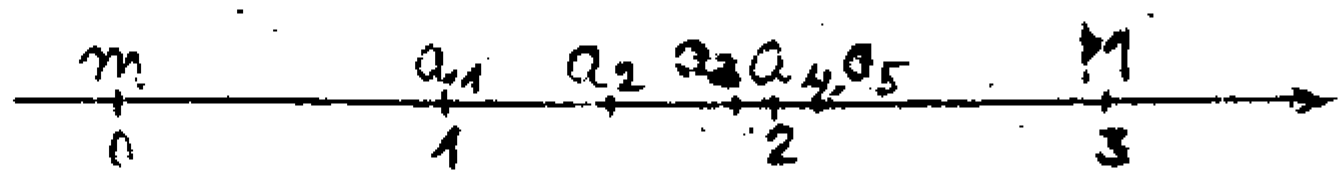
4.2.1. Obrada nizova u nastavnoj praksi započinje najčešće navodjenjem nekoliko primera numeričkih nizova i davanjem definicije niza, koja je sada više u skladu sa razvojem matematike kao nauke, nego što je to ranije bilo. Naime, umesto opisne definicije niza kao prebrojivog uredjenog skupa sada se daje definicija niza kao preslikavanja skupa N u skup R. Ta definicija glasi: svako preslikavanje $x : N \to R$ skupa prirodnih brojeva u skup R zove se NIZ na skupu R. O vrednosti $x(n)$ govori se kao o n-tom ČLANU NIZA. Član niza se najčešće označava sa x_n, a sam niz sa (x_n).

Medjutim, ovakav pristup nije dovoljan da se shvate suštinska pitanja o pojmu niza. Zato je potrebno posebno izdiferencirati neke pojmove bitne za obradu i razumevanje gradiva o nizovima. Najpre treba, pored domena N i kodomena R, razlikovati skup članova niza od skupa vrednosti niza. Na primer, za niz $x_n = (-1)^n$, odnosno $x: n \to (-1)^n$, domen je skup N, kodomen skup $\{-1, 1\}$, a skup članova niza je $\{-1,1,-1,1,\ldots\}$, pri čemu je $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1,\ldots$ Isto tako posebno treba istaći slučajeve kada je kodomen jednočlan skup, zatim konačan skup i najzad prebrojiv skup. Na primer, za niz $x: n \to 2$, kodomen je skup $\{2\}$, za niz $x: n \to (-1)^n$ kodomen je skup $\{-1,1\}$ i za niz $x: n \to n^2$ kodomen je skup $\{1,4,9,16,\ldots\}$.

4.2.2. Redosled obrade pojmova monotonog i ograničenog niza dvojako se tretira u nastavnim programima i u metodičkoj literaturi. Negde se ovi pojmovi daju pre pojma granice niza, a negde posle. Ako se ovi pojmovi daju posle definicije granice niza, oni se uglavnom pojavljuju u Weierstrassovoj teoremi: "Svaki monoton i ograničen niz ima granicu" i drugu funkciju nemaju. Medjutim, njihovom obradom pre pojma granice niza i izborom pogodnih zadataka znatno će se doprineti da se shvate granični procesi, granični prelaz i sam pojam granice niza. Jedan od glavnih razloga da se pojam monotonog i ograničenog niza obradi pre pojma granice leži u tome što su pojmovi ograničenosti i monotonosti prostiji po svojoj logičkoj strukturi, nego pojam granice. U svakom od tih pojmova pojavljuje se samo po jedan kvantifikator, dok ih kod pojma granice ima tri.

Oko stožernog pojma *monotonog niza* treba vezati ostale pojmove, kao što su: rastući niz, opadajući niz, niz koji niti raste niti opada, nerastući niz, neopdajući niz. Ako su učenici prethodno stekli navike i umenja da geometrijsl[illegible] postavljaju numeričke nizove, onda neće biti teško će- da n[illegible] t[illegible] način utvrdjivanja ponašanja sledećih nizova: $x_n = n^2/2 - 6n$ (rastući), $y_n = 1/n^2$ (opadajući) i $z_n = (-1)^n.n$ (nije ni rastući ni opadajući). U nastavnoj praksi se pokazalo da se poteškoće javljuju kada treba usvojiti pojmove nerastućeg i neopadajućeg niza. Teško se uočava razlika izmedju izraza "niz nije opadajući" i "niz je neopadajući". Zato je najbolje poslužiti se odgovarajućim primerima, posmatrajući ih paralelno, kao što je $z_n = (-1)^n.n$ (niz nije padajući) i $\{1,1,4,4,9,9,\ldots\}$(niz je neopadajući, što znači da za neke vrednosti n niz raste, a za neke ne raste, ali nikad ne opada). U samoj definiciji rastućeg (opadajućeg) niza važno je učenicima ukazati na reči "za bilo koje n" na primer, važi nejednakost $x_{n+1} > x_n$. Smisao tog dela definicije najbolje će učenici razumeti ako im se daju zadaci u kojima treba dokazati da je niz rastući (opadajući) i da niz nije rastući (opadajući). U prvom slučaju navedena nejednakost treba da važi sa svako n što se proverava, odnosno dokazuje, a ostvaruje se: ili na osnovu očiglednosti nejednakosti ($x_n = \frac{n-1}{n}$; $x_{n+1} = \frac{n}{n+1} > \frac{n-1}{n} = x_n$), ili se na osnovu osobine nejednakosti odredjuje znak razlike $x_{n+1} - x_n$ (treba da bude pozitivna ili negativna, što zavisi od toga da li niz raste ili opada), ili u slučaju pozitivnih članova razmatra se odnos x_{n+1}/x_n (treba da bude veći od 1 ili manji od 1, što zavisi od toga da li niz raste ili opada). U drugom pak slučaju, da se dokaže da niz nije rastući dovoljno je utvrditi samo da postoji jedno n takvo da ne važi nejednakost $x_{n+1} > x_n$(na primer, $x_n = n^2 - 12n$, $x_2 = -20 \not> x_1 = -11$).

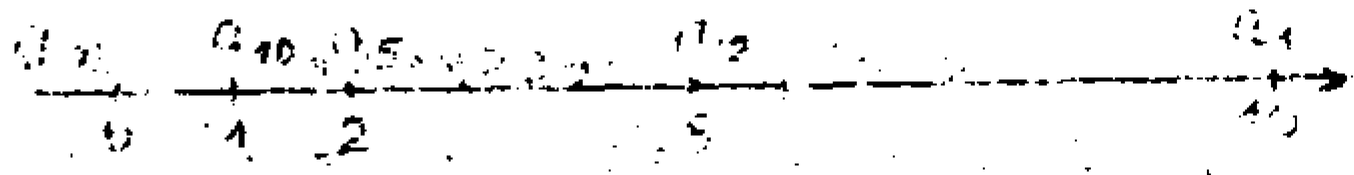
I kod pojma *ograničenog niza* potrebno je skrenuti pažnju na reči "postoji" i "svi članovi niza", odnosno "za sve n". (Definicija ograničenog niza: niz (x_n) se naziva *ograničenim* ako *postoje* dva broja m i M takvi da *za sve n* važi nejednakost $m \leq x_n \leq M$). Neshvatanje reči "postoji" najčešće se ispoljava kod učenika u nastojanju da se nadje najmanji interval, čiji su krajevi m i M, takav da on sadrži sve članove niza. Tu treba ukazati na činjenicu da granice intervala nisu jednoznačno odredjene, čemu treba da doprinese geometrijska interpretacija pojedinih primera, kao što



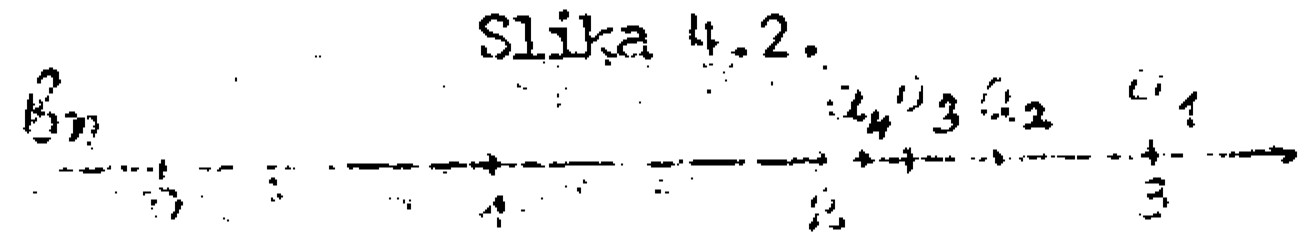
Slika 4.1.

je $x_n = \frac{3n}{n+2}$ (sl.4.1.), gde je $0 < x_n < 3$, ali za m i M se mogu uzeti i bilo koji drugi brojevi, levo od m i desno od M.

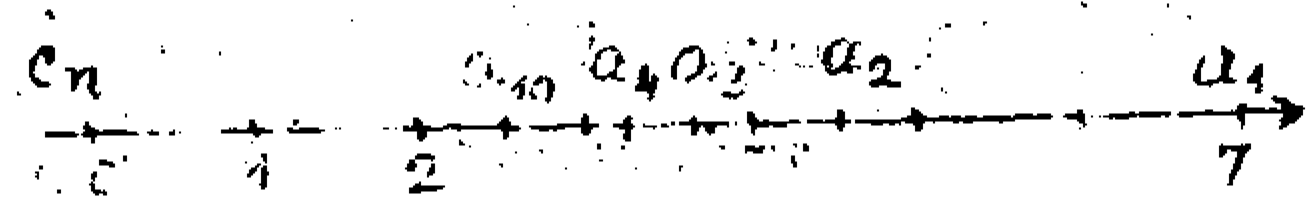
4.2.3. Definicija granice niza nije dovoljno shvatljiva za većinu učenika, zbog njene složene logičke strukture. To se pre svega odnosi na prisutnost kvantifikatora: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, ako za *bilo koje* $\varepsilon > 0$ *postoji* n_o takvo, da za *bilo koje* $n > n_o$ važi nejednakost $|a_n - a| < \varepsilon$. Simbolima zapisana ta definicija bila bi: $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_o \in N)(\forall n \in N)(n \geq n_o \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$. Teškoće u shvatanju ove definicije mogu se znatno umanjiti, ako se kroz prethodnu obradu skupa realnih brojeva, osnovnih pojmova o funkciji, monotonosti i ograničenosti niza, izvrši odgovarajuća priprema. Pristup treba da bude na intuitivnoj osnovi, odnosno da se u početku izlaganje oslanja na geometrijsko predstavljanje, na primer, nizova $a_n = \frac{10}{n}$, $b_n = \frac{2n+1}{n}$, $c_n = \frac{2n+5}{n}$, $d_n = \frac{1}{2n-1}$. Uz ovakvu geometrijsku interpretaciju datih nizova (sl. 4.2., 4.3, 4.4 i 4.5) pri čemu se zajedno sa učenicima uočava da se članovi svakog od nizova približavaju jednom broju, učenici će intuitivno shvatiti pojam granice niza.



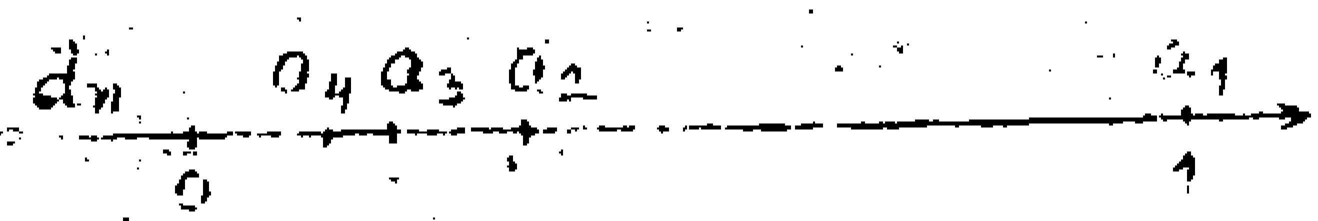
Slika 4.2.



Slika 4.3.



Slika 4.4.



Slika 4.5.

Posle toga se može iskazati definicija te granice na "geometrijskom jeziku": broj a se naziva granica niza (a_n) ako se u bilo kojoj okolini tačke a nalaze svi ostali članovi tog niza počev od nekog odredjenog člana. Pri tome je svrsishodno i pogodno da se na osnovu ε-okoline neke tačke odredi $n_o(\varepsilon)$. Na primer, $a_n = \frac{n-1}{3n}$ i pitanje: za koje je $n_o(\varepsilon)$ će razlika $a_n - \frac{1}{3}$ biti manja od $\varepsilon = 0{,}001$? Pošto je

$$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{3n} - \frac{1}{3}\right| = \left|-\frac{1}{3n}\right| = \frac{1}{3n}$$

to se pitanje svodi na rešavanje nejednačine:

$$\frac{1}{3n} < 0{,}001$$

u skupu N. Ta nejednačina je ekvivalentna sa

$$3n > 1000 \quad \text{ili} \quad n > 333\,\frac{1}{3}.$$

Znači, nejednakost $\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < 0{,}001$ važi za bilo koje $n \geq n_o$, gde je $n_o = 334$. Medjutim, pogrešno je nastojanje da se nadje najmanji broj n_o, s kojim počinje da važi gornja nejednakost, jer to nije suština problema, pa je prema tome takav posao nepotreban i vreme se uzaludno gubi. Bitno je pronaći bilo koji broj n_o, s kojim počinje da važi nejednakost $|a_n - a| < \varepsilon$. Mnogo je važnije za shvatanje granice niza, a kasnije i granice funkcije i njene neprekidnosti, da se dobro razumeju i usvoje sledeće ekvivalentnosti: "$|x-3| < \varepsilon$", "$3-\varepsilon<x<3+\varepsilon$", "broj x pripada ε-okolini tačke 3", "broj x je udaljen od tačke 3 manje od ε", "x je približno jednako 3 s tačnošću od ε".

Razumevanju graničnog procesa i granice niza znatno doprinosi i razmatranje tačaka nagomilavanja niza (misli se na skup članova niza). Polazeći od definicije da je tačka $a \in R$ *tačka nagomilavanja* niza (a_n) ako u svakoj njenoj okolini ima beskonačno mnogo članova tog niza, treba navesti nizove bez tačaka nagomilavanja (na pr. $a_n = n^2$), sa jednom tačkom nagomilavanja (na pr. $b_n = \frac{10}{n}$), sa konačnim brojem tačaka nagomilavanja (na pr. $c_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n}$) i sa beskonačnim brojem tačaka nagomilavanja (na pr. $d_n = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \ldots\}$ ili za skup Q racionalnih brojeva tačka nagomilavanja je svaka tačka iz R, jer u bilo kom intervalu realnih brojeva postoje racionalni brojevi). Iz ovih primera se vidi da niz može imati više od jedne tačke nagomilavanja, pa je zato potrebno medju tim tačkama napraviti odredjenu preglednost. To se postiže uvodjenjem pojmova *limes superior* datog niza (a_n) i *limes inferior* niza (a_n), odnosno *gornje i donje tačke nagomilavanja* (najveće i najmanje tačke nagomilavanja datog niza). Tako napred navedeni niz c_n ima za $\lim\sup c_n = 2$, a za $\lim\inf c_n=0$, dok niz d_n ima za $\lim\sup d_n = 1$, a za $\lim\inf d_n = 0$, iako ovaj niz ima beskonačno mnogo tačaka nagomilavanja od kojih su samo ove dve karakteristične. Vrlo je važno skrenuti pažnju da tačka nagomilavanja može, a ne mora pripadati nizu. Ovde treba navesti i *teoremu Bolzano-Weierstrassa* da svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja. Svaki beskonačan ograničen numerički skup ima bar jednu tačku nagomilavanja. Iako se u programima srednje škole ne predviđa dokaz ove teoreme, već samo njen sadržaj, smatramo da se učenicima matematičkog usmerenja može dati bar ideja dokaza, koja se svodi na konstrukciju sistema umetnutih intervala i primenu stava o nizu umetnutih zatvorenih intervala u R.

Posle ovakvih priprema znatno će se lakše razumeti i usvojiti i formalna definicija granice niza: realan broj a je granična vrednost[42] (ili limes) niza (a_n), što se piše $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ili $a_n \to a,\ n \to \infty$, ako za svaku ε-okolinu broja a postoji prirodan broj n_o (koji u opštem slučaju zavisi od odabrane okoline), tako da za sve $n \geq n_o$ važi da a_n pripada ε-okolini. Zapisana simbolima ova definicija bi bila:

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = a) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall V \in N(a))\ (\exists n_o \in N)(\forall n \geq n_o)\ (a_n \in V),$$

gde je V okolina tačke a, dok je N(a) familija okolina tačke a. Ta definicija se kratko iskazuje sledećim rečima: niz (a_n) *konvergira* broju a, ako su u svakoj otvorenoj ε-okolini broja a gotovo svi članovi tog niza, odnosno izvan ih ima samo konačan broj.

Potrebno je ukazati na značenje uvedenih termina, kao na primer, ako niz (a_n) ima graničnu vrednost a, odnosno ako $a_n \to a,\ n \to \infty$ (kaže se i a_n konvergira ka a, kad $n \to \infty$), onda je niz a_n *konvergentan*. Ako niz (a_n) ne konvergira ni jednom realnom broju, onda se kaže da je on *divergentan*. Treba napomenuti da se termin "konvergira ka" koristi i u proširenom sistemu realnih brojeva R*, odnosno u slučaju da niz teži $+\infty$ ili $-\infty$ i piše se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Po definiciji niza to bi se simbolima zapisalo na sledeći način:

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall A \in R)\ (\exists n_o \in N)\ (\forall n \geq n_o)(a_n \gtrless A)$$

što znači da se za slučaj $a_n \to +\infty,\ n \to \infty$ gotovo svi članovi ni-

---

42) Umesto granična vrednost, često će se koristiti i kratak sinonim-granica.

za (a_n) nalaze u okolini $(A, +\infty]$ i analogno za slučaj $a_n \to -\infty$, $n \to \infty$ gotovi svi članovi niza (a_n) nalaze se u okolini $[-\infty, A)$.

Bez obzira što se u programima ne navodi eksplicitno teorema o jedinstvenosti granice niza, smatramo da nju treba obavezno obraditi sa učenicima, pošto dokaz nije težak.

Teorema 1. Ako niz konvergira, onda on ima samo jednu granicu.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da granica nije jedinstvena, već da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a'$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a''$. Ako je $a' \neq a''$, onda uočimo disjunktne okoline $V(a')$ i $V(a'')$ tačaka a' i a''. Kao takve mogu se uzeti, na primer, ε-okoline tih tačaka za $\varepsilon = \frac{1}{2}|a' - a''|$. Po definiciji granice odredimo brojeve n_1 i n_2 tako da za

$$\forall n > n_1 \, (a_n \in V(a')) \quad \text{i} \quad \forall n > n_2 \, (a_n \in V(a'')).$$

Sve ovo je do sada poznato učenicima i trenutak je da im se ukaže na ključno mesto u dokazu teoreme. Naime, ako se za n uzme veći od brojeva n_1, n_2, tada za

$n > \max\{n_1 n_2\}$ imamo da je $a_n \in V(a') \cap V(a'')$. Ali to je nemoguće, jer je $V(a') \cap V(a'') = \emptyset$. Znači, pretpostavka da je $a' \neq a''$ je netačna, pa je tačno tvrdjenje teoreme da je granica niza, ako postoji, jedinstvena. ■

Drugo važno pitanje u vezi sa granicom niza odnosi se na njenu egzistenciju. Za srednju školu dovoljan je Cauchy-jev kriterijum konvergencije niza u formulaciji: Numerički niz konvergira tada i samo tada ako je on fundamentalan. Taj kriterijum treba uzeti bez dokaza, ali prethodno treba reći da se niz (a_n) naziva *fundamentalnim* ili *nizom Cauchyja*,[43)]

---

43) Nizove Cauchyja uveo je Balzano, koji je pokušavao, ne raspolažući tačnim pojmom realnog broja, da dokaže konvergenciju fundamentalnog niza.. Cauchy je dao takav dokaz, uzimajući kao očigledan princip umetnutih intervala, koje je kasnije zasnovao Cantor.

ako se za ma koji broj $\varepsilon > 0$ može naći takav broj $n_o \in N$, da iz $n > n_o$ i $m > n_o$ sledi da je $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Važno je napomenuti učenicima da Cauchyjev kriterijum samo utvrdjuje postojanje ili nepostojanje granice niza, ali ne daje postupak kako se izračunava granična vrednost. Za efektivno odredjivanje granične vrednosti niza koriste se u prvom redu teoreme o granicama zbira, proizvoda i količnika i nekoliko osnovnih graničnih vrednosti.

4.2.4. Za bolje shvatanje pojma granice niza korisno je utvrditi uticaj konačnog ili beskonačnog broja članova niza za granicu niza. Najpre treba istaći da konačan broj članova niza ne utiče na konvergenciju, odnosno na granicu niza. Na primer, za $a_n = \frac{1}{n}$ može se izostaviti prvih k članova ($k < n$) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, a da se granica tog niza ne promeni, kada $n \to \infty$. Znači da niz koji je bio konvergentan, ostaje i dalje konvergentan. Medjutim, u nizu $a_n = (-1)^n$, koji nije konvergentan, može se izostaviti beskonačan broj članova, na primer, $-1, -1, -1, \ldots$ (članovi sa neparnim indeksom) i pri tom će se dobiti konvergentan niz $1, 1, 1, \ldots$. Znači, u ovom slučaju beskonačan broj članova niza utiče na njegovu graničnu vrednost, odnosno divergentan niz postaje konvergentan. Ova razmatranja omogućuje da se uvede pojam *podniza*, polazeći od konkretnih primera. Posmatrajmo nizove:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots; \quad a_n = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots; \quad b_n = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \ldots; \quad c_{2k-1} = \frac{1}{k+1}, \quad c_{2k} = \frac{k+1}{k+2}$$

Uočava se da su prvi i drugi niz ustvari podnizovi trećeg niza. Isto tako niz neparnih prirodnih brojeva $\{1,3,5,\ldots\}$ je podniz niza svih prirodnih brojeva $\{1,2,3,4,5,\ldots\}$. Učenicima se može dati sada i precizna definicija podniza. Za niz $y: N \to R$ u skupu R kažemo da je *podniz niza* $x: N \to R$, ako postoji *strogo rastući niz* $k: N \to N$, takav da je $y = x \circ k$, odnosno da je $y(n) = x(k(n))$, $\forall n \in N$. Prema tome podniz niza $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ima oblik $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ pri čemu je $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$

Odnos granice niza prema skupu slika niza treba posmatrati u smislu da li granica pripada tom skupu ili ne pripada. Ovo se najbolje može realizovati pomoću odgovarajućih primera kao što su: 1) $a_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pa imamo $0 \notin \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$; 2) $b_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, pa imamo $0 \in \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Primer pod 2) je pogodan da se ponovo ukaže na razliku izmedju skupa članova niza $\{0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \ldots\}$ i skupa vrednosti niza $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Posebno je važno skrenuti pažnju na odnos tačaka nagomilavanja niza i granice niza. Ukoliko niz ima više tačaka nagomilavanja, onda je on divergentan, odnosno nema granicu. Ako pak niz ima samo jednu tačku nagomilavanja i ograničen je, onda je on konvergentan. Prema definiciji tačke nagomilavanje sledi da je granična vrednost uvek i tačka nagomilavanja, ali obrnuto ne važi. Medjutim, ako se posmatraju podnizovi datog niza sa više tačaka nagomilavanja, onda se može reći da je svaka tačka nagomilavanja granična vrednost pogodno odabranog podniza datog niza. Tako je, na primer, za niz $a_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n}$, tačke nagomilavanja su 0 i 2, pa prema tome taj niz nije konvergentan, odnosno nema granicu. Medjutim, tačka nagomilavanja 0 tog niza je granična vrednost njegovog podniza $b^n = \frac{1}{2n+1}$, a tačka nagomilavanja 2 je granična vrednost podniza $c_n = \frac{4n+1}{2n}$.

Iz konvergencije niza sledi njegova ograničenost, što se utvrdjuje sledećom teoremom.

Teorema 2. Konvergentan niz je ograničen.

Dokaz. Neka je dat konvergentan niz (a_n) i neka je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Uzmimo, na primer, $\varepsilon = 1$. Na osnovu definicije granice niza, postoji takvo n_o da za sve $n > n_o$ važi nejednakost

$$|a_n - a| < 1.$$

Ovo je lako shvatljivo i prihvatljivo za učenike. Medjutim, u daljem toku dokaza treba posebno skoncentrisati pažnju učenika na ključno mesto u teoremi.

Neka je d najveći od brojeva $\{1, |a_1-a|, |a_2-a|, \ldots, |a_{n-1} - a|\}$. Tada za sve $n=1,2,\ldots$ važi nejednakost

$|a_n - a| \leq d$, odnosno za sve n važi

$$a - d \leq a_n \leq a + d.$$

To znači da je niz (a_n) ograničen.

Primer da obrnuto ne važi, odnosno da iz ograničenosti ne mora slediti konvergencija, jeste niz $a_n = (-1)^n$. Taj niz je ograničen, jer je $|a_n| = 1$, ali on nije konvergentan, izmedju ostalog i zbog toga što ima dve tačke nagomilavanja -1 i 1.

Ako je neki niz monoton i ograničen, onda je on konvergentan. Dokaz ovog tvrdjenja zasniva se na teoremi Bolzano-Weierstrassa (*Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja*) i ova teorema treba da bude obavezno zastupljena u programu matematike srednje škole. Inače ova teorema se često koristi pri dokazu konvergencije pojedinih nizova. Čak se ponegde uzima i kao kriterijum za konvergenciju niza.

Teorema 3. Monoton i ograničen niz je konvergentan.

Dokaz. Prepostavimo da je niz (a_n) ograničen ($|a_n| < M$ za svako n) i monotono rastući $a_n < a_{n+1}$, za svako n. Dokažimo da je tada

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Pošto je $|a_n| < M$ to je za svako n, $a_n \in]-M, M[$. Na osnovu Bolzano - Weierstrassove teoreme niz (a_n) ima bar jednu tačku nagomilavanja. Treba pokazati da postoji samo jedna tačka nagomilavanja, koja je i njegova granica.

Pretpostavimo da niz (a_n) ima dve tačke nagomilavanja a i b, $a \neq b$ pri čemu $a, b \in]-M, M[$ i neka je $a < b$. Kako su a i b tačke nagomilavanja niza (a_n) onda postoje prirodni brojevi n_0 i n_1 takvi da za $n_1 < n_0$ $a_{n_0} \in V(a)$, $a_{n_1} \in V(b)$ i važi $a_{n_1} \geq a_{n_0}$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je niz (a_n) monotono rastući. Analogno se pokazuje da ne može biti $a > b$. Prema tome je $a = b$.

Time smo pokazali da niz (a_n) ima samo jednu tačku nagomilavanja, odnosno da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Za nastavnu praksu vrlo je važno da se jasno i precizno iskažu odnosi izmedju ograničenosti, monotonosti i konvergencije niza. Po našem mišljenju dobro bi bilo da se kao rezime učenicima dâ i potom analizrai sledeća tablica:

NIZ	ISKAZI	ISKAZI
O-ograničen	$O \not\Longrightarrow M$; $O \not\Longrightarrow K$	$\underline{OM \Longrightarrow K}$; $OK \not\Longrightarrow M$
M - monoton	$M \not\Longrightarrow O$; $M \not\Longrightarrow K$	$\underline{MO \Longrightarrow K}$; $\underline{MK \Longrightarrow O}$
K-konvergentan	$\underline{K \Longrightarrow O}$; $K \Longrightarrow M$	$KO \not\Longrightarrow M$; $\underline{KM \Longrightarrow O}$

Tu tablicu treba ilustrovati pogodno odabranim primerima.

4.2.5. Ako su (a_n) i (b_n) dva numerička niza, onda se njihovim *zbirom, proizvodom* i *količnikom* (u saglasnosti sa opštom definicijom zbira, proizvoda i količnika funkcija) nazivaju respektivno nizovi:

$$(a_n + b_n), \quad (a_n b_n), \quad \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ uz uslov da je } b_n \neq 0.$$

U nastavi je bitno da se ispita kako se ponašaju zbir i proizvod dva niza, kada $n \to \infty$. Na primer, za nizove $a_n = \frac{1}{n}$ i $b_n = 2 + \frac{1}{n}$, koji su konvergentni, imamo da je njihov zbir niz $(a_n + b_n) = 1 + \frac{2}{n}$ takodje konvergentan. Medjutim, za nizove $a_n = 2 + 1/n$ i $b_n = n$, gde je prvi konvergentan, a drugi divergentan, imamo da je njihov zbir niz $(a_n + b_n) = 2 + n + \frac{1}{n}$ divergentan. Još je interesantnije posmatrati zbir dva divergentna niza. Na primer, $a_n = (-1)^n$ i $b_n = (-1)^{n+1}$ su divergentni nizovi, dok je njihov zbir niz $(a_n + b_n) = (-1)^n(1-1) = 0$ konvergentan.

Posle ovakvih primera, treba ispitati odnos *graničnog prelaza* i *aritmetičkih operacija* izmedju konvergentnih nizova. U nastavnoj praksi najčešće je slučaj da se u obradi nizova dokazuje samo ova teorema koja glasi:

Teorema 4. - Neka su (a_n) i (b_n) numerički nizovi. Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, onda je

a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a+b$; b) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$; c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$,

ako je $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$.

Svrha sadržaja ove teoreme nije u samom dokazu (v. |172|, s. 93), već u njenoj primeni prilikom izračunavanja graničnih vrednosti onih nizova koji se javljaju u takvom obliku da se mogu tretirati kao algebarska kombinacija nizova čije su granične vrednosti poznate. Ipak ćemo skrenuti pažnju na neka mesta u dokazu ove teoreme. Okosnicu toka dedukcije u delu teoreme pod a) predstavlja: korišćenje definicije granice niza, zatim izbor $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ i primena osobine apsolutne vrednosti zbira $|a+b| \leq |a| + |b|$. Slična struktura dedukcije može se utvrditi i za dokaz delova teoreme pod b) i c). Ovako struktuiran dokaz neće predstavljati nikakve poteškoće za učenike da ga razumeju i usvoje.

4.2.6. Koristeći teoremu koja tvrdi da je monoton i ograničen niz konvergentan, zatim Bernoullievu nejednakost $(1 + h)^n > 1 + nh$ $(h > -1, n \in N)$ i razvoj $(1 + \frac{1}{n})^n$ po binomnoj formuli, dokazuje se da je

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2,718281828459...$$

Time se definiše prirodan broj e, vrlo značajan za izučavanje osnova matematičke analize. Za efektivno izračunavanje vrednosti broja e, koristi se red za taj broj. Medjutim, o redovima se u srednjoj školi saznaje vrlo malo i najčešće se to svodi samo na beskonačan geometrijski red.

Na osnovu nekih programa koje smo razmatrali u prethodnoj glavi, može se kao prihvatljivo za srednju školu izdvojiti sledeće gradivo o redovima: pojam beskonačnog reda, uslov konvergencije, konvergentan i divergentan red, beskonačan geometrijski red, red sa pozitivnim članovima. Ovi sadržaji pogoduju daljem proučavanju graničnih procesa, a imaju i odredjenu teorijsku i praktičnu primenu.

Najčešće greška u nastavnoj praksi javlja se kod uvodjenja pojma beskonačnog reda, jer se objašnjenja zaustavljaju na sabiranju članova beskonačnog niza i ne ističe se niz parcijalnih suma. Učenik ostaje u uverenju da se može izračunati zbir od beskonačnog broja sabiraka i teže je posle takvu pogrešku otkloniti, nego što je problem pravilno uvodjenje pojma reda na samom početku. Zato smatramo da treba uvodjenju pojma reda pristupiti na sledeći način.

Neka je dat niz realnih brojeva (a_n), odnosno $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ Formirajmo novi niz brojeva (s_n) kako sledi:

$$\begin{array}{ll}
s_1 = a_1 & a_1 = s_1 \\
s_2 = a_1 + a_2 & a_2 = s_2 - s_1 \\
s_3 = a_1 + a_2 + a_3 & a_3 = s_3 - s_2 \\
\vdots & \vdots \\
s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k & a_n = s_n - s_{n-1} \\
\text{(n-ta parcijalna suma)} & \\
\vdots &
\end{array}$$

Niz parcijalnih suma $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ naziva se *Numeričkim redom*[44] (preciznije: numeričkim redom sa opštim članom a_n) i označava se sa

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad (1) \quad \text{ili} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2)$$

Elementi početnog niza (a_n) nazivaju se elementima reda (1), a elementi niza (s_n) *parcijalnim sumama* tog reda. Pri tome se a_n naziva n-tim članom reda, a konačna suma s_n n-tom parcijalnom sumom reda (1).

Ako niz parcijalnih suma reda (1) konvergira, onda se red naziva *konvergentnim redom*, a ako niz parcijalnih suma divergira, tada se red naziva *divergentnim redom*[45]. Pri tome se granica $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ niza parcijalnih suma, ako postoji, naziva *sumom (zbirom) reda*. U tom smislu treba shvatiti zapis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Kako je konvergencija reda ekvivalenta konvergenciji niza njegovih parcijalnih suma (s_n), onda, primenjujući za (s_n) Cauchyjev kriterijum, istovremeno dobijamo sledeće tvrdjenje:

---

44) *Često se kaže i beskonačan red da bi se istakla njegova razlika od zbira konačnog broja sabiraka.*

45) *Red, čiji su članovi oni članovi reda (1) koji počinju indeksom n+1 uzeti u tom istom poretku kao i u početnom redu, naziva se n-tim ostatkom reda (1) i označava se sa* $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ ili $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$

Red $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ konvergira tada i samo tada, kada se za ma koje $\varepsilon > 0$ može naći takav broj $n_0 \in N$, da iz $n \geq n > n_0$ sledi $|a_n + \ldots + a_m| < \varepsilon$.[46)]

Iz tog tvrdjenja neposredno sledi da ako se u redu permutuje samo konačan broj članova, onda će novi red koji se pri tome dobije konvergirati ako konvergira polazni red, i divergirati, ako polazni red divergira. Isto tako sledi i ovo: da bi red $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ konvergirao, potrebno je, da njegovi članovi teže nuli kada $n\to+\infty$, odnosno, potrebno je da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Da je to tačno sledi iz: $a_n=s_n-s_{n-1}$ i zatim $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ pa imamo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n-s_{n-1}) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$

To znači da kod konvergentnog reda opšti član a_n teži nuli kada $n\to\infty$, ali obrnuto ne mora važiti. Na primer, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ima opšti član $a_n = \frac{1}{n}$, odakle sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ali je taj red divergentan.

Kao primer konvergentnog reda treba obraditi red

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots,\ |q| < 1$$

čiji se zbir često naziva suma beskonačne geometrijske progresije. Već smo spomenuli definiciju broja e kao graničnu vrednost niza $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Sada u slaglasnosti sa definicijom sume reda možemo pisati:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

što je vrlo pogodno za izračunavanje broja e na odredjeni broj decimala.

Za nastavnu praksu je važno da ~~se skrene~~ pažnja na one redove kod kojih mogu nastupiti dileme u pogledu njihove konvergencije ili divergencije. Na primer, posmatrajmo red:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$$

---

46) Ovo je Cauchyjev kriterijum konvergencije reda.

On divergira što se vidi po nizu njegovih parcijalnih suma 1,0,1,0,1,... i po tome što članovi tog reda ne teže nuli.

Ako stavimo zagrade i posmatramo novi red

$$(1-1) + (1-1) + \dots$$

čiji su članovi sume u zagradama, onda taj novi red konvergira, pri čemu je njegov zbir, očigledno, jednak nuli.

Ako zagrade stavimo drugačije i posmatramo red

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots,$$

onda se dobija konvergentan red sa zbirom jednakim 1.

Ako u polaznom redu premestimo sve članove jednake -1 na drugo sledeće mesto udesno, onda dobijamo red

$$1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

i stavljajući u taj red zagrade dobijamo novi red

$$(1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots,$$ čiji je zbir 2.

Ova razmatranja pokazuju, da se uobičajeni zakoni ponašanja sa konačnim sumama, uopšte govoreći, ne protežu i na redove (misli se na beskonačne redove). To znači da beskonačni procesi nisu sami po sebi jasni, već im se mora dati odgovarajuće tumačenje. Ovako kako smo postupili sa gornjim redom, može se postupati samo sa apsolutno konvergentnim redovima.[47)]

4.3. *Granica funkcije; neprekidnost*

Suština pojma beskonačnosti, graničnog prelaza i graničnih procesa uopšte najbolje se može sagledati, objasniti, produbiti i usvojiti u nastavi matematike srednje škole, kroz

---

47) *Red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *naziva se* *apsolutno konvergentnim*, *ako konvergira red* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. *Pošto je* $|a_n+\dots+a_m| \leq |a_n|+\dots+|a_m|$, *iz Cauchyjevog kriterijuma sledi, da ako red konvergira apsolutno, onda on konvergira i obično.*

obradu teme GRANICA FUNKCIJE. Dok je kod nizova posmatran granični proces samo u jednom posebnom slučaju $n \to \infty$ ($n \in N$), dotle se sada razmatraju znatno opštiji slučajevi težnje promenljive x, graničnog prelaza i granice u skupu realnih brojeva. Predspremu za uspešnije shvatanje i usvajanje gradiva teme GRANICA FUNKCIJE predstavlja poznavanje osnovnih pojmova o funkcijama, o skupu realnih brojeva i o nizovima. Pri tome se ima u vidu da će osnovna koncepcija obrade granice niza biti sada proširena i na obradu granice funkcije. To znači da će se često koristiti induktivno-intuitivni put usvajanja pojedinih pojmova i definicija, koristeći se pogodno odabranim primerima i geometrijskim ilustracijama. Osnovu za geometrijsko predstavljanje pojedinih matematičkih činjenica predstavlja uspostavljena uzajamno-jednoznačna korespondencija izmedju skupa realnih brojeva i tačaka prave. Za razliku od nizova gde je posmatran domen - skup N i kodomen - skup R, kod funkcije se posmatraju domen A, kodomen B (A i B su podskupovi od R ili sam skup R) i skup uredjenih parova $f = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\}$.

Tema GRANICA FUNKCIJE predstavlja centralni sadržaj iz graničnih procesa u srednjoškolskoj nastavi matematike. Njeno detaljno proučavanje i usvajanje od strane učenika omogućuje znatno uspešniju obradu ostalih tema iz osnova matematičke analize, posebno izvoda i integrala. U navedenim programima gradivo ove teme je različito po obimu, ali se mogu izdvojiti neki bitni zajednički sadržaji. Pored samog pojma granične vrednosti funkcije kao stožernog pojma oko kojeg se grupišu ostali pojmovi, navodimo ono gradivo koje je zajedničko za većinu programa. Sadržaji koji treba da prethode granici funkcije, odnose se na sistematizaciju i dopunjavanje gradiva o realnim brojevima (interval, apsolutna vrednost, okolina), o funkcijama (definisanost, znak, nule, monotonost, ograničenost) i o nizovima (granični proces i granica). Zatim dolazi postupno i sistematsko uvodjenje pojma granice funkcije, počinjući sa granicom samo jedne promenljive veličine u skupu R. Pri tome se posebno naglašavaju dva slučaja, kada $x \to \infty$ i kada $x \to a$. Posle definicije granice funkcije za oba navedena slučaja, sledi dokaz o jedinstvenosti granice, osnovne teoreme o graničnim vrednostima, odredjivanje graničnih vrednosti elementarnih i nekih specijalnih funkcija, neprekidnost funkcije u tački i na intervalu, osnovne osobine neprekidnih funkcija. Ovi sadržaji se realizuju sa različitim fondom časova u pojedinim strukama i sa različitom dubinom i širinom u interpretaciji pojedinih pojmova i teorema i njihovih primena. Tome treba dodati i najčešću orijentaciju da se umesto akcenta na suštini graničnih procesa, obrada gradiva svodi na odredjivanje graničnih vrednosti, odnosno uvežbavanje tehnike rešavanja zadataka. Ukazujemo i na različite pristupe i dileme u obradi teme GRANICA FUNKCIJE kao što su: 1) da li prvo graničnu vrednost funkcije, pa neprekidnost ili obratno; 2) da li graničnu vrednost funkcije obradjivati sa nizovima ili bez nizova; 3) kojoj od mogućih definicija granične vrednosti funkcije dati prednost; 4) da li treba dati prednost neprekidnim funkcijama ili Lipschitz - neprekidnim i sl. Neke pokušaje koji se nisu zadržali u praksi kao na primer, zasnivanje diferencijalnog i integralnog računa bez pojma granice (|125|, s. 64-81), zatim da li obradjivati prvo integralni pa diferencijalni račun i druge, nećemo razmatrati. S obzirom da je tema GRANICA FUNKCIJE bila i predmet eksperimentalne provere u nastavi pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja i vaspitanja, to će osnovna pitanja obrade gradiva iz ove teme biti dalje detaljnije razmatrana, pre svega sa aspekta stručno-metodičke interpretacije i strukture tog gradiva.

U toku reforme nastave matematike često je istican i zahtev da se gradivo tumači što rigoroznije. U tome se išlo ponekad i neodmereno, da je došlo u jednom proteklom periodu do potiskivanja metodičkih komponenti u nastavi matematike srednje škole[48]. S obzirom na složenost pojedinih pojmova iz teme GRANICA FUNKCIJE, naše je opredeljenje da se i ovde mora ići induktivno-intuitivnim putem, koristeći se odgovarajućim primerima i geometrijskom očiglednošću. Takvo opredeljenje proizilazi iz istorijskog razvoja graničnih procesa, na osnovu izvršene analize mesta i uloge graničnih procesa u nas-

---

48) Videti mišljenje Freudenthala (|164|, s. 16.)

tavnim planovima i programima i na osnovu sopstvenog iskustva, što je potvrdjeno rezultatima sprovedenog eksperimenta u obradi sadržaja teme GRANICA FUNKCIJE. Kako ističe Vollarth "analizu predavati očigledno znači dakle, ostvariti jaku povezanost sa geometrijom" (|164|, s. 17). Prema tome treba ići putem razvijanja shvatanja o odredjenom pojmu (primeri, kontraprimeri, geometrijsko predstavljanje i sl.), pa tek onda davati formalnu definiciju. Pri tome se učenik dovodi u situaciju da često sam povezuje činjenice i izvodi zaključke. Induktivno-intuitivni put nikako ne znači da će izostati argumentacija pri dokazu odredjenih teorema, razradjivanju pojedinih algoritama, rešavanju zadataka i primeni granične vrednosti. Dostignuti nivo rigoroznosti treba da se održi, a po mogućstvu i potrebi da se i poveća[49]. Ali isto tako to ne znači da svaku teoremu, koja se u toku izlaganja pojavi i koja se mora pomenuti zbog logičke povezanosti gradiva, treba i rigorozno dokazivati. To se ne čini ni u usko stručnim i naučnim publikacijama, pa prema tome ne treba ni u nastavi matematike, zbog preobimnosti programa ili zbog složenosti dokaza pojedinih teorema. Sadržaje takvih teorema treba korektno formulisati i koristiti ih bez dokaza. U mnogim stručno-metodičkim raspravama se ističe da su poteškoće u savladavanju gradiva o granici funkcije posledica složene logičke strukture njenih osnovnih pojmova, a pre svega same definicije granice. S obzirom da se i kod nas u nastavi matematike obradjuju i elementi matematičke logike, bilo je od interesa ispitati da li su se te teškoće sada smanjile, da li su se efekti u analizi poboljšali. Izmedju ostalog, naš eksperimenat je trebao delimično da odgovori i na ovo pitanje.

4.3.1. Pri obradi teme GRANICA FUNKCIJE treba poći od toga da većina učenika uspeva da savlada tehniku izračunavanja granične vrednosti kroz odredjene primere i zadatke, ali da

---

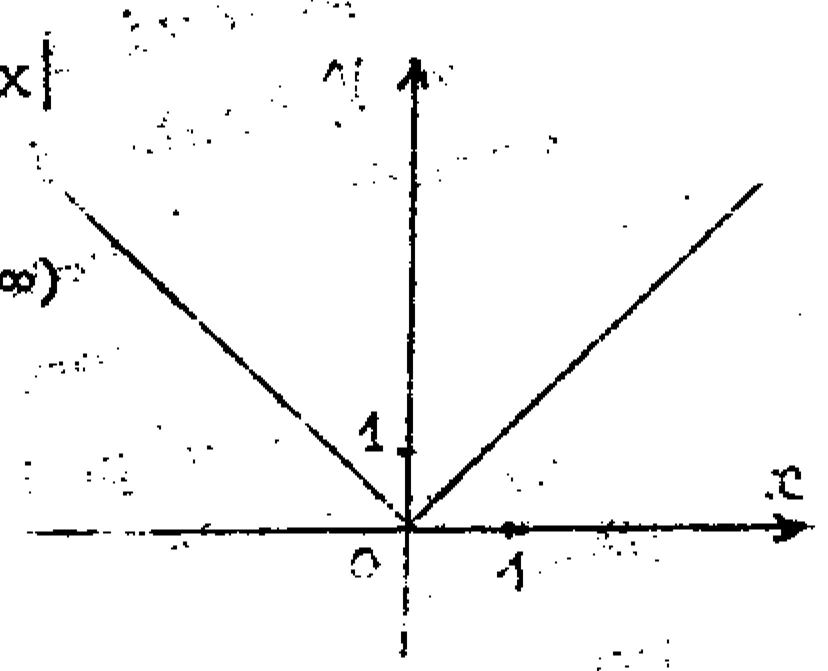
49) Krisch: "Intellektuell ehrliches Argumentieren ist auf vielen Niveaus möglich. Was wir fordern ist, daß das einmal beanspruchte Niveau des Argumentierens im Unterricht durchgehalten, ja bei Bedarf gesteigert – und nicht nicht nach einigen Alibi-Stunden wieder preisgegeben wird". (|164|, s. 21).

teže shvataju sam pojam granice, zatim smisao teoreme o neprekidnosti racionalnih funkcija i vezu izmedju postojanja granice i neprekidnosti funkcije u tački. Zato je potrebna dobra priprema za obradu ove teme. Pored ponavljanja gradiva o realnim brojevima (apsolutna vrednost realnog broja, interval realnih brojeva, okolina tačke), sada ga treba dopuniti razradom pojma intervala (otvoren, zatvoren, poluotvoren, neograničen, sa centrom a dužine 2r), kao i ukazivanjem na medjusobnu povezanost ovih pojmova. Pri ponavljanju gradiva o funkcijama, posebnu pažnju obratiti na rašćenje i opadanje (monotonost) i ograničenost funkcije. Primere i zadatke za obnavljanje gradiva treba povezivati sa elementarnim funkcijama koje su do tada proučavane. Isto tako potrebno je skrenuti pažnju i na domen, kodomen i grafik nekih elementarnih funkcija za koje se pretpostavlja da nisu dovoljno obradjivane u ranijoj nastavi matematike, kao što su na primer:

a) $f(x)=|x|$

$D(f)=R$

$\bar{D}=[0;+\infty)$

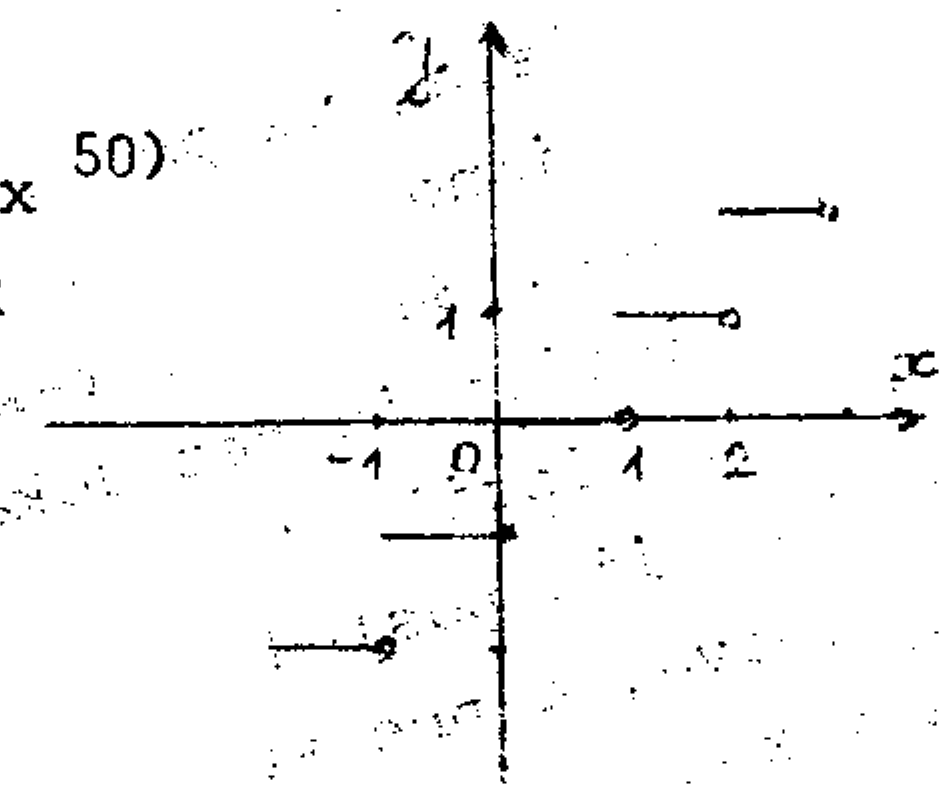


Slika 4.6.

b) $f(x)= x$ [50]

$D(f)=R$

$\bar{D}=Z$

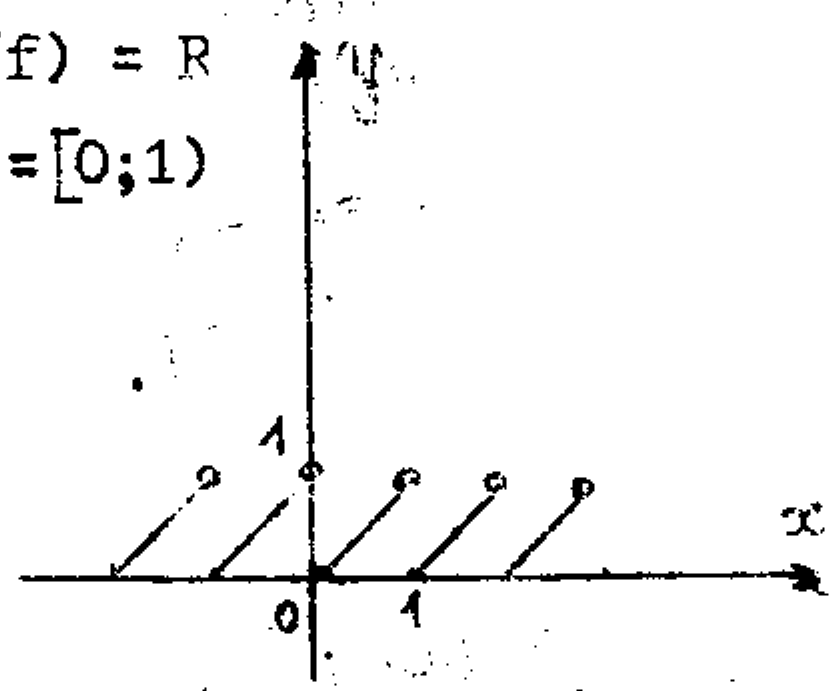


Slika 4.7.

c) $f(x)=\{x\}$ [51]

$D(f) = R$

$\bar{D}=[0;1)$

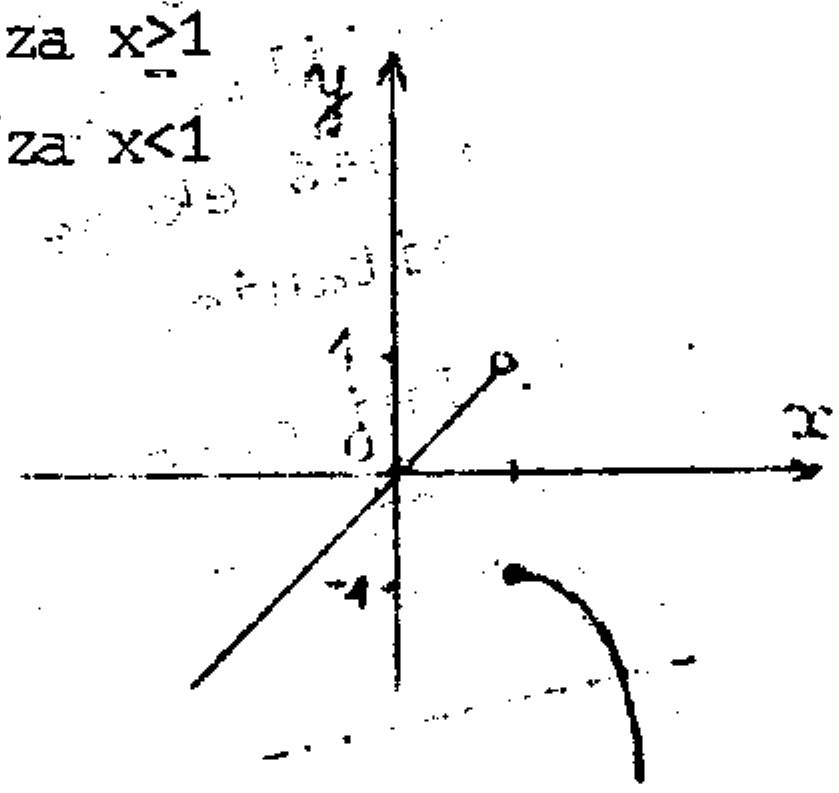


Slika 4.8.

d) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{za } x\geq 1 \\ x & \text{za } x<1 \end{cases}$

$D(f) = R$

$\bar{D} = R$



Slika 4.9.

---

50) $[x]$ *- ceo deo od x*

51) $\{x\}$ *- razlomljeni (decimalni) deo od x.*

Kao priprema za bolje razjmevanje i usvajanje pojma granične vrednosti funkcije, pri ponavljanju gradiva treba obuhvatiti i ovakve zadatke:

1) Pomoću intervala iskazati domen i kodomen sledećih funkcija: $y = 2x - 3$; $y = x^2 + 2$; $y = \sqrt{4-x^2}$; $y = 2^x$; $y = \log x$; $y = \sin x$ i $y = \operatorname{tg} x$. Koje su od ovih funkcija parne, a koje neparne?

2) Neka promenljiva x uzima sve vrednosti iz intervala $]-2; 4[$. Napisati tu promenljivu pomoću nejednakosti koja sadrži znak apsolutne vrednosti.

3) Funkcija je zadana formulom $y = 3x (f: R \to R)$.

a) Odrediti skup vrednosti y (kodomen) na koje se preslikava skup vrednosti x (domen), što zadovoljavaju nejednačinu $|x - 0,5| \leq 1,5$.

b) Izabrati zatvoreni interval na osi ox i odrediti njegovu sliku na osi oy; proveriti da li je sredina intervala na osi oy, slika sredine intervala sa ose ox.

4) Neka je $f: R \to R$ zadana formulom $y = \frac{1}{2} x^2$.

a) Ako $x \in [1; 2]$, da li je tačna nejednakost $|y - 1| < 1$ za odgovarajuće vrednosti y?

b) Ako vrednosti x zadovoljavaju nejednakosti $|x - 2| < 0,1$ da li odgovarajuće vrednosti funkcije pripadaju intervalu $]1,99; 2,01[$?

5) Da li je tačno da je $f(]-1;1[) \subset [0; 3]$, ako je $f(x) = x - 1$?

6) Funkcija je zadana formulom $y = \frac{1}{x}$. Vrednosti promenljive x zadovoljavaju nejednačinu $|x - 2| < 1$. Da li će odgovarajuće vrednosti y zadovoljavati nejednačinu $|y - \frac{1}{2}| < 1$?

7) Odrediti intervale u kojima funkcija raste, a u kojima opada: a) $f(x) = |x-3|$; b) $f(x) = -1/x$; c) $f(x) = \log |x|$. Predstaviti te funkcije grafički.

8) Ispitati u kojim intervalima funkcija $f(x) = \sin x + \cos x$ strogo monotono raste, odnosno opada.

9) Pokazati da je funkcija $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ ograničena na intervalu $]-\infty, +\infty[$.

10) Odrediti infimum i supremum funkcija:

a) $f(x) = x^2$ na intervalu $[-3; 4]$, b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ na intervali $]0; +\infty[$.

c) $f(x) = 2^x$ na intervalu $]1; 2[$ d) $f(x) = \sin x + \cos x$ na intervalu $[0; 2\pi]$.

11) Objasniti sledeće ekvivalencije

a) $|x-3| < \frac{1}{4} \iff x \in U(3, \frac{1}{4})$

b) $f(x) \in V(5; 0,2) \iff |f(x) - 5| < 0,2$.

12) Odrediti slike okolina a) $U(1; \frac{1}{2})$, i b) $U(-1; \frac{1}{5})$ pri preslikavanju $x \to y = 3x - 2$.

Uporedo sa ponavljanjem nekih sadržaja iz teme o nizovima treba posebno obratiti pažnju na odredjivanje broja $n_o(\varepsilon)$ za dato ε i odnos granice niza i približnih izračunavanja. Na primer, u nekim praktičnim zadacima neophodno je ne samo odrediti graničnu vrednost a niza (a_n), već i oceniti koliko se udaljuje taj niz od a za odredjene vrednosti n. Znači, treba da se utvrdi ne samo odredjivanje $\lim_{n\to\infty} a_n$, već i da se da odgovor na pitanje "počev od kojeg $n_o(\varepsilon)$ za dato $\varepsilon > 0$ važi nejednakost $|a_n - a| < \varepsilon$?" Podsetiti se da se jednakost $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ znači grubo govoreći, da za dovoljno velike vrednosti n odstupanja a_n od a su dovoljno mala, odnosno $a_n \approx a$. Na osnovu toga se može iz procesa formiranja niza (a_n) odrediti približna vrednost od a_n za dovoljno velike vrednosti n. Tu je bitno da se razjasni i pitanje "koliko veliko treba uzeti n, da bi odstupanje a_n od a postalo manje od zahtevane tačnosti", povezujući to sa odredjivanjem $n_o(\varepsilon)$.

4.3.2. Pojam granične vrednosti funkcije i njene neprekisnosti spadaju u najvažnije sadržaje srednjoškolske matematike i predstavljaju osnovu za izučavanje ostalih delova programa iz matematičke analize. Prema tome, ukoliko se ti pojmovi ne savladaju u potrebnoj meri, onda će se teškoće u obradi ostalih sadržaja posebno izvoda i integrala znatno uvećati.

U nastavi se nastoji da učenici usvoje definicije odredjenih pojmova i da umeju da ih reprodukuju, umesto da se kroz smišljeno vodjenje kod učenika formiraju ti pojmovi i razume njihova suština. Nije potrebno naglašavati da ako učenici ovladaju tehnikom izračunavanja granice funkcije u tački, ne znači da su se oni osposobili i da nacrtaju grafik date funkcije u okoline te tačke, da na osnovu nacrtanog grafika utvrde da li data funkcija ima granicu za $x \to a$ i da li je ona neprekidna u tački $x = a$. Nedostaci u shvatanju ovih sadržaja javljaju se dobrim delom i zbog toga što nisu u potrebnoj meri nadjena metodička rešenja za izlaganje tih složenih i dosta apstraktnih sadržaja. Najčešće se kopira neki fakultetski udžbenik i pri tome se potpuno zapostavlja induktivni put tumačenja odredjenih pojmova na srednjoškolskom uzrastu.

Pre ukazivanja na neka pitanja stručno-metodičke interpretacije pojmova iz teme GRANICA FUNKCIJE, izložićemo u glavnim crtama dva osnovna pristupa pojmu granice funkcije u nastavi matematičke srednje škole.

Prvi pristup se zasniva na uvodjenju pojma granične vrednosti funkcije pomoću jedne od definicija (metrička ili "ε-δ" definicija, topološka ili pomoću okoline tačke i sekvencijalna ili pomoću granice niza), pa se tek onda daje pojam neprekidnosti funkcije, uz korišćenje pojma granične vrednosti. Drugi pristup polazi od pojma neprekidnosti funkcije, kakva je većina elementarnih funkcija koje se proučavaju u srednjoj školi, pa se potom daje pojam granice funkcije, vezujući ga za neprekidne ili prekidne funkcije.

Prvi pristup je duže prisutan u nastavnoj praksi i stečena je odredjena navika da se pomenutim redosledom obradjuje gradivo o granici funkcije. Oni koji zastupaju ovaj pristup navode kao argumenat, da je prirodno vezati raniju obradu granice niza i granicu funkcije, pa zatim dati pojam neprekidnosti. Pri tome se posebno naglašava odredjivanje granice funkcije kada $x \to \infty$, povezujući ga sa granicom niza kada $n \to \infty$.

Drugi pristup se ne primenjuje dugo, posebno u nastavi matematike srednje škole, ali se zadnjih godina sve više upražnjava ne samo u kursevima analize na višim školama i fakultetima, već i u nastavi matematike srednje škole. Profesor Kolmogorov smatra da je pojam neprekidnosti preduslov za pojam granice funkcije (|77|, s. 12), dok O.S. Ivašev - Musatov ističe korisnost od takvog pristupa zbog očiglednosti, zatim mogućnosti zadržavanja strogosti na željenom nivou i zbog ekonomičnosti u vremenu - pruža se mogućnost da se ne obradjuju nizovi i njihove granice (|55|, s. 49). Neki eksperimenti u Sovjetskom Savezu (|45|, s 43-52) potvrdjuju uspešnost ovakvog pristupa.

4.3.3. Još jedno pitanje, u vezi sa granicom funkcije, duže je predmet stručno-metodičkih rasprava. Iako su nepodeljena mišljenja oko potrebe induktivnog pristupa u tumačenju i razjašnjavanju pojma granične vrednost funkcije, ipak postoje različiti stavovi oko definisanja ovog pojma, odnosno koju od rigoroznih formulacija uzeti u nastavi. Werner Blum ističe tri bitna načina formulisanja iskaza "$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$" i to:

1) Preko niza: "Za svaki niz (x_n), $x_n \neq a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ važi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ b".

2) Preko neprekidnosti: "f ima u tački a neprekidan nastavak sa vrednošću funkcije b".

3a) Preko ε i δ: "Za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da iz $0 < |x-a| < \delta$ sledi $|f(x) - b| < \varepsilon$".

3b) Preko okoline: "Za svaku okolinu V tačke b postoji okolina U tačke a tako da iz $a \neq x \in U$ sledi $f(x) \in V$" (|165|, s. 49). Pre svega treba naglasiti da svaki od ovih načina formulisanja granične vrednosti funkcije f u tački a, uslovljava i odredjeni pristup obradi teme GRANICA FUNKCIJE. Tako formulacija preko niza zahteva da se prethodno obradi gradivo o nizovima, a posebno granica niza. Druga formulacija podrazumeva da se prethodno obradjuje neprekidnost funkcije, pa tek onda njena granična vrednost. Dve varijante trećeg načina su nezavisne od nizova i od neprekidnosti, već je samo potrebno pri obradi realnih brojeva posvetiti odredjenu pažnju pojmu intervala, apsolutne vrednosti i okoline tačke u skupu R. I pored toga što je nekim eksperimentima proveravana pogodnost svake od ovih formulacija pojedinačno (na primer, Churchman za 1, 3a i 3b) nije dat potvrdan odgovor koja od njih ima značajnu prednost u odnosu na ostale. To dolazi otuda što je za pojedine sadržaje i tipove zadataka pogodnija definicija preko niza (na primer, za dokaz da funkcija nema graničnu vrednost u odredjenoj tački), dok je opet za drugu vrstu zadataka pogodnija definicija preko ε i δ (na primer, kod verifikacije granične vrednosti) ili definicija preko okoline (dokaz uslova konvergencije) (|164|, s. 13). Mi smo u eksperimentalnom delu ovog rada proveravali tri od navedenih formulacija i to 1, 3a i 3b u zavisnosti od sadržaja i tipova zadataka. Pokazalo se da je vrlo celishodna kombinacija ovih formulacija i ispoljena je odredjena prednost u odnosu na primenu bilo koje od njih pojedinačno. Zato je naše opredeljenje da u matematičkim usmerenjima pristup obradi teme GRANICA FUNKCIJE bude takav, da se samo definicija granice može svestranije razmotriti, i da se pokaže ekvivalentnost raznih definicija granice. To znači da se prvo obrade nizovi, zatim granica funkcije sa sve tri navedene definicije, pa neprekidnost, kao poseban slučaj granice. U usmerenjima gde je fond časova nastave matematike znatno manji, celishodniji je pristup granici preko neprekidnosti, odnosno prvo definicija neprekidnosti funkcije, pa onda njena granična vrednost pomoću neprekidnosti. U ovom slučaju granica funkcije pomoću niza, kao i metrička i topološka, potpuno bi izostale. Pri tome se mora voditi računa da se vrlo složen pojam granice ne svede na supstituisanje promenljive x sa a, što znači samo na izračunavanje granice neprekidnih funkcija da bi se obrazložila neprekidnost. Time bi se u znatnoj meri potisnuli granični procesi.

4.3.4. Izučavanje teme GRANICA FUNKCIJE, posle obnavljanje gradiva, treba nastaviti detaljnom analizom simbola: $x \to \infty$, upoređujući ga sa simbolom: $n \to \infty$. Ovde je bitno da se istakne razlika izmedju neograničenog uvećavanja promenljive preko prirodnih brojeva $(n\to\infty)$ i preko realnih brojeva $(x\to\infty)$. Ako vrednosti koje uzima promenljiva x postaju veće od svakog realnog broja M, odnosno ako je $x > M$, kaže se da promenljiva x teži ka plus beskonačnosti ili da postaje beskonačno veliko i piše se: $x\to+\infty$. Analogno imamo za $x\to-\infty$.

Prirodan produžetak proučavanja graničnih procesa idući od nizova na funkcije šireg domena, predstavlja granica funkcije kada $x \to +\infty(-\infty)$. I ovde treba poći od odgovarajućeg primera i utvrditi ponašanje funkcije pri neograničenom uvećavanju apsolutne vrednosti promenljive x, odnosno $|x|$ (uzima se $|x|$ zbog toga što se x može udaljavati po apscisnoj osi kako udesno, tako i ulevo). Posmatrajmo, na primer funkciju:

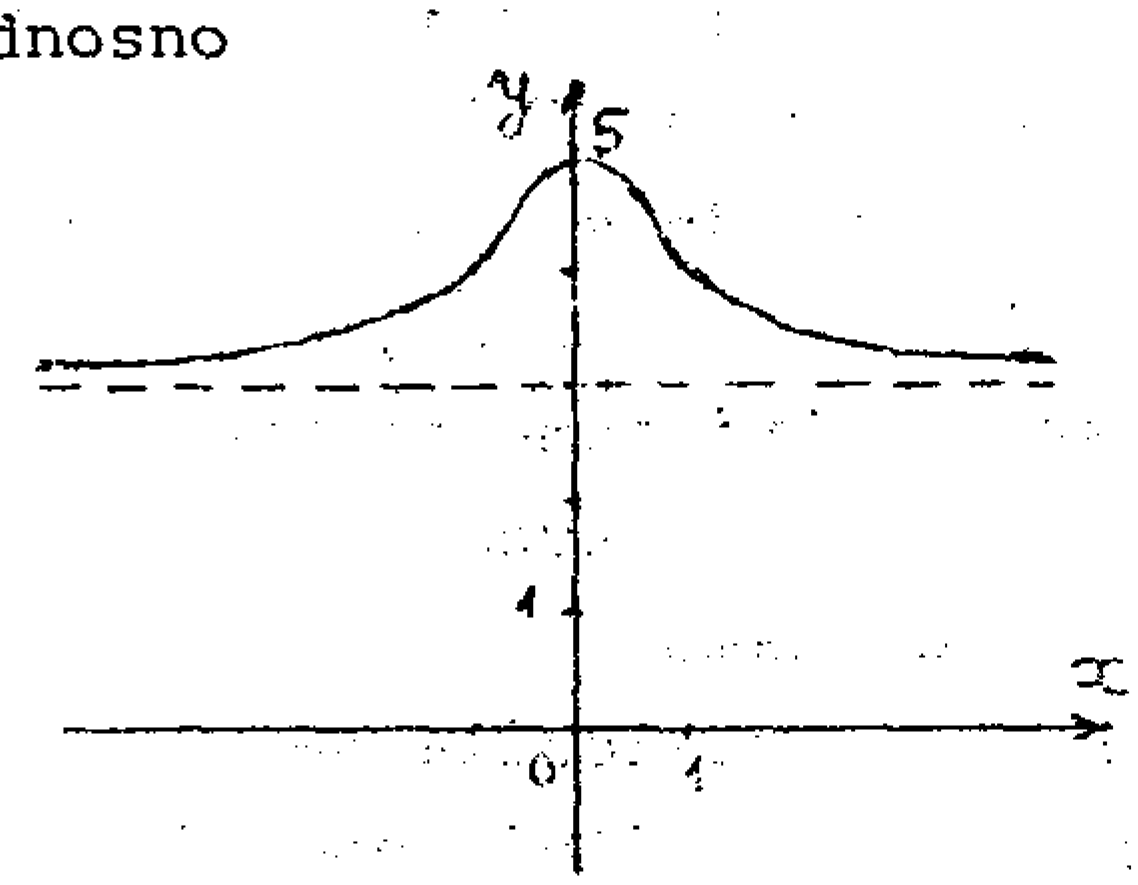
$$y = \frac{3x^2+5}{x^2+1}$$

Ona se može napisati u obliku $y = 3 + \frac{2}{x^2+1}$. Jasno je da kada x raste da tada imenilac razlomka $\frac{2}{x^2+1}$ takodje raste, a pošto je brojilac konstantan, to vrednost tog razlomka postoji po volji mala po apsolutnoj vrednosti. Tako je, na primer, $\frac{2}{x^2+1} < 1$ za $|x| > 1$; $\frac{2}{x^2+1} < 0{,}5$ za $|x| > 3$; $\frac{2}{x^2+1} < 0{,}01$ za $|x| > 199$. Zbog toga, kada $x \to +\infty(-\infty)$ vrednosti funkcije $y = \frac{3x^2+5}{x^2+1}$ se malo razlikuju od broja 3. To znači da za svako malo pozitivno ε (u našem primeru uzeli smo $\varepsilon = 1$: $\varepsilon = 0{,}5$; $\varepsilon = 0{,}01$), odnosno $\varepsilon > 0$ i za dovoljno veliko x, odnosno $x \to +\infty(-\infty)$ važi

$$\left|\frac{3x^2+5}{x^2+1} - 3\right| < \varepsilon$$

Kaže se da ta funkcija teži ka 3, kada $x \to +\infty(-\infty)$, u oznaci

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5}{x^2+1} = 3$$



Slika 4.10.

Geometrijski prikaz približavanja te funkcije ka 3 dat je na slici 4.10. Napomenimo da je ovde $\lim_{x\to-\infty} y = 3$.

Vrlo je važno da se detaljno protumači zapis $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, što se u nastavnoj praksi najčešće ne čini. Taj zapis znači, da za svako $\varepsilon > 0$ postoji takvo $x_o(\varepsilon)$, da je za $x \geq x_o(\varepsilon)$ ispunjena nejednakost $|f(x) - b| < \varepsilon$. Posebno treba ukazati na nejedinstvenost broja $x_o(\varepsilon)$, a to se najbolje može ostvariti kroz pogodno odabrane primere odredjivanja $x_o(\varepsilon)$, kao što su:

1) Za koje $x \in]0; +\infty[$ se funkcija $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $x \neq 0$ malo razlikuje od 1? (Rešenje: ako je $\varepsilon = 0,1$, onda je $x_o(\varepsilon) = 10$ pa treba uzeti $x > 10$; ako je $\varepsilon = 0,05$, onda je $x_o(\varepsilon) = 20$; ako je $\varepsilon = 0,002$, onda je $x_o(\varepsilon) = 500$ itd. U svim ovim slučajevima kažemo da broj 1 aproksimira $f(x)$ s tačnošću do ε, odnosno za $x > x_o(\varepsilon)$ $f(x)$ se malo razlikuje od 1).

2) Da li se za $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$ i $\varepsilon = 0,001$ vrednosti funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ malo razlikuju od nule, kada $x \to +\infty$. Odrediti u svakom od navedenih slučajeva broja ε vrednost $x_o(\varepsilon)$.

Posle sličnih primera i geometrijske ilustracije, nije učenicima teško da razumeju i prihvate preciznu definiciju granice funkcije kada $x \to +\infty(-\infty)$.

4.3.5. Najvažniji deo u obradi teme GRANICA FUNKCIJE predstavlja granična vrednost funkcije u odredjenoj tački. Razmotrićemo dva pristupa uvodjenju pojma granice funkcije u tački, koje smo već napred naveli. Najpre ćemo ukazati na osnovne stručno-metodičke aspekte prvog pristupa, koji je nezavisan od pojma neprekidnosti (definiše se pomoću granične vrednosti), ali se i tu koristi geometrijska interpretacija u cilju boljeg razumevanja pojma granice funkcije u tački.

Posle granice funkcije kada $x \to \infty$, nije neophodno posebno vršiti pripreme za uvodjenje pojma granice funkcije u odredjenoj tački. Neka podsećanja su ipak potrebna, kao na primer, šta je tačka nagomilavanja, šta je izvodni skup i sl. S obzirom da se u ovakvom pristupu pojmu granice funkcije u tački najpre vrši verifikacija graničnih vrednosti i odredjivanje granične vrednosti u tački gde funkcija nije definisana, to je celishodno da se prvo uvede definicija preko ε i δ i preko okoline tačke.

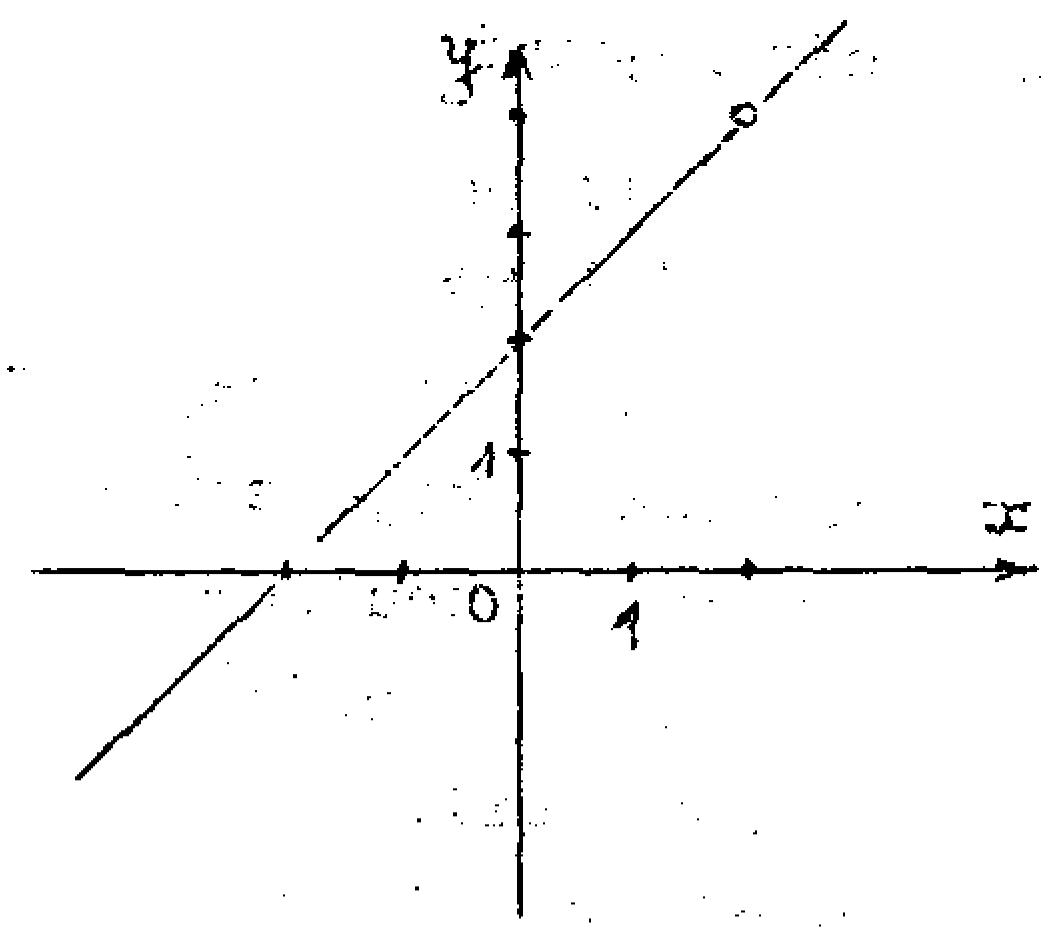
Pripreme za definiciju granice pomoću ε i δ, ili kako se to kaže, za metričku definiciju granice, već su izvršene pri obradi skupa realnih brojeva. Sada je samo potrebno odabrati odgovarajući primer, recimo $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, na kojem se

na kojem se najpre posmatraju približne vrednosti promenljive x u odnosu na utvrdjeni broj, na primer, broj 2 i odgovarajuće približne vrednosti $f(x)$. Pitanje se postavlja, da li se i približne vrednosti f malo razlikuju od neke utvrdjene vrednosti. Ukoliko takva vrednost postoji (iz tabele se vidi da je u ovom primeru to broj 4), onda se ona

x	3	2,1	2,01	2,001	1,9999	1,999	1,99	1,9
$f(x)$	5	4,1	4,01	4,001	3,9999	3,999	3,99	3,9
$\|x-2\|$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,001	0,01	0,1
$\|f(x)-4\|$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,001	0,01	0,1

naziva granična vrednost funkcije. Pre formulisanja definicije granice treba, pored tablice vrednosti, nacrtati i odgovarajući grafik, kao što je u ovom slučaju učinjeno za funkciju

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

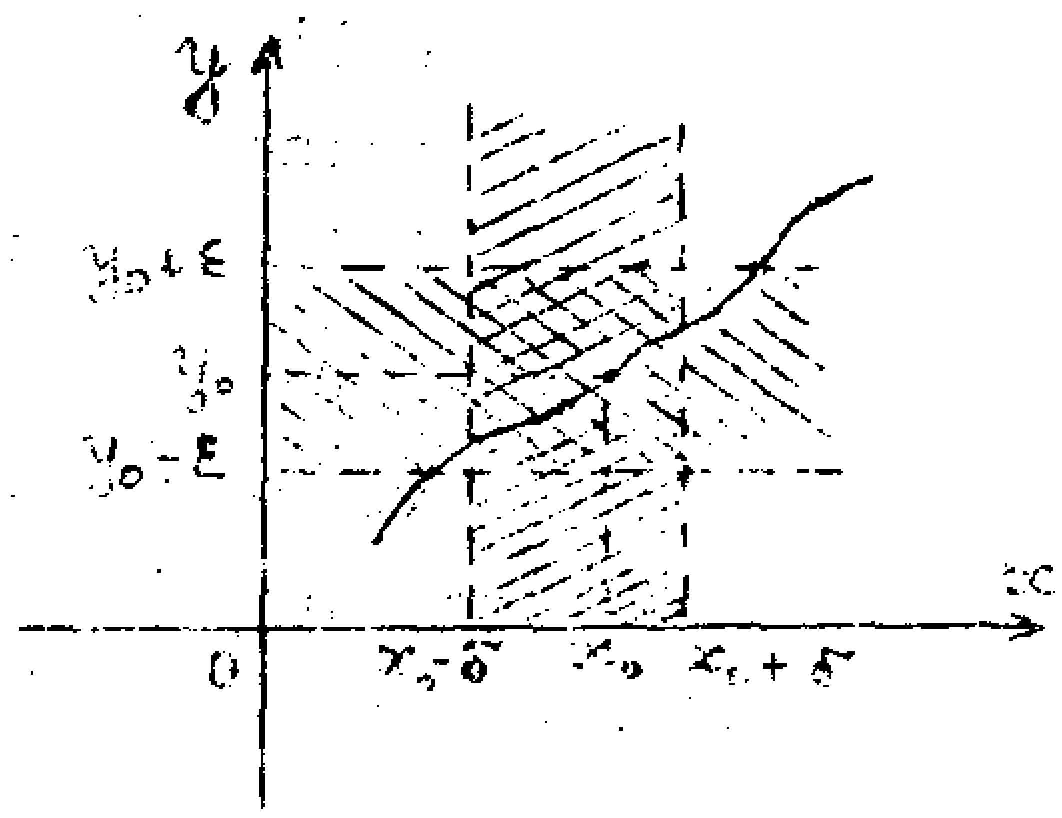


Slika 4.11.

Definicija 1. Funkcija f definisana za $x \in]x_0-\delta; x_0+\delta[$ ili $x \in]x_0-\delta; x_0+\delta[\setminus\{x_0\}$ ima graničnu vrednost y_0 u tački $x_0 \in R$, ako za *svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* bar jedno $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da *za sve* x za koje je

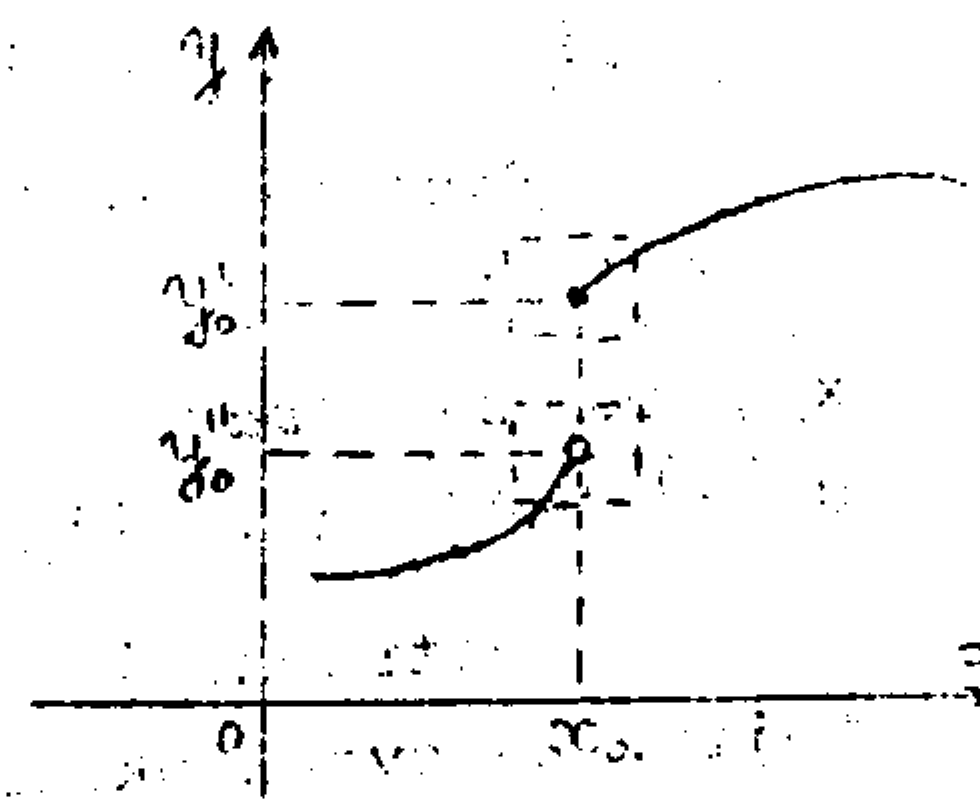
$$0 < |x_0 - x| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |y_0-f(x)| < \varepsilon \qquad (1)$$

Geometrijska interpretacija ove definicije data je na slici 4.12., a ona znači da kada je $x \in R$ i $x \in |x_0-\delta; x_0+\delta|\ \{x_0\}$ tada je $f(x) \in |y_0-\varepsilon; y_0+\varepsilon|$. Presek pravi $x = x_0 - \delta$, $x = x_0+\delta$, $y = y_0-\varepsilon$ i $y = y_0+\varepsilon$ obrazuje pravougaonik u kome se mora nalaziti deo grafike funkcije nad intervalom $|x_0-\delta; x_0+\delta|$. Funkcija ima tada graničnu vrednost y_0,



Slika 4.12.

ako se pri smanjenju stranice pravougaonika paralelne y-osi tako da ona teži nuli, može odabrati stranica pravougaonika paralelna x-osi tako da deo grafike nad njom ostane u ovom pravougaoniku.



Slika 4.13.

Na slici 4.13. ne postoji ni jedan broj y_0 koji bi bio granična vrednost funkcije f u tački x_0, čiji je ovo grafik. Naime, ako se uzme dovoljno mala stranica pravougaonika paralelna y-osi oko tačke (x_0, y_0) tada je van ili gornji ili donji deo grafika.

Već smo istakli poteškoće u nastavi da se pravilno shvati i usvoji ova definicija, koje proističu, s jedne strane, zbog složene logičke strukture same definicije, a s druge strane, i zbog neizgradjene prakse i nedovoljnog metodičkog oblikovanja izlaganja ovog gradiva na srednjoškolskom stupnju. U ovom konkretnom slučaju često se greši u primeni ove definicije, pri čemu se prvo uzima δ, odnosno interval oko x_0, pa onda interval oko y_0. Prema definiciji mora se prvo uzeti interval oko y_0, odnosno proizvoljan broj $\varepsilon > 0$ (tačnost aproksimacije broja y_0), pa se onda dokazuje postojanje intervala oko x_0, tj. broja $\delta(\varepsilon)>0$ tako da važi implikacija (1). Na primer, neka je data funkcija $f(x) = \frac{(2x-1)(x-2)}{x-2}$; pokažimo da je $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$. Uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$ i pretpostavimo da postoji bar jedno x za koje $f(x) \in]\, 3 - \varepsilon;\ 3 + \varepsilon\,[$. Tada je

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \iff \left|\frac{(2x-1)(x-2)}{x-2} - 3\right| < \varepsilon \xRightarrow{x\neq 2} 2|x-2| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sada nije teško zaključiti da postoji takvo $\delta(\varepsilon) > 0$, u ovom slučaju je $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, tako da

$$(0 < |x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}) \Longrightarrow (|f(x) - 3| < \varepsilon),$$

što znači da je zaista $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.

S obzirom da je već ranije utvrdjena povezanost izmedju apsolutne vrednosti realnog broja, odnosno intervala i okoline tačke, to se definicija granice funkcije pomoću okoline, tzv. toploška[52] definicija, može bez posebnih uvodnih primera odmah iskazati.

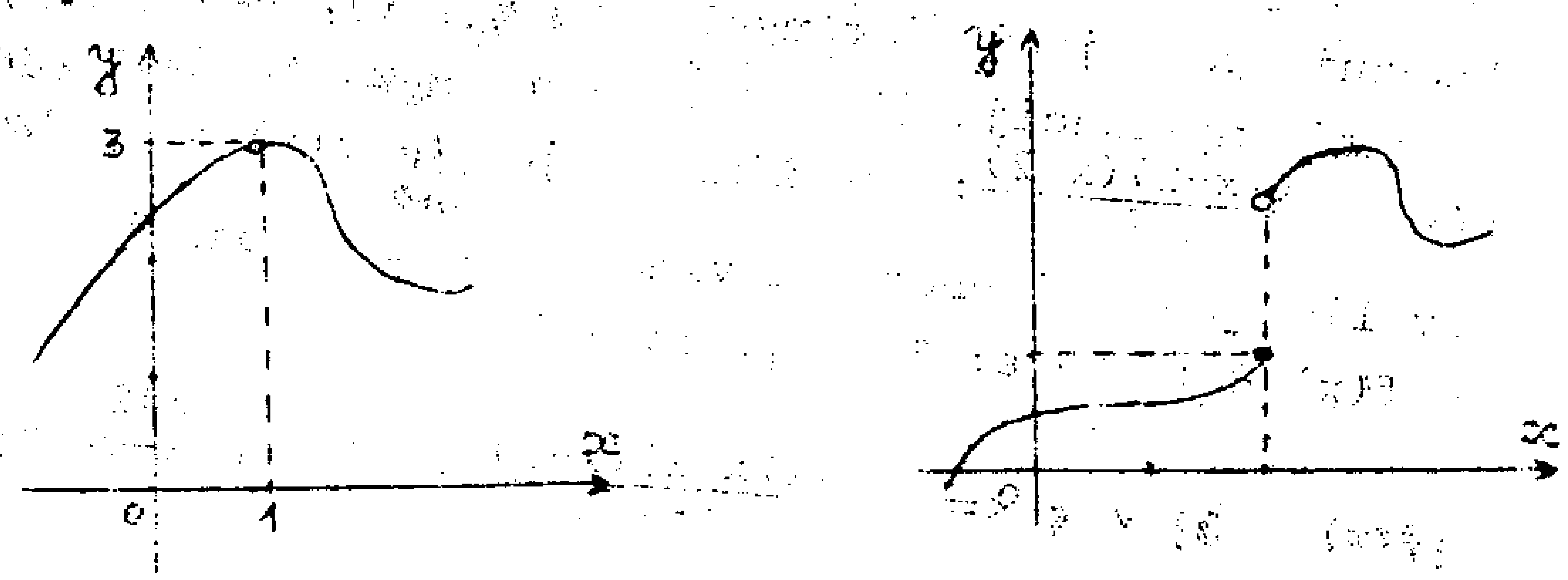
Definicija 2. Funkcija f definisana za $x \in]x_o-\delta; x_o+\delta[$ ili $x \in]x_o-\delta; x_o+\delta[\setminus \{x_o\}$ ima graničnu vrednost y_o u tački x_o, ako za *svaku* okolinu V tačke y_o *postoji* takva okolina U[53] tačke x_o, čija slika pripada V, odnosno $f(U) \subset V$.

Potrebno je objasniti posebno reči "svaku" i "postoji". Za svaku okolinu V(tačke y_o) znači za bilo koje $\varepsilon > 0$, tj. za svaku okolinu $V(y_o,\varepsilon) =]y_o-\varepsilon; y_o+\varepsilon[$ postoji takva okolina U tačke x_o što znači postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da se $U(x_o,\delta)$ preslikava u $V(y_o,\varepsilon)$.

Treba skrenuti pažnju da pri postojanju granice, okolina može biti bez tačke x_o ili tačka $(x_o, f(x_o))$ može pripadati grafiku funkcije. Slika beskonačnog broja ostalih tačaka okoline U pripada V. Za bolje razumevanje i usvajanje pojma granice funkcije značajnu ulogu igra geometrijska interpretacija, kao što je na primer, shematski prikaz grafika funkcija sa odredjenim osobinama na slici 4.14. a), b), c), d).

a) funkcija ima granicu u tački $x_o = 1$, jednaku 3, ali u toj tački funkcija nije definisana.

b) funkcija nema granicu u tački $x_o = 2$, ali vrednost funkcije je jednaka 1.



Slika 4.14.

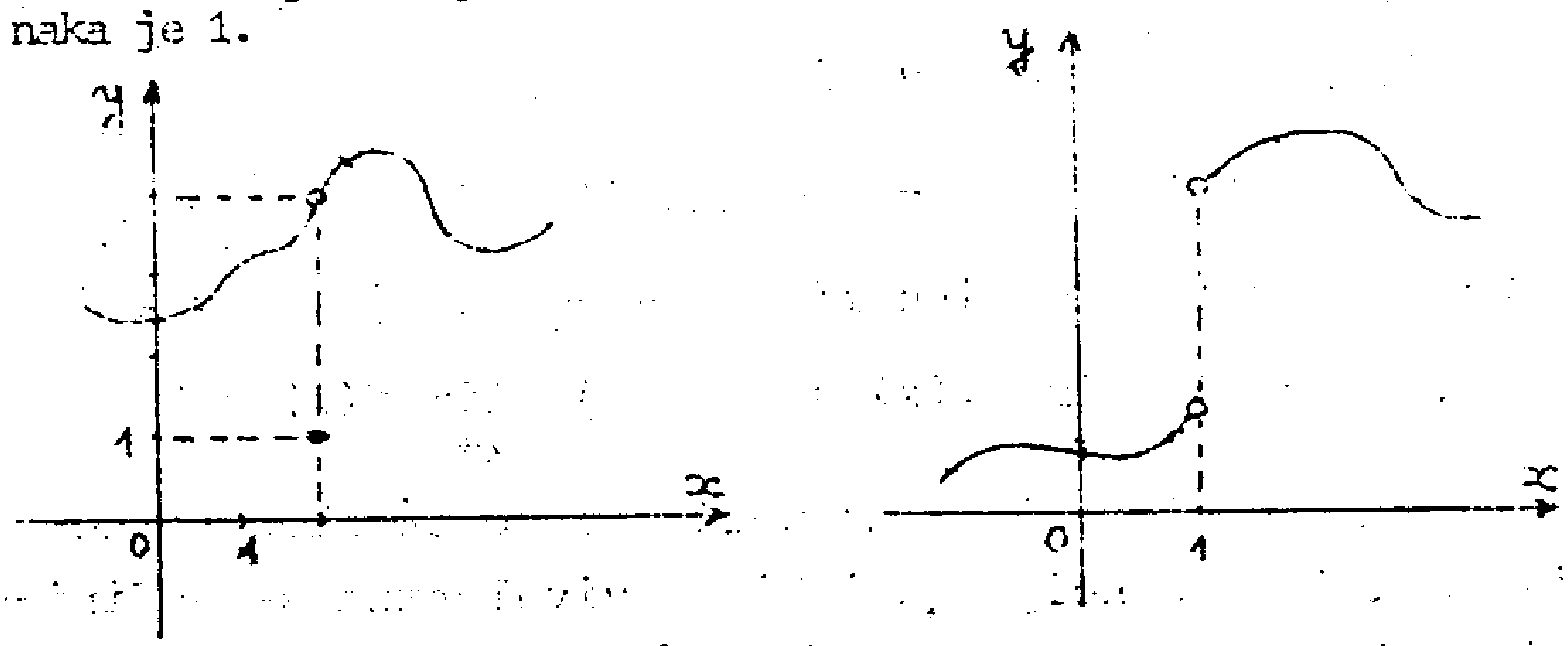
---

52) *L. Félix - francuski matematičar: "Topologija i nauka koja daje matematičku formu intuitivnim pojmovima: "biti u okolini", "malo se razlikovati", "težiti ka..." (|39|, s. 76).*

53) *Neki autori koriste tzv. šuplju okolinu $U^*(x_o;\delta) = U(x_o;\delta)\setminus\{x_o\}$ (|172|, s. 118; |82|, st. 96).*

c) Funkcija ima granicu u tački $x_0=2$ i ona iznosi 4, a vrednost funkcije u toj tački jednaka je 1.

d) Funkcija u tački $x_0 = 1$ nema granicu i nije definisana u toj tački.



Nastavak slike 4.14.

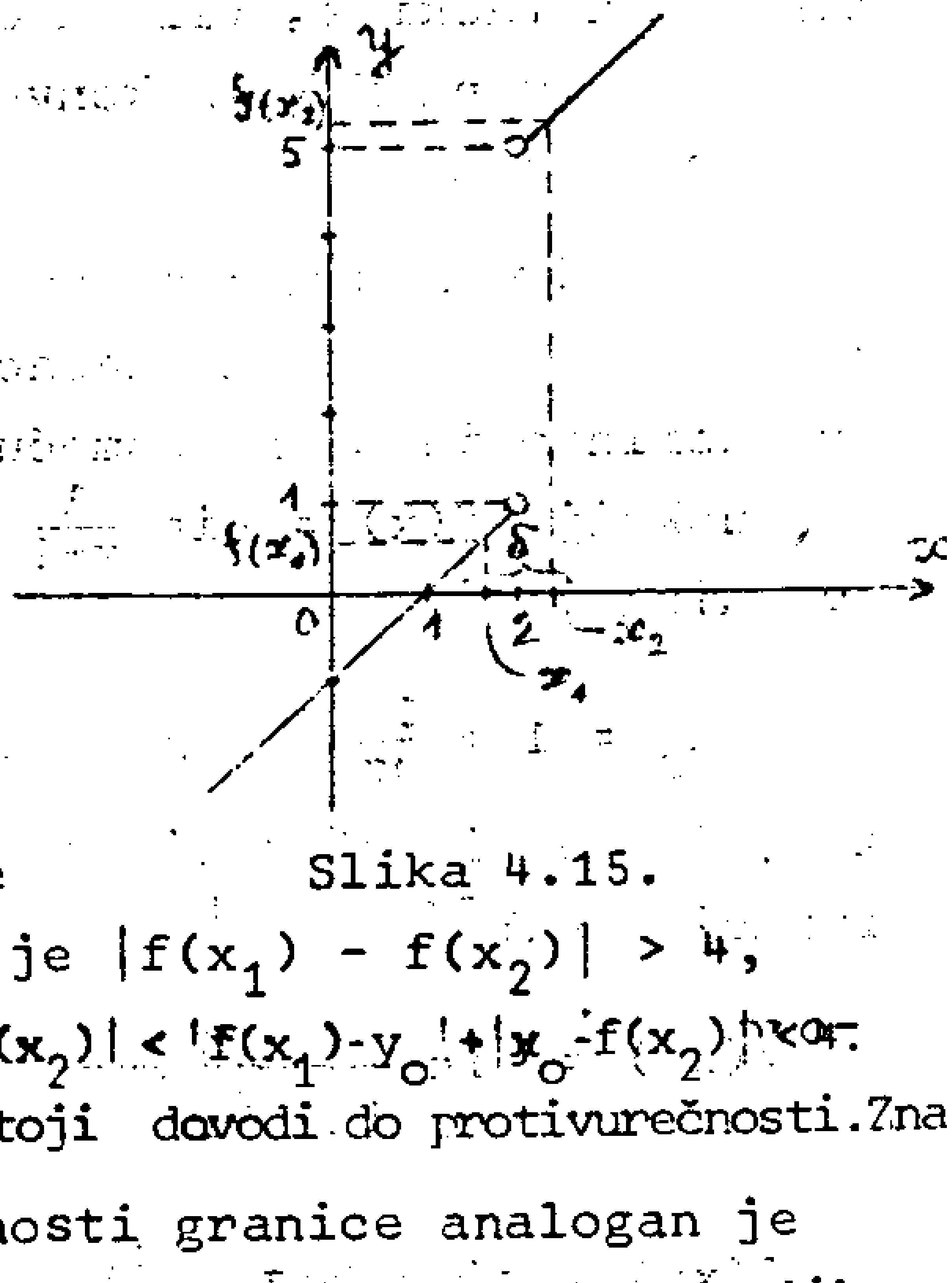
Uz to se može uzeti i konkretan zadatak, na primer za slučaj pod d). Neka je data funkcija $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{za } x>2 \\ x-1 & \text{za } x<2 \end{cases}$ Pokazati da $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ne postoji.

Neka je $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = y_0$. Za

$\varepsilon = 2 \left(\varepsilon \le \frac{5-1}{2}\right)$ nalazimo okolinu δ tačke 2 takvu da za sve $x \in]2-\delta;\ 2+\delta[$, $x \neq 2$ važi nejednakost

$$|f(x) - y_0| < 2$$

Ako je $x_1 \in]-\infty,\ 2[\cap]2-\delta;\ 2+\delta[$ i $x_2 \in]2,+\infty[\cap]2-\delta;\ 2+\delta[$, onda je



Slika 4.15.

$f(x_1) < 1$ i $f(x_2) > 5$. Prema tome je $|f(x_1) - f(x_2)| > 4$, ali je s obzirom na pretpostavku $|f(x_1)-f(x_2)| < |f(x_1)-y_0|+|y_0-f(x_2)| < 4$. Prema tome, pretpostavka da $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ postoji dovodi do protivurečnosti. Znači, taj limes ne postoji.

Dokaz teoreme o jedinstvenosti granice analogan je dokazu o jedinstvenosti granice niza i svodi se na kontradikciju.

Za odredjivanje granične vrednosti nekih funkcija korisna je sledeća teorema.

Teorema 1. - Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, onda je $f(x) = y_0 + \omega(x)$, gde $\omega(x) \to 0$, kada $x \to x_0$.

Dokaz ove teoreme nije neophodan, ali je bitno da se pokaže kako se sadržaj ove teoreme koristi za rešavanje odredjenih zadataka. Posebno je značajno da se dâ i formulacija obrnute teoreme: ako se funkcija f može predstaviti u obliku $f(x) = y_o + \omega(x)$, gde $\omega(x) \to 0$, kada $x \to x_o$, onda je $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = y_o$. Teorema važi i za slučaj kada $x \to \infty$.

Posmatrajmo, na primer, funkciju $f(x) = \frac{4x^2+5}{x^2}$. Ona se može predstaviti u obliku $f(x) = 4+\frac{5}{x^2}$, pa je $y_o = 4$ i $\omega(x) = \frac{5}{x^2}$. Pošto je $\lim\limits_{x\to+\infty} \omega(x) = 0$, to je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$.

Pojam granice niza omogućuje da se dâ sledeća definicija granice funkcije, koja je ekvivalentna sa definicijom 1. (|100|, s. 75).

Definicija 3. - Funkcija f definisana za $x \in]x_o-\delta; x_o+\delta[$ ili $x \in]x_o-\delta; x_o+\delta[\setminus\{x_o\}$ ima graničnu vrednost y_o u tački x_o (ili kada x teži ka x_o) ako za *svaki* niz (x_n) iz domena f koji konvergira ka x_o, niz $(f(x_n))$ konvergira ka broju y_o.

Za nastavnu praksu je korisno uvesti ovu definiciju zbog toga što se neki zadaci uspešnije rešavaju baš pomoću ove definicije, a ne pomoću neke druge. Na primer, dokazati da funkcija $f(x) = \sin\frac{1}{x-1}$ nema granicu kada $x \to 1$. Izaberimo dva niza

$$x_n' = 1 + \frac{1}{n\pi} \quad \text{i} \quad x_n'' = 1 + \frac{1}{(4n+1)\pi}, \quad n \in N$$

za koje je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 1$. Odgovarajući nizovi vrednosti funkcije su:

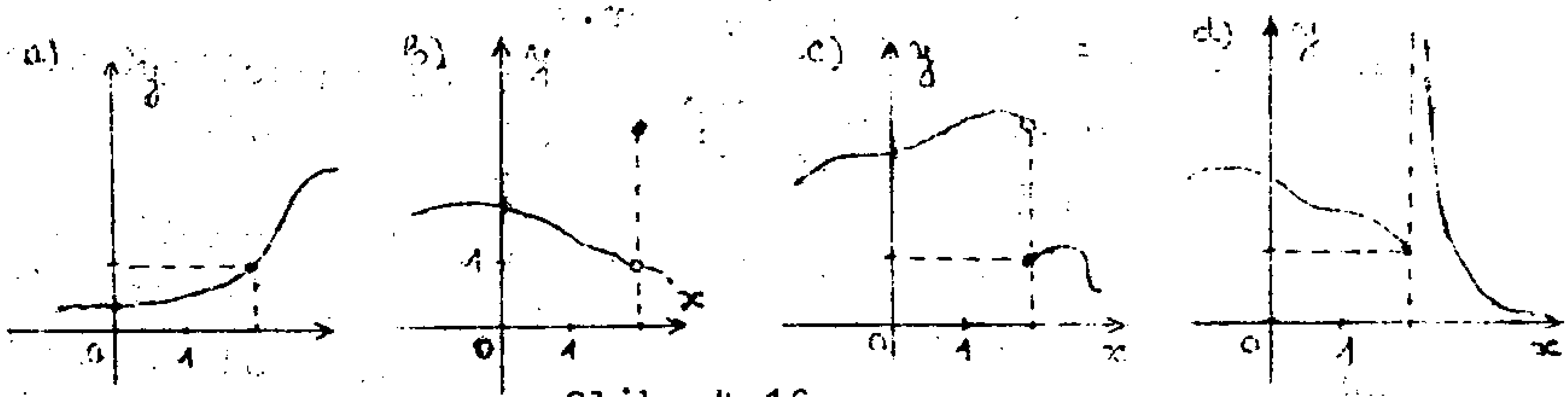
$$f(x_n') = \sin\frac{1}{1+\frac{1}{n\pi}-1} = \sin n\pi = 0 \quad \text{i}$$

$$f(x_n'') = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Prema tome je $\lim\limits_{x_n'\to1} f(x_n') = 0$ i $\lim\limits_{x_n''\to1} (x_n'') = 1$, odnosno nizovi $(f(x_n'))$ i $(f(x_n''))$ imaju različite granice. Pošto postoje dva niza za koje odgovarajući nizovi vrednosti funkcija ne teže istoj granici, to data funkcija f nema graničnu vrednost.

Za utvrdjivanje pojma granične vrednosti funkcije u tački pogodni su i zadaci sledeće sadržine.

1) Na slici su shematski predstavljeni grafici



Slika 4.16.

funkcija. Za svaki od njih odgovoriti da li odgovarajuća funkcija ima graničnu vrednost kada $x \to 2$.

2) Shematski prikazati grafike funkcija koje imaju odgovarajuću osobinu:

a) funkcija ima granicu u tački $x_0 = 3$, jednaku 2, ali u toj tački funkcija nije definicana;

b) funkcija nema granicu u tački $x_0 = 1$, ali je vrednost funkcije jednaka 2;

c) funkcija ima granicu u tački $x_0 = 4$ i ona iznosi 2, a vrednost funkcije u toj tački jednaka je 1.

4.3.6. Već smo rekli da definicija granice funkcije pomoću njene neprekidnosti zahteva drugačiji pristup i redosled obrade gradiva iz teme GRANICA FUNKCIJE. S obzirom da se u poslednje vreme u stručno-metodičkim časopisima dosta raspravlja o uvodjenju pojma granice funkcije pomoću neprekidnosti, to ćemo ukratko izložiti ovaj pristup. Prema idejama O.S. Ivaševa-Musatova (|56| i |55|) obrada neprekidnosti funkcije i njene granice treba da obuhvati: prve predstave o neprekidnosti funkcije; približna izračunavanja i neprekidnost funkcije; neprekidnost funkcije u tački; prvobitne predstave o granici funkcije; granica funkcije.

Prve predstave o neprekidnosti funkcije vezuju se za grafike već proučavanih funkcija, na primer $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, koji se mogu nacrtati iz jednog poteza, ne odvajajući olovku od hartije. U cilju utvrdjivanja prvih predstava o neprekidnosti pogodna su sledeća vežbanja:

1) Navesti nekoliko primera funkcija koje su neprekidne u oblasti svoje definisanosti (na pr. $y = \sin x$,

$y = \cos x$, $y = a^x$, $y = \log x$ i dr.)

2) Navesti neke primere prekidnih funkcija (na pr. $y = [x]$, $y = \{x\}$, $y = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$ i dr.)

Povezivanje neprekidnosti funkcije i približnih izračunavanja zasniva se na činjenici da se tačnost približne jednakosti $f(x) \approx f(x_0)$ može učiniti koliko god hoćemo preciznijom, ako se povisi tačnost u približnoj jednakosti $x \approx x_0$. To se čini ako se za x_0 ne može odrediti tačna vrednost $f(x_0)$. Za neprekidne funkcije mala odstupanja nezavisno promenljive od x_0, daju mala odstupanja od vrednosti funkcije $f(x_0)$. Ilustrujmo to sledećim primerom.

Koliko cifara posle zareza treba uzeti u broju $x_0 = 3{,}42815618\ldots$ da bi za funkciju $f(x) = 1-5x$ izračunali $f(x_0)$ sa pet tačnih decimala?

U približnoj jednakosti $f(x) \approx f(x_0)$ apsolutna vrednost odstupanja (greške) jednaka je

$$|f(x) - f(x_0)| = |1 - 5x - 1 + 5x_0| = 5\,|x-x_0|$$

odnosno, pet puta je veća nego apsolutna vrednost odstupanja (greške) - $|x - x_0|$ približne jednakosti $x \approx x_0$. Prema tome, broj x_0 treba uzeti s tačnošću do šest cifara posle zareza, odnosno 3,428156. Bitno je da učenici kroz slične primere (za različitu tačnost se mora uzeti različiti broj decimala) uoče da ako je $x \approx x_0$, onda je i $f(x) \approx f(x_0)$, ukoliko je funkcija neprekidna. U ovom primeru, izračunavanje $f(x_0)$ sa pet tačnih decimala predstavlja broj $\varepsilon > 0$ (tačnost do 10^{-5}), a apsolutna vrednost greške nezavisno promenljive predstavlja broj $\delta(\varepsilon) > 0$.

Sledeći korak predstavlja definicija neprekidnosti.

Definicija 4. Funkcija f je neprekidna u tački $x_0 \in D(f)$ ako za *svako* $\varepsilon > 0$ *postoji bar jedno* $\delta(\varepsilon) > 0$ takvo da

$$(|x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \qquad (2)$$

Kao primer, može se dokazati neprekidnost linearne funkcije $f(x) = 3x - 5$ u bilo kojoj tački x_0. Uzmimo $\varepsilon > 0$

i odaberimo $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da važi (2)

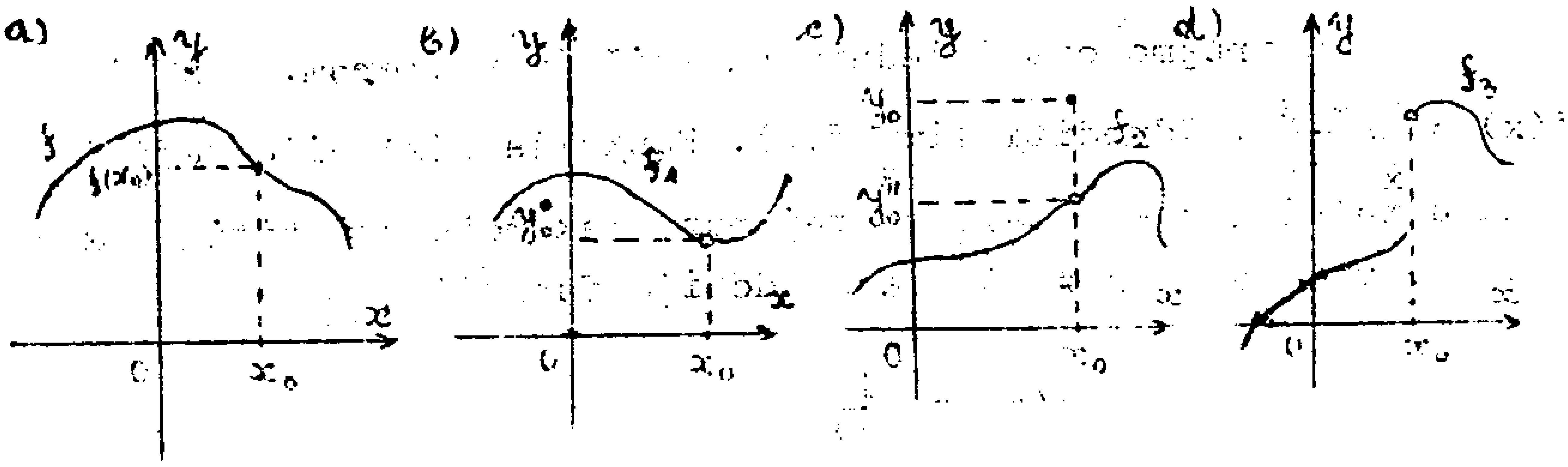
$$|f(x) - f(x_o)| = |3x - 5 - 3x_o + 5| = 3\,|x - x_o|$$

Odavde se vidi, da ako se uzme $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, onda za bilo koje x koje zadovoljava nejednakost $|x - x_o| < \delta$ važiće nejednakost

$$|f(x) - f(x_o)| = 3\,|x - x_o| < 3\delta = 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Pošto izabrano $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ može biti za svako $\varepsilon > 0$, onda je neprekidnost funkcije $f(x) = 3x - 5$ u bilo kojoj tački x_o dokazana.

U sledećm koraku se prelazi na prvobitne predstave o granici funkcije. Posmatraju se granica funkcija f, f_1, f_2, f_3 na slici 4.17. u tački x_o. Funkcija f definisana za



Slika 4.17.

$x \in]x_o - \delta;\ x_o + \delta[$ je neprekidna u x_o. Medjutim, za funkcije f_1 i f_2 mogu se dopuniti njihove oblasti definisanosti $D(f_1) =]x_o-\delta;\ x_o+\delta[\setminus\{x_o\}$ i $D(f_2) =]x_o-\delta;\ x_o+\delta[$ tako (umesto $f_1(x_o)$ nije definisano, uzeti $f_1(x_o) = y_o'$ i umesto $f_2(x_o) = y_o$ uzeti $f_2(x_o) = y_o''$), da one budu neprekidne u tački x_o, dok to nije moguće učiniti za funkciju čiji je grafik dat pod d). Na osnovu toga se kaže da funkcije f, f_1 i f_2 imaju graničnu vrednost, kada $x \to x_o$, dok funkcija f_3 nema granicu u tački x_o. Za funkciju koja je neprekidna u tački $x=x_o$ pišemo

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o),$$

dok za slučajeve f_1 i f_2, gde se funkcije mogu "dodefinisati" do neprekidnosti, pišemo da je

$$\lim_{x\to x_o} f_1(x) = y_o' \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_o} f_2(x) = y_o''$$

znači za funkciju koja je neprekidna u tački x_o imamo da je granična vrednost te funkcije, kada $x \to x_o$, jednaka vrednosti te funkcije $f(x_o)$. Prekidne pak funkcije f_1 i f_2, dopunom njihovih definicija, zamenjene su drugim funkcijama F_1 i F_2, koje su u tački x_o neprekidne i koje su za sve $x \neq x_o$ jednake funkcijama f_1 i f_2, odnosno $F_1 = f_1$ i $F_2 = f_2$ za $x \neq x_o$. Vrednosti funkcija F_1 i F_2 u tački x_o je broj

$$y_o' = F_1(x_o) = \lim_{x\to x_o} F_1(x), \text{ odnosno}$$

$$y_o'' = F_2(x_o) = \lim_{x\to x_o} F_2(x)$$

i taj broj se naziva granicom funkcije f_1, kada $x \to x_o$, odnosno f_2, kada $x \to x_o$.

Ilustrujmo ovo i jednim numeričkim primerom. Neka je $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-9}$. Odrediti $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$. Funkcija $f(x)$ nije definisana u tački $x = -3$, ali se taj razlomak može skratiti sa $x+3$ pod uslovom da je $x \neq -3$, pa se dobija funkcija

$$F(x) = \frac{1}{x-3}$$

koja je neprekidna u tački $x = -3$. Takodje je $F(x) = f(x)$ za sve $x \neq -3$. Zbog neprekidnosti funkcije $F(x)$ u tački $x = -3$ imamo

$$\lim_{x\to-3} F(x) = F(-3) = -\frac{1}{6}$$

Prema tome i funkcija $f(x)$ ima granicu jednaku $-\frac{1}{6}$, kada $x \to -3$.

Poslednji korak predstavlja sama definicija granice funkcije u tački pomoću neprekidnosti.

Definicija 5. - Broj y_o naziva se granica funkcije f, kada $x \to x_o$, u oznaci $y_o = \lim\limits_{x\to x_o} f(x)$, ako je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \neq x_o,\ x \in D(f) \\ y_o, & \text{za } x = x_o \end{cases} \quad \text{neprekidna u tački } x_o.$$

O prednostima ovakvog pristupa granici funkcije u srednjoškolskoj nastavi bilo je reči ranije, a sada se može dodati samo to da je ovaj induktivno-intuitivni put uvodjenja pojma granice funkcije pristupačan za većinu struka u pozivno-usmerenom srednjem obrazovanju.

4.3.7. Sadržaji teorema o granici monotone funkcije i o odnosu granice funkcije prema relaciji poretka za funkcije treba samo objasniti, ali ne i dokazivati. Medjutim, osnovnu teoremu teme GRANICA FUNKCIJE o odnosu operacija sabiranja, množenja i recipročne vrednosti prema graničnoj vrednosti treba detaljno proučiti i dokazati. Ovo je značajno zbog primene na odredjivanje granične vrednosti mnogih funkcija.

Teorema 2. - Neka su funkcije f i g definisane za $x \in]x_o-\delta; x_o+\delta[$ ili $x \in]x_o-\delta; x_o+\delta[\setminus\{x_o\}$, odnosno neka su to dve funkcije sa zajedničkim domenom.

Ako je $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = y_o'$, $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = y_o''$, onda je

(a) $\lim\limits_{x\to x_o} (f(x) \pm g(x)) = y_o' \pm y_o''$

(b) $\lim\limits_{x\to x_o} (f(x) \cdot g(x)) = y_o' \cdot y_o''$

(c) $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{y_o'}{y_o''}$, pod uslovom da je u domenu $g(x) \neq 0$ i $y_o'' \neq 0$.

Za dokaz ove teoreme pogodno je koristiti definiciju granice funkcije pomoću nizova. Ilustrujmo to za deo teoreme pod (a).

S obzirom na pretpostavku teoreme za bilo koji niz vrednosti x, različit od x_o i koji pripadaju domenu $(x_n)\to x_o$, odgovarajući nizovi vrednosti funkcija su

$$(f(x_n))\to y_o' \quad \text{i} \quad (g(x_n)) \to y_o''$$

Za funkcije $f(x_n)$ i $g(x_n)$, sada sa skupa N u R, važi teorema za zbir (razliku) dva konvergentna niza, pa imamo

$$(f(x_n)) \pm (g(x_n)) \to y_o' \pm y_o''$$

Na taj način, ma kojem, ka x_o konvergentnom nizu promenljive x, odgovara konvergentan ka $y_o' \pm y_o''$ niz, a to znači da je granica funkcije $f(x) \pm g(x)$ u tački x_0 jednaka $y_0' \pm y_0''$, odnosno $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = y_0' \pm y_0''$. Slično se dokazuju (b) i (c).

Primena ove teoreme vrlo je česta u nastavnoj praksi, ali se pri tome čine i greške i to pri odredjivanju granične vrednosti razlomljene funkcije. Zato je vrlo bitno da se na te slučajeve skrene pažnja, odnosno da se pri primeni teoreme pod (c) proveri vrednost imenioca za x_0. Na primer neka treba odrediti $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$. Ne retko se dešava da se primenjuje teorema pod (c), uzimajući nekritički granicu brojioca i granicu imenioca, iako se ona može primeniti samo ako je $g(x_0) \neq 0$.

Treba ukazati da se u ovakvim slučajevima ne može neposredno primeniti teorema pod (c) i da se odredjivanje granice takvog razlomka svodi, kako se to kaže, na *ispitivanje odredjenosti*[54] $\frac{0}{0}$. U tom cilju transformiše se razlomak

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}$$

iz kojeg za sve $x \neq 4$ važi jednakost $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 8} = \frac{x-1}{x-2}$, pa su granice tih funkcija jednake medju sobom:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-1}{x-2} = \frac{3}{2}.$$

Od važnijih graničnih vrednosti funkcije u srednjoškolskoj nastavi matematike treba obraditi sledeće:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

4.3.8. U koncepciji obrade graničnih procesa po kojoj se nreprekidnost obradjuje posle granične vrednosti funkcije, pojam neprekidnosti daje se preko granice. I tada se može naj-

54) *Ako pri odredjivanju granice razlomka* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *imenilac i brojilac teže istovremeno ka nuli ili beskonačnosti, to se kaže, da taj razlomak predstavlja neodredjenost oblika* $\frac{0}{0}$ *ili* $\frac{\infty}{\infty}$.

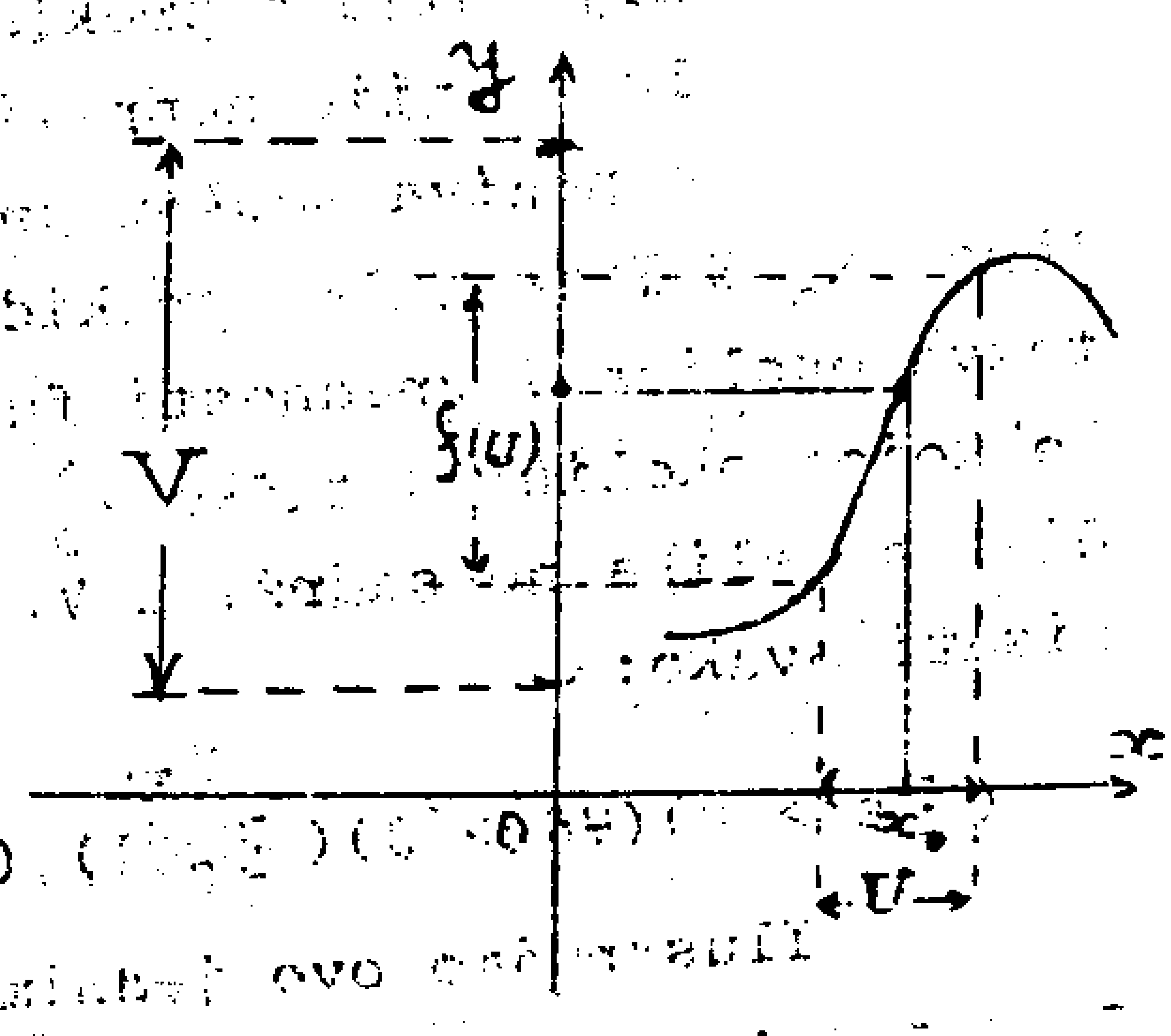
pre opisno reći da je funkcija f *neprekidna* u tački x_o, ako se njene vrednosti f(x) približavaju vrednosti funkcije $f(x_o)$, kada se x približava tački x_o. S obzirom da se o neprekidnosti može govoriti samo za one vrednosti promenljive x za koje je ta funkcija definisana i za koje važi da je $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ (granična vrednost funkcije u tački x_o jednaka je vrednosti funkcije u toj tački), to se može dati sledeća definicija neprekidnosti.

Definicija 6. – Funkcija f je neprekidna u tački x_o ako i samo ako: a) $f(x_o)$ je definisano, b) $\lim_{x \to x_o} f(x)$ postoji i c) $f(x_o) = \lim_{x \to x_o} f(x)$.

Pored ove definicije neprekidnost funkcije u tački se može definisati i nezavisno od graničnog prelaza, odnosno granice funkcije i to pomoću pojma okoline tačke (topološka definicija) i pomoću veličina "ε-δ", odnosno apsolutne vrednosti (metrička definicija). Ovaj poslednji način definisanja dat je u odeljku 4.3.6. Pomoću okoline tačke granica funkcije se definiše na sledeći način.

Definicija 7. – Neka je funkcija f definisana na intervalu I =]a; b[. Kaže se da je funkcija f neprekidna u tački $x_o \in$ I ako za *svaku* okolinu V tačke $f(x_o)$, *postoji* okolina U tačke x_o takva da je $f(U) \subseteq V$.

I u ovoj definiciji je bitno da se razjasne reči "svaku" i "postoji". To znači da ako se oko tačke $f(x_o)$ uzme bilo koji interval dužine 2ε, $]f(x_o)-\varepsilon; f(x_o)+\varepsilon[$, odnosno okolina $V(f(x_o);\varepsilon)$, pri tome će postojati interval oko x_o dužine 2δ, $]x_o-\delta; x_o+\delta[$, odnosno okolina $U(x_o;\delta)$, tako da je njegova slika po zakonu f sadržana u tom izabranom intervalu odnosno okolina V (sl. 4.18).



Slika 4.18.

Na osnovu stava: "ako je f rastuća (opadajuća) funkcija na intervalu I, a skup vrednosti f(I) je takodje interval, onda je f neprekidna" može se pokazati da je većina elementarnih funkcija, koje se proučavaju u srednjoj školi, neprekidna. Na primer, neprekidne su: $y = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$; $y = a^x$; $y = \ell g\ x$; $y = \sin x$; $y = \cos x$. Isto tako su neprekidne u oblasti svoje definisanosti funkcije $y = \mathrm{tg}\ x$ i $y = \mathrm{ctg}\ x$. Prema nekim mišljenjima pogrešno je smatrati da je $y = \mathrm{tg}\ x$ prekidna u $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $y = \mathrm{ctg}\ x$ u $x = \pi + k\pi$, jer za te vrednosti nisu ni definisane.

Pri ispitivanju odnosa neprekidnosti funkcije prema operacijama sabiranja, množenja i deljenja, po ovoj koncepciji obrade, koristi se teorema o odnosu osnovnih operacija i granične vrednosti i naravno definicija neprekidnosti funkcije preko granice funkcije. Zbog toga je dokaz teoreme: "ako su funkcije f i g neprekidne u tački x_o, onda su i funkcije

a) $f \pm g$; b) $f \cdot g$; c) $\frac{f}{g}$ $(g(x_o) \neq 0)$

takodje neprekidne u tački x_o" dosta jednostavan i treba ga dati kao vežbu za samostalan rad učenika.

U cilju što boljeg usvajanja pojma neprekidnosti, potrebno je objasniti šta biva sa funkcijom u okolini tačke u kojoj funkcija nije neprekidna. Ako funkcija f, definisana na intervalu I, nije neprekidna u nekoj tački $x_o \in I$, onda se ta tačka naziva *tačkom prekida* funkcije f. Drugačije rečeno, $x_o \in I$ je tačka prekida funkcije $f: I \to R$, ako postoji takva okolina V vrednosti funkcije $f(x_o)$ u tački x_o, da u bilo kojoj okolini U tačke x_o intervala I postoji tačka $x \in U$ čija se slika ne sadrži u V. Pomoću rastojanja to se može zapisati ovako:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in I),(|x-x_o| < \delta \wedge |f(x)-f(x_o)| \geq \varepsilon)$$

Ilustrujmo ovo jednim primerom. Funkcija $f(x) = |\mathrm{sgn}\ x|$[55]

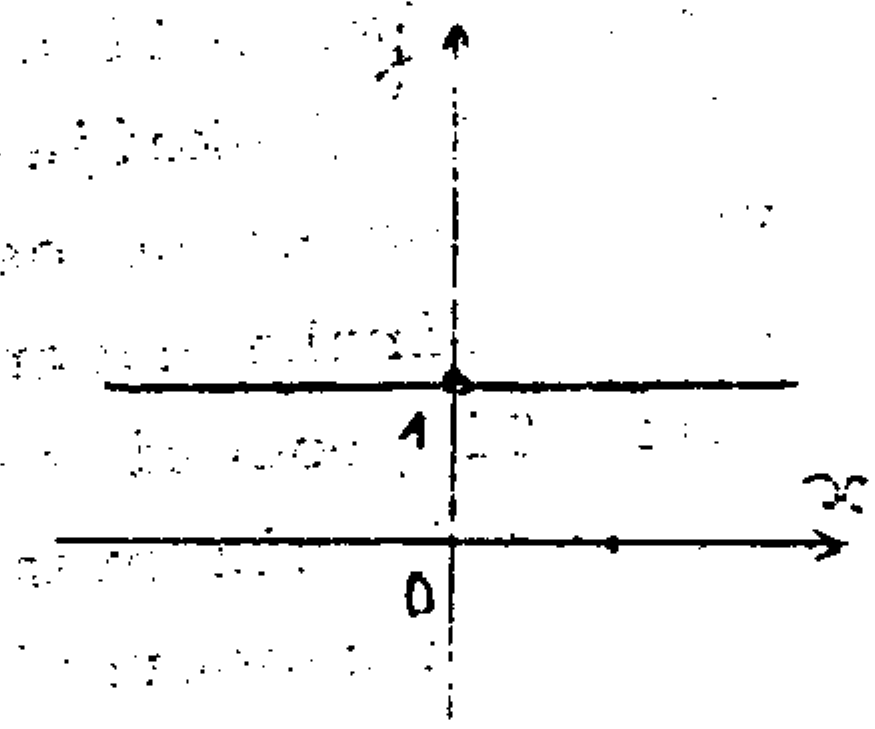
---

55) Funkcija sgn se definiše na sledeći način:

$$\mathrm{sgn}\ x = \begin{cases} 1, & za\ x > 0 \\ 0, & za\ x = 0 \\ -1, & za\ x < 0 \end{cases}$$

ima granicu $\lim |\mathrm{sgn}\, x| = 1$ za $x \to 0$, ali je $f(0) = |\mathrm{sgn}\, 0| = 0$, pa je zato $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ i 0 je tačka prekida date funkcije (sl.4.19).

Primetimo, medjutim da u datom slučaju, ako definišemo $f(0) = 1$, dobijamo funkciju neprekidnu u tački 0.



Slika 4.19.

Posebnu klasu funkcija predstavljaju Lipschitz – neprekidne funkcije. Data funkcija f je Lipschitz-neprekidna ako postoji broj k takav da za svako x_1; x_2 iz oblasti definisanosti funkcije važi Lipschitzov uslov

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k\,|x_1 - x_2|.$$

Pominjemo ih zbog toga što se javljaju mišljenja[56] da u srednjoj školi treba proučavati samo Lipschitz-neprekidne funkcije. Takva mišljenja se uglavnom zasnivaju na činjenici da su mnogi dokazi u analizi kraći i jednostavniji, pa će stoga većem broju učenika analiza biti razumljivija i moći će lakše da uoče osnovne ideje. Suprotna mišljenja ne uvažavaju objašnjenje da će L-neprekidne funkcije samo po sebi doprineti boljim efektima u nastavi analize, već će to najviše zavisiti od načina interpretacije tih funkcija, odnosno od nivoa apstrakcije na kojem se tumače te funkcije u srednjoj školi. Ideje o zastupljenosti tih funkcija u srednjoj školi, nisu za sada prihvaćene u praksi.

4.4. *Granični procesi pri zasnivanju pojma izvoda*

U dosadašnjem razmatranju graničnih procesa koji čine osnovu sadržaja matematičke analize za srednju školu, obuhvaćeno je: pojam realnog broja, granica nizova i redova, granica funkcije i neprekidnost. U daljem izlaganju predmet našeg razmatranja biće sadržaji zasnovani na dvema osnovnim vrstama graničnih procesa. Prvi procesi se odnose na odredjiva-

---

56) Karcher, H.: Analysis auf der Schule. Didaktik der Mathematik, 1. (1973), s. 46.

nje relativne brzine dveju promena, što se matematički svodi na traženje granice količnika priraštaja funkcije i priraštaja nezavisno promenljive, kada priraštaj nezavisno promenljive teži nuli. Ti procesi se nazivaju *diferenciranjem* date funkcije po datoj nezavisno promenljivoj. Druga vrsta procesa se odnosi na traženje granice zbira u kojem broj sabiraka neograničeno raste, dok sami ti sabirci teže nuli. Ti procesi se nazivaju *integraljenjem*. Obe vrste procesa imaju niz primena u drugim matematičkim disciplinama, posebno u geometriji, kao i u prirodnim i nekim tehničkim naukama. Osnovu tih procesa čini jednostavna ideja, da se izučavanje neravnomernih promena svede na osobine ravnomernih procesa. U ovom poglavlju zadržaćemo se na prvoj vrsti procesa, navodeći najpre osnovne razloge koji su zahtevali uvodjenje pojma izvoda.

4.4.1. Iako se danas u stručno-metodičkoj literaturi mogu sresti različiti načini pristupa uvodjenju pojma izvoda, ipak se ne mogu zaobići u obradi teme o izvodu funkcije neki poznati problemi koji su uslovili pojam izvoda. Pominjemo tri osnovna kojima su se bavili matematičari XVII veka i to: odredjivanje brzine kretanja, odredjivanje tangente krive i odredjivanje maksimuma i minimuma funkcije. Bez razmatranja ovih problema sa učenicima srednje škole teško da će oni moći da shvate suštinu diferencijalnog računa, iako će možda savladati odredjenu tehniku računanja u okviru tog računa. Druga činjenica, koju treba imati u vidu, jeste saznanje da se savremena matematička analiza zasniva na pojmu granice, koji se iskristalisao u jasnu formulaciju u prvoj polovini prošlog veka. Zbog toga smatramo da je necelishodno uvodjenje pojma izvoda bez graničnih procesa, pa ma to bilo i u vidu odredjene propedevtike matematičke analize. Jedan od takvih kurseva analize bez graničnih procesa konstituisali su K. Artz i K. Mütz (|9|, s. 47-63.), pri čemu se pojmu izvoda funkcije pristupa pomoću aproksimacija složenijih funkcija afinom funkcijom. Izlažući najvažnije etape pristupa diferencijalnom računu bez korišćenja granične vrednosti, oni su predvideli 23 časa nastave da bi uveli definiciju izvodda i dali osnovna pravila izvoda. Nije se pri tom stiglo da se odrede ni izvodi nekih elementarnih funkcija (na pr. $y = \sin x$), a pogotovu nisu obuhvaćene primene izvoda. Ako bi se sve ovo činilo da bi se izbegli kvantifikatori pri definisanju granične vrednosti, onda to nema dovoljno stručno-metodičkog opravdanja, a posebno to ne doprinosi racionalizaciji nastave. Zbog toga smatramo da je najbolje da se pojmu izvoda pridje na dobro poznati i mnogo primenjivani način, koji se sastoji u razmatranju dva konkretna zadatka: prvi, fizički, o odredjivanju brzine kretanja tela u datom momentu t i drugi, geometrijski, o konstrukciji tangente krive u datoj tački te krive. Navodimo ta dva zadatka, ali naglašavamo da posle njih pojam izvoda treba dovesti do tog nivoa da ga učenici shvate kao brzinu promene funkcije u odnosu na promenu nezavisno promenljive u datoj vrednosti nezavisno promenljive.

Trenutna brzina - Neka se tačka kreće po pravoj i neka funkcija $s = f(t)$ izražava zavisnost od vremena $t (a < t < b)$ njenog rastojanja (računajući znak) do početne tačke 0 prave. U momentu vremena t tačka se nalazi na rastojanju $s = f(t)$ od 0. U momentu pak vremena $t + \Delta t$ ($\Delta t \neq 0$ i predstavlja malu promenu vremena) ona se nalazi na rastojanju $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ od 0. Ovde je bitno ukazati na zavisnost Δs od t i Δt, tj. $\Delta s = f(t+\Delta t) - f(t)$. Srednja brzina tačke u intervalu vremena $(t, t+ \Delta t)$ jednaka je

$$v_{sr.} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Trenutnu, ili pravu, brzinu v tačke u momentu vremena t prirodno je odrediti kao granicu kojoj teži $v_{sr.}$ pri $\Delta t \to 0$, odnosno

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

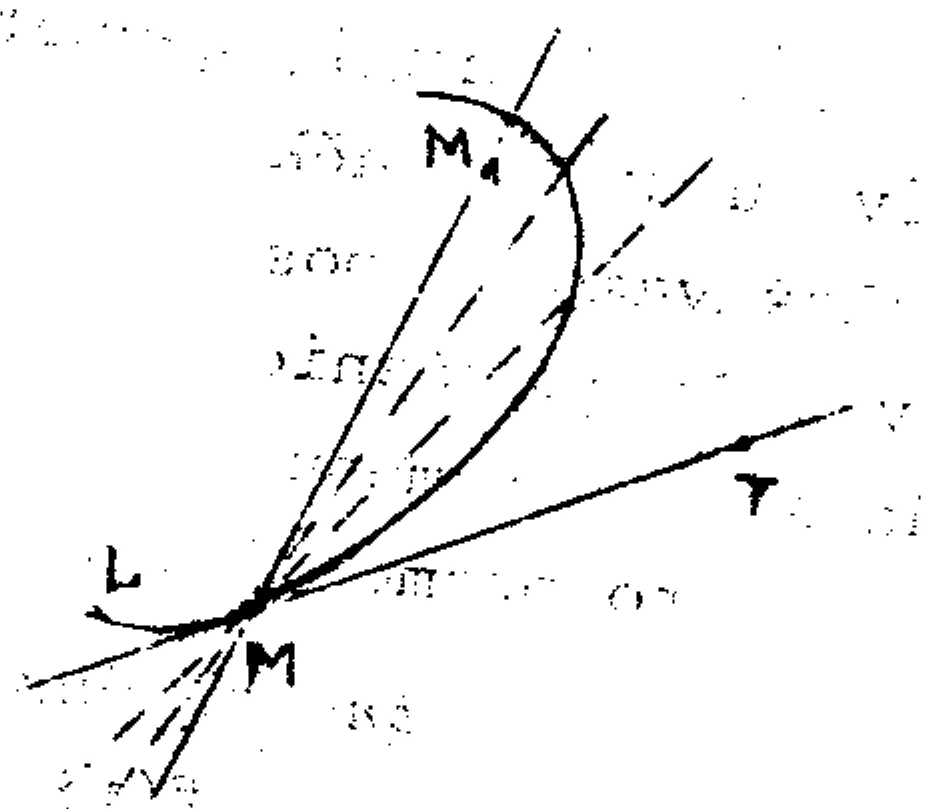
Na primer, poznato je da telo koje slobodno pada pod uticajem sile zemljine teže kreće se u bezvazdušnom prostoru po zakonu $s = \frac{gt^2}{2}$, pod pretpostavkom da put računamo sa momentom vremena t i da je brzina tela u momentu vremena $t (t>0)$ jednaka nuli. Trenutna brzina u momentu vremena t $(t \neq 0)$ jednaka je

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\frac{1}{2} g\,(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2} gt^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} g \lim_{\Delta t\to 0} \frac{2t\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t} =$$

$$= \frac{g}{2} \cdot 2t = gt$$

što predstavlja formulu $v = gt$ za brzinu jednako ubrzanog kretanja.

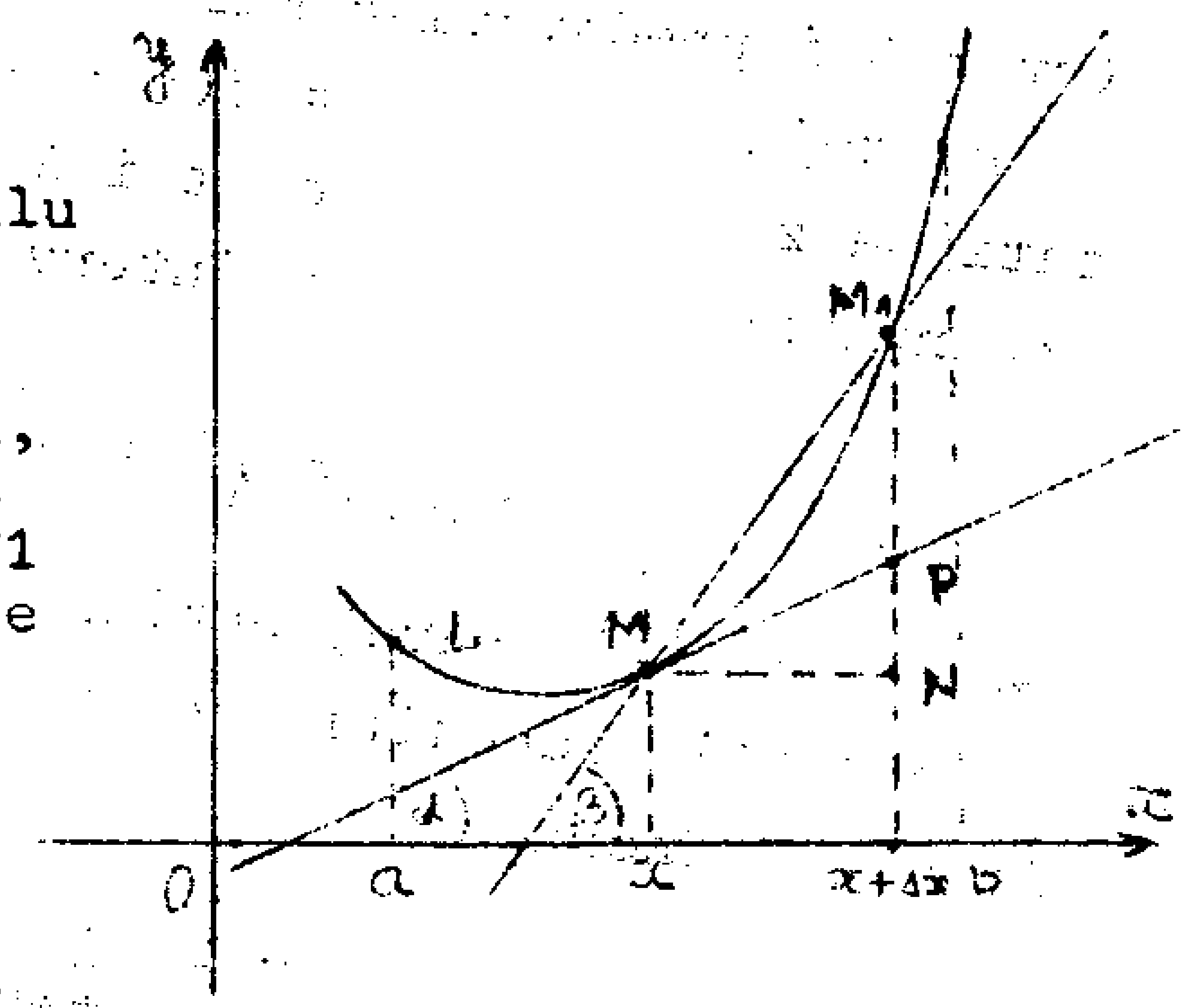
Tangenta krive. - Uprošćeni pojam tangente ("prava koja sa krugom ima jednu zajedničku tačku") sada treba dati preciznije i potpunije. Ako se tačka M_1 pomera neprekidno po krivoj L (sl. 4.20), približavajući se neograničeno tački M, onda će sečica MM_1 rotirati oko tačke M i može se desiti da će pri tome MM_1 težiti da zauzme u graničnom slučaju položaj potpuno odredjene prave MT. Ako se to ostvari (tako ne mora uvek biti), onda se kaže da kriva L ima u tački M *tangentu*, odnosno prava MT se naziva tangentom krive L u tački M.



Slika 4,20.

Neka je L grafik neprekidne funkcije f na intervalu (a,b) - sl. 4.21.

Tačke $M(x,y)$ i $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ na L odredjuju sečicu MM_1 koja sa pozitivnim smerom x-ose obrazuje ugao β. Tangens tog ugla jednak je $\text{tg}\,\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ i on daje nagib sečice MM_1 prema x-osi. Pod nagibom krive L u tački M podrazumeva se nagib tangente krive u tački M. Nagib krive L u tački M ne može se odrediti pozivanjem na krivu samo u tački M. Umesto toga mora se koristiti granični proces. Ako Δx teži nuli, onda zbog neprekidnosti funkcije f, i Δy će težiti nuli, a tačka M_1, krećući se po L težeći ka tački M. Ako pri tome (a



Slika 4.21.

to ne mora da bude!) količnik $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ teži ka jednoj konačnoj granici k, pri ma kakvom načinu teženja Δx ka nuli, onda će i ugao β težiti nekom uglu α. Zajedno sa β i sečica MM_1 će rotirati oko tačke M, težeći da zauzme u graničnom slučaju položaj prave MP, koja prolazi kroz M pod uglom α prema pozitivnom smeru x-ose. Ali tada je prava MP tangenta na L u tački M i

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$$

Utvrdili smo, da ako količnik $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pri $x \to 0$ teži konačnoj granici, onda kriva L ima u tački M tangentu, čiji je tangens ugla sa pozitivnim smerom x-ose jednak toj granici. Intuitivno je tako, ali je klasa elementarnih funkcija tako raznovrsna da se ubrzo uvidja da ne treba pojam izvoda vezivati isključivo za geometrijsku interpretaciju.

Iako su ovo bila dva različita zadatka oni su doveli do iste matematičke operacije koju treba izvršiti nad datom funkcijom, odnosno doveli su do graničnog procesa pri odredjivanju broja kojem teži količnik priraštaja funkcije i priraštaja nezavisno promenljive, kada imenilac teži nuli. Postoji veliki broj zadataka (u mehanici, geometriji, teoriji elektronike, hemiji, biologiji i dr.) koji kao rezultat imaju odredjivanje granice količnika priraštaja funkcije i priraštaja nezavisno promenljive, kada priraštaj nezavisno promenljive teži nuli. Ta operacija u matematici ima poseban naziv - *diferenciranje funkcije*, a rezultat operacije se zove - *izvod*.

Prethodno učenici trèba da budu motivisani time što će rešavati takve zadatke, za čije rešavanje su neophodne do tada neprimenjivane i njima nepoznate metode. Time želimo da naglasimo da se o osnovnim psihološkim principima mora voditi računa i kod učenika srednjoškolskog uzrasta. Za uspešnu nastavu je neophodno da gradivo bude tako strukturirano da učenici na ovom uzrastu ne samo nauče ono što se programom predvidja, već i da to shvate i razumeju suštinu. Zato se treba i ovde pridržavati principa "od konkretnog ka apstraktnom", "od jednostavnog ka složenom" i sl. Pre obrade teme IZVOD FUNKCIJE treba ponoviti odredjeno prethodno gradivo, a u prvom redu granicu funkcije, neprekidnost funkcije, monotonost, odnosno rašćenje i opadanje.

Pri ponavljanju gradiva bitno je ukazati na metode utvrdjivanja rašćenja (opadanja) funkcije i njene neprekidnosti, pri čemu se koristi priraštaj funkcije. Naime, treba ukazati na formulaciju: "da bi funkcija f rasla na intervalu $]a;b[$, neophodno je i dovoljno, da za bilo koje $x_o \in]a;b[$ važi uslov $\frac{\Delta f(x_o)}{\Delta x} > 0$ za bilo koje Δx, tako da $(x + \Delta x) \in]a;b[$. Isto tako prethodno uvedena definicija neprekidnosti u tački x_o ($\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$), može se sada formulisati u drugom vidu: "funkcija f je neprekidna u tački x_o, ako je $\lim\limits_{\Delta x \to o} \Delta f(x_o) = 0$".

Problem brzine treba učenicima ilustrovati i konkretnim primerima odredjivanja srednje i trenutne brzine. Na primer, neka se neko telo kreće po zakonu $s(t) = 3t + 5$ (s je put u metrima, a t vreme u sekundama). Na kraju treće sekunde posle početka kretanja telo predje $s(3) = 14$ m, na kraju pete sekunde predjeni put je $s(5) = 20$ m. Srednja brzina kretanja na tom intervalu vremena jednaka je:

$$\frac{s(5) - s(3)}{5 - 3}, \text{ odnosno } v_{sr.} = 3 \text{ m/sec.}$$

Zatim treba pokazati da se isti rezultat dobije za v_{sr}, na bilo kojem intervalu vremena $[t_o; t_1]$. Naime, u tom slučaju imamo

$$v_{sr} = \frac{s(t_1) - s(t_o)}{t_1 - t_o} = \frac{(3t_1 + 5) - (3t_o + 5)}{t_1 - t_o} = 3, \text{ odnosno}$$

$v_{sr.} = 3$ m/sec.

U oznakama $t_1 - t_o = \Delta t$ (priraštaj vremena u tački t_o) i $s(t_1) - s(t_o) = \Delta s(t)$ (priraštaj puta) biće:

$$v_{sr.} = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = 3 \text{ m/sec.}$$

U ovom slučaju imamo kretanje sa konstantnom brzinom (ravnomerno kretanje).

Neka je sada zakon kretanja $s(t) = \frac{gt^2}{2}$, a to je put kod slobodnog padanja. U momentu vremena t_o predjeni put jednak je $s(t_o) = gt_o^2/2$. Ako se vreme promeni za Δt, onda će u momentu vremena $t_o + \Delta t$ predjeni put biti jednak $s(t_o + \Delta t) = \frac{g}{2}(t_o + \Delta t)^2$. U tom slučaju za vreme Δt veličina predjenog puta se uvećava za $\Delta s(t) = s(t_o+\Delta t) - s(t_o)$. Srednja brzina kretanja na intervalu vremena Δt biće: $v_{sr} = 2t_o + \Delta t$, što znači da srednja brzina zavisi od t, pa je za različite vrednosti t srednja brzina različita. Prema tome ona se ne može uzeti kao pouzdana karakteristika kretanja i zato se uzima kao tačnija karakteristika kretanja trenutna brzina u odredjenom momentu:

$$v_{tr} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$$

Posle ovakvih i sličnih primera može se dati definicija izvoda funkcije kao brzine promene funkcije u tački:

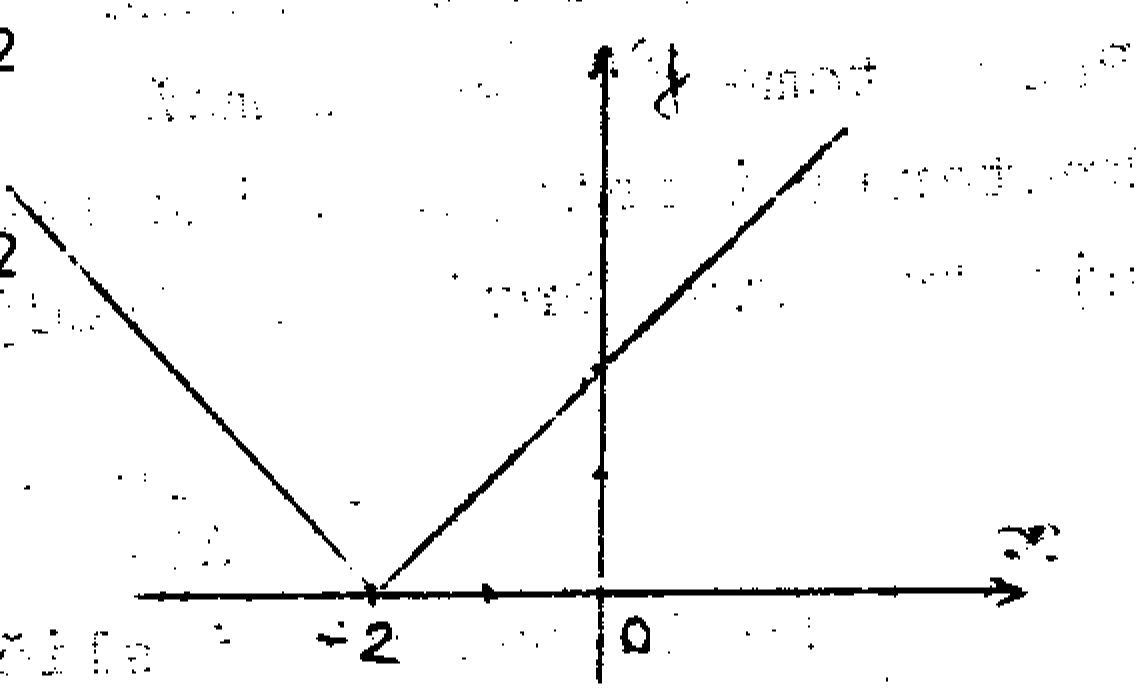
$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Pri tome treba skrenuti pažnju na to da je za egzistenciju izvoda u datoj tački x_o, neophodno da u bilo kojoj okolini te tačke, sem u $x = x_o$, količnik $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ bude definisan i da u toj okolini i samoj tački x_o funkcija f postoji. Isto tako treba istaći da je izvod funkcije u tački odredjen broj, a ako se x_o smatra promenljivom, onda je izvod funkcije opet funkcija.

U vezi sa dva napred navedena zadatka sada treba dopuniti formulacije njihovih rešenja: prvo, brzina tačke, čiji je predjeni put s funkcija od vremena t, odnosno $s = f(t)$, jednaka je izvodu te funkcije $s' = f'(t)$ i drugo, tangens ugla između tangente krive f, odnosno L, u tački čija je apscisa x i pozitivnog smera x-ose, jednak je izvodu $f'(x)$ funkcije f u toj tački; izvod je koeficijent pravca tangente u toj tački.

4.4.2. Odnos neprekidnosti funkcije u tački i njenog izvoda u toj tački treba pažljivo proučiti. Pored dokaza teoreme: "ako funkcija $f: S \to R$, $S \subset R$ ima u tački $x \in S$

izvod $f'(x)$, onda je f neprekidna u toj tački", treba navesti i neke primere da obrnuta teorema ne važi, odnosno: "ako je funkcija neprekidna u tački x_o, ona ne mora imati i izvod u toj tački". Ovo ističemo zbog toga što je za shvatanje jednog pojma od bitnog značaja i upoznavanje sa njegovom negacijom, odnosno treba dati i takve zadatke u kojima izvod funkcije ne postoji, iako je ona neprekidna u toj tački. Na primer, funkcija $y = |x + 2|$ je neprekidna za sve $x \in D(f)$, pa i za $x = -2$. Medjutim, ta funkcija ima izvod za $x < -2$ i to $y' = -1$ i za $x > -2$ i to je $y' = 1$, dok za $x = -2$ izvod ne postoji, jer u tački $x = -2$ priraštaju Δx odgovara priraštaj funkcije $\Delta y = |\Delta x|$, pa $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ ne postoji. Ovo se može pokazati i pomoću pojma levog i desnog izvoda funkcije u tački pod uslovom

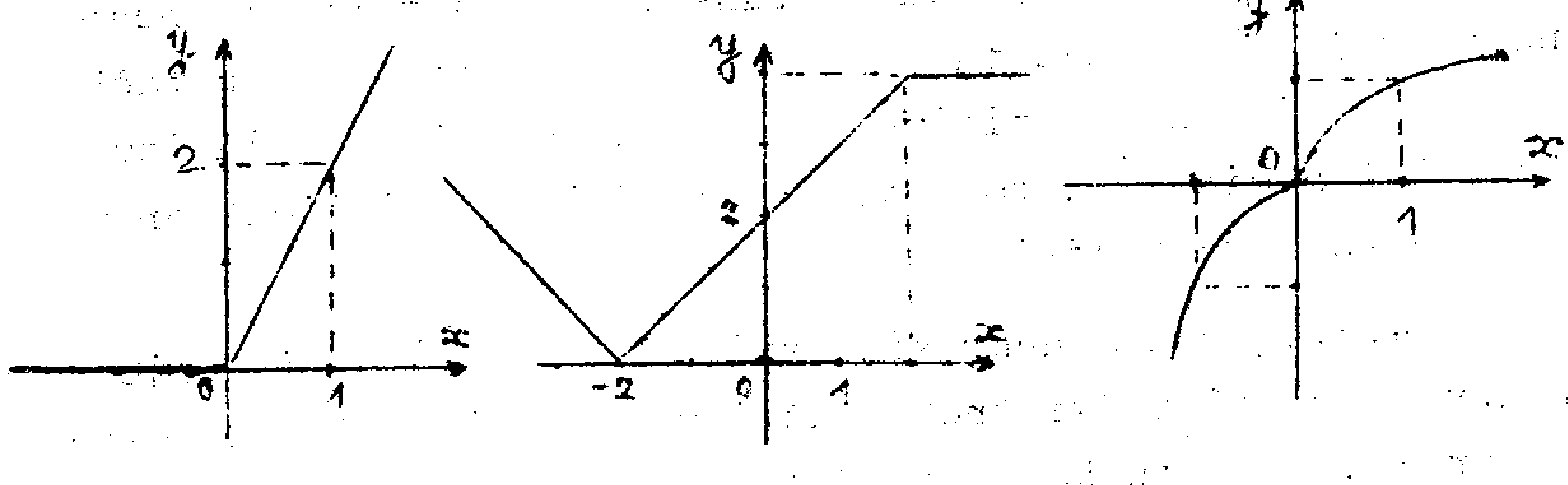


Slika 4.22.

da se prethodno dâ pojam levog i desnog limesa. Naime, ako postoje $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, kada $x \to 0-$ ili $x \to 0+$ (x teži nuli s leve ili s desne strane), onda se ta granična vrednost zove *levi* ili *desni izvod* funkcije f u tački x_o, u oznaci $f'_-(x_o)$ i $f'_+(x_o)$. Da bi funkcija f imala izvod u tački x_o potrebno je i dovoljno da ima i levi i desni izvod u tački x_o i da je $f'_-(x_o) = f'_+(x_o)$. Ukoliko je $f'_-(x_o) \neq f'_+(x_o)$, onda funkcija f nema izvod u tački x_o, a grafik te funkcije nema tangentu u toj tački. To je slučaj sa posmatranom funkcijom $f(x) = |x + 2|$, jer je $f'_-(-2) = -1 \neq 1 = f'_+(-2)$.

Pogodno je navesti još neke takve primere kao što su.

a) $y = x + |x|$ b) $y = \begin{cases} -x-2, & x \leq -2 \\ x+2, & -2<x<2 \\ 4, & x>2 \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} -x^2, & x\leq 0 \\ \sqrt{x}, & x>0 \end{cases}$



Slika 4.23.

Prva i treća od datih funkcija, iako su neprekidne u svim tačkama, nemaju izvod u tački $x = 0$, odnosno u toj tački nemaju tangentu. Slično važi i za funkciju pod b) u tačkama $x = -2$ i $x = 2$.

4.4.3. Jedna od važnih teorema koju treba dokazati u srednjoškolskoj nastavi analize pri obradi izvoda, odnosi se na pravila izračunavanja izvoda zbira, proizvoda i količnika funkcija. Bitno je da se pri tome precizno formuliše teorema sa pretpostavkom o postojanju izvoda funkcije čije se algebarske kombinacije uzimaju i da se pri dokazu istakne granični proces. Dajemo jednu od mogućih formulacija teoreme:

Neka su funkcije $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ definisane u nekoj okolini tačke x_o i neka imaju izvod u taoj tački.

Tada: a) njihov *zbir* $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ takodje ima izvod u tački x_o, u oznaci $(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'$;

b) njihov *proizvod* $y_1y_2 = f_1(x)f_2(x)$ takodje ima izvod u tački x_o, u oznaci $(y_1y_2)' = y_1'y_2 + y_1y_2'$;

c) njihov *količnik* $\frac{y_1}{y_2} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ima takodje izvod u tački x_o, u oznaci $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2^2}$,

pod uslovom da je $y_2 \neq 0$ u tački x_o.

Pri dokazu se koriste poznate algebarske transformacije uz korišćenje sledećih oznaka: $\Delta y_1 = f_1(x_o+\Delta x) - f_1(x_o)$, $\Delta y_2 = f_2(x_o+\Delta x) - f_2(x_o)$, odakle za zbir $y = f_1(x)+f_2(x)$ imamo $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$, za proizvod $y = f_1(x)f_2(x)$ je $\Delta y = \Delta y_1 f_2(x_o) + f_1(x_o)\Delta y_2 + \Delta y_1 \Delta y_2$ i za količnik $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ $(f_2(x) \neq 0)$ je

$$\Delta y = \frac{\Delta y_1 f_2(x_o) - f_1(x_o)\Delta y_2}{(f_2(x_o) + \Delta y_2) f_2(x_o)}$$

Primenjujući potom granični proces, kada $\Delta x \to 0$, pri čemu je po pretpostavci $\lim\limits_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} = y_1'$ i $\lim\limits_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = y_2'$ dobija se:

za zbir

$$\lim_{\Delta x\to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to o} \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}\right), \text{ odnosno } y' = y_1' + y_2'$$

za proizvod

$$\lim_{\Delta x\to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to o} \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} f_2(x_o) + f_1(x_o) \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \Delta y_2\right), \text{ odnosno}$$

$$\underline{y' = y_1'y_2 + y_1y_2'}, \text{ i}$$

za količnik

$$\lim_{\Delta x\to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to o} \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} f_2(x_o) - f_1(x_o) \frac{\Delta y_2}{\Delta x}}{(f_2(x_o) + \Delta y_2) f_2(x_o)}, \text{ odnosno}$$

$$y' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2^2}$$

Slično se postupa pri odredjivanju izvoda složene i inverzne funkcije, ali te teoreme u srednjoj školi ne treba dokazivati. Medjutim, potrebno je dobro objasniti formule, odnosno sadržaje tih teorema: a) ako funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački x_o, a funkcija $z = \phi(y)$ ima izvod u tački $y_o = f(x_o)$, onda složena funkcija $F(x) = \phi(f(x))$ takodje ima izvod u tački x_o, pri čemu je $F'(x) = \phi'(y).f'(x)$; b) ako je funkcija $y = f(x)$ neprekidna i strogo monotona u nekoj okolini tačke x_o i ako za $x = x_o$ postoji izvod $f'(x_o) \neq 0$, onda i inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$ ima izvod u tački $y_o = f(x_o)$, pri čemu je $(f^{-1}(y_o))' = \frac{1}{f'(x_o)}$. U prvoj od ovih teorema bitno je naglasiti da obe funkcije f i ϕ imaju izvod, a kod druge, pored toga, da je funkcija f neprekidna i strogo monotono rastuća.

4.5. Granični procesi pri zasnivanju pojma integrala

U uvodu prethodnog poglavlja (v. 4.4.) govorili smo o dve vrste graničnih procesa, od kojih je prva detaljnije razmatrana u tom poglavlju. Sada ćemo se pozabaviti onom drugom vrstom graničnih procesa koji se odnose na izračunavanje granice zbira u kojem broj sabiraka neograničeno raste, dok sami ti sabirci teže nuli. Ta vrsta graničnih procesa dovodi do operacije integraljenja i do pojma integrala. Kao i kod diferenciranja i ovde je niz praktičnih zadataka, kroz dugi period vremena, podsticao razvijanje jedne nove operacije - izračunavanje granica specijalnih zbirova, koja ima neobično veliku primenu u mnogim prirodnim i tehničkim naukama. Zbog toga integraljenje u matematici ne treba shvatiti samo kao obrnutu operaciju diferenciranju, već i kao operaciju pomoću koje se rešavaju konkretni zadaci, kao što je na primer: izračunavanje površine ograničene krivim linijama, dužine luka, zapremine obrtne površine, brzine, puta, rada,momenta inercije, mase itd.

Sa stanovišta nastave matematike u srednjoj školi, posebno u obradi gradiva iz analize, nameće se i pitanje redosleda izlaganja sadržaja iz teme INTEGRALNI RAČUN, odnosno da li početi sa pojmom odredjenog ili neodredjenog integrala[57]. Ako se ima u vidu suština pojma integrala i njegovih primena, onda se mora prednost dati pojmu odredjenog integrala. Ako se pak želi što pre postići odredjena tehnika izračunavanja integrala nekih elementarnih funkcija, onda obrada treba da počne pojmom primitivne funkcije i neodredjenog integrala. Pri tome se mora uvek imati u vidu, kako kaže Kolmogorov[58], da su integral kao granica zbira (odredjeni integral) i integral kao aditivna funkcija sa zadanim izvodom, dva ravnopravna aspekta pojma integrala. Poseban pristup integralnom računu primenjuje se u srednjim školama SSSR, koji se sastoji u sledećem: najpre se daje pojam primitivne funkcije, njene osobine i pravila odredjivanja; zatim se izračunava površina krivolinijskog trapeza pomoću pri-

---

57) A.J. Hinčin smatra da je "sa formalne strane, sasvim svejedno koji od ta dva puta biramo, ali je u suštini teško, pa čak možda i nemoguće tvrditi da ovaj ili onaj put zaslužuje prednost pred onim drugim" (|54|, s. 154).

58) А.Н.Колмогоров : ИНТЕГРАЛ В УЧЕБНОМ ПОСОБИИ ДЛЯ Х КЛАССА. Москва, Математика в школе, 6(1976), с. 15-18.

mitivne funkcije, daje se formula Njutn-Lajbnica, integral sa gornjom promenljivom granicom i najzad integral kao granica zbira. Ustvari, može se uočiti da se ne spominje pojam "neodredjeni integral", dok se za pojam "odredjeni integral" jednostavno kaže integral. Karakteristične su dve definicije iz takvog pristupa. Prva je: *integralom* od a do b funkcije f naziva se priraštaj primitivne funkcije F te funkcije: F(b) - F(a) i druga: granica

$$S = \lim_{n\to\infty} \Sigma_n(a; b) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))$$

naziva se (po definiciji) *integralom* funkcije f od a do b i označava se sa

$$\int_a^b f(x)\,dx, \text{ odnosno}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_n (a; b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

U obe ove definicije upotrebljava se samo termin "integral", a ne "odredjeni integral". U udžbeniku za 10-ti razred srednje škole u SSSR pod redakcijom A.N. Kolmogorova ([75], s.85), stoji i ova napomena: "U mnogim udžbenicima integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sa zadanim granicama a i b naziva se 'odredjenim integralom'. To se čini u onim udžbenicima u kojima se primitivna funkcija i uopšte izraz primitivne funkcije u obliku F(x) + C naziva 'neodredjenim integralom'. Tada, za razliku od 'neodredjenog integrala' integral $\int_a^b f(x)\,dx$ treba posebno da se nazove - 'odredjeni integral'. Mi se tom terminologijom nećemo koristiti". Treba napomenuti da je ovakav pristup pojmu integrala dosta pojednostavljen, što se može objasniti činjenicom da je pomenuti udžbenik namenjen svim srednjoškolcima (10. razred srednje škole u SSSR spada u obavezno školovanje za sve mlade). Navedene dve definicije se razlikuju po svojoj suštini, odnosno prva je zasnovana na priraštaju primitivne funkcije, dok je osnova druge - granični proces.

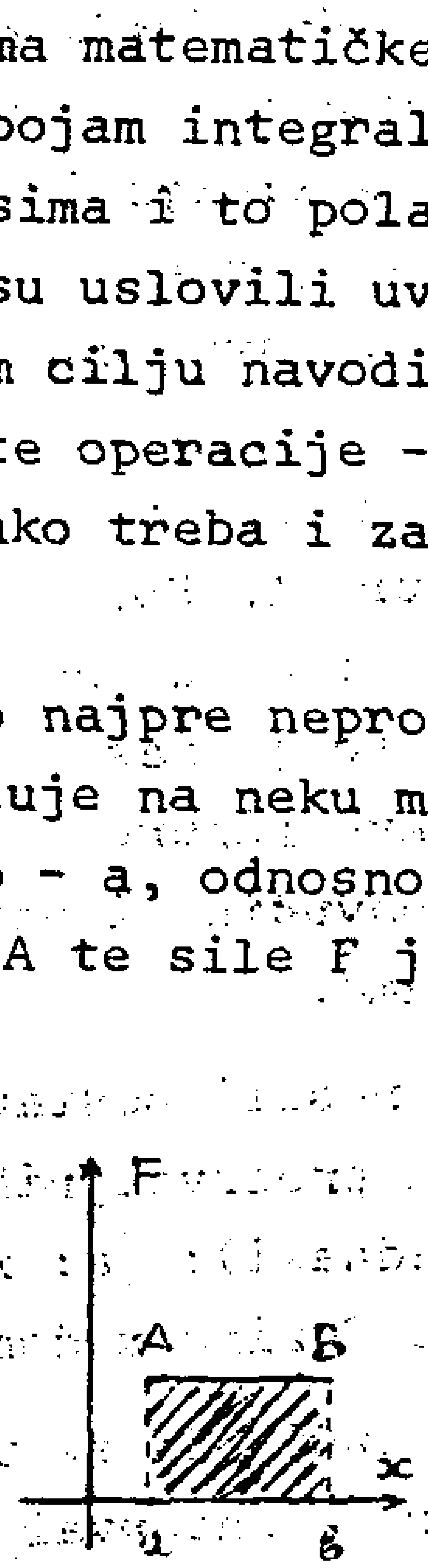
Napomenimo da ima i takvih predloga da se pojam integrala, kao i izvoda, uvede bez korišćenja pojma granice (|9|, s. 59-61), ali takva nastojanja za sada nisu prihvaćena u nastavnoj praksi. K. Artz. i K. Mütz ističu da takav način uvodjenja diferencijalnog i integralnog računa ima prednosti zbog lakšeg shvatanja ovih pojmova i njihovog manjeg broja, ali nijedna komisija za nastavne planove nije imala hrabrosti da preporuči takav program (|9|, s. 63.).

Da bi učenici srednje škole ovladali pojmovima izvoda i integrala u potrebnoj meri, neophodno je da prethodno dobro usvoje pojam graničnog procesa i graničnog prelaza. Sa stanovišta struktuiranja gradiva smatramo da je osnovni zadatak matematičke analize u srednjoj školi da upozna učenike sa nekim osnovnim pojmovima i primenama iz graničnih procesa, a takodje i da obezbedi solidnu osnovu za dalje upoznavanje svršenih srednjoškolaca sa teorijskim osnovama, metodama i praktičnim primenama matematičke analize. Zato je naše opredeljenje da se i pojam integrala u srednjoj školi zasnuje na graničnim procesima i to polazeći od rešavanja konkretnih zadataka koji su uslovili uvodjenje pojma integraljenja i integrala. U tom cilju navodimo dva raznorodna zadatka, koji dovode do iste operacije - sumiranje posebnih sabiraka, smatrajući da tako treba i započeti integralni račun u srednjoj školi.

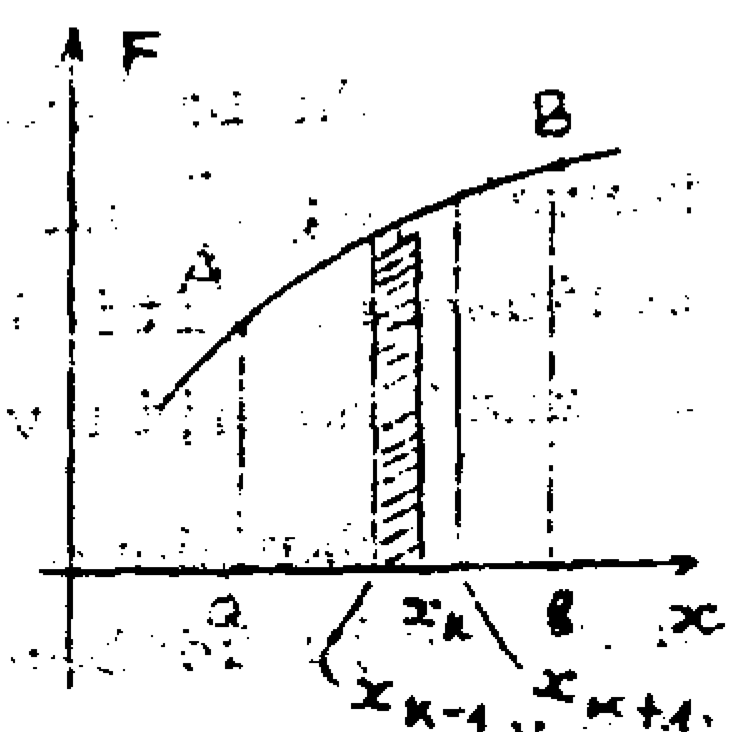
Rad sile. Posmatraćemo najpre nepromenljivu silu $F = c$ u smeru x - ose koja deluje na neku materijalnu tačku, pri čemu je pomera za dužinu $b - a$, odnosno iz tačke A u tačku B (sl. 4.24.). Tada je rad A te sile F jednak

$$A = c\,(b - a).$$

Ako sila F nije konstantna, onda ćemo za odredjivanje rada sile od tačke A do tačke B, podeliti interval $[a, b]$ na n dovoljno malih takо da



Slika 4.24.



Slika 4.25.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Označimo dužin k-og intervala sa Δx_k. Zbog toga što je dužina intervala mala, u krajevima svakog intervala, sila se može smatrati konstantnom i jednaka je $F(\xi_k)$, gde je ξ_k jedna od tačaka k-og intervala $[x_{k-1}, x_k]$. Tada je rad sile na tom intervalu

$$\Delta A \approx F(\xi_k)\,\Delta x_k \; .$$

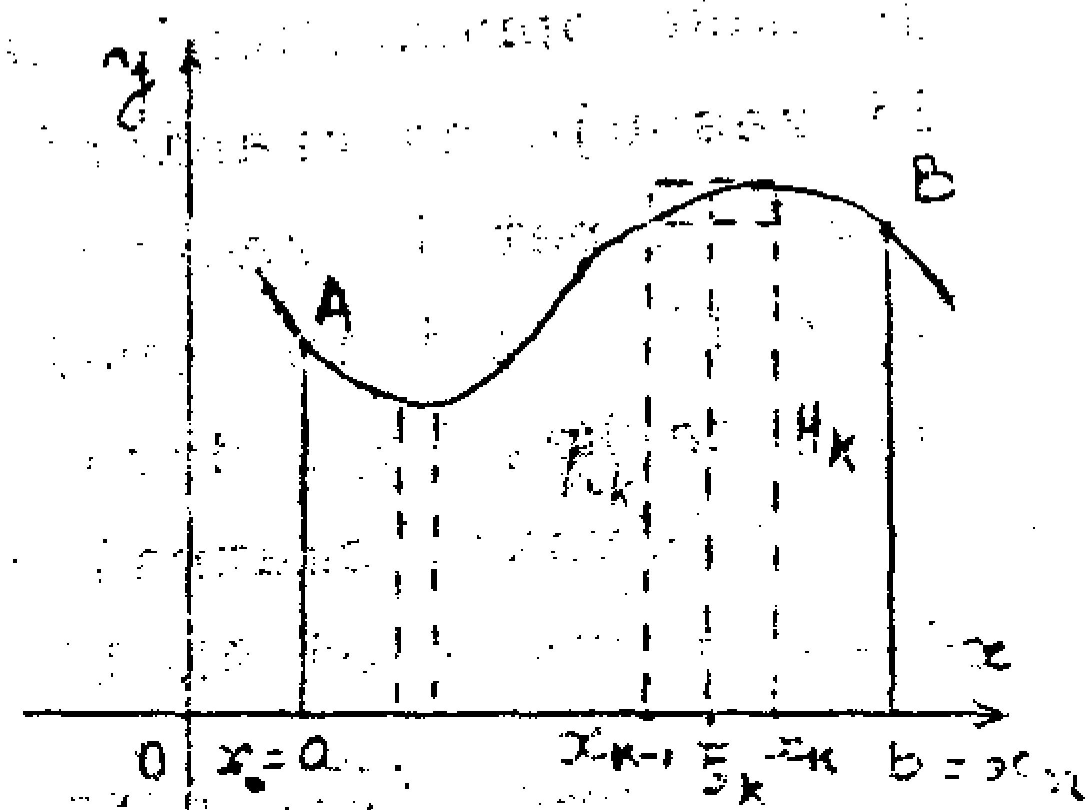
Rad sile na celom putu od tačke A do tačke B približno je jednak

$$A \approx F(\xi_1)\,\Delta x_1 + \ldots + F(\xi_n)\,\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\,\Delta x_k .$$

U graničnom procesu pri teženju Δx_k ka nuli, taj zbir postaje sve tačniji, odnosno

$$A = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\,\Delta x_k$$

Površina krivolinijskog trapeza. Krivolinijskim trapezom nazivamo ravnu figuru ograničenu delom grafika funkcije $y = f(x)$ - kriva linija i delovima pravih $y = 0$, $x = a$ i $x = b$ (sl. 4.26). Data funkcija f je definisana, neprekidna i pozitivna u intervalu $[a; b]$. Pošto figura (aABb) nije elementarna, čije su nam površine poznate, to je naš zadatak da za ovakve figure definišemo pojam površine i potom nadjemo način kako tu površinu i da izračunamo.



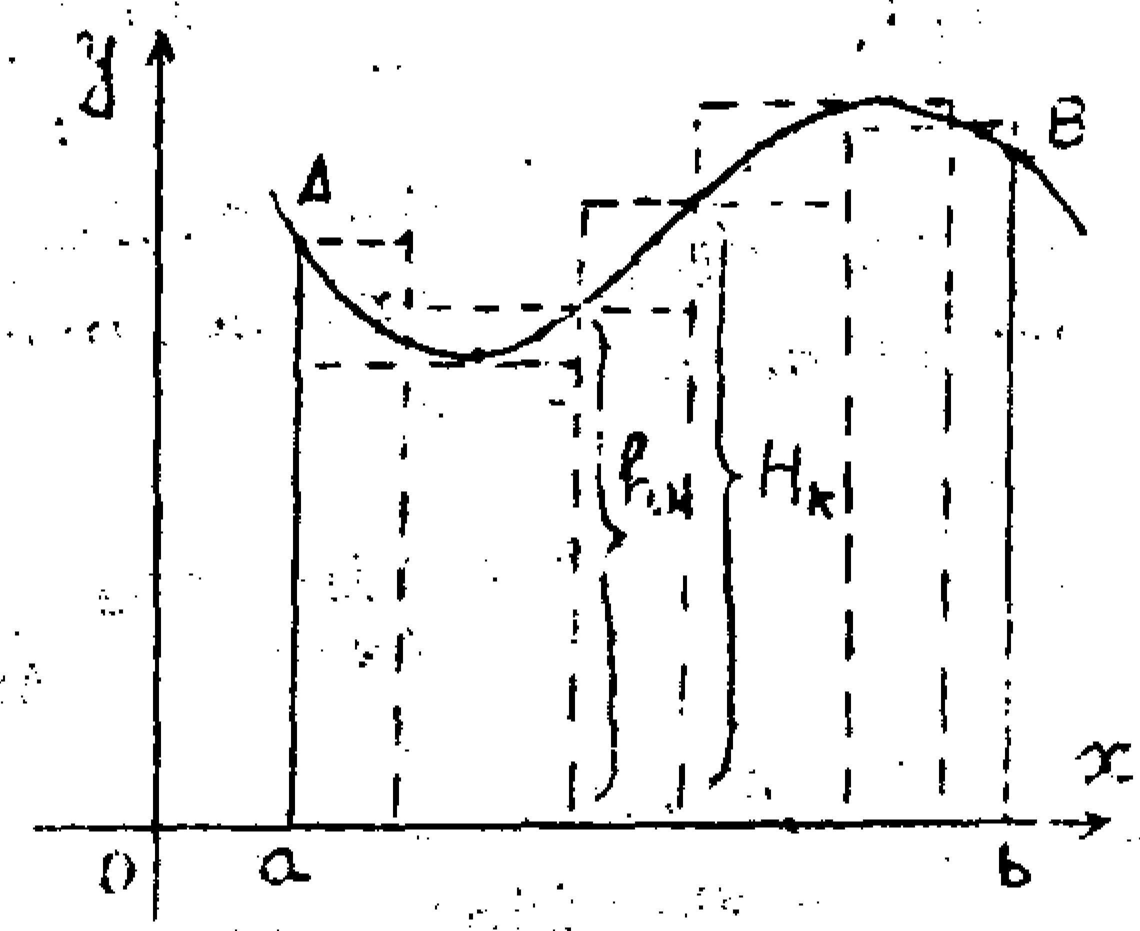
Slika 4.26.

Da bi smo rešili postavljeni zadatak podelimo interval $[a; b]$ na n proizvoljnih delova (ti delovi ne moraju medjusobno biti jednaki): $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; b]$ i označimo njihove dužine redom sa Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n.

Skrećemo pažnju da se u nastavnoj praksi, a i u dobrom broju udžbenika, interval $[a; b]$ deli na n jednakih delova, što po našem mišljenju više odmaže nego što doprinosi shvatanju pojma integrala.

Ako se u deonim tačkama povuku prave paralelne y-osi onda je krivolinijski trapez podeljen na n malih krivolinijskih trapeza. Zamislimo da je svaki od tih malih trapeza pravougaonik čija je osnovica ista kao i u malog trapeza, a visina se podudara sa jednom od njegovih ordinata. Za slučaj da se podudara sa manjom od orginata h_k trapeza, onda je površina jednog od pravougaonika jednaka $h_k\ \Delta x_k$, a zbir svih takvih pravougaonika

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} h_k \Delta x_k$ može se uzeti za površinu krivolinijskog trapeza, izračunatu sa umanjenjem (sl. 4.27). Ako se pak visina podudara sa većom od ordinata H_k trapeza, onda je površina jednog od pravougaonika jednaka $H_k\ \Delta x_k$, a zbir $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} H_k\ \Delta x_k$ može se uzeti za površinu krivolinijskog trapeza izračunatu sa uvećanjem (sl. 4.27.).



Slika 4.27.

Ako sada u svakom od intervala uzmemo po jednu tačku i označimo ih sa $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, tako da je
$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1,\ x_1 \le \xi_2 \le x_2, \ldots, x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$
a zatim u svakoj od tih tačaka izračunavamo vrednost funkcije $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$, onda je

$$Q = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Pri proizvoljnom $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ vrednost funkcije $f(\xi_k)$ će zadovoljavati nejednakost $h_k \le f(\xi_k) \le H_k$. S obzirom da su svi $\Delta x_k > 0$ dobijamo $h_k \Delta x_k \le f(\xi_k)\Delta x_k \le H_k \Delta x_k$. Odatle sledi

$$\sum_{k=1}^{n} h_k\ \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} H_k \Delta x_k, \text{ odnosno}$$

$$s_n \le Q \le S_n$$

Geometrijski smisao ove dvojne nejednakosti pri $f(x) \ge 0$

sastoji se u tome, da je figura čija je površina jednaka Q ograničena linijom koja se nalazi izmedju "upisane" i "opisane" izlomljene linije.

Koristeći neprekidnost funkcije f, može se dokazati, da postoje i da su medjusobno jednake granice promenljivih s_n i S_n, pri $\Delta x_k \to 0$ i da one ne zavise od načina podele intervala $[a; b]$ na delove, odnosno

$$\lim_{\Delta x \to o} s_n = \lim_{\Delta x \to o} Q = \lim_{\Delta x \to o} S_n .$$

Na taj način, površina krivolinijskog trapeza (aABb) ograničenog grafikom funkcije f (f je definisana, neprekidna i pozitivna na intervalu $[a; b]$), osom Ox ($y = 0$) i pravama $x = a$, $x = b$, jeste granica S, kojoj teži površina Q stepenastih figura, pri neograničenom uvećavanju broja n intervala deobe i $\Delta x_k \to 0$:

$$S = \lim_{\Delta x \to o} Q = \lim_{\Delta x \to o} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta x_k$$

U oba ova zadatka do rešenja se došlo primenom graničnog procesa na specijalne zbirove, ali je bitno još uočiti i to, da iako su rešavani zadaci raznorodni, oni daju osnovu za opšti metod rešavanja svih onih zadataka koji se mogu svesti na izračunavanje granice zbira čiji se broj sabiraka oblika $f(x_k)\Delta x_k$ neograničeno uvećava, a pri tome svaki od sabiraka teži nuli, odnosno $\Delta x_k \to 0$. Zato je neophodno naglasiti učenicima da će se posle ovoga rešavati opšti zadatak takvog tipa, odnosno uvešće se pojam integraljenja i pojam odredjenog integrala. Pri rešavanju prethodna dva zadatka često smo samo "pokazivali", ali ne i dokazivali pojedine etape, odnosno nije bila zastupljena potrebna rigoroznost. Medjutim, ako se želi da se potpuno opravda korišćenje ovakve metode rešavanja zadataka, neophodno je da se daju rigorozni dokazi pojedinih tvrdjenja. Razmotrimo taj proces, odnosnu metodu rešavanja, nezavisno od konkretnog sadržaja ovog ili onog zadatka. Jedan od mogućih načina za rešavanje tog opšteg zadatka, učenicima dovoljno prihvatljiv i jasan, bio bi: formiranje gornjih i donjih zbirova (suma); utvrdjivanja monotonosti nizova tih suma kada se broj tačaka uvećava dodavanjem novih; primena graničnog procesa i dokaz da donje i gornje sume teže svaka svojoj granici; dokaz da donje i gornje sume teže istoj granici i definicija odredjenog integrala; neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom je uniformno neprekidna i nezavisnost granice od načina podele intervala $[a; b]$; R - integrabilnost nekih funkcija. Pri tome smatramo da je ovakva struktura prikladna za učenike matematičkog usmerenja, odnosno za one učenike koji su se opredelili za detaljnije izučavanje matematike. Inače ta struktura se može izostaviti, ako se radi o učenicima ostalih usmerenja i dati definiciju odredjenog integrala pomoću primitivne funkcije i osnovne teoreme integralnog računa, odnosno Newton-Leibnitzove formule.

4.5.1. *Formiranje donjih i gornjih zbirova (suma).* Neka je data funkcija f definisana, ograničena i pozitivna u intervalu $[a; b]$. Pod *podelom* τ intervala $[a; b]$ podrazumeva se bilo koji konačan sistem njegovih tačaka x_i, $i = 0,1,2,\ldots, k$ takav da je

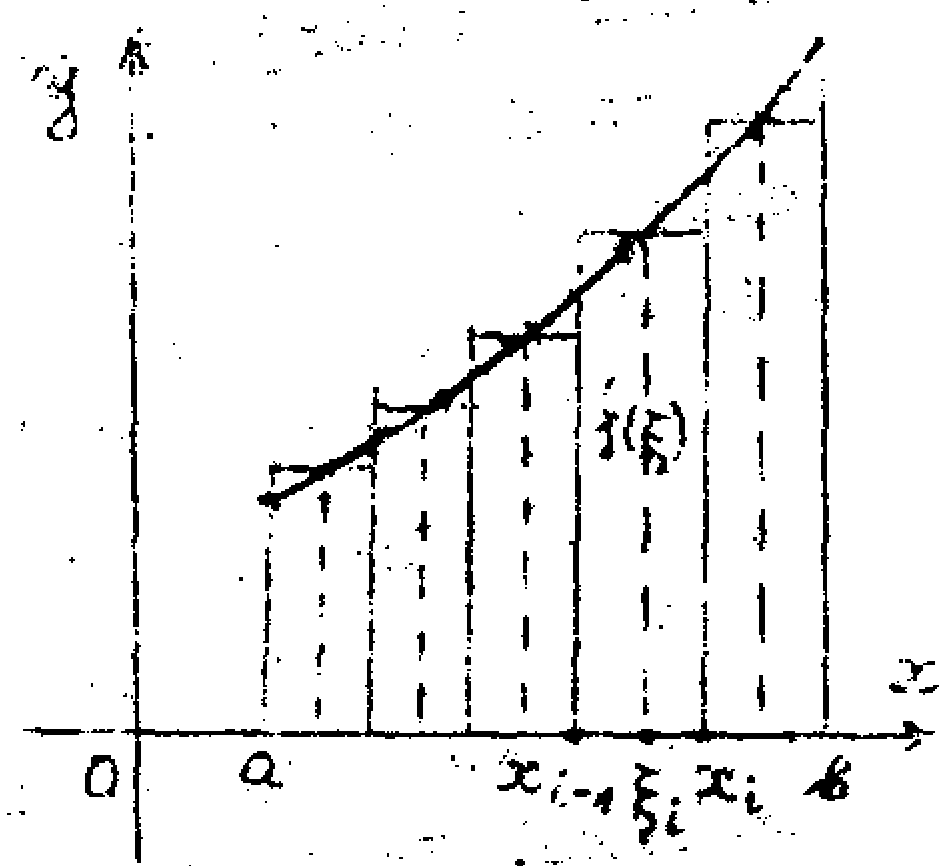
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$$

Ovde treba skrenuti pažnju učenicima na reči "bilo koji konačan sistem tačaka", odnosno da podela intervala se ne vrši na jednake delove.

Podela τ intervala $[a; b]$ označava se sa $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ i ona sadrži k manjih intervala, od kojih se svaki $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,\ldots, k$ naziva *intervalom podele* τ Dužina tih intervala označava se sa Δx_i, pri čemu je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,2,\ldots,k$. Veličina $\delta\tau = \max \Delta x_i$, $i = 1,2,\ldots,k$. naziva se *dijametar podele* τ.

Za dve podele τ_1 i τ_2 kažemo da je τ_2 *finija* od τ_1 ako podela τ_2 sadrži sve deone tačke podele τ_1 odnosno ako je $T_{11}\ T_{22}$. Podela τ naziva se superpozicija podele τ_1 i τ_2 ako podela τ ima one i samo one deone tačke koje imaju τ_1 i τ_2. Jasno je da je u ovom slučaju τ finija podela i od τ_1 i od τ_2.

Formiranje integralnih suma na nivou srednje škole može se ostvariti na dva načina - sume Riemanna i sume Darbouxa. Po našem mišljenju sume Darbouxa su shvatljivije za učenike (zbog sličnosti sa ranijim približnim izračunavanjem površine kruga upisivanjem i opisivanjem pravilnih poligona) i mi ćemo ovde njih prikazati, dok ćemo za Riemannove sume dati samo konačan izraz. *Integralnim sumama Riemanna* nazivaju se sume oblika



Slika 4.28

$$\sigma_\tau(f;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

gde su ξ_i tačke proizvoljno uzete u deonim intervalima, odnosno

$$\xi_i \in [x_{i-1};\ x_i],\ i=1,2,\ldots,k$$

(sl. 4.28).

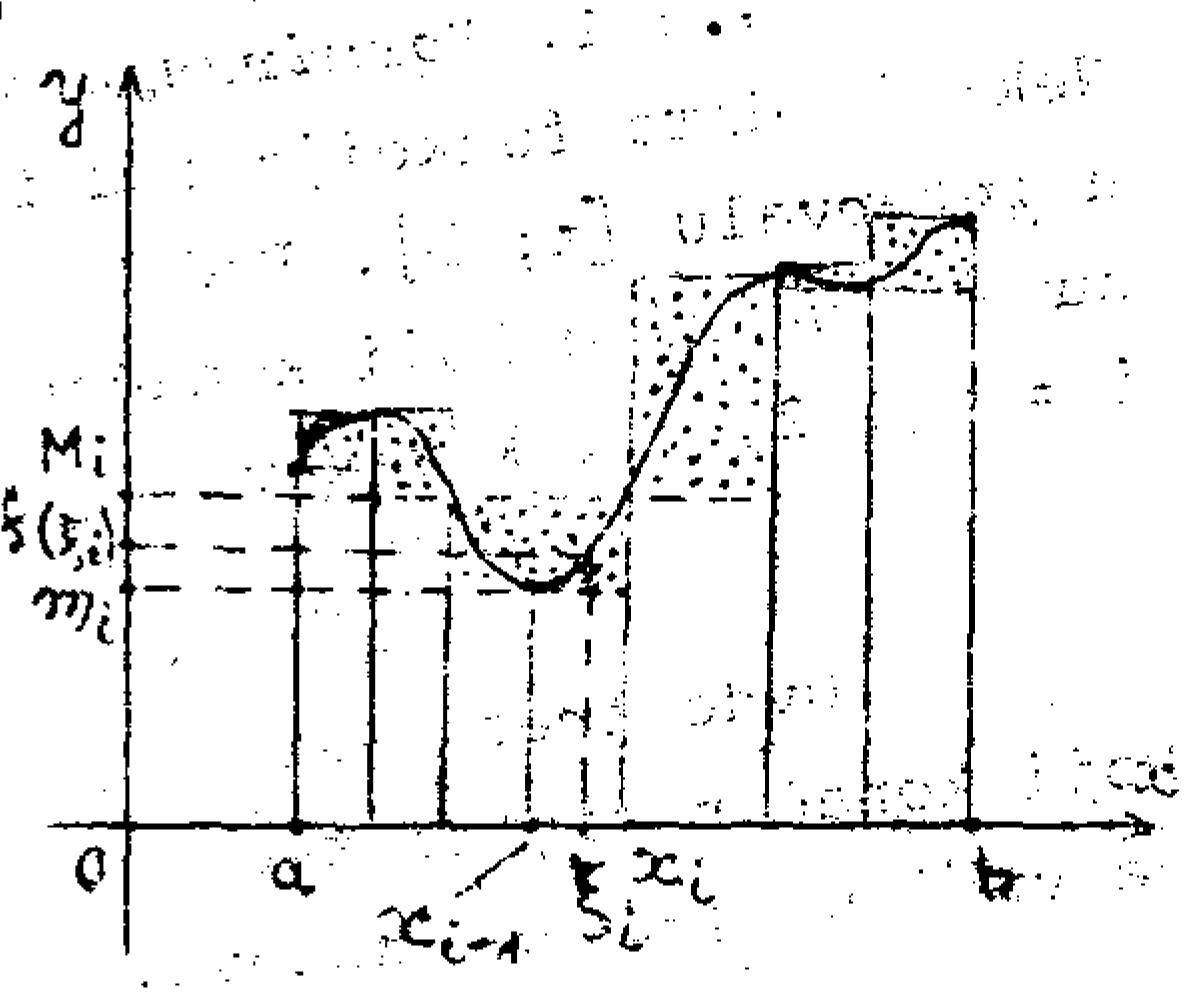
Stavimo sada da je (sl. 4.29)

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\quad i = 1,2,\ldots,k$$

Sumu

$S_\tau = \sum_{i=1}^{k} M_i\Delta x_i$ nazivamo *gornjom* a sumu

$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i\Delta x_i$ *donjom Darbouxovom sumom.*



Slika 4.29.

Geometrijski posmatrano donje i gornje Darbouxove sume predstavljaju površine stepenastih figura, koje se sastoje iz pravougaonika sa osnovicama dužine Δx_i i visinama respektivno m_i i M_i (sl. 4.29). U slučaju da je $f(x) \geq 0$, te stepenaste figure aproksimiraju iznutra i spolja krivolinijski trapez obrazovan od dela grafika funkcije f, odgovarajućeg dela x-ose i ordinata u tačkama x = a i x = b. Stepen preciznosti te aproksimacije zavisiće od finoće podele intervala [a; b], slično kao i kod metode ekshaustije primenjene na odsečak parabole (|30|, s. 59[3]), gde se proces upisivanja trouglova u preostale segmente mogao neograničeno produžavati. Učeninicima treba ukazati na ovaj proces.

Očigledno je $s_\tau \leq S_\tau$, a te sume imaju i neke druge osobine.

1. Ako je funkcija f ograničena, onda su pri ma kojoj podeli sume s_τ i S_τ potpuno odredjene.

Zaista, u tom slučaju m_i i M_i, $i = 1,2,\dots,k$ su konačne veličine i zato izrazi za s_τ i S_τ imaju smisla.

2. Ako je $\tau' \leq \tau''$, onda je $s_{\tau'} \leq s_{\tau''}$ i $S_{\tau''} \leq S_{\tau'}$. (|82|, str. 444).

Očigledno da su sume Riemanna i Darbouxa vezane nejednakošću $s_\tau \leq \sigma_\tau \leq S_\tau$, što će se precizirati sledećom osobinom.

3. Ako je $\sigma_\tau = \sigma(f; \xi_1,\dots,\xi_k)$ bilo koja integralna suma Riemanna, koja odgovara datoj podeli τ, onda je

$$s_\tau = \inf_{\xi_1,\dots,\xi_k} \sigma_\tau \quad , \quad S_\tau = \sup_{\xi_1,\dots,\xi_k} \sigma_\tau \qquad (|82|, \text{ s.}445)$$

4.5.2. Pojam odredjenog integrala. a) Najpre dajemo definiciju odredjenog integrala po Riemannu, a zatim na osnovu pokazane veze izmedju Riemannovih i Darbouxovih suma ukazujemo na odredjeni integral preko Darbouxovih suma.

Funkcija f naziva se *integrabilnom* (po Riemannu) na intervalu $[a,b]$, ako postoji takav broj I, da za ma koji niz podela intervala $[a, b]$

$$\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{i=k_n} \quad , \quad n = 1,2,\dots$$

u kojem je $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$ i za ma koji izbor tačaka

$$\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}], \; i=1,2,\dots,k_n; \; n = 1,2,\dots$$

postoji granica niza integralnih suma $\sigma_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)},\dots,\xi_{k_n}^{(n)})$ i ona je jednaka I:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}) \, \Delta x_i^{(n)} = I,$$

gde je $\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$; $i = 1,2,\dots,k_n$; $n = 1,2,\dots$

Pri ispunjenju tih uslova broj I se naziva *Riemannovim*

odredjenim integralom funkcije f na intervalu $[a, b]$ i označava se sa

$$\int_a^b f(x)\,dx = I$$

U definicije treba posebno objasniti reči "za ma koji niz podela" i "za ma koji izbor tačaka". To znači da se broj $n \in N$ i tačke x_i, ξ_i uzimaju na sve moguće načine. Ovaj pojam granice integralnih suma Riemanna je sasvim nov i ne ulazi u pojam granice niza, ni u pojam granice funkcija.

b) Označimo sada sa $I_* = \sup_\tau s_\tau$ i $I^* = \inf_\tau S_\tau$, gde se I_* naziva *donji integral Darbouxa* funkcije f na intervalu $[a, b]$, dok je I^* njen *gornji integral Darbouxa*.

Iz osobina Darbouxovih suma pod 1. i 2. sledi da ako je funkcija f ograničena, onda su i donji i gornji integrali Darbouxa konačni, a zbog posledice osobine 2. da je za bilo koje dve podele τ' i τ'' intervala $[a, b]$ važi $s_{\tau'} \leq S_{\tau''}$, imamo takodje

$$I_* \leq I^*$$

Važi sledeće tvrdjenje: ako je funkcija f integrabilna na nekom intervalu, onda je ona ograničena na tom istom intervalu (|82|, str. 442).

Centralno mesto u razjašnjavanju pojma odredjenog integrala predstavlja dokaz da granica I ne zavisi od načina podele intervala $[a, b]$. Da bi se pokazalo da obe Darbouxove sume teže istoj granici, koja ne zavisi od načina podele, koristi se tvrdjenje Cantora o uniformnoj neprekidnosti: funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b]$, uniformno je neprekidna na tom intervalu (|172|, str. 173). Po definiciji, funkcija $f: S \to R$ naziva se uniformno neprekidnom na skupu $S \subset R$, ako za *svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ tako da za bilo koje $x_1, x_2 \in S$ tako da je $|x_1 - x_2| < \delta$ važi nejednakost $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Na primer, funkcija $f(x) = x^2$ je neprekidna na R, ali nije na tom skupu uniformno neprekidna. Zaista, u tačkama $x_n' = \sqrt{n+1}$, $x_n'' = \sqrt{n}$, gde je $n \in N$, imamo $f(x_n') = n+1$, $f(x_n'') = n$, prema tome je $f(x_n') - f(x_n'') = 1$. Ali

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

pa prema tome za bilo koje $\delta > 0$ postoje tačke x_n' i x_n'' takve, da je $|x_n' - x_n''| < \delta$, a u isto vreme $f(x_n') - f(x_n'') = 1$. Ova ista funkcija je uniformno neprekidna na bilo kom zatvorenom intervalu realnih brojeva.

Posmatrajmo sada razliku Darbouxovih suma

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i) \Delta x_i$$

Zbog uniformne neprekidnosti funkcije f razlike $M_i - m_i$, $i = 1,2,\ldots,k$ u svakom intervalu biće manje od ε, ako su intervali podele dovoljno mali, gde je ε isti proizvoljno mali broj za sve razlike, pa će biti

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon\,(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_k) = \varepsilon\,(b-a)$$

Znači razlika $S_\tau - s_\tau$ se može učiniti po volji malom, ako je svaki interval Δx_i dovoljno mali, odnosno manji od $\delta(\varepsilon)$. Kako se podele τ, koje odgovaraju sve većem broju deonih tačaka, mogu svrstati u niz i označiti sa $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ to će i sume S_τ i s_τ formirati nizove brojeva (S_{τ_n}) i (s_{τ_n}) koji prema teoremi za nizove teže *istoj* graničnoj vrednosti koju ćemo označiti sa I, pa imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} S_{\tau_n} = \lim_{n\to\infty} s_{\tau_n} = I,$$

pri čemu je $s_\tau \leq I \leq S_\tau$.

Pokažimo da broj I ne zavisi od načina podele intervala $[a,b]$ na manje delove, odnosno da je I granična vrednost svih nizova (S) i (s) nastalih bilo kakvom podelom intervala $[a, b]$ na manje delove.

Neka je interval $[a,b]$ podeljen na manje delove na dva načina, pri čemu su S' i s' gornja i donja suma u prvoj podeli, a S'' i s'' u drugoj podeli. Neka su S''' i s''' gornja i donja suma one podele koja predstavlja superpoziciju dveju prvobitnih. S obzirom da je ta nova podela finija od obe prethodne, onda važi:

$$(1)\quad s' \leq s''' \leq S''' \leq S' \quad \text{i} \quad (2)\quad s'' \leq s''' \leq S''' \leq S''.$$

Napred smo pokazali da je $\lim s' = \lim S' = I$, pa na osnovu (1) sledi i $\lim s''' = \lim S''' = I$. Medjutim, za sume s'' i S'' važi $\lim (S'' - s'') = 0$, a iz (2) sledi $S'' - S''' \leq S'' - s''$, pa je i $\lim (S''' - s''') = 0$. Pošto postoji $\lim S''' = I$ izlazi da je i $\lim S'' = I$, a analogno se pokazuje da je $\lim s'' = \lim s''' = I$.

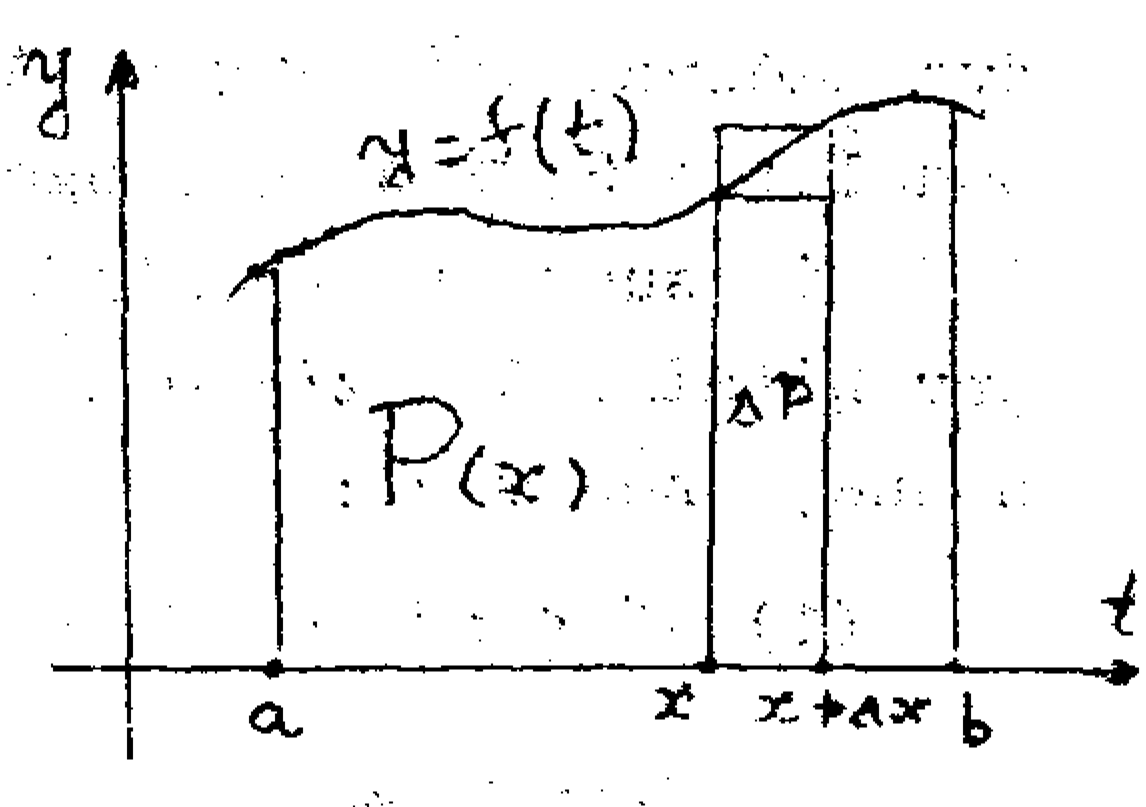
Deobom intervala $[a,b]$ na proizvoljan način na sve veći broj manjih delova dolazi se do iste granične vrednosti I, ako samo dužina svakog od tih delova teži nuli. Taj granični postupak dovodi do pojma koji se definiše kao *površina P* ravne figure ograničene lukom krive AB, intervalom $[a,b]$ i ordinatama aA, bB, a za funkciju f se kaže da ima *integral* u intervalu $[a, b]$. Vrednost I zove se *odredjeni integral* funkcije f u intervalu $[a,b]$ u oznaci

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

4.5.3. Pre nego što se dâ osnovna teorema integralnog računa, treba dokazati da je neprekidna funkcija R-integrabilna i ukazati na osnovne osobine odredjenog integrala.

Pošto smo prethodno definisali i odredili površinu krivolinijskog trapeza, sasvim je prirodno i logično postaviti pitanje da li postoji jednostavniji i kraći postupak da se efektivno izračuna površina krivolinijskog trapeza. Zajedno sa učenicima se postavlja kao zadatak da se takav postupak pronadje. Za nastavnu praksu je celishodna i dovoljno jasna sledeća procedura rešavanja tog zadatka - uspostavljanje veze izmedju funkcije f predstavljene grafikom i funkcije P predstavljene površinom ograničenom delom grafika funkcije f, delom x-ose i ordinatama u tačkama a i b. (sl. 4.30).

Neka je f neprekidna i pozitivna na intervalu $[a, b]$. Posmatrajmo površinu ograničenu grafikom funkcije f, osom Ox i pravama normalnim na Ox osu u tački a i u tački c- promenljivom apscisom x (sl. 4.3a.). Očigledno da je ta površina funkcija promenljive apscise x, što ćemo označiti sa P(x).



Slika 4.30.

Ako se x-u doda neki pozitivni priraštaj Δx, pri čemu je $x + \Delta x < b$, onda će odgovarajući priraštaj funkcije P biti ΔP. Neka su m i M najmanja i najveća vrednost funkcije f na intervalu $[x; x + \Delta x]$. Površina ΔP, koja se nalazi izmedju površina dva pravougaonika sa osnovicom Δx i visinama m i M zadovoljava nejednakost:

$$m\Delta x \leq \Delta P \leq M\Delta x, \text{ odnosno } \quad m \leq \frac{\Delta P}{\Delta x} \leq M.$$

Kada $\Delta x \to 0$, onda m i M teže ka f(x) (ka vrednosti funkcije f u tački x pri t = x) pa je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x)$, odnosno $P'_{(x)} = f(x)$. To znači da je izvod funkcije P jednak funkciji f ili da je P jedna od primitivnih funkcija funkcije f.

Ako je $\{F(x) + C\}$ skup primitivnih funkcija za f, onda je P ona od primitivnih funkcija koja za x = a ima vrednost 0, odnosno P(a) = 0. Dalje je F(a) + C = 0, a odatle imamo da je C = -F(a) i P(x) = F(x) - F(a) ili

$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a)$$

Stavljajući x = b dobija se formula Newton-Leibnitza

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

koja predstavlja *osnovnu teoremu integralnog računa.*

Pre ovoga je bilo potrebno dati pojam primitivne funkcije i neodredjenog integrala. Sa didaktičkog stanovišta to je celishodnije učiniti u okviru diferencijalnog računa. Jer, učenici će lako prihvatiti inverznu operaciju diferenciranju, pošto su već naviknuti na slične inverzije - oduzimanje (sabiranju), deljenje (množenju), korenovanje (stepenovanju) i sl. S obzirom da je integraljenje obrnuta operacija diferenciranju, to je potrebno proveriti da li su učenici dobro shvatili i usvojili ideje, metode i algoritme diferencijalnog računa, jer se operacija integraljenja oslanja na diferencijalni račun. Nastavnik treba da podje od toga da je zadatak ovih sadržaja da učenici steknu sledeća znanja i umenja: da znaju definiciju primitivne funkcije, da umeju da primene tu definiciju pri odredjivanju primitivne funkcije u jednostavnijim slučajevima, da umeju da provere da li je funkcija F primitivna funkcija za funkciju f u datom intervalu i da uoče da primitivna funkcija nije jednoznačno odredjena. Metodički je opravdano da se i u pristupu operaciji *integraljenja* podje od konkretnog zadatka. Na primer, na osnovu datog zakona koji važi za ubrzanje pri slobodnom padanju $v'(t) = a(t) = g$, *odrediti zakon po kojem se menja* brzina ili drugim rečima, ako je dat izvod funkcije $v'(t)$, naći $v(t)$. Učenicima je poznato da je put kod slobodnog padanja $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ i da se brzina odredjuje diferenciranjem $s'(t) = v(t) = gt$, dok drugi izvod daje ubrzanje $v'(t) = a(t) = g$. Idući inverznim putem, učenici će sami zaključiti da je $v(t) = gt$. Posle toga se može dati formalna *definicija primitivne funkcije:* funkcija F se naziva primitivnom funkcijom za funkciju f na zadanom intervalu, ako je za sve x iz tog intervala $F'(x) = f(x)$. *Usledilo bi vežbanje takvih zadataka u kojima se: prvo, proverava da li je jedna od zadanih funkcija primitivna za drugu i drugo, za* datu funkciju odrediti primitivnu koristeći se tablicama izvoda. Potrebno je učenicima skrenuti pažnju na to da je primitivna funkcija F funkcije f definisana na intervalu, pri čemu je primitivna funkcija diferencijabilna u svakoj tački tog intervala. Na osnovu primera koji budu rešvani učenicima treba s)krenuti pažnju da odredjivanje primitivne funkcije nije jednoznačno. Na primer, za funkciju $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na na intervalu $]0; +\infty[$ primitivna funkcija je $F(x) = 2\sqrt{x}$, pošto je $F'(x) = (2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$ za sve x iz tog intervala. Ali i funkcija $2\sqrt{x} + C$, za bilo koju konstantu C je primitivna funkcija za funkciju $\frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $]0; +\infty[$. Treba napomenuti da se skup svih primitivnih funkcija f često naziva *neodredjenim integralom* funkcije f, u oznaci

$\int f(x)\,dx$, odnosno za navedeni primer $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

*

U prikazu nekih stručno-metodičkih pitanja obrade sadržaja iz matematičke analize u srednjoj školi, nastojali smo da ukažemo na pojedina najvažnija mesta te obrade i da, sa stanovišta posebno struktuiranog gradiva, istaknemo granične procese kao osnovnu nit u interpretaciji najbitnijih pojmova, metoda i algoritama u pojedinim programskim celinama. Tako smo kroz teme: realni brojevi, nizovi, funkcije, izvodi i integrali ukazali na one momente koji su karakteristični sa stanovišta graničnih procesa, i strukture gradiva tih tema. Pored toga, pošto se teorija instrukcija shvata kao serija vežbanja i pošto smo njenu suštinu posmatrali pre svega na osnovu opštih principa matematičkog učenja, to smo izlaganje često propraćali pogodnim primerima i zadacima koji bi u nastavnoj praksi doprinosili boljem razumevanju i shvatanju gradiva u svakoj programskoj celini, odnosno napred navedenoj temi. U njima smo obuhvatili samo najbitnije pojmove, osobine i teoreme. Tako je u temi o realnim brojevima naglašena beskonačnost ovog skupa, posebno posmatrana na pojmovima intervala, okolina, apsolutne vrednosti, infimuma i supremuma, zatim neprekidnosti, potpunosti i gustine skupa R. Posvećana je posebna pažnja realnim brojevima kao beskonačnim decimalnim razlomcima. Struktura gradiva teme o nizovima ima kao stožerni pojam granicu niza, oko kojeg je vezano još nekoliko značajnih pojmova kao što su: ograničen niz, monoton niz, tačka nagomilavanja niza, jedinstvenost i egzistencija granice niza, odnos graničnog prelaza kod nizova i aritmetičkih operacija i osnovni pojmovi o konvergentnim i divergentnim redovima. U metodičkim napomenama o nizovima ukazano je da se definicijom niza kao preslikavanja $N \rightarrow R$ moraju obuhvatiti i jasno razdvojiti pojmovi: domen (skup N), kodomen (skup vrednosti niza - neki podskup R) i skup članova niza. Takodje je objašnjen redosled obrade monotonosti i ograničenosti nizova, s jedne strane i granice niza, s druge strane, pri čemu su posebno naglašena ključna mesta u razumevanju ovih pojmova u kojima se javljaju kvantifikatori u obliku: "za svako" i "postoji", kao i ekvivalencije tipa: "$|x-2| < \varepsilon$", "$2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon$," "broj x pripada ε-okolini tačke 2", "broj x je udaljen od tačke 2 manje od ε", "x je približno jednako 2 s tačnošću do ε". Detaljno je *analiziran i metodički osmišljen odnos monotonog, ograničenog i konvergentnog niza*. Ukazano je i na nedostatke nastavne prakse u pogledu uvodjenja pojma reda i naglašen je pravilan put definisanja reda pomoću niza parcijalnih suma.

Posebna pažnja je posvećena strukturi gradiva i njegovoj stručno-metodičkoj interpretaciji u temi GRANICA FUNKCIJE I NEPREKIDNOST, kao centralnoj temi iz graničnih procesa u srednjoškolskoj nastavi matematike. Polazeći od stožernog pojma - granice funkcije - obuhvaćeni su pojmovi i osobine o funkcijama koji prethode pojmu granične vrednosti, zatim sama definicija granice na više načina i najzad teoreme i primene granične vrednosti funkcije. Razradjeni su pojmovi teženja promenljive *konačnoj vrednosti i beskonačnosti, granična vrednost funkcije u tački i teženje beskonačnosti*, zatim *neprekidnost* i teorema o granici zbira, proizvoda i količnika. Objašnjena su neka metodička pitanja redosleda obrade gradiva ove teme, a posebno pitanje redosleda granice funkcije i neprekidnosti funkcije. Kao poseban metodički aspekt obrade gradiva teme GRANICA FUNKCIJE I NEPREKIDNOST predstavlja smišljeno odabran izvestan broj odgovarajućih primera i zadataka, kao i geometrijska interpretacija pojedinih pojmova, sa ciljem da se ukaže na put ka boljem razumevanju, shvatanju i usvajanju pojmova *i algoritama o granici funkcije. Ukazano je posebno na prisutnost kvantifikatora* u definicijama granice funkcije, sa ciljem da se što bolje objasni složena logička struktura same definicije granice funkcije. Pokazane su i metodičke prednosti pojedinih definicija granice u zavisnosti od tipova zadataka o granicama. Dosta pažnje je posvećeno i neprekidnosti funkcije, kao i tačkama prekida.

Zasnivanje pojma izvoda i integrala predstavlja najznačajnije područje programa matematike za srednju školu u kojem se javljaju granični procesi. Zato smo nastojali da pre svega ukažemo na prisutnost dva osnovne vrste graničnih procesa koje *dovode do pojma diferenciranja*, odnosno izvoda i *integraljenja*, odnosno integrala, posmatrajući najpre konkretna zadatke iz fizike i geometrije. Posebno je razradjeno pitanje redosleda obrade gradiva u temi INGEGRALNI RAČUN, odnosno da li treba obradjivati prvo neodredjeni integral, pa odredjeni ili obrnuto. Ne samo zbog poštovanja istorijskog razvoja pojmova u integralnom računu, već i zbog razumevanja suštine integralnog računa, a ne samo kao inverzne operacije diferenciranju, i usvajanje pojmova primena iz ove teme u nastavnoj praksi, naše je mišljenje da je celishodnije da se prvo obradjuje pojam odredjenog integrala, pa tek onda pojam primitivne funkcije i neodredjenog integrala i najzad osnovna teorema integralnog računa. Naglašena je povezanost izmedju neprekidnosti funkcije i njenog izvoda u tački. Učinjen je i osvrt na neka metodička rešenja pri obradi diferencijalnog i integralnog računa, kao i na ona ekstremna, kao što je zasnivanje pojma izvoda i integrala bez korišćenja pojma granice. Ukazano je da takav pristup nije celishodan za nastavu matematičke analize u usmerenom srednjem obrazovanju, čija osnovna nit treba da budu granični procesi.

V DIDAKTIČKO-METODIČKA OBRADA TEME: GRANICA FUNKCIJE (istraživanje)

5.1. Pristup istraživanju

5.1.1. Izmene u sadržajima matematičkog obrazovanja, zaključno sa srednjoškolskim, vrlo su značajne i radikalne, ali po uticajima koje vrše i posledicama koje imaju na matematičko obrazovanje u pedagoškom pogledu su još nedovoljno proučene. Jedna od karakteristika tih izmena je i pomeranje programskih sadržaja naniže. To je omogućilo da se u srednjoj školi, posebno u matematičkoj struci, uvede jedna modifikacija sistematskog kursa analize[59], sličan onom koji se do nedavno pojavljivao na prvoj godini studija u okviru kursa MATEMATIKA I ili ANALIZA I. Okosnicu tog kursa čine granični procesi. Zbog toga je potrebno da se baš graničnim procesima u srednjoj školi posveti puna pažnja i utvrdi mesto i značaj ovih sadržaja u ukupnom matematičkom obrazovanju učenika, a posebno da se dâ didaktičko-metodički pristup, odnosno način razvijanja pojmova beskonačnosti i granice.

Pojam beskonačnosti i pojam granice spadaju ne samo u najvažnije pojmove današnje matematike, posebno matematičke analize, već i najsuptilnije i najteže pojmove u nastavi matematike. Na izrazite poteškoće i nejasnoće nailazi se pri razmatranju ovih pojmova kao procesa koji imaju ili nemaju kao granicu konačnu veličinu. Granični procesi se javljaju i van kursa matematičke analize i to još u osnovnoj školi. Pojmovi koji pripadaju uglavnom propedevtičkom kursu analize često se učenicima ne objasne dovoljno ili do kraja i otuda se pri susretanju sa graničnim procesima u srednjoj školi počinje iznova, kao da je to učeniku prvo suočavanje sa pojmom granice. U (122) na 286. strani piše: "Već u nižem i srednjem stupnju kod periodičnih decimalnih brojeva, prilikom izračunavanja obima kruga preko obima pravilnih upisanih i opisanih poligona, kod geometrijskih nizova, kod izračunavanja korena, prilikom izračunavanja zapremine piramide prema Cavalierievom

---

59) Detaljnije o takvom programu bilo je reči u glavi III tačka 3.3.

principu, učenici su imali prilike da se sretnu sa pojmom granice na jedan potpuno prirodan način i zato taj odnos treba i dalje zadržati. Ovaj pojam koji učenici već imaju ne treba na silu iznova graditi, nego ga treba samo produbiti, uopštiti, potkrepiti novim primerima". Ovo se posebno odnosi na granice nizova i funkcija. Pogodno odabran metodički pristup obradi ovih graničnih procesa može bitno da doprinese njihovom pravilnom shvatanju i razumevanju, a potom i usvajanju od strane učenika, što ukupno nastavu čini efikasnijom i produktivnijom. U procesu metodičkog približavanja odredjenih pojmova uzrastu učenika traga se često za putevima i načinima tog približavanja kako bi se uskladili zahtevi matematike kao nauke, zatim psihologije i nastave matematike, a ti putevi se ne retko nalaze baš u genezi i evoluciji tih pojmova (videti, na primer, |30| za pojam odredjenog integrala). Dobar primer za ovakvo mišljenje predstavlja i pojam granice niza i granice funkcije. Zato je neophodno dobro ispitati i proučiti, pre svega sa didaktičko-metodičkog stanovišta, granične procese u srednjem pozivno-usmerenom obrazovanju.

5.1.2. Pored teorijskog proučavanja i osmišljavanja metodičkih pristupa graničnim procesima u srednjem pozivno-usmerenom obrazovanju, potrebno je neke teorijske postavke i eksperimentalno proveriti. Od mogućih tematskih celina koje obuhvataju granične procese za eksperimenat je odabrana tema: GRANICA FUNKCIJE. Ta tema se javlja u svim programima analize, kao i u svim programima srednjeg obrazovanja koji imaju elemente diferencijalnog i integralnog računa. Po tome se može zaključiti da sadržaji ove teme imaju vidno mesto u matematičkom obrazovanju učenika srednje škole. Posebno treba naglasiti značaj granice funkcije za shvatanje i razumevanje graničnih procesa u srednjoj školi. Sam pojam granične vrednosti funkcije i sve posledice koje proizilaze iz tog pojma, obradjuju se kod nas i u svetu, na različite načine. Pri tome dominiraju tri pristupa pojmu granične vrednosti funkcije: metrička ili ε-δ (epsilon-delta) definicija, topološka ili definicija pomoću okoline i definicija preko niza. Za nastavnu teoriju i praksu bilo bi značajno eksperimentalno utvrditi da li se odredjenim usmeravanjem nastavnog procesa (razreda teme na nastavne jedinice, pripremanjem odgovarajućih materijala za časove sa pogodno odabranim primerima i odgovarajućom geometrijskom interpretacijom), mogu postići bolji rezultati u obradi teme: GRANICA FUNKCIJE i da li je pristup toj temi moguće izvesti kombinacijom navedenih definicija. Neka istraživanja nemačkih autora su pokazala da svaka od navedenih definicija ima svojih prednosti, ali i svojih mana (|164|, str. 13.). Eksperimentom je trebalo utvrditi u kojim sadržajima i koje od tih definicija se mogu koristiti pri obradi teme: GRANICA FUNKCIJE.

5.1.3. Naše istraživanje bilo je sprovedeno u pozivnousmerenom srednjem obrazovanju matematičke struke[60]. U tom usmerenju nastavni plan sadrži poseban predmet sa 3 časa sedmično u III razredu i 4 časa i u IV, pod nazivom ANALIZA. Programski sadržaji teme: GRANICA FUNKCIJE obuhvataju:

"Interval (otvoren, zatvoren, poluotvoren, neograničen, sa centrom u a dužine $2r$). Značenje simbola: $x\to\infty$ (uporediti sa simbolom: $n\to\infty$). Simbol: $x\to-\infty$. Definicija granice: y_o je granica, kada $x\to+\infty$, funkcije f, definisane za $x\in(a,\infty)$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $x_o(\varepsilon)$ takvo da je $|f(x)-y_o| < \varepsilon$ za $x \geq x_o(\varepsilon)$. Geometrijski prikaz. Odredjivanje $x_o(\varepsilon)$ kod jednostavnijih funkcija za razne vrednosti ε. Nejedinstvenost broja $x_o(\varepsilon)$. Uporedjivanje ove granice sa granicom niza. Definicija granice kada $x\to-\infty$.

Značenje simbola: $f(x)\to\infty(-\infty)$ kada $x\to\infty$ ili $x\to-\infty$; geometrijska ilustracija.

Definicija granice funkcije f, definisane za $x \in (a-r, a+r)\setminus\{a\}$ ili za $x \in (a-r, a+r)$, u tački a; geometrijska ilustracija. Ukazivanje na topološku definiciju (za svaki otvoren interval Iy_o sa centrom u y_o postoji otvoren interval Ia sa centrom u a koji se lišen tačke a, ovom funkcijom preslikava u interval Iy_o). Primeri iz kojih se vidi da funkcija ne mora biti definisana u tački a ili da granica ne mora biti jednaka sa vrednošću funkcije u tački a. Teorema: ako je $\lim_{x\to a} f(x) = b$, tada je $f(x) = b+\omega(x)$, gde $\omega(x)\to 0$, kada $x\to a$. Osciliranje funkcije kada $x\to a$ (u konačnim granicama ili kada funkcija ne ostaje ograničena na primerima.

Definicija leve i desne granice, geometrijski prikaz i ukazivanje na topološke definicije. Odnos izmedju granice i leve i desne granice (ilustracija na primerima); slučajevi $x\in(a,a+r)$ i $x \in(a-r,a)$.

Granica monotone funkcije.

---

60) Reformom vaspitanja i obrazovanja u SAP Vojvodini 1974. god., od školske 1977/78. god. u poslednja dva razreda srednjeg obrazovanja postoji i matematička struka.

Odnos granice funkcije prema relaciji poretka za funkcije.

Odnos granice prema operacijama zbira, proizvoda i recipročne vrednosti. Granica racionalnih funkcija i u tačkama u kojima nisu definisane. Granica funkcije sin x/x u nuli, zatim $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x$ i $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)/x$".

Za obradu navedenih sadržaja teme: GRANICA FUNKCIJE u Orijentacionom rasporedu gradiva[61] bilo je predvidjeno 18 časova. Sadržaji pojedinih časova bili su sledeći:

1) Interval: otvoren, zatvoren, poluotvoren, neograničen, sa centrom u a dužine 2r.

2) Značenje simbola: $x\to\infty$ (uporediti sa simbolom: $n\to\infty$); simbol: $x\to-\infty$; definicija granice funkcije kada $x\to\infty$; geometrijski prikaz.

3) Utvrdjivanje gradiva: granica funkcije.

4) Odredjivanje $x_0(\varepsilon)$ kod jednostavnijih funkcija za razne vrednosti ε; nejedinstvenost broja $x_0(\varepsilon)$.

5) Utvrdjivanje gradiva: odredjivanje $x_0(\varepsilon)$.

6) Uporedjivanje granice funkcije sa granicom niza.

7. Definicija granice kada $x\to-\infty$; značenje simbola: $f(x)\to\infty(-\infty)$ kada $x\to\infty$ ili $x\to-\infty$; geometrijska ilustracija.

8) Definicija granice funkcije f u tački a; slučajevi: f definisano za $x\in(a-r,\ a+r)\setminus\{a\}$ i $x\in(a-r,\ a+r)$; geometrijska ilustracija; ukazivanje na topološku definiciju.

9) Utvrdjivanje gradiva: granica funkcije; primeri iz kojih se vidi da funkcija ne mora biti definisana u tački a ili da granica ne mora biti jednaka sa vrednošću funkcije u tački a.

10) Teorema: ako je $\lim_{x\to a} f(x) = b$, tada je $f(x) = b+\omega(x)$, gde $\omega(x)\to 0$, kada $x\to a$. Osciliranje funkcije kada $x\to a$ (u konačnim granicama ili kada funkcija ne ostaje ograničena) na primerima.

11) Definicija leve i desne granice, geometrijski prikaz i ukazivanje na topološke definicije; odnos izmedju granice i leve i desne granice (ilustracija na primerima).

12) Utvrdjivanje gradiva: leva i desna granica.

13) Granica monotone funkcije; odnos granice funkcije prema relaciji poretka za funkcije.

14) Odnos granice prema operacijama zbira, proizvoda i recipročne vrednosti.

15) Granica racionalnih funkcija i u tačkama u kojima nisu definisane.

16) Granica funkcije sin x/x u nuli, zatim $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x$ i $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)/x$.

17) Utvrdjivanje gradiva: granica monotone funkcije i odnos granice prema operacijama zbira, proizvoda i reciproč-

---

61) Odredjenu pomoć u izradi Orijentacionog rasporeda gradiva analize za III i IV razred pružila mi je Darinka Lazić, prof. Obrazovnog centra "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu, na čemu joj se najlepše zahvaljujem. Iz tog Orijentacionog rasporeda gradiva preduzeta je i ova razrada teme: GRANICA FUNKCIJE.

čne vrednosti.

18) Utvrdjivanje gradiva: granica funkcije.

Istraživanjem je trebalo, pored ostalog, proveriti da li su navedeni programski sadržaji teme: GRANICA FUNKCIJE i njihova razrada na nastavne jedinice dobro odabrani i odmereni i kakvi se nastavni efekti na njima ostvaruju. Posebno je trebalo utvrditi efekte rada pomoću struktuiranja gradiva i različitih uvodjenja pojma granice funkcije.

5.1.4. Osnovni cilj kojem je uvek, a posebno danas, težila didaktička teorija i praksa, jeste efikasnost nastavnog procesa, a time i bolji rezultati nastave u celini. Tome cilju usmerena su i istraživanja u psihologiji učenja u svetu i kod nas. Posebno se može reći da i naša školska psihologija pokazuje sve više interesovanja za osnovne didaktičko-metodičke probleme, a medju njima najviše za proces učenja. Ipak je malo istraživanja o specifičnostima učenja pojedinih sadržaja - na primer, iz matematike, hemije, fizike, biologije itd. Pozitivni primeri u tom smislu kod nas su neka istraživanja od kojih ističemo: studiju R. Ničkovića - Učenje putem rešavanja problema u nastavi na primerima nastavnog programa elementarne fizike (Beograd, 1970.) i studiju S. Krkljuša - Učenje u nastavi otkrivanjem, Otkrivajuće vodjenje u nastavi matematike (Novi Sad, 1977.). Ove studije predstavljaju svojevrstan doprinos kako pedagoško-didaktičkoj teoriji i praksi uopšte, tako i psihologiji učenja pojedinih nastavnih predmeta. Pomenimo i to da se poslednjih decenija psiholozi intenzivno bave problemima psihologije učenja pojedinih nastavnih predmeta. Što se matematike tiče, koliko je nama poznato, ta istraživanja su se više odnosila na predškolski i osnovnoškolski uzrast, a manje su vršena ispitivanja o uspešnosti učenja pojedinih programskih sadržaja iz matematike kod učenika starijeg uzrasta; posebno je toga retko bilo kod srednjoškolaca. Pri tome treba naglasiti da je pitanje samih nastavnih planova i programa iz matematike za sve uzraste bilo i te kako prisutno poslednjih nekoliko decenija kod stručnjaka raznih profila, a ne samo matematičara. Mi smo se bavili problemom učenja i usvajanja odabranih pojmova iz graničnih procesa u okviru predmeta ANALIZA u III razredu pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja.

I pored postojanja više teorija učenja, ostaje i dalje osnovni problem na koji psiholozi treba da daju odgovor, da li je reč o jednoj ili o više sposobnosti za učenje. Po mišljenju R. Kvaščeva (v. |86|, str. 25.) iako je teško dati opštu definiciju učenja, ipak se učenje može svesti na tri osnovne kategorije: 1) formiranje, 2) transfer i 3) zadržavanje. U našem slučaju u pitanju je formiranje novih pojmova, definicija i teorema, što samo po sebi predstavlja učenje, jer se radi o progresivnom menjanju svakog pojedinog učenika u procesu obrade sadržaja teme: GRANICA FUNKCIJE. Takodje, u istraživanju je bila posvećena odredjena pažnja i transferu i zadržavanju. Posebno je bila naglašena potreba vežbanja u procesu obrade navedene teme, jer se samo tako može primenjivati ono što je jednom naučeno na nove posebne i konkretne slučajeve. Vežbanju se u procesu učenja ne pridaje potreban značaj, a to posebno nije prihvatljivo kada se radi o učenju matematičkih sadržaja. Može se reći da je za uspešno savladavanje matematičkih sadržaja vežbanje neophodno i to kontinuirano tokom obrade svih sadržaja odredjene programske celine. Slično ističe i Hans - Joachim Vollrath (v. |164|, str. 11.):"... Vežbanje spada u elementarnu didaktičku delatnost koja se u didaktičkoj literaturi u kranjem slučaju spominje, uglavnom sa potcenjivanjem, u svakom slučaju samo tek onako uzgred, iako je vežbanje u školskoj praksi od ogromnog značaja. Iznenadjuje da do sada nisu primenjivani rezultati ispitivanja školske psihologije (psihologije učenja), kojih ima u toj oblasti". Ovde se misli na vežbanje kako ga tretiraju psiholozi u najnovijim teorijama učenja. Medjutim, u didaktičkom smislu vežbanje je sistematičan i organizovan proces u nastavi koji u okviru celokupnih nastavnih aktivnosti ima promenljivu ulogu, ali je u nastavi matematike od posebnog značaja. Iako je vežbanje u nastavi matematike prisutno u znatnoj meri, ono ipak nije dovoljno didaktičko-metodički osmišljeno.

I najnovije teorije učenja nisu još dosegle do željenih principa, zakona, struktura i modela kada je reč o mišljenju i učenju čoveka kao razumnog bića, a posebno nije dat odgovor na mnoga pitanja vrlo složenog procesa školskog učenja. Raspravljajući o teorijama učenja S. Radonjić ističe: "Iako je oblast učenja jedna od najrazradjenijih u psihologiji, u pogledu osnovnih principa učenja postoje još uvek samo raznovrsne i medjusobno suprotne teorijske pretpostavke. Jedna dobra teorija učenja morala bi da objasni sve poznate činjenice i zakonitosti učenja. Ona bi morala da bude i teorija uslovljavanja i teorija diskriminacije i teorija gašenja, i teorija rešavanja problema putem uvidjanja itd. U isto vreme ona bi morala da bude i psihologija učenja životinja i psihologija učenja ljudi. Nažalost, postojeće teorije učenja dobro objašnjavaju obično samo jedan uži domen činjenica, dok se 'sapliću' o druge utvrdjene činjenice. Što je najgore, većina teorija učenja govori uglavnom o učenju životinja, a manje o učenju kod ljudi" (|136|). Polazeći od toga "šta se uči" većina teoretičara učenja usvaja osnovnu podelu teorija učenja i to na asocijacionističke (S-R teorije) i kognitivističke teorije (S-S teorije). U okviru S-R teorija razlikuju se tri podgrupe u zavisnosti od shvatanja uloge motivacije u učenju: prva, teorije dodira; druga, teorije potkrepljenja i treća, teorije dva ili više faktora. Kongnitivni ili S-S teoretičari se opredeljuju za teorije dodira, jer smatraju da potkrepljenje nema ključnu ulogu u učenju. Najnoviji rezultati u ovoj oblasti (|79|, str. 33-35.), ukazuju na mogućnost prevladavanja razlika izmedju S-R i S-S teorija učenja.

Smatra se da jednu od spona i potpunijih obrazloženja najelementarnijih oblika učenja može da pruži medijaciona teorija učenja po tome što je pogodna za identifikovanje sposobnosti učenja i nalaženje veze izmedju opšte i specifičnih sposobnosti učenja. Nema sumnje da specifične sposobnosti za učenje pojedinih sadržaja postoje. Sposobnost učenja matematike bolje se poznaje od drugih (|81|, V.A. Kruteckij, 1968). Zahvaljujući tome, veći interes istraživača je usmeren ka odredjivanju uloge sredinskih faktora na razvoj sposobnosti učenja. Medju njima se posebno izdvajaju sistemi instrukcija, strategija, vodjenja i vežbanja prilikom usvajanja nastavnih sadržaja.

Raspravljajući o različitim teorijama instrukcije

R. Kvaščev (|87|, str. 87) daje odnos izmedju Brunerove teorije instrukcije i učenja putem otkrića i ukazuje da se pod teorijom instrukcije podrazumeva "serija vežbanja koja je teorijski osmišljena i koja treba da ubrza sazrevanje i razvoj ličnosti ispitanika na različite načine. *Teorija instrukcija i normativna teorija. Kriteriji ove teorije moraju imati visok stepen opštosti.* Na primer, teorija instrukcije ne sme biti specifična i "ad-hok" izvedena na osnovu uspešnog učenja, *već mora biti izvedena iz teorije učenja* (na primer, iz opštih principa matematičkog učenja ako se radi o matematičkom učenju). *Teorija instrukcije mora se zasnivati na psihologiji učenja i razvoja*". Time se pažnja istraživača usredsredjuje na školsko učenje, sadržaje i načine kako se oni usvajaju da bi se onda moglo kompetentnije raspravljati o odnosu izmedju opšte i specijalnih sposobnosti učenja, s jedne strane, i inteligencije, s druge strane. I ako nas problemska nastava ili nastava putem otkrića direktno vode iznalaženju svih prednosti koje one pružaju baš u nastavi matematike, onda je sasvim razumljivo što smo se opredelili da u metodiku nastave matematike preko teme GRANICA FUNKCIJE ugradimo najsavremenija dostignuća o teorijama instrukcija, struktuiranju nastavnih programa i razvijanju motivacije za učenje matematike. Posredno smo kao što će se videti, pruži li dosta pouzdanih pokazatelja koji se grupišu oko pitanja unapredjivanja obrazovanja u celini. Ono se može očekivati ako su obezbedjeni osnovni preduslovi, odnosno ako su i u didaktičko - metodičkom smislu stvoreni uslovi za savremenije matematičko obrazovanje. I to zbog toga što će na taj način doći do transfera koji matematici daje posebno mesto u razvoju opšte sposobnosti učenja i obrazovanja u celini.

Poznato je da je Kruteckij 1968. godine utvrdio sledeće komponente sposobnosti učenja matematike, koje proizilaze iz osnovnih karakteristika matematičkog mišljenja. Te komponente su: 1) sposobnost formalizacije gradiva matematike (apstrahovanje kvantitativnih odnosa i prostornih oblika i operisanje formalnim strukturama); 2) sposobnost uopštavanja matematičkih podataka, odvajanje bitnog od nebitnog, otkrivanje opšteg u onome što je *spoljašnje* i različito; 3) sposobnost operisanja brojevima i simbolima; 4) sposobnost doslednog i tačnog raščlanjavanja logičkog rasudjivanja povezano sa neophodnošću dokazivanja izvedenih zaključaka; 5) sposobnost skraćivanja procesa rezonovanja (odnosno, sposobnost mišljenja u skrivenim strukturama); 6) sposobnost obrtanja misaonog procesa, prenošenje sa pravog na obrnuti tok mišljenja; 7) elastičnost mišljenja, prebacivanje sa jedne misaone operacije na drugu, oslobadjanje od uticaja šablona i stereotipnih metoda rešavanja zadataka; 8) razvijeno pamćenje matematičkih podataka i 9) sposobnost prostornog predstavljanja (|87|, 62-63). Sposobnosti o kojima je reč pretpostavljaju da nastavnici matematike, odnosno da njihovo metodičko-matematičko obrazovanje mora počivati na poznavanju veza izmedju metoda, tehnika i veština učenja matematike, kao i stavova prema ovoj nastavno-naučnoj disciplini i sposobnosti učenja. Našim istraživanjem mi želimo da postavimo jednu od brojnih uporišnih tačaka na kojima će se uspostaviti pomenuta veza. Otuda smo, s obzirom da naš rad većim delom čini metodički pristup u proučavanju postavljene teme, morali da upoznamo pomenutu Brunerovu teoriju instrukcija, koja će prema definisanim sposobnostima učenja matematike kako ih navodi Kruteckij, ovu nastavu učini u što većoj meri istraživačkom. Teorijske osnove takve nastave matematike se nalaze, kako smo istakli, u Brunerovoj teoriji instrukcija i učenja putem otkrića. Razume se da postoje i drugačiji pristupi teoriji instrukcije, ali se na njima nećemo zadržavati.

U suštini, teorija instrukcija zahvata skoro sva pitanja koja smo pomenuli u uvodnom delu (šta treba da obuhvata metodika matematike). Ovde treba istaći da je jedna od najbitnijih karakteristika njegove teorije instrukcija - strukturiranje znanja. Ono se ne "preslikava" načinom kako je sastavljen program i po kojim kriterijumima je izvršen izbor i raspored sadržaja u njemu, već se struktura stvara najvećim delom načinom na koji se uspostavlja odnos izmedju tih sadržaja i metodičkog vodjenja učenika tokom usvajanja sadržaja. U sažetom vidu reč je o tri procesa koji u učenju bilo kog predmeta moraju istovremeno biti zastupljeni; prvi je, prikupljanje novih podataka, drugi je, transformacija ili prerada podataka i treći je, evaluacija rezultata učenja. Odstupanja mogu biti u zavisnosti od toga kakav značaj pridajemo analitičkom i intuitivnom mišljenju. Ovo drugo je poželjno podsticati u nastavi matematike, koja bi time dobila stvaralački karakter. Takav karakter nastave matematike u teorijskom smislu pronalaze i postepeno potvrdjuju i istraživači modela učenja putem otkrića. Medjutim, uvažavajući razlike izmedju teorija o nastavi, s jedne, i teorija učenja i razvoja, s druge strane, to se u većinu teorijskih pristupa o nastavi matematike kao i drugih predmeta, utkivaju postavke jedne opštije teorije učenja, kao što je medijaciona teorija. U istraživanju se pošlo od osnovnih principa ove teorije. Najvažniji medju njima bi bio princip koji pored svoje psihološke ima i metodičku dimenziju. Iz svega do sada rečenog u ovom odeljku proizilazi da nju nije lako obezbediti i zbog toga smo i tražili podsticaje u psihologiji učenja. Naime, ako uspemo da potvrdimo, na osnovu našeg istraživanja i rezultata do kojih dodjemo, da je moguće u nastavi matematike, odnosno usvajanju sadržaja jedne teme - GRANICA FUNKCIJE - obezbediti uspostavljanje medijatora tipa generalizovanih realacija, kao pojmova najšireg oblika, onda smo dali skroman doprinos učenju matematike sa razumevanjem. To bi bio i doprinos nastavi ovog predmeta koja će biti okosnica efikasnog obrazovanja i znalački podsticanog i vodjenog intelektualnog razvoja učenika. Otuda smo posebno insistirali na formiranju pojmova u okviru teme "GRANICA FUNKCIJE", polazeći od zajedničkih karakteristika na kojima je odredjen pojam zasnovan. Kvaščev smatra (v. |86|, str.189). "da jedini *bitni uslov* za obrazovanje pojma *učenje zajedničkog medijacionog odgovora (koji predstavlja značenje pojma) za jednu grupu predmeta ili situacija"*. To znači da se kod izgradjivanja pojma granice i davanja njene definicije uvek polazilo od više primera sa odredjenim zajedničkim karakteristikama i učenju kao procesu i učenju kao vodjenju po medijacionoj teoriji. Po S.L. Rubinštajnu to je put rukovodjenja samostalnim misaonim radom učenika.

5.2. Problem i hipoteza istraživanja

5.2.1. Navedeni programski sadržaji teme "GRANICA FUNKCIJE" realizuju se u nastavnoj praksi počev od školske 1980/81. godine u matematičkoj struci pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja. Sem programa sa kraćim obrazloženjem i njegove razrade na nastavne jedinice, izvodjači nastave nisu imali nikakvu drugu pomoć. Za realizaciju programa ANALIZE u III i IV razredu pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja matematičke struke nije postojao odgovarajući udžbenik ili priručnik, pa su profesori bili upućeni na fakultetsku literaturu koja sadrži pojedine oblasti iz navedenog programa. Ovo se ističe kao poseban problem zbog činjenice da program ANALIZE obuhvata teme iz graničnih procesa, što je za učenike ne samo dosta teško gradivo, već i zbog toga što se bez odgovarajućih primera i ilustracija u udžbeniku ili priručniku pojedini pojmovi teško mogu shvatiti. Neposrednim uvidom u nastavu (u nekoliko vaspitno-obrazovnih organizacija) uočeno je da posebnu poteškoću profesorima predstavlja teorijsko tumačenje sadržaja, odnosno tumačenje pojma granice i nekih teorema iz graničnih procesa. Zbog toga je bilo sasvim celishodno da se pruži odredjena pomoć izvodjačima nastave u vidu odgovarajuće posebne razrade sadržaja o metodičkim pristupima pojedinim pojmovima iz graničnih procesa, pri čemu je jedna tema uzeta kompletno i za eksperimentalnu proveru. Ta tema je bila: GRANICA FUNKCIJE. Pretpostavljalo se da će efekti obrade te teme biti veći kod profesora koji su realizovali ovu temu pomoću tih razradjenih sadržaja, nego kod ostalih profesora gde eksperimenat nije sprovodjen.

Kao problem u realizaciji detaljističkog programa ANALIZE postavlja se nivo i ujednačenost te obrade u pojedinim vaspitno-obrazovnim organizacijama, kao i obrazovni efekti koji se ostvaruju posmatrano u celini. To se posebno odnosi na jednu od najznačajnijih tema tog programa, na GRANICU FUNKCIJE. U okviru eksperimenta bilo je potrebno odgovoriti i na pitanje koliko su pojedini pojmovi o granici funkcije, odnosno o graničnim procesima uopšte, dostupni učenicima uzrasta od 17 godina. Kao posebno pitanje na koje je trebalo eksperimentom dati odgovor jeste pitanje izbora definicije granice funkcije.

5.2.2. Osnovni cilj eksperimenta bio je utvrdjivanje uticaja posebno struktuiranog gradiva pri obradi teme: GRANICA FUNKCIJE, na povećanje obrazovnih efekata nastave (misli se na efekte po nivou: razumevanje gradiva, retencija i primene u novim uslovima.) To struktuiranje se ogledalo u razradi teme na nastavne jedinice, stručno-metodičkoj pripremi sadržaja cele teme u vidu većeg broja manjih celina pogodnih za realizaciju u nastavnom procesu i davanje standardizovanih sugestija i uputstava nastavniku - eksperimentatoru u toku sprovodjenje eksperimenta.

Struktuiranje gradiva teme GRANICA FUNKCIJE posebno je obuhvatilo:

- Obnavljanje ranije upoznatih pojmova koji su neophodni za shvatanje osnovnih ideja i suštine pojma granice. U te pojmove u prvom redu spadaju: apsolutna vrednost realnog broja, okolina tačke, niz i njegova granična vrednost, beskonačno mala veličina i sl.

- Komponovanje izlaganja sadržaja teme GRANICA FUNKCIJE korišćenjem tri definicije pojma granične vrednosti funkcije (metričke, topološke i pomoću nizova) i isticanje osnovnih ideja i činjenica za koje se vezuju svi ostali sadržaji pomenute teme. Teorijsku osnovu za ovakvo struktuiranje gradiva, kako smo već istakli, nalazimo u medijacionoj teoriji učenja i Brunerovoj strategiji odlučivanja u toku formiranja pojmova.[62]

- Metodički pristup novim pojmovima preko pogodno odabranih primera čijim rešavanjem se učenik priprema za usvajanje pojma, a ne da mu se on saopštava od strane nastavnika.

---

62) Po Bruneru strategija ima sledeće zadatke: a) omogućavanje da se pojmovi formiraju tek posle upoznavanja minimalnog broja relevantnih primera, b) obezbedjivanje formiranja pojmova tek posle razmatranja odredjenog broja primera u kojima dolazi do izražaja formiranje pojmova na rutinski način; c) svesti na najmanju meru uticaje sklonosti u toku rešavanja problema; d) smanjiti broj nepravilnih kategorija u toku formiranja pojmova (|86|, str. 192.).

- Češće korišćenje geometrijske intepretacije u tumačenju pojmova i osobina iz graničnih procesa.

- Znatan broj rešenih primera vezanih za odredjene pojmove i osobine iz graničnih procesa, kao i posebno odabran jedan broj raznovrsnih zadataka za vežbu.

- Metodičko uputstvo nastavniku - eksperimentatoru za realizaciju teme GRANICA FUNKCIJE korišćenjem posebno struktuiranog gradiva. Uticaj *posebno struktuiranog gradiva* (instrukcija, usmeravanje, podsticanje) pri obradi teme: GRANICA FUNKCIJE, ovde je posmatrano kao uzročno posledična veza *te nezavisno promenljive* i *obrazovnih efekata nastave* kao *zavisno promenljive veličine.*

Na osnovu dosadašnjih istraživanja, medijacione teorije učenje i studije L.F. Churchmana· A. Comparative Study of Three Different Approaches to the Limit Concept, pretpostavljeno je da će posebno struktuirano gradivo pri obradi teme: GRANICA FUNKCIJE i kombinacija sve tri pomenute definicije granice funkcije u zavisnosti od nastavnih jedinica te teme, značajno doprineti povećanju ukupnih obrazovnih efekata nastave. Ta hipoteza je proveravana na paralelnom praćenju. Četiri odeljenja uglavnom ujednačenih vrednosti u III razredu matematičke struke pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja. Od ta četiri odeljenja dva su činila eksperimentalnu, a dva kontrolnu grupu. U toku eksperimenta gore navedena osnovna hipoteza iz idejnog projekta, bila je dopunjena podhipotezom da će ukupni nastavni efekti biti bolji i na sadržajima koji nisu direktno vezani za tri navedene definicije granice funkcije u eksperimentalnoj nego u kontrolnoj grupi, računajući na pojavu transfera. Uticaj na te rezultate u eksperimentalnoj grupi ostvarivan je pripremanjem i korišćenjem posebno struktuiranog gradiva teme GRANICA FUNKCIJE.

U sadržaju eksperimenta posebno je posvećena pažnja načinu intepretacije pojedinih nastavnih jedinica, odnosno pojmova i teorema obuhvaćenih temom istraživanja. Trebalo je utvrditi ne samo da li učenici mogu da shvate odredjene sadržaje, već i kako će ih oni usvojiti i koji su pristupi pojedinim najvažnijim pojmovima efikasniji. U tom cilju je trebalo obezbediti posebno struktuirano gradivo teme GRANICA FUNKCIJE, po kojem je tu temu realizovao profesor u eksperimentalnoj grupi.

5.3. *Metodologija istraživanja*

U izboru metodologije ovog istraživanja pošlo se od činjenice da je za proveravanje osnovne hipoteze bilo neophodno izvodjenje eksperimenta, odnosno da je bilo potrebno praćenje realizacije programskih sadržaja teme "GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE" i merenje efekata koji se pri tome ostvaruju. Za takvo praćenje najpodesnija je bila metoda eksperimenta sa paralelnim grupama, pri čemu je, pored prikupljanja odredjenih podataka, značajnu ulogu imalo merenje obrazovnih efekata i opštih sposobnosti učenika. Izbor paralelnih grupa usledilo je nakon sagledavanja uspeha učenika u prethodnom školovanju i rezultata dobijenih merenjem opštih sposobnosti učenika. Na opredeljenje su još uticali materijalni i kadrovski uslovi u obrazovnim centrima obuhvaćenim istraživanjem i mogućnosti kontaktiranja sa nastavnicima - izvodjačima nastave u odeljenjima koja su bila uključena u eksperimenat. U toku trajanja eksperimenta nije bilo nikakvih izmena u organizaciji nastave u ovim centrima, niti posebnog tretmana odeljenja učenika koji su bili obuhvaćeni eksperimentom. Izborom kompletnih odeljenja za sprovodjenje eksperimenta sačuvani su normalni i uobičajeni uslovi organizacije i izvodjenja nastave. Detaljnije se daju podaci o uzorku, organizaciji eksperimenta i mernim instrumentima. Sadržaj mernih instrumenata dat je u prilogu.

5.3.1. *Uzorak*

Da bi se ispitalo dejstvo posebno struktuiranog gradiva na efekte u realizaciji teme: GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE, sproveden je eksperimenat sa učenicima III razreda pozivno-usmerenog srednjeg obrazovanja matematičke struke. Uzorak je uzet baš iz ovog razreda zbog toga što se u tom razredu nalaze najvažniji programski sadržaji iz graničnih procesa, medju kojima je dominantna tema o graničnoj vrednosti funkcije.

U početnoj fazi istraživanja bilo je potrebno opredeliti se za nekoliko školskih centara u SAP Vojvodini, u kojima je zastupljena matematička struka, vodeći pri tome računa da u njima postoje približno isti materijalni i kadrovski uslovi za rad. Na osnovu tih preduslova od 14 takvih centara, izabrana su sledeća tri centra: Obrazovni centar "Žarko Zrenjanin" u Vrbasu, Obrazovni centar "Koča Kolarov" u Zrenjaninu i Obrazovni centar "Jovan Jovanović - Zmaj" u Novom Sadu. To je više od jedne petine centra sa matematičkim usmerenjem u SAP Vojvodini. Broj učenika III razreda matematičke struke u ova tri centra bio je u školskoj 1980/81. godini kada je vršeno istraživanje, 122, što iznosi 28,18% svih učenika tog razreda matematičke struke (ukupno je bilo 433 učenika III razreda matematičke struke). Nakon izvršenih merenja opštih sposobnosti učenika i uporedjivanja ostalih podataka relevantnih za ujednačavanje odeljenja, odnosno grupa, za grupu E u kojoj su delovali faktori posebno struktuiranog gradiva, odabrana su odeljenja IM_1 i III_2 Obrazovnog centra "Jovan Jovanović - Zmaj" u Novom Sadu, a za grupu K u kojoj ti faktori nisu delovali, odabrana su odeljenja III_2 Obrazovnog centra "Žarko Zrenjanin" u Vrbasu i I_5 Obrazovnog centra "Koča Kolarov" u Zrenjaninu. Uzorak učenika bio je uslovljen izborom obrazovnih centara i prirodom eksperimenta. Naime, svi učenici III razreda matematičke struke navedenih centara bili su uključeni u uzorak, a eksperimenat je zahtevao da se u E grupi nadju homogena odeljenja. Prema tome ovde se radi o grupnom uzorku, a izbor eksperimentalne (E) i kontrolne (K) grupe od četiri navedena odeljenja izvršen je na principu jednostavnog slučajnog uzorka.

Navodimo osnovne karakteristike uzorka učenika.

UZORAK I GRUPE PREMA POLU. Na ovom uzrastu učenika postoji više ili manje izražena sklonost jednog ili drugog pola za učenje odredjenih predmeta, pa bi veći broj učenika jednog pola u bilo kojoj grupi ili celom uzorku mogao imati uticaja na rezultate istraživanja. Medjutim, u našem slučaju, taj činilac nije imao nekog značaja, s obzirom na ekvivalentnost prema polu kako samog uzorka, tako i grupa medjusobno. Sledeći podaci to dokumentuju.

Uzorak učenika prema polu Tabela 1.

GRUPA	POL muški broj	%	ženski broj	%	SVEGA broj	%
K - kontrolna	31	51	30	49	61	100
E-eksperimentalna	28	49	29	51	57	100
U Z O R A K	59	50	59	50	118	100

Podaci u tabeli ukazuju na znatnu ujednačenost eksperimentalne i kontrolne grupe prema polu, a sam uzorak je u tom pogledu apsolutno ujednačen (50% muški pol, i 50% ženski pol). Ovakav sastav uzorka prema polu isključuje uticaj pola na rezultate istraživanja, odnosno svodi ga na najmanju moguću meru. Dodajmo tome i mišljenje B. Stevanovića (|148|, str. 111): "Manje se razlikuju muška deca od ženske dece, nego što se razlikuju muška deca kao individue medju sobom ili ženska deca medju sobom, iako devojčice pokazuju veći uspeh u osnovnim računskim radnjama,a dečaci su nešto malo bolji u logičkom računanju". Posle navodjenja više primera iz kojih se vide razlike izmedju devojčica i dečaka u učenju pojedinih predmeta i sadržaja, B. Stevanović zaključuje: "Razlike u učenju izmedju polova su male i u svakom slučaju nisu toliko posledica nekih razlika u intelektualnoj sposobnosti,... koliko su rezultat motivacionih činilaca, interesa"...

UZORAK I GRUPE PREMA ZANIMANJU RODITELJA. Iako se radi o uzrastu učenika u kojem zanimanje oca ili majke nije tako značajan činilac koji utiče na savladavanje školskog gradiva (na ovom uzrastu učenika.pomoć roditelja u učenju je minimalna), ipak je interesantno videti strukturu učenika obuhvaćenih uzorkom prema zanimanju roditelja. To je jedan od elemenata za sagledavanje socijalnog položaja učenika. Zbog toga je u anketi namenjenoj učenicima dato samo tri mogućnosti za svrstavanje zanimanja posebno oca i posebno majke za svakog učenika iz uzorka. Te tri mogućnosti bile su sledeće: 1) radnik u neposrednoj proizvodnji - RNP, 2) neproizvodni radnik - NR i 3) ostalo - O. Dajemo pregled strukture uzorka i grupa prema zanimanju oca i majke.

Zanimanje oca Tabela 2.

GRUPA	Zanimanje oca							
	RNP		NR		O		SVEGA	
	broj	%	broj	%	broj	%	broj	%
K- kontrolna	30	49	21	34,5	10	16,5	61	100
E- eksperimentalna	9	16	34	60	14	24	57	100
U Z O R A K	39	33	55	47	24	20	118	100

Iz tabele se uočava da je oko jedna petina očeva svrstana po zanimanju u "ostalo", što znači da oni najčešće nisu u radnom odnosu. To znači da je u obe grupe visok procenat zaposlenih očeva i prema tome većina učenika iz uzorka ima obezbedjenu socijalno-materijalnu sigurnost. Po tom elementu grupe su prilično ujednačene. Razlike postoje u strukturi zaposlenih očeva. Naime, u kontrolnoj grupi znatno je više očeva zaposleno u neposrednoj proizvodnji (više ih je za oko 33% nego što ih je u eksperimentalnoj grupi) i to je jedan od elemenata koji ne ide u prilog ujednačavanju grupa.

Zanimanje majke Tabela 3.

GRUPA	Zanimanje majke							
	RNP		NR		O		SVEGA	
	broj	%	broj	%	broj	%	broj	%
K - kontrolna	10	16,5	25	41	26	42,5	61	100
E-eksperimentalna	2	3,5	23	40,5	32	56	57	100
U Z O R A K	12	10	48	41	58	49	118	100

Struktura zanimanja majki učenika znatno je ujednačenija izmedju grupa. Skoro identičan procenat majki su neproizvodni radnici u obe grupe. Podaci pokazuju i da je kod obe grupe znatno veći broj majki nego očeva razvrstan po zanimanju u "ostalo", što znači da one nisu zaposlene. Na osnovu ovih podataka može se zaključiti da je faktor "zanimanje majke" jednako delovao u obe grupe.

UZORAK I GRUPE PREMA ŠKOLSKOJ SPREMI RODITELJA. U principu, školska sprema roditelja treba da ima odredjenog uticaja na savladavanje školskog gradiva od strane učenika, odnosno na školsko učenje. Učenici iz porodica sa višim stepenom obrazovanja trebalo bi da lakše i brže savladjuju gradivo, jer su u prethodnom školovanju imali mogućnosti da i uz pomoć roditelja steknu dobru predspremu za dalje školovanje. Medjutim, mora se imati u vidu da zanemarljiv broj roditelja može da pruža neposrednu pomoć učenicima matematičke struke iz pojedinih matematičkih disciplina. Prema tome, školska sprema može da se posmatra samo kao jedan opšti činilac koji utiče na organizaciju učenja ili samostalan rad učenika uopšte. Zato se posmatra struktura uzorka i grupa prema školskoj spremi oca i majke. Školska sprema je razvrstana u sledeće kategorije: bez škole (BŠ), do 4 razreda osnovne škole (4), od

Školska sprema oca — Tabela 4.

Školska sprema	K		E		SVEGA	
	broj	%	broj	%	broj	%
(BŠ)	0	0	0	0	0	0
(4)	5	8	1	2	6	5
(8)	5	8	4	7	9	8
Srednja	22	36	6	10	28	24
Viša	4	7	8	14	12	10
Visoka	22	36	34	60	56	47
Nepoznato	3	5	4	7	7	6
U K U P N O:	61	100	57	100	118	100

5 do 8 razreda osnovne škole (8), srednja, viša, visoka i nepoznato. Iz tabele 4. se vidi da su grupe dosta ujednačene ako se posmatraju tri najniže kategorije školske spreme, a posebno treba istaći da je procenat ove tri vrste spreme u obe grupe

jako mali. Naime, ni u jednoj grupi nema očeva bez školske spreme, a neznatan je procenat i u jednoj i u drugoj grupi očeva do 4 razreda, odnosno do 8 razreda osnovne škole. U pogledu srednje, više i visoke školske spreme, posmatrane zajedno, grupe su opet znatno ujednačene, ali je procenat očeva sa visokom školskom spremom veći u eksperimentalnoj nego u kontrolnoj grupi za 24%. U celini ovi podaci ukazuju na mogućnost da se eliminiše faktor "školska sprema oca" u pogledu uticaja na efekte eksperimenta koji je sproveden.

U strukturi školske spreme majki uočava se da je identičan procenat srednje školske spreme u obe grupe. Grupe

Školska sprema majke Tabela 5.

Školska sprema	K		E		SVEGA	
	broj	%	broj	%	broj	%
(BŠ)	1	2	1	2	2	2
(4)	8	13	1	2	9	8
(8)	17	28	8	14	25	21
Srednja	20	33	19	33	39	33
Viša	5	8	5	9	10	8
Visoka	5	8	20	35	25	21
Nepoznato	5	8	3	5	8	7
U K U P N O:	61	100	57	100	118	100

se znatnije razlikuju kod visoke spreme i to u korist eksperimentalne grupe i kod osnovne škole, gde za 14% ima više majki sa 5 do 8 razreda osnovne škole u kontrolnoj grupi. Ove razlike ne mogu značajnije uticati na efekte školskog učenja, jer se radi o učenicima starijeg uzrasta i o programima koje nisu njihove majke ni sa visokom školskom spremom izučavale u toku svog visokog obrazovanja.

UZORAK I GRUPE PREMA OPŠTEM USPEHU U ZAJEDNIČKOM SREDNJEM VASPITANJU I OBRAZOVANJU. Opšti uspeh učenika u prethodnom školovanju može da bude jedan od značajnih faktora koji utiču na kasnije savladavanje odredjenih programskih sadržaja.

Zato je od interesa da se sagleda opšti uspeh učenika u zajedničkom srednjem vaspitanju i obrazovanju:

Opšti uspeh učenika Tabela 6.

Opšti uspeh učenika u zajedničkom srednjem vaspitanju i obrazovanju	K-61. uč.		E-57 uč.		SVEGA- 118 uč.	
	Zbir srednjih ocena	Srednja ocena grupe	Zbir srednjih ocena	Srednja ocena grupe	Zbir srednjih ocena	Srednja ocena uzorka
I razred	286,03	4,69	279,15	4,90	565,18	4,79
II razred	288,65	4,73	281,66	4,94	570,31	4,83
UKUPNO:	574,68	4,71	560,81	4,92	1135,49	4,81

Prema srednjoj oceni opšteg uspeha učenika u zajedničkom srednjem vaspitanju i obrazovanju, kako u obe greupe, tako i u celom uzorku, može se konstatovati da taj uspeh spada medju bolje u spektru različitih struka u pozivnousmerenom srednjem obrazovanju. Veće srednje ocene opšteg uspeha imaju u medicinskoj, ekonomskoj, pravnoj, nekim smerovima elektrotehničke i još nekim strukama. To znači da su se u matematičku struku opredelili učenici sa boljim uspehom iz ZSVO.

Iz tabele se vidi da je opšti uspeh odličan, prema skali ocenjivanja opšteg uspeha, kako u celom uzorku tako i u obe njegove grupe, eksperimentalnoj i kontrolnoj. To znači da ovaj činilac nema uticaja na eventualne razlike u realizaciji programskih sadržaja iz teme "GRANICA FUNKCIJE" u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi. Od moguće srednje ocene opšteg uspeha 5,00 procenat ostvarenja u pojedinim grupama iznosi: u kontrolnoj 94,20% i u eksperimentalnoj 98,40%. I ovaj podatak ukazuje na znatnu ujednačenost kontrolne i eksperimentalne grupe, odnosno ujednačenost grupa se kreće u granicama dozvoljenih statističkih vrednosti. Interesantan je još i podatak da je u kontrolnoj grupi bilo 50 učenika (82%) sa odličnim uspehom, dok je u eksperimentalnoj grupi odličnih učenika bilo 56 (98%). Medjutim, kako se to vidi iz tabele 6., srednje ocene učenika u eksperimentalnoj grupi su bile nešto veće, pa je zato i njihova ukupna srednja ocena nešto veća nego u kontrolnoj grupi.

Još je važnije sagledati uspeh iz matematike u prethodnom školovanju, smatrajući ga kao jedan od bitnih indikatora postojanja preduslova za uspešno shvatanje i savladavanje graničnih procesa u okviru predmeta "ANALIZA" u matematičkoj struci pozivnousmerenog obrazovanja srednjeg stupnja.

Uspeh učenika iz matematike Tabela 7.

Uspeh iz matematike u zajedničkom srednjem vaspitanju i obrazovanju		K-61 uč.		E-57 uč.		SVEGA-118 uč.	
		Zbir ocena	Srednja ocena grupe	Zbir ocena	Srednja ocena grupe	Zbir ocena	Srednja ocena uzorka
I razred		291	4,77	280	4,91	571	4,84
II razred		289	4,74	283	4,96	572	4,85
UKUPNO ZSVO:	ostvareno	580	4,75	563	4,94	1143	4,84
	moguće	610	5,00	570	5,00	1180	5,00
	%	95,08	95,08	98,77	98,77	96,86	96,86

Najpre treba konstatovati da je srednja ocena iz matematike u zajedničkom srednjem vaspitanju i obrazovanju vrlo visoka u obe grupe, a shodno tome i u celom uzorku. Time je osiguran jedan od preduslova za uspešno praćenje i savladavanje programskih sadržaja iz graničnih procesa u pozivnousmerenom obrazovanju srednjeg stupnja. Ako bi smo hteli da vidimo kakva je ekvivalentnost grupa po ovom važnom elementu za istraživanje u obradi teme "GRANICA FUNKCIJE", onda je celishodno da se ostvareni zbir srednjih ocena prikaže u procentima u odnosu na moguć zbir srednjih ocena. Taj procenat pokazuje da izmedju grupa postoji odredjena razlika, koja nije tako značajna, ali ipak tu razliku treba imati u vidu pri merenju efekata savladanosti sadržaja iz teme koja je predmet istraživanja.

Prethodna analiza činilaca koji bi mogli uticati na sprovodjenje eksperimenta i rezultate istraživanja pokazala je da uzorak sačinjavaju dve ujednačene grupe ispitanika po svim bitnim i značajnim obeležjima (pol, zanimanje roditelja, školska sprema roditelja, opšti uspeh i uspeh iz matematike u prethodnom školovanju). Jedino se u pogledu visoke školske spreme roditelja grupe znatnije razlikuju i ta školska sprema je povoljnija u grupi E, dok se po svim ostalnim navedenim i analizaranim činiocima moglo očekivati njihovo jednako delovanje u obe grupe.

Iz prethodnog prikaza uzorka i analize pojedinih njegovih obeležja može se zaključiti da je uzorak dovoljno reprezentativan u odnosu na populaciju i da može poslužiti za generalizaciju rezultata istraživanja na celu populaciju, pa i šire. To proizilazi iz: metodološkog postupka formiranja uzorka (stopa biranja je 122:433 = 0,28176 ili 28,18%, interval biranja je 433:122 = 3,5, način biranja eksperimentalne i kontrolne grupe sproveden je na principu koji se primenjuje za jednostavan slučajni uzorak), vrste uzorka (uzorak je grupni i spada u one sa verovatnoćom), veličine uzorka (više od jedne četvrtine populacije) i njegovih ostalih bitnih karakteristika. Uzorak je u celini prikazan sa dovoljno podataka koji ga dobro determinišu i može u potpunosti poslužiti za analizu rezultata istraživanja.

5.3.2. Organizacija eksperimenta

Nastojanja proteklih decenija u raznim zemljama da se odredi obim, nivo, dubina i način obrade sadržaja iz graničnih procesa u srednjoj školi, nisu još uvek dala zadovoljavajuće rezultate i rešenja koja bi bila široko prihvaćena i primenjivana, iako su ovi sadržaji ".... definitivno zauzeli svoje mesto u programu matematike u većini škola drugog stupnja" (|10.|, str. 86 .) još od 1914. godine, posle medjunarodne konferencije o matematičkoj nastavi u Parizu. Batler i Vren u knjizi "Nastava matematike u srednjoj školi - program i metodi" ističu da su "pojmovi granične vrednosti i beskonačno male veličine i primena tih pojmova vitalni za razumevanje diferencijalnog i integralnog računa i predstavljaju zaista temelj na kome je diferencijalni i integralni račun izgradjen" (|11.|, str. 389). U istoj knjizi, malo dalje, u vezi sa graničnom vrednošću i beskonačno malim veličinama citira se američki matematičar Joseph Vance McKelvey, koji kaže: "Učenikovo prethodno izučavanje matematike zasnovano je u celini na elementarnim principima algebre i geometrije u ravni. Pojam funkcije koja teži nekoj graničnoj vrednosti pojavljivao se samo u povremenim problemima. Nasuprot tome, kroz ceo diferencijalni i integralni račun *pojam granične vrednosti* pojavljuje se kao fundamentalni princip" (|11|, str. 389-390.). Isto tako Batler i Vren navode da "... izuzev nekoliko članaka u jednom ili dva profesionalna časopisa, veoma je malo napisano o nastavi diferencijalnog i integralno računa" (|11|, str. 385.). Ipak zadnjih godina ima znatno više stručnih priloga koji se odnose na nastavu ANALIZE u srednjoj školi, posebno u časopisima: "MATEMATIKA V ŠKOLE" i "Der Mathematik - unterricht". To je dokaz da se programskim sadržajima i nastavnim pitanjima ANALIZE, pa prema tome i graničnih procesa, sve više posvećuje paržnja. Imajući u vidu da ima relativno malo istraženih pitanja iz nastave diferencijalnog i integralnog računa, mi smo i preduzeli jedno ovakvo istraživanje koje će pored iznalaženja puteva i načina obrade sadržaja iz graničnih procesa, obuhvatiti obradu teme GRANICA FUNKCIJE pomoću struktuiranog gradiva.

Posebno treba istaći da se program ANALIZE u matematičkoj struci SAP Vojvodine od 1980. godine i njemu slični programi - po svojoj širini i dubini obuhvaćenih sadržaja - ne primenjuje dugo u srednjim školama, kako kod nas tako i u svetu. Otuda i nema mnogo iskustava i pouzdanih podataka o pristupačnosti ovih sadržaja uzrastu učenika i o putevima, oblicima, mogućim stepenima dostignuća i efektima realizacije istih. Glavna karakteristika programa ANALIZE u matematičkoj struci SAP Vojvodine jeste prisutnost graničnih procesa kao osnovne niti celog tog programa. Raniji programi diferencijalnog i integralnog računa u srednjim školama pretežno su sadržavali algoritamsku tehnku odredjivanja granice, izvoda i integrala, a daleko manje ili skoro nikako je obraćana pažnja na suštinu infinitezimalnog računa, odnosno na njegovo glavno obeležje - granične procese. Ova konstatacija se naročito odnosi na nastavnu praksu poslednjih petnaestak godina, u kom razdoblju je posećen veliki broj časova na kojima su se realizovali sadržaji iz diferencijalnog i integralnog računa. Polazeći od navedenih razlika u programima nameće se potreba da se odredjeni vremenski period prati i proverava realizacija i usvajanje pojedinih pojmova i sadržaja iz graničnih procesa u srednjoj školi, što bi trebalo da posluži daljem usavršavanju samog programa ANALIZE, a i nastavne prakse. Mi smo se opredelili, s jedne strane, na proveravanje efekata realizacije sadržaja teme "GRANICA FUNKCIJE", a s druge strane, da se proveri kombinovani pristup definisanju pojma granice funkcije. Pri tome je bila obezbedjena tako vodjena nastava u okviru eksperimenta, koja uvažava sistematičnost i postupnost u učenju, polazeći od teorije instrukcija i posebno struktuiranog gradiva teme GRANICA FUNKCIJE. Uspešnost savladavanja matematičkih sadržaja u mnogome zavisi od vrste, odmerenosti i funkcionalnosti zadataka koji se daju za vežbanje. Zato je u organizaciji eksperimenta bilo planirano i kasnije u njegovom sprovodjenju i ostvareno detaljno raščlanjavanje sadržaja teme "GRANICA FUNKCIJE" (zadaci za prethodno vežbanje, primeri za ilustrovanje pojmova, definicije, teoreme, zadaci za vežbanje radi utvrdjivanja odredjenih pojmova i algoritama i sl.), koje je uvažavalo ove zahteve.

Iz prethodno navedenih karakteristika uzorka istraživanja, vidi se da su postojali neophodni preduslovi za uspešnu organizaciju eksperimenta. Od svih navedenih karakteristika uzorka učenika najvažniji je podatak o njihovom opštem uspehu i uspehu iz matematike u prethodnom školovanju. Ti podaci pokazuju da se moglo pretpostaviti da učenici poseduju odgovarajuće sposobnosti za shvatanje i usvajanje složenijih, težih i u većoj meri apstraktnih matematičkih pojmova i sadržaja, a što je još važnije, kako navodi B. Stevanović, "sa rašćenjem se stalno povećava transfer od ranijeg učenja" (|150|, str. 118), pa odličan uspeh iz matematike u ZSVO treba da ima uticaja na savladavanje gradiva iz graničnih procesa. Sa uzrastom se ne povećava samo transfer, nego, kako je to utvrdjeno mnogim ispitivanjima u psiholotiji, "... povećavaju se i sposobnosti učenja u toku rašćenja sve do doba zrelosti, do dvadesetih godina" (|150|, str. 117.). Eksperimentom je trebalo proveriti takvu pretpostavku na području matematičkog obrazovanja.

Pored navedenih karakteristika uzorka učenika, treba još istaći da su nastavnici u pomenutim školskim centrima prihvatili organizaciju eksperimenta na vrlo zavidnom saradničkom nivou. Oni su nastojali da obezbede sve potrebne preduslove za nesmetan i normalan tok eksperimenta u toku obrade teme "GRANICA FUNKCIJE", kao i da pruže sve potrebne podatke o učenicima i obradi sadržaja iz graničnih procesa, kako pre eksperimenta, tako i u toku i posle njegovog završetka.

S obzirom na visok stepen apstraktnosti većine pojmova iz graničnih procesa, a posebno pojma granice funkcije, moglo se pretpostaviti da postoje odredjene poteškoće u procesu shvatanja i usvajanja ovih pojmova od strane učenika. Zato je istraživanjem trebalo utvrditi što prihvatljiviji put i način prezentiranja tih pojmova učenicima. Smatrali smo da je u nastavi matematike najvažnije da učenici uvide suštinu najbitnijih i najtežih pojmova iz graničnih procesa, što se može postići, izmedju ostalog, i smišljeno odabranim primerima i zadacima, čijim će rešavanjem učenici postupno uvidjati bitne elemente pojmova i definicija koji će uslediti. Pri tome je vrlo važno da se na osnovu napred navedenih teorija učenja, razvija kod učenika mišljenje i zaključivanje proučavajući logičke i matematičke operacije koje obezbedjuju što sigurniji put do shvatanja i usvajanja pojmova. Zbog toga je pri detaljnoj razradi sadržaja za eksperimenat posebna pažnja bila posvećena odabiranju primera koji su sadržavali one pojmove koji će se javljati u definiciji granice funkcije, kao na primer: apsolutna vrednost realnog broja, okolina tačke, intervali realnih brojeva i slično. Isto tako, pre sprovodjenja eksperimenta izvršeno je inicijalno ispitivanje učenika testom koji je obuhvatao pitanja i zadatke iz prethodnog gradiva sa elementima graničnih procesa. Taj inicijalni test trebao je da podstakne kod učenika asocijacije na prethodno proučavano gradivo koje je po svojoj strukturi i osnovnim elementima blisko graničnim procesima. Zadaci sa tog testa detaljnije su analizirani u tački 5.4.2. ove glave. Na osnovu ovako organizovanog eksperimenta trebalo je proveriti napred opisani način usvajanja bitnih pojmova i sadržaja teme "GRANICA FUNKCIJE" i posebno kakvi se efekti ostvaruju ako se za granicu funkcije koriste tri definicije - metrička (pomoću "ε-δ" simbolike), topološka (pomoću okoline tačke) i sekvencijalna (pomoću nizova). Sprovodjenjem inicijalnog testa u obe grupe - eksperimentalnoj i kontrolnoj - bilo je obezbedjeno podsticanje i podsećanje na one pojmove iz ranijeg gradiva koji na odredjeni način predstavljaju propedevtiku graničnih procesa, odnosne reprezentativne sadržaje koji imaju dodirnih tačaka sa graničnim procesima. Nakon toga se u kontrolnoj grupi odvijao standardni način rada pri obradi teme "GRANICA FUNKCIJE", dok je u eksperimentalnoj grupi to sprovedeno pomoću posebno struktuiranog gradiva te teme. To gradivo je bilo tako komponovano da istakne u prvom redu tok uvidjanja od strane učenika bitnih elemenata iz graničnih procesa vezanih za temu istraživanja, dajući paralelno sve tri napred navedene definicije granice funkcije i njihovu primenu na odgovarajuće zadatke. To znači da je u eksperimentalnoj grupi, izborom i strukturom sadržaja, bila u punoj meri zastupljena postupnost i sistematičnost u obradi teme "GRANICA FUNKCIJE". Sadržajem inicijalnog testa, nastavnicima i jedne i druge grupe, ukazano je na indirektan način koji su to sadržaji koji treba da čine predspremu učenika i koje delove ranije proučenog gradiva treba obnoviti. To su bili sadržaji koji su se odnosili kako na neke segmente programa iz osnovne škole i zajedničkog srednjeg vaspitanja i obrazovanja, tako i na već proučeno gradivo u III razredu pozivnousmerenog srednje obrazovanja, posebno gradivo o nizovima. To je trebalo da doprinese otklanjanju teškoća u savladavanju sadržaja teme "GRANICA FUNKCIJE". U kasnijem toku istraživanja u eksperimentalnoj grupi bila je posvećena posebna pažnja vežbanju primera i zadataka, ilustrovanju pojmova - analitički i geometrijski i povezivanju ranije stečenih pojmova sa onima koji se tek uvode. Ovakav pristup u realizaciji pomenute teme trebao je da obezbedi bolje i veće nastavne efekte.

U postavljanju i organizaciji eksperimenta korišćena su u potrebnoj meri i iskustva dosadašnje nastavne prakse, posebno one koja se odnosi na realizaciju sadržaja vezanih za granične procese. Ukratko rečeno, nastavna praksa u realizaciji odredjenih elemenata graničnih procesa uglavnom se svodila na tehniku odredjivanja granice, a manje se obraćala pažnja na suštinu pojma granice i njegovu primenu. Polazeći od zadatka i hipoteze istraživanja vršeno je proveravanje opravdanosti te prakse kroz valorizaciju efekata koji se ostvare u kontrolnoj grupi i njihovo kompariranje sa rezultatima koji se ostvare u eksperimentalnoj grupi na istim programskim sadržajima (GRANICA FUNKCIJE). Prema osnovnoj hipotezi očekivalo se da će se putem instrukcija, usmeravanja i podsticanja u eksperimentalnoj grupi, u celini, postići veći efekti, a posebno na sadržajima koji se odnose na pojam granice funkcije i primenu tog pojma na odgovarajuće zadatke.

Organizacijom eksperimenta bilo je predvidjeno da se u kontrolnoj grupi - K rad odvija na uobičajeni način i bez instrukcija, usmeravanja i podsticanja sprovedenih u eksperimentalnoj grupi - E. Za rad u eksperimentalnoj grupi bio je pripremljen pisani materijal, a kao na primer posebno struktuiranog gradiva navodimo nastavnu jedinicu: "Definicija granice funkcije f u tački a". Po Bruneru (|87|, s.186), "razumeti strukturu nekog predmeta znači savladati ga tako da smo u stanju da uz jednu činjenicu vežemo čitav niz drugih, koje sa ovom stoje u bliskoj, razumljivoj i smisaonoj vezi. Ukratko, razumeti neku strukturu znači shvatiti prirodu veza medju njenim elementima. Neprekidno širenje i produbljivanje znanja u setlu najopštijih i najosnovnijih ideja. Ukoliko je ideja koju smo usvojili suštinskija i po svojoj odredbi osnovnija, utoliko će biti i veća mogućnost njene primene". Na osnovu toga, mi smo pošli od graničnog procesa kao osnovne ideje u gradivu matematičke analize za srednju školu, a onda smo povezivanjem sa odredjenim sadržajima iz tema o nizovima i realnim brojevima, pristupili daljem širenju i produbljivanju graničnih procesa kroz gradivo teme: GRANICA FUNKCIJE. Povezivanje sa granicom niza i apsolutnom vrednošću realnog broja ilustrujemo na nastavnoj jedinici: "Definicija granice funkcije f u tački a". Struktuiranje ovog gradiva smo tako postavili da učenik može uspešno da napreduje ako savesno postupno i uspešno savladjuje sekvencu po sekvencu znanja. U početku su to sekvence koje učenika usmeravaju i podstiču da se podseti najbitnijih ranijih znanja neophodnih za razumevanje granice funkcije u tački. Zatim se daju instrukcije koje imaju za cilj da se produbi i proširi ideja graničnog procesa u slučaju granične vrednosti funkcije u tački. I najzad se formuliše sama metrička definicija granice funkcije.

Tok nastavne jedinice započinje zajedničkim utvrdjivanjem (nastavnik i učenici) pitanja na koje želimo da dobijemo odgovor.

Napišite u vašim sveskama definiciju granice niza (a_n), kada $n \to \infty$.

Sledi samostalan rad učenika i provera zapisane definicije od strane nastavnika kod jednog učenika, uz praćenje ostalih

---

U toj definiciji treba obratiti pažnju na prisutnost kvantifikatora: *za bilo koje* ε, odnosno n i *postoji* N, kao i na nejednakost $|a_n - a| < \varepsilon$. Za njeno bolje razumevanje i kasniju primenu treba rešiti i sledeće zadatke.

1. Da li skup rešenja nejednačine $|x| \leq 5$ sadrži sva rešenja nejednačine $-2 \leq x \leq 5$?

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

---

2. Približna vrednost broja 4/7 sa umanjenjem do stotih iznosi 0,57. Da li je tačna nejednakost $4/7 - 0,57 < 0,1$?

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

---

3. Prikazati u obliku intervala nejednakost $|x| < 2$.

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

---

4. Kako glasi koordinata sredine intervala, koji odgovara skupu rešenja nejednačine $|x - 2| < 0,4$?

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

---

5. Funkcija je zadana formulom $y = 3x$ $(R \xrightarrow{f} R)$. Odrediti skup vrednosti funkcije na koje se preslikava skup vrednosti x što zadovoljavaju nejednačinu $|x - 1,5| \leq 0,5$.

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

---

6. Za funkciju $f(x) = x^2$ odrediti $f([-2; -1])$. Odrediti interval na x-osi koji odgovara vrednostima funkcije f intervala $|1,96;\ 2,25|$.

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

---

7. Nacrtati grafik funkcije $y = 3^x$ $(R \xrightarrow{f} R^+)$. Za ma koje ε, gde je $0 < \varepsilon < 1$, na ordinatnoj osi uočiti interval $]3-\varepsilon;\ 3+\varepsilon[$ i odrediti na apscisnoj osi skup na koji se pres-

likava uočeni interval.

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

Uporedite definiciju granice niža (a_n), kad $n\to\infty$, sa granicom funkcije f, kad $x\to\infty$: broj y_o je granica funkcije $y = f(x)$, kada $x\to+\infty$, ako za *bilo koje* $\varepsilon>0$ *postoji* takvo $x_o(\varepsilon)$ da je za *bilo koje* $x>x_o(\varepsilon)$ ispunjena nejednakost $|f(x)-y_o| < \varepsilon$.

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

Za graničnu vrednost funkcije $f(x) = (4x+2)/x$, kada $x\to+\infty$ dati geometrijsku interpretaciju.

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

Sada želimo da upoznamo pojam granične vrednosti funkcije u tački, odnosno da saznamo šta znači da "funkcija f ima graničnu vrednost y_o, kada x teži x_o".

Odrediti vrednosti funkcije $f(x) = (x^2-4)/(x-2)$ za date vrednosti x, odnosno popunite prazna polja u tablici.

x	3	2,1	2,01	2,001	1,9999	1,999	1,99	1,9	1,5	1
f(x)										

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

Šta možete reći o vrednosti funkcije f za x = 2, a šta biva sa vrednostima funkcije f kada se x približava broju 2?

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

Na osnovu prethodne tablice popunite sledeću tablicu:

$\|x-2\|$	
$\|f(x)-4\|$	

Sledi samostalan odgovor učenika i provera nastavnika.

Navedite bar dve vrednosti x za koje je $|x-2| < 0,1$. Šta je u tom slučaju sa odgovarajućim vrednostima funkcije f, odnosno sa $|f(x)-4|$?

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

Ako ste za x uzeli vrednosti 2,01 i 1,99, da li onda iz nejednakosti $|x-2| < 0,1$ sledi nejednakost $|f(x)-4| < 0,1$?

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

Ako je $|f(x)-4| < 0{,}01$ (taj broj se obično obeležava sa ε), da li postoji pozitivan broj δ takav da za bilo koje x za koje je $|x-2| < \delta$ važi nejednakost $|f(x)-4| < 0{,}01$? Odrediti broj δ.

Sledi samostalan rad učenika i provera nastavnika.

U cilju usvajanja preciznog jezika koji će se u definiciji koristiti učenici se pripremaju i kroz sledeća pitanja i odgovore*:

P(pitanje): Šta znači "y_0 je granica funkcije f u tački $x_0 \in [a,b]$

O(odgovor): f teži y_0, kad x teži x_0.

P(pitanje) Šta znači "teži"?

O: f postaje sve bliže i bliže y_0, kada x postaje sve bliže i bliže x_0.

P: Šta to znači "blizina"?

O. To je rastojanje izmedju f i y_0, odnosno $|f(x)-y_0|$ i izmedju x i x_0, odnosno $|x - x_0|$.

P: Kolika treba da budu ta rastojanja?

O: Manje od ε, odnosno manje od δ.

P: Kakva zavisnost posoji izmedju ε i δ?

O: Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, treba odabrati $\delta > 0$ tako da bude $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, kad je $|x - x_0| < \delta$.

P: Kako se to sve može matematički izraziti?

O: $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(x\in[a,b]\setminus\{x_0\};\ |x-x_0| < \delta) \Longrightarrow$

$(|f(x) - y_0| < \varepsilon)$

Sada sledi definicija granice funkcije u tački pomoću pojma apsolutne vrednosti.

Funkcija f definisana za $x \in\ ]x_0-\delta\ ;\ x_0+\delta[\setminus\{x_0\}$ ili za $x \in\ ]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ ima graničnu vrednost y_0 u tački $x_0 \in R$, ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da za sve x za koje je $0<|x_0-x| < \delta$ važi nejednakost $|y_0-f(x)| < \varepsilon$.

Test opštih sposobnosti i inicijalni test prethodnih znanja o graničnim procesima bili su sprovedeni u obe grupe K i E u prvom polugodištu školske 1980/81. godine. Nakon toga otpočela je obrada teme "GRANICA FUNKCIJE" istovremeno u obe grupe i po istom rasporedu gradiva (napred je naveden taj raspored gradiva). Tim rasporedom gradiva bilo je obezbedjeno nekoliko bitnih elemenata za sprovodjenje eksperimenta. Najpre, on je obezbedjivao isti broj časova za obradu navedene teme, zatim je obezbedjivao iste nastavne jedinice za obradu novog gradiva i isti broj časova za

---

* *Odgovore treba da daju učenici, a nastavnik ih po potrebi koriguje uz pomoć ostalih učenika koji nisu davali odgovor.*

vežbanje. Razlika je bila samo u pristupu i načinu tumačenja tih sadržaja. Dok je u kontrolnoj grupi bio sproveden standardni način rada i sve je bilo prepušteno nastavniku - izbor primera za ilustraciju pojmova, izbor zadataka za vežbanje i domaći rad, sadržaj školskog pismenog zadatka i dr., dotle je u eksperimentalnoj grupi unapred bio utvrdjen put i način realizacije gradiva i to počev od primera koji su služili kao priprema za uvodjenje novih pojmova ili za njihovu ilustraciju, preko geometrijske intepretacije pojedinih pojmova, zatim izbora zadataka za vežbu, pa do primene obradjenih pojmova i stavova na rešavanje odgovarajućih zadataka. Nastavnik - eksperimentator dosledno se pridržavao pripremljenog materijala za rad koji je bio tako struktuiran da je na odredjeni način predstavljao metodičko-stručnu pripremu za časove.

Profesori uključeni u istraživanje, odnosno eksperiment, imali su obavezu da nakon obrade teme "GRANICA FUNKCIJE" popune upitnik za nastavnike. Sadržaj tog upitnika, u osnovnim crtama, dat je u odeljku o mernim instrumentima.

Nakon obrade teme "GRANICA FUNKCIJE" i iskorišćenog fonda od 20 časova koliko je bilo predvidjeno, sprovedeno je završno ispitivanje u obe grupe i to u II polugodištu (15. aprila) školske 1980/81. godine. Da bi se utvrdile eventualne razlike u trajnosti znanja izmedju eksperimentalne i kontrolne grupe, i konstatovale eventualne razlike u transferu znanja, isti test je ponovljen u obe grupe početkom školske 1981/82. godine (24. septembra).

U cilju naknadne kontrole dobijenih rezultata u eksperimentalnoj grupi sproveden je eksperimentalni rad u jednom odeljenju III razreda matematičke struke pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja i naredne školske 1981/82. godine i u njemu je izvršeno ispitivanje učenika istim testom kao i prethodne školske godine.

5.3.3. *Instrumenti istraživanja*

U toku pripremanja i sprovodjenja istraživanja, odnosno samog eksperimenta, korišćeni su različiti instrumenti koji se mogu razvrstati u dve osnovne kategorije. Jedni su služili za prikupljanje odredjenih podataka relevantnih za istraživanje, a drugi su predstavljali *merne instrumente* za ispitivanje učenika obuhvaćenih istraživanjem.

Radi kontrolisanja odredjenih činilaca koji mogu da utiču na uspeh u učenju i radi izbora dveju što ujednačenijih grupa (eksperimentalne i kontrolne) prikupljeni su podaci o nekim karakteristikama uzorka putem *upitnika za razredne starešine (PRILOG I)*. Ti podaci su analizirani u tački 5.3.1. Taj upitnik je sadržavao: uspeh učenika u prethodnom školovanju (opšti uspeh meren prosečnom ocenom i uspeh iz matematike u I i II razredu zajedničkog srednjeg vaspitanja i obrazovanja), pol učenika, školsku spremu roditelja i materijalno-ekonomski položaj učenika sagledavan kroz zaposlenost roditelja. Školska sprema roditelja bila je razvrstana na sledeći način: BŠ - bez škole; (4) - do 4 razreda osnovne škole; (8) od 5 do 8 razreda osnovne škole; srednja, viša i visoka školska sprema. Kod zaposlenosti su bile ponudjene sledeće tri mogućnosti: RNP - radnik u neposrednoj proizvodnji; NR - neproizvodni radnik i O - ostalo, u nameri da se dobije samo tačan podatak o zaposlenosti roditelja.

Dodatni *upitnik za razredne starešine (PRILOG II)* sadržavao je opšti uspeh učenika na kraju školske 1980/81. godine u III razredu pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja i uspeh iz ANALIZE u tom razredu. Pošto se radilo o istim učenicima obuhvaćenim eksperimentom i čiji je opšti uspeh i uspeh iz matematike u zajedničkom srednjem vaspitanju i obrazovanju analiziran na početku te iste školske godine, to je bilo interesantno uporediti taj uspeh sa uspehom u pozivnousmerenom obrazovanju srednjeg stupnja. Ovi podaci o uspehu iz analize poslužili su za komparaciju sa rezultatima na testu.

Za izbor dveju približno ujednačenih grupa (eksperimentalne i kontrolne) jedan od elemenata bio je *i test optih sposobnosti učenika*, odnosno *domino test*.[63] Ovaj neverbalni

---

63) Domino test - D-48 meri u "čistom" vidu "G" faktor, a kako ističe prof. R. Kvaščev u svom udžbeniku PRIMENA TEORIJA UČENJA NA OBLAST NASTAVE I VASPITANJA "uspeh u svim školskim predmetima zavisi od "G" faktora, tj. od opšte inteligencije...." (str. 282).

test, kao što je poznato, poseduje dosta visoku korelaciju sa pojedinim matematičkim testovima, a posebno je značajno da je većina zahteva u njemu slična strukturi kao što su to nizovi, odnosno pravila ili zakoni redjanja članova niza. Pored merenja opštih sposobnosti učenika ovim testom se uspešno meri sposobnost učenika da primenjuju analogiju kao metod u matematici i da logički zaključuju. Detaljnije o rezultatima domino testa dato je u tački 5.4.

Da bi se utvrdila znanja učenika iz graničnih procesa koja prethode obradi teme "GRANICA FUNKCIJE" dat je IN TEST: PZOGP - II/80 (inicijalni test - prethodna znanja o graničnim procesima, PRILOG III). To je neformalni test znanja koji je sastavljen na osnovu proučenog programa nastave matematike u osnovnoj školi i zajedničkom srednjem vaspitanju i obrazovanju, kao i prvih tema iz programa ANALIZE u III razredu pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja. Većina tih zadataka pojedinačno je proveravana u nastavnoj praksi i većina je originalna po svom sklopu. Na osnovu ponderacije sadržaja po temama utvrdjena je sledeća struktura testa: 3 pritanja za skup realnih brojeva, 5 pitanja iz prethodnih znanja o graničnim procesima, 4 pitanja iz pojma niza i njegovih osobina i 8 pitanja iz granice niza. Zadaci su bili tako formulisani da je njihova struktura prema tipu bila sledeća: tip alternacije - 3, tip kompenzacije (prisećanje i dopunjavanje) - 6, tip kombinacije (sredjivanja i uporedjivanja) - 6 i tip selekcije (višestrukog izbora) - 5. U većini zadataka trebalo je prethodno obaviti i odredjeno računanje, odnosno bilo je potrebno poznavati i neke algoritme. Ovim ispitivanjem želelo se saznati na koje se prethodne sadržaje može nadovezivati obrada teme "GRANICA FUNKCIJE" i u kojoj meri učenici poseduju potrebna predznanja iz graničnih procesa. Ovo je posebno bilo važno da se sazna zbog pripremanja stručno-metodičkog materijala za obradu teme "GRANICA FUNKCIJE". Iz prethodnog prikaza strukture testa (nestandardizovani zadaci objektivnog tipa) vidi se da je prethodno gradivo bilo zastupljeno sa 40% zadataka, dok je iz gradiva III razreda pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja bilo 60% zadataka. Znači, dobar broj zadataka se odnosio na animiranje učeničkog iskustva stečenog prethodnim savladavanjem programskih sadržaja i na mogućnost njihovog posmatranja i logičkog zaključivanja. Medjutim, poznato je da se na ispitivanjima sa ovakvom vrstom zadataka u testu ne dobijaju očekivani rezultati, bez obzira što se vodi računa o njihovoj proporcionalnoj zastupljenosti u testu.

Završno merenje nakon eksperimentalne obrade sadržaja teme "GRANICA FUNKCIJE" u II polugodišu školske 1980/81. godine izvršeno je *FM TESTOM: ZOGF-III/81 (znanja o granici funkcije) - PRILOG IV*. Sadržaj ovog testa obuhvatao je pitanja i zadatke iz gradiva o granici funkcije i njenim primenama, a posebno je sadržavao pitanja koja se odnose na različite pristupe definisanju pojma granice funkcije. Po tipovima pitanja i zadataka struktura ovog testa bila je slična kao i testa PZOGP-II/80, odnosno bila su zastupljena sva četiri tipa pitanja: alternacije, kompenzacije, kombinacije i selekcije. Test nije baždaren kao celina, ali je valjanost pitanja i zadataka pojedinačno proveravana u nastavnoj praksi, prilikom obilaska časova nastave analize u pojedinim obrazovnim centrima, ili su uzeti sa časova na kojima su takvi primeri i zadaci bili provežbavani od strane učenika. Ovim istim testom vršeno je proveravanje retencije i transfera znanja učenika, na početku naredne školske 1981/82. godine, kao i kontrolno testiranje u toku školske 1981/82. godine.

Na završetku eksperimenta dat je i UPITNIK ZA PROFESORE (prilog V) vezan za obradu teme GRANICA FUNKCIJE.

5.4. Tok eksperimenta

Pre otpočinjanja sa eksperimentom izvršene su potrebne pripreme i provere. One su uglavnom imale za cilj da se teorijski postavi didaktičko-metodička obrada teme istraživanja i da se što odredjenije utvrdi radna hipoteza, zatim da se izvrši izbor dve ujednačene grupe učenika koji će biti obuhvaćeni istraživanjem, da se osmisli metodičko-praktični pristup obradi teme "GRANICA FUNKCIJE", realizujući to kasnije u vidu pisanog materijala, odnosno struktuiranog gradiva i da se ispita validnost nekih delova, odnosno zadataka, koji su bili predvidjeni za sadržaje mernih instrumenata. Ove pripreme vršene su tokom školske 1979/80. godine i početkom naredne 1980/81. godine. Sve te pripreme omogućile su da se što pouzdanije i potpunije postavi "*Projekat sprovodjenja eksperimenta u okviru obrade teme: GRANICA FUNKCIJE*". U ovom projektu bio je obrazložen osnovni cilj i sadržaj eksperimenta i bio je dat operativni plan njegovog sprovodjenja. Navodimo neke delove iz tog projekta, dopunjene obrazloženjima pojedinih stavova i opredeljenja u sprovodjenju eksperimenta.

5.4.1. Sadržaj eksperimenta i njegova dinamika

Predmet eksperimenta bila je obrada teme GRANICA FUNKCIJE iz programa ANALIZE za III razred pozivnousmerenog obrazovanja i vaspitanja. S obzirom da se radi o pojmovima koje učenici teže shvataju i usvajaju bilo je potrebno, s jedne strane, pripremiti odgovarajući didaktičko-metodički pristup obradi pomenute teme, a s druge strane obezbediti naučno-stručni nivo tumačenja pojedinih pojmova. U nastojanju da se odredjeni teži pojmovi približe uzrastu učenika, javljaju se ponekad i dileme, pa i primedbe da se time narušava rigoroznost i naučnost tih matematičkih pojmova. J.A. Hinčin u vezi sa ovim postavlja sledeći princip: "U slučajevima kada uslovi uzrasta ne dozvoljavaju da se izvestan pojam tretira onako kao je to usvojila savremena nauka, koncepcija toga pojma može se u školskom kursu uprostiti. To znači da škola nije obavezna da razvitak svakog pojma dovodi do njegovog stanja u savremenoj nauci, već se može zaustaviti i na prethodnom stadijumu (koji prethodi najvišem-naše objašnjenje) razvitka tog pojma. Ali, ni u jednom slučaju škola nije dužna da u cilju uprošćavanja *kvari* naučno tretiranje pojma dajući mu obeležja koja su protivurečna naučnom shvatanju istog...". Na pitanje: "Kako osnovna znanja primeriti dečjim interesovanjima i sposobnostima?" J. Bruner ističe: "Učenik često može da lakše shvati tačna i inspirativna objašnjenja nego skučene i samim tim nedostupne poluistine, koje mu se, na žalost, često nude. Zaključak gotovo svih onih koji su radili na izradi novih kurikuluma (nastavnih programa - naša napomena) glasi: ako neku materiju izložimo na tačan i verodostojan način, ne znači da ćemo je neminovno učiniti suvoparnom i nezanimljivom; štaviše, 'ispravno i dovoljno opšte' često znači i 'najzanimljivije' objašnjenje" (|19|, str. 236). Sigurno je da će odredjeni matematički pojam učenicima biti jasniji i lakše će ga usvojiti, ako im se u razumnoj meri prikaže njegova geneza. Pri tome se kod nekih pojmova ne može u srednjoj školi ići do kraja, već se mora zaustaviti na onom stadijumu razvitka tih pojmova koji je za učenike shvatljiv i prihvatljiv. Primer takvog pristupa dat je u članku: "Granični procesi - istroijskometodički osvrt" (|30|). Medjutim, kod nekih pojmova postoje različiti pristupi njegovom definisanju na jednom istom stadijumu razvoja. Takav je slučaj sa pojmom granice funkcije. Danas postoje tri osnovna pristupa pojmu granične vrednosti funkcije, posmatrano kroz samu definiciju granice. To su: 1) metrička ili epsilon-delta (ε-δ) definicija, 2) topološka ili definicija pomoću pojma okoline i 3) sekvencijalna ili definicija pomoću niza. Eksperimentom je trebalo utvrditi, posmatrano u celini, da li se posebno struktuiranim gradivom (pripremanjem odgovarajućeg sadržaja za časova sa pogodno odabranim primerima i odgovarajućim geometrijskim interpretacijama) mogu postići veći efekti u obradi teme: GRANICA FUNKCIJE, a posmatrano u pojedinostima, da li je pristup toj temi moguće izvesti kombinovanjem sve tri navedene definicije granice. Pored toga, trebalo je utvrditi u kojim sadržajima i zadacima iz navedene teme je najpogodnije koristiti pojedine definicije granice funkcije.

Za sprovodjenje ovog pedagoškog eksperimenta odabrana je tehnika paralelnih grupa. Sam eksperimenat je imao pretežno verifikacioni karakter (testiranje hipoteze), a delimično je to bilo i kritičko proveravanje teorijskih i metodičkih rešenja u obradi teme: GRANICA FUNKCIJE.

Ovakva koncepcija eksperimenta uslovila je i odgovarajuće merne instrumente, o kojima je bilo reči detaljnije u prethodnoj tački. Projektom eksperimenta bila je predvidjena dinamika njegove realizacije u toku školske 1980/81. i 1981/82. godine. Na početku 1980/81. školske godine izvršene su odredjene pripreme u tri pomenuta obrazovna centra i obavljen je razgovor sa profesorima o njihovom angažovanju u sprovodjenju istraživanja. Dalje je projektom bilo predvidjeno da se u novembru 1980. godine izvrši merenje opštih sposobnosti učenika, što je i realizovano. U decembru 1980. godine bilo je predvidjeno merenje prethodnih znanja o graničnim procesima i to u vreme koje je sledilo posle obrade teme: GRANICA NIZA, što je takodje i realizovano. Posle toga, prema projektu, usledio je eksperimentalan rad u trajanju od osam radnih sedmica sa po 3 časa sedmično u onim odeljenjima koja su sačinjavala eksperimentalnu grupu. Za taj rad bilo je pripremljeno posebno struktuirano gradivo teme praćenja, po kojem je profesor - eksperimentator realizovao sadržaje teme: GRANICA FUNKCIJE. Paralelno se odvijao i rad u kontrolnoj grupi po istoj temi, ali bez stručno-metodičkog materijala. Posle završenog eksperimentalnog rada usledilo je završno merenje u obe grupe testom koji je trebao da pokaže kakva su znanja učenika o sadržajima iz teme: GRANICA FUNKCIJE. Bilo je predvidjeno da se taj isti test ponovi posle izvesnog vremena i to ispitivanje sprovedeno je u obe grupe početkom školske 1981/82. godine. Mimo projekta, naknadno je izvršeno ispitivanje jednog odeljenja sledeće generacije učenika istim testom, sa kojima je takodje obradjena tema: GRANICA FUNKCIJE uz pomoć njene detaljne metodičke razrade koja je izvršena za potrebe sprovodjenja eksperimenta.

Sastavni deo projekta eksperimenta predstavljao je posebno struktuirano gradivo teme: GRANICA FUNKCIJE, koje je sadržavalo stručnu i didaktičko-metodičku razradu gradiva te teme u formi koja je omogućavala profesoru - eksperimentatoru da ga neposredno koristi, kako u obradi novog gradiva, tako i prilikom utvrdjivanja. Obim struktuiranog gradiva bio je usklađen sa predvidjenim fondom časova za obradu teme: GRANICA FUNKCIJE. On je sadržavao, pored teorijskih objašnjenja novih pojmova i algoritama, i rešene primere koji ih ilustruju, kao i zadatke za utvrdjivanje gradiva. Projektom je bilo predvidjeda se striktno po ovom struktuiranom gradivu obradjuje tema: GRANICA FUNKCIJE samo u odeljenjima koja su sačinjavala eksperimentalnu grupu, dok se u odeljenjima kontrolne grupe rad odvijao bez ikakvog uticaja spolja, odnosno radilo se na standardan način.

Pored pretpostavke da će se postići veći nastavni efekti u obradi granice funkcije u eksperimentalnoj, nego u kontrolnoj grupi, mi smo pretpostavljali takodje da će se i u jednoj i u drugoj grupi postići rezultati potrebnog nivoa, odnosno da se granični procesi mogu uspešno realizovati, prema napred navedenom programu, u pozivnousmerenom srednjem obrazovanju.

5.4.2. Pretohodna ispitivanja

Da bi se istražio uticaj usmeravane (vodjene) nastave u obradi teme: GRANICA FUNKCIJE, bilo je neophodno da se utvrdi odnos sposobnosti i predspreme izmedju eksperimentalnih i kontrolnih odeljenja, odnosno izmedju učenika eksperimentalne i kontrolne grupe, pre sprovodjenja eksperimenta. U tom cilju izvršena su dva ispitivanja i to: testom za ispitivanje opštih sposobnosti učenika - DOMINO 48 i testom koji je sadržavao prethodna znanja o graničnim procesima - PZOGP-II/80. Ispitivanja su izvršena u dva odeljenja matematičke struke u Centru "Jovan Jovanović - Zmaj" u Novom Sadu i po jednom odeljenju iste struke u Centru "Koča Kolarov" u Zrenjaninu i Centru "Žarko Zrenjanin" u Vrbasu[64]. Oba ova ispitivanja su izvršena u prvom polugodištu školske 1980/81. godine.

Test opštih sposobnosti: TEST D-48[65]

Test D-48 predstavlja jedan od neverbalnih pouzdanih i dovoljno baždarenih instrumenata za ispitivanje opštih spo-

64) *Profesori matematike pomenutih centara Stevanka Dražić, Dušanka Vlatković i Dragoljub Radulović pružili su mi odgovarajuću pomoć u svim ispitivanjima, a prof. Dražić je još sprovela eksperimentalni rad, na čemu im se najlepše zahvaljujem.*

65) *Obezbedjivanje instrumenata i ispitivanje opštih sposobnosti učenika vršeno je u saradnji sa diplomiranim psihologom Dr Djordjem Djurićem, vanr. profesorom Univerziteta u N. Sadu. Za ukazanu pomoć izražavam mu posebnu zahvalnost.*

sobnosti starijeg uzrasta učenika i studenata. Sama konstrukcija testa je takva, da dolazi do izražaja sposobnosti ispitanika za uočavanje zakonitosti nizanja odredjenih objekata, što je od značaja za ovo istraživanje. Testom D-48 ispitani su svi učenici obuhvaćeni istraživanjem i to pre nego što su odredjene eksperimentalna (E) i kontrolna (K) grupa. Opredeljivanje za to koja će odeljenja biti u eksperimentalnoj a koja u kontrolnoj grupi, usledilo je na osnovu sagledavanja opšteg uspeha i uspeha iz matematike u zajedničkom srednjem vaspitanju i obrazovanju, kao i na osnovu sagledavanja uslova za eksperimentalan rad.

Rezultati ispitivanja testom D-48 daju se prema ranije utvrdjenim grupama. Ovi rezultati poslužili su, kao jedan od elemenata da se utvrdi, da li postoje značajne razlike u opštim sposobnostima učenika izmedju eksperimentalne i kontrolne grupe.

Uspeh učenika na DOMINO-TESTU Tabela 8.

REZULTATI TESTA D-48 (zadataka 44, maksimalan skor 44)		
GRUPA	E	K
N	57	61
M	31,01754386	29,72131148
σ	4,529629550	4,223470719
V	14,60% (0,14603443)	14,21% (0,14210243)
$\bar{t}_{116}$	1,604846	1,604846
$t_{116;0,01}$	2,619866	2,619866
% poz.odgovora	70,49	68,74

Iz rezultata testa D-48 vidi se da su grupe izrazito ujednačene po opštim sposobnostima. To pokazuju svi elementi iz prethodne tabele i to: procenat pozitivnih odgovora: E-70,49%, K-68,74%; srednja vrednost ili aritmetička sredina: E-31,02, K-29,72; standardna defijacija: E-4,53, K-4,22; koeficijenat varijacije: E-0,1460, K-0,1421 i na kraju, izračunata i tablična t-vrednost pokazuju da izmedju grupa E i K nema značajnih razlika, uzimajući vrlo visok prag značajnosti $\alpha = 0,01$ sa 116 stepeni slobode, odnosno na nivou značajnosti od 0,01 razlika izmedju aritmetičkih sredina grupa K i E statistički nije značajna, jer je $\bar{t}_{116} = 1,604846 < 2,619366 = t_{116;\ 0,01}$.

To potvrdjuje i analiza varijanse. Nultom hipotezom smo testirali da li je razlike srednjih vrednosti E i K grupe slučajna.

ANALIZA VARIJANSE: TEST D-48

	E - 57	K - 61
1. Srednja vrednost	$M_x = 31,017544$	$M_y = 29,721311$
2. Standardna devijacija	$\sigma_x = 4,529630$	$\sigma_y = 4,223471$
3. Suma obeležja	$\Sigma x_i = 1768$	$\Sigma y_i = 1813$
4. Ukupna suma kvadrata	$TSS = 2268,75$	
5. Tretman sume kvadrata	$T_rSS = 49,51$	
6. Greška sume kvadrata	$TSS - T_rSS = ESS = 2219,24$	
7. Tretman broja stepeni slobode	$df_1 = 1$	
8. Greška broja stepeni slobode	$df_2 = 116$	
9. Ukupan broj stepeni slobode	$df_1 + df_2 = df_3 = 117$	
10. Tretman srednje vrednosti kvadrata	$T_rMS = 49,51$	
11. Greška srednje vrednosti kvadrata	$EMS = 19,13$	
12. F odnos (količnik) sa 1,116 stepeni slobode	$F = 2,59$	

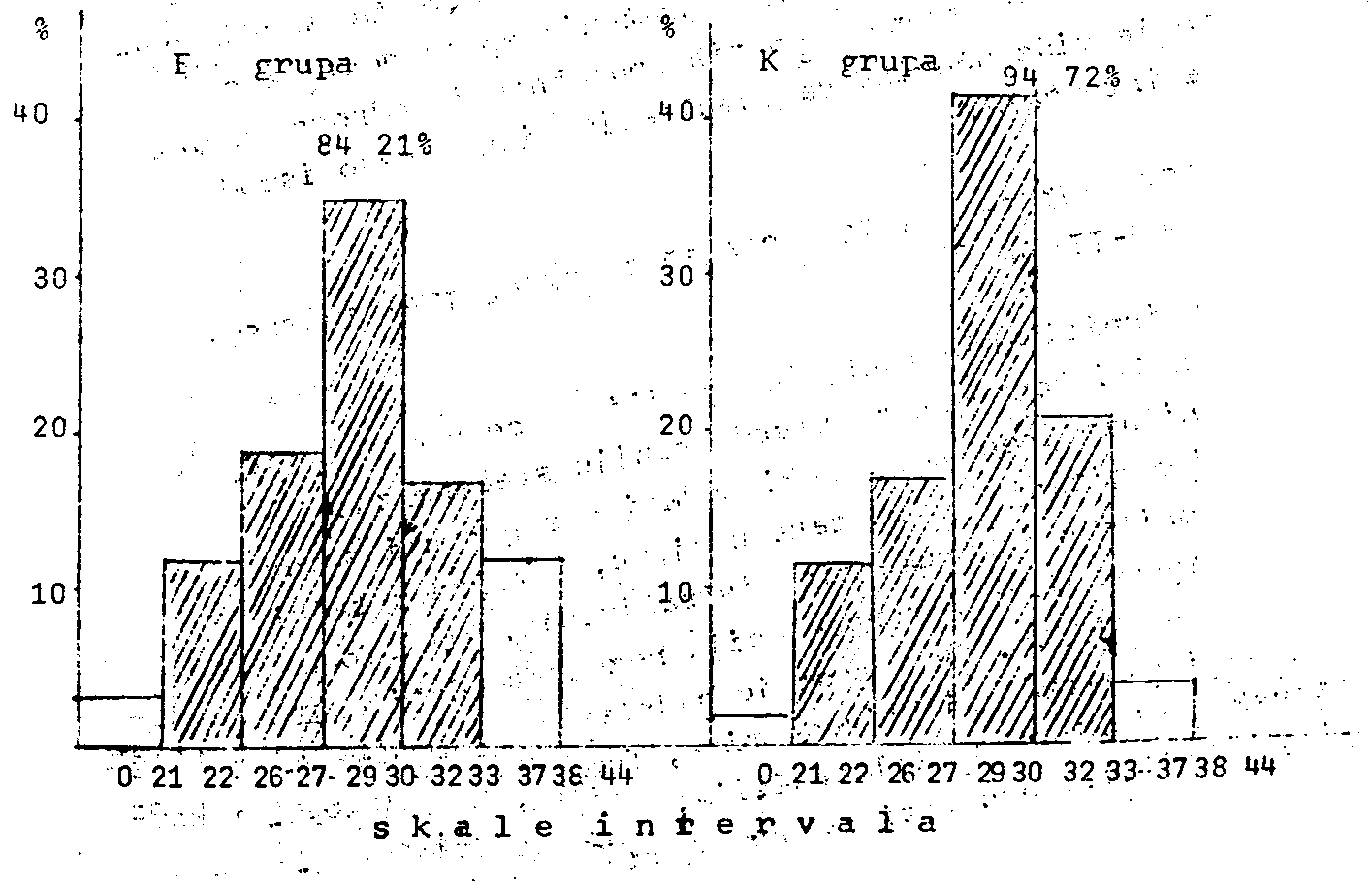
Tabela

	SS	df	MS	F
Tretman	49,51	1	49,51	2,59
Greška	2219,24	116	19,13	
Ukupno	2268,75	117		

Pošto je $F = 2,59$ manje od $F_{0,01;\ 1,116} = 6,86$ nulta hipoteza se ne odbacuje, odnosno nulta hipoteza se prihvata. To znači da izmedju aritmetičkih sredina ostvarenih na testu opštih sposobnosti D-48 u E i K grupi, ne postoji statistički značajna razlika na nivou značajnosti 0,01. Napomenimo da pomenuta razlika nije značajna ni na nivou značajnosti 0,05, jer je $F = 2,59$ manje od $F\ 0,05;\ 1,116 = 3,93$.

Ali grupe su izjednačene ne samo medjusobno, već i u njihovoj unutrašnjoj strukturi. Naime, na osnovu standardne devijacije grupa E i K dolazi se do podatka da se oko dve trećine njihovih poduzoraka nalazi u granicama ±σ. Preciznije: za grupu E imamo da se 66,67% odgovora učenika nalazi izmedju granica 26,49 i 35,55, a za grupu K imamo da se 65,57% odgovora učenika nalazi izmedju granica 25,50 i 33,94. Ovi podaci ukazuju, s jedne strane, da se radi o normalnoj raspodeli kontrolno - nezavisne promenljive (opšta sposobnost učenika), a s druge strane, da su obe grupe sastavljene od istih kategorija učenika po sposobnostima (najviše je prosečnih, a približno jednako ima nadprosečnih i ispodprosečnih), čime se koriguje slika o grupama formirana na osnovu opšteg uspeha i uspeha iz matematike u zajedničkom srednjem vaspitanju i obrazovanju.

Ujednačenost grupa se uočava i posmatranjem intervala ostvarenih bodova i njihovim poredjenjem sa raspodelom stanovništva po stepenu inteligencije, za koju je inače utvrdjeno da se normalno distribuira (v. |140|, str. 187.). U tom cilju dajemo najpre grafički prikaz raspodele učenika obe grupe prema rezultatima postignutim na testu D-48, koji su svrstani u skalu od šest intervala (v.sl.5.1.). Iz prikaza se vidi da og-



romna većina učenika pokazuje opšte sposobnosti koje su prosečne ili nešto ispod i iznad proseka (za E-grupu 84,21%, a za K-grupu 94,72% učenika obuhvaćeno je ovim trima kategorijama sposobnosti). Takodje se uočava da je u E-grupi veći broj učenika sa znatno nižim i sa znatno višim opštim sposobnostima, nego što ih ima u K-grupi.

Tabela 9.

Broj bodova od - do	Grupa E učenika		Grupa K učenika	
	broj	%	broj	%
38-44	7	12,28	2	3,50
33-37	10	17,54	12	21,05
30-32	20	35,09	24	42,10
27-29	11	19,30	10	17,54
22-26	7	12,28	8	14,03
0-21	2	3,50	1	1,75

Odgovori obe grupe koncentrisani su oko sredine skale intervala, odnosno u dva srednja od šest intervala nalazi se preko 50% svih učeničkih odgovora. To pokazuje da u obe grupe dominiraju učenici sa srednje izraženim sposobnostima sa tendencijom ka višem stepenu opštih sposobnosti, odnosno u obe grupe nešto je više učenika sa rezultatima iznad nego ispod dva srednja intervala.

TEST RANIJIH ZNANJA O GRANIČNIM PROCESIMA: IN TEST: PZOGP-II/80

Ovo ispitivanje imalo je za cilj da se u obe grupe, eksperimentalnoj i kontrolnoj, utvrde ranije stečena znanja učenika o graničnim procesima. Neki podaci o strukturi samog testa i tipovima pitanja i zadataka u njemu, dati su u tački u kojoj se govorilo o instrumentima istraživanja. Zbog toga će se sada odmah preći na interpretaciju rezultata dobijenih na IN TESTU-PZOGP: II/80. Ovaj test je sadržavao nestandardizovana pitanja i zadatke objektivnog tipa, formulisane u skladu sa testovskom tipologijom (alternacija, kompenzacija, kombinacija i selekcija). Rezultati sa ovog testa trebali su u prvom redu da pokažu na koja se prethodna znanja o graničnim procesima može nadovezati obrada teme: GRANICA FUNKCIJE, kao i da budu jedan od bitnih indikatora za način oblikovanja pisanog struktuiranog gradiva, odnosno didaktičko-metodičke razrade sadržaja navedene teme, sa ciljem da to predstavlja osnovu eksperimentalnog rada nastavnika.

Rezultati ispitivanja IN TESTOM-PZOGP: II/80. dati su prema ranije utvrdjenim grupama.

Uspeh učenika na IN TESTU-PZOGP: II/80. Tabela 10.

G r u p a	K	E
N	56	56
M	47,767857	53,678571
σ	12,957263	14,352836
V	0,27125478 (27,12%)	0,26738414 (26,74%)
$\bar{t}_{110}$	1,013411	1,013411
$t_{110;\ 0,01}$	2,6241666	2,6241666
$t_{110;\ 0,001}$	3,3041666	3,3041666
% pozitivnih odgovora	47,77	53,68

(zadataka 20, maksimalan skor 100)

S obzirom na strukturu i sadržinu testa rezultati i u jednoj i u drugoj grupi pokazuju da je procenat pozitivnih odgovora sasvim dobar i da su učenici pokazali da imaju potrebna predznanja za shvatanje i razumevanje sadržaja predvidjenog u okviru obrade teme: GRANICA FUNKCIJE. Ovakav zaključak proističe iz komparacije ovih rezultata sa ranijim rezultatima dobijenim na testovima slične strukture i sadržine[66]. Za naše istraživanje biće od značaja da se analiziraju

---

66) Kao primer, navodimo rezultate koji su dobijeni na testu u IV razredu prirodno-matematičkog smera u gimnazijama na području grada Beograda 1968. godine (zadataka na testu 66; maksimalan skor 160; N = 438; M = 47,52; σ = 23,43; % pozitivnih odgovora 31,8). Videti: Prosvetno-pedagoški zavod grada Beograda: ANALIZA rezultata testiranja učenika opšteobrazovnih škola Beograda na kraju školske 1967/68. godine, Beograd, 1968.

rezultati po pojedinim grupama zadataka, kako bi se preciznije sagledali oni elementi iz sadržaja testa koji imaju najneposredniju vezu sa obradom pojmova iz granice funkcije.

Rezultati IN TESTA - PZOGP: II/80. pokazuju da izmedju grupa postoje neznatne razlike u stepenu usvojenosti prethodnih pojmova i algoritama o graničnim procesima. To potvrdjuju neki elementi tabele 10 i to: srednja vrednost ili aritmetička sredina - za K: 47,767857, a za E: 53,678571; procenat pozitivnih odgovora - za K: 47,77%, a za E: 53,68%. Medjutim, izračunata i tablična t vrednost pokazuju da razlike izmedju aritmetičkih sredina grupa K i E statistički nisu značajne ni na nivou značajnosti 0,01 i ni na 0,001 pošto je:

$$\bar{t}_{110} = 1,013411 < 2,6241666 = t_{110;\ 0,01} \quad \text{i}$$

$$\bar{t}_{110} = 1,013411 < 3,3041666 = t_{110;\ 0,001}$$

Analizom varijanse smo takodje ispitivali značajnost razlike aritmetičkih sredina ostvarenih na IN TESTU-PZOGP: II/80.

ANALIZE VARIJANSE: TEST PZOGP: II/80

	E - 56	K-56
1. Srednja vrednost	$M_x = 53,678571$	$M_y = 47,767857$
2. Standardna devijacija	$\sigma_x = 14,352836$	$\sigma_y = 12,957260$
3. Suma obeležja	$\Sigma x_i = 3006$	$\Sigma y_i = 2675$
4. Ukupna suma kvadrata	TSS = 21542,42	
5. Tretman sume kvadrata	T_rSS = 978,22	
6. Greška sume kvadrata	$TSS-T_rSS$ = ESS = 20564,20	
7. Tretman broja stepeni slobode	$df_1 = 1$	
8. Greška broja stepeni slobode	$df_2 = 110$	
9. Ukupan broj stepeni slobode	$df_1 + df_2 = df_3 = 111$	
10. Tretman srednje vrednosti kvadrata	T_rMS = 978,22	
11. Greška srednje vrednosti kvadrata	EMS = 186,95	
12. F odnos (količnik) sa 1,110 stepeni slobode	F = 5,23	

T a b e l a

	SS	df	MS	F
Tretman	978,22	1	978,22	5,23
Greška	20564,20	110	186,95	
UKUPNO:	21542,42	111		

Pošto je $F = 5{,}23$ manje od $F_{0,01;\ 1,110} = 6{,}84$, onda se prihvata nulta hipoteza. To znači da između aritmetičkih sredina ostvarenih na testu prethodnih znanja o graničnim procesima u E i K grupi, ne postoji statistički značajna razlika na nivou značajnosti 0,01.

Isto tako relativne vrednosti standardnih devijacija grupa K i E, odnosno njihovi koeficijenti varijacije V pokazuju da je homogenost grupa skoro ista (za K odstupanje od aritmetičke sredine iznosi 27,12%, a za E to je 26,74%). Kao što je rečeno, potrebno je analizirati rezultate na ovom testu po grupama zadataka, ili po pojedinim zadacima, imajući u vidu njihov značaj za obradu teme: GRANICA FUNKCIJE.

Od 20 pitanja i zadataka na IN TESTU - PZOGP-II/80 prvih 8 su obuhvatali pojmove vezane za granične procese koje su učenici sretali u ranijem školovanju, dok se 12 ostalih pitanja i zadataka odnosilo na pojmove iz teme o nizovima i njihovoj graničnoj vrednosti, a to je gradivo III razreda srednje škole matematičke struke.

Ako se uporede ove dve osnovne podgrupe zadataka iz testa, onda je procenat pozitivnih odgovora po grupama K i E sledeći:

- prvih 8 zadataka: K - 47,77%; E - 54,78%
- ostalih 12 zadataka: K - 47,77%; E - 52,95%.

Ovi procenti pokazuju da su učenici u kontrolnoj grupi K sa jednakim uspehom rešavali zadatke i jedne i druge podgrupe, dok su učenici eksperimentalne grupe E ostvarili bolje rezultate na zadacima iz ranijeg gradiva. U sledećoj tabeli dajemo procenat pozitivnih odgovora za svih 20 zadataka po grupama K i E.

Uspeh učenika na IN TESTU-PZOGP-II/80 po zadacima

Tabela 11..

GRUPA	Zadatak 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
K	73,21	71,78	0,71	63,21	33,57	37,14	18,57	83,93	68,93	70,00	35,36
E	78,57	75,00	12,50	68,21	53,21	38,21	30,36	82,14	76,78	78,93	37,50

Nastavak tabele 11.

GRUPA	Zadatak 12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	UKUPNO
K	73,21	63,93	49,64	51,43	26,43	24,64	31,07	44,28	34,28	47,77%
E	76,07	70,36	54,64	57,14	31,78	22,86	38,21	45,71	45,36	53,68%

Prosečan procenat pozitivnih odgovora za obe grupe na celom testu iznosi 51,72%. U kontrolnoj grupi K ispod tog proseka ostvareno je na sledećim zadacima: 3., 5., 6., 7., 11., 14., 16., 17., 18., 19., i 20., dok je u eksperimentalnoj grupi E to slučaj sa zadacima: 3., 6., 7., 11., 16., 17., 18., 19. i 20. Uočljivo je da se i u jednoj i u drugoj grupi javljaju skoro identični zadaci. Izuzetak je samo 5. zadatak na kojem su učenici eksperimentalne grupe ostvarili znatno više poena nego učenici kontrolne grupe. Inače, taj zadatak se odnosio na ponašanje funkcije y = tg x, a to je gradivo iz II razreda srednje škole. Podaci iz tabele 11 pokazuju da su grupe približno ujednačene i kada se radi o značenju pojedinih pojmova i algoritama iz prethodnog gradiva na koje se nadovezuju sadržaji o granici funkcije. Naime, pojedini pojmovi iz teme o nizovima i granici niza, usvojeni su u približno istoj meri u obe grupe, pa se moglo očekivati da postignu iste rezultate i u obradi teme: GRANICA FUNKCIJE, ukoliko nebi u nekoj od grupa delovali posebni faktori. S druge strane, podaci o neuspešnom rešavanju pojedinih zadataka poslužili su kao svojevrstan indikator za opredeljivanje u izboru materijala i zadataka prilikom pisanja stručno-metodičkih sadržaja za eksperimentalni rad pri obradi teme: GRANICA FUNKCIJE. Na primer, zadaci 3., 6. i 7 su loše rešavani u obe grupe, a ti zadaci su imali u sebi, na odredjeni način, uključen pojam apsolutne vrednosti. Zato je tom pojmu i njegovoj primeni posvećena posebna pažnja u stručno-metodičkom materijalu za eksperimentalni rad, kako bi se učenici što bolje pripremili za shvatanje i usvajanje metričke definicije granice funkcija.

Zadaci 16., 17., 18., 19. i 20. u obe grupe imaju procenat pozitivnih odgovora ispod proseka od 51,72%. Ti zadaci su rešavani sa približno istim uspehom u obe grupe ali taj uspeh nije na nivou očekivanog. Učenici nisu bili još u potrebnoj meri savladali granicu niza u različitim formulacijama, kao ni lim inf i lim sup za nizove, njihovu konvergenciju i oscilovanje. To je upućivalo na neophodnost obezbedjivanja korelacije ovih sadržaja sa odgovarajućim pojmovima iz teme: GRANICA FUNKCIJE, prilikom njene detaljne razrade za izvodjenje eksperimentalnog rada.

5.4.3. Eksperimentalni rad

Nastavniku koji je radio u eksperimentalnim odeljenjima, pored usmenih konsultacija i sugestija, data je i kratka metodička napomena u pisanoj formi i ona je predstavljala sastavni deo posebno struktuiranog gradiva teme GRANICA FUNKCIJE, odakle smo kao primer dali jednu nastavnu jedinicu u tački 5.3.2. Navodimo sadržaj metodičke napomene:

Obrada ove teme treba da obuhvati definiciju granice funkcije i više pojmova, teorema i algoritama koji su vezani za pojam granice funkcije. To gradivo spada u najvažnije sadržaje srednjoškolske matematike. Posebno treba imati u vidu da je obradi ove teme prethodila obrada realnih brojeva i nekih elementarnih funkcija jedne realne promenljive, pa će se neki pojmovi iz tog gradiva sada koristiti, odnosno smatraće se da su učenicima poznati. Za obradu teme: GRANICA FUNKCIJE predvidja se 20 časova, uključujući tu i školski pismeni zadatak. Metodski pristup definicijama, pojmovima, algoritmima i teoremama po pravilu treba da bude preko pogodno odabranih primera i grafičkih ilustracija, a redje deduktivni metod.

U materijalu je pojam granice funkcije uveden nezavisno od pojma neprekidnosti, što je u skladu sa redosledom gradiva u zvaničnom programu. Takvo opredeljenje je u skladu i sa celokupnom koncepcijom programa matematičke analize za III razred pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja, po kojoj se neprekidnost funkcije obradjuje posle obrade teme: GRANICA

FUNKCIJE. Uvodjenje pojma granice funkcije ima nekoliko osnovnih načina: 1) metrička definicija ili definicija granice funkcije pomoću "ε-δ" simbolike; 2) topološka definicija ili definicija granice funkcije pomoću pojma okoline tačke i 3) definicija granice funkcije pomoću pojma granice niza. Svaki od ovih načina definisanja pojma granice funkcije ima svojih prednosti, ali i nedostataka. To su pokazala i neka istraživanja. Zato će biti od interesa da se eksperimentalno utvrdi kakvi će se rezultati dobiti ako se primenjuju u odgovarajućim situacijama respektivno sve tri definicije granice funkcije. Prethodno treba pokazati ekvivalentnost ovih definicija. Posebno struktuirano gradivo je tako koncipirano i sastavljeno da dodju do izražaja sve tri navedene definicije granice funkcije.

Posebno treba imati u vidu da je prethodno sa učenicima obradjena tema: "NIZOVI I NJIHOVE GRANICE" i da se sada radi o realnim funkcijama jedne realne promenljive. U odabiranju primera za ilustraciju odredjenih pojmova, kao i za vežbanje, vodilo se računa o rezultatima IN TESTA - PZOGP--II/80, posebno o onim zadacima na kojima su učenici ispoljili najviše nerazumevanja, ili na kojima su najčešće grešili. Cilj je da se kroz ovu detaljnu razradu obezbedi kod učenika ispravno formiranje pojma granice funkcije i drugih pojmova iz ove teme, a ne samo da se savlada odredjena algoritamska tehnika izračunavanja granične vrednosti funkcije.

Pre obrade ove teme, sa provesorom koji je radio u odeljenjima eksperimentalne grupe izvršena je analiza ostvarenih rezultata i uočenih grešaka na IN TESTU - PZOGP-II/80, kako po grupama zadataka i pojedinim karakterističnim zadacima, tako i po učenicima pojedinačno o njihovom radu i uspehu na testu, uporedjujući to sa utiscima i ocenama profesora u redovnoj nastavi. To je bila odredjena priprema za eksperimentalni rad, uz korišćenje posebno struktuiranog gradiva.

Eksperimentalni rad je započeo početkom II polugodišta školske 1980/81. godine i završen je nakon sedam radnih nedelja. U toku eksperimenta vršene su konsultacije sa profesorom eksperimentatorom oko obrade pojedinih delova gradiva. Nastavnik je na osnovu uputstava najčešće organizovao proces učenja tako da dodju do izražaja relacioni medijatori specifični za nastavu matematike. Napred smo naveli jedan primer koji ukazuje na karakter tih medijatora. Nastavnik je mogao ovakvim načinom da uvodi osnovne i ostale pojmove pri obradi teme GRANICA FUNKCIJE, jer mu je bilo s naše strane pripremljeno posebno struktuirano gradivo ove teme sa stručno-metodičkog stanovišta.

5.4.4. Završna merenja

Posle završenog eksperimentalnog rada obavljeno je merenje znanja učenika u dva vremenska perioda: neposredno posle završetka obrade gradiva (15. aprila 1981. godine) i nakon nekoliko meseci, odnosno u narednoj školskoj godini (24. septembra 1981. godine). Cilj prvog merenja bio je utvrdjivanje stepena usvojenosti posebno struktuiranog gradiva teme GRANICA FUNKCIJE u eksperimentalnoj grupi i njegovo uporedjivanje sa rezultatima kontrolne grupe, a drugo je imalo za cilj utvrdjivanje stepena trajnosti stečenih znanja i eventualnog transfera znanja iz graničnih procesa. Posebno se želelo da se testiranjem i retestiranjem utvrdi opšti nivo obrazovanosti iz ovog gradiva u obe grupe, što je od značaja za mogućnosti realizacije sadržaja iz graničnih procesa u srednjoj školi. Sadržaji testa ZOGF-III/81 (znanja o granici funkcije) bili su prilagodjeni obema grupama i billa su obuhvaćena sva najvažnija pitanja iz orijentacionog rasporeda gradiva po kojem se radilo u obe grupe. Način rada pomoću posebno struktuiranog gradiva u eksperimentalnoj grupi, testiranjem je trebalo proveriti, da li on ima prednosti u odnosu na standardni način rada ili ne. Testom su bili obuhvaćeni kako zadaci i pitanja reproduktivnog, tako i primenjenog karaktera. Pitanja i zadaci su bili nestandardni zatvorenog tipa svih vrsta: alternacije, kompenzacije, kobinacije i selekcije. Na sličnoj strukturi testa po pravilu se ne dobijaju visoki procenti pozitivnih odgovora jer se pretežno radi o primeni stečenih znanja na zadacima objektivnog tipa u kojima najčešće treba ne samo sprovesti odredjena izračunavanja, već i povezivanje više matematičkih činjenica.

U završna merenja spada i testiranje sprovedeno u jednom odeljenju sledeće generacije učenika školske 1981/82. godine u kojem je eksperimentalni rad obavio isti nastavnik koji je vodio jedno odeljenje kontrolne grupe školske 1980/81. godine. Ovo smo učinili zbog toga da bi smo videli koliko će posebno struktuirano gradivo teme GRANICA FUNKCIJE kod ovog nastavnika, sa istim kvalitetom učenika kao što je bilo kontrolno odeljenje, potvrditi vrednost ovakvog načina rada. Želeli smo da te rezultate uporedimo sa rezultatima koji su dobijeni kod istog nastavnika prethodne školske godine kada se rad odvijao bez eksperimentalnog faktora.

Na kraju završnog merenja znanja učenika, sprovedena je i anketa za jedan broj profesora koji su u školskoj 1980/81. godini izvodili nastavu analize u III razredu pozivnousmerenog srednjeg obrazovanja.

5.5. Rezultati istraživanja

Razmatrajući granične procese u nastavi matematike srednje škole, mi smo pored njihove geneze i teorijskog zasnivanja, zatim njihove prisutnosti u nastavnim planovima i programima i stručno-metodičke interpretacije najvažnijih pojmova i sadržaja iz graničnih procesa, posebnu pažnju posvetili istraživanju uspešnosti učenja ovih sadržaja na primeru teme GRANICA FUNKCIJE pomoću struktuiranog gradiva, na principima Brunerove teorije instrukcija i odredjenih oblika stvaralačkog učenja. Naime, pomoću struktuiranog gradiva pomenute teme nastojali smo da uspostavimo vezu izmedju programskog gradiva i metodičkog vodjenja učenika u procesu usvajanja sadržaja teme GRANICA FUNKCIJE, što prema medijacionoj teoriji učenja znači da je trebalo obezbediti uspostavljanje medijatora tipa generalisanih relacija, kao pojmova najšireg oblika. Uspešnost rešavanja ovako postavljenog zadatka moći će da se vidi kroz prikaz rezultata našeg istraživanja i njihovo teorijsko praktično uopštavanje. Zato ćemo najpre izložiti rezultate završnog merenja testom FM-ZOGF-III/81, a zatim ćemo pokušati da ukažemo na značaj dobijenih rezultata učenja pomoću struktuiranog gradiva za nastavu matematike uopšte, a ne samo za sadržaje teme GRANICA FUNKCIJE.

5.5.1. Intepretacija rezultata završnog merenja

Osnovni podaci o strukturi testa za završno merenje znanja učenika FM ZOGF-III/81 dati su u poglavlju 5.3.3., kada je bilo reči o instrumentima istraživanja. Test je sadržavao 12 nestandardizovanih zadataka objektivnog tipa, formulisanih u skladu sa testovskom tipologijom, medjutim, za razliku od IN TESTA: FZOGF-II/80 koji je sadržavao 50% zadataka alternacije i selekcije i koji je imao za cilj da utvrdi samo neka opšta ranija znanja o graničnim procesima, ovaj test je sadržavao takvih zadataka samo 33%. U ostalih 66% zadataka odgovori su se mogli davati tek posle izvršenog računanja, prisećanja činjenica i njihovim kombinovanjem, a najčešće i primenom stečenih znanja o granici funkcije. Zbog ovakve strukture testa FM ZOFG-III/81 nije moguće uporedjivati rezultate dobijene na tom testu sa rezultatima IN TESTA, jer se u završnom merenju testom tražio obim i dubina savladanosti gradiva, dok su inicijalnim testom tražena samo neka opšta znanja iz graničnih procesa. Uporedjivanja se mogu vršiti izmedju grupa E i K koje su bile obuhvaćene istraživanjem, ispitujući tačnost naše pretpostavke da će se u E grupi uspešnije savladati sadržaji iz teme GRANICA FUNKCIJE. Uporedjivanja se mogu vršiti kako rezultata kod pojedinih zadataka, tako i rezultata u celini.

Interpretaciju rezultata testa FM ZOGF-III/81 dajemo u dva dela i to najpre za test u celini, a zatim i u pojedinostima. U globalnom analiziranju rezultata želimo da sagledamo stepen obrazovanosti učenika iz gradiva o granici funkcije u obe grupe i odnos tih rezultata prema eksperimentalnom faktoru. Tu će biti analizirani i kvantitativni rezultati iz delimično ponovljenog eksperimenta u narednoj školskoj 1981/82. godini. Naš zadatak je bio da ispitamo uticaj posebno struktuiranog gradiva na uspeh učenika, pa će zbog toga biti izvršeno uporedjivanje rezultata eksperimentalne i kontrolne grupe pomoću najbitnijih statističkih podataka. U prikazu rezultata po pojedinim zadacima i grupama zadataka posebno ćemo obratiti pažnju na efekte koji su ostvareni korišćenjem sve tri definicije granice funkcije u eksperimentalnoj grupi. Uporedjujući rezultate grupe E i K po pojedinim zadacima iz gradiva o granici funkcije, kao i sa nekim zadacima iz IN TESTA o nizovima, potražićemo odgovor na pitanje da li je i u kojima delovima programa strukturano gradivo teme GRA-

NICA FUNKCIJE uticalo na te rezultate.

Rezultati završnog merenja testom FM ZOGF-III/81 lati su u tabeli 12, sa osnovnim statističkim karakteristikama.

Uspeh učenika na testu FM ZOGF-III/81 (15.04.1981.)

Tabela 12.

G r u p a	K	E
N	59	59
M	31,47457627	43,15254237
σ	14,99236120	14,09917283
V	0,47633242 (47,63%)	0,32672865 (32,67%)
$\bar{t}_{116}$;	4,3584994	4,3584994
$t_{116;\ 0,01}$	2,6198666	2,6198666
$t_{116;\ 0,001}$	3,3788	3,3788
% pozitivnih odgovora	31,47	43,15

(zadataka 12, maksimalan skor 100)

Rezultati pokazuju da izmedju aritmetičkih sredina grupa E i K postoji značajna razlika kako na nivou značajnosti od 0,01 tako i na nivou 0,001, jer je

4,3584994 > 2,6198666 i 4,3584994 > 3,3788

To znači da je eksperimentalni faktor znatno uticao na povišenje obrazovanosti učenika u E - grupi u odnosu na K - grupu. Ovaj podatak pokazuje da naša hipoteza da će se sa posebno struktuiranim gradivom moći da menja zavisno promenljiva - uspeh učenika ima punu potvrdu.

Analizom varijanse dolazimo do iste konstatacije.

ANALIZA VARIJANSE: TEST FM ZOGF: III/81

	E - 59	K - 59
1. Srednja vrednost	M_x = 43,152542	M_y = 31,474576
2. Standardna defijacija	σ_x = 14,099173	σ_y = 14,992361
3. Suma obeležja	Σx_i = 3006	Σy_i = 1857
4. Ukupna suma kvadrata	TSS = 28589,40	

5. Tretman sume kvadrata $TrSS = 4023,06$
6. Greška sume kvadrata $TSS - TrSS = ESS = 24566,34$
7. Tretman broja stepeni slobode $df_1 = 1$
8. Greška broja stepeni slobode $df_2 = 116$
9. Ukupan broj stepeni slobode $df_1 + df_2 = df_3 = 117$
10. Tretman srednje vrednosti kvadrata $T_rMS = 4023,06$
11. Greška srednje vrednosti kvadrata $EMS = 211,78$
12. F odnos (količnik) sa 1,116 stepeni slobode $F = 19,00$

T a b e l a

	SS	df	MS	F
Tretman	4023,06	1	4023,06	19,00
Greška	24566,34	116	211,78	
UKUPNO	28589,40	117		

Pošto je $F = 19,00$ veće od $F_{0,01;\ 1,116} = 6,86$, onda se nulta hipoteza odbacuje. To znači da izmedju aritmetičkih sredina ostvarenih na testu znanja o GRANICI FUNKCIJE u E i K grupi, postoji statistički značajna razlika na nivou značajnosti 0,01. Napomenimo da je ta razlika statistički značajna i na nivou 0,05, jer je $F = 19,00$ veće od $F_{0,05;\ 1,116} = 3,93$. Prema tome razlika nije slučajna, već je nastala pod uticajem eksperimentalnog faktora.

U prilog ovoj konstataciji idu i podaci o razlikama aritmetičkih sredina izračenim u procentima, odnosno o razlikama, u procentu ostvarenih bodova, za tri sledeća testa: D-48; IN PZOGP-III/80 i FM ZOGF-III/81. Ti podaci su dati u tabeli 13. Dok na testu opštih sposobnosti D-48 razlika je bila minimalna, dotle je na testu ranije stečenih znanja o graničnim procesima IN PZOFP-II/80 razlika nešto veća, a na završnom merenju testom FM ZOGF-III/81 ta razlika je najveća i statistički je značajna. Iz tabele 13 se uočava odredjena zakonomernost u

Upredjivanje % poz.odgovora Tabela 13

TEST / GRUPA	D-48	IN PZOGP II/80	FM ZOGF III/81
E	70,49	53,68	43,15
K	68,74	47,77	31,47
razlika E-K	1,75	5,91	11,68

kretanju procenta ostvarenih bodova u E i K grupi. Naime, u obe grupe najveći procenat je ostvaren na testu D-48, nešto manji na testu IN PZOGP-II/80 i najmanji na testu FM ZOGP-III/81.[67] To znači da je uspeh u znatnoj meri zavisio od strukture testova i visine zahteva u njima. Medjutim, za nas je najvažniji podatak da je izmedju grupa najveća razlika na testu završnog merenja, što potvrdjuje pretpostavku da će rad pomoću struktuiranog gradiva i uz posebna uputstva, uticati na nastavne efekte, odnosno znanje učenika.

Rezultati ostvareni na testu završnog merenja posmatrani u celini za obe grupe ne mogu nas zadovoljiti i kreću se na nivou rezultata ranijih ispitivanja sličnim testovima u nekim srednjim školama[68]. Pa iapk treba konstatovati da i ovi rezultati pokazuju da su sadržaji iz graničnih procesa složeni, suptilni i za učenike prilično teški za savladavanje. S tog stanovišta ima puno opravdanja traganje za novim načinima rada sa učenicima, jer je i ovaj način pomoću posebno struktuiranog gradiva dao bolje rezultate. Kada se radi o opštem nivou znanja koje učenici postižu u savladavanju gradiva iz graničnih procesa, posebno iz gradiva teme GRANICA FUNKCIJE, kao korektiv rezultata iz tabele 12 poslužiće nam rezultati jednog odeljenja u ponovljenom eksperimentalnom radu naredne školske 1981/82. godine. Ispitivanje je obavljeno 8. aprila 1982. godine, odnosno godinu dana kasnije od završnog merenja koje je bilo 15. aprila 1981. godine. Uz sve ostale jednake uslove (sastav učenika, isti test, isti nastavnik) kao i kod prethodne generacije kada je u jednom od kontrolnih odeljenja dobijeno 32,56% pozitivnih odgovora, sada je uz samo jedan novi uslov (rad pomoću posebno struktuiranog gradiva) dobijen je rezultat od 63,20% ostvarenih bodova. Ovo samo potvrdjuje da se mogu ostvariti željeni nastavni efekti, ako se obradi gra-

67) Koeficijenti korelacije (za E grupu 0,13, a za K grupu 0,17) izmedju promenljivih veličina: opšta sposobnost učenika i znanje na završnom merenju, ukazuju na neznatnu povezanost izmedju ovih veličina.

68) U fusnoti 66) naveli smo podatke jednog takvog testiranja.

diva prilazi sa stanovišta savremenih teorija učenja, odnosno sa stanovišta teorije instrukcije Brunera.

Intervalom od 2σ(u E grupi: 29,05<M<57,05, a u K: 16,48<M<46,46) obuhvaćen je veći broj ispitanika obe grupe i to u E grupi 69,49% a u K grupi 71,19%. Ovi podaci pokazuju da je rasturanje od aritmetičke sredine vrlo blizu teorijskom (68,26%) i da je u obe grupe raspodela normalna. Koeficienti varijacije pokazuju da je u E - grupi (V = 0,326728) homogenost jače izražena i prema tome manja je varijabilnost, dok je u K - grupi (V = 0,476332) homogenost manja i varijabilnost veća. I ove statističke karakteristike ukazuju na bolje rezultate u E - grupi, nego u K, odnosno kada se posmatraju homogenost i varijabilnost.

Retestiranje pomoću testa FM ZOGF-III/81 izvršeno je posle 5 meseci od dana kada je izvršeno prvo testiranje, odnosno od 15. aprila 1981. godine do 24. septembra 1981. godine je vreme izmedju prvog i drugog testiranja. Ovim drugim testiranjem trebalo je utvrditi u prvom redu retenciju stečenih znanja posle tako dugog perioda vremena i posebno zbog dugačkog letnjeg raspusta, kada učenici nisu imali nikakvu organizovanu nastavu. Rezultati na retestiranju prikazani su u tabeli 14.

Dobijeni rezultati najpre ukazuju na stabilnost instrumenta FM ZOGF-III/81, jer su dobijene skoro iste statističke karakteristike kao i prilikom prvog ispitivanja. Koliko može biti indikativno da je ispoljena značajna retencija stečenih znanja, toliko se mora biti rezervisan prema transferu. Učenici bi trebalo da su u medjuvremenu stekli nova i produbili postojeća znanja, pa se moglo očekivati da rezultati na retestiranju budu bolji. Medjutim, i u ovom slučaju se mora uzeti faktor vreme koje je delovalo u suprotnom smeru, s obzirom da je period zaboravljanja bio jako dug. Ponovno testiranje je potvrdilo postojanje značajne razlike izmedju aritmetičkih sredina E i K grupe i to na oba nivoa značajnosti 0,01 i 0,001.

Uspeh učenika na testu FM ZOGF-III/81 (24.09.1981.

Tabela 14.

Grupa	E	K
N	52	53
M	42,28846154	32,28301887
σ	15,001093	14,413372
V	0,354732 (35,47%)	0,446469 (44,65%)
$\bar{t}_{103}$	3,514648	3,514648
$t_{103;\ 0,01}$	2,629183	2,629183
$t_{103;\ 0,001}$	3,397650	3,397650
% pozitivnih odgovora	42,29	32,28

(zadataka 12, maksimalan skor 100)

Takva ocena se dobija i analizom varijanse

ANALIZA VARIJANSE: TEST FM ZOGF: III/81
(retestiranje)

	E-52	K-53
1. Srednja vrednost	$M_x = 42{,}288462$	$M_y = 32{,}283019$
2. Standardna devijacija	$\sigma_x = 15{,}001093$	$\sigma_y = 14{,}413372$
3. Suma obeležja	$\Sigma x_i = 2199$	$\Sigma y_i = 1711$
4. Ukupna suma kvadrata	$TSS = 24907{,}05$	
5. Tretman sume kvadrata	$T_rSS = 2627{,}62$	
6. Greška sume kvadrata	$TSS - T_rSS = ESS = 22279{,}43$	
7. Tretman broja stepeni slobode	$df_1 = 1$	
8. Greška broja stepeni slobode	$df_2 = 103$	
9. Ukupan broj stepeni slobode	$df_1 + df_2 = df_3 = 104$	
10. Tretman srednje vrednosti kvadrata	$T_rMS = 2627{,}62$	
11. Greška srednje vrednosti kvadrata	$EMS = 216{,}31$	
12. F odnos (količnik) sa 1,103 stepeni slobode	$F = 12{,}15$	

Tabela

	SS	df	MS	F
Tretman	2627,62	1	2627,62	12,15
Greška	22279,43	103	216,31	
UKUPNO	24907,05	104		

Pošto je $F = 12{,}15$ veće od $F_{0,01;\ 1,103} = 6{,}89$, onda se nulta hipoteza odbacuje. To znači da između aritmetičkih sredina ostvarenih na retestiranju testom FM ZOGF:III/81 u E i K grupi, postoji statistički značajna razlika na nivou značajnosti 0,01. Napomenimo da je ta razlika značajna i na nivou 0,05, jer je $F = 12{,}15$ veće i od $F_{0,05;\,1,103} = 3{,}94$. Naša pretpostavka da će se pomoću struktuiranog gradiva postići bolji rezultati u eksperimentalnoj grupi ponovo se pokazuje ispravnom. Interpretacija statističkih karakteristika je nepotrebna, jer bi se ponovilo sve ono što je rečeno prilikom interpretacije rezultata prethodnog testiranja. Ono što treba posebno istaći posle oba obavljena testiranja 1981. i 1982. godine, jeste saznanje da je kroz eksperimentalni rad i rezultate došla do izražaja jedna od bitnih karakteristika Brunerove teorije instrukcije, koju navodi R. Kvaščev: "Teorija instrukcija mora biti specifična u smislu što će *na specifične načine struktuirati znanje tako da onaj koji uči u potpunosti shvata i razume činjenice*. Optimalna struktura se odnosi na takve propozicije na osnovu kojih može biti proizvedeno široko znanje. Formiranje takve strukture zavisi od posebnih oblasti znanja. Razvijanje različitih optimalnih struktura zavisi od snage i sposobnosti da pojednostavimo informacije, da proizvedemo nove propozicije, da pojačamo manipulativnost znanja". (|87|, str. 87). Isto tako se može konstatovati da su učenici eksperimentalne grupe bolje razumeli strukturu gradiva teme GRANICA FUNKCIJE, pa su u većoj meri shvatili povezanost njenih osnovnih elemenata. U struktuiranom gradivu se posebno insistiralo na razradi pojma apsolutne vrednosti, pojma okoline tačke i pojma granice funkcije. Ako učenik shvati suštinu ovih pojmova, onda će lakše savladavati ostale pojmove i algoritme koji su sa ovima povezani.

Uticaj posebno struktuiranog gradiva na ostvarivanje većih nastavnih efekata može se sagledati i pomoću analize rezultata testa FM ZOGF-III/81 po pojedinim zadacima i grupama zadataka, odnosno po delovima testa. Pri tome ćemo posebno sagledati rezultate primene sve tri definicije granične vrednosti funkcije na osnovu uspeha po vrstama zadataka: a) dokaz da je data vrednost granica funkcije; b) obredjivanje granične vrednosti funkcije kada nezavisno promenljiva teži datoj vrednosti i c) dokaz da data funkcija nema granicu kada nezavisno promenljiva teži datoj vrednosti.

Uspeh na testu FM ZOGF-III/81 po pojedinim zadacima za obe grupe dat je u tabeli 15.

(15.04.1981.) Tabela 15.

GRUPA	Zadatak 1 a	1 b	1 sv.	2	3	4 a	4 b	4 c	4 sv.	5
E.	86,44	20,34	53,39	79,66	49,90	45,76	83,05	67,80	64,35	24,29
K.	77,54	15,25	46,01	54,87	33,33	57,63	62,71	22,03	46,00	22,22

Nastavak tabele 15.

Zadatak 6 a	6 b	6 c	6 d	6 sv.	7	8 a	8 b	8 sv.	9	10
81,36	31,36	29,66	32,20	43,64	8,10	69,49	71,19	70,34	33,47	62,71
38,98	16,95	33,90	31,36	30,30	4,90	44,07	53,39	48,73	1,27	55,93

Nastavak tab. 15.

Zadatak 11	12	UKUPNO:
25,85	14,41	43,15
37,71	4,66	31,47

Iz tabele 15. se vidi da su pojedine zadatke sa različitim uspehom rešavali učenici eksperimentalne i kontrolne grupe, pri čemu su češće bolji uspeh ostvarili učenici eksperimentalne grupe, što je posledica eksperimentalnog faktora. Preciznije rečeno, od 12 zadatka, eksperimentalna grupa ima veći procenat ostvarenih bodova na ukupno 11, dok kontrolna grupa ima veći procenat samo na jednom zadatku. Ako se posmatraju i delovi pojedinih zadataka, onda od ukupno 23 zahteva, eksperimentalna grupa ima veći procenat ostvarenih bodova u 20 zahteva, a samo u 3 zahteva veći procenat ima kontrolna grupa. To znači da je struktuirano gradivo predstavljalo značajan eksperimentalni faktor ne samo po nivou savladanosti teme GRANICA FUNKCIJE, već i u pojedinostima, odnosno po pojedinim pojmovima i algoritmima. To posebno važi za usvojenost definicije granice funkcije i njenu primenu.

Struktuirano gradivo je doprinelo da učenici eksperimentalne grupe postignu znatno bolji uspeh u zadacima sa definicijom funkcije, ali su ostvareni različiti rezultati u pojedinim vrstama te definicije. Tako je ispitivanje pokazalo da je najveći procenat bodova ostvaren na definiciji granice funkcije pomoću okoline tačke, zatim nešto niži procenat pomoću nizova, a tek na kraju je sa procentom metrička definicija. Ovo ukazuje, s jedne strane, da metrička definicija nije učenicima pristupačna i dovoljno razumljiva, a s druge strane, da je struktuirano gradivo sa sve tri definicije pokazalo punu opravdanost i doprinelo je razumevanju pojma granice funkcije. Zato se u nastavnoj praksi ne bi trebalo ograničiti samo na metričku definiciju granice funkcije.

Zadaci u kojima se tražilo da se dokaže da je dati broj granica funkcije nisu uspešno rešavani. Jedan od razloga ovome je i neosposoljenost učenika da primenjuju metričku definiciju granice funkcije. Najčešće greške se odnose na odredjivanje $x_o(\varepsilon)$,odnosno δ i na geometrijsku interpretaciju granice. U vezi sa ovim tipom zadataka navodimo dva mišljenja profesora koji su učestvovali u sprovodjenju eksperimenta. Na pitanje koje su teškoće imali u obradi teme GRANICA FUNKCIJE odgovorili su i ovo: prvo, "učenicima je trebalo dosta vremena da shvate suštinu materije, jer su naučili da matematiku svode na tehniku rešavanja zadataka", i drugo, "dokazi teorema im zadaju najveće teškoće.... Učenici će shvatiti neku teoremu ili definiciju samo ako se ona ilustruje sa dosta primera, *i to primera koje će oni sami konstruisati* (podvukao R.D.). A za to je potrebno dosta vremena". I sami profesori osećaju potrebu za stvaralačkim učenjem i uvidjaju njegovu vrednost, ali su pre skloni da rade tradicionalno - da "ispredaju" nastavnu jedinicu, jer im je to brže. Medjutim, treba se zapitati a šta je efikasnije i produktivnije.

Zadnja četiri zadatka testa FM ZOGF-III/31 predstavljaju posebnu grupu iz područja primene znanja o granici funkcije i odredjenih algoritama u njenom odredjivanju. U tim zadacima se tražilo da se odredi granična vrednost date funkcije kada nezavisno promenljiva teži datoj konačnoj vrednosti ili beskonačnosti. Procenat ostvarenih bodova na ovim zadacima je nizak što potvrdjuje već prihvaćenu ocenu da je ovo najteža vrsta zadataka vezanih za granicu funkcije. Iz načina rešavanja ovih zdataka od strane učenika uočeno je da su najčešće greške činjene u algebarskim transformacijama, znači na sadržajima koji nisu vezani za granicu funkcije. Procenat ostvarenih bodova na ovoj grupi zadataka veći je u eksperimentalnoj grupi za 8,94% prilikom prvog testiranja, dok je na retestiranju ta razlika znatno veća i iznosi 14,97%. Iako je u obe grupe na retestiranju ostvaren nešto niži procenat na testu u celini, na ovoj grupi zadataka je ostvaren znatno veći procenat bodova na retestiranju, nego prilikom prvog ispitivanja. Ovo se može objasniti činjenicom da neposredno posle obrade teme GRANICA FUNKCIJE nije bilo uvežbavano rešavanje ovakvih zadataka, dok je posle izvesnog vremena, zahvaljujući jednim delom i transferu i struktuiranom gradivu u eksperimentalnoj grupi, stečena izvesna osposobljenost za izradu ovakvih zadataka.

I analiza rezultata po pojedinim zadacima ili grupama zadataka pokazala je prednosti rada u eksperimentalnim odeljenjima pomoću posebno struktuiranog gradiva, nad radom kakav se odvijao u kontrolnim odeljenjima. To je naročito došlo do izražaja u pojedinim vrstama zadataka, u kojima se do rezultata moglo doći samo uz potpuno razumevanje obradjenog gradiva.

5.5.2. Učenje pomoću posebno struktuiranog gradiva u nastavi matematike na primeru gradiva teme GRANICA FUNKCIJE

Zadatak teorije nastave sastoji se u tome da pronalazi najefikasnije puteve i načine sticanja znanja i veština, uzimajući u obzir: osnovne principe učenja, razvojni stupanj na kome se učenik nalazi i specifične odlike predmeta. R. Kvaščev navodi četiri osnovna zadatka teorije nastave (|87|, s. 100) koje je formulisao Bruner, od kojih za nas posebno je važan drugi zadatak: "Neophodno je da teorija nastave ispita i utvrdi na koji način gradivo treba da bude strukturisano da bi ga učenik najlakše shvatio. Optimalno dobro strukturisano gradivo treba da dovede do generalizacije znanja". Pored ukazivanja na dobre osobine Brunerovog shvatanja učenja putem otkrića i njegovog shvatanja teorije instrukcije, R. Kvaščev daje i nekoliko kritičkih napomena o Brunerovoj teorija instrukcije (|87|, s. 101), ističući da bi neke njegove ideje trebalo eksperimentalno proveriti i dalje razvijati u okviru teorije instrukcije. Mi smo se bavili strukturom gradiva iz graničnih procesa u nastavi matematike srednje škole i eksperimentalnim proveravanjem efekata nastave pomoću struktuiranog gradiva teme GRANICA FUNKCIJE.

Napred smo naveli rezultate Kruteckog i komponentama sposobnosti učenja matematike koje proizilaze iz osnovnih karakteristika matematičkog mišljenja. I najnovija istraživanja R. Kvaščeva (|87|, s. 432-440) upotpunjuju odgovor na pitanje sposobnosti učenja matematike, fizike, psihologije i logike, razvijajući teorijske osnove različitih oblika istraživačkog i stvaralačkog učenja, odnosno razvijajući teoriju učenja putem otkrića. U istraživanju čiji su rezultati objavljeni 1980. godine R. Kvaščev je identifikovao sledeće sposobnosti učenja matematike: "1. opšta sposobnost rešavanja matematičkih problema i stvaralačke prerade gradiva matematike i 2. sposobnost matematičkog rezonovanja". (|87|, s. 432.).

Imajući u vidu identifikovane sposobnosti učenja matematike i osnovne zadatke teorije nastave, a polazeći od teorije instrukcije i medijacione teorije učenja, želeli smo da eksperimentalnim proveravanjem potražimo odgovor na dva osnovna pitanja: prvo, da li razrada sadržaja iz graničnih procesa i posebno struktuirano gradivo teme GRANICA FUNKCIJE utiče na povišenje nastavnih efekata i drugo, da li tako organizovan nastavni proces putem instrukcija, usmeravanja i podsticanja predstavlja dalje razvijanje i produbljivanje stvaralačkog učenja, odnosno da li se može pripisati odredjena vrednost teorije stvaralačkog učenja i u nastavi matematike srednje škole. Rezultati našeg istraživanja pokazali su da je dobijen potvrdan odgovor na oba postavljena pitanja i da smo time dali skroman doprinos učenju matematike sa razumevanjem i istovremeno ukazali na mogućnosti daljeg usavršavanja metodike nastave matematike u srednjoj školi. Ovakva konstatacija posledica je činjenice da su učenici eksperimentalne grupe značajnije napredovali u savladavanju i usvajanju gradiva teme GRANICA FUNKCIJE, nego učenici kontrolne grupe. Uporedjivanjem rezultata dobijenih učenjem pomoću struktuiranog gradiva i učenjem na tradicionalan način ispoljene su značajne statističke razlike u korist eksperimentalne grupe i to kako pomoću t-testa, tako i pomoću analize varijanse.

Učenje u eksperimentalnoj grupi pomoću struktuiranog gradiva odvijalo se kroz sledeće etape: upoznavanje, razumevanje i shvatanje datih instrukcija; dopunjavanje datih podataka i kritičko zaključivanje; elementarno stvaralačko učenje, prerada i transformacija činjenica; formulisanje odredjenih pojmova, definicija i pravila. Nastojali smo da instrukcije budu takve da učenici skoro sa sigurnošću mogu izvoditi tačne odgovor i generalizacije. Zato instrukcije i vodjenje kroz struktuirano gradivo omogućuju da učenik najčešće samostalno stiče nova znanja i proverava ranije stečena. Oni dolaze do novih podataka na osnovu datih, uočavaju i definišu pravila i principe, usvajaju nove teoreme i generalizacije, struktuiraju činjenice koje uče i sistematizuju ih tako da ih mogu primenjivati u različitim situacijama. Mi smo razvijali jedan od oblika stvaralačkog učenja na osnovu postojećih savremenih teorija učenja, pri čemu je poseban akcenat bio na elementima struktuiranog gradiva jedne teme iz graničnih procesa. Iako se učenjem pomoću struktuiranog gradiva dobijaju bolji nastavni efekti, ne treba ovom obliku stvaralačkog učenja pripisivati samo pozitivne osobine i univerzalnost, jer ono ima i nedostataka. I u ovom obliku učenja ostaje kao problem da se struktuiranje gradiva podesi za pojedine kategorije učenika u skladu sa njihovim sposobnostima; da se instrukcije prilagode razvijenim sposobnostima pojedinih učenika; da se usmeravanje u odredjenoj meri individualizuje; da struktuiranje gradiva bude što ekonomičnije i efikasnije, snabdeveno podsticajem pomoću povratne informacije. Ovi zahtevi nisu mogli biti u potrebnoj meri ispunjeni u našem istraživanju, mada smo se pridržavali dve osnovne zakonitosti struktuiranja znanja: razumevanje strukture nekog predmeta znači savladati ga tako da smo u stanju da uz jednu činjenicu vežemo čitav niz drugih, koje sa ovom stoje u bliskoj, razumljivoj i smisaonoj vezi i razumevanje se poboljšava i razvija struktuiranjem gradiva u okviru većih celina. Pri tome smo imali u vidu da usmeravanje procesa učenja prilagodimo karakteristikama i sposobnostima učenika eksperimentalne grupe kao celine.

Osnovna naša pretpostavka u istraživanju da će učenje pomoću struktuiranog gradiva dovesti do boljih nastavnih efekata potvrdjena je. Učenici u odeljenjima eksperimentalne grupe pokazali su bolji uspeh u savladanosti gradiva teme GRANICA FUNKCIJE nego učenici u odeljenjima kontrolne grupe. Ovaj oblik učenja pomoću struktuiranog gradiva pokazao je svoje pedagoško-didaktičke prednosti - aktivan položaj učenika u nastavnom procesu, i psihološke vrednosti - razvijanje sposobnosti za učenje.

PRILOG I

PODACI O UČENICIMA OBUHVAĆENIM EKSPERIMENTOM

T e m a: GRANICA FUNKCIJE

Vaspitno-obrazovna organizacija ______________________

Razred i odeljenje: ____________; struka: ______________; Razredni starešina: __________

Školska 1979/80 godina

Redni broj	Ime i prezime učenika	Pol[1)]	Zanimanje[2)] oca	Zanimanje[2)] majke	Školska sprema[3)] oca	Školska sprema[3)] majke	Opšti us- u zajed. sred.[4)] Ir.	Opšti us- u zajed. sred.[4)] IIr.	Ocena iz matematike zajed.srednjem Ir.	Ocena iz matematike zajed.srednjem IIr.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.										
2.										
. . .										
35.										
36.										

1) Za muški pol upisati samo slovo M, a za ženski slovo Ž.

2) Upisati jedno od tri navedena:
- radnik u neposrednoj proizvodnji(RNP)
- neproizvodni radnik (RNR)
- ostalo (O)

3) Upisati jednu od navedenih škola: -bez škole (BŠ); -od 4 razreda osnovne škole(4);

PRILOG II

PODACI O UČENICIMA OBUHVAĆENI EKSPERIMENTOM

T e m a: GRANICA FUNKCIJE

Vaspitno-obrazovna organizacija

Razred i odeljenje: ________________; struka: ________________; razredni starešina: ________

Školska 1980/81 godina.

Redni broj	Ime i prezime učenika	Opšti uspeh u pozivnous-merenom obraz.	Ocena iz analize
		III raz.	III raz.
1	2	3	4
1.			
2.			
. . .			
35.			
36.			

Napomena: Opšti uspeh uneti brojčano, na primer 4,28.

PRILOG III

IN TEST: PZOGP - II/80

za učenike III razreda srednjeg obrazovanja + I godinu pozivnousmerenog obrazovanja i vaspitanja srednjeg stupnja

Ime i prezime učenika: ______________________
Razred i odeljenje: ________; Struka: ______________
Vaspitno-obrazovna organizacija i mesto: ___________
________________________________; Datum: ____________

Novi Sad, 1980. godine

UPUTSTVO ZA UČENIKE

U toku vašeg školovanja upoznali ste više matematičkih pojmova i postupaka izračunavanja. Ovim IN testom: PZOGR/ inicijalni test: prethodna znanja o graničnim procesima/ želimo da saznamo u kojoj meri sada posedujete odredjena znanja samo o onim matematičkim sadržajima koji prethode obradi vrlo značajne teme iz gradiva za III rezred srednje škole. Ta tema je granična vrednost funkcije.

Molimo vas da pažljivo pročitate tekst pitanja ili zadatka i nakon potrebnog razmišljanja ili računanja odgovorite, prema vašem poznavanju tog gradiva, na svako postavljeno pitanje, odnosno zadatak. Odgovore ne morate davati redom, već najpre na ona pitanja i zadatke koji se vama učine lakšim. Odgovori mogu biti samo zaokruživanjem, odnosno podvlačenjem, dopunjavanjem rečenice ili zapisivanjem zadatka na liniji. Bitno je da date odgovore na sva pitanja, odnosno zadatke.

Svojim savesnim i odgovornim ispunjavanjem ovog testa pomoći ćete vama i vašim drugaricama i drugovima da lakše shvate i nauče sadržaje iz graničnih procesa po programu analize za III razred.

Radite bez nepotrebnog gubljenja vremena, jer je vreme izrade testa sa svim uputstvima ograničeno na 45 minuta.

Hvala vam na saradnji.

P I T A NJ A I Z A D A C I

1. Beskonačni periodični dekadni /decimalni/ zapisi odredjuju racionalne brojeve. DA - NE

2. Izmedju $\frac{4}{5}$ i $\frac{11}{5}$ postoji više racionalnih brojeva.

Neki od njih su: ______

a) 1,5 b) 2,28 c) $\frac{23}{20}$ d) $\frac{24}{10}$ e) $\frac{37}{20}$

/Zaokružite odgovore koje smatrate tačnim/

Koliko ima racionalnih brojeva izmedju $\frac{4}{5}$ i $\frac{11}{5}$?

Odgovor: ______

3. Poznato je da je $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$. Ako je $/x_n/$ $n \in N$ niz približnih vrednosti broja $\sqrt{2}$ koje su manje od $\sqrt{2}$, a $/y_n/$ $n \in N$ niz približnih vrednosti koje su veće od $\sqrt{2}$, onda važe nejednakosti:

a) $|x_4 - \sqrt{2}| < 10^{-3}$ b) $|y_4 - \sqrt{2}| < 0{,}001$. Dokazati.

Mesto za rad i odgovor:

4. U dati krug K upisani su pravilni mnogougli od 6 i 12 stranica - M_6 i M_{12}, i oko njega opisani pravilni mnogougli od 4 i 8 stranica - M_4 i M_8. Od sledećih relacija zaokružite one koje su tačne!

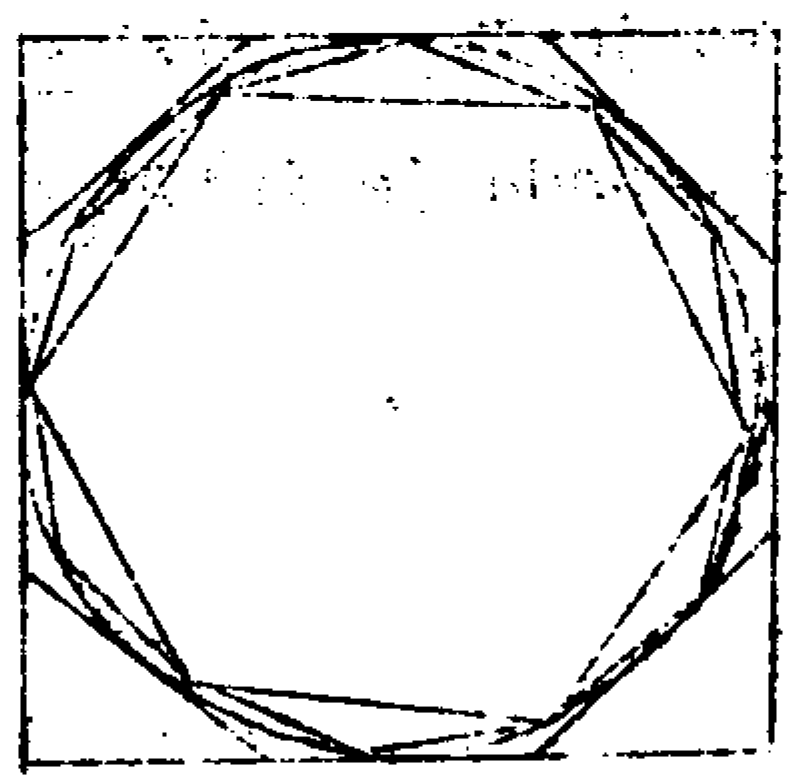
a) $K < M_4$

b) $M_4 < M_8 < K$

c) $M_6 < M_{12} < K$

d) $M_6 > M_{12} > K > K_8 > M_4$

e) $M_6 < M_{12} < K < M_8 < M_4$



5. Na slici je prikazana osnovna grana grafika funkcije $y = \operatorname{tg} x$. Kako se ponaša funkcija $y = \operatorname{tg} x$ kada se x približava vrednosti $\frac{\pi}{2}$ preko manjih vrednosti od $\frac{\pi}{2}$?

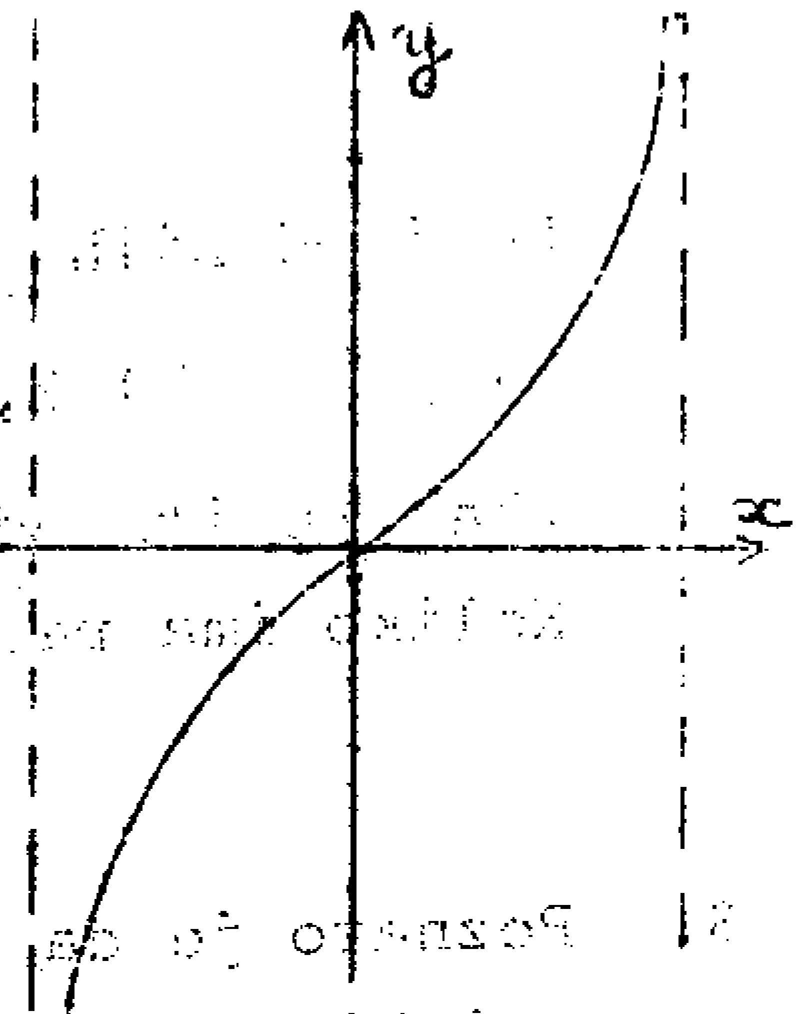
Odgovor: Kada se x približava vrednosti $\frac{\pi}{2}$ preko manjih vrednosti od $\frac{\pi}{2}$ funkcija $y = \operatorname{tg} x$

____

____

____

/Dopuniti odgovor prema postavljenom pitanju!/



6. Promenljiva x uzima sve vrednosti iz intervala $]-2,2[$. Zapisati tu promenljivu pomoću nejednakosti koja sadrži znak apsolutne vrednosti.

Odgovor: Promenljiva x zadovoljava nejednakost

________________________________ /dovršite odgovor!/.

7. Prikazati na brojevnoj osi skup

$$M = \{x : |x-3| < 5, \ \ x \geq 6, \ \ x \in \mathbb{R}\}$$

Mesto za računanje | Odgovor

8. Ako je $\mathbb{R}_1 = \{x \mid x^2 \leq 9\}$ podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, onda je $\inf \mathbb{R}_1 = -3$ i $\sup \mathbb{R}_1 = 3$.

DA - NE

9. Neka je preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zadano formulama

a) $a_n = 2$, b) $a_n = /-1/^n$

Za svaki od ova dva slučaja napisati prvih nekoliko članova niza i skup vrednosti datog preslikavanja.

Odgovori:

a) : ______________________ b) ______________________

______________________ ______________________

10. Neka je $a_n = n^2 + 1$. Odredite a_5, a_{n+4}, a_{2n-1} i $/a_n/^3$.

Mesto za računanje

Odgovori:

a_5 = ____________

a_{n+4} = ____________

a_{2n-1} = ____________

$/a_n/^3$ = ____________

11. Niz $/a_n/$ se naziva ograničenim, ako postoji takvo M,

____

/Dopuniti definiciju ograničenog niza/

12. Od datih nizova zaokružiti one koji su monotoni:

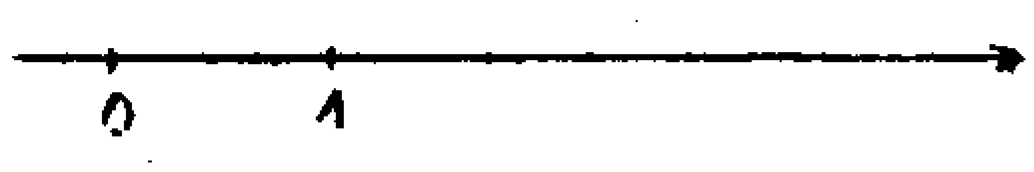
a) $a_n = /-1/^n \cdot \frac{1}{n}$ b) $a_n = \frac{1}{n^2}$ c) $a_n = n^3$

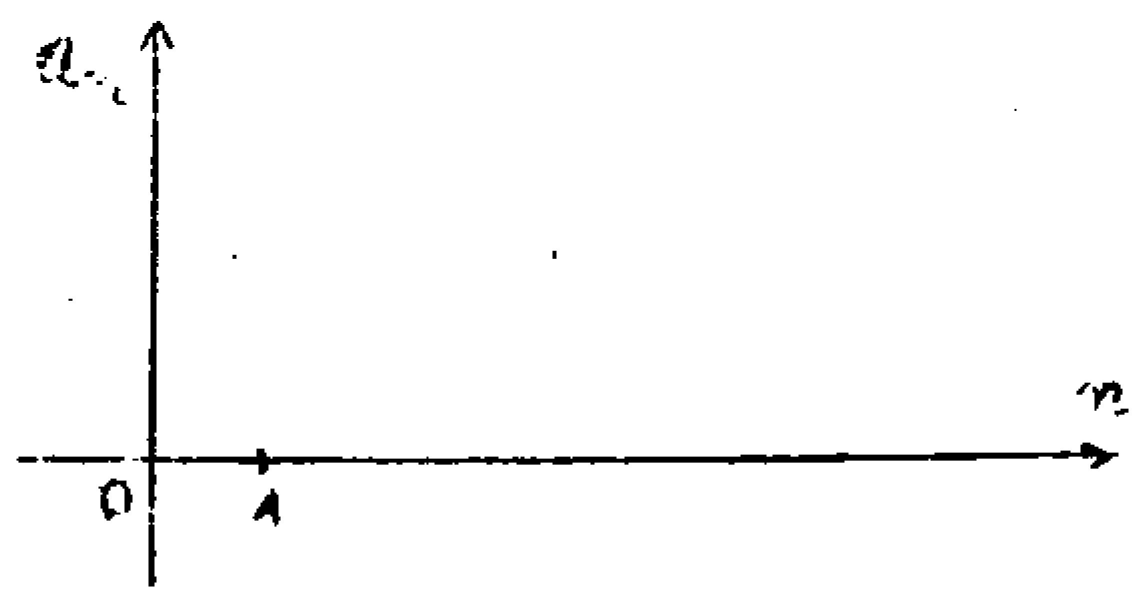
d) $a_n = /-1/^{n-1} \cdot n$ e) $a_n = /1 + \frac{1}{n}/^n$

Mesto za rad

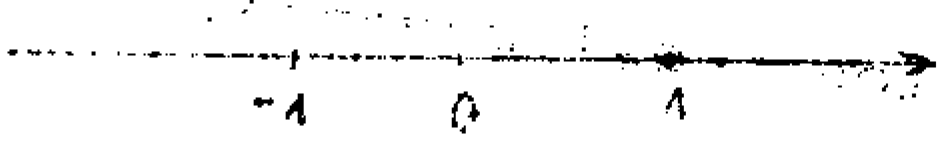
13. Predstaviti geometrijski na brojevnoj pravoj i u koordinatnoj ravni nekoliko prvih članova /4-5/ sledećih nizova

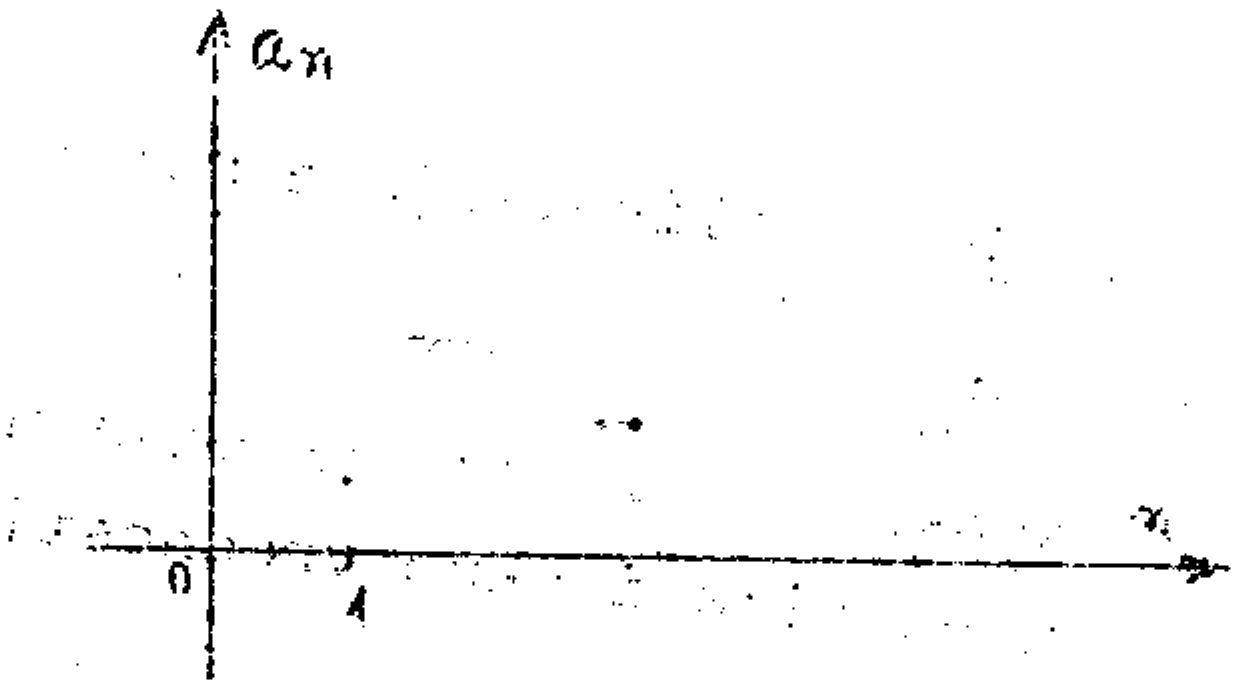
a) $a_n = 3 + \frac{1}{n}$



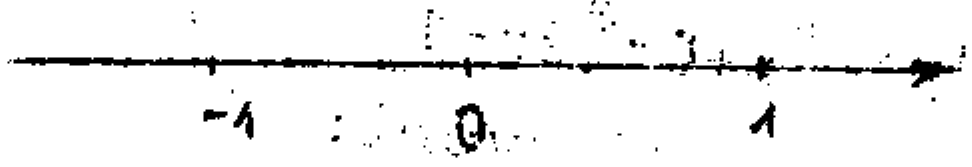


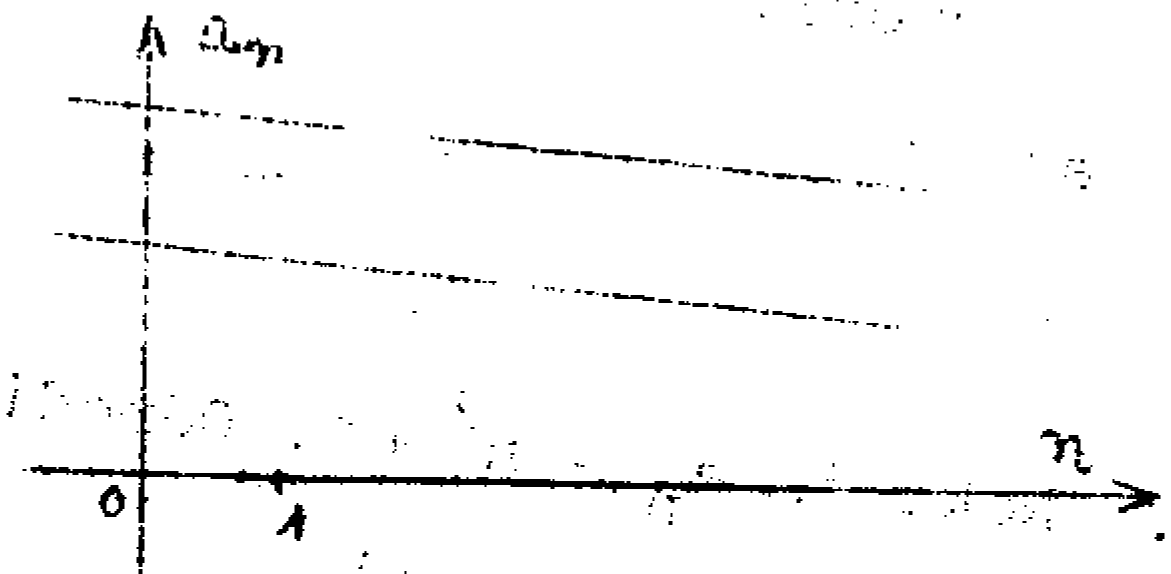
b) $a_n = /-1/^{n-1}$



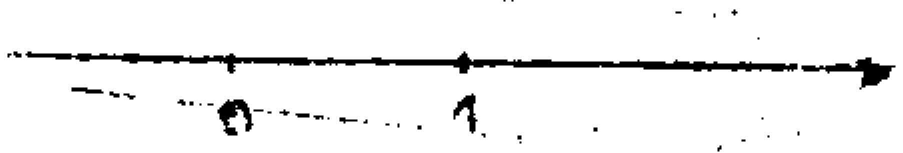


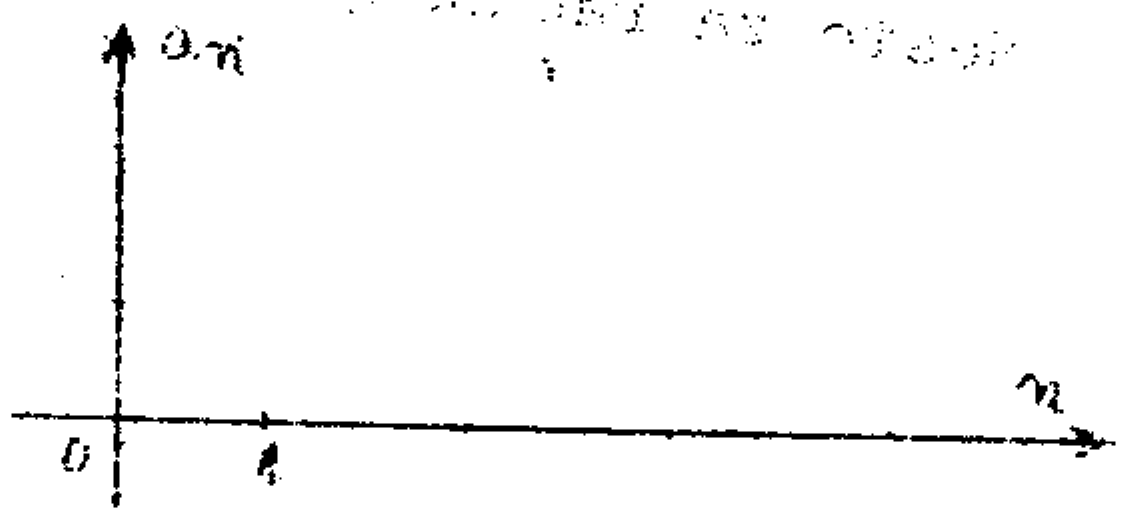
c) $a_n = \frac{/-1/^n}{n}$





d) $a_n = 1 + /-1/^n + \frac{1}{n}$





14. Dat je niz $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Odrediti n_o tako da je

a) $|1-a_n| < 10^{-3}$ b) $|1-a_n| < 0{,}00001$

Mesto za računanje

Odgovori:

a) __________

b) __________

15. Odrediti tačku nagomilavanja sledećih nizova

a) $a_n = 1 + /-1/^n + \frac{1}{n}$ b) niz svih racionalnih brojeva

c) $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ d) niz svih prirodnih brojeva

Mesto za rad

Odgovori:

a) __________ b) __________

c) __________ d) __________

16. Odrediti lim inf i lim sup za nizove:

a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ b) $a_n = (-1)^{n-1}(2 + \frac{3}{n})$

Odgovori:

a) ____________________, ____________________

b) ____________________, ____________________

17. Zaokružite one iskaze o granici niza koji su tačni:

a) Broj a se naziva granica niza (a_n), ako za ma koje $\varepsilon > 0$ postoji takvo $n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ da za svako $n > n_o(\varepsilon)$ važi $|a-a_n| < \varepsilon$.

b) $\exists \varepsilon > 0, \quad \exists n_o(\varepsilon), \quad |a-a_n| < \varepsilon$;

c) $\exists \varepsilon > 0, \quad \exists n_o \in \mathbb{N}, \quad \forall n, n > n_o(\varepsilon), \quad |a_n-a| < \varepsilon$

d) Niz (a_n) konvergira ka a ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $n_o \in \mathbb{N}$ takvo da je $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ za $n > n_o$.

18. Od datih nizova zaokružiti one koji su konvergentni!

a) $a_n = (-1)^{n-1}$ b) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ c) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

d) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

19. Zaokružite one iskaze za koje smatrate da su tačni:

a) Granica niza je jedan od brojeva iz skupa slika niza:

b) Granica niza je ujedno i tačka nagomilavanja niza

c) Niz može imati više graničnih vrednosti kao što i skup slika niza može imati više elemenata.

d) Tačka nagomilavanja niza ne mora biti i granica tog niza.

20. a) Niz $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ osciluje u konačnom oko vrednosti 1.

DA - NE

b) Niz $b_n = (-1)^{n+1} \cdot n$ osciluje u beskonačnom.

Da - Ne

PRILOG IV

TEST: FM ZOGF - III/81

za učenike III razreda srednjeg obrazovanja-I godinu pozivnousmerenog obrazovanja i vaspitanja srednjeg stupnja

Ime i prezime učenika: ______________________________
razred i odelenje: ____________ struka: ______________
vaspitno-obrazovna organizacija i mesto: ______________
____
datum: __________________

Novi Sad, 1981.godine

PITANJA I ZADACI

1. Zaokružite one iskaze od a) do d) za koje smatrate da su tačni:

a) Funkcija f ima granicu y_o kada $x \to \infty$ ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $x_o(\varepsilon)$ tako da važi nejednakost $|f(x)-y_o| < \varepsilon$.

b) Broj y_o je granica funkcije f kada $x \to \infty$ ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji takvo $x_o(\varepsilon)$, da je za sve $x > x_o(\varepsilon)$ ispunjena nejednakost $|f(x)-y_o| < \varepsilon$.

c) Funkcija f ima granicu y_o kada $x \to \infty$ ako pri neograničenom rašćenju x vrednosti te funkcije se po volji malo razlikuju od broja y_o.

d) Broj y_o je granica funkcije f kada $x \to \infty$ ako se vrednosti te funkcije po volji malo razlikuju od broja y_o.

2. Data je funkcija $f(x) = 5 - \frac{1}{x}$. Da li se za $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$ i $\varepsilon = 0,001$ vrednosti date funkcije proizvoljno malo razlikuju od 5, kada $x \to \infty$?

DA - NE

Odrediti za svako ovo ε vrednost $x_o(\varepsilon)$.

Mesto za rad:

3. Koristeći definiciju granice funkcije dokazati da je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{10x-10}{5x+10} = 2$. Dati geometrijsku interpretaciju te granice.

Mesto za rad:

4. Zaokružiti one od sledećih iskaza za koje smatrate da su tačni:

a) Broj y_o je granica funkcije f kada $x \to x_o$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji takvo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ da je za sve x za koje je f(x) definisana i koji zadovoljavaju uslov $0 < |x - x_o| < \delta$, važi nejednakost $|f(x) - y_o| < \varepsilon$.

b) Funkcija f ima granicu y_o kada $x \to x_o$ ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi nejednakost $|f(x) - y_o| < \varepsilon$.

c) Broj y_o je granica funkcije f u tački x_o ako za proizvoljnu okolinu V tačke y_o postoji takva okolina U tačke x_o da se $U \setminus \{x_o\}$ funkcijom f preslikava u V, odnosno $f(U \setminus \{x_o\}) \subset V$.

d) Funkcija $f: S \to R$ ima granicu broj y_o u tački $x_o \in S'$ (skup S' je skup tačaka nagomilavanja skupa S) ako je za svaki niz (x_n) iz $S \setminus \{x_o\}$ ispunjen uslov: $(x_n) \to x_o \Rightarrow (f(x_n)) \to y_o$.

5. Pomoću metričke definicije granice funkcije ("ε-δ" simbolike) dokazati da je

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = 7.$$

Mesto za rad:

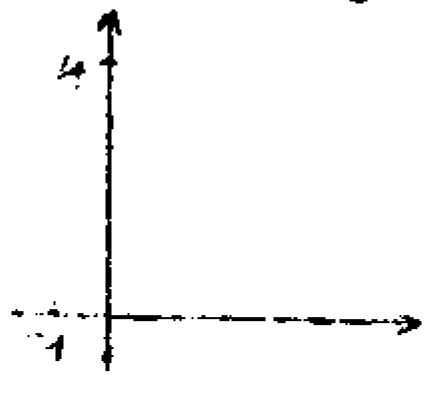
6. Šhematski prikazati grafike funkcija koje imaju odgovarajuću osobinu:

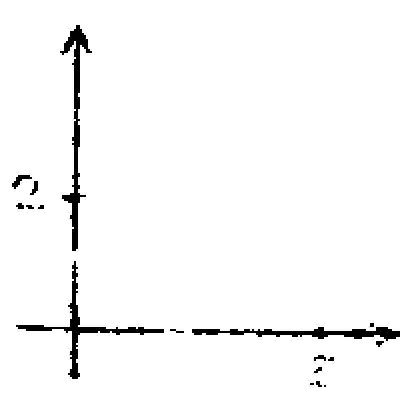
a) funkcija ima granicu jednaku 4 u tački $x_o = -1$, ali u toj tački funkcija nije definisana;

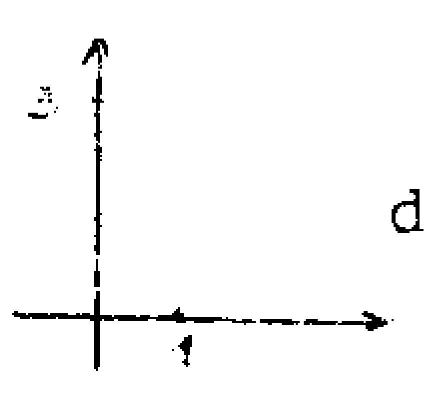
b) funkcija nema granicu u tački $x_o = 3$, ali vrednost funkcije u toj tački je jednaka 2.

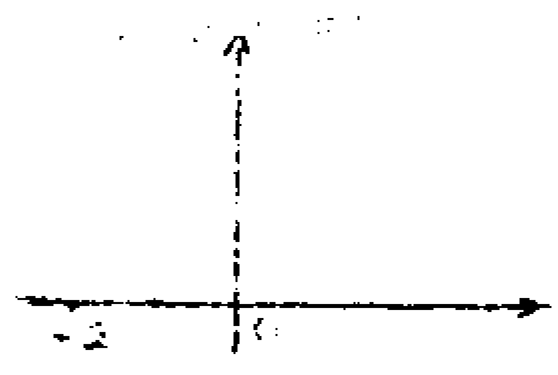
c) funkcija ima granicu u tački $x_o = 1$ i ona iznosi 3, a vrednost funkcije u toj tački je 4.

d) funkcija u tački $x_o = -2$ nema granicu i nije definisana u toj tački.

a) 

b) 

c) 

d) 

7. Pokazati da funkcija $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$ nema granicu i da osciluje u konačnim granicama kada $x \to 0$.
Mesto za rad:

8. Jednostrane granice funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ su:

a) 4; -4; 0; 2 kada $x \to 2 - 0$,

b) 0; 4; -4; 3 kada $x \to 2 + 0$.

Podvući tačan odgovor!

9. Odrediti $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - 2}{x^3 + 1} \right)^{x^3}$

Mesto za rad:

10. Granična vrednost funkcije $f(x) = \frac{\sin(a-x)}{x - a}$ kada $x \to a$ je:

0; 1; -1; a

Podvući tačan odgovor!

11. Odrediti

$$\lim_{x \to -1} \frac{1 + x}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

Mesto za rad:

12. Odrediti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$$

Mesto za rad:

U P I T N I K   Z A   P R O F E S O R E

1. Ime i prezime: ______________________

2. Centar: ______________, mesto: ______________
   datum: ______________ .

3. Da li ~~obra~~djujete ANALIZU u III razredu PUSOV po novom detaljisanom programu? DA - NE

4. Da li ste koristili raspored gradiva po temama i nastavnim jedinicama uz taj novi program? DA - NE

5. Kada ste započeli obradu teme GRANICA FUNKCIJE? __________

6. Koliko ste časova upotrebili za obradu te teme? ________;
   od toga: a/ za obradu novog gradiva ________ časova i
   b/ za utvrdjivanje i obnavljanje gradiva ______ časova

7. Kada ste završili obradu ove teme ? ______________

8. Definicija granice funkcije data je pomoću:
   a) "ε-δ" simbolike
   b) okoline tačke
   c) granice niza
   (zaokružite na osnovu Vaše prakse!)

9. Koje ste od definicija granice funkcije navedenih u prethodnom pitanju koristili pri obradi teme? a) b) c)
   (zaokružite na osnovu Vaše prakse!)

10. Koja je od tih definicija po Vašem mišljenju najpodesnija za obradu sadržaja teme GRANICA FUNKCIJE? a) b) c)

11. Navedite sadržaje iz teme GRANICA FUNKCIJE za koje je najpodesnija definicija pod:
    a) ______________________
    b) ______________________
    c) ______________________

12. Na koje ste teškoće nailazili pri obradi ove teme:

13. Iznesite Vaša zapažanja o obradi ove teme.

LITERATURA

|1| Adamović(Dušan): Realni brojevi u svetlosti savremenih koncepcija Beograd Matematika stručno-metodički časopis, 2-3 (1972), s. 78-93.

|2| Adamović(Dušan): O gornjem i donjem limesu, Beograd, Matematička biblioteka No 21, 1961, s. 35-63.

|3| Академия педагогических наук РСФСР: Вопросы перестройки обучения математике в школе, Москва, Издательство АПН РСФСР, 1963, с. 309.

|4| Александрова,Р.А.: Одна из экспериментальных программ по математике для средней школы США, Москва, Математика в школе, 3(1967), с. 91-95.

|5| Alendorfer(Karl): Okli(Klitas): Principi matematike (prevod sa engleskog J.Stojaković). Beograd, 'Vuk Karadžić', 1966, s. 562.

|6| Aljančić(Slobodan): Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Beograd, Gradjevinska knjiga, 1968, s.326.

|7| Андронов,И.К.: Три этапи в развытии международного школьного математического образования в XIX-XX вв. Москва, Математика в школе, 4(1967), с. 82-84.

|8| Антонов,Д.А.: Подготовка учащихсян изучению понятия предела функции, Москва, Математика в школе, 4 (1978), с. 52-54.

|9| Arzt(Kurt) and Mütz(Karl): Ein grenzwertfreier zugang zur analysis. Stuttgart, Ernstklett Verlag, Der Matematik unterricht , (September 1976), s.47-63

|10| Bandič(Ivan): Osnovi infinitezimalnog računa u školama drugog stupnja, Zbornik radova. Beograd Zavod za izdavanje udžbenika SRS, 1965, s. 85-99.

|11| Batler(Čarls) i Vren(Linvud): Nastava matematike u srednjoj školi, program i metodi. Beograd, Vuk Karadžić 1967, s. 407.

|12| Becker(Oskar): Grundlagen der mathematik in geschichtlicher entwicklung. Freiburg/München, Verlag Karl Alber, 1954, s. 422.

|13| Бендукидзе, А.Д.: Архимед и квадратура параболы. Москва, "Наука", Квант. 7(1971), с.7-10.

|14| Bertolino(Milorad): Matematika i dijalektika. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika i nastavna sredstva, 1974, s. 125.

|15| Болгарский(Борис Владимирович): Очерки по истории математики. Минск, "Вышэйшая школа", 1979, с. 368.

|16| Borojević(Slavko): Metodologija eksperimentalnog naučnog rada. Novi Sad, RU "Radivoje Ćirpanov", 1978, s. 160.

|17| Breidenbach(Walter): Methodik des mathematischen unterrichts. Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1950, s. 191.

|18| Brown(David) i Palas(Frank): Basic mathematical concepts. Lexington, Massachusetts, D.C. Heath and Company, 1970, s. 405.

|19| Bruner(Jerome): Proces obrazovanja. Pedagogija – časopis Saveza pedagoških društava Jugoslavije, 2-3 (1976), s. 275-321.

|20| Bruner(Jerome): O podstate a problémuch vyučovania (Toward a theory of instruction). Bratislava, Slovenské pedagogické nakladatel´stvo, 1968, s. 164.

|21| Brunschvicg,L.: Les étapes de la philosphie mathématique. Paris, A. Blanchard, 1972, s.592.

|22| Cauchy(D´augustin): Œuvres complets, II^E série-tome III Cours d´analyse de l´ecole royale polytechnique (analyse algébrique). Paris, Gauthier-Villars, 1897, s.476.

|23| Condamine,M.et Vissio, P.: Analyse et algébre. Paris, Delagrave, 1970, s. 512.

|24| Courant,R. i Robbins,H.: Šta je matematika? (prevod sa engleskog Jovan D. Kečić). Beograd, "Naučna knjiga", 1973, s. 430.

|25| Цыпкин(Александр): Справочник по математике для средней школы . Москва, "Наука", 1979, с. 400.

|26| Cvetković(Živorad): Usvajanje pojmova u nastavi: Beograd. Zavod za izdavanje udžbenika i nastavna sredstva, 1982, s. 170.

|27| Dadić(Žarko): Razvoj matematike. Zagreb. Školska knjiga, 1975, s. 252.

|28| Данко(Павел Ефремович) и др.: Высшая математика в упражнениях и задачах, Част I. Москва, "Высшая школа", 1980, с. 320.

|29| Despotović(Radivoje): Granica funkcije - neka metodička razmatranja. Zagreb, Matematika, stručno-metodički časopis 2(1981), s. 13-19.

|30| Despotović(Radivoje): Granični procesi (istorijsko-metodički osvrt). Novi Sad, Pedagoška stvarnost, 7(1981), s. 591-600.

|31| Despotović(Radivoje): Elementi topologije u nastavi matematike osnovne i srednje škole (magistarski rad). Beograd, Prirodno-matematički fakultet, 1976, s. 105.

|32| Despotović(Radivoje): Pojam dimenzije u nastavi matematike. Beograd, Matematika, stručno-metodički časopis, 3(1975), s. 92-93.

|33| Despotović(Radivoje): Drvo u teoriji grafova i primene (specijalistički rad). Beograd, Prirodno-matematički fakultet, 1970, s. 76.

|34| Despotović(Radivoje): Tendencije u nastavi matematike ispoljene na drugom medjunarodnom kongresu za nastavu matematike. Novi Sad, Pedagoška stvarnost, 8(1973), s. 489-496.

|35| Devide(Vladimir): O nizovima. Beograd, Matematička biblioteka, No 21, 1961, s. 13-34.

|36| Dienes, Z. i Golding, E.: Metodika moderne matematike. Ljubljana, Mladinska knjiga, 1974, s. 126.

|37| Дорофеев,Г.В.: Пределы последовательностей . Москва, "Наука", Квант, 11(1974), с. 54-59.

|38| Euklid· Elementi (prevod i komentar Anton Bilimović). Beograd, "Naučna knjiga" 1949-1956, s. 940.

|39| Félix(Lucienne): L'aspect moderne des mathématiques. Paris Librarie scientifique Albert Blanchard 1957, s. 163.

|40| Феликс(Люсьену): Элементарная математика в современном изложении. Москва, "Просвещение", 1967, с.487.

|41| Габович,И.: Предел функции. Москва, "Наука", Квант, 10 (1980), с. 40-42.

|42| Ганжела,И.Ф. и Ганжела,А.Н.: Формирование понятия предела последовательности. Москва, Математика в школе, 4(1978), с. 54-56.

|43| Garding(Lars): Encounter with mathematics. New York /Heidelberg/ Berlin, Springer Verlag, 1977, s. 270.

|44| Гервер,М.Л.: 20 задач на пределы . Москва, "Наука", Квант, 3(1974), с. 27-31.

|45| Глаголева,Е.Г. и др.: Из опыта введения понятий непрерывности и предела функции. Москва, Математика в школе, 4(1978), с. 43-52.

|46| Gourion(Mars): Matematique, tome 2, Analyse. Paris, Nathan, 1971, s. 305.

|47| Griesel(Heinz): Grundkurs analysis - die beschreibung des ablaufs einer curriculum entwickung. Stuttgart, Ernst klett Verlag, Der Mathematik - unterricht, (September 1976), s. 25-46.

|48| Griffiths,H.B. and Hilton,P.J.: A comprehensive textbook of classical mathematics a contemporary interpretation. London, Van Nostrand Reinhold Company, 1970 s. 637.

|49| Guilford J.: Osnovi psihološke i pedagoške statistike (prevod sa engleskog - F.Troj i G.Ernjaković). Beograd, Savremena administracija, 1968, s.542.

50 Гусев Е.А. Из опыта введения понятия производной в средней школе. Москва Математика в школе 6(1970) с 49-57.

51 Hadamard(Jacques): Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique. Paris, Libraire scientifique Albert Blanchard. 1959 s. 134.

52 Hard G.H.: A course of pure mathematics tenth edition. Cambridge At the University press 1958, s. 509.

53 Hight(Donald): A concept of limits. New York, Dover Publications, Ine. 1977, s. 152.

54 Хинчин(Александар Јаковлевич): Осам предавања из математичке анализе (с руског превела Милица Илић Дајовић). Београд "Научна књига", 1949, с. 263.

55 Ивашев-Мусатов,О.С.: Непрерывност и начала анализа. Москва. Математика в школе, 3(1978), с. 49-53.

56 Ивашев-Мусатов(Олег Сергеевич): Начала математического анализа. Москва, "Наука", 1976, с. 158.

57 Ивлев,Б.М. и др.: Сборник задачи по алгебре и началам анализа для 9 и 10 классов. Москва, "Просвещение", 1978, с. 272.

58 Известия академии педагогических наук РСФСР: Вопросы общей методики математики. Москва, 1958, с. 255.

59 Jäckel(Hans): Mathematik heute. Leipzig /Jena/ Berlin, Urania Verlag 1972 s. 128.

60 Яглом,И.М.: О некоторых тенденциях в зарубежной методике математики. Москва, Математика в школе, 4(1965), с. 81-89.

61 Яковлев(Геннадий Николаевич)и др.: Алгебра и начала анализа, част II учебник для средних специальных учебных заведений . Москва, "Наука", 1978, с. 335.

|62| Janc(Mirko): O graničnoj vrednosti niza. Beograd Matematika, stručno-metodički časopis, 3(1975), s. 57-70.

|63| Ястребинецкий,Г.А.: К методике изложения темы "Производная". Москва, Математика в школе, 5(1976), с. 39-43.

|64| Jelinek(Milos): Über die bestrebungen zur modernisierung des mathematik unterrichts. Berlin Matematik in der Schule, 5(1965), s. 351-366.

|65| Kadelburd(Zoran) : Jedan novi matematički program u Sjedinjenim Američkim Državama. Beograd, Nastava matematike II (XXIV), 1(1975), s.43-47.

|66| Karamata(Jovan): Razvoj i značaj divergentnih redova u matematičkoj analizi. Beograd Prvi kongres matematičara i fizičara FNRJ (Naučna saopštenja), "Naučna knjiga", 1951,s. 99-119.

|67| Kirin(Vladimir): Prolegomena matematici Elementi matematičke logike. Zagreb, Školska knjiga", 1978 s. 31.

|68| Knežević(Vujo): Modeli učenja i nastave. Beograd, "Prosveta", 1981, s. 248.

|69| Knopp(Konrad): Theorie und anwendung der unendlichen reihen. Berlin Verlag von Julius Springer, 1931 s. 582.

|70| Koch(Aries): Eine propädeutische behandlung der analysis. Stuttgart, Ernst Klett Verlag, Der Mathematik unterricht, (Dezember 1968) s.12-37.

|71| Колмогоров(Андрей Николаевич) и др.: Алгебра и начала анализа, учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы, издание 2-е. Москва, "Просвеение", 1981, с. 330.

|72| Колмогоров(Андрей Николаевич): Научные основы школьного курса математики. Москва, Математика в школе, 3(1969), с. 12-17.

|73| Колмогоров,А.Н. и Яглом,И.М.: О садержании школьного курса математики. Москва, Математика в школе, 4(1965), с. 53-62.

|74| Колмогоров,А.Н., и др.: Алгебра и начала анализа, учебное пособие для 9-го класса средней школы. Москва, "Просвещение", 1977, с. 222.

|75| Колмогоров,А.Н. и др. Алгебра и начала анализа, учебное пособие для 10-го класса средней школы. Москва, "Просвещение" 1977, с.271.

|76| Колмогоров А.Н. и Ивашев-Мусатов О.С.: Действительные числа, бесконечные последовательности и их пределы . Москва, Математика в школе, 2 (1975), с. 25-35.

|77| Колмогоров,А.Н.: Функции, графики, непреривные функции Москва, Математика в школе, 6(1965),с. 12-21.

|78| Крамор(Виталий Семенович): Алгебра и начала анализа. Москва, "Высшая школа", 1981, с. 336.

|79| Krkljuš(Slavko): Učenje u nastavi otkrivanjem, otkrivajuće vodjenje u nastavi matematike. Novi Sad, RU "Radivoj Ćirpanov" 1977 s. 189.

|80| Кродор,А.С.: Несколько замечаний о преподовании анализа школьникам (Обучение в математических школах). Москва, "Просвещение", 1965, с. 13-19.

|81| Крутецкий (Вадим Андреевич): Психология математических способностей школьников. Москва "Просвещение" 1968, с. 431.

|82| Кудрявцев(Лев Дмитриевич): Курс математического анализа, Том 1. Москва, "Высшая школа", 1981, с. 687.

|83| Кудрявцев(Лев Дмитриевич): Мысли о современной математике и её изучении. Москва, "Наука", 1977, с. 109.

|84| Kurepa-Smolec Škreblin: Infinitezimalni račun (diferencijalni i integralni račun) za IV razred gimnazije. Zagreb Školska knjiga, 1961, s.296.

|85| Kurepa(Svetozar): Matematička analiza I, II deo. Zagreb, Tehnička knjiga, 1970, s. 341+370.

|86| Kvaščev(Radivoj): Primena teorije učenja na oblast nastave i vaspitanja. Beograd, Filozofski fakultet, 1978, s. 515.

|87| Kvaščev(Radivoj): Sposobnosti za učenje i ličnost. Beograd, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva SRS, 1980, s. 533.

|88| Laugwitz(Detlef): Unendlich als rechenzahl. Stuttgart, Ernst Keltt Verlag, Der Matheatik-unterricht, (September 1976) s. 101-117.

|89| Лефор,Г.: Алгебра и анализ (задачи). Москва, Издательство "Наука", 1973, с. 462.

|90| Lekić(Djordje): Metodologija pedagoškog istraživanja i stvaralaštva. Zrenjanin, Pedagoško tehnički fakultet, 1977 s. 348.

|91| Lentin A. et Rivaud J.: Éléments d'algebre moderne. Paris, Librairie Vuinbert, 1957, s. 333.

|92| Lietzmann(Walther) Methodik des mathematischen unterrichts Band II. Heidelberg, Quelle Meyer, 1953, s. 208.

|93| Лихолетов(Иван Иванович): Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. Минск, "Вышэйшая школа", 1976, с. 719.

|94| Lipschutz(Seymour): General topology. New York, Mc Craw-Hill Book Company, 1965, s. 239.

|95| Ляшко(Иван Иванович) и др.: Справочное пособие по математическому анализу, част "первая . Киев,"Вища школа", 1978, с.695.

|96| Lurje,C.: Arhimed. Beograd "Prosveta" 1952, s. 243.

|97| Макарычев,Ю.Х.: Принципы построения учения о функциях в связи с изучением елементов анализа (Вопросы перестройки обучения математике в школе). Москва, Издательство АПН, 1963, с. 67-128.

|98| Mardešić(Sibe): Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, Prvi deo. Zagreb, Školska knjiga, 1974, s. 272.

|99| Marjanović(Milosav): Matematička analiza I, Beograd, "Naučna knjiga", 1979, s. 264.

|100| Marjanović(Milosav): Matematika za IV razred srednjih stručnih skola. Beograd, Zavod za udžbenike i nasravna sredstva, 1973, s. 170.

|101| Markovac(Josip): Neuspjeh u nastavi matematike. Zagreb, Školska knjiga, 1978, s. 183.

|102| Marković(Željko): Uvod u višu analizu, I deo,četvrto izdanje. Zagreb, Školska knjiga, 1966, s. 662.

|103| Marković(Željko): Uvod u višu analizu, II deo. Zagreb, Školska knjiga, 1952, s. 640.

|104| Маркушевич,А.И.: Некоторые проблемы обучения математике в школе. Москва, Математика в школе, 6(1969), с. 22-28.

|105| Маркушевич А.И.: Вывод формул обьемов геометрических тел в х классе с использованием производной. Москва, Математика в школе, 8(1965), с. 21-24.

|106| Maron I.A.: Problems in calculus of one variable. Moscow, Mir Publishers 1975, s. 453.

|107| Математика- мидлендский экспериментальный учебник. Москва, "Просвещение", 1971, с. 413.

|108| Meschkowski(Herbert): Didaktik der mathematik. Band III: Sekundarstufe II. Stuttgart, Ernst Keltt Verlag, 1973, s. 338.

|109| Mroček V. i Filipović F.: Pedagogija matematike. Beograd, "Nolit", 1957, s. 313.

|110| Mužić(Vladimir): Metodologija pedagoškog istraživanja. Sarajevo, Zavod za izdavanje udžbenika, 1973, s. 644.

|111| Nastavni plan i program za gimnaziju u SR Srbiji. Beograd, "Naučna knjiga", 1969, s. 538.

|112| Натансон(Исидор Павлович): Теория функций вещественной переменной, издание трерье. Москва, "Наука", 1974, с. 480.

|113| Ničković(Radisav): Učenje putem rešavanja problema u nastavi. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, 1970, s. 303.

|114| Ničković(Radisav): Pregled savremenih psiholoških teorija učenja. Beograd, Zbornik 1 Instituta za pedagoška istraživanja SR Srbije, 1967, s. 179-211.

|115| Nikolić-Despotović(Danica) i Despotović(Radivoje): Matematika za III razred srednjeg obrazovanja. Novi Sad, Zavod za izdavanje udžbenika, 1979, s. 279.

|116| Никольский(Сергей Михайлович): Элементы математического анализа. Москва, "Наука", 1981, с. 159.

|117| Noel G.: Faut-il enseigner la continuite? Mathematique et pédagogie, 6(1976), s. 99-116.

|118| Novelles tendances de L'enseignement des mathematiques en France. Paris, 1976, s. 32.

|119| OECE: Un programme modern de mathématiques pour L'en seignment secondaire. Bureau du personnel scientifique et tehnique, 1961, s. 252.

|120| OECE: Mathématiques Nouvelles. Bureau du personnel scientifique et technique, 1961, s. 226.

|121| Ососков,Г.А.: Елементы математического анализа должно и можно ввести в школьнй курс математики. Москва, Математика в школе, 5(1960), с. 45-47.

|122| Pedagoška biblioteka: Prilozi metodici nastave matematike u srednjoj školi. Beograd, "Prosveta", 1947, s. 302.

|123| Penavin(Velimir): Modernizacija nastave matematike. Beograd, Matematika, stručno-metodički časipis, 1(1972), s. 5-16.

|124| Penavin(Velimir): Aktuelni pravci razvoja metodike matematike. Novi Sad, Pedagoška stvarnost, 2(1972), s. 95-104.

|125| Pickert(Günter): Analysis in der kollegstufe. Stuttgart Ernst Klett Verlag, Der Mathematik-unterricht (September 1976), s. 64-81.

|126| Пичурин,Л.Ф.: К преподаванию алгебри и начала анализа. Москва, Математика в школе, 6(1975), с. 35-37.

|127| Pólya(Georg): Mathématiques et raisonnement "plausible" Paris, Gauthier-Villars, 1958, s. 299.

|128| Пойа,Д.: Математическое открытие. Москва, Издательство "Наука", 1976, с. 448.

|129| Poljak(Vladimir): Didaktika. Zagreb, Školska knjiga, 1980, s. 248.

|130| Понтрягин(Лев Семенович): Анализ бесконачно малых. Москва, "Наука", 1980, с. 256.

|131| Понтрягин(Лев Семенович): Математический анализ для школьников. Москва, "Наука", 1980, с. 86.

|132| Привалов,И.И. и Гальперн,С.А.: Основы анализа бесконечно малых. Москва, ГИФМЛ, 1959, с. 251.

|133| Prodanović(Tihomor) i dr.: Istraživanje u nastavi. Novi Sad, RU, "Radivoje Ćirpanov", 1975, s. 175.

|134| Програма по математике для средней школы. Москва, Математика в школе, 2(1968), с. 5-20.

|135| Radić(Mirko): Od prirodnih do realnih brojeva. Zagreb. Školska knjiga, 1973 s. 175.

|136| Radonjić(Slavoljub): Teorije učenja. Beograd. Filozofski fakultet 1979 s. 178.

|137| Radonjić(Slavoljub) Nove tendencije u teorijama učenja. Beograd Psihologija VII br. 3-4 (1974) s. 171-190.

|138| Radonjić(Slavoljub): Transfer učenja. Beograd Savremena škola, 1959. s. 55.

|139| Райнов,Д.А.: О преподавании элементов математического анализа в средней школе. Москва Математика в школе, 5(1963). с. 25 - 30 .

|140| Rot(Nikola): Opšta psihologija. Beograd. Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije 1966 s. 338.

|141| Rubinštajn.S.: Problem sposobnosti i pitanje psihološke teorije. Beograd. Savremena škola, 5-6 (1962) s. 275-287.

|142| Рудин.У.: Основы математического анализа. Москва. Издательство "Мир" 1976. с. 319

|143| Ружа(Имре)· Основания математики. Киев "Вища школа". 1981. с. 350.

|144| Saltikov(Nikola). Rad internacionalne komisije za nastavu matematike i težnje za modernizacijom nastave. Beograd. Nastava matematike i fizike III - 3-4(1954), s. 207-219.

|145| Серегин,Г.М.: Изучение понятий непрерывности и предела в IX классе на основе понятия "Окрестность" Москва, Математика в школе, 5(1980). с.51-55.

|146| Smolec(Ignacije): Uloga nastavnih programa matematike u nastavnom procesu. Beograd Nastava matematike i fizike serija B XIII-XIV(1964-1965) s. 35-37.

|147| Stanković(Bogoljub): Osnovi funkcionalne analize. Beograd. "Naučna knjiga" 1975. s. 156.

|148| Stevanović(Borislav): Pedagoška psihologija. Beograd Zavod za udžbenike i nastavna sredstva,1977 s. 137.

|149| Stipanić(Ernest)· O matematičkoj intuiciji. Beograd Nastava matematike,VI(XXVIII), 1-2 nova serija 1979. s. 5-17.

|150| Stipanić(Ernest): Engelsov sud o Descartesovoj ulozi u razvitku matematike. Beograd, "Dijalektika", 1(1966), s. 34-51.

|151| Столяр(Абрам Аронович): Педагогика математики. Минск, "Вышэйшая школа", 1969, с. 368.

|152| Strojk(Dirk): Kratak pregled istorije matematike. Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika, 1969, s. 268.

|153| Стюарт(Ян): Концепции современной математики. Минск, "Вышэйшая школа", 1980, с. 282.

|154| Šamić(Midhat): Kako nastaje naučno delo, Uvodjenje u metodologiju i tehniku naučno istraživačkog rada (opšti principi). Sarajevo, Zavod za izdavanje udžbenika SR BiH, 1968, s. 206.

|155| Шварц(Лоран): Анализ, Том 1. Москва, Издательство "Мир", 1972, с. 824.

|156| Шварцбурд С.И. и др.: Обучение в математических школах. Москва, "Просвещение", 1965, с. 238.

|157| Шнейдер Е.Е. и др.: Краткий курс высшей математики. Москва, "Высшая школа", 1972, с. 639.

|158| Тарасов(Николай Петрович): Курс высшей математики для техникумов. Москва, Издательство "Наука", 1971, с. 448.

|159| Toeplitz(Otto): Die entwicklung der infinitesimalrechnung (Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode) Berlin /Götingen/ Heidelberg, Springer Verlag, 1949, s. 181.

|160| Ušan(Janez) i dr.: Matematika I deo, Novi Sad, Poljoprivredni fakultet u Novom Sadu, 1978, s. 510.

|161| Верченко А.И.: Подготовка перехода средней школы франции на новое садержание математического образования. Москва, Математика в школе, 2(1975), с. 92-94.

|162| Виленкин Н.Я. и Шварцбурд С.И.: Математичесний анализ (Учебное пособие для IX-X классов средних школ с математической специализацией). Москва, "Просвещение", 1973, с. 512.

|163| Вогели Б.Р.: Модернизация преподования математики в американоской школе. Москва, Математика в школе, 4(1964), с. 88-90.

|164| Vollrath(Hans Joachim) Die bedeutung methodischer variablen für den analysisunterricht. Stuttgart Ernst Klett Verlag. Der Mathematik unterricht (September 1978), s. 7-24.

|165| Werner(Blum) Zum vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung. Stuttgart Ernst Klett Verlag Der Mathematik unterricht. Heft 3(1979), s. 42-50.

|166| Wittmann(Erich): Grundfragen des mathematik unterricht Braunschweig. Vieweg. 1975. s. 163.

|167| Wittoch(Margarita): Neue methoden im mathematikunterricht. Hanover /Dortmund/ Berlin. H.Schrodel Verlag 1973 s. 180.

|168| Wunderling(Helmut): Präzisirung von grenzwert und ableitung. Stuttgart Ernst Klett Verlag, Der Mathematik unterricht. (Dezember 1968) s.38-66.

|169| Zaječaranović(Gligorije): Osnovi metodologije nauke. Beograd. Institut za političke studije FPN. 1974. s. 236.

|170| Zamansky(Marc): Introduction á l'algèbre et l'analyse modern. Paris. Dunod Editeur. 1963 s. 429.

|171| Zeller(Karl) Theorie der limitierungsverfahren. Berlin Göttingen Heidelberg 1958. s. 242.

|172| Зорич(Владимир Антонович): Математический анализ. Москва, "Наука" 1981, с. 543.