МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

МАГИСТАРСКА ТЕЗА

О МОГУЋНОСТИМА ФОРМАЛНОГ МЕТОДА У ТЕОРИЈИ СКУПОВА

КАНДИДАТ
НЕДЕЉКО СТЕФАНОВИЋ

МЕНТОР
Др АЛЕКСАНДАР ЈОВАНОВИЋ

БЕОГРАД 2004.

Садржај

Глава 1

Аксиоматска теорија скупова

Аксиомаска Теорија Скупова представља формализацију и заснивање целокупне Математике, што директно указује на потребу испитивања могућности таквог приступа. Управо то представља циљ овог рада.

1.1 Цермело Френкелова теорија скупова ZFC

Овде ћемо изложити најраспрострањенији систем аксиома теорије скупова ZFC. То је теорија првог реда на језику $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}} = \{\in\}$ и надаље ћемо ради краћег записа формула тог језика користити следеће ознаке.

$$\begin{aligned} &x \neq y \quad \text{за} \quad \neg\, x = y, \\ &x \notin y \quad \text{за} \quad \neg\, x \in y, \\ &(\forall x \in y)\varphi \quad \text{за} \quad \forall x(x \in y \Rightarrow \varphi), \quad \text{где је } \varphi \text{ произвољна формула}, \\ &(\exists x \in y)\varphi \quad \text{за} \quad \exists x(x \in y \wedge \varphi), \quad \text{где је } \varphi \text{ произвољна формула}. \end{aligned}$$

Ту су x и y произвољне променљиве, а φ произвољна формула. Последњим двема дефиницијама смо увели тзв. *ограничене кванторе*.

Под *универзалним затворењем* формуле φ подразумеваћемо формулу која се добија универзалном квантификацијом формуле φ по свим променљивама које у њој имају слободна јављања. Често ћемо теореме писати без неких или без свих водећих квантора.

Релације везане за уводимо на уобичејен начин

$$\begin{aligned} x \subseteq y \ &\Leftrightarrow\ \forall z(z \in x \Rightarrow z \in y), \\ x \subset y \ &\Leftrightarrow\ x \subseteq y \wedge x \neq y, \\ x \supseteq y \ &\Leftrightarrow\ y \subseteq x, \\ x \supset y \ &\Leftrightarrow\ y \subset x. \end{aligned}$$

x и y су ту наравно, произвољне променљиве.

ZFC је теорија првог реда на језику $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}} = \{\in\}$ са две схеме са бесконачно много аксиома инстанци и још коначно много појединачних аксиома. Дакле, укупно теорија ZFC има бесконачно много аксиома. Као што ће бити показано, теорија ZFC нема еквивалентну аксиоматизацију са коначним бројем аксиома. Аксиоме излажемо редом.

Аксиома екстензионалности:

$$\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y.$$

Ова аксиома изражава својство да су два скупа једнака ако имају исте елементе. Обично је користимо да бисмо доказали јединственост неког скупа.

У ZFC теорији скупова су једини објекти скупови. Међутим, будући да многе колекције објеката о којима има смисла говорити у теорији скупова ZFC нису скупови, уводимо појам *класе*. Нека је $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ формула језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$. Тада можемо увести ознаку $C(y_1, \ldots, y_n)$ за нов објекат који заправо представља колекцију свих скупова x за које важи $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$. Прецизније, ми уводимо следећу скраћеницу

$$x \in C(y_1, \ldots, y_n) \quad \text{је замена за} \quad \varphi(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Заправо, овде смо ми добили једну фамилију класа у зависности од $y_1, \ldots, y_n$. Ту ће заправо бити речи о једној класи ако је $n = 0$ или ако сваку од променљивих y_i заменимо термом t_i у коме не учествују променљиве, већ само функцијски и константски сиболи. Будући да језик $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ таквих симбола нема, то је могуће само у дефиниционим екстензијама. Уколико нема опасности од забуне користићемо исту ознаку $x \in C$ као у случају $n = 0$.

Једнакост класа уводимо на следећи начин:

$$C = D \;\; \Leftrightarrow \;\; \forall x(x \in C \Leftrightarrow x \in D),$$

где су C и D произвољне класе. Нека је c произвољан константски симбол из неког проширења језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$. Тада је формулом $x \in c$ дефинисана једна класа C која има исте елементе као скуп c (тј. интерпретација тог симбола), односно ако схватимо c као класу важи $c = C$. Стога скупове можемо третирати као посебне случајеве класа.

Моделски гледано, класе су подскупови скупа носача посматраног модела дефинабилни преко параметара из скупа носача тог модела. Класу дефинисану формулом $\varphi(x, \bar{y})$, где су променљиве $\bar{y}$ резервисане за параметре обележавамо и са $\{x : \varphi(x, \bar{y})\}$. Наравно, већ сада можемо увести неке операције над класама.

$$\begin{aligned}
&C \cup D = \{x : x \in C \,\vee\, x \in D\},\\
&C \cap D = \{x : x \in C \,\wedge\, x \in D\},\\
&C^c = \{x : x \notin C\},\\
&C \setminus D = C \cap D^c.
\end{aligned}$$

Релације $\subset$, $\subseteq$, $\supset$ и $\supseteq$ као и ограничене кванторе у случају класа дефинишемо на сличан начин као и у случају скупова.

Аксиома празног скупа

$$\exists x \forall y \; y \notin x.$$

Ова аксиома постулира егзистенцију празног скупа. Пошто је он по аксиоми екстензионалности јединствен, можемо увести ознаку за њега као константу. Означаваћемо га са $\emptyset$.

Аксиома пара

$$\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

Ова аксиома постулира егзистенцију *неуређеног пара*. Неуређен пар чији су елементи x и y означаваћемо са $\{x, y\}$. Он нам наравно омогућава да уведемо и *синглтон*, као и уређен пар као

$$\begin{aligned}
&\{x\} = \{x, x\},\\
&\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.
\end{aligned}$$

Није тешко показати да уређен пар има следећу особину

$$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Leftrightarrow (x = u \wedge y = v).$$

Појам уређене n-торке уводимо индуктивно као што следи.

$$\begin{aligned}
&\langle x\rangle = x,\\
&\langle x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle = \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}\rangle \quad \text{за } n \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Индукцијом се лако показује да уређена n-торка има својство

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \Leftrightarrow (x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n).$$

Класу V дефинишемо као $V = \{x : x = x\}$, а Декартов производ класа $A_1, \ldots, A_n$ као

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{y : \exists x_1 \cdots \exists x_n(x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n \wedge y = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle)\}.$$

Степен класе A индуктивно дефинишемо на следећи начин

$$A^1 = A,$$
$$A^{n+1} = A^n \times A.$$

Уколико је F класа за коју је $F \subseteq V^{n+1}$ и притом важи

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y \forall z(\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle \in F \wedge \langle x_1, \ldots, x_n, z\rangle \in F \Rightarrow y = z)$$

рећи ћемо да је F једна функција са n аргумената у смислу класе. У том случају елемент y за који $\langle \bar{x}, y\rangle \in F$ обележавамо са $F(\bar{x})$. Тада такође уводимо ознаке

$$\{F(\bar{x}) : \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in A\} = \{y : \exists \bar{x}(F(\bar{x}) = y \wedge \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in A)\},$$
$$\{F(\bar{x}) \in A : \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in B\} = \{F(\bar{x}) : \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in B\} \cap A,$$

при чему су A и B произвољне класе.

Аксиома уније

$$\forall x\, \exists y\, \forall z(z \in y \Leftrightarrow (\exists u \in x) z \in u).$$

Ова аксиома постулира егзистенцију уније скупа. За њих као и за унију два скупа уводимо ознаке

$$y \in \bigcup x \;\;\Leftrightarrow\;\; (\exists z \in x) y \in z,$$
$$x \cup y = \bigcup\{x, y\}.$$

Операција неуређеног пара и операција уније нам омогућавају да уведемо појам неуређене n-торке.

$$\mathrm{ut}_1(x) = \{x\},$$
$$\mathrm{ut}_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \mathrm{ut}_n(x_1, \ldots, x_n) \cup \{x_{n+1}\}.$$

Будући да је $\mathrm{ut}_1(x) = \{x\}$ и $\mathrm{ut}_2(x, y) = \{x, y\}$, уместо $\mathrm{ut}_n(x_1, \ldots, x_n)$ писаћемо $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Индукцијом се сасвим једноставно доказује да важи

$$x \in \{x_1, \ldots, x_n\} \Leftrightarrow (x = x_1 \vee \cdots \vee x = x_n).$$

Због асоцијативности и комутативности операције уније два скупа које се лако доказују нећемо писати заграде нити водити рачуна о редоследу чланова на које се примењује операција уније.

Аксиома сепарације (схема)

За сваку формулу $\varphi(x, z, \bar{u})$ формула

$$\forall \bar{u}\, \forall x\, \exists y\, \forall z(z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(x, z, \bar{u}))$$

је аксиома.

Ова аксиома заправо тврди да је пресек скупа и класе скуп, односно да је поткласа скупа увек скуп. Она нам обезбеђује егзистенцију скупа оних елемената датог скупа који имају дато својство изразиво на језику првог реда. У складу са тим уводимо ознаку за тај скуп.

$$z \in \{y \in x : \varphi(x, y, \bar{u})\} \;\;\Leftrightarrow\;\; (z \in x \wedge \varphi(x, z, \bar{u})).$$

Наравно, подразумева се да је горња замена слободних јављања променљиве y у формули φ променљивом z регуларна.

Приметимо да овде имамо два ограничења. Прво, ми издвајамо елементе само из неког скупа, и друго, променљива која означава скуп за који се тврди егзистенција не сме имати слободних јављања у формули која описује које елементе издвајамо из тог скупа. Оба ограничења су битна.

Прво ограничење нас спречава да закључимо да постоји скуп коме припадају тачно они елементи који имају произвољну особину изразиву на језику првог реда. Наиме, тада бисмо имали противречну теорију будући да је формула

$$\neg \exists x\, \forall y(y \in x \Leftrightarrow y \notin y)$$

ваљана. Заиста, ако би постојао такав x, онда бисмо заемњујући y са x добили

$$x \in x \Leftrightarrow x \notin x,$$

што је контрадикција.

Ово управо показује да постоје класе које нису скупови, због чега је увођење појма класе и имало смисла. Класе које нису скупови зовемо и *правим класама.*

Друго ограничење нас спречава да помоћу ове схеме дефинишемо неки скуп преко њега самог. То ограичење је такође битно јер формула

$$\forall x\, \exists y\, \forall z (z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge z \notin y))$$

противречи егзистенцији непразног скупа. Наиме, ако су x и u било какви елементи за које је $u \in x$ и y скуп за који важи

$$\forall z (z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge z \notin y)),$$

онда замењујући z са u добијамо

$$u \in y \Leftrightarrow (u \in x \wedge u \notin y),$$

одакле будући да $u \in x$ добијамо

$$u \in y \Leftrightarrow u \notin y,$$

што је контрадикција.

Аксиома празног скупа је такође последица аксиоме сепарације ако претоставимо да постоји бар један скуп, јер је за ма који скуп x испуњено

$$\emptyset = \{y \in x : y \neq y\}.$$

Пошто је у класичном предикатском рачуну формула $\exists x\; x = x$ ваљана, а у њему се теорија скупова и излаже, аксиома празног скупа јесте последица аксиоме сепарације. Следећа теорема показује да је V права класа.

Теорема 1

$$\forall x\, \exists y\; y \notin x$$

Доказ: Ако би постојао скуп x такав да за свако y важи $y \in x$, онда бисмо по аксиоми сепарације могли уочити скуп

$$z = \{u \in x : u \notin u\}$$

за кога би важило

$$u \in z \Leftrightarrow u \notin u$$

за сваки скуп u, па и за z, одакле би било

$$z \in z \Leftrightarrow z \notin z,$$

што је контрадикција. Отуда не постоји скуп коме припадају сви скупови. QED

Операције пресека и разлике скупова уводимо са

$$x \cap y = \{z \in x : z \in y\},$$
$$x \setminus y = \{z \in x : z \notin y\}.$$

Пресек непразног скупа x такође уводимо на уобичајен начин као скуп свих оних елемената који припадају сваком члану скупа x. За њега користимо стандардне ознаке $\bigcap x$ и $\bigcap_{y \in x} y$. Пресек непразног скупа увек постоји јер је за ма који непразан скуп x и ма који његов елемент y испуњено

$$\bigcap x = \{z \in y : (\forall u \in x) z \in u)\}.$$

Такође због асоцијативности и комутативности операције пресека два скупа нећемо писати заграде нити водити рачуна о редоследу чланова на које се примењује операција пресека.

Аксиома партитивног скупа

$$\forall x\, \exists y\, \forall z (z \in y \Leftrightarrow (\forall u \in z) u \in x).$$

Ова аксиома постулира егзистенцију партитивног скупа датог скупа. За партитивни скуп скупа x користимо стандардну ознаку $P(x)$.

Аксиома партитивног скупа заједно са претходним аксиомама нам обезбеђује егзистенцију Декартовог производа скупова. Конкретно, уводимо га са,

$$x \times y = \{z \in P(P(x \cup y)) : (\exists u \in x)(\exists v \in y)\, z = \langle u, v\rangle\}.$$

Декартов производ скупова није асоцијативан, али заграде нећемо увек писати и притом ћемо подразумевати да се се гомилају на левој страни, тј.

$$x_1 \times \cdots \times x_n \times x_{n+1} = (x_1 \times \cdots \times x_n) \times x_{n+1}.$$

Такође, уводимо Декартов степен датог скупа на следећи начин

$$x^1 = x,$$
$$x^{n+1} = x^n \times x.$$

У вези с тим уводимо појам n-арне релације на скупу x као произвољног подскупа од x^n. Такође, уводимо следеће скраћенице

$$\mathrm{Rel}_n(\rho, x) \quad \text{за} \quad \rho \subseteq x^n,$$
$$\mathrm{Rel}_n(\rho) \quad \text{за} \quad \exists x\, \mathrm{Rel}_n(\rho, x).$$

Ако је $\mathrm{Rel}_n(\rho)$ онда уместо $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in \rho$ пишемо $\rho(x_1, \ldots, x_n)$. У случају да је ρ бинарна релација, тј. $\mathrm{Rel}_n(\rho)$, уводимо њен домен и слику као

$$\mathrm{dom}(\rho) = \{x : \exists y\ \langle x, y\rangle \in \rho\},$$
$$\mathrm{ran}(\rho) = \{y : \exists x\ \langle x, y\rangle \in \rho\}.$$

Притом су горње ознаке оправдане јер су $\mathrm{dom}(\rho)$ и $\mathrm{ran}(\rho)$ подскупови скупа $\bigcup\bigcup\rho$. У случају да је ρ бинарна релација уместо $\rho(x, y)$ често пишемо $x\rho y$ и уводимо њој инверзну релацију са

$$\rho^{-1} = \{\langle x, y\rangle : y\rho x\}.$$

Функцију која пресликава скуп x у скуп y дефинишемо као било који подскуп f скупа $x \times y$ који има особину да за ма које u, v, w из $\langle u, v\rangle \in f$ и $\langle u, w\rangle \in f$ следи $v = w$. У том случају пишемо $f : x \longrightarrow y$ односно $\mathrm{Fun}(f)$, а јединствени елемент b за који $\langle a, b\rangle \in f$ зовемо сликом елемента a при пресликавању f и обележавамо са $f(a)$.

Ако је f функција и притом за све a и b из њеног домена из $a \neq b$ следи $f(a) \neq f(b)$, онда кажемо да је f инјекција и у том случају пишемо

$$f : a \xrightarrow{1-1} b.$$

Нравно, тада је f^{-1} такође функција. Уколико је f функција и $y = \mathrm{ran}(f)$, онда кажемо да је f функција на скуп y или да је функција f сурјекција на скуп y. Тада пишемо

$$f : \mathrm{dom}(f) \xrightarrow{\text{на}} y.$$

Уколико је притом f инјекција, рећи ћемо да је f *бијекција* на скуп y и писаћемо

$$f : \mathrm{dom}(f) \xrightarrow[\text{на}]{1-1} y.$$

Уколико постоји бијекција између скупова a и b рећи ћемо да су ти скупови *еквипотентни* и писаћемо $|a| = |b|$ односно $a \sim b$.

Будући да за ма које скупове a и b и ма коју функцију $f : a \longrightarrow b$ важи $f \in \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(a \cup b)))$, по схеми сепарације постојаће скуп свих функција које пресликавају скуп a у скуп b и за њега ћемо користити ознаку ${}^b a$.

Ако $f : a \longrightarrow b$ онда за ма који $x \subseteq a$ и ма који $u \in x$ важи $f(u) \in \mathrm{ran}(f)$, па постоји скуп свих $f(u)$ за $u \in x$. Њега зовемо сликом скупа x припресликавању f и обележавамо са $f[x]$. Такође, ако је y произвољан скуп, онда за ма које u за које је $f(u) \in y$ мора да важи $u \in a$, па постоји скуп свих u таквих да $f(u) \in y$. Тај скуп зовемо инверзном сликом скупа y при пресликавању f и обележавамо са $f^{-1}[y]$.

Рестрикцију функције f на скуп $x \subseteq \mathrm{dom}(f)$ у ознаци $f|_x$ дефинишемо на уобаичајен начин као скуп свих уређених парова $\langle u, v\rangle \in f$ за које је $u \in x$. Наравно, егзистенција је загарантована схемом сепарације. Сасвим слично, ако $f : a \longrightarrow b$ и $g : b \longrightarrow c$, композицију $g \circ f$ дефинишемо на стандардан начин, при чему је егзистенција те композиције такође загарантована аксиомом сепарације будући да важи

$$g \circ f \subseteq \mathrm{dom}(f) \times \mathrm{ran}(g).$$

Притом ћемо звог асоцијативновсти композиције при писању изостављати заграде. Уколико је f функција и $a \subseteq \mathrm{dom}(f)$ користићемо следеће ознаке

$$\bigcup_{x\in a} f(x) = \bigcup f[a],$$

$$\bigcap_{x\in a} f(x) = \bigcap f[a],$$

при чему се код друге претпоставља да је $a \neq \emptyset$. Такође, производ скупова уводимо на следећи начин. Нека је f функција и $a \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Тада можемо користити ознаку

$$\prod_{x\in a} f(x) = \{i \in \bigcup\bigcup f : (\forall x \in a) i(x) \in f(x)\}.$$

Ако је јасно о којој се функцији са доменом I ради, за $\alpha \in I$ можемо слику елемента α обележавати са X_α (наравно, уместо X се може користити и било које друго слово) и у том контексту користити ознаке $\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$, $\bigcap_{\alpha\in I} X_\alpha$ и $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

Све до сада изложене аксиоме нам не обезбеђују егзистенцију бесконачних скупова. Зато уводимо следећу аксиому.

Аксиома бесконачности

$$\exists x\,((\exists y \in x)\,\forall z\, z \notin y) \wedge (\forall y \in x)(\exists z \in x)\,\forall u\,(u \in z \Leftrightarrow (u \in y \vee u = y)))$$

Уведимо ознаку

$$S(x) = x \cup \{x\}.$$

Дефиниција 1 Скуп a који има следеће особине

$$\emptyset \in x$$

$$x \in a \Rightarrow S(x) \in a,$$

зовемо *индуктивним скупом.*

Претходна аксиома заправо постулира егзистенцију барем једног индуктивног скупа.

Дефиниција 2 Скупове s_n, где је n цео ненегативан[1] број, индуктивно дефинисане на следећи начин

$$s_0 = \emptyset,$$

$$s_{n+1} = s_n \cup \{s_n\}$$

зовемо *нумералима.*

Јасно је да сваки нумерал припада свим индуктивним скуповима. Уколико би постојао скуп ω чији су елементи тачно нумерали, он би био у смислу инклузије најмањи индуктиван скуп. Међутим, ми на језику $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ не можемо то записати. То својство би се могло изразити беконачном формулом

$$\forall x\,(x \in \omega \Leftrightarrow (x = s_0 \vee x = s_1 \vee x = s_2 \vee \cdots))$$

која не представља формулу првог реда.

Теорема 2 За ма који цео ненегативан број n нумерал s_n садржи тачно n елемената и то су тачно нумерали s_m за $0 \leqslant m < n$.

[1] Метатеоријски.

Доказ: Заиста, у супротном би постојао најмањи цео број $n \geqslant 0$ за који то не би било тачно. Лако се види да не може бити $n = 0$, па мора бити $n = k + 1$ за неки цео број $k \geqslant 0$. Међутим, онда скуп s_k има тачно k елемената, а како за ма које $0 \leqslant l < k$ скуп s_l има тачно l елемената, скуп s_k би се разликовао од свих својих елемената (ако их има) којих има тачно k, па би скуп $s_n = s_k \cup \{s_k\}$ имао тачно $k + 1 = n$ елемената и то би били тачно елементи скупа s_k и сам скуп s_k. Дакле, скуп s_n би имао тачно n елемената и то би били тачно скупови s_l за $l < n$, што је контрадикција са полазном претпоставком, па изречено тврђење важи. QED

Последица 1 Нумерали s_m и s_n су различити за $m \neq n$. Посебно, нумерала има бесконачно много.

Пошто сви нумерали морају припадати сваком индуктивном скупу, сваки индуктиван скуп мора садржати бесконачно много елемената, што оправдава назив ове аксиоме.

Теорема 3 У смислу инклузије постоји најмањи индуктиван скуп.

Доказ: Лако се показује да је пресек било ког непразног скупа индуктивних скупова индуктиван скуп. Нека је a било који индуктиван скуп и нека је b скуп свих његових индуктивних подскупова. $b \neq \emptyset$ јер $a \in b$. Стога је и скуп $c = \bigcap b$ индуктиван. Лако се види да је $c \subseteq a$. Нека је d било који индуктиван скуп. Тада је и $e = c \cap d = \bigcap \{c, d\}$ такође индуктиван и важи $e \subseteq c \subseteq a$, па $e \in b$ одакле је $c = \bigcap b \subseteq e \subseteq d$. Пошто је скуп c индуктиван и пошто је d произвољан индуктиван скуп, скуп c је заиста у смислу инклузије најмањи индуктиван скуп. QED

Најмањи индуктиван скуп обележавамо симболом ω. Његове елементе зовемо *природним бројевима.* Скуп ω представља интерпретацију скупа природних бројева у теорији ZFC. Интерпретацију метатеоријског природног броја n у теорији ZFC представља нумерал s_n.

Међутим, као што смо напоменули, теорија ZFC не гарантује да осим нумерала нема других природних бројева. Прецизније, постоји таква формула $\varphi(x)$ на језику $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ за коју важи

а) $\mathrm{ZFC} \vdash \varphi(s_n)$ за сваки цео број $n \geqslant 0$,

б) $\mathrm{ZFC} \nvdash (\forall x \in \omega)\varphi(x)$.

Конструкција такве формуле је сложенија и заснива се на теоремама непотпуности са којима ћемо се накнадно упознати.

Лема 1 Следећа формула је теорема

$$(\forall n \in \omega)(n \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists m \in n)\, S(m) = n).$$

Доказ: Посматрајмо следећи скуп

$$a = \{n \in \omega : n \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists m \in n)\, S(m) = n\}.$$

Лако се види да $\emptyset \in a$, као и да је $a \subseteq \omega$. Претпоставимо да $n \in a$. Тада је $S(n) \neq \emptyset$ и за $m = n \in S(n)$ важи $S(m) = S(n)$, па и $S(n) \in a$, одакле је скуп a индуктиван. Сада из $a \subseteq \omega$ и минималности индуктивног скупа ω закључујемо да је $a = \omega$. QED

Претходни метод доказивања да сви природни бројеви имају неку особину зовемо *индукцијом.* Приметимо да индуктивна претпоставка $n \in \omega$ овај пут није нигде коришћена, што убудуће обично неће бити случај.

Лема 2 Сваки непаразан $a \subseteq \omega$ садржи елемент b тако да важи

$$(\forall x \in b)\, x \notin a$$

Доказ: Доказаћемо заправо да за свако $x \in \omega$ важи

$$\forall a(a \subseteq \omega \wedge x \in a \Rightarrow (\exists y \in a)(\forall z \in y)\, z \notin a).$$

Најпре приметимо да ова формула важи за $x = \emptyset$. Претпоставимо сада да претходна формула важи за неко $x = n \in \omega$ и докажимо да она онда важи и за $x = S(n)$. Претпоставимо да је $a \subseteq \omega$ и да $x = S(n) \in a$. Ако за све $m \in S(n)$ важи $m \notin a$ онда је $S(n)$ сведок за y. Ако постоји неко $m \in S(n)$ тако да важи $m \in a$, онда због $S(n) = n \cup \{n\}$ важи $m = n$ или $m \in n$. По индуктивној претпоставци скуп $b = a \cup \{n\}$ садржи елемент y за који важи $y \cap b = \emptyset$. Ако је $y \neq n$ онда $y \in a$, а ако је $y = n$ онда не може бити $m \in n$ јер би онда због $m \in a$ било $m \in y \cap b = \emptyset$, па је $y = n = m \in a$ одакле опет $y \in a$. Такође, из $y \cap b = \emptyset$ и $a \subseteq b$ следи да је и $y \cap a = \emptyset$, чиме је претходна формула у потпуности доказана. QED

Метод употребљен за доказивање ове леме је само стилски различит од метода који је коришћен у доказу претходне леме. Ту се заправо и подразумева да се позива на одговарајући индуктиван скуп. Ми ћемо убудуће користити овај стил.

Последица 2 За ма које $n \in \omega$ важи $n \notin n$. Такође, не постоје $m, n \in \omega$ за које је $m \in n \wedge n \in m$.

Доказ: Довољно је применити претходну лему на скупове $\{n\}$ и $\{m, n\}$. QED

Лема 3 За ма које $m, n, k \in \omega$ важи

$$m \in n \wedge n \in k \Rightarrow m \in k.$$

Доказ: Тврђење очигледно важи за $k = \emptyset$. Претпоставимо да важи за неко $k = l \in \omega$ и за ма које $m, n \in \omega$ и докажимо да онда важи и за $k = S(l)$ и ма какве $m, n \in \omega$. Наиме, ако $m \in n$ и $n \in k = S(l)$, онда важи $n \in l$ или $n = l$. У првом случају је по индуктивној претпоставци $m \in l$, а у другом $m \in n = l$, па опет $m \in l$. Отуда и због $l \subseteq S(l)$ важи $m \in S(l) = k$. QED

Лема 4 За ма које $m, n \in \omega$ важи тачно једна од могућности

$$m \in n, \quad m = n, \quad n \in m.$$

Доказ: На основу претходне последице за ма које $m, n \in \omega$ не може да важи више од једне од наведених могућности. Стога је довољно да докажемо да важи бар једна од наведених могућности.

Уколико за неке $m, n \in \omega$ важи бар једна (а самим тим и тачно једна) од наведених могућности, рећи ћемо да су m и n упоредиви. Притом је $\emptyset$ сигурно упоредив са свим природним бројевима. Претпоставимо да је m упоредив са свим природним бројевима и докажимо да је $S(m)$ упоредив са свим природним бројевима. $S(m)$ је свакако упоредив са празним скупом. Претпоставимо да је $S(m)$ упоредив са неким $n \in \omega$ и докажимо да је упоредив и са $S(n)$.

Претпоставимо супротно, да $S(n)$ није упоредив са $S(m)$. Из $S(m) \neq S(n)$ добијамо $m \neq n$. Из $S(m) \notin S(n)$ добијамо $S(m) \notin n$ и $S(m) \neq n$ одакле због упоредивости n са $S(m)$ важи $n \in S(m)$. Штавише, због $m \neq n$ важи и $n \in m$. Слично, из $S(n) \notin S(m)$ добијмо $S(n) \notin m$ и $S(n) \neq m$, одакле због упоредивости m са $S(n)$ важи $m \in S(n)$. Опет због $m \neq n$ важи $m \in n$. Али као што смо показали, за $m, n \in \omega$ не може истовремено важити $m \in n$ и $n \in m$. QED

Последица 3 Скуп ω је добро уређен релацијом $\in$ као строгим поретком.

Надаље, ћемо и празан скуп сматрати уређењем у односу на празну релацију, при чему усвајамо све уобичајене дефиниције појмова везаних за уређења.

Лема 5 Елементи природних бројева су природни бројеви.

Доказ: Пошто празан скуп нема елемената, аутоматски важи да су сви његови елементи природни бројеви. Нека је n природан број чији су сви елементи природни бројеви. Тада су елементи скупа $S(n)$ управо елементи природног броја n, који су по претпоставци природни бројеви, и сам n који је такође по претпоставци природан број. QED

Последица 4 Сви природни бројеви су добро уређени релацијом $\in$ као строгим поретком.

Доказ: Према претходном је сваки природан број у односу на релацију $\in$ подуређење доброг уређења ω, одакле је и сам добро уређен. QED

Лема 6 За ма који $n \in \omega$ и ма који непарзан $m \in S(n)$ постоји $k \in n$ тако да важи $S(k) = m$.

Доказ: Нека је $n \in \omega$ и $\emptyset \neq m \in S(n)$. Према претходном је и $m \in \omega$. Као што смо већ видели, сваки непразан $m \in \omega$ је облика $S(k)$ за неко $k \in \omega$. Једино још треба проверити да $k \in n$. Међутим, то следи из $k \in S(k) = m \in S(n)$. Заиста, лако се види да је $m \in S(n) = n \cup \{n\}$ еквивалентно са $m \in n \vee m = n$, тј. са $m \leqslant n$ у $\in$ уређењу скупа ω. Сада је јасно да из $k < m \leqslant n$ следи $k < n$ QED

Теорема 4 Скуп n је природан број ако и само ако је добро уређен релацијом $\in$ као стриктним поретком и ако за сваки непразан елемент m скупа $S(n)$ постоји елемент k скупа n тако да важи $m = S(k)$.

Доказ: Већ смо показали да је сваки природан број n је добро уређен релацијом $\in$ као релацијом стриктног поретка, као и да за ма које $\emptyset \neq m \in S(n)$, где је $n \in \omega$ важи $S(k) = m$ за неко $k \in n$. Докажимо обрат.

Нека је n добро уређен скуп у односу на релацију $\in$ као релацију стриктног уређења и нека за сваки непразан $m \in S(n)$ постоји $k \in n$ такво да је $S(k) = m$. Претпоставимо да n није природан број.

Пошто n није природан број мора бити $n \neq \emptyset$, па због $n \in S(n)$ по претпоставци постоји неко $i \in n$ тако да важи $S(i) = n$. Тада је i највећи елемент уређења $n = S(i)$.

Ако би било $i \in \omega$, онда би и $n = S(i)$ био природан број. Зато претпоставимо да $i \notin \omega$. Скуп свих $j \in n$ таквих да $j \nsubseteq n \vee j \notin \omega$ тада није празан јер садржи елемент i. Стога можемо уочити његов најмањи елемент k. Тада не може бити $k = \emptyset$, па због $k \in n \subseteq S(n)$ постоји $l \in n$ такво да је $k = S(l)$. Наравно, тада због $l \in S(l) = k$ тј. $l < k$ и $l \in n$ важи $l \in \omega \wedge l \subseteq n$. Међутим, то тачно значи да је и $k = S(l) \subseteq n$, као и $k = S(l) \in \omega$ супротно избору елемента k. QED

Ова теорема показује да је појам природног броја могуће дефинисати независно од аксиоме бесконачности.

Дефиниција 3 Скуп x зовемо *коначним* ако постоји природан број n такав да важи $x \sim n$. У супротном кажемо да је скуп x *бесконачан*. У скалду са тим уводимо следећу ознаку

$$\mathrm{Fin}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists n(\mathrm{Nat}(n) \wedge n \sim x),$$

где је формула $\mathrm{Nat}(n)$ дефинисна са

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nat}(n) &\Leftrightarrow \mathrm{W}(n) \wedge (\forall x \in S(n))(\exists y \in n)\, x = S(y),\\
\mathrm{W}(n) &\Leftrightarrow \mathrm{O}(n) \wedge (\forall x \in P(n) \setminus \{\emptyset\})(\exists y \in x)(\forall z \in x \backslash \{y\}) y \in z,\\
\mathrm{O}(n) &\Leftrightarrow (\forall x \in n)(\forall y \in n)(\forall z \in n)((x \notin y \vee y \notin x) \wedge ((x \in y \wedge y \in z) \Rightarrow x \in z)).
\end{aligned}$$

Теорема 5 Скуп ω је бесконачан.

Доказ: Прво, због $\omega \neq \emptyset$ не постоји ни једна бијекција празног скупа на скуп ω. Нека је $n \in \omega$ такав да не постоји ни једна бијекција скупа n на ω. Ако би постојала бијекција f скупа $S(n)$ на ω, онда би функција

$$g = \{\langle x, y\rangle \in n \times \omega : x \in n \wedge f(x) = y \wedge f(x) \in f(n)\} \cup \{\langle x, y\rangle \in n \times \omega : x \in n \wedge f(x) = S(y) \wedge f(n) \in f(x)\}$$

била бијекција са n на ω супротно претпоставци.

Заиста, нека $x \in n$. Ако је $f(x) \in f(n)$, онда не може бити $f(n) \in f(x)$, па је $y = f(x)$ јединствени елемент такав да $\langle x, y\rangle \in g$. Ако пак $f(x) \notin f(n)$, онда мора важити $f(n) \in f(x) \vee f(n) = f(x)$. Притом је могућност $f(n) = f(x)$ искључена јер бисмо у супротном из инјективности функције f добили $n = x$, што је немогуће због $x \in n$ и $n \in \omega$. Значи, остаје само могућност $f(n) \in f(x)$ одакле је $f(x) \neq \emptyset$, па због $f(x) \in \omega$ мора бити $f(x) = S(y)$ за неко $y \in \omega$. Притом је y јединствено као максимум уређења $S(y) = f(x)$, па постоји тачно једно $y \in \omega$ за које је $\langle x, y\rangle \in g$. Наравно, по самој дефиницији скупа g је искључено да $\langle x, y\rangle \in g$ за неко y које не припада скупу ω. Дакле, g је заиста функција која слика скуп n у скуп ω.

Нека сада $y \in \omega$. Докажимо да постоји јединствено $x \in n$ такво да је $g(x) = y$. Наравно, већ по дефиницији функције g је искључено да домену припадне неки елемент који није члан скупа n. Претпоставимо да $y \in f(n)$. Тада $f(n) \notin S(y)$, па не може постојати $x \in n$ за које је $f(x) = S(y) \wedge f(n) \in f(x)$. Стога је $g(x) = y \Leftrightarrow f(x) = y$ за свако x, па пошто је f бијекција, $x = f^{-1}(y)$ ће бити једино решење једначине $g(x) = y$. Ако пак $y \notin f(n)$, онда мора бити $f(n) = y \vee f(n) \in y$, тј. $f(n) \in S(y) \neq y$, па ће за свако $x \in n$ бити $g(x) = y \Leftrightarrow f(x) = S(y)$, одакле је будући да је f бијекција, $x = f^{-1}(S(y))$ ће бити јединствено решење једначине $g(x) = y$, па је g заиста бијекција скупа n на скуп ω супротно избору елемента n. QED

Овим смо показали да из аксиоме бесконачности (уз претходно уведене аксиоме) следи егзистенција барем једног бесконачног скупа. Притом важи и обрат, али ће нам за то бити потребна наредна аксиома. Систем до сада уведених аксиома означава се са Z^-.

Аксиома замене (схема)

За сваку формулу $\varphi(x, y, \bar{z})$ следећа формула

$$\forall \bar{z}\, \forall u((\forall x \in u) \exists v\, \forall y(\varphi(x, y, \bar{z}) \Leftrightarrow y = v) \Rightarrow \exists v\, \forall y\, (y \in v \Leftrightarrow (\exists x \in u)\varphi(x, y, \bar{z})))$$

је аксиома.

Овом аксиомом се тврди да ако је формулом $\varphi(x, y, \bar{z})$ са параметрима $\bar{z}$ описана функција на скупу u у смислу класе, да је онда слика скупа u такође скуп. Систем до сада уведених аксиома обележавамо са ZF^-.

Теорема 6 (ZF^-) Аксиома бесконачности је уз остале уведене аксиоме еквивалентна са постојањем барем једног бесконачног скупа.

Доказ: Већ смо видели да из аксиоме бесконачности следи егзистенција барем једног бесконачног скупа. Докажимо обрат.

Нека је a било који бесконачан скуп. Посматрајмо скуп

$$u = \{x \in P(a) : \mathrm{Fin}(x)\}$$

Нека је $x \in u$ произвољно. Тада постоји природан број m такав да је $m \sim x$. Уколико би за још неки природан број n за који је $n \sim x$, онда би било $m \sim n$ будући да је релација $\sim$ релација еквиваленције. Но, тада би постојала бијекција f скупа m на скуп n. Будући да је $m \neq n$, скуп

$$a = \{k \in m : \neg\exists f((f : m \xrightarrow[\text{на}]{1-1} n) \wedge (\forall i \leqslant k) f(i) = i)\}$$

не би био празан. Заиста, пошто је $m \neq n$ и $m \sim n$ скуп m не може бити празан. Али онда због $m \in S(m)$ мора постојати неко $l \in m$ такво да је $m = S(l)$. Тада би l био највећи елемент уређења m, па пошто је $m \neq n$ морало би бити $l \in a$, одакле коначно закључујемо да скуп a мора бити непразан.

Но, како је m добро уређен и a је његив непразан поскуп, постојаће најмањи елемент k скупа a. Притом k не може бити празан скуп, будући да због $m \sim n$ постоји бијекција g скупа m на скуп $n \neq m$, па ће

$$f = (g \setminus \{\langle\emptyset, g(\emptyset)\rangle, \langle g^{-1}(\emptyset), \emptyset\rangle\}) \cup \{\langle\emptyset, \emptyset\rangle, \langle g^{-1}(\emptyset), g(\emptyset)\rangle\}$$

бити бијекција скупа m на скуп n за који важи $f(\emptyset) = \emptyset$.

Пошто је $k \neq \emptyset$ и $k \in m \subseteq S(m)$, постојаће $l \in m$такво да је $k = S(l)$. Наравно, тада је $l \in l \cup \{l\} = k$, па по минималности елемента k елемент l не може припадати скупу a. Стога постоји бијекција $g : m \longrightarrow n$ таква да важи $g(i) = i$ за све $i \leqslant l$, тј. за све елементе скупа $l \cup \{l\} = k$, односно за све $i \in k$. Међутим, тада је

$$f = (g \setminus \{\langle k, g(k)\rangle, \langle g^{-1}(k), k\rangle\}) \cup \{\langle k, k\rangle, \langle g^{-1}(k), g(k)\rangle\}$$

бијекција скупа m на скуп n за коју важи $f(i) = i$ за све $i \leqslant k$ супротно избору елемента k.

Отуда за свако $x \in u$ постоји јединствен природан број y за који је $x \sim y$, па по схеми замене постоји скуп N свих природних бројева који су еквипотентни бар једном коначном подскупу скупа u. Докажимо да је он индуктиван.

Заиста, како је $\emptyset$ коначан подскуп од u и притом је природан број, биће $\emptyset \in N$. Нека је сада $n \in N$ произвољно. Тада постоји коначан $x \subseteq u$ такав да је $x \sim n$. Међутим, пошто је u бесконачан, не може бити $x = u$, па је $x \subsetneq u$, одакле постоји неко $c \in u \setminus x$. Но, тада је за произвољну бијекцију f скупа n на скуп x функција

$$g = f \cup \{\langle n, c\rangle\}$$

једна бијекција скупа $n \cup \{n\} = S(n)$ на скуп $x \cup \{c\} \subseteq N$, одакле $S(n) \in N$, па је скуп N заиста индуктиван. QED

Схема сепарације и схема замене имају по бесконачно много аксиома инстанци. Због тога је систем аксиома који изучавамо бесконачан. Као што ћемо видети, уз остале аксиоме теорије скупова се схема сепарације може свести на коначан број њених инстанци, али схема замене не може. Прецизније, систем аксиома који изучавамо нема коначну аксиоматизацију.

Следећа аксиома је дуго била најконтроверзнија аксиома теорије скупова и најконтроверзнији математички принцип.

Аксиома избора

$$\forall a \exists f(\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = P(a) \setminus \{\emptyset\} \wedge (\forall x \in \mathrm{dom}(f)) f(x) \in x).$$

Ова аксиома тврди да за ма који скуп x постоји функција f која из сваког од непразних подскупова скупа x један елемент. Због тога је зовемо и једном *изборном функцијом* скупа x. Када је скуп x бесконачан, најчешће није могуће дати правило по коме би се из сваког елемента скупа x изабрао по један елемент. Другим речима, овај принцип је тзв. неконструктивне природе. То је био и главни разлог контроверзности овог принципа. Аксиому избора означаваћемо са AC, а систем до сада уведених аксиома са ZFC^-. Систем до сада уведених аксиома изузев схеме замене обележавамо са ZC^-.

Теорема 7 (Z^-) Аксиома избора је еквивалентна са било којим од следећих исказа:

а) За сваки скуп a за који $\emptyset \notin a$ постоји функција $f : a \longrightarrow \bigcup a$ таква да за свако $x \in a$ важи $f(x) \in x$.

б) За сваку функцију f за коју је $f(x) \neq \emptyset$ за свако $x \in I$ где I означава домен функције f, важи

$$\prod_{i \in I} f(i) \neq \emptyset$$

Доказ: Доказаћемо следећи импликацијски низ

$$\mathrm{AC} \;\Rightarrow\; a) \Rightarrow\; б) \Rightarrow\; \mathrm{AC}$$

AC $\Rightarrow$ *а*) Уочимо скуп $b = \bigcup a$ и функцију $g : P(b) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow b$ такву да важи $g(x) \in x$ за све x из домена од g. Тада за $f = g|_a$ важи $f : a \longrightarrow \bigcup a$ и $f(x) \in x$ за све x из домена од f.

а) $\Rightarrow$ *б*) Нека је f таква функција са доменом I за коју је $f(i) \neq \emptyset$ за све $i \in I$. Тада $\emptyset \notin \mathrm{ran}(f)$, па можемо уочити функцију g са доменом $\mathrm{ran}(f)$ за коју важи $g(x) \in x$ за све $x \in \mathrm{ran}(f)$. Но, тада је $g \circ f \in \prod_{i \in I} f(i)$.

б) $\Rightarrow$ AC Нека је a произвољан скуп и $S = P(a) \setminus \{\emptyset\}$. Тада је $\prod_{x \in S} x \neq \emptyset$, па можемо изабрати неко $f \in \prod_{x \in S} x$. Но, тада је f тражена функција. QED

Теорема 8 (Z^-) Из аксиоме избора следи да за сваки скуп непразних међусобно дисјунктних скупова постоји скуп који са сваким елементом тог скупа има тачно један заједнички елемент. Уз аксиому замене важи и обрат.

Доказ: Нека важи AC и нека је a скуп такав да

$$\emptyset \notin a \land (\forall x \in a)(\forall y \in a)(x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset).$$

Према претходној теореми можемо изабрати функцију f чији је домен a, тако да $f(x) \in x$ за свако $x \in a$. Сада је $f[a]$ тражени скуп који са сваким елементом скупа a има по тачно један заједнички елемент. Претпоставимо сада да важи аксиома замене и да за сваки скуп a чији су елементи непразни међусобно дисјунктни скупови постоји скуп који са сваким од елемената скупа a има по тачно један заједнички елемент. Нека је a било који скуп. Тада је по аксиоми замене класа $b = \{\{x\} \times x : x \in P(a) \setminus \{\emptyset\}\}$ скуп. Штавише, елементи тог скупа су непразни и међусобно дисјунктни, па постоји скуп c који са сваким елементом скупа b има по тачно један заједнички елемент. Но, тада је $f = c \cap \bigcup b$ тражена функција. QED

Навешћемо касније још неке важне еквиваленте аксиоме избора, а сада ћемо увести последњу аксиому система који проучавамо.

Аксиома регуларности

$$\forall x(\exists y\, y \in x \;\Rightarrow (\exists y \in x)(\forall z \in x) z \notin y)$$

Дословно, ова аксиома тврди да је сваки непразан скуп дисјунктан са бар једним својим елементом. Међутим, за разлику од осталих аксиома, ова и не делује као неко "очигледно" својство скупова. Стога је неопходно продискутовати је. Притом ћемо теорије које се добијају проширивањем теорија Z^-, ZF^-, ZC^- и ZFC^- аксиомом регуларности обележавати са Z, ZF, ZC и ZFC тим редом.

Став 1 (Z) Не постоји нити један скуп који припада самом себи.

Доказ: Нека $a \in a$. Тада за скуп $b = \{a\}$ важи да је непразан, да му је a једини члан, али да са њим није дисјунктан јер $a \in a \cap b$, што противречи аксиоми регуларности. QED

Став 2 За ма који природан број $n > 1$

$$\mathrm{Z} \vdash \neg \exists x_1 \cdots \exists x_n (x_1 \in x_2 \land \cdots \land x_{n-1} \in x_n \land x_n \in x_1).$$

Доказ: претпоставимо супротно, да за неке $x_1, \ldots, x_n$ важи $x_1 \in x_2 \land \cdots \land x_{n-1} \in x_n \land x_n \in x_1$. Посматрајмо скуп $b = \{x_1, \ldots, x_n\}$. За њега се лако утврђује да је непразан, као и да није дисјунктан нити са једним својим елементом. Наиме, $x_{i-1} \in b \cap x_i$ за $i > 1$, односно $x_n \in b \cap x_1$. QED

Теорема 9 (Z) Не постоји функција f са доменом ω таква да за све $n \in \omega$ важи $f(S(n)) \in f(n)$.

Доказ: Претпоставимо да таква функција постоји. Тада за $b = \mathrm{ran}(f)$ важи да за свако $x \in b$ постоји $n \in \omega$ такво да је $x = f(n)$. Но, тада $f(S(n)) \in b \cap x$. QED

Напомена 1 Уколико се дозволи да функција f буде класа, онда је неопходно користити и схему замене, јер у моделима теорије ZC могу постојати функције са доменом ω које нису скупови већ праве класе. Овде је заправо било претпостављено да је функција f скуп. У случју да је f класа доказ би био врло сличан, са јединoм разликом што би се постојање скупа $\mathrm{ran}(f)$ образложило аксиомом замене.

Претходни став заправо тврди да не постоје "бесконачне $\in$-регресије". Као што ћемо видети, аксиома регуларности је у систему Z^- еквивалентна са исказом претходне теореме. Притом се теорија ZFC^- обично сматра формализацијом такозване *наивне* теорије скупова.

1.2 Теореме рекурзије

У овом одељку ћемо под релацијом подразумевати класу, и то уређених парова (бинарну релацију) ако се не нагласи другачије.

Став 3 (Z^-) За ма коју релацију $E \subseteq V \times V$, која може бити и класа, и за ма коју класу X постоји најмања класа T таква да је $X \subseteq T$ и да за за ма које y, z важи $yEz \wedge z \in T \Rightarrow y \in T$. Притом, ако је за ма које x класа $\{y : yEx\}$ скуп, онда је уз аксиому замене T скуп ако и само ако је X скуп.

Доказ: Посматрајмо функцију

$$f(x) = \begin{cases} \text{најмањи } n \in \omega \text{ тд. } & \exists g(\mathrm{Fun}(g) \wedge \mathrm{dom}(g) = S(n) \wedge g(0) \in X \wedge (\forall i \in n)\langle g(S(i)), g(i)\rangle \in E \wedge g(n) = x) \\ & \text{ако такво } n \text{ постоји,} \\ \omega & \text{иначе.} \end{cases}$$

Није тешко показати да је $T = \{x : f(x) \in \omega\}$ тражена класа. Уколико је X скуп и ако је класа $\{y : yEx\}$ скуп за све x, онда се најпре индукцијом уз коришћење аксиоме замене и аксиоме уније доказује да је за свако $n \in \omega$ класа $\{x : f(x) = n\}$ скуп, а потом поново примењујући аксиому замене да је и T скуп. Са друге стране, на основу аксиоме сепарације је јасно да ако је T скуп, онда и класа $X \subseteq T$ мора такође бити скуп. QED

Уз симболику из претходног става класу T ћемо звати *затворењем* класе X за релацију E. Само затворење класе X зе релацију E означаваћемо са $Ec(X)$. Ако је притом $X = T$, рећи ћемо да је класа X *затворена* за релацију E. Такође, за произвољну релацију E уводимо њено *транзитивно затворење* E^T са $xE^Ty \Leftrightarrow x \in Ec(E_y)$. Ту је $E_y = \{x : xEy\}$.

Став 4 (Z^-) Транзитивно затворење релације E је најмања транзитивна релација таква да је E њена подрелација.

Доказ: Нека је xE^Ty и yE^Tz. Тада по дефиницији $x \in Ec(E_y)$ и $y \in Ec(E_z)$. Због $y \in Ec(E_z)$ за ма који $u \in E_y$ услед затворености класе $Ec(E_z)$ за релацију E мора да важи $u \in Ec(E_z)$. То управо значи да је $E_y \subseteq Ec(E_z)$, одакле ће поново на основу затворености класе $Ec(E_z)$ за релацију E бити $Ec(E_y) \subseteq Ec(E_z)$. Но, тада ће због $x \in Ec(E_y)$ важити $x \in Ec(E_z)$ то јест xE^Tz. Тиме смо доказали да је релација E^T транзитивна.

Нека је E' било која транзитивна релација за коју је $E \subseteq E'$. Докажимо да је $E^T \subseteq E$. За x и y је xE^Ty по дефиницији еквивалентно са $x \in Ec(E_y)$, што је према конструкцији класе $Ec(E_y)$ еквивалентно са постојањем природног броја n и функције f са доменом $S(n)$ за коју важи $f(\emptyset) \in E_y$, $f(n) = x$ и $f(S(i))Ef(i)$ за све $i \in \mathrm{dom}(f)$. Доказ да за све x, y за које важи xE^Ty важи и $xE'y$ извешћемо индукцијом по најмањем природном броју n за који постоји таква функција.

Уколико је $n = 0$, онда важи $x = f(\emptyset)Ey$, одакле је $xE'y$ јер је E подрелација од E'. Ако је $n \neq \emptyset$, онда постоји $m \in \omega$ за који је $n = S(m)$, па ће по индуктивној претпоставци због $f(m)E^Ty$ бити $f(m)E'y$. Али, према $x = f(n) = f(S(m))Ef(m)$ ће бити $xE'f(m)$ будући да је E подрелација од E', одакле коначно на основу транзитивности релације E' закључујемо да важи $xE'y$. QED

Дефиниција 4 Релацију $E \subseteq V \times V$ (у смислу класе) зваћемо *добро заснованом* ако *а*) свака непразна класа има E-минимални елемент, тј. такав елемент x за који не постоји елемент y из те класе за који би било yEx и

б) за свако x класа $\{y : yEx\}$ је скуп.

Добру заснованост релације E обележаваћемо са $\mathrm{WF}(E)$. Такође, класу X зваћемо добро заснованом ако је релација $\in_X = \{\langle x, y\rangle : x \in X \wedge y \in X \wedge x \in y\}$ добро заснована. Класу $\{y : yEx\}$ означаваћемо са E_x.

Приметимо најпре да су у случају аксиоме регуларности све класе добро засноване. Најважнији примери добро заснованих релација су добра уређења на класама, као и у случају аксиоме регуларности рестрикција $\in_X = \{\langle x, y\rangle : x \in X \wedge y \in X \wedge x \in y\}$ релације $\in$ на било коју класу X. Такође, затворење произвољног скупа за добро засновану релацију је уз аксиому замене скуп.

Лема 7 (Z^-) За ма коју релацију E и ма који скуп x важи $Ec(E_x) = \bigcup_{uEx} Ec(\{u\})$.

Доказ:
Докажимо најпре да је десна страна једнакости затворена за релацију E. Нека је yEz и нека је $z \in Ec(\{u\})$ за неко u за које је uEx. Будући да је класа $Ec(\{x\})$ затворена за релацију E, одмах добијамо да је $y \in Ec(\{u\})$, а самим тим и $y \in \bigcup_{uEx} Ec(\{u\})$. Одатле је класа $\bigcup_{uEx} Ec(\{u\})$ заиста затворена за релацију E. Будући да је $E_x \subseteq \bigcup_{uEx} Ec(\{u\})$, одатле следи да је и $Ec(E_x) \subseteq \bigcup_{uEx} Ec(\{u\})$.

Са друге стране, из $\{u\} \subseteq E_x \subseteq Ec(E_x)$ за uEx и из затворености класе $Ec(E_x)$ за релацију E следи да је $Ec(\{u\} \subseteq Ec(E_x)$ за свако u за које је uEx, а самим тим и $\bigcup_{uEx} Ec(\{u\}) \subseteq Ec(E_x)$, чиме је тврђење у потпуности доказано. QED

Лема 8 (Z^-) Нека је E било која релација. Ако свака непразна класа има E-минимални елемент, онда свака непразна класа има и E^T-минимални елемент. Такође, ако је E добро заснована релација, уз аксиому замене је и релација E^T добро заснована.

Доказ: Нека је X произвољна класа. Докажимо формулу

$$(\forall x)(\forall y \in X \cap Ec(E_x))(X \cap Ec(E_y) \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z \in X \cap Ec(y))X \cap Ec(z) = \emptyset).$$

Претпоставимо супротно. Тада бисмо имали E-минимални елемент x класе X за који постоји $y \in Ec(E_x)$ такав да $y \in X$, да је $X \cap Ec(E_y) \neq \emptyset$ и тако да је $X \cap Ec(E_z) \neq \emptyset$ за ма које $z \in X \cap Ec(E_y)$. Нека је y неки од таквих E-минимлних елемената. Будући да

$$y \in Ec(E_x) = \bigcup_{uEx} Ec(\{u\})$$

постојаће неки u такав да uEx и да важи $y \in Ec(\{u\})$. Ту не може бити $y \in Ec(E_u)$ јер би то противречило избору елемента x. Дакле, остаје само могућност да је $y = u$. Но, тада из uEx и начина на који је x изабран следи да

$$(\forall v \in X \cap Ec(E_y))(X \cap Ec(E_v) \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z \in X \cap Ec(E_v))X \cap Ec(E_z) = \emptyset).$$

Међутим, будући да је $X \cap Ec(E_v) \neq \emptyset$ за свако $v \in X \cap Ec(E_y)$, имаћемо заправо да важи

$$(\forall v \in X \cap Ec(E_y))(\exists z \in X \cap Ec(E_v))X \cap Ec(E_z) = \emptyset.$$

Изаберимо $v \in Ec(E_y)$ произвољно и $z \in X \cap Ec(E_v)$ такво да важи $X \cap Ec(E_z) = \emptyset$. Но тада важи zE^Tv и vE^Ty, одакле је zE^Ty на основу транзитивности релације E^T. Међутим, према избору елемента y због $z \in Ec(E_y)$ мора бити $X \cap Ec(E_z) \neq \emptyset$, што противречи избору елемента z. Тиме је полазна формула доказана.

Ако је класа X непразна, онда можемо уочити неко $x \in X$. Уколико је $X \cap Ec(E_x) = \emptyset$, онда је x један E^T-минималан елемент класе E^T. У супротном можемо изабрати неко $y \in X \cap Ec(E_x)$. Ако је $X \cap Ec(E_y) = \emptyset$, онда је y један E^T-минималан елемент класе X. Најзад, ако је и $X \cap Ec(E_y) \neq \emptyset$, онда по управо доказаној формули мора постојати неко $z \in X \cap Ec(E_y)$ такво да важи $X \cap Ec(E_z)$ и у том случају је z један E^T-минималан елемент.

Остало је да докажемо да је E_x^T скуп за сваки скуп x када је E добро заснована релација у случају да важи аксиома замене. То следи директно из једнакости $E_x^T = Ec(E_x)$ која је последица следећег еквиваленцијског низа

$$y \in E_x^T \Leftrightarrow yE^Tx \Leftrightarrow y \in Ec(E_x).$$

QED

Теорема 10 (Z^-) Нека је E добро заснована релација, D било која класа затворена за релацију E и R било која класа. Претпоставимо још да важи аксиома замене или да је R скуп. Означимо са Φ класу свих парова $\langle x, f\rangle$ где је x подскуп од D, а f функција са доменом E^T_x и сликом садржаном у R. Тада за ма коју функцију $G : \Phi \longrightarrow R$ постоји тачно једна функција F дефинисана на D таква да за свако $x \in D$ важи $F(x) = G(x, F|_{E^T_x})$. Наравно, ту је $F|_{E^T_x}$ ознака за рестрикцију функције F на скуп E^T_x, која је по аксиоми замене скуп ако важи аксиома замене, односно на основу аксиоме сепарације ако је R скуп, будући да је $F|_{E^T_x} \subseteq (E^T_x) \times R$. Притом ће важити $F(x) \in R$ за свако $x \in D$. Такође, функција F ће бити скуп ако и само ако је D скуп.

Доказ: Приметимо најпре да за сваку класу $X \subseteq D$ која је затворена за релацију E постоји највише једна функција g са доменом X за коју је $g(x) = G(g|_{E^T_x})$ за све $x \in X$. Наиме у супротном бисмо имали бар две такве функције g и g' и E^T-минималан елемент x за који је $g(x) \neq g'(x)$, што би било у супротности са

$$g(x) = G(x, g|_{E^T_x}) = G(x, g'|_{E^T_x}) = g'(x).$$

Такође, за ма које y, z за које је zE^Ty мора да важи $E^T_z \subseteq E^T_y$ због транзитивности релације E^T. Посматрајмо класу

$$C = \{x \in D : \exists h \forall g (g = h \Leftrightarrow \mathrm{Fun}(g) \wedge \mathrm{dom}(g) = E^T_x \wedge (\forall y \in E^T_x) g(y) = G(y, g|_{E^T_y}))\}.$$

Јасно је да постоји функција H са доменом C која сваком $x \in C$ придружује јединствену функцију g са доменом E^T_x за коју је $g(y) = G(y, g|_{E^T_y})$ за свако $y \in \mathrm{dom}(g)$. Нека $x \in C$ и нека је yE^Tx. Тада $y \in \mathrm{dom}(H(x))$. Међутим, тада ће због $E^T_y \subseteq E^T_x = \mathrm{dom}(H(x))$ за свако $z \in E^T_y$ бити $z \in \mathrm{dom}(H(x))$, а по дефиницији функције $H(x)$ ће важити $H(x)(z) = G(z, H(x)|_{E^T_z})$, па на основу јединствености функције g са доменом E^T_y за коју важи $g(z) = G(z, g|_{E^T_z})$ за све $z \in E^T_y$, мора бити $y \in C$ и $H(y) = H(x)|_{E^T_y}$. Посебно, класа C је затворена за релацију E^T.

Но, тада ће са $F(x) = G(x, H(x))$ бити дефинисана једна функција са доменом C за коју је $H(x) = F|_{E^T_x}$ за свако $x \in C$. Заиста, будући да из $x \in C$ следи да је $E^T_x \subseteq C$, функције $H(x)$ и $F|_{E^T_x}$ имају исти домен, и за произвољно $y \in E^T_x$ важи

$$F|_{E^T_x}(y) = F(y) = G(y, H(y)) = G(y, (H(x))|_{E^T_y}) = H(x)(y).$$

Стога важи и

$$F(x) = G(x, H(x)) = G(x, F|_{E^T_x}),$$

Наравно, из једнакости $F(x) = G(x, H(x))$ следи да је $F(x) \in R$ за свако $x \in C$. Докажимо сада да је $C = D$. У супротном бисмо имали E^T-минималан елемент x класе $D \setminus C$. Но, тада би функција $g = F|_{E^T_x}$ била скуп зато што важи аксиома замене или да је R скуп. Штавише, то би била јединствена функција дефинисана на скупу E^T_x за коју за свако $y \in E^T_x$ важи $g(y) = G(y, g|_{E^T_y})$, одакле би било $x \in C$ супротно претпоставци. Функција F наравно не може бити скуп ако јој је домен права класа. Али у случају да је D скуп, и функција F ће бити скуп или по аксиоми замене, ако она важи, или према аксиоми сепарације ако је R скуп због $F \subseteq D \times R$. Тиме је теорема у потпуности доказана. QED

Теорема 11 (Z^-) Нека је E добро заснована релација и D било која класа затворена за E. Означимо са T класу свих парова $\langle x, y\rangle$ где су x, y произвољни елементи такви да $x \in D$ и да је $y \subseteq E^T_x$. Тада за ма коју релацију $R \subseteq T$ постоји тачно једна релација $P \subseteq D$ таква да важи $P = \{x \in D : R(x, P \cap E^T_x)\}$. Такође, Релација P ће бити скуп у случају да је D скуп.

Доказ: Нека је $b = \{a, b\}$ за неке међусобно различите a и b. Нека је са

$$G(x, f) = \begin{cases} a & \text{за } R(x, f^{-1}[\{a\}]), \\ b & \text{иначе}, \end{cases}$$

дефинисана једна функција на скупу свих парова $\langle x, f\rangle$ за које је $x \in D$ и $f : E^T_x \longrightarrow b$. Тада према претходној теореми постоји јединствена функција F на скупу D за коју важи $F(x) = G(x, F|_{E^T})$, што је еквивалентно са постојањем тачно једне релације $P \subseteq D$ за коју је $P = \{x \in D : R(x, P \cap E^T_x)\}$. Одговарајућа релација је $P = F^{-1}[\{a\}]$. Будући да је $P \subseteq D$, јасно је да је P скуп у случају да је D скуп. QED

Дефиниција 5 Класу X ћемо звати *транзитивном* ако је добро заснована и ако је испуњен било који од следећих еквивалентних услова:

а) класа X је затворена за релацију $\in = \{\langle x, y\rangle : x \in y\}$,

б) за ма које $y \in X$ важи $y \subseteq X$,

У том случају ћемо писати $\mathrm{tr}(X)$. Ако је класа X скуп, онда се услови *а*), *б*) могу записати и као $\bigcup X \subseteq X$.

Лема 9 (ZF$^-$) За сваку класу X постоји најмања класа T за коју је $X \subseteq T$ и за коју $x \in y \wedge y \in T \Rightarrow x \in T$. Притом је T скуп ако и само ако је X скуп. Такође, класа T је добро заснована ако и само ако је класа X добро заснована, и у том случају је класа T транзитивна.

Доказ: Ова лема је непосредна последица става 3. QED

Уз симболику из претходне леме класу T ћемо звати *транзитивним затворењем* класе X у ознаци $\mathrm{tc}(X)$. Притом је наравно, $tc(X) = \in_X^T$. Будући да је на свакој добро заснованој класи X релација припадања $\in_X$ добро заснована, претходне две теореме можемо формулисати у том посебном случају.

Теорема 12 (Z$^-$) Нека је X добро заснована класа и R било која класа. Претпоставимо да важи аксиома замене или да је R скуп. Означимо са Φ класу свих парова $\langle x, f\rangle$ где је x подскуп од X, а f функција са доменом $tc(x) \cap X$ и сликом садржаном у R. Тада за ма коју функцију $G : \Phi \longrightarrow R$ постоји тачно једна функција F дефинисана на Xтаква да за свако $x \in X$ важи $F(x) = G(x, F|_{tc(x)\cap X})$. Наравно, ту је $F|_{tc(x)}\cap X$ ознака за рестрикцију функције F на скуп $tc(x) \cap X$, која је по аксиоми замене скуп ако важи аксиома замене, односно на основу аксиоме сепарације ако је R скуп, будући да је $F|_{tc(x)\cap X} \subseteq (tc(x) \cap X) \times R$. Притом ће важити $F(x) \in R$ за свако $x \in X$. Такође, функција F ће бити скуп ако и само ако је X скуп.

Теорема 13 (Z$^-$) Нека је X добро заснована класа. Означимо са T класу свих парова $\langle x, y\rangle$ где су x, y произвољни елементи такви да $x \in X$ и да је $y \subseteq tc(x)$. Тада за ма коју релацију $R \subseteq T$ постоји тачно једна релација $P \subseteq X$ таква да важи $P = \{x \in X : R(x, P \cap tc(x))\}$. Такође, Релација P ће бити скуп у случају да је X скуп.

У случају да важи аксиома регуларности, свака је класа добро заснована, па у претходним двема теоремама можемо испустити претпоставку о доброј засновaности класе X, али онда ће искази теорема бити доказиви у систему аксиома Z. Најзад, ако је $<$ релација стриктног доброг уређења на некој класи, онда је она добро заснована, па теореме добијају следећи облик

Теорема 14 (Z$^-$) Нека је X добро уређена класа релацијом $<$ строгог поретка и R било која класа. Претпоставимо да важи аксиома замене или да је R скуп. Означимо са Φ класу свих парова $\langle x, f\rangle$ где је x елемент од X, а f функција са доменом $[0, x)$ и сликом садржаном у R. Тада за ма коју функцију G дефинисану на Φ постоји тачно једна функција F дефинисана на X таква да за свако $x \in X$ важи $F(x) = G(x, F|_{[0,x)})$. Наравно, ту је $F|_{[0,x)}$ ознака за рестрикцију функције F на скуп $[0, x)$, која је по аксиоми замене скуп ако важи аксиома замене, односно на основу аксиоме сепарације ако је R скуп, будући да је $F|_{[0,x)} \subseteq [0, x) \times R$. Притом ће важити $F(x) \in R$ за свако $x \in X$. Такође, функција F ће бити скуп ако и само ако је X скуп.

Теорема 15 (Z$^-$) Нека је X добро уређена класа релацијом $<$. Означимо са T класу свих парова $\langle x, y\rangle$ где су x, y произвољни елементи такви да $x \in X$ и да је $y \subseteq [0, x)$. Тада за ма коју релацију $R \subseteq T$ постоји тачно једна релација $P \subseteq X$ таква да важи $P = \{x \in X : R(x, P \cap [0, x)\}$. Такође, Релација P ће бити скуп у случају да је X скуп.

1.3 Слабији облици и еквиваленти аксиоме избора

Аксиома избора је теорема већ система Z$^-$ за случај коначних фамилија скупова. Прецизније, важи следећа теорема.

Теорема 16 За сваку релацију E (која може бити и класа) формула

$$\forall x(\mathrm{Fin}(x) \wedge (\forall y \in x)\exists z\, yEz \;\Rightarrow \exists f(\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = x \wedge (\forall y \in x) yEf(y))$$

је теорема система Z$^-$.

Доказ: Индукцијом по n доказаћемо да за ма који коначан скуп x такав да постоји бијекција скупа n на скуп x и да за свако $y \in x$ постоји z такво да је yEz, постоји функција f са доменом x таква да за свако $y \in x$ важи $yEf(y)$. Заиста, за $n = \emptyset$ функција $f = \emptyset$ очигледно испуњава тражене услове. Нека је $n \in \omega$ такав да претходни исказ важи. Претпоставимо сада да је x такав скуп да постоји $r : S(n) \xrightarrow[\text{на}]{1-1} x$ и такав да за свако $y \in x$ постоји z такво да важи yEz. Будући да $r|_n : n \xrightarrow[\text{на}]{1-1} x \setminus \{r(n)\}$, постојаће функција g са доменом $x \setminus \{r(n)\}$ таква да за свако $y \in \mathrm{dom}(g)$ важи $yEg(y)$. Тада функција $f = g \cup \{\langle r(n), z\rangle\}$ испуњава тражене услове за z изабрано тако да важи $r(n)Ez$. QED

За проблематику из овог одељка требаће нам следеће леме.

Лема 10 (Z^-) Нека је E релација парцијалног уређења на некој класи Y и F функција дефинисана на некој класи X. Тада за ма који непразан коначан скуп $x \subseteq X$ постоји $a \in x$ такво да је $F(a)$ максималан (минималан) елемент слике скупа x при пресликавању F. Посебно, ако је E линеарно уређење, онда постоји највећи (најмањи) елемент слике скупа x при пресликавању F.

Доказ: Доказ изводимо индукцијом по $n \in \omega$ за који постоји бијекција скупа n на скуп x. За $n = \emptyset$ скуп x не може бити непразан, па је тврђење аутомацки испуњено. Претпоставимо сада да је $n \in \omega$ такав да тражени исказ важи. Претпоставимо да је скуп $x \subseteq X$ такав да постоји бијекција скупа $S(n)$ на скуп x и нека је f једна таква бијекција. Ако је $n = \emptyset$, онда је $f(\emptyset)$ једини елемент скупа x, тако да елемент $F(f(\emptyset))$ задовољава тражене услове. Ако је $n \neq \emptyset$ онда по индуктивној претпоставвци постоји максималан (минималан) елемент m слике скупа $x \setminus \{f(n)\}$. Уколико је $F(f(n))$ веће (мање) од m, онда ће тражени елемент бити $F(f(n))$, а иначе m. QED

Лема 11 (Z^-) Слика коначног скупа при функцији (која може бити и класа) је коначан скуп.

Доказ: Овде ћемо подразумевати да је x увек подскуп домена функције F. Индукцијом по $n \in \omega$ доказаћемо да за ма коју функцију F и скуп x такав да постоји бијекција скупа n на скуп x слика скупа x мора бити коначна. Заиста, ако је $n = \emptyset$ онда је и $x = \emptyset$, одакле је и слика скупа x празан скуп, који је свакако коначан. Са друге стране, ако је $n \in \omega$ такав да тражени исказ важи, и $f : S(n) \longrightarrow x$, онда је слика a скупа $x \setminus \{f(n)\}$ коначна па постоје $m \in \omega$ и $f : m \xrightarrow[\text{на}]{1-1} a$, онда је и $g = f \cup \{\langle m, F(f(n))\rangle\}$ бијекција скупа $S(m)$ на слику скупа x при пресликавању F. QED

Лема 12 (Z^-) Унија коначног скупа коначних скупова је коначан скуп.

Доказ: Докажимо најпре да је унија два коначна скупа коначна. Индукцијом по n доказћемо да је $a \cup b$ коначан скуп када од су a и b коначни скупови такви да постоји бијекција између b и n. Заиста, у случају да је $n = \emptyset$ било би $b = \emptyset$, па би $a \cup b$ био коначан скуп јер је a коначан скуп и важи $a \cup b = a$. Претпоставимо сада да је $n \in \omega$ такав да је $a \cup b$ коначан скуп кад год су a и b коначни и притом постоји бијакција скупа n на скуп b. Нека су a и b ма који коначни скупови такви да постоји бијекција $f : S(n) \longrightarrow b$. Тада $f|_n : n \longrightarrow b \setminus \{f(n)\}$, па је $a \cup (b \setminus \{f(n)\})$ коначан скуп. Уколико $f(n) \in a$, важиће $a \cup b = a \cup (b \setminus \{f(n)\})$, одакле ће $a \cup b$ бити коначан. Уколико $f(n) \notin a$ уочимо $m \in \omega$ и $g : m \xrightarrow[\text{на}]{1-1} a \cup (b \setminus \{f(n)\})$. Али тада

$$g \cup \{\langle m, f(n)\rangle\} : S(m) \longrightarrow a \cup b,$$

одакле је скуп $a \cup b$ коначан. Тиме је доказано да је унија два коначна скупа коначан скуп.

Докажимо сада индукцијом по $n \in \omega$ да је унија скупа a коначних скупова коначан скуп кад год постоји $f : n \xrightarrow[\text{на}]{1-1} a$. Заиста, када је $n = \emptyset$ биће $a = \emptyset$, а самим тим и $\bigcup a = \emptyset$, што је свакако коначан скуп. Нека је $n \in \omega$ такав да је за сваки коначан скуп a коначних скупова за који постоји бијекција скупа n на скуп a скуп $\bigcup a$ коначан и уочимо коначан скуп c коначних скупова такав да постоји $f : S(n) \xrightarrow[\text{на}]{1-1} c$. Но, тада је $f|_n : n \xrightarrow[\text{на}]{1-1} c \setminus \{f(n)\}$, па је скуп $\bigcup(c \setminus \{f(n)\})$ коначан. Међутим, тада је и скуп $\bigcup c = f(n) \cup \bigcup(c \setminus \{f(n)\})$ такође коначан као унија два коначна скупа. QED

Наведимо неке важне еквиваленте аксиоме избора

Теорема 17 (Z^-) Следећа тврђења су еквиваленти аксиоме избора:

а) (Хаусдорфов принцип максималности) У било ком парцијалном уређењу сваки ланац се може проширити до маскималног ланца. Посебно, будући да је $\emptyset$ увек ланац, свако парцијално уређење има максималан ланац.

б) (Зорнова лема) У сваком (непразном) парцијалном уређењу у којем сваки максималан ланац има мајоранту за сваки елемент тог парциајлног уређења постоји максималан елемент који је већи до једнак од тог елемента. Посебно, у таквом парцијалном уређењу увек постоји максималан елемент.

в) (Такијева лема) Нека је x било који скуп и $\mathcal{F} \subseteq P(x)$ тако да за сваки $y \subseteq x$ важи да $y \in \mathcal{F}$ ако и само ако сви коначни подскупови од y припадају $\mathcal{F}$. Тада скуп $\mathcal{F}$ има у смислу инклузије максималан елемент.

г) (Цермелов принцип доброг уређења) Сваки скуп се може добро уредити.

Доказ: Доказаћемо импликацијски низ

$$\mathrm{AC} \Rightarrow a) \Rightarrow б) \Rightarrow в) \Rightarrow г) \Rightarrow \mathrm{AC}.$$

AC $\Rightarrow$ *a*) Нека је $(A, \leqslant)$ парцијално уређен скуп и T било који ланац тог уређења. Са Λ означимо скуп свих ланаца λ тог уређења за које је $T \subseteq \lambda$, а са α било коју функцију која пресликава скуп $P(A) \setminus \{\emptyset\}$ у скуп A такву да $\alpha(x) \in x$ за свако $x \in \mathrm{dom}(f)$. Са Γ означимо функцију која слика скуп Λ у скуп $P(A)$ дату са

$$\Gamma(\lambda) = \{x \in A : \lambda \cup \{x\} \in \Lambda\}.$$

Приметимо да је ланац $\lambda \in \Lambda$ максималан ако и само ако је $\Gamma(\lambda) = \emptyset$. Уочимо још функцију $s : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ дефинисану са

$$s(\lambda) = \begin{cases} \lambda \cup \{\alpha(\Gamma(\lambda))\} & \text{за } \Gamma(\lambda) \neq \emptyset, \\ \lambda & \text{за } \Gamma(\lambda) = \emptyset. \end{cases}$$

Одмах се види да је ланац $\lambda \in \Lambda$ максималан ако и само ако је $s(\lambda) = \lambda$, као и да је у супротном скуп $s(\lambda) \setminus \lambda$ једночлан. Нека је $\mathfrak{D}$ скуп свих $D \subseteq \Lambda$ који имају следеће особине:

1. $T \in D$,
2. $(\forall \lambda \in \Lambda)(\lambda \in D \Rightarrow s(\lambda) \in D)$,
3. $\forall S(S \subseteq D \wedge (\forall \lambda \in S)(\forall \lambda' \in S)(\lambda \subseteq \lambda' \vee \lambda' \subseteq \lambda) \Rightarrow \bigcap S \in D)$.

Скуп $\mathfrak{D}$ је непразан зато што $\Lambda \in \mathfrak{D}$, па можемо уочити његов пресек D. Лако се проверава да $D \in \mathfrak{D}$. Стога је D у смилу инклузијског поретка најмањи елемент скупа $\mathfrak{D}$. Докажимо да је скуп D линеарно уређен инклузијским поретком. Уочимо скуп

$$L = \{\lambda \in D : (\forall \lambda' \in D)(\lambda \subseteq \lambda' \vee \lambda' \subseteq \lambda)\}.$$

Јасно је да је $L \subseteq D$. Уколико докажемо да $L \in \mathfrak{D}$ биће $L = D$ будући да је D инклузијски минимум скупа $\mathfrak{D}$. Особине 1. и 3. скупа L се лако проверавају. Што се тиче особине 2. уочимо произвољан елемент $\lambda \in L$ и докажимо да $s(\lambda) \in L$. У том циљу посматрајмо скуп

$$U = \{\lambda' \in D : s(\lambda) \subseteq \lambda' \vee \lambda' \subseteq s(\lambda)\}.$$

Очигледно, $U \subseteq D$. Ако докажемо да $U \in \mathfrak{D}$, биће заправо $U = D$ јер је D инклузијски минимум скупа $\mathfrak{D}$, а самим тим ћемо доказати и особину 2. скупа L. Поново се особине 1. и 3. лако доказују. Докажимо зато особину 2. Нека $\lambda' \in U$. и докажимо да су скупови $s(\lambda)$ и $s(\lambda')$ инклузијски упоредиви. λ' је по претпоставци инклузијски упоредив са $s(\lambda)$. Ако би важило $s(\lambda) \subseteq \lambda'$, онда би $s(\lambda)$ и $s(\lambda')$ били инклузијски упоредиви због $s(\lambda) \subseteq \lambda' \subseteq s(\lambda')$. Стога је интересантан само случај када је $\lambda' \subsetneq s(\lambda')$.

Слично, λ је инклузијски упоредив са свим елементима скупа D, па и са $s(\lambda')$. У случају да је $s(\lambda') \subseteq \lambda$. имамо да је $s(\lambda') \subseteq \lambda \subseteq s(\lambda)$, па су и тада $s(\lambda)$ и $s(\lambda')$ инклузијски упоредиви. Стога је интересантан само случај када је $\lambda \subsetneq s(\lambda')$. Међутим, из $\lambda \subsetneq \lambda' \subsetneq s(\lambda)$ би следило да скуп $s(\lambda) \setminus \lambda$ садржи бар два елемента, што је према дефиницији функције s немогуће, па не може бити $\lambda \subsetneq \lambda'$. Из сличних разлога не може бити ни $\lambda' \subsetneq \lambda$. Међутим, будући да је скуп λ упоредив са свим елементима скупа D, па и са λ', мора бити $\lambda = \lambda'$. Одатле одмах следи да је и $s(\lambda) = s(\lambda')$, одакле су $s(\lambda)$ и $s(\lambda')$ наравно инклузијаки упоредиви.

Но, то коначно значи да је скуп D инклузијски линеарно уређен, па на основу особине 3. имамо да $\bigcup D \in D$. То тачно значи да постоји инклузијски највећи елемент скупа D, који се стога функцијом s може сликати искључиво у себе, одакле је он максималан ланац посматраног уређења $(A, \leqslant)$. Будући да је према 1. скуп T подскуп тог максималног ланца, овај део тврђења је у потпуности доказан.

а) ⇒ *б*) Претпоставимо да је $(A, \leqslant)$ непразно парцијално уређење у коме сваки максималан ланац има мајоранту. Нека је $a \in A$. Будући да је $\{a\}$ ланац можемо га проширити до неког максималног ланца, чија ће мајоранта бити тражени елемент.

б) ⇒ *в*) Докажимо најпре да су за такву фамилију $\mathcal{F}$ уређену инклузијом испуњени услови Зорнове леме. Нека је $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ било који ланац у смислу инклузијског уређења. Докажимо да скуп $M = \bigcup \mathcal{L}$ припада фамилији $\mathcal{F}$. За то је потребно проверити да $x \in \mathcal{F}$ за сваки коначан $x \subseteq M$.

Нека је x коначан подскуп од M. Будући да је x коначан и да за свако $y \in x$ постоји $L \in \mathcal{L}$ такво да $x \in L$, постојаће функција $f : x \longrightarrow \mathcal{L}$ таква да $y \in f(y)$ за свако $y \in x$. Но, будући да је функција f скуп, њена слика ће такође бити скуп. Штавише, слика функције ће f такође бити коначна. Но, будући да је она подскуп линеарно уређеног скупа $\mathcal{L}$ инклузијом, постојаће инклузијски највећи елемент L слике функције f коме ће припадати сви чланови скупа x. Дакле, важи $x \subseteq L \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$, па x као коначан подскуп елемента L фамилије $\mathcal{F}$ мора бити члан фамилије $\mathcal{F}$. Тиме је доказ да $M \in \mathcal{F}$ окончан. Дакле, испуњени су услови Зорнове леме, па максималан елемент фамилије $\mathcal{F}$ у смислу инклузије постоји.

в) ⇒ *г*) Уочимо произвољан скуп A. Нека је $\mathfrak{D}$ скуп свих парова облика $\langle T, \leqslant\rangle$, где је $T \subseteq A$, а $\leqslant$ релација доброг уређења на скупу T. Такви парови постоје. На пример, $\langle\emptyset, \emptyset\rangle \in \mathfrak{D}$. Наш циљ је да докажемо да постоји пар у скупу $\mathfrak{D}$ чија је прва компонента скуп A. Уредимо скуп $\mathfrak{D}$ релацијом $\preccurlyeq$ дефинисаном на следећи начин: $\langle T, \leqslant\rangle \preccurlyeq \langle T', \leqslant'\rangle$ ако и само ако је $T \subseteq T'$, $\leqslant \subseteq \leqslant'$ и за ма које $x \in T$ и $y \in T' \setminus T$ важи $x \leqslant' y$. Лако се проверава да је то једно парцијално уређење на скупу $\mathfrak{D}$.

Нека је $\mathcal{F}$ скуп свих ланаца уређења $\mathfrak{D}$. У било ком уређењу је подскуп скупа носача ланац ако и само ако су сви његови коначни подскупови ланци, па постоји максималан ланац $\mathcal{L}$ уређења $\mathfrak{D}$. Нека је

$$T = \bigcup\{T' \in P(A) : \exists\rho\, \langle T', \rho\rangle \in \mathcal{L}\}, \quad \leqslant = \bigcup\{\rho \in P(A) \times P(A) : \exists T'\, \langle T', \rho\rangle \in \mathcal{L}\}.$$

Докажимо да је $\leqslant$ добро уређење на T. Лако се проверава да је то једно парцијално уређење. На пример, нека су $x, y \in T$ такви да важи $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$. Тада постоје $\langle T', \leqslant'\rangle$, $\langle T'', \leqslant''\rangle \in \mathfrak{D}$ такви да $x \in T'$ и $y \in T''$. Притом веће од та два уређења обухвата оба елемента x и y. На сличан начин, можемо по потреби прећи на још веће уређење из скупа $\mathcal{L}$ у коме ће важити и $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$. Но, будући да је то по претпоставци заиста уређење, мораће да важи $x = y$. Рефлексивност и транзитивност се доказују сличном "гимнастиком".

Нека је сада U непразан подскуп од T. Тада можемо уочити неки његов елемент x, који мора припадати скупу носачу T' неког елемента $\langle T', \leqslant''\rangle$ скупа $\mathcal{L}$. Но, тада ће скуп $U \cap T'$ бити непразан подскуп од T', па ће имати најмањи елемент y у поретку скупа T'. Претпоставимо y није најмањи елемент скупа U у уредејењу скупа T. Тада ће постојати неко $z \in T \cap U$ за које није $y \leqslant z$. Тада можемо изабрати $\langle T'', \leqslant''\rangle \in \mathcal{L}$ тако да важи $x, y, z \in T''$. Будући да није $x \leqslant z$, јер би иначе због $y \leqslant x$ било $y \leqslant z$, неће моћи да буде ни $z \in T'' \setminus T'$, па мора бити $z \in U \cap T'$, где према избору елемента x важи $x \leqslant' z$, а самим тим мора да важи и $x \leqslant z$ супротно избору елемента z. Ова контрадикција доказује да је $\leqslant$ заиста добро уређење скупа T.

Остаје да докажемо да је $T = A$. У супротном бисмо могли изабрати неки елемент $x \in A \setminus T$ за који би скуп

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\langle T \cup \{x\}, \leqslant \cup\, T \times \{x\}\}$$

био већи елемент уређења ланаца $\langle\mathfrak{D}, \preccurlyeq\rangle$ од ланца $\mathcal{L}$ супротно избору ланца $\mathcal{L}$.

г) ⇒ AC Нека је A произвољан скуп и $\leqslant$ једно добро уређење на њему. Тада ће функција f дефинисана на скупу $P(A) \setminus \{\emptyset\}$ која сваком непразном подскупу скупа A придружује његов минимум задовољавати тражене услове. QED

О неким другим еквивалентима аксиоме избора биће речи касније. Сада ћемо навести неке њене слабије облике. То су теореме теорије ZFC које нису доказиве у теорији ZF и које у теорији ZF нису еквивалентне аксиоми избора.

За подскуп A Булове алгебре рећи ћемо да има својство коначног пресека (fip) ако за сваки коначан $F \subseteq A$ постоји елемент $a \neq 0$ те Булове алгебре такав да је $a \leqslant b$ за свако $b \in A$.

Теорема 18 (ZC$^-$) (*Теорема о ултрафилтру* – UF) У свакој Буловој алгебри се сваки скуп са fip може продужити до ултрафилтера. Посебно, свака Булова алгебра има бар један ултрафилтер.

Доказ: Нека је $\mathbb{B}$ булова алгебра и A њен подскуп са fip. Посматрајмо скуп $\mathcal{F}$ свих $A \subseteq X \subseteq B$ са fip. Будући да фамилија $\mathcal{L}$ испуњава услове Такијеве леме, постојаће максималан елемент F фамилије $\mathcal{F}$. Лако се закључује да је он филтер. Будући да се не може продужити до већег скупа са fip и да сви филтери имају fip, он је и ултрафилтер. QED

Дефиниција 6 Под фамилијом $(a_i)_{i\in I}$ са класом индекса I подразумеваћемо функцију a (која може бити и класа) чији је домен I и притом ћемо уместо $a(i)$ писати a_i. Посебно, фамилије чији је домен ω зваћемо низовима.

Теорема 19 (ZC^-) (*Зависан избор* – DC) Нека је A непразан скуп и $R \subseteq A \times A$ бинарна релација на њему која има особину да за свако $x \in A$ постоји $y \in A$ такав да xRy. Тада постоји низ $(x_n)_{n\in\omega}$ елемената скупа A такав да за свако $n \in \omega$ важи $x_n R x_{n+1}$.

Доказ: Нека је f изборна функција скупа A и a било који његов елемент. Тада је са

$$x_n = \begin{cases} a & \text{за } n = \emptyset, \\ \\ f(\{x \in A : x_m R x\}) & \text{за } n = S(m),\ \ m \in \omega \end{cases}$$

коректно дефинисан низ који испуњава тражене услове. QED

Теорема 20 ($\mathrm{Z}^- + \mathrm{DC}$) Нека је A непразан скуп и $R \subseteq A \times A$ бинарна релација на њему која има особину да за свако $x \in A$ постоји $y \in A$ такав да xRy и $(a_n)_{n\in m}$, $m \in \omega$ коначан низ елемената скупа A такав да за све $n \in \omega$ за које $S(n) \in m$ важи $a_n R a_{S(n)}$. Тада постоји низ $(x_n)_{n\in\omega}$ елемената скупа A такав да за свако $n \in \omega$ важи $x_n R x_{n+1}$ и да притом буде $a \subseteq x$.

Доказ: Нека је $\mathfrak{F}$ скуп свих коначних низова x елемената скупа A за које важи $a \subseteq x$ и $x_n R x_{S(n)}$ за све $n \in \omega$ за које $S(n) \in \mathrm{dom}(x)$. Притом је $\mathfrak{F}$ заиста скуп јер је $\mathfrak{F} \subseteq P(\omega \times A)$. Посматрајмо релацију R' дефинисану на скупу $\mathfrak{F}$ дефинисану са

$$xRy \ \ \leftrightarrow \ \ x, y \in \mathfrak{F} \wedge x \subseteq y \wedge \mathrm{dom}(y) = S(\mathrm{dom}(x)).$$

Тада можемо уочити низ $(f_n)_{n\in\omega}$ елемената скупа $\mathfrak{F}$ такав да $f_n R f_{n+1}$ за све $n \in \omega$. Обзиром да је класа $F = \{f_n : n \in \omega\} \subseteq \omega \times \mathfrak{F}$ скуп, $x = \bigcup F$ ће бити низ са траженим особинама. QED

За скуп x рећи ћемо да је пребројив ако постоји бијекција $f : \omega \longrightarrow x$.

Теорема 21 ($\mathrm{Z}^- + \mathrm{DC}$) (*Пребројиви избор* – CC) За било који пребројив скуп непразних скупова, постоји изборна функција тог скупа.

Доказ: Нека је $x = \{a_n : n \in \omega\}$ пребројив скуп, где је $a_m \neq a_n$ за $m \neq n$ и при чему $\emptyset \notin x$. Посматрајмо скуп F свих изборних функција скупова облика $\{a_n : n \in m\}$ за $m \in \omega$ и релацију R на скупу F дефинсану са fRg ако и само ако је $f \subseteq g$ и $\mathrm{dom}(g) = S(\mathrm{dom}(f))$. Тада постоји низ функција f_n такав да је $f_\emptyset = \emptyset$ и да важи $f_n R f_{n+1}$ за све $n \in \omega$. Но, тада је $f = \bigcup\{f_n : n \in \omega\}$ тражена функција. QED

Лема 13 (Z^-) Подскуп коначног скупа x је коначан.

Доказ: Доказ ћемо спровести индукцијом по $n \in \omega$ који је еквипотентан са x. Уколико је $n = \emptyset$, онда је и $x = \emptyset$, па је празан скуп једини његов подскуп, а он је свакако коначан. Нека је сада $n \in \omega$ такав да су сви подскупови скупова еквипотентних са n коначни. Нека је x коначан скуп еквипотентан са $S(n)$, y његов подскуп и $f : S(n) \xrightarrow[\text{на}]{1-1} x$. y је свакако коначан ако је $x = y$. Нека је зато y прави подскуп од x. Ако $f(n) \notin y$, онда је $y \subseteq f[n]$, одакле је y по индуктивној претпоставци коначан. Нека зато $f(n) \in y$. У том случају, будући да је y прави подскуп од x, постојаће неко $z \in x \setminus y$. Посматрајмо функцију $g : n \longrightarrow x \setminus \{z\}$ дефинисану са

$$g(k) = \begin{cases} f(k), & f(k) \neq z, \\ \\ f(n), & f(k) = z. \end{cases}$$

Лако се проверава да је g бијекција, одакле је скуп $x \setminus \{z\}$ еквипотентан са n, а будући да је $y \subseteq x \setminus \{z\}$, по индуктивној претпоставци је y коначан. QED

Лема 14 (Z^-) Коначни скупови су нееквипотентни са својим правим деловима. Посебно, различити природни бројеви су нееквипотентни.

Доказ: Индукцијом ћемо доказати да n није еквипотентно ни са једним својим елементом нити за један $n \in \omega$. Одатле ће на основу линеарности уређења скупа ω следити тражено тврђење. У случају да је $n = \emptyset$ тврђење важи јер n нема елемената. Нека претходни исказ важи за неко $n \in \omega$ и нека је $f : S(n) \xrightarrow[\text{на}]{1-1} m$ за неко $m \in S(n)$. Ту наравно не може бити $m = \emptyset$, па је $m = S(k)$ за неко $k \in \omega$. Но, тада је са

$$g = \{\langle x, y\rangle \in n \times k : f(x) = y \wedge y < f(n)\} \cup \{\langle x, y\rangle \in n \times k : f(x) = S(y) \wedge y \geqslant f(n)\}$$

дефинисана једна бијекција скупа n на скуп $k < m \leqslant n$, што је контрадикција. Доказ последње чињенице је сличан раније изложеном доказу бесконачности скупа ω. Сада остатак тврђења следи непосредно из чињенице да је за свако $n \in \omega$ сваки прави подскуп од $S(n)$ еквипотентан са неким подскупом од n и претодне леме. QED

Лема 15 (Z^-) Подскупова коначног скупа x има коначно много.

Доказ: Доказ изводимо индукцијом по природном броју n за који је $x \sim n$. За $n = \emptyset$ је и $x = \emptyset$, одакле је $P(x) = \{\emptyset\}$, што је свакако коначан скуп. Нека је сада $n \in \omega$ такав да поменути исказ важи и нека је x еквипотентан са $S(n)$. Уочимо произвољну бијекцију f скупа $S(n)$ на скуп x и скупове

$$A = \{y \subseteq x : f(n) \notin y\}, \quad B = \{y \subseteq x : f(n) \in y\}.$$

Скуп A је коначан као партитивни скуп скупа $f[n]$, а скуп B као еквипотентан коначном скупу A. Једна од бијекција скупа A на скуп B дата је са $y \mapsto y \cup \{f(n)\}$. Но, тада је и $P(x)$ коначан скуп као унија коначног скупа $\{A, B\}$ коначних скупова A и B. QED

Теорема 22 ($\mathrm{Z}^- + \mathrm{CC}$) Унија пребројивог скупа коначних скупова је пребројива.

Доказ: Нека је $x = \{x_k : k \in \omega\}$, при чему су сви скупови x_k коначни. Будући да је за свако $k \in \omega$ постоји $n \in \omega$ тако да скуп $b(x_k) = \{f : f : n \xrightarrow[\text{на}]{1-1} x_k\} \subseteq P(n \times x_k)$ буде непразан, као и да је скуп x пребројив, постојаће функција избора i скупа $F = \{b(y) : y \in x\} \subseteq P(\omega \times \cup x)$. Пресликавање $j : k \mapsto b(x_k)$ за $k \in \omega$ је 1-1, јер је $x_k = \mathrm{dom}(b(k))$, па ће $i \circ j$ бити једно 1-1 пресликавање скупа ω у скуп изабраних функција.

Означимо функцију $i(j(k))$ са f_k и $\mathrm{dom}(f_k)$ са n_k. Дакле, $f_k : n_k \xrightarrow[\text{на}]{1-1} x_k$. Дефинишимо пресликавања $\alpha, \beta : \bigcup x \longrightarrow \omega$ на следећи начин: $\alpha(y) = \min\{k \in \omega : y \in x_k\}$ и $\beta(y) = f^{-1}_{\alpha(y)}(y)$. Сада можемо увести поредак на скупу $\bigcup x$ на следећи начин:

$$a \leqslant b \iff \alpha(a) < \alpha(b) \vee (\alpha(a) = \alpha(b) \wedge \beta(a) \leqslant \beta(b)).$$

Није тешко проверити да је то добро уређење будући да је скуп ω добро уређен и да је за ма које $y, z \in \bigcup x$ важи $\alpha(y) = \alpha(z) \wedge \beta(y) = \beta(z) \Leftrightarrow y = z$. Приметимо да сваки елемент скупа $\bigcup x$ има коначно много претходника, и будући да не постоји бијекција између различитих природних бројева, можемо дефинисати функцију $g : \bigcup x \longrightarrow \omega$ као

$$g(y) = n \iff \{z \in \bigcup x : z < y\} \sim n.$$

Јасно је да је скуп $g[y]$ почетни комад од ω. Но, пресликавање g је 1-1. Заита, у супротном можемо изабрати најмањи елемент $z \in \bigcup x$ такав постоји $u < z$ тако да је $g(u) = g(z)$. Одатле u и z морају да имају исти број претходника. Но, тада је са $f(v) = f[v], \quad v \in x, v < z$ дефинисана једна растућа бијекција скупа свих претходника од z на неки природан број m, па би рестрикција функције f на скуп свих претходника од u била бијекција на неки прави почетни комад од m. Али, прави почетни комад природног броја је мањи природан број, па бисмон имали бијекцију између различитих природних бројева, што смо доказали да је немогуће.

Овим смо доказали инјективност функције g. Ако је $g[y]$ прави почетни комад од ω, онда постоји најмањи природан број n који не припада скупу $g[y]$ и онда је $g[y] = n$, па је y коначан скуп као еквипотентан са n. Но тада би из $y = \bigcup x$ следило $x \subseteq P(y)$, одакле би скуп x био коначан као подскуп коначног скупа, што је супротно претпоставци. Стога, $g[y]$ не може бити прави почетни комад од ω па је $g[y] = \omega$, одакле је напокон скуп y поребројив. QED

Дефиниција 7 За парцијално уређење кажемо да је *дрво* ако је сваки ланац тог уређења добро уређен и за сваки елемент x тог уређења је скуп свих елемената мањих од x ланац. Елементе дрвета зовемо *чворовима*. Под *граном дрвета* подразумеваћемо максималан ланац тог уређења. Чвор y дрвета зваћемо *наследником* чвора x ако је $x < y$ и притом не постоји чвор z дрвета такав да важи $x < z < y$. Дрво је *коначно генерисано* ако је скуп наследника било ког чвора коначан. Дрво је коначно ако му је скуп чворова коначан.

Теорема 23 ($Z^- + CC$) (*Кенигова лема за дрвета* – KLT) Бесконачно дрво са најмањим елементом које је коначно генерисано има барем један бесконачан ланац. Уколико је за сваки чвор x скуп свих чворова мањих од x коначан, онда је тај ланац бесконачна грана.

Доказ: Нека је $\langle T, \leqslant \rangle$ бесконачно дрво које је коначно генерисано. Означимо са S_n за $n \in \omega$ скуп свих $x \in T$ таквих да је скуп $\{y \in T : y < x\}$ еквипотентан са n, а са N_n скуп свих скупова облика

$$N_x = \{y \in T : \text{"}y \text{ је наследник од } x\text{"}\}$$

за $x \in S_n$. Пошто је $N_n \subseteq P(P(T))$, егзистенција му је загарантована аксиомом сепарације. Будући да је за свако $x \in T$ скуп N_x по претпоставци коначан и да је скуп N_n еквипотентан са S_n, коришћењем једнакости $S_{S(n)} = \bigcup N_n$ индукцијом се доказује да је сваки од скупова S_n коначан, а самим тим и да је скуп $I = \bigcup_{n \in \omega} S_n$ коначан или пребројив, па постоји изборна функција c на скупу I.

Такође, из $x < y$ и $y \in I$ следи $x \in I$. Посматрајмо низ $(x_n)_{n \in \omega}$ дефинисан са

$$x_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ c(\{y \in N_{x_k} : \neg \mathrm{Fin}(\{z \in T : z \geqslant y\})\}), & \text{ако је лева страна дефинисана за } n = S(k) \\ *, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где је $*$ неки елемент који не припада дрвету. Такав постоји јер је T скуп, а доказали смо да $\forall x \exists y \, y \notin x$. Индукцијом се показује да је $c(\{y \in N_{x_k} : \neg \mathrm{Fin}(\{z \in T : z \geqslant y\})\})$ дефинисано за све $n \in \omega$, као и да $x_n \in S_n$ за све $n \in \omega$. У доказу се користи чињеница да је унија коначног скупа коначних скупова коначан скуп. Другим речима, ако је унија коначног скупа бесконачна, онда он има барем један бесконачан елемент. Но, за свако $n \in \omega$ је $x_n < x_{n+1}$, одакле се индукцијом по k доказује да је сваки од скупова $\{x_n : n \leqslant k\}$ линеарно уређен, па је због линеарности уређења скупа ω и скуп $b = \{x_n : n \in \omega\}$ линеарно уређен.

Остаје само да се покаже да је b грана у поменутом случају. У том циљу приметимо да сваки ланац има по највише један заједнички елемент са сваким од скупова S_n. Заиста, Нека су x и y различити елементи скупа S_n. Ако би на пример било $x < y$, онда би скуп елемената мањих од y садржао све елементе мање од x и још x, па би било $y \in S_m$ за неко $m > n$. Међутим, то је у супротности са нееквипотентношћу коначних скупова са својим правим подскуповима. Дакле, ако би l био неки ланац који проширује b, морало би да буде $b \cap I = l \cap I$. Али, у поменутом случају је $I = T$. QED

1.4 Ординали и добро уређени скупови

Дефиниција 8 Парцијално уређење на класи X је добро ако свака непразна поткласа од X има најмањи елемент.

Теорема 24 (Z^-) Сваки добро уређен скуп је линеарно уређен и притом у њему нема бесконачних опадајућих низова. Уз DC важи и обрат.

Доказ: Линеарност добрих уређења следи из постојања минимума двочланих подскупова тог уређења. Такође, скуп вредности бесконачног опадајућег низа нема минимум. Са друге стране, ако уређење $\langle A, \leqslant \rangle$ није добро, онда ће за релацију R дефинисану на скупу F свих коначних опадајућих низова елемената скупа A као строга инклузија $\subsetneq$, онда за сваки $x \in F$ постоји $y \in F$ такав да важи xRy. Стога ће постојати бесконачан низ елемената из F такав да је сваки претходни прави део наредног, па ће им унија бити бесконачан опадајући низ елемената из A. QED

Лема 16 (Z^-) Нека је $\langle A, \leqslant \rangle$ добро уређење и $f : A \longrightarrow A$ растућа функција која слика скуп A на његов почетни комад. Другим речима нека су сви елементи који су испод барем једног елемента који је у слици функције f, такође у слици функције f. Тада је f идентитет. Посебно, добро уређен скуп не може бити изоморфан свом правом почетном комаду.

Доказ: Нека је f неидентичко пресликавање. Тада постоји најмањи $x \in A$ такав да је $f(x) \neq x$. Ако је $f(x) < x$, онда према избору елемента x добијамо да је $f(f(x)) = f(x)$, док из монотоније функције f закључијемо да мора бити $f(f(x)) < f(x)$. Стога мора бити $x < f(x)$. Но, тада ће морати да постоји $y \in A$ за који је $f(y) = x$, а самим тим и $f(y) < f(x)$. Одатле на основу монотоније закључујемо да је $y < x$, а самим тим и $f(y) = y$, што је у супротности са $y < x = f(y)$. QED

Теорема 25 (Z^-) За ма које добро уређене скупове $\langle A, \leqslant\rangle$ и $\langle B, \leq\rangle$ важи тачно једна од следеће три могућности.

1. Постоји растућа функција f која слика скуп A на прави почетни комад скупа B.

2. Постоји изоморфизам $f : A \longrightarrow B$.

3. Постоји растућа функција f која слика скуп B на прави почетни комад скупа A.

Притом је функција f јединствена у сва три наведена случаја. Посебно, у првом и трећем случају су и почетни комади јединствени.

Доказ: Прво, ако би бар две од олатернатива биле тачне, онда бисмо имали растуће функције $f : A \longrightarrow B$ и $g : B \longrightarrow A$ чије су слике пошетни комади одговарајућих уређења од којих бар једна није сурјективна. Но, тада ће композиције $g \circ f$ и $f \circ g$ такође бити растуће функције чије су слике почетни комади одговарајућих уређења. Међутим, према претходној леми ће бити $f \circ g$ и $g \circ f$ идентитети, што је у супротности са претпоставком да бар једна од функција f, g није сурјективна.

Докажимо да мора да важи барем један од наведених услова. Нека не постоји растућа функција $f : A \longrightarrow B$ чије је слика прави почетни комад од B и нека је $*$ било који елемент који не припада скупу A. Посмтрајмо функцију $g : B \longrightarrow A$ дефинисану са

$$g(x) = \begin{cases} \min(A \setminus \mathrm{ran}(g|_x)), & \mathrm{ran}(g|_x)) \subsetneq A \\ \\ *, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лако се проверава да је $g|_{B\setminus g^{-1}[\{*\}]}$ растуће пресликавање на почетни комад од A. Уколико би постојао елемент који се слика у $*$, могли бисмо уочити најмањи $x \in B$ за који је $g(x) = *$. Но, тада је $g|_x$ сурјекција на скуп A. Али, тада би $(g_x)^{-1}$ била растућа функција скупа A на почетни комад од B супротно претпоставци. Стога је g растућа функција скупа B на почетни комад од A.

Остало је да докажемо да су у сва три случаја пресликавања чија се егзистенција тврди јединствена. Рецимо, ако бисмо имали различите растуће функције $f_1, f_2 : A \longrightarrow B$ чије су слике почетни комади од B, онда бисмо могли уочити најмањи $x \in A$ за који важи $f_1(x) \neq f_2(x)$. Ако би било $f_1(x) < f_2(x)$, онда би било $f_1(x) = f_2(y)$ за неко $y \in A$. Међутим, онда бисмо из $f_2(y) = f_1(x) < f_2(x)$ могли закључити да је $y < x$. Али, онда је $f_1(x) = f_2(y) = f_1(y)$, одакле следи $x = y$ супротно закључку $y < x$. На сличан начин се закључује да неможе да важи ни $f_2(x) < f_1(x)$. QED

Прави почетни комади доброг уређења су тачно интервали облика $[0, x)$, где је 0 минимум, а x произвољан елемент тог уређења. Приметимо да ако је добро уређење $\langle A, \leqslant_A\rangle$ изоморфно правом почетном комаду доброг уређења $\langle B, \leqslant_B\rangle$ и $\langle B, \leqslant_B\rangle$ изоморфно правом почетном комаду доброг уређења $\langle C, \leqslant_C\rangle$, да онда мора бити и уређење $\langle A, \leqslant_A\rangle$ изоморфно правом почетном комаду од $\langle C, \leqslant_C\rangle$. То управо значи да је на тај начин уведено једно линеарно предуређење међу добро уређеним скуповима. Штавише, то предуређење је добро.

Лема 17 (Z^-) Нека је T неки непразан скуп добро уређених скупова. Тада постоји добро уређење $A \in T$ такво да је A изоморфно почетном комаду било ког доброг уређења $B \in T$.

Доказ: Уочимо било које добро уређење $A \in T$. Ако је оно изоморфно почетном комаду сваког доброг уређења $B \in T$, онда нема шта да се доказује. Претпоставимо зато да постоји бар једно $B \in T$ такво да A није изоморфно нити једном почетном комаду од B. У том случају, свако од таквих добрих уређења B је изоморфно неком правом почетном комаду $[0, a_B)$ уређења A. Уочимо скуп свих $x \in A$ таквих да је бар један члан скупа T изоморфан са почетним комадом $[0, x)$ уређења A. Како је то непразан подскуп од A, имаће најмањи елемент a и њему ће одговарати неко уређење $B \in T$ које је изоморфно почетном комаду $[0, b)$ уређења A. Уколико се B не би могао утопити у почетни комад неког елемента скупа $C \in T$, онда би уређење C било изоморфно неком правом почетном комаду уређења B, а самим тим и неком почетном комаду $[0, c)$ скупа A за $c < b$ супротно избору елемента b. Стога уређење B има тражене особине. QED

Теорема 26 (Z^-) (*Хартогсов број*) За сваки скуп X постоји добро уређење $\langle A, \leqslant\rangle$ такво да се скуп A не може инјективно пресликати у скуп X, али тако да се сваки прави почетни комад од A може инјективно пресликати у скуп X.

Доказ: Уочимо скуп T свих добро уређених скупова којима је скуп носач подскуп од X. Нека је $\sim$ релација еквиваленције на скупу T уведена као $A \sim B$ ако и само ако су A и B изоморфна уређења. Ако са U означимо одговарајући скуп класа еквиваленције, онда међу њима можемо увести уређење као $[A] \leqslant [B]$ ако и само ако је A изоморфно почетном комаду од B. Према претходној леми, то уређење је добро. Штавише, за сваки елемент $A \in T$ је A изоморфно са почетним комадом $[0, [A])$ уређења U, при чему је изоморфизам дат са $f(x) = [[0, x)]$.

Ово пресликавање је добро дефинисано јер је за свако $x \in A$ скуп $[0, x)$ прави почетни комад од A, бијективно јер за било које уређење B изоморфно правом почетном комаду од A постоји тачно једно $x \in A$ такво да је B изоморфно са почетним комадом $[0, x)$, а монотоно зато што је за елементе $x, y \in A$ за које је $x < y$ почетни комад $[0, x)$ скупа A прави почетни комад почетног комада $[0, y)$, такође скупа A.

Одатле одмах добијамо да се сваки прави почетни комад скупа U може инјективно пресликати у X. Претпоставимо да се U може инјективно пресликати у X на пример неким пресликавањем f. Тада би се на скупу X могло дефинисати добро уређење $\leq$ са $x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ за $x, y \in U$. Но, тада би уређење $\langle X, \leq \rangle$ било изоморфно неком уређењу $A \in T$, а самим тим и правом почетном комаду $[0, [A])$ уређења U. Међутим, ту је f изоморфизам уређења X и U, па би и добро уређење U било изоморфно свом правом почетном комаду, што је немогуће. QED

Управо конструисано добро уређење ћемо уз симболику из претходне теореме означавати са $H(X)$. Следећа дефиниција потиче од Фон Нојмана.

Дефиниција 9 Ординал је транзитиван скуп добро уређен релацијом $\in$ као строгим поретком.

Раније смо показали да су скуп ω и природни бројеви ординали.

Лема 18 (Z^-) Елементи ординала су ординали.

Доказ: Нека је α ординал и нека је $\beta \in \alpha$. Пошто је α тразнзитиван скуп, биће $\beta \subseteq \alpha$, а самим тим ће и β бити добро уређен релацијом $\in$ као стиктним поретком. Из $\delta \in \gamma$ и $\gamma \in \beta$ ћемо на основу транзитивности скупа α закључити најпре да су γ и δ заједно са β елементи скупа α. Но, будући да је $\in$ стриктан поредак у α, на основу транзитивности закључујемо да $\delta \in \gamma$, одакле је β транзитиван. QED

Лема 19 (Z^-) За ма који ординал α важи $\alpha \notin \alpha$. Такође, за ма које ординале α и β важи $\alpha \notin \beta \vee \beta \notin \alpha$.

Доказ: У супротном би за α као елемент уређења α вжило $\alpha < \alpha$, а у случају да важи $\alpha \in \beta \wedge \beta \in \alpha$ из транзитивности скупа α важило би $\alpha \in \alpha$, што је као што смо видели немогуће. QED

Лема 20 (Z^-) За ма који ординал α и његов елемент β важи $\beta = [0, \beta)$ у уређењу ординала α.

Доказ: Према транзитивности скупа α је $\beta \subseteq \alpha$, па за проивољно γ важи

$$\gamma \in [0, \beta) \Leftrightarrow \gamma \in \alpha \wedge \gamma \in \beta \Leftrightarrow \gamma \in \beta.$$

QED

Лема 21 (Z^-) За ма које ординале α и β важи $\alpha \subsetneq \beta \Rightarrow \alpha \in \beta$.

Доказ: Посматрајмо најмањи елемент γ скупа $\beta \setminus \alpha$ у смислу уређења ординала β. Из $\gamma \in \beta$ следи да је $\gamma = [0, \gamma)$ у уређењу ординала β, а одатле према избору елемента γ да је $\gamma \subseteq \alpha$. Пошто је γ ординал као елемент ординала β, на основу транзитивности ординала γ закључијемо да је γ почетни комад од α. Ту не може бити $\gamma \neq \alpha$ јер би онда γ као прави почетни комад од α био облика $[0, \delta)$ за неки $\delta \in \alpha$ у смислу уређења ординала α, одакле би према претходном било $\gamma = \delta$, што је у супротности са $\gamma \notin \alpha$. Међутим, онда је $\gamma = \alpha$, а самим тим и $\alpha \in \beta$. QED

Лема 22 (Z^-) За ма које ординале α и β важи тачно једна од следећих могућности:

$$\alpha \in \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta \in \alpha.$$

Доказ: Према претходном не може важити више од једне могућности. Докажимо да важи барем једна од наведених могућности. У сваком случају мора да важи бар једна од следеће три могућности:

$$\alpha \subsetneq \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \alpha \not\subseteq \beta.$$

У другом случају нема шта да се доказује, у првом је $\alpha \in \beta$, а у трећем можемо уочити најмањи елемент γ скупа $\alpha \setminus \beta$ у смислу уређења ординала α. Но, будући да сви елементи ординала α који су мањи од γ припадају скупу β, важиће $\gamma \subseteq \beta$. Међутим, то управо значи да је $\gamma = \beta \vee \gamma \subsetneq \beta$, при чему друга могућност отпада због $\gamma \notin \beta$. Наравно, због $\gamma \in \alpha$ ће тада морати да важи $\beta \in \alpha$. QED

Лема 23 (Z^-) Ординал α је изоморфан правом почетном комаду ординала β ако и само ако $\alpha \in \beta$. Штавише, тај изоморфизам се увек своди на једнакост. Посебно, различити ординали не могу бити изоморфни.

Доказ: Ако $\alpha \in \beta$, онда је $\alpha = [0, \alpha)$ у уређењу β и тада је ординал α једнак, а самим тим и изоморфан правом почетном комаду ординала β. Обрнуто, нека је ординал α изоморфан неком правом почетном комаду ординала β. Тада према теореми 25 ординали α и β не могу бити изоморфни нити ординал β може бити изоморфан почетном комаду ординала α, па самим тим не може бити ни $\beta = \alpha$ ни $\beta \in \alpha$. Стога, остаје само могућност да је $\alpha \in \beta$. Пошто је изоморфизам ординала увек јединствен, он се у случају ординала своди на идентитет. QED

Ово нам заправо говори да је $\in$ један строги линеарни поредак, а $\subseteq$ линеарни поредак међу ординалима. Штавише, тај поредак је добар.

Теорема 27 (Z^-) Нека је x било који непразан скуп ординала. Тада он у односу на уведени поредак има минимум.

Доказ: Према теореми 17 постоји ординал $\alpha \in x$ који је изоморфан неком почетном комаду ма ког ординала $\beta \in x$. Пошто су различити ординали увек неизоморфни, ординал α ће бити изоморфан правом почетном комаду ма ког ординала $\beta \in x \setminus \{\alpha\}$, односно да $\alpha \in \beta$ за свако $\beta \in x \setminus \{\alpha\}$. QED

Будући да су ординали добро уређени релацијом $\in$, свака непразна класа ординала имаће најмањи елемент, јер испод сваког ординала имамо скуп много ординала. Стога за доказивање да неко тврђење важи за све ординале можемо користити облик индукције код кога се доказује да за дати ординал то тврђење важи на основу претпоставке да то тврђење важи за све мање ординале.

Теорема 28 (ZF^-) Сваки добро уређен скуп изоморфан је тачно једном ординалу.

Доказ: Већ смо видели да нема различитих изоморфних ординала, па је ординал изоморфан датом добро уређеном скупу јединствен. Нека је $\langle A, \leqslant \rangle$ добро уређење на скупу A. Тада је слика α функције f са доменом A дефинисане са

$$f(x) = \{f(y) : y \in A \wedge y < x\}$$

тражени ординал. Заиста, за произвољне $x, y \in A$ из $y < x$ следи $f(y) \in f(x)$. Ако докажемо инјективност функције f важиће и обрат. У том циљу најпре покажимо да $f(x) \notin f(x)$ за ма које $x \in A$. У супротном би постојао најмањи $x \in A$ за који је $f(x) \in f(x)$. Међутим, онда би за неко $y < x$ важило $f(y) = f(x)$. Но, према избору елемента x онда мора бити $f(y) \notin f(y)$, што је контрадикција са $f(x) \in f(x)$.

Ако функција f не би била $1-1$, онда би за неке $x, y \in A$ за које је $x < y$ важило $f(x) \in f(y)$ и $f(x) = f(y)$, што противречи претходном закључку да не може бити $f(x) \in f(x)$. Стога је f инјекција, а $\in$ добро уређење на скупу α изоморфно са $\langle A, \leqslant \rangle$, при чему је f одговарајући изоморфизам.

Нека је сада $\beta \in \alpha$ и $\gamma \in \beta$. Тада важи да је $\beta = f(x)$ за неко $x \in A$ и $\gamma = f(y)$ за неко $y \in A$ за које је $y < x$, одакле је напокон $\gamma \in \alpha$. QED

Лема 24 (Z^-) За ма који ординал α скуп $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ је такође ординал. Унија скупа ординала је ординал. Штавише, ту је $S(\alpha)$ најмањи ординал који је већи од α, а унија скупа ординала је супремум тог скупа ординала.

Доказ: Из $\beta \in S(\alpha)$ следи да је $\beta = \alpha \vee \beta \in \alpha$, па за ма које $\gamma \in \beta$ важи $\gamma \in \alpha$ будући да је α транзитиван скуп, што управо значи да је $\beta \subseteq \alpha$. Са друге стране је $\alpha \in S(\alpha)$, чиме је први део тврђења доказан.

Нека је сада x скуп ординала и $\alpha = \bigcup x$. Претпоставимо сада да $\beta \in \alpha$ и $\gamma \in \beta$. Из $\beta \in \alpha$ следи да постоји неко $\delta \in x$ за које $\beta \in \delta$. Но, будући да је δ ординал, биће $\gamma \in \delta$, а самим тим и $\gamma \in \alpha$. Значи, α је скуп чији су сви елементи ординали који је уз то и транзитиван ако је добро заснован. Он ће свакако то и бити јер је као скуп ординала добро уређен релацијом $\in$. Чињеница да је унија скупа ординала супремум тог скупа ординала сада следи директно из чињенице да је поредак ординала управо инклузија. QED

Теорема 29 (Z^-) Класа ординала није скуп.

Доказ: У супротном би тај скуп имао супремум α, од кога бисмо могли наћи већи ординал $S(\alpha)$, што противречи избору ординала α. QED

Ординале облика $S(\alpha)$, где је α неки ординал зовемо *наследницима*, а остале *граничним*.

Збир $\alpha+\beta$ ординала α и β дефинишемо као ординал изоморфан уређењу $<$ скупа $\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}$ датом са

$$\langle x,a\rangle<\langle y,b\rangle\Leftrightarrow a\in b\vee(a=b\wedge x<y).$$

Није тешко проверити да је то добро уређење, па поменути ординал постоји. Притом је $\alpha+1=S(\alpha)$. Индукцијом по β непосредно се проверава да за сабирање ординала важи

$$\begin{aligned}&\alpha+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+1,\\&\alpha+0=\alpha,\\&\alpha+\beta=\bigcup_{\gamma\in\beta}(\alpha+\gamma),\quad \text{за гранични ординал } \gamma=\neq 0.\end{aligned}$$

Општије, под произвољном сумом $\sum_{i\in\alpha}\beta_i$, где је $(\beta_i)_{\in\alpha}$ фамилија ординала индексирана ординалом α као скупом индекса, подразумевамо ординал изоморфан уређењу скупа $\bigcup_{i\in\alpha}\{i\}\times\beta_i$ дефинисаном са

$$\langle x,y\rangle<\langle x',y'\rangle\Leftrightarrow x<x'\vee(x=x'\wedge y<y').$$

за које се лако проверава да је добро. Није тешко утврдити да за овако дефинисану суму важи

$$\textstyle\sum_{i\in\alpha+1}\beta_i=\sum_{i\in\alpha}\beta_i+\beta_\alpha,$$

Производ $\alpha\times\beta$ дефинишемо као ординал изоморфан уређењу скупа $\alpha\times\beta$ релацијом $<$ дефинисаном са

$$\langle x,y\rangle<\langle x',y'\rangle\Leftrightarrow y<y'\vee(x<x'\wedge y=y').$$

И за ово уређење се на једноставан начин утврђује да је добро, па поменути ординал постоји. За множење ординала важе формуле

$$\begin{aligned}&\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma,\\&\alpha(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha,\\&\alpha\beta=\textstyle\bigcup_{\gamma<\beta}\alpha\gamma.\end{aligned}$$

Уведимо још операцију степеновања ординала. Нека су α и β произвољни ординали и нека је F скуп свих функција $f:\beta\longrightarrow\alpha$ за које је $f^{-1}[\alpha\setminus\{0\}]$ коначан скуп. Дефинишимо релацију $<$ на том скупу са

$$f<g\Leftrightarrow f\neq g\wedge f(x)<g(x) \text{ за } x=\min\{y\in\beta:f(y)\neq g(x)\}.$$

Дефиниција је коректна јер је скуп тачака у којима се разликују различите функције из F коначан и непразан. Није тешко проверити да је ово једно парцијално уређење. Остаје да се докаже да је то уређење добро. Докажимо у том циљу формулу

$$(\forall a\in\beta+1)(\forall X\in P(F))((\exists f\in X)f[[a,+\infty)]\subseteq\{0\}\Rightarrow(\exists x\in X)(\forall y\in X)x\leqslant y).$$

У супротном би постојао најмањи $a\leqslant\beta$ за који постоји $X\subseteq F$ такав да постоји $f\in X$ за који је $f[[a,+\infty)]\subseteq\{0\}$ и тако да X нема минимум, па можемо уочити скуп X и функцију f са наведеним особинама. Но, тада за ма који елемент $b<a$ постоји c такво да је $b\leqslant c<a$ и $f(c)\neq 0$, јер би у супротном скуп X имао минимум по индуктивној претпоставци. Ако је a гранични ординал различит од 0, онда можемо изабрати неко $b<a$. Према теореми рекурзије можемо уочити низ $(x_n)_{n\in\omega}$ такав да важи

$$x_0=b,\quad x_{n+1}=\min((x_n,a)\cap f^{-1}[\alpha\setminus\{0\}]) \text{ за } n\in\omega.$$

Но, тада је скуп $\{x_n:n\in\omega\}$ бесконачан подскуп од $f^{-1}[\alpha\setminus\{0\}]$, па је и сам скуп $f^{-1}[\alpha\setminus\{0\}]$ бесконачан супротно чињеници да $f\in X\subseteq F$. Стога a не може бити гранични ординал различит од нуле. Но, лако се закључује да a не може бити ни нула, па постоји $b\in\beta$ такво да је $a=b+1$. Тада према избору елемента a мора бити $f(b)\neq 0$. Уочимо међу свим $g\in X$ за које важи $g[[a,+\infty)]\subseteq\{0\}$ онај за који је вредност $g(b)$ најмања могућа, као и скуп H свих функција $h\in X$ за које је $h|_{[b,+\infty)}=g|_{[b,+\infty)}$. Свакој функцији $h\in H$ можемо придружити функцију

$$u_h=h\cap((\beta\setminus\{b\})\times\alpha)\cup\{\langle b,0\rangle\}.$$

Пошто $u_h\in{}^{\beta}\alpha$, можемо уочити скуп $T=\{u_h:h\in H\}$. Тај скуп ће бити непразан и према индуктивној претпоставци имаће минимум $u=u_h$ за неко $h\in H$. Међутим, пресликавање $h\mapsto u_h$ је изоморфизам уиређених скупова H и T, па је h минимум уређења H. Али, пошто је сваки елемент скупа H мањи од сваког елемента скупа $X \setminus H$, функција h ће бити минимум скупа X супротно претпоставци, што доказује полазну формулу из које непосредно следи да је уочено уређење скупа F добро.

Стога ће то уређење бити изоморфно са неким ординалом кога ћемо обележавати са α^β а саму уведену операцију ћемо звати степеновањем ординала. За ову оперцију важи

$$\begin{aligned}&\alpha^0 = 1,\\ &\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \alpha,\\ &\alpha^\beta = \textstyle\bigcup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma \text{ за гранични ординал } \gamma \neq 0.\end{aligned}$$

Прва од наведених особина је очигледна. Докажимо другу. Нека је $F(\alpha, \beta)$ за ма које ординале α и β скуп свих функција $f : \beta \longrightarrow \alpha$ за које је $f^{-1}[\alpha \setminus \{0\}]$ коначан скуп. Тада је за ма које $a \in \alpha$ подуређење F_a оних функција $f \in F(\alpha, \beta+1)$ за које је $f(\beta) = a$ изоморфно уређењу $F(\alpha, \beta)$ са изоморфизмом $f \mapsto f|_\beta$. Притом за $a, b \in \alpha$ из $a < b$, $f \in F_a$, $g \in F_b$ следи $f < g$, одакле следи да операција степеновања ординала заиста има и другу особину.

Докажимо још и последњу од наведених особина степеновања ординала. За било који ординал $\gamma < \beta$ уређење $F(\alpha, \gamma)$ се пресликава на прави почетни комад уређења $F(\alpha, \beta)$ изоморфизмом $f \mapsto f \cup ((\beta \setminus \gamma) \times \{0\})$. Са друге стране, за свако $f \in F(\alpha, \beta)$ постоји највећи елемент $x \in \beta$ такав да је $f(x) \neq 0$. Но, будући да је β гранични ординал за ординал $\gamma = x + 1$ ће важити $f \setminus ((\beta \setminus \gamma) \times \{0\}) \in F(\alpha, \gamma)$, одакле је унија слика свих скупова $F(\alpha, \gamma)$ за $\gamma < \beta$ при одговарајућим изоморфизмима једнака скупу $F(\alpha, \beta)$, што доказује тврђење у целини.

На сличан начин би се могао увести и произвољан производ ординала $\prod_{i\in\alpha} \beta_i$, где је α ординал а $(\beta_i)_{i\in\alpha}$ фамилија ординала индексирана ординалом α као скупом индекса, као ординал изоморфан добром подуређењу свих функција $\left(\prod_{i\in\alpha} \beta_i\right) \cap F(\alpha, \bigcup_{i\in\alpha} \beta_i)$ скупа $F(\alpha, \bigcup_{i\in\alpha} \beta_i)$ у односу на уведени поредак. На сасвим сличан начин као малопре се доказује да за овако уведен произвољан производ ординала важи

$$\begin{aligned}&\prod_{i\in 0} \beta_i = 1,\\ &\prod_{i\in\alpha+1} \beta_i = (\prod_{i\in\alpha} \beta_i)\beta_\alpha,\\ &\prod_{i\in\alpha} \beta_i = \bigcup_{\gamma<\alpha} \prod_{i\in\gamma} \beta_i, \quad \text{за гранични ординал } \alpha \neq 0.\end{aligned}$$

Претходне формуле су довољне да би се дефинисале управо уведене операције на одиналима будући да према теореми рекурзије постоји по тачно једна функција која их задовољава. Међутим, ми смо на овај начин дали једну скуповну репрезентацију тих операција. На тај начин можемо говорити о таквим операцијама и у случају проивољних добрих уређења, што има смисла будући да је за доказивање егзистенције ових операција над ординалима неопходна примена аксиоме замене. Применом те репрезентације ових операција лако се показује да за произвољан орддинал α и ма какву фамилију $(\beta_i)_{i\in I}$ важи

$$\begin{aligned}&\alpha + \bigcup_{i\in I} \beta_i = \bigcup_{i\in I} (\alpha + \beta_i),\\ &\alpha \,(\bigcup_{i\in I} \beta_i) = \bigcup_{i\in I} (\alpha\beta_i),\\ &\alpha^{\bigcup_{i\in I} \beta_i} = \bigcup_{i\in I} \alpha^{\beta_i}.\end{aligned}$$

Приметимо да ове операције по првом аргументу нису непрекидне јер важи

$$\begin{aligned}&\bigcup_{n\in\omega} n + \omega = \omega + \omega > \omega = \bigcup_{n\in\omega} (n + \omega),\\ &\Big(\bigcup_{n\in\omega} n\Big)\omega = \omega^2 > \omega = \bigcup_{n\in\omega} (n\omega),\\ &\Big(\bigcup_{n\in\omega} n\Big)^\omega = \omega^\omega > \omega = \bigcup_{n\in\omega} n^\omega.\end{aligned}$$

Ове операције имају следеће особине које се једноставно доказују индукцијом на ординалима применом претходних формула.

$$\bigcup_{i\in\omega}(\alpha_i+\beta)\leqslant(\bigcup_{i\in I}\alpha_i)+\beta,$$
$$\bigcup_{i\in\omega}(\alpha_i\beta)\leqslant(\bigcup_{i\in I}\alpha_i)\beta,$$
$$\bigcup_{i\in\omega}(\alpha_i^{\beta})\leqslant(\bigcup_{i\in I}\alpha_i)^{\beta},$$

Такође, важи и

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),\\&(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma),\\&\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma,\\&\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^{\beta}\alpha^{\gamma},\\&\big(\alpha^{\beta}\big)^{\gamma}=\alpha^{\beta\gamma}.\end{aligned}$$

Притом је

$$\begin{aligned}&\omega+1>\omega=1+\omega,\\&\omega2=\omega+\omega>\omega=2\omega,\\&(1+1)\omega=\omega<\omega+\omega=1\omega+1\omega,\\&2^{\omega}2^{\omega}=\omega^2>\omega=(2\cdot2)^{\omega}.\end{aligned}$$

Ни овде није могуће дати примере са обрнутим знаковима неједнакости. Ове операције су повезане са поретком ординала следећим особинама

$$\begin{aligned}&\alpha+\beta<\alpha+\gamma\ \Leftrightarrow\ \beta<\gamma\\&\alpha\beta<\alpha\gamma\ \Leftrightarrow\ \alpha\neq0\wedge\beta<\gamma\\&\alpha^{\beta}<\alpha^{\gamma}\ \Leftrightarrow\ \alpha\geqslant2\wedge\beta<\gamma.\end{aligned}$$

при чему је

$$\begin{aligned}&0+\omega=\omega=1+\omega\\&1\omega=\omega=2\omega\\&2^{\omega}=\omega=3^{\omega}.\end{aligned}$$

Иначе, скуп ω је затворен за уведене операције и у том случају су уведено сабирање и множење комутативни, множење је са обе стране дистрибутивно према сабирању, а степеновање према множењу. Такође, закони скраћивања важе због комутативности и са друге стране, како у случају једнакости, тако и у случају поретка. На крају овог одељка наводимо следеће три теореме.

Теорема 30 (Z^-) (*Еуклидско делење ординала*) За ма које ординале α и β, при чему је $\beta\neq0$ постоје јединствени ординали γ и δ тако да важи $\alpha=\beta\gamma+\delta$ и $\delta<\beta$.

Доказ: Докажимо најпре јединственост. За ма какве ординале γ,γ' и ординале $\delta,\delta'<\beta$ за које је $\gamma<\gamma'$ важи

$$\beta\gamma+\delta<\beta\gamma+\beta=\beta(\gamma+1)\leqslant\beta\gamma'\leqslant\beta\gamma'+\delta'.$$

Стога је β јединствен, а онда са њим одмах и δ. Докажимо егзистенцију. У случају да је $\alpha=0$ узимамо да је $\beta=\gamma=0$. Нека је зато $\alpha\neq0$. Класа свих ординала γ' за које је $\beta\gamma'>\alpha$ је непразна јер јој припада $\alpha+1$, па има најмањи елемент који због непрекидности сабирања по другом аргументу не може бити гранични. Дакле, постоји ординал γ за који је $\beta\gamma\leqslant\alpha<\beta\gamma+\beta$. Но, тада је класа ординала δ' за које је $\beta\gamma+\delta'>\alpha$ непразна јер садржи елемент β, па има најмањи елемент који поново због непрекидности сабирања по другом аргументу не може бити гранични. Дакле, постоји ординал δ за који је $\beta\gamma+\delta\leqslant\alpha<\beta\gamma+\delta+1$. QED

Теорема 31 (Z^-) (*Канторова нормална форма*) За ма које ординале α и β, при чему је $\beta\geqslant2$ постоји јединствен $n\in\omega$ и ординали γ_i,δ_i за $i\in n$ такви да важи

$$\alpha=\sum_{i\in n}\beta^{\gamma_i}\delta_i,\quad \gamma_{i+1}<\gamma_i,\quad 0<\delta_i<\beta.$$

Притом за $n>0$ важи и $\alpha<\beta^{\gamma_0+1}$.

Доказ: Докажимо најпре егзистенцију индукцијом по α. Нека је α најмањи ординал за који таква репрезентација не постоји. Будући да је збир на десној страни за $n = 0$ једнак 0, мора бити $\alpha > 0$. Такође, пошто је $\beta^\gamma \geqslant \gamma$ за сваки ординал γ, па и за $\gamma = \alpha$, класа свих ординала γ за које је $\beta^\gamma > \alpha$ је непразна, па има најмањи елемент који због непрекидности степеновања ординала по другом аргументу не може бити гранични, одакле постоји ординал γ_0 за који важи $\beta^{\gamma_0} \leqslant \alpha < \beta^{\gamma_0+1}$. Јасно је да је такав ординал γ_0 јединствен. Тада ће према претходној теореми постојати јединствени ординали δ_0 и δ за које је $\alpha = \beta^{\gamma_0}\delta_0 + \delta$ и $\delta < \beta^{\gamma_0} \leqslant \alpha$. Ту важи $\delta_0 < \beta$, јер би у супротном било $\alpha = \beta^{\gamma_0}\delta_0 + \delta \geqslant \beta^{\gamma_0+1}$ супротно избору ординала γ_0. Но, тада ће по индуктивној претпоставци постојати природан број n_0 и ординали γ'_i и δ'_i за које је

$$\delta = \sum_{i \in n_0} \beta^{\gamma'_i}\delta'_i, \quad \gamma'_{i+1} < \gamma'_i, \quad 0 < \delta'_i < \beta.$$

Али тада за $n = n_0 + 1$, $\gamma_{i+1} = \gamma'_i$ и $\delta_{i+1} = \delta'_i$ важи тражена једнакост. Доказ јединствености изводимо такође индукцијом по α. Пре тога покажимо да за свако $n > 0$ и за све γ_i и β_i као из исказа теореме мора да важи $\sum_{i\in n} \beta^{\gamma_i}\delta_i < \beta^{\gamma_0+1}$. Доказ изводимо индукцијом по n. За $n = 1$ тврђење очигледно важи. Претпоставимо да тврђење важи за $n = k + 1$ под претпоставком да важи за $n = k$. У том случају коришћењем индуктивне претпоставке одмах добијамо да важи

$$\sum_{i\in n} \beta^{\gamma_i}\delta_i = \beta^{\gamma_0}\delta_0 + \sum_{i\in k} \beta^{\gamma_{i+1}}\delta_{i+1} < \beta^{\gamma_0}\delta_0 + \beta^{\gamma_0} \leqslant \beta^{\gamma_0+1}.$$

Претпоставимо сада да важи дата репрезентација ординала α. Будући да из дате репрезентације следи да је $\beta^{\gamma_0} \leqslant \alpha < \beta^{\gamma_0+1}$ одмах добијамо да је γ_0 јединствено. Уведимо сада ознаку $\delta = \sum_{i\in n\setminus\{\emptyset\}} \beta^{\gamma_i}\delta_i$. Према претходном је $\delta < \beta^{\gamma_0} \leqslant \alpha$, што заједно са претпостављеним $\delta_0 < \beta \leqslant \beta^{\gamma_0}$ даје јединственост ординала δ_0 и δ по претходној теореми. Но, будући да је $\delta < \alpha$, његова репрезетација ће по индуктивној претпоставци бити јединствена. QED

Теорема 32 (Z^-) Нека је $\beta \geqslant 2$ произвољан ординал и нека су α, α' произвољни ординали записани у Канторовој нормалној форми са основом β као

$$\alpha = \sum_{i\in n} \beta^{\gamma_i}\delta_i, \quad \alpha' = \sum_{i\in n'} \beta^{\gamma'_i}\delta'_i.$$

Ако је $i \in n \cap n'$ најмањи број такав да је $\gamma_i \neq \gamma'_i \vee \delta_i \neq \delta'_i$ ако такав i уопште постоји, онда је

$$\alpha < \alpha' \Leftrightarrow \gamma_i < \gamma'_i \vee (\gamma_i = \gamma'_i \wedge \delta_i < \delta'_i).$$

Уколико пак таквог i нема, онда је $\alpha < \alpha'$ ако и само ако је $n < n'$.

Доказ: Ако поменути елемент i постоји, онда ће постојати и природан број $k \leqslant n \cap n'$ за који је $n = i + k$, и то је управо онај ординал k који је изоморфан добром подуређењу $n \setminus i$ доброг уређења n. Слично томе, постоји и природан број k' за који је $n' = i + k'$. За њих важи

$$\alpha = \sum_{i\in n} \beta^{\gamma_i}\delta_i + \sum_{j\in k} \beta^{\gamma_{i+j}}\delta_{i+j}, \quad \alpha' = \sum_{i\in n} \beta^{\gamma_i}\delta_i + \sum_{j\in k'} \beta^{\gamma'_{i+j}}\delta'_{i+j}.$$

Стога ће бити $\alpha < \alpha'$ ако и само ако важи $\alpha_0 < \alpha'_0$ за

$$\alpha_0 = \sum_{j\in k} \beta^{\gamma_{i+j}}\delta_{i+j}, \quad \alpha_0 = \sum_{j\in k} \beta^{\gamma'_{i+j}}\delta'_{i+j}.$$

Ако је у $\gamma_i < \gamma'_i$, онда тврђење следи из $\alpha_0 < \beta^{\gamma_i+1} \leqslant \alpha'_0$. На сличан начин се рзматра и случај када је $\gamma'_i < \gamma_i$. Нека је зато $\gamma_i = \gamma'_i$. Но, тада за $\delta_i < \delta'_i$ можемо слично као малопре уочити ординал $\delta > 0$ за који је $\delta'_i = \delta_i + \delta$, одакле је за $k = l + 1$ испуњено

$$\alpha_0 = \beta^{\gamma_i}\delta_i + \sum_{j<l} \beta^{\gamma_{i+j+1}}\delta_{i+j+1} \leqslant \beta^{\gamma_i}\delta_i + \beta^{\gamma_{i+1}} < \beta^{\gamma_i}(\delta_i + 1) \leqslant \beta^{\gamma_i}\delta'_i \leqslant \alpha'_0.$$

У случају да је $k = 0$ тврђење непосредно следи. Слично се решава случај када је $\gamma_i = \gamma'_i \wedge \delta'_i < \delta_i$. Уколико i са овим својтвима не постоји, онда је на пример за $n < n'$ ординал α' већ записан као збир ординала α и неког ординала различитог од 0, одакле је ординал α мањи од α' као његов прави почетни комад. QED

1.5 Кардинални бројеви

Нека су x и y било какви скупови. Уколико постоји функција $f : x \xrightarrow{1-1} y$ писаћемо $x \preccurlyeq y$. Та релација је очигледно рефлексивна и транзитивна. Анстисиметричност до на релацију еквипотенције је заправо последица следеће теореме.

Теорема 33 (Z^-) (*Шредер-Бернштајн*) Нека су A и B ма какви скупови и $f : A \longrightarrow$ и $g : B \longrightarrow A$ ма каква пресликавања изммеђу њих. Тада постоје дисјунктни скупови A_1 и A_2 и дисјунктни скупови B_1 и B_2 за које важи. $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$, $f[A_1] = B_1$ и $g[B_2] = A_2$.

Доказ: Посматрани услови су еквивалентни са

$$\begin{aligned}
&B_1 = f[A_1],\\
&B_2 = B \setminus f[A_1],\\
&A_2 = g[B \setminus f[A_1]],\\
&A_1 = A \setminus g[B \setminus f[A_1]].
\end{aligned}$$

Очигледно је довољно доказати да постоји $A_1 \subseteq A$ који задовољава последњу једначину јер се скупови A_2, B_1 и B_2 преосталим условима изражавају као функције од A_1. Другим речима, треба показати да функција $h : P(A) \longrightarrow P(A)$ дата са

$$h(X) = A \setminus g[B \setminus f[X]]$$

има фиксну тачку. Приметимо најпре да из $X \subseteq Y \subseteq A$ следи $h(X) \subseteq h(Y)$. Заиста, за произвољне $X, Y \subseteq A$ важи следећи импликацијски низ

$$\begin{aligned}
X \subseteq Y \quad &\Rightarrow \quad f[X] \subseteq f[Y]\\
&\Rightarrow \quad B \setminus f[X] \supseteq B \setminus f[Y]\\
&\Rightarrow \quad g[B \setminus f[X]] \supseteq g[B \setminus f[Y]]\\
&\Rightarrow \quad A \setminus g[B \setminus f[X]] \subseteq A \setminus g[B \setminus f[Y]]\\
&\Rightarrow \quad h(X) \subseteq h(Y).
\end{aligned}$$

Посматрајмо скупове $S = \{x \subseteq A : x \subseteq h(x)\}$ и $a = \bigcup S$. Тада за $x \in S$ због $x \subseteq a$ важи $h(x) \subseteq h(a)$ одакле је $x \subseteq h(x) \subseteq h(a)$, па будући да то важи за свако $x \in S$, онда је и $a = \bigcup S \subseteq h(a)$ одакле $a \in S$. Међутим, онда важи и $h(a) \subseteq h(h(a))$, одакле је $h(a) \in S$, па је $h(a) \subseteq a$. QED

Теорема 34 (Z^-) (*Кантор-Бернштајн*) За ма које скупове x и y из $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq x$ следи $x \sim y$.

Доказ: Ако $f : x \xrightarrow{1-1} y$ и $g : y \xrightarrow{1-1} x$, према претходној теореми постоје дисјунктни скупови x' и x'', као и дисјунктни скупови y' и y'' тако да важи $x = x' \cup x''$, $y = y' \cup y''$, $f[x'] = y'$ и $g[y''] = x''$. Но, тада је функција $h = f|_{x'} \cup (g|_{y''})^{-1}$ бијекција скупа x на скуп y. QED

Теорема 35 (Z^-) Аксиома избора је еквивалентна са линеарношћу уведеног предуређења скупова.

Доказ: Претпоставимо да важи аксиома избора. Тада за произвољне скупове A и B по Такијевој леми постоји максималан у смислу инклузије скуп $X \subseteq A \times B$ са особином да су X и X^{-1} функције. Тада $X : A \xrightarrow{1-1} B \ \vee \ X^{-1} : B \xrightarrow{1-1} A$, то јест важи $A \preccurlyeq B \ \vee \ B \preccurlyeq A$. Претпоставимо сада да је уведени предпоредак скупова линеаран. За сваки скуп A постоји такво добро уређење $\langle X, \leqslant \rangle$ да се скуп X не може инјективно пресликати у скуп A. Но, будући да није $X \preccurlyeq A$, по линеарности мора бити $A \preccurlyeq X$ одакле се скуп A може добро уредити. QED

Теорема 36 (Z^-) Нека су A и B било који скупови, при чему је A непразан. Ако се скуп A може инјективно пресликати у скуп B, онда се B може пресликати на A. Притом, уз аксиому избора важи и обрат.

Доказ: Ако $a \in A$ и $f : A \longrightarrow B$, онда $f^{-1} \cup ((B \setminus \mathrm{ran}(f)) \times \{a\}) : B \xrightarrow{\text{на}} A$. Са друге стране, ако је h изборна функција скупа A и $g : B \xrightarrow{\text{на}} A$, онда $f : A \xrightarrow{1-1} B$, где је функција f дефинисана са $f(x) = h(g^{-1}[\{x\}]$. QED

Теорема 37 (Z^-) (*Кантор*) Нека је x ма који скуп. Тада се скуп x не може пресликати на скуп $P(x)$. Посебно, за сваки скуп x важи $x \prec P(x)$.

Доказ: Јасно је тврђење важи за $x = \emptyset$. Да бисмо га доказали за $x \neq \emptyset$, довољно је да докажемо да се скуп x не може пресликати на скуп $P(x)$. Претпоставимо да $f : x \longrightarrow P(x)$. Тада скуп $B = \{a \in x : a \notin f(a)\}$ не може бити у слици функције f, јер за произвољно $b \in x$ важи да $b \in B \Leftrightarrow b \notin f(b)$, одакле не може бити $f(b) = B$. QED

Будући да је ово предпоредак, на поредак можемо прећи тек на одговарајућим класама еквиваленције. Међутим, одговарајућа класа еквиваленције било ког непразног скупа је права класа. У противном, ако би постојао скуп $x \neq \emptyset$ такав да је класа S свих скупова еквипотентних са x скуп, онда би се скуп $P(S)$ могао инјективно пресликати у скуп S пресликавањем $f(a) = \{a\} \times x$ супротно претходној теореми. Притом се у доказу инјективности мора користити чињеница да је $x \neq \emptyset$.

Проблем би био решен када бисмо имали функцију f такву да је $f(x)$ дефинисано за сваки скуп x и такву да је $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$. Тада бисмо вредност функције f у тачки x звали кардиналним бројем скупа x. То се може постићи у системима ZF и ZFC^-. Међутим за тим нема суштинске потребе.

Теорију кардиналних бројева можемо увести и на други начин. Уведимо најпре бесконачно много променљивих $\kappa, \lambda, \ldots$ за кардиналне бројеве. Те променљиве ће моћи да се јављају само у оним атомским формулама које су једног од облика $\kappa < \lambda$, $\kappa \leqslant \lambda$, $\kappa = \lambda$, где су и κ и λ променљиве за кардиналне бројеве. Притом се оне могу и квантификовати. Посматрајмо следећу трансформацију оваквих формула

$$
\begin{aligned}
&(\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*,\\
&(\varphi \Rightarrow \psi)^* = \varphi^* \Rightarrow \psi^*,\\
&\forall\kappa\varphi(\kappa, \bar{y}) = \forall x\varphi(|x|, \bar{y}),
\end{aligned}
$$

где је $|\cdot|$ нов унарни функцијски знак, а x прва променљива за скупове која се не јавља слободно у формули $\varphi(\kappa, \bar{y})$. Тиме смо свакој формули на проширеном алфабету без слободних променљивих за кардинале придружили формулу првог реда на језику проширеном једним унарним функцијским симболом.

Ако сада сваку формулу облика $|x| < |y|$ или $|x| \leqslant |y|$ или $|x| = |y|$ заменино формулом $x \prec y$ односно $x \preccurlyeq y$, односно $x \sim y$ тим редом, добићемо формулу на језику $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}} = \{\in\}$ која одговара полазној формули на проширеном алфабету без слободних јевљања променљивих за кардиналне бројеве. Ту формулу на проширеном алабету без слободних јављања применљивих за кардиналне бројеве ћемо сматрати скраћеним записом одговарајуће формуле на проширеном алфабету или одговарајуће формуле на језику $\{\in, |\cdot|\}$.

На сличан начин смо могли увести и теорију ординалних бројева, па за доказ да је свако добро уређење изоморфно тачно једном ординалу не бисмо морали да користимо аксиому замене.

Теорема 38 (Z^-) Кардинални бројеви скупова који се могу добро уредити су линеарно уређени.

Доказ: Ово је непосредна последица теореме 25. QED

Теорема 39 (Z^-) Кардинални број Хартогсовог броја скупа x који се може добро уредити је најмањи кардинални број скупа који се може добро уредити, а који је већи од кардиналног броја скупа x.

Доказ: Већ смо показали да је кардинални број Хартогсовог броја скупа x већи од кардиналног броја скупа x. Ако би се скуп y могао добро уредити и притом важи $x \prec y$, онда y не може бити еквипотентан правом почетном комаду Хартогсовог броја скупа x. Но, уколико се скуп y може добро уредити, онда ће у произвољном добром уређењу скупа y Хартогсов број скупа x бити изоморфан почетном комаду скупа y. QED

Нека је κ кардинални број добро уређеног скупа x. Тада кардинални број Хартогсовог броја скупа x обележавамо са κ^+.

Теорема 40 (Z^-) Скуп x се може добро уредити ако и само ако је коначан или постоје добро уређење α са највећим елементом m и функција f са доменом α која сваки елемент скупа α слика у неки добро уређен скуп и за коју важи

$$
\begin{aligned}
&f(0) \sim \omega,\\
&f(\beta+1) \sim |f(\beta)|^{+}, \quad \beta < m,\\
&f(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} f(\gamma), \quad \text{за } \beta \leqslant m \text{ гранични елемент},\\
&f(\gamma) \text{ је прави почетни комад од } f(\beta) \text{ за } \gamma < \beta,\\
&f(m) \sim x.
\end{aligned}
$$

Доказ: Јасно је да се коначни скупови могу добро уредити као еквипотентни природним бројевима, као и да се скуп x може добро уредити ако постоји добро уређење α и функција f са наведеним особинама.

Нека је x бесконачан скуп који се може добро уредити. Уочимо било које његово добро уређење $\leq'$. Нека је $\leq = \leq'$ уколико скуп x у односу на то уређење нема прави почетни комад еквипотентан са x У супротном уочимо најмањи $a \in x$ такав да скуп $[0,a) \sim x$ и било коју бијекцију $f : x \xrightarrow[\text{на}]{1-1} [0,a)$. У том случају нека је $\leq$ поредак на x дефинисан са $u \leq v \Leftrightarrow f(u) \leq' f(v)$.

Уочимо сада било који скуп m такав да $m \notin x$. Тада је скуп $y = x \cup \{m\}$ добро уређен релацијом $\leqslant = \leq \cup (y \times \{m\})$. Посматрајмо скуп α свих $t \in y$ таквих да је скуп $[0,t)$ бесконачан почетни комад од y који није еквипотентан нити са једним својим правим почетним комадом. Докажимо да скуп α у односу на наслеђено уређење заједно са функцијом f дефинисаном са $f(t) = [0,t)$ има тражене особине.

Скуп α је добро уређен као подуређење добро уређеног скупа y. Будући да је скуп $x = [0,m)$ бесконачан, постојаће најмањи елемент $a \in y$ за који је скуп $[0,a)$ бесконачан. Јасно је да је тада a најмањи елемент уређења α. Посматрајмо било који елемент $*$ који није у скупу y. Тада по теореми рекурзије постоји јединствена функција $u : \omega \longrightarrow y$ за коју важи

$$
\begin{aligned}
&u(0) = 0,\\
&u(n+1) = \begin{cases} u(n)+1, & u(n) < a,\\ *, & \text{иначе.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Индукцијом по $n \in \omega$ се доказује да је $u(n) \neq *$ за свако $n \in \omega$ и да је $u[n]$ почетни комад уређења y за свако $n \in \omega$. Но, будући да је u инјекција, скуп $u[\omega]$ је бесконачан. Скуп $u[\omega]$ је као унија почетних комада почетни комад уређења y, па је $[0,a) = u[\omega]$, одакле је $f(a) \sim \omega$. Друга, трећа и четврта особина се непосредно проверавају. Будући да је $[0,m) = x$ и да скуп x није еквипотентан нити једном свом правом почетном комаду, m ће бити највећи елемент уређења α и за њега је $f(m) \sim x$. QED

Теорема 41 (ZF^{-}) Постоји јединствена функција која сваком ординалу α придружује ординал који ћемо означавати са ω_α тако да важи

$$
\begin{aligned}
&\omega_0 = \omega,\\
&\omega_{\alpha+1} \text{ је најмањи ординал такав да важи } \omega_\alpha \prec \omega_{\alpha+1},\\
&\omega_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \omega_\beta \text{ за гранични ординал } \alpha \neq 0.
\end{aligned}
$$

Доказ: Ова чињеница се доказује обичном применом теореме рекурзије. Једино је због другог услова неопходно користити теорему о Хартогсовом броју скупа, теорему да је сваки добро уређен скуп изоморфан тачно једном ординалу и теорему о доброј уређености класе свих ординала. QED

Често се ординал ω_α означава и са $\aleph_\alpha$. Разлог лежи у томе што ординали облика ω_α су репрезентације кардинала тачно оних скупова који се могу добро уредити. Употребом различитих симболика када се врше операције над кардиналним и над ординалним бројевима истиче се о којим се операцијама ради, будући да резултат зависи од тога јесу ли у питању операције над кардиналним или над ординалним бројевима. Скупове облика $\aleph_\alpha$ зовемо и алефима.

За скуп, односно његов кардинални број рећи ћемо да има алеф ако је еквипотентан са неким ординалом облика $\aleph_\alpha$ и у том случају одговарајући ординал $\aleph_\alpha$ поистовећујемо са кардиналним бројем тог скупа. Стога ћемо убудуће алефе називати кардиналним, а не ординалним бројевима.

Теорема 42 (ZF^{-}) Могу се добро уредити тачно они бесконачни скупови који имају алеф.

Доказ: Један смер следи из претходне теореме, а други из чињенице да су алефи добро уређени. QED

Теорема 43 (ZF$^-$) Аксиома избора је еквивалентна са исказом да сви бесконачни кардинали имају алеф, то јест да су алефи једини кардинали.

Доказ: Довољно је применити претходну теорему и став о еквивалентности аксиоме избора са Цермеловим принципом доброг уређења. QED

Теорема 44 (ZF$^-$) Сви алефи су међусобно упоредиви. Штавише, класа алефа је добро уређена. Уведени Поредак алефа одговара поретку ординала у њиховим индексима.

Доказ: Ово следи из одговарајућег тврђења за ординале. Аксиома замене је ту учествовала у дефиницији појма алефа. QED

За скуп x рећи ћемо да је пребројив ако је еквипотентан скупу ω. Јасно је да су заједно са скупом ω сви пребројиви скупови бесконачни. Бесконачне скупове који нису пребројиви зовемо непребројивим. Операције над кардиналима уводимо као

$$|A| + |B| = |A \times \{0\} \cup B \times \{1\}|, \quad |A| \cdot |B| = |A \times B|, \quad {}^{|B|}|A| = \left|{}^{B}A\right|.$$

Ове операције су коректно дефинисане будући да из $A \sim A'$ и $B \sim B'$ следи

$$A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \sim A' \times \{0\} \cup B' \times \{1\}, \quad A \times B \sim A' \times B', \quad {}^{B}A \sim {}^{B'}A'.$$

За овако уведене операције се лако показује да имају следеће особине

$$\begin{aligned}
&(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu),\\
&\kappa + \mu = \mu + \kappa,\\
&\kappa + 0 = \kappa,\\
&(\kappa\lambda)\mu = \kappa(\lambda\mu),\\
&\kappa\mu = \mu\kappa,\\
&\kappa(\lambda + \mu) = \kappa\lambda + \kappa\mu,\\
&0\kappa = 0,\\
&1\kappa = \kappa,\\
&{}^{\lambda+\mu}\kappa = {}^{\lambda}\kappa{}^{\mu}\kappa,\\
&{}^{\lambda\mu}\kappa = {}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa),\\
&{}^{0}\kappa = 1,\\
&{}^{1}\kappa = \kappa.
\end{aligned}$$

Свака од ових операција је наравно неопадајућа по сваком од аргумената. Из Канторове теореме следи да је $\kappa < {}^{\kappa}2$. Но, када су аефи у питању, важи и више.

Лема 25 (Z$^-$) $x \times x \sim x$ за сваки пребројив скуп x.

Доказ: Довољно је доказати да је $\omega \times \omega = \omega$. Нека је $(s_n)_{n\in\omega}$ низ дефинисан на следећи начин

$$\begin{aligned}
&s_0 = 0,\\
&s_{n+1} = s_n + n + 1, \quad \text{за } n \in \omega.
\end{aligned}$$

Будући да су сви чланови низа у скупу ω, аксиома замене није неопходна. Тада је $f(x, y) = s_{x+y} + x$ дата једна бијекција скупа $\omega \times \omega$ на скуп ω. Заиста, са једне стране је f коректно дефинисана функција.

Покажимо да је инјекција. Лако се види да је низ $(s_n)_{n\in\omega}$ монотоно растући. Такође, за свако $n \in \omega$ важи неједнакост $s_n + n < s_{n+1}$. Због тога за свако $m, m', n, n' \in \omega$ за које је $m' \leqslant m$, $n' \leqslant n$ и $m < n$ важи $s_m + m' < s_n + n'$. Одатле одмах добијамо да из $f(x, y) = f(x', y')$ следи најпре да је $x + y = x' + y'$, а потом и да је $x + x'$. Међутим, тада мора бити и $y = y'$ чиме је доказ инјективности завршен.

Уколико f не би била сурјекција на скуп ω, постојао би најмањи $z \in \omega$ који не би припадао слици функције f. Тада свакако не би могло да буде $z = 0$, па постоји $u \in \omega$ за који је $z = u + 1$. Међутим, тада је $f(x, y) = u$ за неке $x, y \in \omega$. Уколико је ту $y = 0$, онда је

$$f(0, x + 1) = s_{x+1} = s_x + x + 1 = f(x, 0) + 1 = u + 1 = z,$$

што је по претпоставци да z није у слици функције f немогуће. Стога је $y = y' + 1$ за неко $y' \in \omega$. Но, тада је

$$f(x+1, y') = s_{x+y'+1} + x + 1 = f(x, y'+1) + 1 = f(x, y) + 1 = u + 1 = z,$$

што поново противречи претпоставци да z није у слици функције f. Овде смо користили комутативност сабирања природних бројева. Све операције које су примењене су у општем случају дефинисане на ординалима, али су коришћене и оне особине које не важе у општем случају, а за које смо нагласили да важе на скупу ω. QED

Теорема 45 (ZF$^-$) Алефи су идемпотентни, то јест за сваки ординал α важи $\aleph_\alpha \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Доказ: Посматрајмо функцију s која слика ординале у ординале на следећи начин

$$\begin{aligned} s(0) &= 0, \\ s(\alpha+1) &= s(\alpha) + \alpha 2 + 1, \\ s(\alpha) &= \bigcup_{\beta<\alpha} s(\alpha), \quad \text{за гранични ординал } \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

Тада је са

$$f(\alpha, \beta) = s(\max\{\alpha, \beta\}) + \begin{cases} \alpha, & \alpha < \beta, \\ \alpha + \beta & \beta \leqslant \alpha, \end{cases}$$

дефинисана једна бијекција класе уређених парова ординала на класу ординала. Заиста, докажимо најпре инјективност. Будући да је s монотоно растућа функција, из релације $s(\alpha) + \alpha + \alpha < s(\alpha+1)$ која важи за сваки ординал α следи најпре да за ма које ординале $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ за које је $\beta, \gamma \leqslant \alpha$ као и $\alpha', \beta' \leqslant \gamma'$ и $\alpha < \alpha'$ важи $s(\alpha) + \beta + \gamma < s(\alpha') + \beta' + \gamma'$. Отуда за ма какве ординале $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ из $f(\alpha, \beta) = f(\alpha', \beta')$ следи да је $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha', \beta'\}$ као и

$$\begin{cases} \alpha, & \alpha < \beta, \\ \alpha + \beta, & \beta \leqslant \alpha \end{cases} = \begin{cases} \alpha', & \alpha' < \beta', \\ \alpha' + \beta', & \beta' \leqslant \alpha'. \end{cases}$$

Претпоставимо да важи $\alpha < \beta$ и $\beta' \leqslant \alpha'$. Тада би важило $\alpha' = \beta$ и $\alpha = \alpha' + \beta'$, одакле је одмах

$$\alpha < \beta = \alpha' \leqslant \alpha' + \beta' = \alpha,$$

што је наравно немогуће. Стога уз услов $f(\alpha, \beta) = f(\alpha', \beta')$ из $\alpha < \beta$ следи $\alpha' < \beta'$. На потпуно сличан начин се доказује и обрнут смер. Стога у случају да је $\alpha < \beta$ важи и $\alpha' < \beta'$, а самим тим и $\beta = \beta'$ и $\alpha = \alpha'$. Ако је пак $\beta \leqslant \alpha$, онда је и $\beta' \leqslant \alpha'$, па имамо да је $\alpha = \alpha'$ и $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$, а самим тим и $\beta = \beta'$.

Да бисмо показали да је функција f сурјекција на класу свих ординала, покажимо најпре да за сваки ординал α важи $f[\alpha \times \alpha] = s(\alpha)$. Претпоставимо да је α најмањи ординал за који то није тачно. Тада α не може бити гранични ординал јер би у том случају важило

$$f[\alpha \times \alpha] = \bigcup_{\beta<\alpha} f[\beta \times \beta] = \bigcup_{\beta<\alpha} s(\beta) = s(\alpha).$$

Овде је коришћена монотонија функције s која се непоредно проверава еуклидским делењем ординала α са ω. Дакле, ординал α мотра бити облика $\gamma + 1$ за неки ординал γ. Али тада је

$$\begin{aligned} f[\alpha \times \alpha] &= f[(\gamma+1) \times (\gamma+1)] \\ &= f[\gamma \times \gamma] \cup \{f(\alpha', \gamma) : \alpha' < \gamma\} \cup \{f(\gamma, \beta' : \beta' \leqslant \gamma\} \\ &= s(\gamma) \cup \{s(\gamma) + \alpha' : \alpha' < \gamma\} \cup \{s(\gamma) + \gamma + \beta : \beta \leqslant \gamma)\} \\ &= s(\gamma) \cup ((s(\gamma) + \gamma) \setminus s(\gamma)) \cup ((s(\gamma) + \gamma 2 + 1) \setminus (s(\gamma) + \gamma)) \\ &= s(\gamma + 1) = s(\alpha), \end{aligned}$$

што противречи претпоставци да је $f[\alpha \times \alpha] \neq s(\alpha)$.

Одавде и из релације $\alpha \leqslant s(\alpha)$ која важи за сваки ординал α и која се непосредно проверава индукцијом по α следи да је пресликавање f заиста сурјекција на класу свих ординала. Докажимо још да је $|s(\alpha)| = |\alpha|$ за сваки ординал $\alpha \geqslant \omega$. Притом је већ доказано да је $\alpha \leqslant s(\alpha)$, самим тим и $|\alpha| \preccurlyeq |s(\alpha)|$.

Једнакост $s(\omega) = \omega$ следи из

$$s(\omega) = \bigcup_{n\in\omega} s(n) \subseteq \omega$$

при чему горња инклузија следи из чињенице да је $s(n) \in \omega$ за сваки $n \in \omega$. Уколико је $\alpha = \omega_\beta$ за неки ординал $\beta \geqslant 1$, под претпоставком да је $|s(\gamma)| = |\gamma|$ за сваки ординал $\omega \leqslant \gamma < \alpha$ важи

$$s(\alpha) = \bigcup_{\gamma<\alpha} s(\gamma) \leqslant \alpha.$$

Ако пак ординал $\alpha > \omega$ није тог облика, онда постоји ординал $\beta < \alpha$ за који је $\alpha \sim \beta$, па под претпоставком да је $|s(\beta)| = |\beta|$ важи

$$|\alpha| = |\beta| = |s(\beta)| = |f[\beta \times \beta]| = |\beta \times \beta| = |\alpha \times \alpha| = |f[\alpha \times \alpha]| = |s(\alpha)|.$$

Овим смо уједно доказали и да је $s(\omega_\alpha) = \omega_\alpha$ за сваки ординал α. То управо значи да f бијективно пресликава скуп $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ на ω_α. QED

На сличан начин се без аксиоме замене може доказати да ово тврђење важи за произвољан кардинални број κ бесконачног добро уређеног скупа. Тада би се уместо бијекције класе свих ординала користило добро уређење скупа $k \times k$ дефинисано са

$$\begin{array}{rcl} \langle a,b\rangle < \langle a',b'\rangle & \Leftrightarrow & \max\{a,b\} < \max\{a',b'\} \vee (\max\{a,b\} = \max\{a',b'\} \\ & \wedge & ((a<b \wedge b' \leqslant a') \vee (a<b \wedge a'<b' \wedge a<a') \vee (b \leqslant a \wedge b' \leqslant a' \wedge b<b'))), \end{array}$$

где је k добро уређење кардиналности κ које није еквипотентно нити једном свом правом почетном комаду, а уместо ординала облика ω_α елементи скупа $k \times k$ са бесконачно много претходнника, али такви да ни један мањи елемент нема скуп претходника исте кардиналности.

Последица 5 (ZF$^-$) За кардинале κ, λ добро уређених скупова од којих је барем један бесконачан важи $\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$, а ако су притом и различити од нуле онда важи и $\kappa\lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$. Штавише, за било који кардинал κ бесконачног добро уређеног купа је ${}^\kappa\kappa = {}^\kappa 2$.

Доказ: Докажимо последњи део тврђења.

$${}^\kappa 2 \leqslant {}^\kappa\kappa \leqslant {}^\kappa({}^\kappa 2) = {}^{\kappa\cdot\kappa}2 = {}^\kappa 2.$$

Сада тврђење следи из Кантор-Бернштајнове теореме. QED

Овај став се може доказати и без примене аксиоме замене, дакле у систему Z$^-$ али је овде изведен из теорема доказаних у ZF$^-$. Уведимо сада оперције суме и производа фамилије крдинала. Нека је $(x_i)_{i\in I}$ било која фамилија скупова. Тада суму и производ одговарајуће фамилије кардиналних бројева дефинишемо као

$$\sum_{i\in i} |x_i| = |\bigcup_{i\in I} (x_i \times \{i\})|, \quad \prod_{i\in I} |x_i| = |\prod_{i\in I} x_i|.$$

У том смислу важи следећа теорема.

Теорема 46 (ZC$^-$) (*Кенигова лема за кардинале*) Нека су $(x_i)_{i\in I}$ и $(y_i)_{i\in I}$ две фамилије скупова индексиране истим скупом индекса I, при чему за свако $i \in I$ важи $x_i \prec y_i$. Тада је

$$\sum_{i\in I} |x_i| < \prod_{i\in I} |y_i|.$$

Другим рачима за ме које фамилије кардинала $(\kappa_i)_{i\in I}$ и $(\lambda_i)_{i\in I}$ индексиране истим скупом индекса I за које је $k_i < \lambda_i$ за ма које $i \in I$ важи $\sum_{i\in i} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$.

Доказ: Са обзиром на аксиому избора, довољно је да докажемо да се скуп $X = \bigcup_{i\in I} x_i \times \{i\}$ не може пресликати на скуп $Y = \prod_{i\in I} y_i$, јер он такође према аксиоми избора није празан. Уочимо произвољно пресликавање $f : X \longrightarrow Y$. Нека је $f_i : x_i \longrightarrow y_i$ пресликавање дефинисано са $f_i(a) = f(\langle a, i\rangle)(i)$. Тада је због $x_i \prec y_i$ скуп $y_i \setminus \mathrm{ran}(f_i)$ непразан, па по аксиоми избора постоји неки $b \in \prod_{i\in I}(y_i \setminus \mathrm{ran}(f_i))$. Но, тада $b \notin \mathrm{ran}(f)$. QED

Нека је $o = \langle x, \leq\rangle$ било који бесконачан добро уређен скуп без највећег елемента. Тада постоји најмањи кардинални број κ такав да постоји $u \subseteq x$ кардиналности κ такав да је скуп u одозго неограничен у уређењу $\langle x, \leq\rangle$. Тај кардинал је кардинални број добро уређеног скупа јер је скуп u добро уређен наслеђеним поретком. Тај кардинални број зовемо и кофиналношћу уређења o и означамо га $\mathrm{cf}(o)$.

Уколико притом уређење o нема прави почетни комад еквипотентан целом скупу носачу, онда кажемо да је $\mathrm{cf}(o)$ кофиналност кардиналног броја скупа x у ознаци $\mathrm{cf}(|x|)$. Притом се за сваки добро уређен скуп може наћи његов почетни комад који је еквипотентан са целим скупом носачем и који у наслеђеном уређењу има претходно наведену особину. Кардинални број κ зовемо регуларним ако је $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

Лема 26 (Z^-) Нека су $o = \langle x, \leq\rangle$ и $o' = \langle x', \leq'\rangle$ добра уређења и $f : x \longrightarrow x'$ монотоно растуће одозго неограничено пресликавање. Тада је $\mathrm{cf}(o) = \mathrm{cf}(o')$.

Доказ: Нека је $\mathrm{cf}(o) = \kappa$ и y одозго неограничен подскуп од x кардиналности κ. Тада је $f[y]$ одозго неограничен подскуп од x' такође кардиналности κ, па је $\mathrm{cf}(o') \leqslant \mathrm{cf}(o)$. Нека је сада $\mathrm{cf}(o') = \kappa$ и y' одозго неограничен подскуп од x' кардиналности κ. Уочимо скуп

$$A = \{\min(f^{-1}[\{a\}]) : a \in y'\} \subseteq x.$$

Он ће имати кардиналност κ и биће одозго неограничен у x одакле следи да је $\mathrm{cf}(o) \leqslant \mathrm{cf}(o')$. QED

Теорема 47 (Z^-) Нека је $o = \langle x, \leq\rangle$ бесконачно добро уређење без максимума кофиналности κ. Тада постоји одозго неограничен подскуп кардиналности κ у том уређењу који у односу на наслеђени поредак није еквипотентан нити једном свом правом почетном комаду.

Кардинал κ је регуларан кардинал мањи до једнак од $|x|$, који самим тим представља кардинални број неког добро уређеног скупа. Другим речима, важи $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(o)) = \mathrm{cf}(o)$. Уз аксиому замене је кардинал $\aleph_{\alpha+1}$ регуларан за сваки ординал α. Кардинал $|\omega|$ је такође регуларан. Такође, уз аксиому замене је и $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$ за ма који бесконачан гранични ординал α.

Доказ: Уколико уз симболику из исказа теореме важи $\mathrm{cf}(o) = \kappa$, можемо уочити $y \subseteq x$ за који је $|y| = \kappa$ и који је неограничен у x, као и најмањи почетни комад k скупа y еквипотентан са y. Нека $f : k \xrightarrow[\text{на}]{1-1} y$. Тада ће скуп

$$A = \{f(a) : a \in k \wedge (\forall b \in k) f(b) < f(a)\}$$

бити неограничен у y. Заиста, у супротном би постојао најмањи елемент $z \in y$ који је већи од свих елемената скупа A. Но, тада би за $a = f^{-1}(z)$ важило да $z = f(a) \in A$ супротно избору елемента z. Међутим, тада је скуп A кардиналности κ одозго неограничен у x и притом нити један прави почетни комад од A није еквипотентан са A.

Заиста, пошто је скуп A одозго неограничен у x, његова кардиналност мора бити већа до једнака од κ, а пошто је подскуп скупа y кардиналности κ, он је кардиналности мање до једнаке од κ. Функција f је монотоно растућа на скупу A, па ако би скуп A био еквипотентан неком свом правом почетном комаду $[0, a)$, онда би и скуп $f^{-1}[A]$ био еквипотентан са $f^{-1}[[0, a)]$, одакле би било

$$|k| = \kappa = |A| = |f^{-1}[A]| = |f^{-1}[[0, a)]| \leqslant |[0, f^{-1}(a))| < |k|.$$

Ако би било $\mathrm{cf}(\kappa) = \lambda < \kappa$, онда бисмо имали подскуп B скупа A који је кардиналности λ и који је одозго неограничен у A. Но, тада не би био одозго ограничен ни у x, супротно избору кардинала κ и λ.

Нека је α произвољан ординал и $A \subseteq \omega_{\alpha+1}$ одозго неограничен скуп. Сваки елемент скупа A је кардиналности мање до једнаке од $\aleph_\alpha$. Ако не би било $|A| = \aleph_{\alpha+1}$, онда би будући да је A добро уређен скуп било $|A| \leqslant \aleph_\alpha$. Но, тада би било $|\omega_{\alpha+1}| \leqslant \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ супротно дефиницији ординала $\omega_{\alpha+1}$. Последњи део следи на основу претходне леме примењене на пресликавање $\alpha \mapsto \omega_\alpha$. QED

Теорема 48 ZC^- За сваки бесконачан кардинал κ је ${}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa > \kappa$. Притом је $\mathrm{cf}({}^{\kappa}\lambda) > \kappa$ за произвољан кардинал $\lambda \geqslant 2$.

Доказ: Нека је x добро уређен скуп кардиналности κ који није еквипотентан нити једном свом правом почетном комаду. Из Кенигове леме следи

$$|x| = |\bigcup_{i\in x}[0, i)| \leqslant \sum_{i\in x} |[0, i)| < |\prod_{i\in x} x| = {}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa.$$

Други део такође следи из Кенихове леме и из идемпотентности бесконачних кардинала. Нека је k добро уређен скуп кардиналности ${}^{\kappa}\lambda$ који није еквипотентан нити једном свом правом почетном комаду и нека је x његов одозго неограничен подскуп. Претпоставимо ли да је $|x| \leqslant \kappa$ добијамо да је

$${}^{\kappa}\lambda = |\bigcup_{i \in x}[0,i)| \leqslant \sum_{i \in x}|[0,i)| < \prod_{i \in x}{}^{\kappa}\lambda = {}^{\kappa \cdot |x|}\lambda \leqslant {}^{\kappa \cdot \kappa}\lambda = {}^{\kappa}\lambda,$$

што је контрадикција. QED

1.6 Геделове теореме непотпуности

1.6.1 Рекурзивне функције

Функцију $f : A \to \mathbb{N}_0$ где је A произвољан подскуп скупа $\mathbb{N}_0^n$ зовемо и једном (парцијалном) аритметичком функцијом дужине n. У посебном случају када је $A = {\mathbb{N}_0}^n$ кажемо да је та функција тотална. Релације $R \subseteq \mathbb{N}_0^k$ такође називамо аритметичким. Надаље ћемо за све функције дефинисане изразима који имају смисла у скупу природних бројева сматрати аритметичким, и то дефинисаним за тачно оне вредности аргумената из скупа $\mathbb{N}_0$ за које је вредност тог израза дефинисана.

Сада ћемо увести скуп такозваних рекурзивних функција за које ће се испоставити да су то тачно оне функције које су представљиве у теорији Z^- и свим њеним непротивречним проширењима.

Функције

$$\begin{aligned}&U_i^n(x_1,\dots,x_n) = x_i,\\ &0(x_1,\dots,x_n) = 0,\\ &s(x) = x+1\end{aligned}$$

зовемо основним рекурзиним функцијама.

Нека је $\bar{x} = x_1,\dots,x_n$. Ако су $h_1(\bar{x}),\dots,h_m(\bar{x})$ парцијалне функције дужине n и $g(y_1,\dots,y_m)$ парцијална функција дужине m, онда је са

$$f(\bar{x}) = g(h_1(\bar{x}),\dots,h_m(\bar{x}))$$

коректно дефинисана једна функција на скупу таквих $(x_1,\dots,x_n)$ за које је десна страна једнакости дефинисана. За њу кажемо да је добијена супституцијом из функција $g, h_1,\dots,h_m$.

Нека су сада $g : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $h : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ две тоталне функције. Тада по теореми рекурзије постоји јединствена функција $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$ која задовољава следеће услове:

$$\begin{aligned}&f(\bar{x},0) = g(\bar{x}),\\ &f(\bar{x},y+1) = h(\bar{x},y,f(\bar{x},y)),\end{aligned}$$

где је $\bar{x}$ ознака за $x_1,\dots,x_n$. У случају да су функције $g(\bar{x})$ и $h(\bar{x},y,z)$ парцијално дефинисане, онда је $f(\bar{x},y)$ дефинисана на скупу S таквом да је

$$\begin{aligned}&(\bar{x},0) \in S \text{ ако и само ако } \bar{x} \in \mathrm{dom}(g),\\ &(\bar{x},k+1) \in S \text{ ако и само ако } \bar{x} \in \mathrm{dom}(g)\\ &\quad \text{и постоји низ } y_0,\dots,y_k \text{ тако да је}\\ &y_0 = g(\bar{x}), \quad (\bar{x},0,y_0) \in \mathrm{dom}(h),\\ &y_1 = h(\bar{x},0,y_0) \quad \text{и} \quad (\bar{x},1,y_1) \in \mathrm{dom}(h),\\ &\qquad\qquad \cdots\\ &y_k = h(\bar{x},k-1,y_{k-1}) \quad \text{и} \quad (\bar{x},k,y_k) \in \mathrm{dom}(h)\end{aligned}$$

за све $x_1,\dots,x_n,k \in \mathbb{N}_0$. Притом је вредност функције f на скупу S јединствено одређена горњим алгоритмом, при чему је

$$\begin{aligned}&f(\bar{x},0) = g(\bar{x}),\\ &f(\bar{x},k+1) = h(\bar{x},k,y_k).\end{aligned}$$

За такву функцију f кажемо да је добијена рекурзијом из g и h.
Ако је пак $g(\bar{x}, y)$ тотална функција, онда за функцију

$$f(\bar{x}) = \mu y \ (g(\bar{x}, y) = 0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{за } g(\bar{x}, z) = 0 \quad \text{и} \\ & g(\bar{x}, y) \neq 0 \text{ за све } y < z, \\ \text{недефинисано} & \text{иначе} \end{cases}$$

кажемо да је добијена минимизацијом функције g по промењљивој y. Ту наравно, функција g може бити и парцијално дефинисана, и у том случају ће $f(\bar{x})$ бити дефинисано и једнако z ако и само ако је $g(\bar{x}, y)$ дефинисано за све $y \leq z$ и притом $g(\bar{x}, z) = 0$ и $g(\bar{x}, y) \neq 0$ за све $y < z$. Оператор минимизације се разматра и на релацијама. Наиме, ако је $D(\bar{x}, y)$ релација дужине $n+1$, онда је са

$$f(\bar{x}) = \mu y \ D(\bar{x}, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z & \text{за } D(\bar{x}, z) \quad \text{и} \\ & \neg D(\bar{x}, y) \text{ за све } y < z, \\ \text{недефинисано} & \text{иначе} \end{cases}$$

добро дефинисана једна функција коју зовемо и минимизацијом релације $D(\bar{x}, y)$ по промењљивој y.

Дефиниција 10 Скуп примитивно рекурзивних функција је најмањи скуп који садржи основне рекурзивне функције и који је затворен за супституцију и рекурзију, а скуп рекурзивних функција је најмањи скуп који садржи све основне рекурзивне функције и затворен је за супституцију, рекурзију и минимизацију.

За релацију $D(\bar{x})$ дужине n кажемо да је (примитивно) рекурзивна ако је таква њена карактеристична функција $c_D(\bar{x})$ дефинисана са

$$c_D(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{ako je } D(\bar{x}), \\ 0 & \text{ako nije } D(\bar{x}). \end{cases}$$

Из дефиниције примитивно рекурзивних функција је јасно да су оне све тоталне. Најпре ћемо се позабавити примитивно рекурзиним функцијама. Стога ћемо надаље, све док не будемо прешли на рекурзивне функције подразумевати да радимо искључиво са тоталним функцијама. Наведимо неке примере примитивно рекурзивних функција.

Став 5 Следеће функције су примитивно рекурзивне:

а) Константне функције $f(\bar{x}) = n$,

б) сабирање $p(x, y) = x + y$,

в) множење $m(x, y) = x \cdot y$,

г) степеновање $n(x, y) = x^y$.

Доказ:

а) Заиста, $f(\bar{x}) = n$ се може представити као композиција нула функције и n функција наследника.

б) Како је

$$\begin{aligned} &p(x, 0) = x, \\ &p(x, y+1) = x + y + 1 = p(x, y) + 1 \end{aligned}$$

довољно је да покажемо да је функција $g(x) = x$ примитивно рекурзивна и да постоји примитивно рекурзивна функција $h(x, y, z)$ таква да за све $x, y \in \mathbb{N}_0$ важи

$$h(x, y, x + y) = x + y + 1.$$

Како је $g = U_1^1$ јасно је да је g примитивно рекурзивна. За h можемо изабрати функцију $h(x, y, z) = z + 1$ која је примитивно рекурзивна због

$$h(x, y, z) = s(z) = s(U_3^3(x, y, z)).$$

в) Из релација

$$\begin{aligned} &m(x, 0) = 0, \\ &m(x, y+1) = x(y+1) = xy + x = m(x, y) + x \end{aligned}$$

и чињенице да је $0(x) = 0$ примитивно рекурзивна следи да је довољно показати да постоји примитивно рекурзивна функција $h(x, y, z)$ таква да за све $x, y \in \mathbb{N}_0$ важи

$$h(x, y, xy) = xy + x.$$

Јасно је да је то испуњено за функцију

$$h(x, y, z) = z + x = U_3^3(x, y, z) + U_1^3(x, y, z).$$

г) Следи из чињеница:

$$\begin{array}{l} n(x,0) = 1 = s(0(x)), \\ n(x, y+1) = x^y \cdot x = n(x,y) \cdot x = U_3^3(x, y, n(x,y)) \cdot U_1^3(x, y, n(x,y)) \qquad \text{QED} \end{array}$$

Вредно је поменути и следећу особину произвољне класе $\mathcal{C}$ која садржи све пројекцијске функције и која је затворена за супституцију.

Став 6 Ако је $g(x_1, \dots, x_n)$ ма која функција из класе $\mathcal{C}$, тада и функција

$$f(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = g(x_{i_{\pi(1)}}, \dots, x_{i_{\pi(n)}})$$

такође припада тој класи $\mathcal{C}$, при чему је $i_1, \dots, i_m$ ма који низ различитих индекса, који не морају бити из скупа $\{1, \dots, n\}$, а π било које пресликавање скупа $\{1, \dots, n\}$ у скуп $\{1, \dots, m\}$.

Доказ: Следи директно из чињеница да је класа $\mathcal{C}$ затворена за супституцију и да су пројекцијске функције у класи $\mathcal{C}$, обзиром да је за $\bar{x} = x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ испуњено

$$f(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = g(U_{i_1}^n(\bar{x}), \dots, U_{i_n}^m(\bar{x})). \quad \text{QED}$$

То посебно значи да ако је функција $f(x, y, z, t, u, v)$ у класи $\mathcal{C}$ онда ће то бити и функције као

$$\begin{array}{l} f(y, z, x, v, u, t), \\ f(x, x, y, x, x, z), \\ g(x, y, w) = f(x, x, y, y, y, y), \\ h(u, v, w) = f(u, u, u, u, u, u) \end{array}$$

односно да аргументе можемо пермутовати, понављати као и уводити нове аргументе од којих функција не зависи. Такође, можемо се ослободити аргумената од којих функција не зависи. Тако на пример, ако $f(x, y, z, t, u, v)$ не зависи од z и t, применом супституције можемо прећи на функцију

$$g(x, y, u, v) = f(x, y, x, x, u, v).$$

Дакле, рекурзивност и примитивна рекурзивност функција не зависе од увођења или искључивања аргумената од којих функција не зависи. Исто важи и за релације. Наведимо још неке примере примитивно рекурзивних функција.

Став 7 Следеће функције и релације су примитивно рекурзивне:

а) Факторијел функција $x!$,

б) функција $x \dot{-} y$ дефинисана као

$$x \dot{-} y \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x - y, & \text{за } y < x, \\ 0, & \text{за } y \geq x, \end{cases}$$

в) функције $|x - y|$ и $\min\{x, y\}$, $\max\{x, y\}$, као и функције $\min\{x_1, \dots, x_n\}$ и $\max\{x_1, \dots, x_n\}$,

г) функције $\mathrm{sg}(x)$, $\overline{\mathrm{sg}}(x)$ дефинисане са

$$\mathrm{sg}(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}, \quad \overline{\mathrm{sg}}(x) \overset{\text{def}}{=} 1 \dot{-} \mathrm{sg}(x),$$

д) буловске комбинације примитивно рекурзивних релација,

ђ) релације $x = y$, $x \neq y$, $x < y$, $x \leq y$,

е) функције $\mathrm{rm}(x, y)$ и $\mathrm{qt}(x, y)$ остатка[2] и количника при дељењу x са y,

[2] Подразумеваћемо да је $\mathrm{rm}(y, 0) = y$ и $\mathrm{qt}(y, 0) = 0$.

ж) релација дељивости $x|y$.

Доказ:

а) Ову функцију формално не можемо добити директном применом правила рекурзије, јер функција g из дефиниције правила рекурзије мора имати дужину бар један, па самим тим функција која се добија рекурзијом из неких функција има дужину бар два. Стога ћемо по претходној напомени увести још један аргумент од кога факторијелна функција не зависи и посматрати функцију

$$u(x, y) = y!.$$

Наравно, она је примитивно рекурзивна због

$$\begin{aligned}&u(x, 0) = 1 = 1(x) = s(0(x)),\\&u(x, y+1) = (y+1)! = y! \cdot (y+1) = u(x, y) \cdot s(U_2^2(x, y)).\end{aligned}$$

Ту је наравно $f(x) = u(x, x)$. У даљем тексту се у складу са претходном напоменом нећемо више оптерећивати распоредом и бројањем променљивих.

б) Обзиром да је

$$\begin{aligned}&x \dot{-} 0 = x,\\&x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1\end{aligned}$$

остаје само да се покаже да је функција $x \dot{-} 1$ примитивно рекурзивна. То следи диектно из

$$\begin{aligned}&0 \dot{-} 1 = 0,\\&(x+1) \dot{-} 1 = x.\end{aligned}$$

в) Следи директно из релација

$$\begin{aligned}&|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x),\\&\min\{x, y\} = x \dot{-} (x \dot{-} y),\\&\max\{x, y\} = x + (y \dot{-} x),\\&\min\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} = \min\{x_1, \min\{x_2, \ldots, x_{n+1}\}\},\\&\max\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} = \max\{x_1, \max\{x_2, \ldots, x_{n+1}\}\}.\end{aligned}$$

г) Следи из $\overline{\mathrm{sg}}(x) = 1 \dot{-} x$, $\mathrm{sg}(x) = \min\{1, x\}$.

д) Следи из одговарајућих релација за карактеристичне функције

$$\begin{aligned}&c_{\neg P}(\bar{x}) = 1 \dot{-} c_P(\bar{x}),\\&c_{P \wedge Q}(\bar{x}) = c_P(\bar{x}) \cdot c_Q(\bar{x}).\end{aligned}$$

ђ) Карактеристична функција за $x < y$ је $\mathrm{sg}(y \dot{-} x)$, а остале се релације добијају као њене буловске комбинације.

е) Рекурзивност функције $\mathrm{rm}(x, y)$ следи из

$$\begin{aligned}\mathrm{rm}(0, y) &= 0,\\ \mathrm{rm}(x+1, y) &= \begin{cases}\mathrm{rm}(x, y) + 1, & \text{за } \mathrm{rm}(x, y) + 1 \neq y,\\ 0, & \text{за } \mathrm{rm}(x, y) + 1 = y,\end{cases}\\ &= (\mathrm{rm}(x, y) + 1) \cdot \mathrm{sg}(|(\mathrm{rm}(x, y) + 1) - y|).\end{aligned}$$

За функцију $\mathrm{qt}(x, y)$ је

$$\mathrm{qt}(0, y) = 0,$$

$$\mathrm{qt}(x+1, y) = \mathrm{qt}(x, y) + \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rm}(x+1, y)).$$

ж) $x|y$ је заправо еквивалентно са $\mathrm{rm}(y, x) = 0$ QED

Да бисмо појудноставили доказивање примитивне рекурзивности релација доказаћемо затвореност класе примитивно рекурзивних функција за још неке операторе. Штавише, тај резултат ћемо уопштити на ма коју класу аритметичких функција $\mathfrak{C}$ која садржи све основне рекурзивне функције и која је затворена за супституцију и рекурзију. Притом ћемо говорити да нека аритметичка релација припада класи $\mathfrak{C}$ ако њена карактеристична функција припада класи $\mathfrak{C}$.

Став 8 Нека је $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$. Ако су $g_1(\bar{x}), \ldots, g_m(\bar{x})$, $g(\bar{x}, y)$ тоталне функције из класе $\mathfrak{C}$ и ако су $D(\bar{x}, y), D_1(\bar{x}), \ldots, D_m(\bar{x})$ предикати из класе $\mathfrak{C}$, онда класи $\mathfrak{C}$ припадају и ниженаведене функције и предикати при чему су све ниженаведене функције и тоталане.

а) Дефиниција по случајевима

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} g_1(\bar{x}), & \text{za } D_1(\bar{x}), \\ & \cdots \\ g_m(\bar{x}), & \text{za } D_m(\bar{x}). \end{cases}$$

б) Буловске комбинације предиката из $\mathfrak{C}$.

в) Ограничено сумирање и ограничен производ

$$f_1(\bar{x}, z) = \textstyle\sum_{y<z} g(\bar{x}, y),$$
$$f_2(\bar{x}, z) = \textstyle\prod_{y<z} g(\bar{x}, y).$$

г) Ограничена минимизација

$$f(\bar{x}, z) = (\mu y < z)(g(\bar{x}, y) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} t, & \text{најмањи } t < z \text{ тако да} \\ & g(x, t) = 0 \text{ ако такав постоји,} \\ z, & \text{иначе.} \end{cases}$$

д) Ограничено претраживање одоздо[3]

$$f(\bar{x}, z) = \begin{cases} t, & \text{ако је } t \text{ намањи број} \\ & \text{мањи од } z \text{ за који је } D(\bar{x}, t) \\ & \text{ако такав постоји,} \\ z, & \text{иначе.} \end{cases}$$

ђ) Ограничено претраживање одозго

$$f(\bar{x}, z) = \begin{cases} t, & \text{ако је } t \text{ највећи број} \\ & \text{мањи од } z \text{ за који је } D(\bar{x}, t) \\ & \text{ако такав постоји,} \\ z, & \text{иначе.} \end{cases}$$

е) Ограничена универзална и егзистенцијална квантификација

$$\begin{aligned} S_1(\bar{x}, z) \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall y < z) D(\bar{x}, y), \\ S_2(\bar{x}, y) \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists y < z) D(\bar{x}, y). \end{aligned}$$

Доказ:

а) Следи из

$$f(\bar{x}) = g_1(\bar{x}) c_{D_1}(\bar{x}) + \cdots + g_m(\bar{x}) c_{D_1}(\bar{x}).$$

б) Следи из релација

$$c_{D_1 \wedge D_2} = c_{D_1} \cdot c_{D_2}, \quad c_{\neg D} = 1 \dot{-} c_D$$

.

[3]Ово је наравно ништа друго до ограничена минимизација предиката $D(\bar{x}, y)$ по промењљивој y $(\mu y < z)\ D(\bar{x}, y)$.

в) Добија се одмах из релација

$$f_1(\bar{x},0)=0,$$
$$f_1(\bar{x},z+1)=f_1(\bar{x},z)+g(\bar{x},z);$$

$$f_2(\bar{x},0)=1,$$
$$f_2(\bar{x},z+1)=f_2(\bar{x},z)\cdot g(\bar{x},z).$$

г) Следи из претходних релација и

$$f(\bar{x},z)=\textstyle\sum_{t<z}\mathrm{sg}(\prod_{y\le t}g(\bar{x},y)).$$

д) Следи из

$$f(\bar{x},z)=(\mu y<z)(c_{\neg D}(\bar{x},z)=0).$$

ђ) Може се представити као

$$f(\bar{x},z)=z\mathbin{\dot{-}}(\mu y<z)(c_{\neg D}(\bar{x},z\mathbin{\dot{-}}y)=0).$$

е) Добијамо из

$$c_{S_1}(\bar{x},z)=\textstyle\prod_{y<z}c_D(\bar{x},y),$$
$$c_{S_2}(\bar{x},z)=\mathrm{sg}(\textstyle\sum_{y<z}c_D(\bar{x},y))$$

QED

Јасно је да се у претходном ставу може свуда $y<z$ заменити са $y<h(\bar{x},z)$ односно $y\leqslant h(\bar{x},z)$ где је $h(\bar{x},z)$ ма која[4] примитивно рекурзивна функција. Уведимо сада кодирање коначних низова природних бројева. За то ће нам требати следећи став.

Став 9 Предикат $Prost(x)$ и низ[5] p_n дефинисани као

$$Prost(x) \quad\Leftrightarrow\quad \text{"}x \text{ je prost broj"},$$
$$p_n \text{ je } n\text{-ti prost broj} \quad p_0=2,\ p_1=3,\dots$$

су примитивно рекурзивни, као и функција $\pi_m(n)$ дефинисана са

$$\pi_m(n)=\begin{cases}0, & \text{за } n=0,\\ \text{највећи } \alpha \\ \text{тако да } p_m^{\alpha}|n, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Доказ: $Prost(x)$ је заправо исто што и

$$(x\ge 2)\wedge(\forall y<x)(y|x\Rightarrow y=1).$$

Са друге стране, претпоставимо да је $p_0,\dots,p_n$ низ првих $n+1$ простих бројева у растућем поретку. Тада број

$$k=p_0\cdots p_n+1$$

није дељив ни са једним од простих бројева $p_0,\dots,p_n$, па мора бити $p_{n+1}\le k$. Како је још $k\le p_n!+1$ биће заправо $p_{n+1}\le p_n!+1$ као најмањи прост број већи од p_n, па га можемо добити ограниченим претраживањем. Такође из неједнакости $\alpha<p_m^{\alpha}$ која се лако доказује индукцијом по α, следи да је за $n>0$ заправо $\pi_m(n)<n$. Другим речима, за $n>0$ је $\pi_m(n)$ највећи број α мањи од n за који $p_m^{\alpha}|n$. На основу претходних разматрања то су примитивно рекурзивне функције. QED

Сада ћемо увести кодирање коначних низова на следећи начин: Празан низ[6] ћемо кодирати нулом. Једночлан низ a кодирамо бројем $2^{a+1}\mathbin{\dot{-}}1$, а низ $a_1,\dots,a_n$ за $n\ge 2$ ћемо кодирати бројем

$$\ulcorner a_1,\dots,a_n\urcorner=p_0^{a_1}\cdots p_{n-2}^{a_{n-1}}p_{n-1}^{a_n+1}\mathbin{\dot{-}}1.$$

Уведимо следеће функције везане за ово кодирање:

[4]Добијамо их супституцијом функција $h(\bar{x},z)$ и $h(\bar{x},z)+1$

[5]Низ као функција једне променљиве.

[6]Низ без иједног члана

а) $l(x) =$ "дужина низа чији је код x",

б) $(x)_n =$ "n-ти члан[7] низа чији је код x" ако је $n < b(l(x))$, односно 0 у противном.

Јасно је да су оне[8] примитивно рекурзивне. Могле би се рецимо записати као

$$l(x) = \text{ највећи } n < x \text{ такав да } p_n | (x+1),$$

$$(x)_n = \pi_n(x+1) \dot{-} \operatorname{sg}|n - l(x)|.$$

Кодирање скупа $\mathbb{N}_0^2$ уведимо на следећи начин: Нека је код пара (x, y) дат са

$$\ulcorner (x,y) \urcorner = 2^x(2y+1) \dot{-} 1.$$

Јасно је да је функција $\ulcorner (x,y) \urcorner$ примитивно рекурзивна заједно са одговарајућим пројекцијским функцијама π_1^2, π_2^2 за које је

$$\begin{array}{l} \pi_1^2(\ulcorner (x,y) \urcorner) = x, \\ \pi_2^2(\ulcorner (x,y) \urcorner) = y. \end{array}$$

Наиме, оне се могу записати као

$$\begin{array}{l} \pi_1^2(x) = \pi_0(x+1), \\ \pi_2^2(x) = \operatorname{qt}(2^{\pi_0(x+1)+1}, x+1). \end{array}$$

Слично се уводи и кодирање тројки са

$$\ulcorner (x,y,z) \urcorner = \ulcorner (\ulcorner (x,y) \urcorner, z) \urcorner.$$

Аналогно кодирању парова и кодирање тројки је такође примитивно рекурзивно заједно са пројекцијским функцијама $\pi_1^3, \pi_2^3, \pi_3^3$ за које је

$$\begin{array}{l} \pi_1^3(\ulcorner (x,y,z) \urcorner) = x, \\ \pi_2^3(\ulcorner (x,y,z) \urcorner) = y, \\ \pi_3^3(\ulcorner (x,y,z) \urcorner) = z. \end{array}$$

Оне су заправо дате формулама

$$\begin{array}{l} \pi_1^3(x) = \pi_1^2(\pi_1^2(x)), \\ \pi_2^3(x) = \pi_2^2(\pi_1^2(x)), \\ \pi_3^3(x) = \pi_2^2(x). \end{array}$$

На потпуно аналоган начин се може увести кодирање n-торки за произвољно $n > 3$, али нам то неће требати.

1.6.2 Аритметичке формуле у теорији скупова

За сваки $n \in \mathbb{N}_0$ дефинишимо формулу $S_n(x)$ као

$$S_0(x) \,:\, \forall y \, y \notin x, \quad S_{n+1}(x) \,:\, \forall y (y \in x \Leftrightarrow \bigvee_{i \leqslant n} S_i(y)),$$

где је y прва у низу свих променљивих која је различита од x. Ове формуле ће нм служити за интерпретирање одговарајућих природних бројева. Уведимо формуле за интерпретирање сабирања и множења природних бројева као

$$\begin{array}{l} S_+(x,y,z) \,:\, x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge \exists f(\mathrm{Fun(f)} \wedge \mathrm{dom}(f) = S(y) \wedge f(0) = x \wedge (\forall i \in y) f(S(i)) = S(f(i)) \wedge f(y) = z), \\ S_\cdot(x,y,z) \,:\, x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge \exists f(\mathrm{Fun(f)} \wedge \mathrm{dom}(f) = S(y) \wedge f(0) = 0 \wedge (\forall i \in y) S_+(f(i), x, f(S(i))) \wedge f(y) = z). \end{array}$$

[7] Индекс првог члана низа је 0.

[8] Ту је функција $(x)_n$ посматрана као функција две променљиве.

Притом се променљиве са везаним јављањима редом уводе као прве променљиве које су различите од променљивих x, y, z и које дотле нису већ употребљене. Сада смо спремни да дефинишемо превод аритметичких формула на језик теорије скупова.

$(x = y)^* : x = y$, $(x = n)^*$, $(n = x)^* : S_n(x)$, $(m = n)^* : \exists x(S_m(x) \wedge S_n(x))$,

$(t = n)^*$, $(n = t)^* : \exists x(S_n(x) \wedge (t = x)^*)$, $(x = t)^* : (t = x)^*$,

где терм t није променљива нити константа,

$(t_1 + t_2 = x)^* : \exists y \exists z((t_1 = x)^* \wedge (t_2 = y)^* \wedge S_+(y, z, x))$, $(t_1 \cdot t_2 = x)^* : \exists y \exists z((t_1 = x)^* \wedge (t_2 = y)^* \wedge S_\cdot(y, z, x))$,

где су y, z прве променљиве које се не јављају у термима t_1, t_2,

$(\neg\varphi)^* : \neg\varphi^*$, $(\varphi \Rightarrow \psi)^* : \varphi^* \Rightarrow \psi^*$, $((\forall x < y)\varphi)^* : (\forall x \in y)\varphi^*$, $((\forall x < n)\varphi)^* : \exists z(S_n(z) \wedge (\forall x \in z)\varphi^*)$

где је z променљива која се не јавља слободно у формули φ,

$(\exists x\varphi)^* : (\exists x \in \omega)\varphi^*$.

1.6.3 Представљивост функција и релација

Дефиниција 11 Нека је T било која теорија на пример првог реда (мада се тај услов може много ослабити) у којој је дефинабилно бесконачно много константи $c_0, c_1, c_2, \ldots$, при чему за ма које $m, n \in \mathbb{N}_0$ из $m \neq n$ следи да $T \vdash c_m \neq c_n$. Уз договор да за свако $i \in \mathbb{N}_0$ елемент c_i сматрамо интерпретацијом метатеоријског елемента $i \in \mathbb{N}_0$ у тој теорији, уводимо појмове представљивости аритметичких релација и функција, као и појам слабе представљивости аритметичких релација на следећи начин. Нека је $R \subseteq \mathbb{N}_0^k$. Тада кажемо да је релација R представљива у теорији T ако постоји формула $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ језика теорије T таква да за ма које $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$ важи

1. Ако је $R(n_1, \ldots, n_k)$ онда $T \vdash \varphi(c_{n_1}, \ldots, c_{n_k})$.
2. Ако није $R(n_1, \ldots, n_k)$ онда $T \vdash \neg\varphi(c_{n_1}, \ldots, c_{n_k})$.

За релацију R кажемо да је слабо представљива ако постоји таква формула $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ језика теорије T да за све $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$ важи

$$R(n_1, \ldots, n_k) \quad \text{ако и само ако} \quad T \vdash \varphi(c_{n_1}, \ldots, c_{n_k}).$$

За функцију $F : A \longrightarrow \mathbb{N}_0$, где је $A \subseteq \mathbb{N}_0^k$ кажемо да је представљива ако је представљива релација $R \subseteq \mathbb{N}_0^{k+1}$ дефинисана са

$$R(n_1, \ldots, n_k, m) \quad \text{ако и само ако је } F(n_1, \ldots, n_k) \text{ дефинисано и једнако } m.$$

Ми ћемо релације и функције представљати искључиво аритметичким формулама, при чему ћемо под доказивошћу неке аритметичке формуле у теорији скупова заправо подразумевати доказивост њеног превода. Као што ћемо видети, у теоријама које нас буду занимале ће представљивост бити исто што и рекурзивност. Примера ради, једно представљање функције $U_i^n(\bar{x})$ је формула $y = x_i$. Да би се то доказало неопходно је знати да је у теорији скупова доказиво $\neg m = n$ за ма које $m, n \in \mathbb{N}_0$ за које је $m \neq n$. Представљање функције $s(x) = x + 1$ је $y = x + 1$, а нула функције формула $y = 0$. Доказаћемо чак да се свака рекурзивна функција може представити преко Σ_1 аритметичке формуле. Будући да смо то доказали за основне рекурзивне функције, довољно је доказати да је скуп функција које се могу представити преко Σ_1 аритметичких формула бити затворен за супституцију, рекурзију и минимизацију.

Нека су $g(x_1, \ldots, x_m)$ и $h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)$ било које парцијалне аритметичке функције које су представљене аритметичким Σ_1 формулама $\varphi_g(y_1, \ldots, y_m, y)$, $\varphi_{h_1}(x_1, \ldots, x_n, y_1), \ldots, \varphi_{h_m}(x_1, \ldots, x_n, y)$ тим редом, онда је формула

$$\varphi_f(x_1, \ldots, x_n, y) : \exists y_1 \cdots \exists y_m(\varphi_{h_1}(x_1 \ldots, x_n, y_1) \wedge \cdots \wedge \varphi_{h_m}(x_1, \ldots, x_n, y_m) \wedge \varphi_g(y_1, \ldots, y_m, y))$$

једно Σ_1 представљање функције $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$. Уколико је пак формула $\varphi_g(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ било које од Σ_1 представљања функције $g(x_1, \ldots, x_n, y)$, онда је формула

$$\varphi_f(x_1, \ldots, x_n, y) : (\forall z < y)(\exists u)(\varphi(x_1, \ldots, x_n, z, u) \wedge u \neq 0) \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_n, y, 0)$$

једно Σ_1 представљање функције $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y\,(y = 0)g(x_1, \ldots, x_n, y)$. Срж доказа да су све рекурзивне функције представљиве је у доказу затворености скупа представљивих функција за рекурзију. Да би се то доказало, неопходно је доказати најпре следећу теорему.

Теорема 49 (Z^-) (*Кинеска теорема о остацима*) Нека су дати природни бројеви $b_1, \dots, b_k > 0$ који су у паровима узајамно прости. Тада за ма које природне бројеве $r_1, \dots, r_k$ за које је $r_i < b_i$ постоји природан број n за који важи

$$n \equiv_{b_1} r_1, \dots, n \equiv_{b_k} r_k,$$

где $\equiv_m$ означава конгруенцију по модулу m. Штавише, број n је јединствено одређен до на конгруенцију по модулу $b = b_1 \cdots b_k$.

Доказ: Јасно је да бројеви који дају исти остатак при дељењу са било којим од бројева b_i морају бити конгруентни и по модулу b, одакле следи јединственост. Нека су $0 \leqslant n, n' < b$ различити бројеви и нека је $b_i^* = \prod_{j \neq i} b_j$. Тада је број b_i^* узајамно прост са b_i као производ бројева узајамно простих са b_i, па постоје бројеви m_i и n_i за које важи $m_i b_i^* = n_i b_i + 1$. Но, тада је број $m_i b_i^*$ дељив са b_j за свако $j \neq i$, а при дељењу са b_i даје остатак 1. Стога број

$$n = r_1 m_1 b_1^* + \dots + r_k m_k b_k^*$$

испуњава тражене услове. QED

Лема 27 (Z^-) Нека је n природан број. Тада су бројеви облика $k \cdot n! + 1$ за $1 \leqslant k \leqslant n+1$ у паровима узајамно прости.

Доказ: Нека је $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$ и нека је p прост број за који $p|(i \cdot n! + 1)$ и $p|(j \cdot n! + 1)$. Тада $p|(j-i)n!$. У том случају свакако важи $p|n!$ јер из $p|(j-i)$ следи $p|n!$ због $1 \leqslant j - i \leqslant n$. Но, тада због $p|(i \cdot n! + 1)$ мора да важи и $p|1$, што је немогуће. QED

Претпоставимо сада да су формуле $\varphi_g(x_1, \dots, x_k)$ и $\varphi_h(x_1, \dots, x_k, y, z, t)$ произвољна Σ_1-представљања функција $g(x_1, \dots, x_k)$, и $h(x_1, \dots, x_k, y, z)$ тим редом. Тада је формула

$$\begin{aligned} \varphi_f(x_1, \dots, x_k, y, z) \quad : \quad & \exists a \exists b (\exists m \exists r (r < b+1 \wedge a = m(b+1) + r \ \wedge\ \varphi_g(x_1, \dots, x_k, r)) \wedge \\ & (\forall i < y) \exists m \exists r \exists m' \exists r' (r < b(i+1) + 1 \ \wedge\ r' < b(i+2) + 1 \wedge \\ & a = m(b(i+1)+1) + r \ \wedge\ a = m'(b(i+2)+1) + r' \ \wedge\ \varphi_h(x_1, \dots, x_k, i, r', r)) \wedge \\ & \exists m (z < b(y+1) + 1 \ \wedge\ a = m(b(y+1)+1) + z) \end{aligned}$$

једно Σ_1 представљање функције $f(x_1, \dots, x_k, y)$ добијене рекурзијом из $g(x_1, \dots, x_k)$ и $h(x_1, \dots, x_k, y, z)$. Ту су заправо a и b такви бројеви да бројеви облика $ib+1$ за $1 \leqslant i \leqslant y+1$ буду у паровима узајамно прости и већи од $\max_{i \leqslant y} f(x_1, \dots, x_k, i)$ и још такви да је остатак при деленњу a са $b(i+1)+1$ једнак $f(x_1, \dots, x_k, i)$ за све $i \leqslant n$. Такви a и b постоје по кинеској теореми о остацима.

Овим је у потпуности доказано да се све рекурзивне функције могу представити у теорији Z^- помоћу аритметичких Σ_1 формула. Доказаћемо и обрат. Но, за то ће нам требати кодирање формула језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ и аритметичких формула, као и представљање превода произвољне аритметичке формуле на језик $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$. Кодирајмо најпре формуле језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ природним бројевима.

$$\begin{aligned} &\ulcorner v_m \in v_n \urcorner = 5 \ulcorner (m,n) \urcorner, \\ &\ulcorner v_m = v_n \urcorner = 5 \ulcorner (m,n) \urcorner + 1, \\ &\ulcorner \neg \varphi \urcorner = 5 \ulcorner \varphi \urcorner + 2, \\ &\ulcorner (\varphi \Rightarrow \psi) \urcorner = 5 \ulcorner (\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner) \urcorner + 3, \\ &\ulcorner \exists v_m \varphi \urcorner = 5 \ulcorner (m, \ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner + 4, \end{aligned}$$

где је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ низ свих променљивих предикатског рачуна првог реда, а φ и ψ произвољне формуле језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$. Дефинишимо релацију $\mathrm{FV}(m,n)$ на следећи начин.

$$\mathrm{FV}(\ulcorner \varphi \urcorner, n) \quad \text{ако и само ако променљива } v_n \text{ има слободних јављања у формули } \varphi.$$

Ова релација је рекурзивна. Да бисмо се у то уверили, уведимо помоћну функцију $f_v(x,y)$ дефинисану са $f_v(m,n) = \ulcorner (\mathrm{Fv}(0,n), \dots, \mathrm{Fv}(m,n)) \urcorner$, при чему је $\mathrm{Fv}(m,n)$ карактеристична функција релације $\mathrm{FV}(m,n)$.

Тада за $f_v(m,n)$ важе следеће формуле

$$f_v(0,n) = \begin{cases} \ulcorner(1)\urcorner, & n = 0, \\ \ulcorner(0)\urcorner, & n \neq 0, \end{cases}$$

$$f(m+1,n) = \ulcorner(\pi_0(f_v(m,n)),\ldots,\pi_m(f_v(m,n)),s)\urcorner \quad \text{за}$$

$$s = \begin{cases} 1, & r \leqslant 1 \wedge (n = \pi_1^2(q) \vee n = \pi_2^2(q)), \\ 1, & r = 2 \wedge (f_v(m,n))_q = 1, \\ 1, & r = 3 \wedge (f_v(m,n))_{\pi_1^2(q)} + (f_v(m,n))_{\pi_2^2(q)} > 0, \\ 1, & r = 4 \wedge n \neq \pi_1^2(q) \wedge (f_v(m,n))_{\pi_2^2(q)} = 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

за $r = \mathrm{rm}(m+1,5)$ и $q = \mathrm{qt}(m+1,5)$.

Одавде је јасно да је функција f_v, а самим тим и релација FV рекурзивна. На сличан начин се доказује да је релација $\mathrm{Free}(m,n,k)$ дефинисана као

$\mathrm{Free}(\ulcorner\varphi\urcorner,n,k) \Leftrightarrow$ замена свих слободних јављања променљиве v_n у φ променљивом v_k је регуларна

рекурзивна. Наиме, за њу важи

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Free}(\ulcorner v_m \in v_n\urcorner,k,l), & & \\ \mathrm{Free}(\ulcorner v_m = v_n\urcorner,k,l), & & \\ \mathrm{Free}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner,k,l) & \text{акко} & \mathrm{Free}(\ulcorner\varphi\urcorner,k,l), \\ \mathrm{Free}(\ulcorner\varphi\Rightarrow\psi\urcorner,k,l) & \text{акко} & \mathrm{Free}(\ulcorner\varphi\urcorner,k,l) \wedge \mathrm{Free}(\ulcorner\psi\urcorner,k,l), \\ \mathrm{Free}(\ulcorner\exists v_m\varphi\urcorner,k,l) & \text{акко} & k = m \vee (\mathrm{Free}(\ulcorner\varphi\urcorner,k,l) \wedge l \neq m). \end{array}$$

Такође, нека је функција $\mathrm{sub}(\ulcorner\varphi\urcorner,n,k)$ дефинисана као код формуле која се добија заменом свих слободних јављања променљиве v_n променљивом v_k ако је таква замена регуларна, при чему је $\mathrm{sub}(\ulcorner\varphi\urcorner,n,k)$ дефинисано ако и само ако је $\mathrm{Free}(\ulcorner\varphi\urcorner,n,k)$. Тада је функција sub рекурзивна. Заиста, $\mathrm{sub}(\ulcorner\varphi\urcorner,n,k) = m$ је еквивалентно са $\mathrm{sb}(\ulcorner\varphi\urcorner,n,k) = m \wedge \mathrm{Free}(\ulcorner\varphi\urcorner,n,k)$, где је функција sb дефинисана са

$$\mathrm{sb}(\ulcorner v_m \in v_n\urcorner,k,l) = \begin{cases} \ulcorner v_m \in v_n\urcorner, & k \neq m \wedge k \neq n, \\ \ulcorner v_l \in v_n\urcorner, & k = m \wedge k \neq n, \\ \ulcorner v_m \in v_l\urcorner, & k \neq m \wedge k = n, \\ \ulcorner v_l \in v_l\urcorner, & k = u \wedge k = v, \end{cases} \qquad \mathrm{sb}(\ulcorner v_m = x_n\urcorner,k,l) = \begin{cases} \ulcorner v_m = v_n\urcorner, & k \neq m \wedge k \neq n, \\ \ulcorner v_l = v_n\urcorner, & k = m \wedge k \neq n, \\ \ulcorner v_m = v_l\urcorner, & k \neq m \wedge k = n, \\ \ulcorner v_l = v_l\urcorner, & k = u \wedge k = v, \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{sb}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner,n,k) & = & 5\cdot\mathrm{sb}(\ulcorner\varphi\urcorner,n,k)+2, \\ \mathrm{sb}(\ulcorner(\varphi\Rightarrow\psi)\urcorner,n,k) & = & 5\cdot\ulcorner(\mathrm{sb}(\ulcorner\varphi\urcorner,n,k),\mathrm{sb}(\ulcorner\psi\urcorner,n,k))\urcorner+3, \\ \mathrm{sb}(\ulcorner\exists x_u\varphi\urcorner,n,k) & = & \begin{cases} \ulcorner\exists x_u\varphi\urcorner, & n = u, \\ 5\cdot\ulcorner(u,\mathrm{sb}(\ulcorner\varphi\urcorner,n,k))\urcorner+4, & n \neq u. \end{cases} \end{array}$$

Вредност $\mathrm{sb}(\ulcorner\varphi\urcorner,n,k)$ је заправо код формуле која се добија формалном заменом свих слободних јављања променљиве v_n у формули φ променљивом v_k без обзира на регуларност замене. Сада није тешко утврдити да је релација "n је код неке од инстанци схеме сепарације или схеме замене" рекурзиван, као и да је релација "n је код аксиоме ZFC система" такође рекурзивна. Као формализацију предикатског рачуна користићемо секвентну формулацију природне дедукције чије су аксиоме и правила извођења дати са

$$\Gamma,\varphi\vdash\varphi, \quad \Gamma\vdash x=x, \quad \Gamma,\, x=y\vdash y=x, \quad \Gamma,\, x=y,\, y=z\vdash x=z, \quad \Gamma,\, x=y\vdash\varphi(x)\Rightarrow\varphi(y),$$

$$\frac{\Gamma\vdash\varphi}{\Gamma,\Delta\vdash\varphi}, \quad \frac{\Gamma,\varphi\vdash\neg\varphi}{\Gamma\vdash\neg\varphi}, \quad \frac{\Gamma,\neg\varphi\vdash\varphi}{\Gamma\vdash\varphi}, \quad \frac{\Gamma\vdash\varphi \quad \Delta\vdash\neg\varphi}{\Gamma,\Delta\vdash\psi}, \quad \frac{\Gamma,\varphi\vdash\psi}{\Gamma\vdash\varphi\Rightarrow\psi}, \quad \frac{\Gamma\vdash\varphi, \quad \Delta\vdash\varphi\Rightarrow\psi}{\Gamma,\Delta\vdash\psi}.$$

$$(*)\,\frac{\Gamma,\varphi(x)\vdash\psi}{\Gamma,\exists x\varphi(x)\vdash\psi}, \quad (**)\,\Gamma,\varphi(t)\vdash\exists x\varphi(x), \quad (*)\,\frac{\Gamma\vdash\neg\varphi(x)}{\Gamma\vdash\neg\exists x\varphi(x)}, \quad (**)\,\Gamma,\neg\exists x\varphi(x)\vdash\neg\varphi(t),$$

Ту су Γ и Δ произвољни коначни скупови формула, а φ и ψ произвољне формуле. Такође, x је произвољна променљива, а t произвољан терм. У обрасцима означеним са $(*)$ се подразумева да променљива x нема слободних јављања у доњем секвенту, а у формулама означеним са $(**)$ да је замена свих слободних јављања променљиве x у формули $\varphi(x)$ термом t регуларна. Овај систем није минималан, али ћемо га због оперативности проширити још аксиомама облика $\Gamma \vdash \tau$, где је Γ произвољан коначан скуп формула, а τ произвољна инстанца било које таутологије.

Да бисмо кодирали секвенте природним бројевима, треба најпре да кодирамо коначне скупове формула. Будући да су формуле већ кодиране природним бројевима, потребно је да још да кодирамо коначне скупове природних бројева. Један од начина је следећи

$$\ulcorner\{x_1, \ldots, x_k\}\urcorner = \sum_{n=1}^{k} 2^{x_n},$$

при чему се подразумева да је $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$. Формално, у том случају ће важити

$$n \in \{x_1, \ldots, x_k\} \Leftrightarrow \mathrm{qt}(\ulcorner\{x_1, \ldots, x_k\}\urcorner, 2^n) > 2 \cdot \mathrm{qt}(\ulcorner\{x_1, \ldots, x_k\}\urcorner, 2^{n+1})$$

Стога ћемо дефинисати релацију ε међу природним бројевима као

$$m \,\varepsilon\, n \Leftrightarrow \mathrm{qt}(n, 2^m) > 2 \cdot \mathrm{qt}(n, 2^{m+1}).$$

Релација $m \,\varepsilon\, n$ заправо представља припадање броја m коначном скупу кодирном бројем n. Јасно је да је за сваку од наведених схема аксиома предикатског рачуна релација "n је код секвента аксиоме" рекурзиван ако је релација "n је код формуле која је инстанца таутологије" рекурзиван. Ту се код секвента уводи као

$$\ulcorner \Gamma \vdash \varphi \urcorner = \ulcorner(\ulcorner \Gamma \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner)\urcorner.$$

Формула чији је код број k је инстанца таутологије ако важи $f(n) = 1$ за свако пресликавање f скупа $\{0, \ldots, n\}$ у скуп $\{0, 1\}$ за које је за све m, n за које има смисла $f(5m + 2) = 1 - f(m)$ и $f(5\ulcorner(m, n)\urcorner + 3) = 0$ ако и само ако је $f(m) = 1$ и $f(n) = 0$. Другим речима, формула чији је код k је инстанца таутологије ако важи $k \,\varepsilon\, s$ за сваки код s подскупа од $\{0, \ldots, k\}$ за који важи

$$\begin{aligned} &(5n + 2) \,\varepsilon\, s \Leftrightarrow \neg\, n \,\varepsilon\, s \quad \text{за } 5n + 2 \leqslant k, \\ &(5\ulcorner(m, n)\urcorner + 3) \,\varepsilon\, s \Leftrightarrow (m \,\varepsilon\, s \Rightarrow n \,\varepsilon\, s) \quad \text{за } \ulcorner(m, n)\urcorner + 3 \leqslant k. \end{aligned}$$

Будући да су кодови подскупова скупа $\{0, \ldots, k\}$ тачно бројеви мањи од 2^{k+1}, ова релација је рекурзивна, па је и релација "n је код секвента аксиоме" рекурзиван. Такође, за свако од набројаних правила извођења је релација "n код секвента који се добија применом тог правила извођења на секвент (или секвенте) чији су кодови дати" је рекурзивна. На тај начин се лако закључује да ако доказе кодирамо као одговарајуће коначне низове кодова формула, да је такође и релација "n је код доказа" рекурзивна.

Будући да је скуп кодова аксиома било ког дела теорије ZFC (рачунајући ту схеме као целине) рекурзиван, и релација "m је код формуле с десног дела последњег секвента у доказу чији је код n и коме су све формуле са леве стране заправо неке од аксиома теорије скупова" је представљива за сваки од таквих делова теорије скупова. Наравно, исто се односи и на било који скуп аксиома Σ на језику $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ који има представљив скуп кодова. У том случају ћемо релацију "m је код формуле чији је код доказа из система аксиома Σ једнак n" обележавати са $\mathrm{Prov}_\Sigma(m, n)$.

Претпоставимо сада да је $R(n_1, \ldots, n_k)$ релација представљива у теорији Σ са рекурзивним скупом кодова аксиома и нека је $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ једно представљање на језику $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ те релације у теорији Σ. Функција која пару бројева (i, n) придружује код формуле $S_n(x_i)$ је рекурзивна, па ће и функција која k-торци бројева $(n_1, \ldots, n_k)$ придружује код формуле

$$\psi_{n_1,\ldots,n_k} : \exists x_1 \cdots \exists x_k (S_{n_1}(x_1) \wedge \cdots \wedge S_{n_k}(x_k) \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_k))$$

бити рекурзивна. Одатле ће скупови

$$\begin{aligned} R &= \{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k : (\exists m \in \mathbb{N}_0)\mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner \psi_{n_1,\ldots,n_k} \urcorner, m)\}, \\ R^c &= \{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k : (\exists m \in \mathbb{N}_0)\mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner \neg\psi_{n_1,\ldots,n_k} \urcorner, m)\}, \end{aligned}$$

бити рекурзивно набројиви, па је релација R рекурзивна. Тиме је доказана најављена теорема да је за ма које непротивречно рекурзивно аксиоматско проширење Σ теорије Z^- произвољна релација R, односно функција f, представљива у теорији Σ ако и само ако је рекурзивна.

1.6.4 Прва Геделова теорема непотпуности

За разматрања у овој тачки користићено следећу лему.

Лема 28 (*Геделова лема о дијагонализацији*) За сваку формулу $\psi(x)$ језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ са тачно једном слободном промењљивом постоји реченица φ истог језика за коју $\mathrm{Z}^{-} \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

Доказ: Посматрајмо функцију $\mathrm{subst}(m, n)$ дефинисану као

$$\mathrm{subst}(\ulcorner\theta\urcorner, n) = \ulcorner\exists x(S_n(x) \wedge \theta(x))\urcorner.$$

Она је рекурзивна, па постоји представљање $\mathrm{subst}(x, y, z)$ те функције које још можемо изабрати тако да замена свих слободних јављања променљиве y променљивом x буде регуларна. Тада за формулу

$$\phi(x, y, z) : x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge z \in \omega \wedge \mathrm{subst}(x, y, z) \wedge \neg(\exists u \in z)\mathrm{subst}(x, y, u),$$

где је u променљива за коју је горња замена регуларна, важи да је формула

$$\forall x \forall y \forall v \forall w(\phi(x, y, v) \wedge \phi(x, y, w) \Rightarrow v = w)$$

теорема теорије Z^{-} под условом да су горње замене регуларне. То следи из чињенице да је добра уређеност скупа ω теорема теорије Z^{-}. Но, нека је n код формуле

$$\theta(x) : \exists z(\phi(x, x, z) \wedge \psi(z)).$$

Променљива z је могла бити изабрана тако да горња замена буде регуларна. Тада формула

$$\varphi : \exists x(S_n(x) \wedge \theta(x))$$

задовољава тражене услове. Наиме замењујући формулу $\theta(x)$ у дефиницији формуле φ добијамо да је формула φ еквивалентна са

$$\exists x \exists z(S_n(x) \wedge \phi(x, x, z) \wedge \psi(z))$$

Будући да је у теорији Z^{-} доказива јединственост елемента x за који важи $S_n(x)$ и да је према претходном коментару за свако x елелемт z за који важи $\phi(x, x, z)$ доказиво јединствен у истој теорији, онда ће у тој теорији бити доказива јединственост сведока за x и z у горњој формули. Једноставно се проверава да је $\mathrm{subst}(n, n) = \ulcorner\varphi\urcorner$, па је и формула

$$\exists x \exists z(S_n(x) \wedge S_{\ulcorner\varphi\urcorner}(z) \wedge \phi(x, x, z))$$

теорема. Из $S_n(x)$ следи да ће сведок за x бити исти као у претходној формули, а из $\phi(x, x, z)$ да ће и сведок за z бити заједнички за обе формуле. Но, тада ће формула φ бити доказиво еквивалентна са формулом $\exists x(S_{\ulcorner\varphi\urcorner}(x) \wedge \psi(x))$, што је заправо дефиниција формуле $\psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$. QED

Уз симболику из претходне леме формулу φ зовемо дијагонализацијом формуле $\psi(x)$. У даљем тексту ће Σ бити произвољно рекурзивно аксиоматско проширење на језику $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ теорије Z^{-}, при чему може бити и $\Sigma = \mathrm{Z}^{-}$, а $\mathrm{Pr}_{\Sigma}(x)$ формула $\exists y \mathrm{Prov}_{\Sigma}(x, y)$. Такође, φ ће нам означавати дијагонализацију формуле $\neg\mathrm{Pr}_{\Sigma}(x)$.

Теорема 50 (*Прва Геделова теорема непотпуности*)

а) Ако је Σ непротивречна теорија онда $\Sigma \nvdash \varphi$.

б) Ако је Σ непротивречна теорија и притом из $\Sigma \vdash \mathrm{Pr}_{\Sigma}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ следи $\Sigma \vdash \varphi$, онда $\Sigma \nvdash \neg\varphi$.

Доказ:

а) Из $\Sigma \vdash \varphi$ због $\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_{\Sigma}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ следи да би тада важило и $\Sigma \vdash \neg\mathrm{Pr}_{\Sigma}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Но, ако је n код доказа за φ из аксиома Σ, онда

$$\Sigma \vdash \exists y(S_n(y) \wedge \mathrm{Prov}_{\Sigma}(\ulcorner\varphi\urcorner, y)),$$

а самим тим и $\Sigma \vdash \exists y \mathrm{Prov}_{\Sigma}(\ulcorner\varphi\urcorner, y)$, то јест $\Sigma \vdash \mathrm{Pr}_{\Sigma}(\ulcorner\varphi\urcorner)$, што заједно са претходним даје противречност теорије Σ.

б) Из $\Sigma \vdash \neg\varphi$ због $\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner\varphi\urcorner)$ важи $\Sigma \vdash \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner\varphi\urcorner)$, а одатле је по претпоставци $\Sigma \vdash \varphi$, одакле је најзад Σ противречна теорија.

QED

Као што се види, у доказу да $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ коришћен је јачи услов од непротивречности теорије Σ. Касније ћемо видети да је тај услов био битан, то јест да се не може испустити. Сада ћемо навести једну теорему непотпуности која не захтева јаче претпоставке за теорију Σ од непротивречности.

Теорема 51 (*Росер*) Посматрајмо формулу

$$\theta(x) : \forall y(\mathrm{Prov}_\Sigma(x,y) \Rightarrow (\exists z < y)\mathrm{Prov}_\Sigma(5x+2,z)),$$

или у развијеном облику

$$\theta(x) : (\forall y \in \omega)(\mathrm{Prov}_\Sigma(x,y) \Rightarrow (\exists z \in y)\exists u\exists v\exists w\exists t(S_5(w) \wedge S_2(t) \wedge S_\cdot(w,x,u) \wedge S_+(u,t,v) \wedge \mathrm{Prov}_\Sigma(v,z))).$$

Нека је ψ дијагонализација формуле $\theta(x)$. Тада ако је теорија Σ непротивречна важи $\Sigma \nvdash \psi$ и $\Sigma \nvdash \neg\psi$. То посебно значи да је теорија Σ непотпуна.

Доказ: За формулу ψ важи

$$\Sigma \vdash \psi \Leftrightarrow \forall y(\mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner\psi\urcorner, y) \Rightarrow (\exists z < y)\mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z)).$$

Уколико $\Sigma \vdash \psi$, онда за код n доказа за ψ из аксиома Σ важи

$$\Sigma \vdash \mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner\psi\urcorner, n) \Rightarrow (\exists z < n)\mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z).$$

Међутим, по дефиницији представљивости и из чињенице да је n код доказа за формулу ψ из аксиома Σ следи да $\Sigma \vdash \mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner\psi\urcorner, n)$. Но, тада

$$\Sigma \vdash (\exists z < n)\mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z).$$

Али, будући да

$$\Sigma \vdash \forall z(z < n \Leftrightarrow \bigvee_{i<n} z = i),$$

важиће и

$$\Sigma \vdash \bigvee_{i<n} \mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner\neg\psi\urcorner, i).$$

Међутим, због непротивречности теорије Σ и $\Sigma \vdash \psi$ важи $\Sigma \nvdash \neg\psi$, па

$$\Sigma \vdash \neg\bigvee_{i<n} \mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner\neg\psi\urcorner, i),$$

што је контрадикција. Нека сада $\Sigma \vdash \neg\psi$. Тада важи

$$\Sigma \vdash \exists y(\mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner\psi\urcorner, y) \wedge \neg(\exists z < y)\mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z)).$$

Но, тада због линеарности уређења природних бројева важи

$$\Sigma \vdash \forall y(\mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner\neg\psi\urcorner, y) \Rightarrow (\exists z \leqslant y)\mathrm{Prov}_\Sigma(\ulcorner\psi\urcorner, z)),$$

одакле се доказ изводи на сличан начин као малопре. QED

1.6.5 Друга Геделова теорема непотпуности

У доказу друге Геделове теореме непотпуности користићемо следеће осбине формуле $\mathrm{Pr}_\Sigma(x)$ које важе за произвољне формуле ψ и θ.

D1 Из $\Sigma \vdash \psi$ следи $\Sigma \vdash \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \psi \urcorner)$.

D2 $\Sigma \vdash \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \psi \urcorner) \Rightarrow \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner)$.

D3 $\Sigma \vdash \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \psi \Rightarrow \theta \urcorner) \Rightarrow (\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \psi \urcorner) \Rightarrow \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \psi \urcorner))$.

Прва особина следи из саме чињенице да формула $\mathrm{Prov}_\Sigma(x, y)$ представља релацију "n је код доказа за формулу чији је код m из аксиома Σ". Трећа особина је последица чињенице да се надовезивањем два доказа добија доказ и чињенице да се додавањем на крај доказа секвената који су изводиви из неких од претходних чланова доказа добија доказ. Друга особина се доказује формализацијом у теорији Σ доказа прве особине. Притом је прва особина довољна за доказ прве Геделове теореме непотпуности. Пре него што пређемо на доказ друге и треће особине изведимо из ових особина другу Геделову теорему непотпуности.

Теорема 52 (*Друга Геделова теорема непотпуности*) Нека је Con_Σ формула $\neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$, при чему $0 = 1$ може бити ознака за било коју контрадикцију на језику теорије Σ. Тада $\Sigma \vdash \mathrm{Con}_\Sigma \Leftrightarrow \varphi$. То посебно значи да се у првој Геделовој теореми непотпуности формула φ може заменити формулом Con_Σ.

Доказ: Из ваљаности формуле $0 = 1 \Rightarrow \varphi$ и D1 следи да

$$\Sigma \vdash \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner 0 = 1 \Rightarrow \varphi \urcorner),$$

а одатле по D3

$$\Sigma \vdash \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \Rightarrow \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

Применом правила контрапозиције добија се

$$\Sigma \vdash \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner 0 = 1 \urcorner),$$

или после замене еквивалената

$$\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \mathrm{Con}_\Sigma.$$

Из $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner)$ и D1 следи

$$\Sigma \vdash \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \Rightarrow \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$$

Одатле и из D3 добијамо

$$(*) \qquad \Sigma \vdash \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$$

Међутим, на основу D2 је

$$(**) \qquad \Sigma \vdash \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$$

Примењујући D1 на ваљану формулу $\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow (\neg\mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow 0 = 1)$, а потом D3 на добијени резултат закључујемо да важи

$$\Sigma \vdash \mathrm{Pr}(\ulcorner \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner) \Rightarrow \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow 0 = 1 \urcorner).$$

Ако сада применимо D3 на формулу $\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow 0 = 1 \urcorner)$ добићемо да

$$\Sigma \vdash \mathrm{Pr}(\ulcorner \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner) \Rightarrow (\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner) \Rightarrow \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)).$$

Повезујући то са $(*)$ и $(**)$ добијамо да важи

$$\Sigma \vdash \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner 0 = 1 \urcorner),$$

одакле контрапозицијом добијамо да

$$\Sigma \vdash \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \Rightarrow \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

Најзад, заменом еквивалената закључујемо

$$\Sigma \vdash \mathrm{Con}_\Sigma \Rightarrow \varphi.$$

QED

Остало је да докажемо особине које смо користили у доказу. Није тешко показати да ако је $f(\bar{x})$ било која примитивно рекурзивна функција, да онда њено представљање $\varphi(\bar{x}, y)$ конструисано преко наведених описа иницијалних рекурзивних функција и оператора супституције и рекурзије дефинише једну доказиво тоталну функцију у теорији Z^- у смислу да важи

$$\mathrm{Z}^- \vdash (\forall \bar{x} \in \omega)(\exists_1 y \in \omega)\varphi(\bar{x}, y).$$

Стога постоји и представљање функције која пару кодова коначних низова придружује код конкатенације тих низова које има ту ососибину.

Докажимо сада особину D3. Ако су дати докази за $\psi \Rightarrow \theta$ и ψ из аксиома Σ, онда су њихови последњи чланови облика $\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \theta$ и $\Delta \vdash \psi$ за $\Gamma, \Delta \subseteq \Sigma$. Но, одатле се одмах добија секвент $\Gamma, \Delta \vdash \theta$, па надовезивањем датих доказа и дописивањем овог секвента на крај добијамо доказ за θ из аксиома Σ. Доказ особине D2 ће бити знатно дужи.

Лема 29 (Z^-) Ако је формула $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi$ инстанца таутологије, онда постоји доказ секвента $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$.

Доказ: Доказ ћемо извести индукцијом по $n \in \omega$. За $n = 0$ претпоставка гласи да је формула ψ инстанца таутологије. Тада је тражени секвент аксиома. Нека је $n = k + 1$. Тада је формула $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k) \Rightarrow (\varphi_{k+1} \Rightarrow \psi)$ таутологија, па је по индуктивној претпоставци секвент $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \vdash \varphi_{k+1} \Rightarrow \psi$ доказив. Но, тада је на основу слабљења и модус поненса тај доказ продужив секвентима $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1} \vdash \varphi_{k+1} \Rightarrow \psi$, $\varphi_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1} \vdash \psi$. QED

Уз симболику и прерпоставке из претходне леме за секвент $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash \psi$ кажемо да је исказно доказив.

Лема 30 (Z^-) Ако су секвенти $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ доказиви за $1 \leqslant i \leqslant n$, онда је и секвент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ доказив.

Доказ: Доказ поново изводимо индукцијом по $n \in \omega \setminus \{0\}$. За $n = 1$ нема шта да се доказује. Нека је $n = k + 1$ за $k \geqslant 1$ и $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_n$. Тада су на основу слабљења секвенти $\Gamma \vdash \varphi_i$ такође доказиви за свако i. По индуктивној претпоставци доказив је и секвент $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$, а пошто је формула

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \Rightarrow (\varphi_n \Rightarrow \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_{k+1})$$

инстанца таутологије, по одговарајућој аксиоми и модус поненсу је секвент $\Gamma \vdash \varphi_n \Rightarrow \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_{k+1}$ доказив. Сада због доказивости секвента $\Gamma \vdash \varphi_n$ мора и секвент $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_{k+1}$ бити доказив. QED

Лема 31 (Z^-) (*Правило сечења*) Ако су секвенти $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ доказиви за свако $1 \leqslant i \leqslant n$ и ако је доказив секвент $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ за $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_n$, онда је и секвент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \psi$ доказив.

Доказ: Доказ се изводи применом претходне две леме. QED

Формуле φ и ψ ћемо звати сличним у ознаци $\varphi \sim \psi$ ако се ψ добија преозначавањем везаних променљивих у φ. Прецизније, релацију сличности дефинишемо индуктивно као

$$\begin{aligned}
&(x = y) \sim \theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta \text{ је формула } x = y,\\
&(x \in y) \sim \theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta \text{ је формула } x \in y,\\
&(\neg\varphi) \sim \theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta \text{ је облика } \neg\varphi' \text{ за } \varphi \sim \varphi',\\
&(\varphi \Rightarrow \psi) \sim \theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta \text{ је облика } (\varphi' \Rightarrow \psi') \text{ за } \varphi \sim \varphi' \text{ и } \psi \sim \psi',\\
&(\exists x \varphi(x, \bar{z})) \sim \theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta \text{ је облика } \exists y \varphi(y, \bar{z}) \text{ при чему је коришћена замена регуларна.}
\end{aligned}$$

Није тешко приметити да је $\sim$ релација еквиваленције.

Лема 32 (Z^-) Нека су φ и ψ сличне формуле. Тада је секвент $\varphi \vdash \psi$ доказив.

Доказ: Доказ се изводи индукцијом по сложености формуле. У случају атомских формула формуле φ и ψ морају бити истоветне, па је тражени секвент заправо аксиома. У случају да је формула φ облика $\neg\varphi'$ за неко φ', онда и формула ψ мора бити облика $\neg\psi'$ за такво ψ' за које је $\varphi' \sim \psi'$. Но, будући да је $\sim$ релација еквиваленције, по индуктивној претпоставци је секвент $\psi' \vdash \varphi'$ доказив. Али тада је и секвент $\vdash \psi' \Rightarrow \varphi'$ доказив. Пошто је секвент $\vdash (\psi' \Rightarrow \varphi') \Rightarrow (\neg\varphi' \Rightarrow \neg\psi')$ аксиома, онда ће и секвент $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ бити доказив, па је на основу слабљења доказив и секвент $\varphi \vdash \varphi \Rightarrow \psi$. Сада због $\varphi \vdash \varphi$ на онову модус поненса следи да је секвент $\varphi \vdash \psi$ доказив.

Ако је φ облика $\varphi' \Rightarrow \varphi''$ за неке формуле φ' и φ'', онда и формула ψ мора бити облика $\psi' \Rightarrow \psi''$ за неке формуле ψ' и ψ'' за које је $\varphi' \sim \psi'$ и $\varphi'' \sim \psi''$. Тада ће по претпоставци секвенти $\psi' \vdash \varphi'$ и $\varphi'' \vdash \psi''$

бити доказиви, а самим тим и секвенти $\vdash \psi' \Rightarrow \varphi'$ и $\vdash \varphi'' \Rightarrow \psi''$. Но, сада доказивост траженог секвента следи из доказивости секвента
$$\varphi, \psi' \Rightarrow \varphi', \varphi'' \Rightarrow \psi'' \vdash \psi.$$

Најзад, ако је формула φ облика $\exists x\, \varphi'(x, \bar{z})$ за неко φ', онда формула ψ мора бити облика $\exists y\, \psi'(y, \bar{z})$ за неко $\psi'(x, \bar{z})$ за које је коришћена замена регуларна и за које је $\varphi'(x, \bar{z}) \sim \psi(x, \bar{z})$. Тада је наравно, секвент $\varphi'(x, \bar{z}) \vdash \psi'(x, \bar{z})$ доказив, а самим тим и секвент $\varphi' \vdash \exists y \psi(y, \bar{z})$ на основу правила сечења примењеног на секвент $\psi(x, \bar{z}) \vdash \exists y \psi(y, \bar{z})$. Одатле наравно следи доказивост секвента $\exists x \varphi'(x, \bar{z}) \vdash \exists y \psi'(y, \bar{z})$ будући да у њему нема слободних јављања променљиве x. QED

Није тешко показати да за сваку формулу φ и сваки $n \in \omega$ постоји формула ψ слична формули φ у којој нема везаних јављања променљивих v_i за $i \leqslant n$. Ово нас заједно са ослобађа размишљања о томе које смо променљиве у некој формули користили као везане, као и да увек можемо вршити замену свих слободних јављања неке променљиве датим термом t, јер ако замена у посматраној формули није регуларна. можемо прећи на њој сличну у којој ће бити регуларна.

Лема 33 (Z^-) Из секвента $\Gamma, \neg\varphi(x) \vdash \psi$ је изводив секвент $\Gamma, \neg\exists x\, \varphi(x) \vdash \psi$ под условом да у последњем секвенту нема слободних јављања променљиве x.

Доказ: Из секвента $\Gamma, \neg\varphi(x) \vdash \psi$ се најпре изводи секвент $\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi(x)$. Применом сечења на тај секвент и на секвент $\varphi(x) \vdash \exists x\, \varphi(x)$ добија се секвент $\Gamma, \neg\psi \vdash \exists x\, \varphi(x)$ из кога се лако добија тражени секвент. QED

Лема 34 (Z^-) За ма које $n \in \omega$ постоји формалан доказ у теорији Σ за формулу $S_n(x) \wedge S_n(y) \Rightarrow x = y$.

Доказ: Секвент
$$\neg\neg\big(z \in x \Leftrightarrow \bigvee_{i<n} S_i(z)\big), \neg\neg\big(z \in y \Leftrightarrow \bigvee_{i<n} S_i(z)\big) \vdash \neg\neg(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$
је исказно доказив. Из њега се изводи секвент
$$\neg\exists z\neg\big(z \in x \Leftrightarrow \bigvee_{i<n} S_i(z)\big), \neg\exists z\neg\big(z \in y \Leftrightarrow \bigvee_{i<n} S_i(z)\big) \vdash \neg\neg(z \in x \Leftrightarrow z \in y),$$
а из њега секвент
$$\neg\exists z\neg\big(z \in x \Leftrightarrow \bigvee_{i<n} S_i(z)\big), \neg\exists z\neg\big(z \in y \Leftrightarrow \bigvee_{i<n} S_i(z)\big) \vdash \neg\exists z\neg(z \in x \Leftrightarrow z \in y),$$
који се краће записује као
$$S_n(x),\, S_n(y) \vdash \neg\exists z\neg(z \in x \Leftrightarrow z \in y).$$
Но, ако са Ext означимо аксиому екстензионалности онда ће секвенти
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext} \vdash \neg\exists y\neg(\neg\exists z\neg(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y),\\
&\neg\exists y\neg(\neg\exists z\neg(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y) \vdash \neg\neg(\neg\exists z\neg(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y),\\
&\neg\neg(\neg\exists z\neg(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y) \vdash (\neg\exists z\neg(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y),
\end{aligned}$$
бити доказиви. Применом сечења на њих добија се
$$\mathrm{Ext} \vdash (\neg\exists z\neg(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y).$$
Сада примењујући модус поненс и слабљење добијамо
$$\mathrm{Ext},\, S_n(x),\, S_n(y) \vdash x = y,$$
одакле следи тврђење. QED

Лема 35 (Z^-) За ма које $n \in \omega$ формула $\exists x S_n(x)$ је формално доказива.

Доказ: Доказ изводимо индукцијом по n. За $n = 0$, формула $\exists x S_n(x)$ се своди на аксиому празног скупа. Нека је $n = k + 1$. Непосредно се проверава да је секвент
$$S_k(x),\, z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x) \vdash S_{k+1}(y)$$

исказно доказив. Самим тим због

$$\forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x)) \vdash \forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x))$$

$$\forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x)) \vdash z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x)$$

на основу сечења важи и

$$S_k(x), \forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x)) \vdash S_{k+1}(y).$$

Међутим, одатле у три корака се изводи секвент

$$\exists x S_k(x), \exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x)) \vdash \exists y S_{k+1}(y).$$

По претпоставци постоји коначан подскуп Γ скупа аксиома Z^- такав да је секвент $\Gamma \vdash \exists x S_k(x)$. Са друге стране, пошто је формула

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x))$$

теорема система Z^-, за бар један коначан подскуп Δ скупа аксиома Z^- ће секвент

$$\Delta \vdash \exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x))$$

бити доказив. Но, тада је доказив и секвент $\Gamma, \Delta \vdash \exists y S_n(y)$. QED

Лема 36 (Z^-) За ма које $m, n \in \omega$ за које је $m \neq n$ постоји формалан доказ у теорији Z^- за формулу $S_m(x) \vdash \neg S_n(x)$.

Доказ: Нека је n најмањи елемент скупа ω за који секвент $S_n(x) \vdash x \notin x$ није доказив. Тада свакако не може бити $n = 0$ јер је секвент $\neg \exists y\, y \in x \vdash x \notin x$ аксиома нашег секвентног рачуна. Нека је $n = k+1$. Тада важи

$$S_n(x) \vdash x \in x \Leftrightarrow \bigvee_{i \leqslant k} S_i(x),$$

одакле се лако добија

$$S_n(x) \vdash x \in x \Rightarrow \bigvee_{i \leqslant k} S_i(x).$$

Одавде се слабљењем и модус поненсом добија

$$S_n(x), x \in x \vdash \bigvee_{i \leqslant n} S_i(x).$$

По индуктивној претпоставци је $S_i(x) \vdash x \notin x$, а самим тим и $\vdash S_i(x) \Rightarrow x \notin x$ за све $i < n$. Но, тада је због

$$S_0(x) \Rightarrow x \notin x, \ldots, S_k(x) \Rightarrow x \notin x, \bigvee_{i<n} S_i(x) \vdash x \notin x$$

на основу сечења испуњено

$$S_n(x),\ x \in x \vdash x \notin x.$$

Из овог секвента се директно изводи тражени секвент $S_n(x) \vdash x \notin x$. Нека је сада $m < n$. Из секвената аксиома

$$S_m(x),\ S_n(y) \vdash x \in y \Leftrightarrow \textstyle\bigvee_{i<n} S_i(x),$$
$$S_m(x),\ S_n(y) \vdash S_m(x)$$

лако се изводи секвент $S_m(x),\ S_n(x) \vdash x \in y$. Посебно, ако су променљиве x и y биле једнаке имали бисмо $S_m(x),\ S_n(x) \vdash x \in x$. Но, према претходном ће тада бити и $S_m(x),\ S_n(x) \vdash \psi$ за било коју формулу ψ, што у случају да је ψ формула $\neg S_n(x)$ даје секвент из кога можемо добити тражени резултат. QED

Лема 37 (Z^-) Постоји коначан скуп $\Gamma \subseteq \Sigma$ такав да је за свако $n \in \omega$ секвент $\Gamma, S_n(x) \vdash x \in \omega$ доказив.

Доказ: Будући да је формула $\forall x \forall y(x \in \omega \wedge \forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x)) \Rightarrow y \in \omega)$ теорема теорије скупова можемо уочити коначан скуп $\Gamma \subseteq \Sigma$ такав да је секвент $\Gamma \vdash \forall x \forall y(x \in \omega \wedge \forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x)) \Rightarrow y \in \omega)$ доказив. Није тешко проверити да ће тада и секвент

$$\Gamma,\ x \in \omega, \forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x)) \vdash y \in \omega$$

бити доказив. Слично, пошто је $\forall x(S_0(x) \Rightarrow x \in \omega)$ теорема теорије скупова, можемо претпоставити и да је Γ довољно велики коначан подскуп скупа Σ да и секвент $\Gamma,\, S_0(x) \vdash x \in \omega$ буде доказив. Проблем се своди на доказивање секвента

$$S_n(x),\, S_{n+1}(y) \vdash \forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \Leftrightarrow z = x)),$$

јер ће се у том случају лако направити индуктивни корак. Тај секвент се изводи из секвента

$$S_n(x),\, S_{n+1}(y) \vdash \forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \Leftrightarrow z = x))$$

за који се лако види да је исказно доказив. QED

На сличан начин се доказује средствима Z^- да је и секвент

$$\mathrm{Ext} S_n(x) \vdash S_{n+1}(y) \Leftrightarrow \forall z(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x))$$

доказив, где је Ext ознака за аксиому екстензионалности. Будући да су формуле

$$\forall x \forall y \forall z \forall y' \forall z'((S_+(x,y,z) \wedge \forall u(u \in y' \Leftrightarrow (u \in y \vee u = y))) \Rightarrow (S_+(x,y',z') \Leftrightarrow \forall u(u \in z' \Leftrightarrow (u \in z \vee u = z)))),$$
$$\forall x \forall y \forall z(S_0(y) \Rightarrow (S_+(x,y,z) \Leftrightarrow z = x))$$

теореме теорије скупова, постојаће коначан скуп $\Gamma \subseteq \Sigma$ за који су доказиви секвенти

$$\Gamma,\, S_+(x,y,z),\, \forall u(u \in y' \Leftrightarrow (u \in y \vee u \in z)) \vdash S_+(x,y',z') \Leftrightarrow \forall u(u \in z' \Leftrightarrow (u \in z \vee u = z)),$$
$$\Gamma,\, S_0(y) \vdash S_+(x,y,z) \Leftrightarrow z = x.$$

Притом се може додатно претпоставити да скуп Γ садржи и аксиому екстензионалности.

Коришћењем ових секвената доказује се да је исти скуп Γ и за ма које $m, n, k \in \omega$ формално доказив секвент $\Gamma \vdash (m + n = k)^*$ ако је $k = m + n$, односно $\Gamma \vdash \neg(m + n = k)^*$ за $k \neq m + n$. На сличан начин се поступа и у случају множења. Затим се доказује индукцијом по сложености терма да за терме t, t' у којима се не јављају променљиве важи $\Gamma \vdash (t = t')^*$ када терми t, t' имају исте вредности у ω, односно $\Gamma \vdash \neg(t = t')^*$ у супротном.

После тога, индукцијом по сложености формуле доказује се да за сваку аритметичку Σ_0 формулу важи $\Gamma \vdash \varphi^*$ ако је формула φ тачна у структури ω, односно важи $\Gamma \vdash \neg\varphi^*$ ако формула φ није тачна у структури ω,

Напокон, ако из $\exists x_1 \cdots \exists x_k \varphi(x_1, \ldots, x_k)$, где је $\varphi(\bar{x})$ аритметичка Σ_0 формула, постојаће $m_1, \ldots, m_k$ за које је $\varphi(m_1, \ldots, m_k)$, па је доказив секвент $\Gamma \vdash \exists x_1 \cdots \exists x_k (\bigwedge_{i=1}^k S_i(x_i) \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_k))$. Но, тада ће бити доказив и секвент $\Gamma \vdash \exists x_1 \cdots \exists x_k \varphi(x_1, \ldots, x_k)$, а то је управо формалан доказ за превод дате аритметичке формуле из аксиома теорије скупова. То на крају значи да $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner\varphi\urcorner))$ за било коју реченицу φ која представља превод Σ_1 аритметичке формуле која почиње блоком егзистенцијалних квантора иза којих следи Σ_0 ариметичка формула.

Свака рекурзивна релација је представљива Σ_1 формулом у теорији Σ, па постоји Σ_1 представљање $\varphi(x,y))$ у теорији Σ релације $\mathrm{Prov}_\Sigma(x,y)$. Но, тада релацију $\mathrm{Pr}_\Sigma(x)$ описујемо у теорији Σ формулом $\exists y \varphi(x,y))$ која је такође Σ_1 формула. Стога је остало да још да се докаже да је сваки превод Σ_1 формуле еквивалентан преводу неке формуле која евентуално почиње блоком егзистенцијалних квантора иза којих је Σ_0 формула. То је последица теореме о пренекс нормалној форми и еквиваленције

$$(\forall x < y)\exists z \varphi \Leftrightarrow \exists u(\forall x < y)(\exists z < u)\varphi.$$

Смер $\Leftarrow$ је тривијалан. Смер $\Rightarrow$ је последица чињенице да мањих бројева од y има само коначно много. Стога, ако сваком $x < y$ придружимо одговарајући сведок z_x, таквих ће бити само коначно много, па постоји u за које је $u > z_x$ за све $x < y$. Тиме би формула $\Sigma \vdash \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner\mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$ била у потпуности доказана.

Но, тако бисмо доказали да

$$\text{ако је теорија } \Sigma \text{ непротивречна, онда } \Sigma \nvdash \mathrm{Con}_\Sigma.$$

Одговарајућа формализација тог става у теорији Z^- би била

$$\mathrm{Z}^- \vdash \mathrm{Con}_\Sigma \Rightarrow \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner\mathrm{Con}_\Sigma\urcorner).$$

Ми знамо да $\Sigma \vdash \mathrm{Con}_\Sigma \Leftrightarrow \varphi$. Међутим, у доказу те чињенице се користе само особине D1, D2 и D3. Особина D1 је последица представљивости рекурзивне релације $\mathrm{Prov}_\Sigma(x, y)$, што је могуће и у теорији Z^-. Слично, у доказу особина D2 и D3 се користе само аксиоме система Z^-, па заправо важе одговарајући ставови који се добијају заменом симбола Σ са Z^- на свим местима осим у индексима.

Стога заправо важи $\mathrm{Z}^- \vdash \mathrm{Con}_\Sigma \Leftrightarrow \varphi$. Но, тада према D1 важи да $\mathrm{Z}^- \vdash \mathrm{Pr}(\ulcorner \mathrm{Con}_\Sigma \Rightarrow \varphi \urcorner)$, одакле је према D3 тачна релација $\mathrm{Z}^- \vdash \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \mathrm{Con}_\Sigma \urcorner) \Rightarrow \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner)$, односно $\mathrm{Z}^- \vdash \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \mathrm{Con}_\Sigma \urcorner)$. Такође, лема о дијагонализацији важи већ у теорији Z^-, тако да можемо узети и да $\mathrm{Z}^- \vdash \varphi \Leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \varphi \urcorner)$, одакле ће најзад на основу транзитивности импликације бити $\mathrm{Z}^- \vdash \mathrm{Con}_\Sigma \Rightarrow \neg\mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner \mathrm{Con}_\Sigma \urcorner)$.

1.6.6 Коментар

Геделове теореме непотпуности нам заправо гарантују да формални системи који описују иоле озбиљнији фрагмент Математике (то јест у којима је могуће интерпретирати аритметику природних бројева и представити све рекурзивне релације) у случају да реподукују само истине на језику аритметике природних бројева не само да су непотпуни, него се не могу никако ни проширити до таквих формалних система који би били још и потпуни. Такође, ми у таквим системима знамо за бар једно важно тврђење које се у њима може формулисати али не и доказати нити оборити средствима тог система. То је исказ којим се формализује у том систему својство непротивречности истог тог система.

Ту је у доказу коришћен јачи принцип од непротивречности тог система. Ако је Σ један такав формални систем, онда је теорија $T = \Sigma + \neg\mathrm{Con}_\Sigma$ непротивречна. Ту је чак довољно претпоставити обичну непротивречност теорије T. Међутим, ако је $\chi(x)$ једно представљање скупа аксиома теорије Σ и $n = \ulcorner \mathrm{Con}_\Sigma \urcorner$, онда је са $\psi(x) : \chi(x) \vee (x = n)^*$ дато једно представљање скупа аксиома теорије T. При стандардном начину конструисања формула Con_T и Con_Σ преко представљања скупа аксиома биће $\Sigma \vdash \mathrm{Con}_T \Rightarrow \mathrm{Con}_\Sigma$, што одражава својство да ако је теорија T непротивречна, онда је непротивречна и теорија Σ која се добија избацивањем неке аксиоме из теорије T. Но, тада важи $\Sigma \vdash \neg\mathrm{Con}_\Sigma \Rightarrow \neg\mathrm{Con}_T$, односно $T \vdash \neg\mathrm{Con}_T$. Али, пошто за дијагонализацију φ формуле $\neg\mathrm{Pr}_T$ важи $T \vdash \mathrm{Con}_T \Leftrightarrow \varphi$, то ће значити да такође $T \vdash \neg\varphi$.

Но, то управо значи да се у делу у коме је коришћен јачи услов од непротивречности теорије Σ доказ и није могао извести коришћењем само услова непротивречности система Σ у коме се може интерпретирати аритметика природних бројева и у коме су представљиве све рекурзивне релације. Ипак, Росер је доказао непотпуност таквих система користећи обичну непротивречност таквих теорија. Но, према претходном то се није могло урадити на примеру формуле која изражава непротивречност истог система, па је зато Росер конструисао другу реченицу за коју је доказао да је у том систему недоказива и необорива. Ипак, иако је Росер доказао непотпуност таквих теорија под слабијим условима, Геделов пример недоказиве (и необориве) реченице је више заживео у математичкој пракси јер је недоказивост те реченице имала и друге последице, од којих ћемо видети неке које се односе теорију скупова.

У доказу чињенице D2 битно смо користили претпоставку да је релација Prov_Σ представљена Σ_1 формулом. Та чињеница је била битна, јер као што ћемо видети код теорема рефлексије, постоје и таква Π_1 представљања исте релације да за реченицу Con_Σ дефинисану на уобичајен начин али преко тог Π_1 представљања релације $\mathrm{Prov}_\Sigma(x, y)$ важи $\Sigma \vdash \mathrm{Con}_\Sigma$.

На крају, мора се признати да иако се доказ Геделове теореме непотпуности може спровести потпуно формално коректно, да формулација Геделове теореме непотпуности није баш сасвим јасна. Геделова теорема непотпуности се пре свега односи на формалне системе који испуњавају одређене услове. Први од тих услова би био да се у том систему може интерпретирати потребан фрагмент аритметике природних бројева. Други услов је да су правила тог система алгоритамски описива. У супротном се поставља питање колико такав систем има смисла називати формалним. Трећи услов је представљивост свих рекурзивних релација у том систему. Четврти услов је непротивречност тог формалног система. Сви ови услови су, рецимо у случају теорија првог реда, описиви формалним математичким језиком.

Геделова теорема непотпуности у том случају тврди да формула тог система која описује непротивречност истог система није доказива средствима тог система. Овде није баш сасвим јасно које би то услове требало да испуни нека реченица тог система, па да за њу кажемо да описује непротивречност нашег система, јер би Геделова теорема непотпуности требала да се односи на све такве реченице тог система.

Наравно, у случају теорија првог реда, ми можемо захтевати да формула Con_Σ буде дефинисана преко формуле Prov_Σ на описани начин, при чему од формуле Prov_Σ захтевамо да испуни горе изречене услове. Али она бинто зависи од коришћеног кодирања формула и од коришћеног формалног описа предикатског рачуна. Сушина је изрећи формалним језиком услове које она треба да испуни, независно од начина на који је конструисана. Анализом доказа било које теореме се може закључити шта је заиста коришћено у њеном доказу, али се релација "описивања" не може изразити формалним средствима.

Глава 2

Модели теорије скупова

Као што је и уобичајено, под моделом језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ подразумеваћемо произвољан скуп M снабдевен бинарном релацијом $E \subseteq \mathrm{M}^2$. Саму такву структуру представљамо уређеним паром $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, E)$. Међутим, често ће ту M и E бити праве класе. Тада морамо бити опрезнији у раду јер такве структуре не подлежу класичној теорији модела. Надаље ћемо подразумевати да су M и E, класе, можда не праве, али допуштаћемо ту могућност. У случају када је $\mathfrak{M}$ класичан модел у смислу скупа M снабдевеног бинарном, релацијом E, писаћемо $\mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, E \rangle$.

2.1 Релација задовољења за моделе теорије скупова

Најпре ћемо дефинисати релацију задовољења на моделима $\mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, E \rangle$ језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ у случају када је M скуп. По теореми рекурзије постоји формула $\mathrm{Holds}(\mathfrak{M}, n, v)$ јединствено одређена до на еквиваленцију са три слободне промењиве $\mathfrak{M}, n, v$ таква да следеће формуле буду теореме

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Holds}(\mathfrak{M}, n, v) \Rightarrow (\exists \mathrm{M}\, \exists E\ (\mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, E \rangle \ \wedge\ E \subseteq \mathrm{M}^2 \ \wedge\ \mathrm{M} \neq \emptyset) \ \wedge\ n \in \omega \ \wedge\ v : \omega \longrightarrow \mathrm{M}),\\
&C \ \Rightarrow\ (\mathrm{Holds}(\langle \mathrm{M}, E \rangle, 5\ulcorner(m,n)\urcorner, v) \ \Leftrightarrow\ v(m)\, E\, v(n),\\
&C \ \Rightarrow\ (\mathrm{Holds}(\langle \mathrm{M}, E \rangle, 5\ulcorner(m,n)\urcorner + 1, v) \ \Leftrightarrow\ v(m) = v(n)),\\
&C \ \Rightarrow\ (\mathrm{Holds}(\langle \mathrm{M}, E \rangle, 5n + 2, v) \ \Leftrightarrow\ \neg \mathrm{Holds}(\langle \mathrm{M}, E \rangle, n, v)),\\
&C \ \Rightarrow\ (\mathrm{Holds}(\langle \mathrm{M}, E \rangle, 5\ulcorner(m,n)\urcorner + 3, v) \ \Leftrightarrow\ (\mathrm{Holds}(\langle \mathrm{M}, E \rangle, m, v) \Rightarrow \mathrm{Holds}(\langle \mathrm{M}, E \rangle, n, v)),\\
&C \ \Rightarrow\ (\mathrm{Holds}(\langle \mathrm{M}, E \rangle, 5\ulcorner(m,n)\urcorner + 4, v) \ \Leftrightarrow\ \exists v'(v' : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \ \wedge\ v|_{\omega \setminus \{m\}} = v'|_{\omega \setminus \{m\}} \ \wedge\ \mathrm{Holds}(\langle \mathrm{M}, E \rangle, n, v)),
\end{aligned}
$$

где је са C означена формула $\mathrm{M} \neq \emptyset \ \wedge\ E \subseteq \mathrm{M}^2 \ \wedge\ n \in \omega \ \wedge\ v : \omega \longrightarrow \mathrm{M}$. Штавише, та формула ће бити јединствено одређена до на еквиваленцију. Ту је теорема рекурзије примењена на добро засновану релацију R међу уређеним тројкама код којих је прва компонента уређен пар дефинисану са

$$(\langle \mathrm{M}, E \rangle, n, v)\ R\ (\langle \mathrm{M}', E' \rangle, n', v') \ \Leftrightarrow\ (\langle \mathrm{M}, E \rangle = \langle \mathrm{M}', E' \rangle \ \wedge\ n \in n' \cap \omega \ \wedge\ v' : \omega \longrightarrow \mathrm{M}').$$

Јасно је да је за произвољно M, E, n, v класа

$$\{(\langle \mathrm{M}', E' \rangle, n', v') : (\langle \mathrm{M}', E' \rangle, n', v')\ R\ (\langle \mathrm{M}, E \rangle, n, v)\}$$

заправо скуп, као и да не постоје бесконачни низови $((\mathfrak{M}_k, n_k, v_k))_{k \in \omega}$ за које је

$$(\mathfrak{M}_{k+1}, n_{k+1}, v_{k+1})\ R\ (\mathfrak{M}_k, n_k, v_k)$$

за свако $k \in \omega$. Другим речима, релација R је добро заснована, па је примена теореме рекурзије могућа. Ово је дефиниција чувене релације задовољења Тарског у посебном случају када је у питању језик $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$.

Но, ако бисмо фиксирали модел $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, E)$, где је M права класа, онда би горе поменута класа била права, па релација R не би била добро заснована, одакле примена теореме рекурзије не би била могућа. Зато при дефинисању релације задовољења за моделе који су праве класе треба бити опрезнији. Но, пре него што пређемо на класе, поменимо следећу теорему.

Теорема 53 Z^-

$$(v : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \ \wedge \ v' : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \ \wedge \ n \in \omega \ \wedge (\forall m \in \omega)(\mathrm{FV}(n, m) \Rightarrow v(m) = v'(m)) \\ \Rightarrow (\mathrm{Holds}(\langle \mathrm{M}, E\rangle, n, v) \Leftrightarrow \mathrm{Holds}(\langle \mathrm{M}, E\rangle, n, v')).$$

Доказ се изводи индукцијом по n, или прецизније, коришћењем добре уређености скупа ω.

Што се тиче релације задовољења на моделима који су праве класе, чак и ако фиксирамо такав модел $\mathfrak{M}$, нећемо моћи да нађемо формулу $F(x)$ за коју би било $F(\ulcorner\varphi\urcorner)$ ако и само ако важи φ у моделу $\mathfrak{M}$ у случају када је φ формула без слободних променљивих. Наиме, на начин сличан доказу Геделове леме о дијагонализацији доказује се да за сваку формулу $F(x)$ постоји реченица φ таква да је формула $F(\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow \neg\varphi$ теорема теорије Z^-. То значи да ако посматрамо модел $\mathfrak{M} = (\mathrm{V}, \in)$, уколико бисмо имали формулу $\mathrm{Sat}(x)$ за коју је $\mathrm{Sat}(\ulcorner\psi\urcorner) \Leftrightarrow \psi$ за сваку реченицу, онда би за одговарајућу реченицу φ за коју је $\mathrm{Sat}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow \neg\varphi$ важило још и $\mathrm{Sat}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow \varphi$, одакле би било $\varphi \Leftrightarrow \neg\varphi$, што је контрадикција. То уједно указује да се услов да је за свако x класа $\{y : yEx\}$ скуп не може испустити у теореми рекурзије.

Ако фиксирамо модел $\mathfrak{M}$ и формулу φ, онда можемо унутар теорије говорити о томе да ли модел $\mathfrak{M}$ задовољава формулу φ. Одговарајућу формулу ћемо звати релативизацијом формуле φ на модел $\mathfrak{M}$ и обележавати са $\varphi^{\mathfrak{M}}$, односно $\mathfrak{M} \models \varphi$. Ту формулу индуктивно дефинишемо на следећи начин

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M} \models x \in y \,:\, xEy,\\
&\mathfrak{M} \models x = y \,:\, x = y,\\
&\mathfrak{M} \models \neg\varphi \,:\, \neg(\mathfrak{M} \models \varphi),\\
&\mathfrak{M} \models (\varphi \Rightarrow \psi) \,:\, (\mathfrak{M} \models \varphi) \Rightarrow (\mathfrak{M} \models \psi),\\
&\mathfrak{M} \models \exists x\varphi \,:\, (\exists x \in \mathrm{M})(\mathfrak{M} \models \varphi),
\end{aligned}$$

где је $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, E)$. Но, иако не постоји формула $\mathrm{Sat}(x)$ таква да за сваку реченицу φ важи $\mathrm{Sat}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow \varphi$, таква формула ипак постоји ако се ограничимо само на Σ_n формуле φ. Заиста, нека је $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, E)$ неки модел који може бити и класа. Уведимо следеће операције

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}(m) = 5m + 2, \quad \mathrm{I}(m, n) = 5^{\ulcorner(m,n)\urcorner} + 3, \quad \mathrm{E}(m, n) = 5^{\ulcorner(m,n)\urcorner} + 4,\\
&\mathrm{BE}(m, n, p) = \mathrm{E}(m, \mathrm{N}(\mathrm{I}(5^{\ulcorner(m,n)\urcorner}, \mathrm{N}(p)))) \quad \text{за } m \neq n.
\end{aligned}$$

Конкретно, за ове операције важи

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\neg\varphi\urcorner, \quad \mathrm{I}(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner) = \ulcorner\varphi \Rightarrow \psi\urcorner, \quad \mathrm{E}(m, \ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\exists v_m\varphi\urcorner,\\
&\mathrm{BE}(m, n, \ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner(\exists v_m \in v_n)\varphi\urcorner \quad \text{за } m \neq n.
\end{aligned}$$

Скуп кодова атомских формула је скуп оних бројева који при дељењу са 5 дају остатак који није већи од 1. Уведимо ознаке Σ_k и Π_k, где је $k \geqslant 0$, за подскупове од ω дефинисане рекурзивно са

$$\begin{aligned}
&5n,\ 5n + 1 \in \Sigma_k, \Pi_k,\\
&\mathrm{N}(n) \in \Sigma_k \Leftrightarrow n \in \Pi_k,\\
&\mathrm{N}(n) \in \Pi_k \Leftrightarrow n \in \Sigma_k,\\
&\mathrm{I}(m, n) \in \Sigma_k \Leftrightarrow (m \in \Pi_k \wedge n \in \Sigma_k),\\
&\mathrm{I}(m, n) \in \Pi_k \Leftrightarrow (m \in \Sigma_k \wedge n \in \Pi_k),\\
&\mathrm{E}(m, n) \in \Sigma_0 \Leftrightarrow (\mathrm{E}(m, n) \in \mathrm{ran}(\mathrm{BE}) \wedge n \in \Sigma_0),\\
&\mathrm{E}(m, n) \in \Pi_0 \Leftrightarrow (\mathrm{E}(m, n) \in \mathrm{ran}(\mathrm{BE}) \wedge n \in \Pi_0),\\
&\mathrm{E}(m, n) \in \Sigma_{k+1} \Leftrightarrow n \in \Sigma_{k+1},\\
&\mathrm{E}(m, n) \in \Pi_{k+1} \Leftrightarrow (n \in \Sigma_k \vee (\mathrm{E}(m, n) \in \mathrm{ran}(\mathrm{BE}) \wedge n \in \Pi_{k+1})).
\end{aligned}$$

Лако се доказује да за ове скупове важи $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$, као и $\bigcup_n \Sigma_n = \bigcup_n \Pi_n = \omega$. Нека је сада $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, E)$ фиксиран модел језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ који може бити и класа, али такав да је релација E добро заснована. Такве моделе ћемо звати добро заснованим. Тада постоји формула $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_0}$ за коју је у ZF^- доказиво

$$\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_0}(m, v) \Rightarrow m \in \Sigma_0 \ \wedge \ v : \omega \longrightarrow \mathrm{M},$$

као и да формула $m, n, p \in \Sigma_0 \ \wedge \ v : \omega \longrightarrow \mathrm{M}$ повлачи сваку од формула

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_0}(5\ulcorner(m,n)\urcorner, v) \Leftrightarrow v(m)\, E\, v(n),\\
&\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_0}(5\ulcorner(m,n)\urcorner + 1, v) \Leftrightarrow v(m) = v(n),\\
&\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_0}(\mathrm{I}(m,n), v) \Leftrightarrow (\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_0}(m, v) \Rightarrow \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_0}(n, v)),\\
&\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_0}(\mathrm{N}(m), v) \Leftrightarrow \neg \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_0}(m, v),\\
&\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_0}(\mathrm{BE}(m,n,p), v) \Leftrightarrow \exists v' (v'|_{\omega\setminus\{m\}} = v|_{\omega\setminus\{m\}} \wedge v'(m)\, E\, v(n) \wedge \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_0}(p, v')).
\end{aligned}$$

Таква формула постоји будући да је релација $R \subseteq \{\langle n, v\rangle : n \in \Sigma_0 \ \wedge \ v : \omega \longrightarrow \mathrm{M}\}$ дефинисана са

$$\langle n, v\rangle\, R\, \langle n', v'\rangle \Leftrightarrow n < n' \ \wedge \ (\exists m, m' \in \omega)(v'|_{\omega\setminus\{m\}} = v|_{\omega\setminus\{m\}} \wedge v'(m)\, E\, v(m'))$$

добро заснована будући да за дато v' и за свако n', m, m' у горњој релацији имамо скуп много могућности за v и да је унија пребројиве фамилије скупова скуп. Формулу $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_0}(n, v)$ означаваћемо још и са $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Pi_0}(n, v)$. Претпоставимо сада да су формуле $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_k}(n, v)$ и $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Pi_k}(n, v)$ већ дефинисане. По теореми рекурзије постојаће формула $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(n, v, t, w)$ за коју је у теорији ZF^- доказиво

$$\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(n, v, t, w) \Rightarrow ((n \in \Sigma_{k+1} \ \wedge \ t = 0) \vee (n \in \Pi_{k+1} \wedge t = 1)) \ \wedge \ v : \omega \longrightarrow \mathrm{M},$$

као и да формула $m, n, p, q \in \omega \wedge v : \omega \longrightarrow \mathrm{M}$ за свако $l \in \mathbb{N}$ повлачи сваку од формула

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(5\ulcorner(m,n)\urcorner, v, t, w) \Leftrightarrow v(m)\, E\, v(n),\\
&\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(5\ulcorner(m,n)\urcorner + 1, v, t, w) \Leftrightarrow v(m) = v(n),\\
&m \in \Pi_{k+1} \Rightarrow (\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(\mathrm{N}(m), v, 0, w) \Leftrightarrow \neg \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(m, v, 1, w)),\\
&m \in \Sigma_{k+1} \Rightarrow (\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(\mathrm{N}(m), v, 1, w) \Leftrightarrow \neg \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(m, v, 0, w)),\\
&m \in \Pi_{k+1} \wedge n \in \Sigma_{k+1} \Rightarrow (\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(\mathrm{I}(m,n), v, 0, w) \Leftrightarrow (\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(m, v, 1, w) \Rightarrow \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(n, v, 0, w))),\\
&m \in \Sigma_{k+1} \wedge n \in \Pi_{k+1} \Rightarrow (\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(\mathrm{I}(m,n), v, 1, w) \Leftrightarrow (\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(m, v, 0, w) \Rightarrow \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(n, v, 1, w))),\\
&n \in \Sigma_{k+1} \Rightarrow (\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(\mathrm{E}(m,n), v, 0, w) \Leftrightarrow \exists v' \,(v' : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \ \wedge \ v'|_{\omega\setminus\{m\}} = v|_{\omega\setminus\{m\}} \wedge v'(m) \in w \wedge \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(n, v', 0, w))),\\
&n \in \Pi_k \Rightarrow (\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(\mathrm{E}(m,n), v, 0, w) \Leftrightarrow \exists v' \,(v' : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \ \wedge \ v'|_{\omega\setminus \mathrm{ran}\{m\}} = v|_{\omega\setminus\{m\}} \ \wedge \ v'(m) \in w \ \wedge \ \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Pi_k}(n, v'))),\\
&n \in \Pi_{k+1} \setminus \Pi_k \Rightarrow (\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(\mathrm{BE}(m,n,p), q, v, 1, w) \Leftrightarrow\\
&\qquad \exists v'(v' : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \ \wedge \ v'|_{\omega\setminus\{m\}} = v|_{\omega\setminus\{m\}} \ \wedge \ v'(m)\, E\, v(n) \ \wedge \ \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(p, v', 1, w).
\end{aligned}$$

Штавише, заједно са формулама $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Pi_k}$ и $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_k}$, формула $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}$ је такође јединствено одређена до на еквиваленцију. Но, овде треба напоменути да су поменуте формуле доказиве већ у теорији Z^-, јер је аксиома замене потребна само у случају рекурентног дефинисања функције чије вредности припадају некој класи, док је аксиома замене непотребна у случају рекурентног дефинисања функције чије вредности припадају неком скупу, као и у случају рекурентног дефинисања релације будући да је релација заправо функција са две могуће вредности.

Сада се формуле $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_{k+1}}(x, v)$ и $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Pi_{k+1}}(x, v)$ дефинишу као $\exists w\, \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(x, v, 0, w)$ и $\forall w\, \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{k+1}(x, v, 1, w)$ тим редом. На тај начин смо за ма који модел $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, E)$ и за сваки метатеоријски природан број k дефинисали формуле $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_k}(x, v)$ и $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Pi_k}(x, v)$. За њих важи следећа теорема чији доказ изостављамо јер се изводи крајње једноставно двоструком индукцијом: најпре по k, а потом по сложености формуле φ.

Теорема 54 Z^- За сваки $k \in \mathbb{N}_0$ и ма коју формулу $\varphi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ чије су једине евентуалне слободне промењљиве $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ важи *а*) Ако $\ulcorner\varphi(v_{i_1},\dots,v_{i_n})\urcorner\in\Sigma_k$, онда

$$\mathrm{Z}^-\vdash(v:\omega\longrightarrow\mathrm{M}\Rightarrow(\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_k}(\ulcorner\varphi(v_{i_1},\dots,v_{i_n})\urcorner,v)\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\varphi(v(i_1),\dots,v(i_n)))).$$

б) Ако $\ulcorner\varphi(v_{i_1},\dots,v_{i_n})\urcorner\in\Pi_k$, онда

$$\mathrm{Z}^-\vdash(v:\omega\longrightarrow\mathrm{M}\Rightarrow(\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Pi_k}(\ulcorner\varphi(v_{i_1},\dots,v_{i_n})\urcorner,v)\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\varphi(v(i_1),\dots,v(i_n)))).$$

Уколико је ту $\mathrm{M}=\mathrm{WF}$, где је WF класа свих добро заснованих скупова и релација E дефинисана са $xEy\Leftrightarrow x,y\in\mathrm{WF}\wedge x\in y$, онда ћемо ознаку $\mathfrak{M}$ изостављати. Наравно, о операцији транзитивног затварања скупа има смисла говорити само уз аксиому замене. Но, класа WF се може изградити и хијерахијски. за то је неопходно дефинисати фамилију скупова V_α, где α прелази преко свих ординала. Она се дефинише индуктивно са

$$\mathrm{V}_0=\emptyset,\quad \mathrm{V}_{\alpha+1}=P(\mathrm{V}_\alpha),\quad \mathrm{V}_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{V}_\beta\quad \text{за гранични ординал } \alpha.$$

Ту се индукцијом по α лако доказује да је скуп V_α транзитиван одакле се директно проверава да из $\alpha<\beta$ следи $\mathrm{V}_\alpha\subsetneq\mathrm{V}_\beta$. Но, поменимо још да о овој хијерархији има смисла говорити само у светлу аксиоме замене која је коришћена кроз теорему рекурзије дуж класе ординала.

Ранг произвољног скупа $x\in\bigcup_{\alpha\in ORD}\mathrm{V}_\alpha$ у ознаци $\mathrm{rank}(x)$ дефинишемо као најмањи ординал α за који $x\in\mathrm{V}_{\alpha+1}$. Притом, ако је $x\in\mathrm{V}_{\alpha+1}$, онда због $x\subseteq\mathrm{V}_\alpha$ за свако $y\in x$ важи да $y\in\mathrm{V}_\alpha$. Ако је α гранични ординал, онда постоји $\beta<\alpha$ тако да $y\in\mathrm{V}_\beta\subseteq\mathrm{V}_{\beta+1}$, одакле је $\mathrm{rank}(y)\leqslant\beta<\alpha$. Но, то ће тачно значити да из $y\in x$ следи $\mathrm{rank}(y)<\mathrm{rank}(x)$. Другим речима, ако $x\in\bigcup_{\alpha\in ORD}\mathrm{V}_\alpha$, онда је за сваки $y\in x$ важи $y\in\bigcup_{\alpha\in ORD}\mathrm{V}_\alpha$ и притом је $\mathrm{rank}(y)<\mathrm{rank}(x)$.

Теорема 55 ZF^- $\quad\mathrm{WF}=\bigcup_\alpha\mathrm{V}_\alpha$.

Доказ: Индукцијом по α доказује се да је $\mathrm{V}_\alpha\subseteq\mathrm{WF}$. Заиста, за $x\in\mathrm{V}_\alpha$ и $\emptyset\neq y\subseteq x$ уочимо $z\in y$ најмањег ранга. За њега ће важити $y\cap z=\emptyset$, па је $x\in\mathrm{WF}$. Обрнуто, ако је $x\in\mathrm{WF}\setminus\bigcup_{\alpha\in ORD}\mathrm{V}_\alpha$, онда је скуп $y=\mathrm{tc}(\{x\})\setminus\bigcup_{\alpha\in ORD}\mathrm{V}_\alpha$ непразан јер садржи елемент x, а такође је подскуп класе WF јер је она транзитивна за релацију $\in$. Но, класа WF је добро заснована за релацију $\in$, па постоји $\in$-минималан елемент z скупа y. Тада је z елемент класе WF који не припада класи $\bigcup_{\alpha\in ORD}\mathrm{V}_\alpha$, али чији је сваки елемент у тој класи. Но, тада за $\alpha=\sup_{u\in z}\mathrm{rank}(u)$ важи да $z\in\mathrm{V}_{\alpha+2}$, што је контрадикција. QED

Нека је сада φ произвољна формула и i,j различити цели ненегативни бојеви. Тада је универзално затворење формуле

$$\forall v_i\exists v_k\forall v_j(\varphi\Rightarrow v_j=v_k)\Rightarrow\forall v_k\exists v_{k+1}\forall v_j(v_j\in v_{k+1}\Leftrightarrow(\exists v_i\in v_k)\,\varphi),$$

где је k најмањи цео ненегативан број који је већи од i,j, као и од свих целих ненегативних бројева l за које променљива v_l има слободних јављања у формули φ, једна инстанца схеме замене. Штавише, ако је ту $\ulcorner\varphi\urcorner\in\Sigma_k\cup\Pi_k$, онда је код горње формуле у скупу Π_{k+4}. Код горње формуле означаваћемо са $\mathrm{CS}(\ulcorner\varphi\urcorner,i,j)$. Функција CS је записива средствима теорије Z^- и за њу важи да за ма који цео ненегативан број k

$$\mathrm{ZF}^-\vdash(\forall n\in(\Sigma_k\cup\Pi_k))(\forall i,j\in\omega)\forall v(\mathrm{Fun}(v)\wedge\mathrm{dom}(v)=\omega\wedge i\neq j\Rightarrow\mathrm{Sat}_{\Pi_{k+4}}(\mathrm{CS}(n,i,j),v)).$$

Ово следи директно из инстанце схеме замене када је формула φ дефинисана као

$$\begin{aligned}&i,j\in\omega\wedge i\neq j\wedge\mathrm{Fun}(v)\wedge\mathrm{dom}(v)=\omega\wedge\exists v'(\mathrm{Fun}(v')\wedge\mathrm{dom}(v')=\omega\wedge v'|_{\omega\setminus\{i,j\}}=v|_{\omega\setminus\{i,j\}}\wedge\\&v'(i)=x\wedge v'(j)=y\wedge(\mathrm{Sat}_{\Pi_{k+4}}(\mathrm{CS}(n,i,j),v'),\end{aligned}$$

која описује функционалну зависност y од аргумента x. Овде се такође користи чињеница да је средствима теорије Z^- доказиво да за ма које $k\in\mathbb{N}_0$ и ма који модел $\mathfrak{M}=(\mathrm{M},E)$ важи

$$(\forall n\in\Sigma_k)(\forall i\in\omega)((\forall v)(v:\omega\longrightarrow\mathrm{M}\Rightarrow\mathrm{Sat}_{\Sigma_k}(\mathfrak{M},n,v))\Leftrightarrow(\forall v)(v:\omega\longrightarrow\mathrm{M}\Rightarrow\mathrm{Sat}_{\Pi_{k+1}}(\mathfrak{M},\mathrm{N}(\mathrm{E}(i,\mathrm{N}(n))),v))).$$

Слично важи и ако се слово Σ замени словом Π. Одатле непосредно следи да је такође у теорији Z^- доказиво да за ма који модел $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, E)$ и ма које $k \in \mathbb{N}_0$ важи

$$(\forall n \in \Pi_k)(\forall i \in \omega)((\forall v)(v : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \Rightarrow \mathrm{Sat}_{\Pi_k}(\mathfrak{M}, n, v)) \Leftrightarrow (\forall v)(v : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \Rightarrow \mathrm{Sat}_{\Pi_k}(\mathfrak{M}, \mathrm{UC}(n), v))),$$

где је $\mathrm{UC}(n)$ код универзалног затворења формуле чији је код n.

Слично томе, ако је φ било која формула језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ и $i, j \in \mathbb{N}_0$ такви да је j најмањи елемент скупа $\mathbb{N}_0$ који је већи од i, као и од свих $l \in \mathbb{N}_0$ за које променљива v_l има слободних јављања у формули φ, онда је универзално затворење формуле

$$\forall v_j \exists v_{j+1} \forall v_i (v_i \in v_{j+1} \Leftrightarrow (v_i \in v_j \wedge \varphi))$$

једна инстанца аксиоме сепарације. Код те инстанце означаваћемо са $\mathrm{CC}(\ulcorner\varphi\urcorner, i)$. Функција $\mathrm{CC}(n, i)$ је описива средствима теорије Z^- и у тој теорији је доказива формула

$$\forall \mathfrak{M} \forall \mathrm{M} \forall E(\mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, E\rangle \wedge \mathrm{M} \neq \emptyset \wedge E = \{\langle x, y\rangle \in \mathrm{M}^2 : x \in y\} \wedge (\forall x \in \mathrm{M})P(x) \subseteq \mathrm{M} \Rightarrow$$
$$\forall v(\forall n, i \in \omega)(v : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \Rightarrow \mathrm{Holds}(\mathfrak{M}, \mathrm{CC}(n, i), v))).$$

Детаљи доказа се препуштају читаоцу.

2.2 Апсолутност и транзитивни модели

За модел $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, E)$ рећи ћемо да је екстензионалан ако задовољава аксиому ектензионалности, то јест ако за ма које $x, y \in \mathrm{M}$ за које је $x \neq y$ постоји $z \in \mathrm{M}$ за које $\neg(zEx \Leftrightarrow zEy)$.

Дефиниција 12 За класу M рећи ћемо да је транзитивна ако из $x \in y$ и $y \in \mathrm{M}$ следи $x \in \mathrm{M}$ за ма које x, y и ако је релација $\in$ на тој класи добро заснована. Уколико је притом E релација припадања на класи M, онда ћемо за модел $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, E)$ рећи да је транзитиван.

Транзитивне моделе ћемо поистовећивати са њиховим носачима, будући да је интерпретација релације припадања у том случају јединствено одређена. Они су увек екстензионални, што директно следи из аксиоме екстензионалности. На значај транзитивних модела указује следећа теорема.

Теорема 56 ZF^- (*Теорема колапса*) Сваки екстензионалан модел $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, E)$ код којег је релација E добро заснована изоморфан је неком транзитивниом моделу. Притом су тај транзитиван модел, као и одговарајући изоморфизам јединствени.

Доказ: Претпоставимо да су одговарајући тразнитиван модел одређен носачем X и изоморфизам f дати. Услов $f(y) \in f(x) \Leftrightarrow yEx$ који мора да важи за све $x, y \in \mathrm{M}$ је еквивалентан са условом

$$f(x) = \{f(y) : yEx\},$$

одакле по теореми рекурзије следи јединственост изоморфизма, а самим тим и одговарајућег транзитивног модела као слике тог изоморфизма. Такође по теореми рекурзије, функција f са горњом особином постоји, а да бисмо доказали да је та функција и изоморфизам на модел одређен сликом X те функције треба проверити да је f инјекција. Но, то следи директно из екстензионалности модела $\mathfrak{M}$. Скуп X је добро заснован, јер је релација припадања на њему добро заснована као изоморфна добро заснованој релацији. Претпоставимо да $x \in y$ и $y \in X$. Тада је за неко $y' \in \mathrm{M}$

$$y = f(y') = \{f(z) : zEy'\},$$

па из $x \in y$ следи да је $x = f(z)$ за неко $z \in \mathrm{M}$, одакле $x \in \mathrm{X}$. QED

Одавде следи да се услов да је за свако x класа $\{y : yEx\}$ заправо скуп битан у теореми рекурзије. Наиме, ако посматрамо релацију E дефинисану са

$$xEy \Leftrightarrow x \neq \emptyset \wedge y = \emptyset,$$

онда је $\{x : xE\emptyset\}$ права класа, док је други услов добре заснованости релације E испуњен. Такође, модел (V, E) је тада екстензионалан. Када поменути услов у теореми рекурзије не би био битан, онда би на основу доказа претходне теореме постојао јединствени транзитивни модел (наравно, права класа) изоморфан датом моделу, али слика празног скупа при том изоморфизму не би могао да буде нити један скуп будући да је $\{x : xE\emptyset\}$ права класа.

Транзитивни модел из претходне теореме зовемо и транзитивним колапсом модела $\mathfrak{M}$. Наравно, ако је ту M скуп, онда ће по аксиоми замене и X бити скуп.

Дефиниција 13 Нека је $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, E)$ произвољан модел и $k \in \mathbb{N}_0$. Дефинишимо формуле

$$\mathrm{Abs}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_k}(n) \,:\, n \in \Sigma_k \,\wedge\, \forall v(v : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \Rightarrow (\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Sigma_k}(n, v) \Leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Sigma_k}(n, v))),$$
$$\mathrm{Abs}^{\mathfrak{M}}_{\Pi_k}(n) \,:\, n \in \Pi_k \,\wedge\, \forall v(v : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \Rightarrow (\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{\Pi_k}(n, v) \Leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Pi_k}(n, v))).$$

Прву ћемо читати "n је код Σ_k формуле која је апсолутна за модел $\mathfrak{M}$", а другу "n је код Π_k формуле која је апсолутна за модел $\mathfrak{M}$" Такође, формуле

$$\begin{aligned}&\mathrm{Abs}_{\Sigma_k}(\mathfrak{M}, n) \,:\\ &\quad n \in \omega \wedge \exists \mathrm{M}\, \exists E\, (\mathrm{M} \neq \emptyset \wedge E \subseteq \mathrm{M}^2 \wedge \mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, E\rangle \wedge (\forall v)(v : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \Rightarrow (\mathrm{Holds}(\mathfrak{M}, n, v) \Leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Sigma_k}(n, v)))),\\ &\mathrm{Abs}_{\Pi_k}(\mathfrak{M}, n) \,:\\ &\quad n \in \omega \wedge \exists \mathrm{M}\, \exists E\, (\mathrm{M} \neq \emptyset \wedge E \subseteq \mathrm{M}^2 \wedge \mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, E\rangle \wedge (\forall v)(v : \omega \longrightarrow \mathrm{M} \Rightarrow (\mathrm{Holds}(\mathfrak{M}, n, v) \Leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Pi_k}(n, v))))\end{aligned}$$

ћемо читати на исти начин, с тим да је у овом случају носач модела $\mathfrak{M}$ скуп.

За формулу φ рећи ћемо да је апсолутна ако је апсолутна за све транзитивне моделе којима је носач скуп. Лако се доказује да су све атомске формуле апсолутне, као и да је скуп апсолутних формула затворен за логичке операције, као и за ограничену квантификацију. Прецизније, за ма које $k \in \mathbb{N}_0$ скуп кодова Σ_k, односно Π_k формула које су апсолуне има одговарајућа свостваа. Отуда је свака Σ_0 формула апсолутна.

Апсолутност релације, операције односно константе дефинисане неком формулом у смислу теореме о дефиниционој екстензији дефинишемо као апсолутност те формуле. Уколико схватимо константе као функције без аргумената, онда је композиција апсолутних операција апсолутна операција, као и релација $R(\bar{F}(\bar{x}))$, где је R апсолутна релација, а F_i апсолутне операције. Ту се као аргументи операција F_i могу појавити и променљиве од којих резултат операције не зависи. У вези са апсолутношћу, важи фундаментална теорема рефлексије. Но, пре ње доказаћемо неке леме.

Лема 38 Σ_n-формула φ је заједно са свим својим потформулама апсолутна за добро заснован $\in$-модел M ако и само ако за сваку потформулу формуле φ облика $\exists y\psi(\bar{x}, y)$ и за све $\bar{a} \in \mathrm{M}$ за које постоји $b \in \mathrm{WF}$ тако да $\mathrm{WF} \models \psi(\bar{a}, b)$ постоји и $c \in \mathrm{M}$ тако да $\mathrm{M} \models \psi(\bar{a}, c)$.

Доказ: Доказаћемо само нетривијалан смер. Доказ изводимо индукцијом по сложености формуле φ. Ако је формула φ атомска, онда она и нема правих потформула и апсолутна је за сваки $\in$-модел. Уколико је формула φ облика $\neg\varphi'$, онда је φ' такође Σ_n-формула и оне су апсолутне за исте моделе, па тврђење у овом случају важи по индуктивној претпоставци. Сасвим слично закључујемо да тврђење важи и у случају да је формула φ облика $\varphi' \Rightarrow \varphi''$. Претпоставимо да је формула φ облика $\exists y\psi(\bar{x}, y)$. Тада према условима леме за ма које $\bar{a} \in \mathrm{M}$ ако важи $\mathrm{WF} \models \varphi(\bar{a})$ онда важи и $\mathrm{M} \models \varphi(\bar{a})$. Обрнуто важи на основу индуктивне претпоставке по којој је формула $\psi(\bar{x}, y)$ апсолутна за модел M и на основу претпоставке. QED

Лема 39 Уколико је Σ_n-формула $\varphi(\bar{x})$ заједно са свим својим потформулама апсолутна за све моделе из неке неопадајуће фамилије $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$, где је A неки линеарно уређен скуп, онда је формула $\varphi(\bar{x})$ апсолутна, такође са свим својим потформулама, и за модел $\mathrm{M} = \bigcup_{\alpha\in A} \mathrm{M}_\alpha$. Притом се подразумева да је у свим тим моделима интерпретација релацијског симбола $\in$ управо скуповно припадање.

Доказ: Доказ изводимо индукцијом по сложености формуле и применом претходне леме. Нека је $\exists y\psi(\bar{x}, y)$ потформула формуле φ и $\bar{a} \in \mathrm{M}$. Претпоставимо још да $\mathrm{WF} \models \psi(\bar{a}, b)$ за неко $b \in \mathrm{WF}$. Изаберимо такво $\alpha \in A$ за које $\bar{a} \in A$. Тада $\mathrm{M}_\alpha \models \psi(\bar{a}, c)$ за неко $c \in \mathrm{M}_\alpha$. Али тада $\mathrm{WF} \models \psi(\bar{a}, c)$ будући да су све потформуле од φ апсолутне за све моделе M_α. Но, формула $\psi(\bar{x}, y)$ је права потформула од φ, па за њу тврђење важи по индуктивној претпоставци, одакле $\mathrm{M} \models \psi(\bar{a}, c)$, па тврђење следи по претходној леми. QED

Теорема 57 ZF$^-$ (*Теорема рефлексије*) Нека је $n \in \mathbb{N}_0$. Тада је у теорији ZF$^-$ доказиво да за сваки добро заснован скуп M' постоји транзитиван скуп $\mathrm{M} \supseteq \mathrm{M}'$ такав да одговарајући модел буде апсолутан за све Σ_n формуле језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$. Штавише, нека је M_α фамилија транзитивних скупова која има следеће особине

1. За $\alpha \leqslant \beta$ је $\mathrm{M}_\alpha \subseteq \mathrm{M}_\beta$.
2. За гранични ординал α је $\mathrm{M}_\alpha = \bigcup_{b<\alpha} \mathrm{M}_\beta$.
3. $\bigcup_{\alpha \in ORD} \mathrm{M}_\alpha = \mathrm{WF}$.

Тада скуп M' може бити и облика M_α за неки ординал α.

Доказ: Нека је $\Phi_n = \Sigma_n \cup \Pi_n$. Није тешко приметити да је потформула формуле из Φ_n такође у скупу Φ_n. Формуле из скупа Φ_n називаћемо Φ_n-формулама. Индукцијом по сложености Φ_n-формуле φ доказаћемо да за сваки добро заснован скуп M' постоји ординал α такав да Са α_0 означићемо најмањи ординал са особином да је $\mathrm{M}_{\alpha_0} \supseteq \mathrm{M}$. Такав ординал постоји зато што је $\bigcup_{\alpha \in ORD} \mathrm{M}_\alpha = \mathrm{WF}$, при чему је скуп M подскуп класе WF. Наиме, за α_0 је довољно узети супремум свих ординала β таквих да постоји $x \in \mathrm{M}$ за који је β најмањи ординал такав да $x \in \mathrm{M}_\beta$. Таквих ординала има колико и елемената скупа M, па је њихов супремум заиста ординал.

Уколико је φ атомска формула, довољно је ставити $\alpha = \alpha_0$. Тврђење у случају када је φ негација неке формуле следи одмах по индуктивној претпоставци. Претпоставимо да је формула φ облика $\psi \Rightarrow \theta$. Тада су формуле φ и θ такође Φ_n-формуле као потформуле Φ_n-формуле φ. Стога, ће по индуктивној претпоставци постојати низ ординала $(\alpha_k)_{k \in \omega \setminus \{0\}}$ такав да за свако $k \in \omega$ ординал α_{2k+1} буде најмањи ординал који није мањи од α_{2k} и такав да модел $\mathrm{M}_{\alpha_{2k}}$ буде апсолутан за формулу ψ заједно са свим њеним потформулама, а да ординал α_{2k+2} буде најмањи ординал који није мањи од α_{2k+1} и такав да модел $\mathrm{M}_{\alpha_{2k+2}}$ буде апсолутан за формулу θ, такође са свим њеним потформулама. Будући да тај низ не опада, његови поднизови елемената са парним, односно непарним индексима ће имати исти супремум α, па ће за модел M_α бити апсолутне обе формуле ψ и θ заједно са свим њиховим потформулама, а самим тим и формула φ заједно са својим потформулама.

Најзад, ако је формула φ облика $\exists y \psi(\bar{x}, y)$, онда је $\psi(\bar{x}, y)$ као потформула Φ_n-формуле $\varphi(\bar{x})$ такође једна Φ_n-формула , па за њу важи индуктивна претпоставка. Конструишимо низ ординала $(\alpha_k)_{k \in \omega \setminus \{0\}}$ на следећи начин. За сваки ординал γ, скуп X и $\bar{a} \in X$ са $\beta_{X,\gamma}(\bar{a})$ означићемо најмањи ординал β који није мањи од γ и такав да ако постоји b за које је $\psi(\bar{a}, b)$, онда постоји и $b \in \mathrm{M}_\beta$ такво да важи $\psi(\bar{a}, b)$. За свако $k \in \omega$ нека је α_{2k+1} најмањи ординал који није мањи од α_{2k} и такав да је формула $\psi(\bar{x}, y)$ заједно са свим својим потформулама апсолутна за модел M_{2k+1}, и нека је $\alpha_{2k+2} = \sup_{\bar{a} \in \mathrm{M}_{\alpha_{2k+1}}} \beta_{\mathrm{M}_{\alpha_{2k+1}}, \alpha_{2k+1}}(\bar{a})$. Тада ће поднизови овог низа са парним, односно непарним индексима имати исти супремум α јер је низ неопадајући. Према преходним разматрањима и индуктивној претпоставци, модел M_α ће бити апсолутан за формулу $\psi(\bar{x}, y)$, као и за све њене потформуле.

Докажимо да ће тај модел бити апсолутан и за формулу $\varphi(\bar{x})$. Нека је $\bar{a} \in \mathrm{M}_\alpha$. Уколико $\mathrm{M}_\alpha \models \varphi(\bar{a})$, онда због $\mathrm{M}_\alpha \models \exists y \psi(\bar{a}, y)$ постоји неко $b \in \mathrm{M}_\alpha$ такво да $\mathrm{M}_\alpha \models \exists y \psi(\bar{a}, b)$. Но, према апсолутности формуле $\psi(\bar{x}, y)$ за модел M_α тада мора да важи $\psi(\bar{a}, b)$, а самим тим и $\varphi(\bar{a})$. Претпоставимо зато да важи $\varphi(\bar{a})$. Уочимо неко $k \in \omega$ такво да $\bar{a} \in \mathrm{M}_{\alpha_{2k+1}}$. Према конструкцији ординала α_{2k+2} постојаће неко $b \in \mathrm{M}_{\alpha_{2k+2}}$ такво да важи $\psi(\bar{a}, b)$. Но, тада ће бити и $b \in \mathrm{M}_\alpha$, одакле на основу апсолутности формуле $\psi(\bar{a}, b)$ за модел M_α закључујемо да мора важити $\mathrm{M}_\alpha \models \psi(\bar{a}, b)$, а самим тим и $\mathrm{M}_\alpha \models \varphi(\bar{a})$.

Нека је сада M произвољан добро заснован скуп. Дефинишимо ординал α_0 као малопре. Низ ординала $(\alpha_k)_{k \in \omega \setminus \{0\}}$ дефинисаћемо на следећи начин. За произвољно $k \in \omega$ изабраћемо α_{k+1} као најмањи ординал не мањи од α_k за који је свака Φ_n-формула са кодом не већим од k, а скуп таквих формула је затворен за потформуле, апсолутна за модел $\mathrm{M}_{\alpha_{k+1}}$. Тада ће све Φ_n-формуле бити апсолутне за модел M_α, где је $\alpha = \sup_{k \in \omega} \alpha_k$. QED

Наведимо још једну важну варијанту теореме рефлексије у којој се кардиналност модела контролише.

Теорема 58 ZFC$^-$ Нека је $\mathrm{M} \in \mathrm{WF}$ и $n \in \mathbb{N}_0$. Тада постоји добро заснован скуп $\mathrm{M}' \supseteq \mathrm{M}$ такав да је модел M' апсолутан за све Σ_n-формуле и тако да је $|\mathrm{M}'| = |\mathrm{M}| \cdot \aleph_0$.

Доказ: Нека је поново $\Phi_n = \Sigma_n \cup \Pi_n$. Докажимо најпре индукцијом по сложености Φ_n-формуле φ да постоји такав модел M', али који је апсолутан за формулу φ заједно са свим њеним потформулама. У доказу ћемо користити ознаку $||x||$ за $|x| \cdot \aleph_0$. Најпре уочимо транзитиван скуп $\mathrm{M}'' \supseteq \mathrm{M}$ такав да је модел M'' апсолутан за све Φ_n-формуле и на њему функцију избора f. Уколико је φ атомска формула, можемо ставити $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$. У случају да је формула φ облика $\neg\psi$, тврђење важи на основу индуктивне претпоставке.

Претпоставимо сада да је формула φ облика $\psi \Rightarrow \theta$. Конструишимо следећи низ модела $(\mathrm{M}_k)_{k\in\omega}$. Нека је $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}$. За свако $k \in \omega$ нека је $\mathrm{M}_{2k+1} \supseteq \mathrm{M}_{2k}$ модел за који је формула ψ апсолутна заједно са свим својим потформулама и такав да је $|\mathrm{M}_{2k+1}| = ||\mathrm{M}_{2k}||$ и нека је $\mathrm{M}_{2k+2} \supseteq \mathrm{M}_{2k+1}$ модел за који је формула θ апсолутна такође са свим својим потформулама и такав да је $|\mathrm{M}_{2k+2}| = ||\mathrm{M}_{2k+1}||$. Ова конструкција ће бити коректна јер сви модели M_k могу бити подмодели од M'', а на скупу $P(\mathrm{M}'')$ постоји функција избора која сваком непразном подскупу скупа $P(\mathrm{M}'')$ придружује један његов елемент. Модел $\mathrm{M}' = \bigcup_{k\in\omega} \mathrm{M}_k$ ће испуњавати тражене услове.

Нека је сада формула $\varphi(\bar{x})$ облика $\exists y\, \psi(\bar{x}, y)$. Конструишимо низ $(\mathrm{M}_k)_{k\in\omega}$ на следећи начин. Нека је поново $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}$ и нека је модел

$$\mathrm{M}_{k+1} \supseteq \mathrm{M}_k \cup \{f(\{b \in \mathrm{M}'' : \psi(\bar{a}, b)\}) : \bar{a} \in \mathrm{M}_k \wedge \exists y\, \psi(\bar{a}, y)\}$$

за свако $k \in \omega$ такав да је формула $\psi(\bar{x}, y)$ заједно са свим својим потформулама апсолутна за њега и такав да је $|\mathrm{M}_{k+1}| = ||\mathrm{M}_k||$. Моделе из овог низа такође можемо бирати као подмоделе модела M'', па је конструкција коректна захваљујући аксиоми избора. Модел $\mathrm{M}' = \bigcup_{k\in\omega} \mathrm{M}_k$ ће испуњавати тражене услове. Завршетак доказа је сличан као у претходној теореми. QED

У овој теореми скуп M' у општем случају не може бити транзитиван. Наиме, постоји формула коју не рефлектује нити један пребројив транзитиван модел. Нека је $\psi(x)$ било која формула чија је једина евентуална слободна променљива x и таква да је формула $\psi(x) \Rightarrow x \neq \emptyset$ ваљана и нека је θ произвољна реченица. Уз претпоставку да важи θ сваки транзитиван модел који рефлектује формулу

$$\psi(x) \vee (x = \emptyset \wedge \theta)$$

рефлектује и формуле $\psi(x)$ и θ. Ту се најпре коришћењем чињенице да празан скуп припада сваком непразном транзитивном скупу и заменом x са $\emptyset$ закључује да у том моделу мора да важи θ, а потом и да тај модел мора да буде апсолутан и за формулу $\psi(x)$.

Ако је на пример $\psi(x)$ формула $|x| > \aleph_{17}$, а θ формула $\exists x \psi(x)$, онда најпре у моделу M који рефлектује горњу формулу мора постојати неки елемент a за који важи $\mathrm{M} \models \psi(a)$, а потом према апсолутности формуле $\psi(x)$ за тај модел, тај елемент мора имати кардинални број већи од $\aleph_{17}$. Но, како је сваки елемент транзитивног скупа и његов подскуп, то ће тачно значити да модел M мора имати кардиналност већу од $\aleph_{17}$.

Теорема рефлексије нам омогућава да докажемо да теорија ZFC^- нема коначну аксиоматизацију. У тој теорији имамо две схеме са бесконачно много аксиома инстанци. Као што ћемо видети, схема сепарације се може свести на коначно много својих инстанци. Међутим, то тачно значи да се схема замене не може заменити неким коначним бројем аксиома. Такође, нити за један природан број n не можемо схему замене свести на скуп њених Σ_n-инстанци.

У следеће две теореме се аксиома избора не мора користити, али такав доказ захтева сложенији апарат који ће накнадно бити развијен.

Теорема 59 За сваки коначан скуп F теорема теорије ZFC важи $\mathrm{ZFC}^- \vdash Tm(F)$, при чему је $Tm(F)$ формула којом се изражава постојање транзитивног модела теорије F. Посебно, теорија ZFC^- није коначно аксиоматска.

Доказ: За сваки коначан скуп $\mathrm{F} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ аксиома теорије ZFC^- према теореми рефлексије важи $\mathrm{ZF}^- \vdash \exists M(\mathrm{tr(M)} \wedge \forall(\bigwedge_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}(\varphi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{M}} \Leftrightarrow \varphi_{\mathrm{i}})))$. Пошто је φ_i за свако i аксиома теорије ZFC^-, важиће

$$\mathrm{ZFC}^- \vdash \exists \mathrm{M}(\mathrm{tr(M)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \mathrm{M} \models \varphi_i).$$

Но, у транзитивним моделима увек важи аксиома регуларности, па ако би теорија ZFC била коначно аксиоматска, онда би за њену коначну аксиоматизацију F важило $\mathrm{ZFC}^- \vdash \mathrm{Con(F)}$, а самим тим због еквивалентности тих двеју теорија и $F \vdash \mathrm{Con(F)}$, што је супротно Геделовој теореми непотпуности примењеној на теорију F. QED

Теорема 60 Теорија ZFC^- нема Σ_n-подаксиоматизацију.

Доказ: Доказује се сличан начин као претходна теорема на основу чињеница везаних за схеме замене и сепарације са краја претходне тачке, Геделове теореме непотпуности и теореме рефлексије. QED

На крају, поменимо још један критеријум апсолутности за транзитивне моделе.

Теорема 61 Z^- Нека је $\varphi(\bar{x})$ нека Σ_1-формула и $\psi(\bar{x})$ нека Π_1-формула. Ако су те две формуле еквивалентне, онда су оне и апсолутне за сваки транзитиван модел у коме су еквивалентне.

Доказ: Претпоставимо да је формула $\varphi(\bar{x})$ облика $\exists\bar{y}\varphi'(\bar{x},\bar{y})$ за неку Σ_0-формулу $\varphi'(\bar{x},\bar{y})$ и да је формула $\psi(\bar{x})$ облика $\forall\bar{z}\psi'(\bar{x},\bar{z})$ за неку Π_0-формулу $\psi'(\bar{x},\bar{z})$, као и да је M транзитиван модел (права класа или скуп) такав да $\mathrm{M} \models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow \psi(\bar{x}))$, као и да важи $\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow \psi(\bar{x}))$. Нека $\bar{a} \in \mathrm{M}$. Ако тада важи $\mathrm{M} \models \varphi(\bar{a})$, онда важи и $\mathrm{M} \models \psi(\bar{a})$, као и $\mathrm{M} \models \varphi'(\bar{a},\bar{b})$ за неке $\bar{b} \in \mathrm{M}$. Будући да су све Σ_0-формуле апсолутне за све транзитивне моделе, одатле следи да важи $\varphi'(\bar{a},\bar{b})$, а самим тим и $\varphi(\bar{a})$, односно $\psi(\bar{a})$. У супротном важи $\mathrm{M} \models \neg\varphi(\bar{a})$ и $\mathrm{M} \models \neg\psi(\bar{a})$, а самим тим и $\mathrm{M} \models \neg\psi'(\bar{a},\bar{b})$. Опет по апсолутности Π_0-формула за све транзитивне моделе закључиујемо да важи $\neg\psi'(\bar{a},\bar{b})$, одакле $\neg\psi(\bar{a})$, а самим тим и $\neg\varphi(\bar{a})$. QED

2.3 Метод унутрашњих модела

У овом одељку ћемо увести први од метода за доказивање релативне консистентности аксиоматских система у теорији скупова. То је метод унутрашњих модела који је у Математици коришћен још у Геометрији за доказивање консистенције нееуклидских геометрија. Међутим, метод унутрашњих модела у теорији скупова је много рафинiранији.

Нека је дат неки модел $\mathfrak{M} = (\mathrm{M}, E)$ и формула $\varphi(x)$. Тада по одговарајућим подмоделом подразумевамо модел $\mathfrak{N} = (\mathrm{N}, E)$, где је $\mathrm{N} = \{x \in \mathrm{M} : \varphi(\bar{x})\}$. Прецизније, интерпретација бинарног релацијског симбола $\in$ у моделу $\mathfrak{N}$ је $E \cap N \times N$, али ћемо рестрикцију неке релације на неки скуп означавати исто као и саму ту релацију ако нема опасности од забуне.

Када доказујемо релативну консистентност теорије T_2 у односу на теорију T_1, довољно је доказати да се сваки модел теорије T_1 може прерадити у модел теорије T_2. И више од тога, будући да важи став компактности, довољно је за сваки коначан скуп формула $K \subseteq T_2$ сваки модел теорије T_1 може прерадити тако да се добије модел теорије K. У овом одељку ће једина врста прераде бити попут горе описане, мада се у општем случају модел може прерађивати на било који начин.

2.3.1 Конструктибилни универзум

Овде ћемо контруисати најмањи подмодел датог модела ZF^- теорије који садржи све његове ординале и који такође задовољава аксиоме ZF^-. Притом, ако је полазни модел био транзитиван, и конструисани подмодел ће бити транзитиван. У том циљу уведимо најпре Геделове операције.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}_0(a,b) &= \{a,b\},\\
\mathfrak{F}_1(a,b) &= \{\langle x,y\rangle \in a : x \in y\},\\
\mathfrak{F}_2(a,b) &= \{\langle x,y\rangle \in a : \langle y,x\rangle \in b\},\\
\mathfrak{F}_3(a,b) &= \{\langle x,y,z\rangle \in a : \langle y,z\rangle \in b\},\\
\mathfrak{F}_4(a,b) &= \{\langle x,y,z\rangle \in a : \langle x,z\rangle \in b\},\\
\mathfrak{F}_5(a,b) &= \{\langle x,y\rangle \in a : x \in b\},\\
\mathfrak{F}_6(a,b) &= \{x \in a : x \notin b\},\\
\mathfrak{F}_7(a,b) &= \{x \in a : \exists y\, \langle x,y\rangle \in b\},\\
\mathfrak{F}_8(a,b) &= \bigcup a,\\
\mathfrak{F}_9(a,b) &= a \times b.
\end{aligned}
$$

Приметимо да је затвореност универзума за све ове операције последица само коначно много инстанци схеме сепарације уз остале аксиоме теорије ZF. Схема сепарације се уз те остале аксиоме може свести на само тих коначно много инстанци и инстанце која обезбеђује егзистенцију декартовог производа два скупа. На тај начин добијамо еквивалентну теорију са полазном у којој учествује само коначно много инстанци схеме сепарације.

За класу X рећи ћемо да је скоро универзална ако за сваки скуп $x \subseteq X$ постоји $y \in X$ такво да је $x \subseteq y$. Није тешко приметити да је свака скоро универзална класа права.

Теорема 62 Z^- Нека је $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ било која Σ_0-формула. Тада постоји композиција $\mathfrak{F}(y_1, \dots, y_n)$ Геделових операција таква да важи

$$(\forall y_1 \cdots y_n \in \mathrm{WF})\ \mathfrak{F}(y_1, \dots, y_n) = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in y_1 \times \dots \times y_n : \varphi(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Доказ: Најпре приметимо да можемо претпоставити да се једнакост нигде не појављује у формули φ будући да је

$$\forall x\, \forall y\, (x = y \Leftrightarrow ((\forall z \in x) z \in y \wedge (\forall z \in y) z \in x).$$

Такође можемо претпоставити да не постоји потформула формуле φ облика $x \in x$, као и да формула φ од логичких везника има само $\wedge$ и $\neg$, а од квантификатора једино ограничене егзистенцијалне кванторе. Теорему ћемо доказати индукцијом по сложености формуле $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Уколико је формула φ атомска и $n = 2$, онда тврђење следи из једнакости

$$\{\langle x_1, x_2\rangle \in y_1 \times y_2 : x_1 \in x_2\} = \mathfrak{F}_1(y_1 \times y_2, y_1),$$
$$\{\langle x_1, x_2\rangle \in y_1 \times y_2 : x_2 \in x_1\} = \mathfrak{F}_2(y_1 \times y_2, \mathfrak{F}_1(y_2 \times y_1, y_1)).$$

надаље ћемо под $x\,\rho\, y$ подразумевати било коју од формула $x \in y$, односно $y \in x$. Уколико је $n > 2$ и формула φ је облика $x_{n-1}\,\rho\, x_n$, онда тврђење следи из једнакости

$$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in y_1 \times \dots \times y_n : x_{n-1}\,\rho\, x_n\} = \mathfrak{F}_3(y_1 \times \dots \times y_n, \{\langle x_{n-1}, x_n\rangle \in y_{n-1} \times y_n : x_{n-1}\,\rho\, x_n\}).$$

Уколико је пак формула φ облика $x_i\,\rho\, x_n$ за $i < n-1$, онда тврђење следи из претходно докзаног и једнакости

$$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in y_1 \times \dots \times y_n : x_i\,\rho\, x_n\} = \mathfrak{F}_4(y_1 \times \dots \times y_n, \{\langle x_1, \dots, x_{n-2}, x_n\rangle \in y_1 \times \dots \times y_{n-2} \times y_n : x_i\,\rho\, x_n\})$$

Најзад, ако је формула φ облика $x_i\,\rho\, x_j$ за $i < j < n$, онда тврђење следи из доказаног и из једнакости

$$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in y_1 \times \dots \times y_n : x_i\,\rho\, x_j\} = \{\langle x_1, \dots, x_j\rangle \in y_1 \times \dots \times y_j : x_i\,\rho\, x_j\} \times y_{i+1} \times \dots \times y_n.$$

Тиме смо решили проблем у случају да је формула φ атомска. Уколико је формула φ облика $\neg\psi$ за неку формулу ψ, онда тврђење следи из једнакости

$$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in y_1 \times \dots \times y_n : \varphi(x_1, \dots, x_n)\} = \mathfrak{F}_6(y_1 \times \dots \times y_n, \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in y_1 \times \dots \times y_n : \psi(x_1, \dots, x_n)\})$$

и индуктивне претпоставке. Приметимо сада да је $a \cap b = \mathfrak{F}_6(a, \mathfrak{F}_6(a, b))$ за ма које скупове a и b. Уколико је формула φ облика $\psi \wedge \theta$ за неке формуле ψ и θ, онда тврђење следи по индуктивној претпоставци и једнакости

$$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in y_1 \times \dots \times y_n : \varphi\} = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in y_1 \times \dots \times y_n : \psi\} \cap \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in y_1 \times \dots \times y_n : \theta\}.$$

Коначно, ако је формула φ облика $(\exists y \in x_i)\, \psi(x_1, \dots, x_n, y)$ за неку формулу ψ, онда тврђење следи на основу индуктивне претпоставке и једнакости

$$\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in y_1 \times \dots \times y_n : \varphi\} = \mathfrak{F}_7(y_1 \times \dots \times y_n, \{\langle x_1, \dots, x_n, y\rangle \in y_1, \dots, y_n \times \mathfrak{F}_8(y_i, y_i) : \psi\}).$$

QED

Приметимо да нигде нисмо користили операције $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}_5$.

Последица 6 Z^- Свака транзитивна класа X која је затворена за све Геделове операције рефлектује све инстанце схеме сепарације облика

$$\forall \bar{p}\ \forall a\, \exists b\ \forall x\, (x \in b \Leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{p})),$$

где је φ нека Σ_0-формула.

Доказ: Уколико је x једина слободна променљива формуле φ, онда тврђење следи по претходној теореми. Ако пак формула φ (изузимајући променљиву x) зависи још од променљивих $p_1, \ldots, p_n$ онда према претходној теореми постоји композиција $\mathfrak{F}(a, \bar{p})$ Геделових операција таква да је

$$\mathfrak{F}(a, \bar{p}) = \{\langle x, y_1, \ldots, y_n \rangle \in a \times \{p_1\} \times \cdots \times \{p_n\} : \varphi(x, \bar{p})\}$$

Уколико овај скуп означимо са A_n и скупове A_i за $0 \leqslant i < n$ дефинишемо са

$$\begin{aligned} A_i &= \mathfrak{F}_7(a \times \{p_1\} \times \cdots \times \{p_i\}, A_{i+1}), \quad \text{за } i \geqslant 1, \\ A_0 &= \mathfrak{F}_7(a, A_1). \end{aligned}$$

Дакле, скуп A_0 се изражава као композиција Геделових операција скупова $a, p_1, \ldots, p_n$. Отуда, ако $a, p_1, \ldots, p_n \in X$, онда и $A_0 \in X$. Штавише, пошто је формула φ као Σ_0-формула апсолутна за транзитивну класу X, важиће

$$A_0 = \{x \in a : \varphi(x, \bar{p})\} = \{x \in a : \varphi^X(x, \bar{p})\}.$$

QED

Теорема 63 Z^- Свака транзитивна скоро универзална класа затворена за операције $\mathfrak{F}_0, \ldots, \mathfrak{F}_7$ затворена је за све Геделове операције.

Доказ: Нека је X транзитивна скоро универзална класа затворена за операције $\mathfrak{F}_0, \ldots, \mathfrak{F}_7$. Пошто је класа X затворена за операцију $\mathfrak{F}_0$, биће затворена и за уређен пар. Но, како је класа X још и транзитивна и скоро универзална, за ма које $a, b \in X$ ће постојати скупови $C, D \in X$ за које је $C \supseteq a \times b$ и $D \subseteq b \times a$. За њих ће важити

$$a \times b = \mathfrak{F}_5(\mathfrak{F}_2(C, \mathfrak{F}_5(D, b)), a).$$

Такође по транзитивности и скоро универзалности класе X, за свако $a \in X$ постојаће $A \in X$ за које је $A \subseteq \bigcup a$. За њега важи

$$\bigcup a = \mathfrak{F}_7(A, \mathfrak{F}_1(A \times a, a)).$$

QED

Теорема 64 ZF^- Свака транзитивна скоро универзална X класа затворена за Геделове операције рефлектује све инстанце схеме сепарације.

Доказ: Доказаћемо нешто општије тврђење. Нека је $\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n, \bar{b})$ произвољна формула. Тада важи

$$(\forall a_1, \ldots, a_n \in X)(\forall \bar{b} \in X)\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in a_1 \times \cdots a_n : \varphi^X(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b})\} \in X.$$

Доказ ћемо спровести индукцијом по сложености формуле φ. Притом ћемо претпоставити да су сви квантори егзистенцијални. База индукције важи по претходној последици. Случајеви када је формула φ негација неке формуле или конјункција неких формула решавају се као у теореми 62.

Једини преостали случај је када је формула φ облика $\exists u\, \psi(\bar{x}, y, \bar{z}, u)$. Дакле, треба доказати да за све $\bar{a}, \bar{b} \in X$ важи

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle : (\exists u \in X)\psi^X(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}, u)\} \in X.$$

Означићемо тај скуп са c. Пошто је класа X транзитивна, биће $X \subseteq \mathrm{WF}$, па за свако $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in c$ можемо уочити ординал $\alpha = h(\bar{x})$ за који постоји скуп $u \in X$ ранга α за који важи $\psi(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}, u)$. Тада ће за скуп $d = \mathrm{V}_\alpha \cap X$, где је $\alpha = (\bigcup h[c]) + 1$ важити

$$(\forall \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in a_1 \times \cdots \times a_n)((\exists u \in X)\psi^X(x, a, \bar{b}, u) \Leftrightarrow (\exists u \in d)\psi^X(x, a, \bar{b}, u)).$$

Но, према скоро универзалности класе X постојаће $e \in X$ за који је $e \subseteq d$. У претходној формули се тада скуп d може заменити са e. Тада ће скуп

$$w = \{\langle x_1, \ldots, x_n, u \rangle \in a_1 \times \cdots \times a_n \times e : \psi^X(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}, u)\}$$

припадати класи X, одакле најзад и скуп $c = \mathfrak{F}_7(a_1 \times \cdots \times a_n, w)$ припада класи X. QED

Коришћењем претходне теореме и скоро универзалности доказује се да добро заснована скоро универзална класа X затворена за Геделове операције рефлектује сваку аксиому теорије ZF^-. Сада ћемо дефинисати најмању транзитивну скоро универзалну класу затворену за Геделове операције, при чему ће се показати да је она добро заснована. Посматрајмо на класи свих парова ординала уређење дефинисано на следећи начин

$$\begin{aligned}&\langle\alpha,\beta\rangle < \langle\alpha',\beta'\rangle \Leftrightarrow \max(\alpha,\beta) < \max(\alpha',\beta') \vee \\ &(\max(\alpha,\beta) = \max(\alpha',\beta') \wedge \alpha < \alpha') \vee \\ &(\max(\alpha,\beta) = \max(\alpha',\beta') \wedge \alpha = \alpha' \wedge \beta < \beta').\end{aligned}$$

Ово уређење је добро и сваки пар има скуп много претходника. Будући да је притом домен права класа, то уређење ће индуковати једну бијекцију класе $ORD \times ORD$ на класу ORD. Притом ће слика произвољног пара $\langle\alpha,\beta\rangle$ заправо бити ординал који одговара уређењу свих претходника тог пара $\langle\alpha,\beta\rangle$. Ако ту бијекцију означимо са G', важиће формула

$$G'(\alpha,\beta) = \sum_{\gamma<\alpha,\beta} 2\gamma+1 \;+\; \begin{cases} \alpha, & \alpha < \beta, \\ \\ \alpha+\beta, & \alpha \geqslant \beta. \end{cases}$$

По теореми о еуклидском дељењу ординала са $G(\alpha,\beta,n) = 9\,G'(\alpha,\beta)+n$ дата је једна бијекција класе $ORD \times ORD \times 9$ на класу ORD. Сада дефинишимо пресликавање F класе ORD са

$$F(G(\alpha,\beta,n)) = \mathfrak{F}_n(F(\alpha),F(\beta)), \quad \text{за } n<8,$$

$$F(G(\alpha,\beta,8)) = \bigcup_{\gamma<G(\alpha,\beta,8)} F(\gamma).$$

Дефинишимо класу L као слику функције F. Одмах се види да је класа L затворена за операције $\mathfrak{F}_0,\ldots,\mathfrak{F}_7$. Докажимо да је транзитивна. Индукцијом по α доказаћемо да је $F(\alpha) \subseteq L$. Уколико је остатак при дељењу α са 9 једнак нули, онда то важи по дефиницији елемента $F(\alpha)$. Ако је пак $\alpha = G(\beta,\gamma,n)$ за неко $n>0$, онда $F(\alpha) \subseteq L$ следи из чињенице да је $\mathfrak{F}_n(a,b) \subseteq a$ и индуктивне претпоставке.

Скоро универзалност класе L следи из чињеница да је супремум скупа ординала ординал и да од сваког ординала можемо наћи још већи ординал, који ће самим тим свакако бити дељив са 9. Одавде следи да класа L рефлектује све аксиоме теорије ZF^-. Наравно, та чињеница важи у светлу саме теорије ZF^-, будући да без схеме замене нема ни смисла говорити о појмовима који су дефинисани применом теореме рекурзије, као што је конструктибилни универзум L.

Класу L зовемо и конструктибилним универзумом, а њене елементе конструктибилним скуповима. Дефинишимо конструктибилни ранг $\mathrm{rng}(x)$ произвољног конструктибилног скупа x као најмањи ординал α за који је $x = F(\alpha)$.

Лема 40 ZF^- Транзитивна скоро универзална класа X затворена за Геделове операције садржи све ординале.

Доказ: Нека је α најмањи ординал који не припада X. Тада мора бити $\alpha \subseteq X$, па због скоро универзалности класе X постоји скуп $a \in X$ тако да је $\alpha \subseteq a$. Пошто је предикат "бити ординал" апсолутан за транзитивне моделе, а класа X транзитивна скоро универзална и затворена за Геделове операције, скуп b свих ординала из a ће такође бити елемент од X, па је због затворености за Геделове операције и $\beta = \bigcup b$ елемент класе X. Због транзитивности класе X и $\alpha \notin X$, класи X не припада нити један ординал већи од α. Но, тада је $\alpha \leqslant \beta+1$, одакле лако следи контрадикција. QED

Последица 7 ZF^- Класа L је најмања транзитивна скоро универзална класа која је затворена за Геделове операције.

Већ смо доказали да је Δ_1-формула апсолутна за оне транзитивне моделе у којима важи да је она Δ_1-формула. Са друге стране, операција задата неком Σ_1-формулом је апсолутна за транзитивне моделе у којима важи да је истом формулом задана операција, и под условом да је формула којом је задан домен апсолутна. Штавише, важи следећа лема.

Лема 41 Z^- Нека су $\varphi(\bar{x},y,\bar{z})$ и $\psi(\bar{x})$ апсолутне формуле за модел M. Уколико важи

$$\forall\bar{x}\,(\,(\psi(\bar{x}) \wedge \exists\bar{z}\varphi(\bar{x},y,\bar{z}) \wedge \exists\bar{z}\varphi(\bar{x},y',\bar{z})\,) \Rightarrow y=y') \quad \text{и}$$

$$\mathrm{M} \models \forall\bar{x}\,(\psi(\bar{x}) \Rightarrow \exists y\exists\bar{z}\varphi(\bar{x},y,\bar{z})),$$

онда ће формула $\psi(\bar{x}) \wedge \exists\bar{z}\varphi(\bar{x}, y, \bar{z})$ бити апсолутна за модел M и важиће

$$\mathrm{M} \models \forall\bar{x}\,(\psi(\bar{x}) \Rightarrow \exists_1 y\exists\bar{z}\varphi(\bar{x}, y, \bar{z})).$$

Доказ: Претпоставимо да $\mathrm{M} \models \psi(\bar{a}) \wedge \exists\bar{z}\varphi(\bar{a}, b, \bar{z})$ за неке $\bar{a}, b \in \mathrm{M}$. Тада важи $\mathrm{M} \models \psi(\bar{a}) \wedge \varphi(\bar{a}, b, \bar{c})$ за неке $\bar{c} \in \mathrm{M}$, па је по претпостављеној апсолутности $\psi(\bar{a}) \wedge \varphi(\bar{a}, b, \bar{c})$, а самим тим и $\psi(\bar{a}) \wedge \exists\bar{z}\varphi(\bar{a}, b, \bar{z})$.

Обрнуто, претпоставимо да важи $\psi(\bar{a}) \wedge \exists\bar{z}\varphi(\bar{a}, b, \bar{z})$ за неке $\bar{a}, b \in \mathrm{M}$. На основу апсолутности формуле ψ, тада ће важити и $\mathrm{M} \models \psi(\bar{a})$, одакле на основу претпоставки леме мора да важи $\mathrm{M} \models \exists y\exists\bar{z}\varphi(\bar{a}, y, \bar{z})$, а самим тим и $\mathrm{M} \models \exists\bar{z}\varphi(\bar{a}, b', \bar{z})$ за неко $b' \in \mathrm{M}$. Према претходним разматрањима то ће значити да важи $\exists\bar{z}\varphi(\bar{a}, b', \bar{z})$, а због $\psi(\bar{a})$ и $\psi(\bar{a}) \wedge \exists\bar{z}\varphi(\bar{a}, b', \bar{z})$. Према претпоставкама леме тада мора бити $b = b'$, а онда према претходном и према апсолутности формуле ψ и $\mathrm{M} \models \psi(\bar{a}) \wedge \exists\bar{z}\varphi(\bar{a}, b, \bar{z})$. Сада из доказане апсолутности и из претпоставки леме одмах следи да мора да важи и преостали део тврђења. QED

Последица 8 Z^- Нека су $\varphi(\bar{x}, y, \bar{z})$ и $\psi(\bar{x})$ апсолутне формуле за модел M. Уколико важи

$$\forall\bar{x}\,(\psi(\bar{x}) \Rightarrow \exists_1 y\exists\bar{z}\varphi(\bar{x}, y, \bar{z})),$$

и притом је модел M апсолутан за формулу

$$\forall\bar{x}\,(\psi(\bar{x}) \Rightarrow \exists y\exists\bar{z}\varphi(\bar{x}, y, \bar{z})),$$

онда ће формула $\psi(\bar{x}) \wedge \exists\bar{z}\varphi(\bar{x}, y, \bar{z})$ бити апсолутна за модел M.

Подсетимо се најпре да се апсолутност дефинише у односу на класу WF добро заснованих скупова. Тамо је због добре засновaности линеарна уређеност релацијом $\in$ исто што и добра уређеност истом релацијом, па се релација "x је ординал" записује формулом са ограниченим квантификаторима, која је самим тим апсолутна за све транзитивне моделе. Стога ће и домени операција сабирања и множења ординала, као и операција G, G' и F бити апсолутни за произвољан транзитиван модел.

Приметимо сада да се операције сабирања и множења ординала, као и операције G, G' и F описују формулом која постулира егзистенцију неког скупа (рецимо функције) који треба да испуни неке услове описане формулама које су апсолутне за све транзитивне моделе. Стога ће према претходној последици постојати коначан скуп теорема (дакле, формула без слободних променљивих!) теорије ZF^- такав да су поменуте операције апсолутне за ма који транзитиван моделкоји рефлектује те реченице.

Из конструктибилности сваког ординала и апсолутности класе L за операцију F следи да у конструктибилном универзуму L важи такозвана аксиома конструктибилности која гласи

$$\forall x(\exists\alpha \in ORD)F(\alpha) = x$$

и која се обележава са $V = L$. Систем аксиома $\mathrm{ZF}^- + V = L$ обележаваћемо са ZFL. Пошто су сви конструктибилни скупови добро засновани, уз аксиому $V = L$, то јест уз претпоставку да других скупова нема, сви скупови су добро засновани.

Будући да све ваљане формуле важе у свим моделима и да из апсолутности формула φ и $\varphi \Rightarrow \psi$ следи апсолутност формуле ψ за исти тај модел, произвољан модел ће бити апсолутан и за сваку теорему теорије за чију је сваку аксиому апсолутан. Овде ћемо доказати две важне теореме теорије ZFL.

Прва од њих је аксиома избора. Наиме, сваком конструктибилном скупу x можемо придружити најмањи ординал α у ознаци $\mathrm{rng}(x)$ за који је $F(\alpha) = x$. Будући да је то пресликавање инјективно, тиме се добро уређење ординала преноси на класу L чиме је сваки њен подскуп добро уређен. Ако важи аксиома конструктибилности $V = L$, онда то управо значи да важи Цермелов принцип доброг уређења, а самим тим и аксиома избора.

Друга је такозвана генералисана континуум хипотеза која тврди да између кардиналног броја бесконачног скупа и кардиналног броја његовог партитивног скупа нема других кардинала. Овај доказ је мало сложенији. Претпоставимо да важи аксиома конструктибилности $V = L$. Доказаћемо најпре неједнакост $||\mathrm{rng}(x)|| \leqslant ||\mathrm{tc}(\{x\})||$. Ту је наравно, $||x||$ ознака за $\aleph_0 \cdot |x|$.

Нека је x произвољно и нека је $\mathrm{N} \supseteq \mathrm{tc}(\{x\})$ транзитиван модел који рефлектује коначан скуп реченица који обезбеђује апсолутност операције F и аксиому конструктибилности. Његову кардиналност не можемо у општем случају контролисати. Али по доњој Сколемовој теореми можемо уочити његов елементарни подмодел $\mathrm{N}' \supseteq \mathrm{tc}(\{x\})$ кардиналности $||\mathrm{tc}(\{x\})||$. Он ће рефлектовати исте формуле као модел

N јер му је елементарни подмодел, који у општем случају не мора бити транзитиван. Међутим, пошто је добро заснован (јер су због $V = L$ сви скупови добро засновани), он има транзитивни колапс M, који у општем случају неће рефлектовати исте формула као модел N′, али ће рефлектовати исте реченице као њему изоморфан модел. Пошто смо ми обезбедили апсолутност операције F апсолутношћу за коначан број реченица, операција F ће бити апсолутна и за модел M.

У општем случају, при транзитивном колапсу сваки елемент x домена (M, E) се слика у транзитивни колапс модела (E_x, E), где је $E_x = \{y : yE^T x\}$. Подсетимо се да је E^T ознака за транзитивно затворење релације E. Пошто је у нашем случају интерпретација релације припадања управо скуповно припадање, и пошто је $\mathrm{tc}(\{x\}) \subseteq \mathrm{N}'$, слика скупа x при транзитивном колапсу ће бити управо скуп x. Но, пошто смо претпоставили аксиому конструктибилности и пошто је модел M рефлектује, она ће важити и у њему, па скуп x има конструктибилни ранг α, који мора у том моделу да буде ординал, па пошто је модел транзитиван, мора и иначе да буде ординал. Но, у моделу M важи $F(\alpha) = x$, па због апсолутности операције F за модел M мора бити и иначе $F(\alpha) = x$. Но, како је модел M кардиналности $||\mathrm{tc}(\{x\})|| = ||\mathrm{tx}(x)||$ и како $\alpha \in \mathrm{M}$, кардиналност ординала α не може бити већа од $||\mathrm{tc}(\{x\})||$, јер због транзитивности модела M важи $\alpha \subseteq \mathrm{M}$. Тиме је тражена неједнакост доказана.

Посебно, ако је κ бесконачан кардинал и $x \subseteq \kappa$, конструктибилни ранг скупа x биће мањи од κ^+, па на тај начин добијамо једно инјективно пресликавање скупа $P(\kappa)$ у κ^+, што доказује генералисану континуум хипотезу.

2.3.2 Анализа методе унутрашњих модела и њена ограничења

Када доказујемо за два аксиоматска система Σ и Σ' да из конзистенције система Σ следи конзистентност система Σ' моделским приступом, у принципу ми или полазећи од произвољног модела теорије Σ доказујемо да постоји модел теорије Σ', или полазећи од произвољног модела теорије Σ доказујемо да сваки коначан систем аксиома $K' \subseteq \Sigma'$ има модел.

У случају методе унутрашних модела, или се доказује да сваки модел теорије Σ има подмодел који је модел теорије Σ', или се доказује да за ма који коначан систем аксиома $K' \subseteq \Sigma'$ произвољан модел теорије Σ има подмодел који је модел за K'.

Ту се први приступ очигледно своди на други, али у општем случају обрнуто не мора да важи јер прерада модела теорије Σ не мора бити униформна, то јест реконструкција подмодела који је модел теорије K' може зависисти од изабраног скупа аксиома K'.

Наведимо један пример за последњу констатацију. Нека је Σ теорија стриктног линеарног уређења $<$ са минимумом у коме сваки елемент осим минимума има непосредног претходника и у коме сви елементи осим евентуално једног имају непосредног следбеника. Са φ означимо реченицу којом се тврди да стриктно уређење $<$ има максимум и нека је за свако $n \in \omega$ реченица којом се изражава егзистенција барем n објеката означена са φ_n. За Σ' узећемо теорију $\Sigma + \varphi + \{\varphi_n : n \in \omega\}$. Уређење $(\mathbb{N}, <)$ је један модел теорије Σ који нема нити један подмодел теорије Σ' иако има подмодел сваког њеног коначног аксиоматског подсистема.

Нека је M било који транзитиван модел теорије ZFL. Класа ординала било ког транзитивног модела је неки ординал који зовемо висином тог модела. Обзиром да је операција F апсолутна за модел M и да тај модел задовољава аксиому конструктибилности, он ће бити облика $F[\alpha]$, где је α висина модела M. Дакле, сви транзитивни модели теорије ZFL ће бити облика $F[\alpha]$ за неки ординал α, па ће постојати најмањи транзитиван модел теорије ZFL под условом да уопште постоји транзитиван модел те теорије. Наравно, та претпоставка је еквивалентна са постојањем транзитивног модела теориеј ZF^-. Надаље ће α означавати најмањи ординал такав да је $F[\alpha] \models \mathrm{ZFL}$, под претпоставком да такав ординал уопште постоји.

Нека је сада N било који подмодел модела $F[\alpha]$ који задовољава аксиоме ZF^-. Тада ће он бити добро заснован као подмодел транзитивног модела, па ће имати транзитивни колапс N'. Притом ће важити $N' = F[\alpha]$ под условом да важи барем један од следећих исказа:

а) Модел N задовољава аксиому конструктибилности.

б) N је класа у моделу $F[\alpha]$, то јест постоје формула $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ и елементи $b_1, \dots, b_n \in F[\alpha]$ такви да из $a \in F[\alpha]$ следи да је $a \in N$ еквивалентно са $F[\alpha] \models \varphi[a, \bar{b}]$.

в) Скуп N је транзитиван.

Притом се други услов у теорији скупова подразумева када се говори о методи унутрашњих модела. У случају да важи први услов, тврђење следи на основу чињенице да висина модела N не може премашити висину α модела $F[\alpha]$. У другом случају се показује да пресек подмодела са транзитивним затворењем било ког његовог елемента елемент тог модела, одакле моделу припада и његов транзитивни колапс.

Посебно, нека је M било који транзитиван модел теорије ZF^-. Тада је према разматрањима из претходне тачке M^L такође транзитиван модел теорије ZF^-. Но, он је облика $F[\alpha]$, па садржи најмањи транзитиван модел теорије ZFL који је уједно и најмањи транзитиван модел теорије ZF^-.

Метод унутрашњих модела за доказивање конзистенције теорије Σ' из конзистенције теорије Σ' подразумева проналажење подмодела произвољног модела теорије Σ тако да тај подмодел задовољи аксиоме теорије Σ'. У том смислу не можемо методом унутрашњих модела доказати независност нити једне хипотезе од аксиоматског система који има минималан модел.

Нека је сада S аксиоматски систем који садржи барем аксиоме теорије ZF^- и који не противречи теорији ZFL, и нека је H хипотеза која не зависи од тог система аксиома. Та независност не може бити доказива методом унутрашњих модела, јер у минималном моделу теорије S хипотеза H или важи или не важи. Овај недостатак методе унутрашњих модела нас мотивише да изучавамо и друге методе за доказивање релативне конзистенције у теорији скупова.

Ипак, ово ограничење као што ћемо видети, не важи када се метод унутрашњих модела схвати нешто општије, као метод којим се полазећи од произвољног модела теорије T проналази његов подмодел који задовољава унапред дати коначан подскуп скупа аксиома T'.

Овај одељак ћемо завршити једном варијантом чувене теореме апсолутности. Нека је H било која реченица ограничена на V_ω. Претпоставимо да $\mathrm{ZF}^- \not\vdash H$. Тада постоји модел M теорије $\mathrm{ZF}^- + \neg H$. Ако са L^{M} означимо скуп свих конструктибилних елемената у моделу M, онда је L^{M} подмодел модела M који према претходним разматрањима задовољава све аксиоме теорије ZFL.

Но, како је скуп V_ω апсолутан за L као транзитивну класу која рефлектује одговарајући коначан фрагмент теорије ZF^- (мада V_α за $\alpha > \omega$ није апсолутан појам), тврђење H које је ограничено на V_ω је такође апсолутно за L, па га модел L^{M} рефлектује са M. То управо значи да $L^{\mathrm{M}} \models \mathrm{ZFL} + \neg H$, односно $\mathrm{ZFL} \not\vdash H$.

Овим смо показали да ако је тврђење H ограничено на V_ω, онда је оно доказиво у систему ZFL ако и само ако је доказиво у систему ZF^-, то јест не зависи нити од аксиоме избора, нити од аксиоме коснтруктибилности која представља далеко најјачи познати математички принцип. Ту спадају сви проблеми конзистенције и релативне конзистенције, као и велики број великих математичких проблема у које спадају на пример Риманова хипотеза о расподели нула Риманове ζ-функције, Голдбахова хипотеза, недавно доказана велика Фермаова теорема, P према NP проблем, као и разни проблеми аналитичке теорије бројева са асимптотским понашањима неких аритметичких функција важних за теорију бројева.

Но, нама су овде битни проблеми конзистенције и релативне конзистенције, тако да можемо "мирне душе" да користимо поменути најјачи математички принцип $\mathrm{V} = \mathrm{L}$.

2.4 Форсинг

Овде конструкцију новог модела нећемо извршити сужавањем, већ проширивањем датог модела. Нека је $\mathcal{P} = (P, <)$ парцијално уређење без минимума. За елементе $x, y \in P$ рећи ћемо да су компатибилни, у ознаци $x || y$, ако постоји $z \in P$ такво да је $z \leqslant x$ и $z \leqslant y$. У супротном, рећи ћемо да су инкомпатибилни и писаћемо $x \perp y$. За уређење $\mathcal{P}$ рећи ћемо да испуњава услов цепања ако испод сваког елемента имамо два инкомпатибилна. Надаље ћемо радити само са таквим уређењима.

Саме елементе уређења зваћемо условима. Притом ћемо рећи да је услов p јачи од услова q, или да услов p носи више информација од услова q, ако је $p \leqslant q$. За скуп $D \subseteq P$ кажемо да је густ испод услова p ако за свако $q \leqslant p$ постоји услов $r \in D$ такав да је $r \leqslant q$. За скуп $D \subseteq P$ ћемо рећи да је густ ако је густ испод сваког услова p. Није тешко приметити да су следећи услови еквивалентни.

а) Скуп $D \subseteq P$ је густ испод услова p.

б) Скуп $D \subseteq P$ је густ испод сваког јачег услова од p.

в) Ако је D' куп свих услова q испод којих је скуп $D \subseteq P$ густ, онда је скуп D' густ испод p.

Наравно, еквивалентни су и следећи услови:

а) Скуп $D \subseteq P$ је густ.

б) Скуп $D \subseteq P$ је густ испод сваког услова p.

в) Ако је D' куп свих услова q испод којих је скуп $D \subseteq P$ густ, онда је скуп D' густ.

Сви ови појмови су апсолутни за све транзитивне моделе који садрже уређење $\mathcal{P}$. За скуп $G \subseteq P$ рећи ћемо да је филтер ако за ма које $p, q \in G$ постоји $r \in G$ такав да важи $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$ и ако за ма које $p, q \in P$ из $p \in G$ и $p \leqslant q$ следи $q \in G$. Нека је сада $\mathcal{D}$ било који скуп густих скупова. За филтер G рећи ћемо да је $\mathcal{D}$-генерички ако је $G \cap D \neq \emptyset$ за свако $D \in \mathcal{D}$. Будући да је за сваки услов p скуп

$$\{q \in P : q \leqslant p \vee p \perp q\}$$

густ, за генерички филтер G и услов p постоје само две могућности: $p \in G$ и $p \perp G$. У првом случају G сече сваки скуп који је густ испод p, а у другом ни један скуп који је густ само испод услова p и јачих од њега, као што је скуп $D' = \{q \in D : q \leqslant p\}$, где је D било који густ скуп.

За сваку пребројиву фамилију $\mathcal{D}$ густих скупова и ма који услов p постоји $\mathcal{D}$-генерички филтер G такав да $p \in G$. Заиста, ако је $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$, онда можемо уочити низ $(p_n)_{n\in\omega}$ такав да је $p_0 \in D_0$ и $p_0 \leqslant p$ и да за свако $n \geqslant 1$ буде $p_n \leqslant p_{n-1}$ и $p_n \in D_n$. Тада ће скуп $G = \{q \in P : (\exists n \in \omega) p_n \leqslant q\}$ бити тражени $\mathcal{D}$-генерички филтер. Приметимо да је овде коришћена аксиома зависног избора DC.

Сваки пребројив транзитиван скуп M коме припада уређење $\mathcal{P}$ садржи само пребројиво много густих подскупова од P будући да је и сам превбројив. Одговарајући генерички филтер зовемо и генеричким филтером над M. Као што смо видели, такви филтери постоје.

За сваки филтер G уређења $\mathcal{P}$ скуп $D = P \setminus G$ је густ будући да су свака два елемента филтера G компатибилна, па за генерички филтер G над транзитивним моделом M коме припада и уређење $\mathcal{P}$ и који је затворен за операцију скуповне разлике, важи $G \notin \mathrm{M}$. Надаље ћемо претпостављати да је M пребројив транзитиван модел који испуњава тај услов.

Класу имена $\mathrm{V}^{\mathcal{P}}$ дефиншемо рекурзивно са

$$\sigma \in \mathrm{V}^{\mathcal{P}} \Leftrightarrow (\forall \pi \in \sigma)(\exists \tau, p)(\pi = \langle \tau, p \rangle \wedge p \in P \wedge \tau \in \mathrm{V}^{\mathcal{P}}).$$

Класа имена се може изградити и хијерархијски као

$$\begin{aligned} \mathrm{V}^{\mathcal{P}}_{\alpha+1} &= \mathrm{V}^{\mathcal{P}}_{\alpha} \cup P(\mathrm{V}^{\mathcal{P}}_{\alpha} \times P), \\ \mathrm{V}^{\mathcal{P}}_{\alpha} &= \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{V}^{\mathcal{P}}_{\beta}, \quad \text{за гранични ординал } \alpha, \\ \mathrm{V}^{\mathcal{P}} &= \bigcup_{\alpha \in ORD} \mathrm{V}^{\mathcal{P}}_{\alpha}. \end{aligned}$$

У вези са овом дефиницијом, може се дефинисати именски ранг имена σ на сличан начин као и ранг добро заснованог скупа x. У вези с тим, сва имена су добро заснована и њихов именски ранг никада није већи од њиховог ранга у хијерархији V_{α}. То је доказиво средствима теорије ZF^{-}. Због тога и због чињенице да се операција $\alpha \mapsto \mathrm{V}^{\mathcal{P}}_{\alpha}$ описује Σ_1-формулом, постоји коначан скуп теорема теорије ZF^{-} са особином да је појам имена апсолутан за све транзитивне моделе који рефлектују тај коначан скуп теорема. Надаље ћемо претпостављати да модел M испуњава и тај услов.

Интерпретацију имена $\sigma \in \mathrm{M}$ при генеричком филтеру G над моделом M у ознакама σ_G и $\mathrm{int}_G(\sigma)$ дефинишемо рекурзивно са

$$\sigma_G = \{\tau_G : (\exists p \in G)\langle \tau, p\rangle \in \sigma\}.$$

Сада можемо дефиниосати генеричко проширење $\mathrm{M}[G]$ модела M као $\mathrm{M}[G] = \{\sigma_G : \sigma \in \mathrm{V}^{\mathcal{P}} \cap \mathrm{M}\}$. У вези са интерпретацијом, дефинишимо име произвољног добро заснованог скупа x у ознаци $\check{x}$ рекурзивно са

$$\check{x} = \{\check{y} : y \in x\} \times P.$$

Средствима теорије ZF^- се доказује да сваки добро заснован скуп има име. Надаље ћемо претпостављати да модел M рефлектје и ту теорему, као и потребан број теорема који обезбеђује апсолутност транзитивног модела за операцију $x \mapsto \check{x}$. То је могуће будући да је та операција описива Σ_1-формулом. Индукцијом по рангу скупа $x \in \mathrm{M}$ доказује се да важи једнакост $\mathrm{int}_G(\check{x}) = x$. То управо значи да је под наведеним условима $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{M}[G]$.

Но, уколико модел M рефлектује и довољан број аксиома теорије ZF^- који обезбеђује егзистенцију скупа $\Gamma = \{\langle p,p\rangle : p \in G\}$, онда је због $\Gamma_G = G \in \mathrm{M}[G] \setminus \mathrm{M}$ наведена инклузија строга. Надаље ћемо подразумевати да радимо и под том претпоставком.

Означимо са $DB(p,D)$ формулу "D је подскуп од P који је густ испод P". Наравно, у њој фигурише $\mathcal{P}$ као параметар. За произвољан $p \in P$, формулу $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ и имена $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ дефинишимо релацију форсирања (изнуђивања) те формуле од стране услова p при валуацији $x_i \mapsto \sigma_i$ у ознаци $p \Vdash \varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ рекурзивно са

$$\begin{aligned}
p \Vdash \sigma \in \tau \quad &\Leftrightarrow \quad DB(p, \{q \in P : (\exists\langle\pi,r\rangle \in \tau)(q \leqslant r \wedge q \Vdash \pi = \sigma)\}),\\
p \Vdash \sigma = \tau \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall q \leqslant p)(\forall\langle\pi,r\rangle \in \sigma)(q \leqslant r \Rightarrow q \Vdash \pi \in \tau) \wedge\\
&\qquad\ (\forall q \leqslant p)(\forall\langle\pi,r\rangle \in \tau)(q \leqslant r \Rightarrow q \Vdash \pi \in \sigma)\\
p \Vdash \neg\varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \neg(\exists q \in P)(q \leqslant p \wedge q \Vdash \varphi),\\
p \Vdash \varphi \wedge \psi \quad &\Leftrightarrow \quad p \Vdash \varphi\ \wedge\ p \Vdash \psi,\\
p \Vdash \forall x\,\varphi(x,\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall\pi \in \mathrm{V}^{\mathcal{P}})p \Vdash \varphi(\pi,\sigma_1,\ldots,\sigma_n).
\end{aligned}$$

Ова дефиниција захтева неке важне напомене. Наиме, не постоји формула која дефинише форсирање произвољне формуле чији је код дат при датој валуацији променљивих именима из врло сличних разлога из којих не постоји таква формула која дефинише релацију задовољења на универзуму V. Овде се заправо ради о једној функцији која свакој формули $\varphi(\bar{x})$ придружује формулу $\mathrm{For}\varphi(\bar{x},p,\mathcal{P})$ коју обележавамо као горе и која значи "$\bar{x} \in \mathrm{V}^{\mathcal{P}}$ и p је услов из $\mathcal{P}$ који форсира $\varphi(\bar{x})$". Друго, овде се прво дефинише форсирање атомских формула двоструком рекурзијом по рангу имена, а потом се форсирање осталих формула дефинише индукцијом по сложености формуле. И треће, слично као код релације задовољења, и овде је могуће дефинисати помоћу једне формуле форсинг релацију Σ_n-формуле са датим кодом. За то је довољно приметити да важи

$$p \Vdash (\forall x \in \sigma)\varphi(x,\sigma,\tau_1,\ldots,\tau_n) \ \Leftrightarrow\ (\forall\langle\pi,q\rangle \in \sigma)(\forall r \in P)(r \leqslant p \wedge r \leqslant q \Rightarrow r \Vdash \varphi(\pi,\sigma,\tau_1,\ldots,\tau_n)).$$

Индукцијом по рангу имена се најпре доказује да ако услов p форсира неку атомску формулу валуирану неким именима, да онда исто то форсира и сваки услов $q \leqslant p$. Потом се индукцијом по сложености формуле доказује да то важи за сваку формулу, а не само за атомске. Но, докажимо сада следећу чувену теорему, али пре тога приметимо да из дефиниције форсинг релације за случај формуле која је негација неке друге формуле непосредно следи да се за ма коју валуирану формулу φ сваки услов може "ојачати" до услова који ће да форсира или формулу φ или њену негацију.

Теорема 65 $\mathrm{ZF}^- + \mathrm{DC}$ (*Форсинг теорема*) Под наведеним претпоставкама за произвољна имена $\bar{\sigma} \in \mathrm{M}$ уз претходну симболику важи

a) $\mathrm{M} \models (p \Vdash \varphi(\bar{\sigma})) \ \Leftrightarrow\ (\forall G)(p \in G \Rightarrow \mathrm{M}[G] \models \varphi(\bar{\sigma}_G))$, *б)* $\mathrm{M}[G] \models \varphi(\bar{\sigma}_G) \;\Leftrightarrow\; (\exists p \in G)\, \mathrm{M} \models (p \Vdash \varphi(\bar{\sigma}))$.

Доказ: Приметимо да други део теореме следи из првог. Заиста, смер $\Leftarrow$ је тривијалан. Што се тиче смера $\Rightarrow$, треба само користити чињеницу да је скуп свих услова p који форсирају или $\varphi(\bar{\sigma})$ или $\neg\varphi(\bar{\sigma})$ густ (што следи дефиниције форсирања $\neg\varphi(\bar{\sigma})$), због чега постоји $p \in G$ такав да $\mathrm{M} \models (p \Vdash \varphi(\bar{\sigma}))$ или $\mathrm{M} \models (p \Vdash \neg\varphi(\bar{\sigma}))$, где је G произвољан генерички филтер. Стога ћемо доказати само први део тврђења.

Тврђење за случај атомских формула доказујемо симултано (једнакост и припадање) двоструком индукцијом по рангу имена. Нека $\mathrm{M} \models (p \Vdash \sigma \in \tau)$ и нека $p \in G$. Према дефиницији форсинг релације

$$\mathrm{M} \models DB(p, \{q \in P : (\exists \langle \pi, r\rangle \in \tau)(q \leqslant r \;\wedge\; q \Vdash \pi = \sigma)\}).$$

Приметимо да су овде сви појмови са којима радимо апсолутни за модел M, осим форсинг релације. Будући да је скуп

$$D = \{q \in P : (\exists \langle \pi, r\rangle \in \tau)(q \leqslant r \;\wedge\; \mathrm{M} \models (q \Vdash \pi = \sigma)\})$$

дефинисан унутар модела M, он ће му припадати под претпоставком да модел M задовољава одговарајући коначан фрагмент теорије ZF^-. То је онај фрагмент који обезбеђује апсолтност појма имена за транзитивне моделе и који је довољан за доказ теореме да за свако уређење $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, <)$ са условом цепања и за ма која имена σ и τ постоји скуп $\{q \in P : (\exists \langle \pi, r\rangle \in \tau)(q \leqslant r \;\wedge\; q \Vdash \pi = \sigma)\}$.

Но, будући да скуп D припада моделу M и да је појам густине скупа испод датог услова апсолутан, постојаће неко $q \in G \cap D$. Тада ће за одговарајуће π и r важити $r \in G$ и $\mathrm{M} \models r \Vdash \pi = \sigma$, као и $\pi_G \in \tau$, одакле по индуктивној претпоставци важи $\pi_G = \sigma_G$, одакле је најзад $\sigma_G \in \tau_G$.

Претпоставимо да $\sigma_G \in \tau_G$ за сваки G за који $p \in G$ и да је $q' \leqslant p$. Изаберимо генерички филтер G за који $q' \in G$. Тада ће постојати пар $\langle \pi, r\rangle \in \tau$ за који важи $r \in G$ и $\pi_G = \sigma_G$. Но, тада ће за произвољан $q \in P$ за који је $q \leqslant q', r$ важити $q \leqslant p$ и $\mathrm{M} \models (q \Vdash \sigma \in \tau)$.

Нека сада $\mathrm{M} \models (p \Vdash \sigma = \tau)$ и $p \in G$. Према дефиницији форсинг релације и апсолутности одговарајућих појмова тада мора да важи

$$(\forall q \leqslant p)(\forall \langle \pi, r\rangle \in \sigma)(q \leqslant r \;\Rightarrow\; \mathrm{M} \models (q \Vdash \pi \in \tau)).$$

Уочимо произвољан елемент скупа σ_G. Он је облика π_G за неко $\langle \pi, r\rangle \in \sigma$ за које је $r \in G$. Но, пошто $p, r \in G$, постојаће неко $q \in G$ такво да буде $q \leqslant p, q$. Према горњој формули за њега важи $\mathrm{M} \models (q \Vdash \pi \in \tau)$, одакле по индуктивној претпоставци мора бити $\pi_G \in \tau_G$. Одатле закључујемо да је $\sigma_G \subseteq \tau_G$. Обрнута инклузија се доказује аналогно.

Претпоставимо сада да важи $\sigma_G = \tau_G$ кад год $p \in G$. Нека $\langle \pi, r\rangle \in \sigma$ и нека је $q \leqslant p, r$. Изаберимо генерички филтер G тако да $q \in G$. Тада ће наравно бити и $p \in G$, па важи $\sigma_G = \tau_G$. Но, због $p \leqslant r$ ће бити и $\pi_G \in \sigma_G$, а самим тим и $\pi_G \in \tau_G$. Будући да је G био произвољан генерички филтер за који $q \in G$, према индуктивној претпоставци тада $\mathrm{M} \models (q \Vdash \pi \in \tau)$. На сличан начин се проверава да у моделу M важи и други конјункт формуле којом се дефинише релација $p \Vdash \sigma = \tau$. Тиме је тврђење у потпуности доказано за случај атомских формула.

Нека сада $\mathrm{M} \models (p \Vdash \neg\varphi(\bar{\sigma}))$ и нека је G генерички филтер такав да $p \in G$. Ако би било $\mathrm{M}[G] \models \varphi(\bar{\sigma}_G)$, по индуктивној претпоставци постојало би неко $q \in G$ такво да $\mathrm{M} \models (q \Vdash \varphi(\bar{\sigma}))$, а самим тим и неко $r \in G$ за које је $r \leqslant p, q$ и самим тим и $\mathrm{M} \models (r \Vdash \varphi(\bar{\sigma}))$, што је у супротности са полазном претпоставком да $\mathrm{M} \models (p \Vdash \neg\varphi(\bar{\sigma}))$. Стога $\mathrm{M} \models \neg\varphi(\bar{\sigma}_G)$.

Уколико $\mathrm{M}[G] \models \neg\varphi(\bar{\sigma}_G)$ за сваки генерички филтер G за који $p \in G$, онда нити за једно $q \leqslant p$ не може бити $\mathrm{M} \models (q \Vdash \varphi(\bar{\sigma}))$ јер би у супротном за генерички филтер G такав да $q \in G$ важило $\mathrm{M}[G] \models \varphi(\bar{\sigma}_G)$ и $p \in G$ супротно претпоставци. Стога, $\mathrm{M} \models (q \Vdash \neg\varphi(\bar{\sigma}))$.

Претпоставимо сада да $\mathrm{M} \models (p \Vdash \varphi(\bar{\sigma}) \wedge \psi(\bar{\sigma}))$ и да је G генерички филтер такав да $p \in G$. Тада због $\mathrm{M} \models (p \Vdash \varphi(\bar{\sigma}))$ важи $\mathrm{M}[G] \models \varphi(\bar{\sigma}_G)$, а због $\mathrm{M} \models (p \Vdash \psi(\bar{\sigma}))$ важи $\mathrm{M}[G] \models \psi(\bar{\sigma}_G)$. У сваком случају, важи $\mathrm{M}[G] \models \varphi(\bar{\sigma}_G) \wedge \psi(\bar{\sigma}_G)$.

Ако би било $\mathrm{M}[G] \models \varphi(\bar{\sigma}_G) \wedge \psi(\bar{\sigma}_G)$ за сваки генерички филтер G за који $p \in G$, онда би за сваки такав филтер важило $\mathrm{M} \models (p \Vdash \varphi(\bar{\sigma}))$ и $\mathrm{M} \models (p \Vdash \varphi(\bar{\tau}))$, а самим тим и $\mathrm{M} \models (p \Vdash \varphi(\bar{\sigma}) \wedge \psi(\bar{\sigma}))$.

Нека $\mathrm{M} \models (p \Vdash \forall x \varphi(x, \bar{\sigma}_G))$, онда за свако име $\pi \in (\mathrm{V}^P)^{\mathrm{M}}$ важи $\mathrm{M} \models (p \Vdash \varphi(\pi, \bar{\sigma}_G))$, па за сваки генерички филтер G који садржи p и за свако име $\pi \in (\mathrm{V}^P)^{\mathrm{M}}$ важи $\mathrm{M}[G] \models \varphi(\pi_G, \bar{\sigma}_G)$, односно важи $\mathrm{M}[G] \models \forall x\, \varphi(x, \bar{\sigma}_G)$.

Обрнуто, ако $\mathrm{M}[G] \models \forall x\, \varphi(x, \bar{\sigma}_G)$ за сваки генерички филтер G за који $p \in G$, онда за сваки такав филтер и свако име $\pi \in (\mathrm{V}^P)^{\mathrm{M}}$ важи $\mathrm{M}[G] \models \varphi(\pi_G, \bar{\sigma}_G)$, па будући да је ту G произвољан генерички филтер за који $p \in G$ мора бити и $\mathrm{M} \models (p \Vdash \varphi(\pi, \bar{\sigma}))$ за свако име $\pi \in \mathrm{M}$, а самим тим и $\mathrm{M}(p \Vdash \forall x\, \varphi(x, \bar{\sigma}))$. QED

Овде треба напоменути да за сваку формулу φ искази претходне теореме важе под условом да модел M задовољава одређен коначан фрагмент теорије ZF^-. Тај фрагмент укључује потребне особине форинг релације на тој формули и њеним потформулама које су коришћене у доказу.

Последица 9 $\mathrm{ZF}^- + \mathrm{DC}$ Ма који услов p форсира сваку ваљану формулу. Штавише, за ма који услов p, скуп формула форсираних условом p је дедуктивно затворен.

Доказ: Приметимо најпре да је скуп формула S дедуктивно затворен ако и само ако садржи све ваљане формуле и затворен је за којункцију и модус поненс. Неопходност тих услова је очигледна. Што се тиче довољности, нека је ψ формула за коју $S \vdash \psi$. Тада постоје формуле $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in S$ такве да $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$. Но тада је формула $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi$ ваљана, па припада скупу S. Али, пошто је скуп S затворен за конјункцију, биће и $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \in S$, па због затворености за модус поненс $\psi \in S$.

Нека је φ било која реченица и $p \in P$ такав да $p \nVdash \varphi$. Нека је M пребројив транзитиван модел који рефлектује довољан коначан фрагмент теорије ZF^-, и који још рефлектује формулу $p \nVdash \varphi$. Тада због $\mathrm{M} \models (p \nVdash \varphi)$ постоји генерички филтер G над моделом M такав да $\mathrm{M}[G] \not\models \varphi$. Но, то управо значи да формула φ није ваљана.

Затвореност за конјункцију следи директно из дефиниције форсинг релације. Покажимо још затвореност за модус поненс. Нека је p услов који форсира формулу φ, а не форсира формулу ψ. Уколико би било $\neg(\exists q \in P)(q \leqslant p \wedge q \Vdash \neg\psi)$, постојао би пребројив транзитиван модел M који рефлектије ту формулу и потребан коначан фрагмент теорије ZF^-, као и формулу $p \nVdash \psi$. Но, то би значило да је скуп свих $q \in P$ таквих да $\mathrm{M} \models (q \Vdash \psi)$ густ испод p. Отуда би за сваки генерички филтер G такав да $p \in G$ важило $\mathrm{M}[G] \models \psi$, што је у супротности са $\mathrm{M} \models (p \nVdash \psi)$.

Тиме је показано да мора постојати $q \leqslant p$ такво да $q \Vdash \neg\psi$. Но, из $p \Vdash \varphi$ тада добијамо да заправо $q \Vdash \varphi \wedge \neg\psi$, одакле због $q \leqslant p$ важи $p \nVdash \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$. Обзиром да се импликација на тај начин дефинише преко конјункције и негације, доказ је завршен. QED

Ово тврђење се могло доказати и без аксиоме избора директном применом дефиниције форсинг релације проверавањем аксиома предикатског рачуна и затворености за правила извођења у форсинг релацији. Тада не би било могуће позивање на форсинг теорему.

Проверимо сада аксиоме теорије скупова у генеричкој екстензији $\mathrm{M}[G]$. За сваку аксиому теорије ZF^- ће нам бити неопходно да модел M задовољава неки коначан фрагмент теорије ZF^-.

Екстензионалност важи због транзитивности модела $\mathrm{M}[G]$. Модел $\mathrm{M}[G]$ је транзитиван будући да за ма које $x \in \sigma_G$ постоји $\langle \pi, p \rangle \in \sigma$ такво да $p \in G$ и да је $x = \pi_G \in \mathrm{M}[G]$.

Проверимо аксиому пара. За ма које σ_G, π_G ће бити $\tau_G = \{\sigma_G, \pi_G\}$ ако је $\tau = \{\sigma, \pi\} \times P$. Што се тиче аксиоме бесконачности, будући да је ω апсолутна константа за транзитивне моделе, пошто скуп ω по аксиоми бесконачности мора припадати моделу $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{M}[G]$, онда мора бити и $\omega \in \mathrm{M}[G]$, па опет по апсолутности тог појма за транзитивне моделе у њему мора важити аксиома бесконачности.

Проверимо сада аксиому сепарације. Нека је $\varphi(x, \bar{y})$ било која формула и нека су $\pi, \bar{\sigma} \in \mathrm{M} \cap \mathrm{V}^{\mathcal{P}}$. Тада се за име

$$\rho = \{\langle \tau, p \rangle \in \mathrm{dom}(\pi) \times P : (\exists q \in \mathrm{ran}(\pi))(\langle \tau, q \rangle \in \pi \,\wedge\, p \leqslant q \,\wedge\, \mathrm{M} \models (p \Vdash \varphi(\tau, \bar{\sigma})))\}$$

непосредно проверава да важи

$$\rho_G = \{\tau_G \in \pi_G : \mathrm{M}[G] \models \varphi(\tau_G, \bar{\sigma}_G)\}.$$

Што се тиче аксиоме уније, за $\sigma_G \in \mathrm{M}[G]$ и име π дефинисано са

$$\pi = \{\rho : (\exists \langle \tau, p \rangle \in \sigma)(\exists q \in P)\langle \rho, q \rangle \in \tau\} \times P$$

важи $\pi \in \mathrm{M}$ и $\bigcup \sigma_G \subseteq \pi_G$. Остатак доказа аксиоме уније следи из схеме сепарације.

У циљу доказа аксиоме партитивног скупа најпре приметимо да за ма које $\sigma_G, \pi_G \in \mathrm{M}[G]$ за које је $\sigma_G \subseteq \pi_G$ и за име

$$\tau = \{\langle \rho, p \rangle \in \mathrm{dom}(\pi) \times P : \mathrm{M} \models (p \Vdash \rho \in \sigma)\}$$

важи $\tau_G = \sigma_G$. Заиста, ако $x \in \sigma_G \subseteq \pi_G$, онда је свакако x облика ρ_G за неко $\rho \in \mathrm{dom}(\pi)$, при чему постоји $p \in G$ такво да $\mathrm{M} \models (p \Vdash \rho \in \sigma)$, па $x = \rho_G \in \tau_G$. Са друге стране, ако $x \in \tau_G$, онда је $x = \rho_G$ за неко $\rho \in \mathrm{dom}(\pi)$, при чему постоји неко $p \in G$ за које $\mathrm{M} \models (p \Vdash \rho \in \sigma)$, одакле $x = \rho_G \in \sigma_G$. Одавде сада непосредно следи да је са $\tau = P(\mathrm{dom}(\pi)) \times P$ дато име реализације партитивног скупа елемента π_G у моделу $\mathrm{M}[G]$.

Докажимо сада схему замене. Нека је у моделу $\mathrm{M}[G]$ дата функција формулом $\varphi(\bar{x}, y, z)$ са параметрима $\bar{x}$, то јест
$$\mathrm{M}[G] \models \forall\bar{x}\forall y\exists_1 z\, \varphi(\bar{x}, y, z).$$
Тада ће свакако важити и
$$\mathrm{M}[G] \models \forall\bar{x}\forall y\exists z\, \varphi(\bar{x}, y, z).$$
Нека је $p \in G$ такав да $\mathrm{M} \models (p \Vdash \forall\bar{x}\forall y\exists z\, \varphi(\bar{x}, y))$. За ма која имена $\bar{\sigma}, \pi \in \mathrm{V}^{\mathcal{P}}$ постоји име $\tau \in \mathrm{V}^{\mathcal{P}}$ за које важи $\mathrm{M}[G] \models \varphi(\bar{\sigma}_G, \pi_G, \tau_G)$, па ће постојати и услов $q \in G$, за који $\mathrm{M} \models (q \Vdash \varphi(\bar{\sigma}, \pi, \tau))$.

Будући да модел M задовољава одговарајућу инстанцу схеме замене, за свако име $\rho \in \mathrm{V}^{\mathcal{P}} \cap \mathrm{M}$ у M ће постојати скуп a свих именских рангова α имена $\pi \in \mathrm{dom}(\rho)$ за које постоји услов q такав да $\mathrm{M} \models (q \Vdash \varphi(\bar{\sigma}, \pi, \tau))$ и да притом $\mathrm{M} \models (q \nVdash \varphi(\bar{\sigma}, \pi, \tau'))$ за свако име $\tau' \in \mathrm{M}$ нижег ранга од τ. Самим тим ће у моделу M постојати и скуп b свих имена чији ранг припада скупу a. Но тада ће за име $\mu = b \times P$ важити
$$\mathrm{M}[G] \models \varphi(\bar{\sigma}_G, \pi_G, \tau_G)$$
за бар неко $\tau \in b$ кад год $\pi \in \mathrm{dom}(\rho)$. Одатле непосредно следи да модел $\mathrm{M}[G]$ задовољава одговарајућу инстанцу схеме замене.

Остало је још да покаже да ако у M важи одговарајући коначан фрагмент теорије ZFC^-, да ће у $\mathrm{M}[G]$ важити аксиома избора. У том циљу доказаћемо заправо следећи еквивалент аксиоме избора:

За сваки скуп x постоји ординал који се може пресликати на x.

Заиста за ма које $\sigma_G \in \mathrm{M}[G]$ у моделу M постоји бијекција f скупа $\mathrm{dom}(\sigma)$ на неки ординал α. Но, тада ће за име
$$\tau = \{\langle up((f(\pi))\check{\ }, \pi), p\rangle : \langle \pi, p\rangle \in \sigma\},$$
где је $up(a, b) = \{a, b\} \times P$, важити $\tau_G : \alpha \xrightarrow{\text{на}} \sigma_G$, чиме је доказ завршен.

Наравно, одавде и на основу претходне последице следи да сваки услов форсира сваку теорему система ZFC^-. То се доказује средствима ZFC^-.

Следећа важна чињеница везана за генеричке екстензије је да генеричко проширење $\mathrm{M}[G]$ садржи исте ординале као модел M под условом да модел M задовољава потребан коначан фрагмент теорије ZF^-.

Једна инклузија следи из релације $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{M}[G]$. Што се тиче другог смера, нека је α било који ординал из $\mathrm{M}[G]$. Он мора бити облика σ_G за неко име $\sigma \in \mathrm{M}$. Но, индукцијом по именском рангу имена $\pi \in \mathrm{M}$ доказује се да ранг скупа π_G не може бити већи од именског ранга имена π. Али, ранг ординала α је управо α, и он не прелази именски ранг имена σ због $\alpha = \sigma_G$, па α не може бити веће од именског ранга имена σ које припада моделу M. Стога $\alpha \in \mathrm{M}$.

Сада се лако доказује да за ма који услов p важи $p \Vdash \mathrm{V} \neq \mathrm{L}$, а самим тим и да хипотеза $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ не зависи од аксиома ZFC^-. За то је довољно проверити да аксиома конструктибилности $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ не важи ни у једној генеричкој екстензији $\mathrm{M}[G]$.

Наиме, ако модели M и $\mathrm{M}[G]$ задовољавају потребан фрагмент теорије ZF^- који обезбеђује апсолутност операције F из претходног одељка, онда скуп $G \in \mathrm{M}[G]$ не може бити конструктибилан у $\mathrm{M}[G]$ будући да би у противном за ординал $\alpha \in \mathrm{M}[G]$ за који $\mathrm{M}[G] \models F(\alpha) = G$ на основу апсолутности важило најпре $F(\alpha) = G$, а потом како је F у моделу M функција дефинисана на класи ORD, онда би за неки $x \in \mathrm{M}$ важило $\mathrm{M} \models F(\alpha) = x$. Но, опет по апсолутности би тада било $F(\alpha) = x$, одакле би следило $G = x \in \mathrm{M}$, што знамо да је немогуће. Овај доказ је изводен средствима теорије $\mathrm{ZF}^- + \mathrm{DC}$.

Утицај аксиоме избора се у складу са напоменама на крају претходне тачке овде може елеиминисати. Овде су биле изложене особине форсинг релације које не зависе од избора парцијалног уређења $\mathcal{P}$ које задовољава услов цепања. Но, за решавање озбиљнијих проблема овом методом је јако важно изабрати одговарајуће парцијално уређење које ће имати особину цепања, тако да се добију жељене особине форсинг релације и генеричких екстензија.

Но, одмах се може приметити да се независност аксиоме избора од осталих аксиома теорије скупова не може доказати форсинг методом, будући да њом од модела за ZFC^- увек добијамо модел за ZFC^-. Будући да смо релативну консистентност система ZFL, а самим тим и система ZFC^- доказали методом унутрашњих модела, према напоманама из претходне тачке ми на можемо доказати да аксиома избора не следи из аксиома ZF^- ни методом унутршњих модела. Међутим Пол Коен је то успео да докаже комбиновањем обе методе. То се дакле, не може доказати ни једном од те две методе појединачно, али њиховом комбинацијом може.

2.4.1 Анализа форсинг методе

Раније смо напоменули да ако се метод унутрашњих модела схвати на уобичајен начин, њиме се не може доказати независност нити једне хипотезе од аксиома ZFC због егзистенције минималног модела. Но, ако се концепт методе унутрашњих модела прошири, онда такво ограничење не мора да постоји. Наиме, ако је $\mathfrak{M}$ било која променљива, дефинишимо једну функцију која свакој формули φ у којој се не јавља променљива $\mathfrak{M}$ придружује форулу Sat_φ која од слободних променљивих има тачно слободне променљиве које има и формула φ и још променљиву $\mathfrak{M}$ на следећи начин:

$$\mathrm{Sat}_\varphi \equiv \begin{cases} (\exists \mathrm{M}, E)(\mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, E\rangle \wedge \mathrm{M} \neq \emptyset \wedge E \subseteq \mathrm{M}^2 \wedge \langle v_i, v_j\rangle \in E), & \varphi \equiv (v_i \in v_j), \\ (\exists \mathrm{M}, E)(\mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, E\rangle \wedge \mathrm{M} \neq \emptyset \wedge E \subseteq \mathrm{M}^2 \wedge v_i \in \mathrm{M} \wedge v_i = v_j), & \varphi \equiv (v_i = v_j), \\ \neg \mathrm{Sat}_\psi, & \varphi \equiv \neg\psi, \\ \mathrm{Sat}_\psi \Rightarrow \mathrm{Sat}_\theta, & \varphi \equiv \psi \Rightarrow \theta, \\ (\exists \mathrm{M}, E)(\mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, E\rangle \wedge \mathrm{M} \neq \emptyset \wedge E \subseteq \mathrm{M}^2 \wedge (\forall v_i \in \mathrm{M})\mathrm{Sat}_\psi), & \varphi \equiv (\forall v_i)\psi. \end{cases}$$

Ту је симбол $\equiv$ употребљен за означавање метаједнакости. Формула Sat_φ описује важење формуле φ у моделу $\mathfrak{M}$ при валуацији датој њеним слободним променљивим и апсолутна је за све моделе језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$, па чак и нетранзитивне, што се крајње једноставно доказује индукцијом по сложености формуле φ.

Претпоставимо сада да је теорија ZFC консистентна. По теореми рефлексије важи

$$\mathrm{ZFC} \vdash (\forall F \subseteq \mathrm{ZFC})(\mathrm{Fin}(F) \Rightarrow \exists \mathrm{M}(\text{ ”M је пребројив и транзитиван”} \wedge \mathrm{M} \models F)).$$

Но, форсинг конструкција је такође изведена средствима ZFC, што значи да такође важи

$$\begin{gathered}\mathrm{ZFC} \vdash (\forall F_2 \subseteq (\mathrm{ZFC} + \mathrm{V} \neq \mathrm{L})(\mathrm{Fin}(F_2) \Rightarrow (\exists F_1 \subseteq \mathrm{ZFC})(\mathrm{Fin}(F_1)) \wedge \\ (\forall \mathrm{M})((\text{ ”M је пребројив и транзитиван”} \wedge \mathrm{M} \models F_1 \Rightarrow \mathrm{M}[G] \models F_2)).\end{gathered}$$

Притом је $\mathrm{M}[G]$ такође транзитиван модел. Нека је сада F_2 произвољан коначан подсистем од ZFC+V = L и нека је M било који модел за ZFC. Према претходном, важиће

$$\mathrm{M} \models (\exists \mathrm{N})(\text{”N је транзитиван модел”} \wedge \mathrm{N} \models F_2).$$

Пошто $\mathrm{M} \models$ ”N је транзитиван модел”, модел N наслеђује релацију припадања од модела M, одакле ће бити подмодел модела M, а због апсолутности формуле $\mathrm{N} \models F_2$ ће N заиста бити модел теорије F_2.

Значи, средствима ZFC доказује се да за сваки коначан подсистем теорије ZFC + V = L сваки модел теорије ZFC има подмодел који задовољава аксиоме F_2. Позивајући се на компактност, то управо значи да $\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{V} = \mathrm{L})$.

Метод форсинга, иако најмоћнији познати метод за доказивање релативне консистенције система аксиома теорије скупова, има многа ограничења. Ако је парцијално уређење $\mathcal{P}$ скуп, као што је то било у нашем случају, онда форсинг релација нема утицаја на кардиналну аритметику за кардинале који су већи од неког одређеног. Да би се изменила кардинална аритметика дуж целе хијерархије кардинала, неопходно је да парцијално уређење $\mathcal{P}$ буде права класа. Но, тада морају бити испуњени још неки додатни услови да би прошли докази кључних теорема. Ми смо на пример користили чињеницу да је уређење $\mathcal{P}$ скуп у доказу аксиоме партитивног скупа и схеме замене.

2.5 Велики кардинали

Велики кардинали су кардинали који су толико велики да њихова егзистенција повлачи консистентност теорије ZF^-, а самим тим и теорије ZFL. Према Геделовој теореми непотпуности и претходним разматрањима то значи да ако је теорија ZF^- непротивречна, онда чак ни теорија ZFL не може да докаже егзистенцију таквих кардинала.

Хијерархија великих кардинала почиње са слабо недостижним. Бесконачан кардинал κ је слабо недостижан ако је гранични, то јест није облика λ^+, и ако је регуларан, то јест не постоје мањи кардинал λ и функција $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ која је у смислу уређења ординала κ неограничена.

Уколико слабо недостижан кардинал κ задовољава и јачи услов, да из $\lambda < \kappa$ следи $2^\lambda < \kappa$, онда за њега кажемо да је и јако недостижан. У случају да важи генералисана континуум хипотеза ($2^\lambda = \lambda^+$ за сваки бесконачан кардинал λ), која је иначе теорема теорије ZFL, појам јако недостижног и слабо недостижног кардинала се изједначавају.

Но, у случају да је κ јако недостижен кардинал, онда је скуп V_κ модел за ZF^-, под условом да универзум задовољава аксиоме ZF^-. Наиме, за сваки гранични ординал α, модел V_α задовољава све аксиоме теорије Z^-. Уколико је κ јако недостижан кардинал, онда је за сваки ординал $\alpha < \kappa$ скуп V_α кардиналности мање од κ. Но, ако $f : x \longrightarrow \mathrm{V}_\kappa$ за $x \subseteq \mathrm{V}_\alpha$, онда ће функција $g : \alpha \longrightarrow ORD$ дефинисана са

$$g(\beta) = \sup\{\mathrm{rang}(f(y)) : y \in x \wedge \mathrm{rang}(y) = \beta\}$$

због регуларности кардинала κ и $|x| < \kappa$ слика ординал α у кардинал κ. Но, функција g је ограничена, па за ординал β за који је $\alpha \leqslant \beta < \kappa$ и $g[x] \subseteq \beta$ важи $f \in \mathrm{V}_{\beta+\omega} \subseteq \mathrm{V}_\kappa$, па самим у моделу V_κ важи и схема замене.

Према претходним разматрањима, будући да се у теорији ZFL појмови јаке и слабе недостиживости изједначавају, за доказ консистенције теорије ZFL је довољан и систем аксиома ZF^- + "постоји слабо недостижан кардинал". Ако ту хипотезу означимо са NK, онда по Геделовој теореми непотпуности

$$\mathrm{ZFL} + \mathrm{NK} \nvdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZFL} + \mathrm{NK}),$$

а самим тим и

$$\mathrm{ZFL} + \mathrm{Con}(\mathrm{ZFL}) \nvdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZFL} + \mathrm{NK}),$$

будући да је хипотеза Con(ZFL) према претходном слабија од NK. Али, пошто је појам недостижног кардинала апсолутан за L будући да се описује Π_1-формулом, у ствари ће $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFL} + \mathrm{NK})$ бити еквивалентно са $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^- + \mathrm{NK})$, па заправо важи

$$\mathrm{ZFL} + \mathrm{Con}(\mathrm{ZFL}) \nvdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^- + \mathrm{NK}).$$

Са друге стране, претпоставимо да теорија $\mathrm{ZFL}+\neg\mathrm{NK}$ није консистентна. Тада би NK било доказиво у теорији ZFL, па би према претходним разматрањима теорија ZFL могла да докаже своју консистентност, одакле би по Геделовој теореми непотпуности била противречна. Но, одатле би и теорија ZF^- била противречна. Све ово се може извести у систему ZF^- тако да

$$\mathrm{ZF}^- \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^-) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFL} + \neg\mathrm{NK}).$$

Овде видимо једну асиметрију. Консистентност теорије $\mathrm{ZFL} + \neg\mathrm{NK}$ је доказива средствима којима консистентност теорије ZFL+NK није доказива. Штавише, класа ORD на неки начин представља јако недостижан кардинал у универзуму WF, али то није записиво средствима система ZFC^-, тако да би теорија ZFL+NK требало да буде консистентна.

Као што је већ поменуто, хијерархија великих кардинала само почиње недостижним кардиналима. Она се продужава све већим и већим кардиналима у смислу да егзистенција већих имплицира егзистенцију мањих, али егзистенција мањих није довољна да обезбеди консистентност егзистенције већих, чак ни релативну у односу на консистентност егзистенције тог мањег.

Закључак

Постоје још горе ствари од асиметрије у могућности доказивања релативне консистенције неке хипотезе са аксиомама теорије скупова. Рецимо, ако се нека хипотеза H изражава Π_1-реченицом ограниченом на V_ω, онда под условом да је та хипотеза независна од аксиома теорије скупова, доказ консистентности хипотезе H, односно $\neg H$ у односу на аксиоме теорије скупова није могућ. Дакле, не ради се о асиметрији као код великих кардинала, већ о немогућности доказа релативне консистентности у оба смера.

Наиме, ако би формула φ била облика $(\forall \bar{x} \in \mathrm{V}_\omega)\psi(\bar{x})$ за неку Σ_0-формулу $\psi(\bar{x})$, онда у случају да постоје $\bar{n} \in \mathrm{V}_\omega$ тако да у универзуму у коме радимо важи $\neg\psi(\bar{n})$, то би било доказиво средствима ZF^- зато што је $\psi(\bar{x})$ једна Σ_0-формула ограничена на V_ω, па би хипотеза φ била оборива у систему ZF^- па од њега не би била независна. Стога би таква хипотеза, ако је заиста независна, морала бити фактички тачна. Али то је онда доказ саме хипотезе φ за који су сасвим довољна и средства теорије ZF^-, будући да је можемо интерпретирати у оквиру ње саме. Али то опет значи да она није независна од система ZF^-, што је контрадикција.

Да ствар буде још гора, ту се налази већина важних математичких тврђења, и то пре свега оних која су везана за Анализу, Теорију Бројева, Теорију Израчунљивости и на крају проблеме консистенције и релативне консистенције. Значи, ако је нека (релативна) консистенција нерасправљива, онда је та нерасправљивост недоказива и неоповргљива. Дакле, важи нешто попут

$$\mathrm{ZF}^- \vdash (\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^- + H) \wedge \mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^- + \neg H)) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFL}{+}\mathrm{Con}(\mathrm{ZFL}) +\ \neg\mathrm{Con}(\mathrm{ZFL} + H)),$$

$$\mathrm{ZF}^- \vdash (\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^- + H) \wedge \mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^- + \neg H)) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFL}{+}\mathrm{Con}(\mathrm{ZFL}) +\ \neg\mathrm{Con}(\mathrm{ZFL} + \neg H)).$$

за хипотезу H као горе.

Са друге стране, постоје ограничења везана за такозване транзитивне методе доказивања релативне консистенције, где спадају методе којима смо се ми бавили. То су методе код којих се полазећи од транзитивног модела увек добија транзитиван. Тим путем је немогуће доказати независност хипотеза које се изражавају формулама ограниченим на V_ω, јер је апсолутност таквих формула за транзитивне моделе који задовољавају одређен коначан фрагмент теорије ZF^- доказива већ у теорији ZF^-. То значи да је средствима теорије ZF^- доказиво да таква хипотеза или важи у свим транзитивним моделима теорије скупова, или ни у једном. На пример, Геделове теореме непотпуности нису доказиве таквим методама, али јесу доказиве другачијом методологијом.

Што се тиче Геделових теорема непотпуности, оне нам говоре да систем аксиома теорије скупова не можемо никада употпунити. Дакле, ми никада не можемо у потпуности описати компрехензију. Кантор је покушао са неограниченом компрехензијом, али се испоставило да је тај принцип водио у противречност. У аксиоматској теорији скупова се компрехензија ограничава. Међутим та теорија је непотпуна. Додавањем нових аксиома ми можемо рећи још нешто о компрехензији, то јест делимично употпунити слику о њој, али никада не можемо наћи "праву меру", то јест систем који био потпун и непротивречан. Другим речима, немогуће је рећи шта су то "све могуће колекције објеката".

Стандардна аксиоматика теорије скупова је настала као реализација идеје о кумулативној хијерархији V_α којом се покушао избећи Раселов парадокс. Поставља се питање "шта фали" кумулативној хијерархији да би у потпуности описала компрехензију. Прво, једино што се зна о висини ORD таквог универзума је да представља неку врсту јако недостижног кардинала. Међутим, цела "класична" Математика се може изградити и на нивоима хијерархије који се добијају на тај начин. Али као што смо напоменули, непотпуност се јавља још на нивоу V_ω, а то је феномен који понуђени одговор још увек не објашњава.

Ствар је у томе што ако покушамо да компрехензију опишемо преко кумулативне хијерархије, онда се та дефиниција позива на операцију партитивног скупа, који се директно ослања на појам компрехензије који управо покушавамо да опишемо, тако да ту има смисла довести у питање рекурентност те дефиниције. Уколико ми на пример "знамо" шта је $\mathrm{V}_{\omega+5}$, ми имамо компрехензију дефинисану само до окуплања елемената скупа $\mathrm{V}_{\omega+4}$, а да бисмо дефинисали $\mathrm{V}_{\omega+6}$, нама треба компрехензија дефинисана за елементе скупа $\mathrm{V}_{\omega+5}$. Дакле, хијерархија V_α је рекурентно дефинисана само ако је компрехензија већ дата, па кумулативна хијерархија не може послужити за дефинисање појма компрехензије.

Ипак, ово још не објашњава некомплетност на нивоу V_ω, мада смо му се "опасно" приближили. Наиме, у дефиницији скупа V_ω се појављује један врло мистични симбол ω. Он је дефинисан као, у смислу инклузије најмањи индуктиван скуп, а то је већ позивање на компрехензију, и то елемената скупа V_ω који управо дефинишемо.

Постоји једна много прецизније одређена операција $D(x)$ од операције партитивног скупа. То је скуп свих подскупова од x који се могу описати преко параметара из x. Овде се ради о једној много одређенијој врсти компрехензије, тако да треба очекивати да у универзуму L који се преко ове операције може изградити хијерархијски са

$$L_{\alpha+1} = D(L_\alpha),$$

$$L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta, \quad \text{за гранични ординал } \alpha,$$

$$L = \bigcup_{\alpha \in ORD} L_\alpha.$$

можемо рећи много више о компрехензији, а самим тим и решити много више математичких проблема. Овде је "проблематична" операција партитивног скупа замењена једном прецизније одређеном операцијом која се ослања директно на логику. Међутим, због појма ординала ова хијерархија се такође позива на компрехензију, при чему константа L_ω, која штавише описује исти скуп као константа V_ω, "пати" од истих проблема као и она, па ту и не треба очекивати неки напредак на том нивоу хијерархије, што нам управо и тврди теорема апсолутности.

Ипак, мора се приметити да се ту компрехензија у дефиницији константе ω користи само на конструктибилним скуповима који су много прецизније дефинисани, али ту треба имати у виду да се сви подскупови од L_ω не појављују пре нивоа висине ω_1, и који ће стога бити много касније дефинисани. Но, аксиома конструктибилности разрешава највећи број питања на која се не може одговорити у оквиру система аксиома ZFC^-. Разлог треба тражити у чињеници да се они тиме своде на много прецизније одређен појам ординала. Мало је у Математици појмова који су толико једноставни, а који на неки начин описују бесконачност, као појам ординалног броја.

У суштини нам аксиома конструктибилности не решава проблем висине универзума, мада постоји теорема по којој та аксиома "одсеца" највећи део великих кардинала. Прецизније, у систему аксиома ZFL се доказује да мерљиви кардинали, а самим тим и већи од њих не постоје. Међутим, то не значи да нам аксиома конструктибилности смањује највећу могућу висину универзума, јер класе V и L имају исту висину. Узрок овог феномена лежи у томе што класа L није апсолутна за појам мерљивости кардинала. Кардинал који је мерљив у универзуму V, губи мерљивост у класи L.

Тако нешто се ипак не дешава са недостижним кардиналима. Разлог за то лежи у чињеници да се појмови слабе, односно јаке недостиживости кардинала описују Π_1-формулама, док се појам мерљивости опсиује Σ_3-формулом. Класа L је као транзитивна класа апсолутна за Σ_0-формуле. Притом, ако нека универзална формула важи на широј класи, тим пре ће важити и на ужој, што не мора бити случај са егзистенцијалним формулама.

У сваком случају, без обзира на све проблеме на које се наилази, испитивање релативне конзистенције представља основно оруђе приликом бављења најтежим и најважнијим проблемом теорије скупова, а то је проширивање списка аксиома.

Литература

[1] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, Third Edition, North–Holland 1990

[2] Paul J. Cohen,*Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin New York 1966

[3] H. G. Dales, W. H. Woodin, *An Introduction to Independence for Analysts*, Cambridge University Press 1987

[4] Keith J. Devlin, *Aspects of Constructibility*, Springer–Verlag 1973

[5] Keith J. Devlin, Ronald B. Jensen, *Marginalia to a theorem of Silver*, $\models$ ISILC Logic Conf., Lecture Notes in Math. 499, pp. 115–142, Springer–Verlag 1975

[6] William B. Easton, *Powers of Regular Cardinals*, Annals of Mathematical Logic–Volume 1, Number 2 (1970) pp. 139–178

[7] Sy. D. Friedman, *Fine Structure and Class Forcing*, de Gruyter 2000

[8] Kurt Gödel, *The Consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Ann. Math. Studies 3 (1940)

[9] Kurt Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, Monatsh. Math. Phys. 38 (1931), 173–198

[10] Thomas Jech,*Set Theory*, Second Edition, Springer–Verlag 1997

[11] Thomas Jech, *Multiple Forcing*, Cambridge University Press 1986

[12] Ronald B. Jensen, *The fine structure of the constructibile hierarchy*, Ann. Math. Logic 4 (1972) , 229–308

[13] Ronald B. Jensen, Robert M. Solovay, *Some applications of almost disjoint sets*, Mathematical Logic and Foundations of Set Theory (Y. Bar–Hillel, ed.), pp. 84–104, North–Holland 1970

[14] Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer–Verlag 1994

[15] Kenneth Kunen, *Set Theory–An Introduction to Independence Proofs*, North–Holland 1980

[16] Žarko Mijajlović, Zoran Marković, Kosta Došen, *Hilbertovi problemi i logika*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva–Beograd 1986

[17] Donald H. Pelletier, *Easton's results via iterated Boolean–valued extensions*, Can. J. Math., Vol. XXVI, No. 4, 1974, pp. 820–828

[18] Žikica Perović, *Bulove Algebre*, Univerzitet u Nišu i Prosveta Niš 1998

[19] S. Shelah, *Proper and Improper Forcing*, 2nd ed., Perspect. Math. Logic, Springer–Verlag 1998

[20] Jack Silver, *On the Singular Cardinal Problem*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vancouver, 1974

[21] W. Hugh Woodin, *The Continuum Hypothesis, Part I*, Notices of AMS, June/July 2001, pp. 567–576

[22] W. Hugh Woodin, *The Continuum Hypothesis, Part II*, Notices of AMS, August 2001, pp. 681–690

[23] Martin Zeman, *Inner Models and Large Cardinals*, de Gruyter 2000

[24] Slobodan Vujošević, *Matematička logika*, CID–Podgorica 1996