Универзитет у Београду
Математички факултет

Магистарски рад:

ПОЉИНА ТЕОРИЈА И ПРЕБРОЈАВАЊЕ КЛАСА ЕКВИВАЛЕНЦИЈЕ НА КОНАЧНИМ СКУПОВИМА

Ментор:
Проф. Др Павле Младеновић

Кандидат:
Миле Вучић

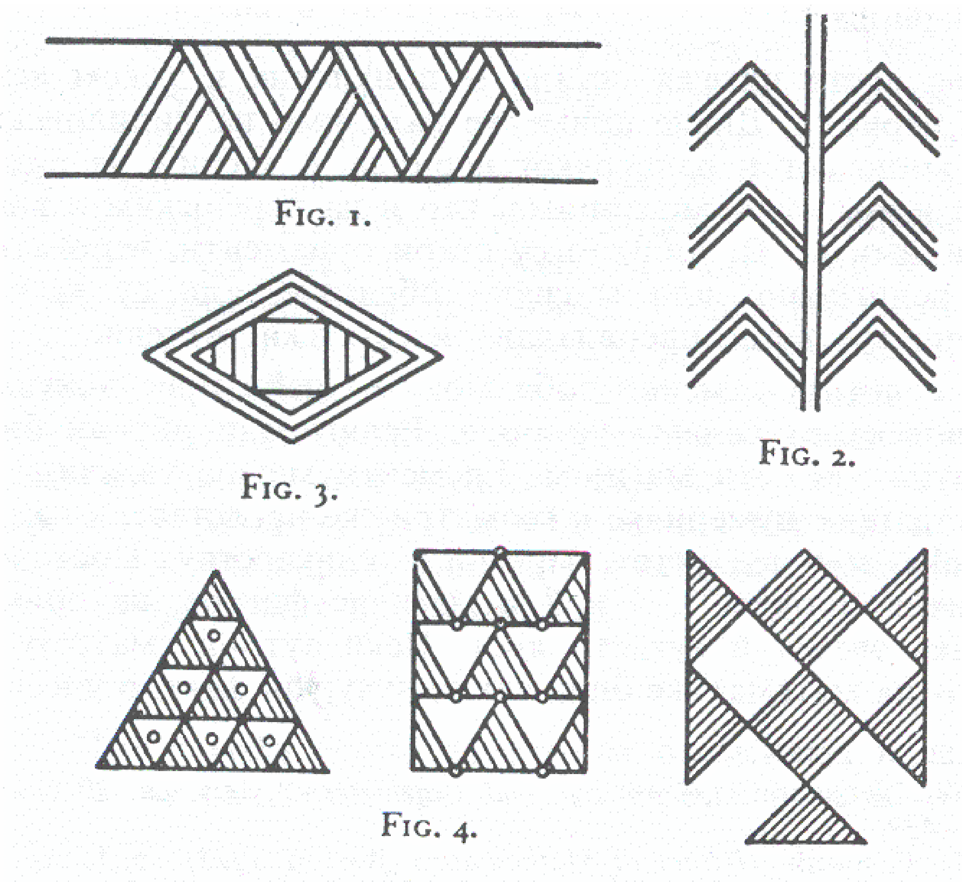
Београд 2011

I УВОД

Иако комбинаторика доста касно заузима своје место у математици, њени елементи се назиру још на самом почетку развоја човека. Потреба човека да комуницира међусобно, са природом, као и да обележи своје постојање, средину у којој је живео и посао којим се бавио, условили су настанак говора тј. гласовних структура, структуру покрета, као и цртежа тј. структуру симбола. У тим структурама се могу уочити комбинације одређених гласова од који настају речи ,а потом и реченице, помоћу којих, међусобно комуницирају, од одређених покрета настају ритуалне игре, којима успоставља комуникацију са земаљским и ван земаљским силама, а комбинацијама одређених слика, човек је обележавао место живљења, активности којима се бавио, као количине предмета које је сакупљао.

Нумерички термини, који изражавају неке од "најапстрактнијих појмова које је у стању да створи људски ум" (*Адам Смит*), споро су улазили у употребу. У почетку они се јављају више као квалитативни него квантитативни термини, који изражавају разлику само између једног (или прецизније "неки" него "један") и два и више. Стари квалитативни настанак нумеричких појмова и сада још долази до изражаја у оним посебним двојним терминима који постоје у неким језицима, на пример у грчком и келтском. Проширивањем појма броја, већи бројеви су у почетку образовани сабирањем: 3 – сабирањем 2 и 1, 4 – сабирањем 2 и 2, итд. Бројеви су записивани помоћу снопова, зареза на штапу, чворова на конопцу, каменчића или школјака сложених на гомилу (по пет), тј на начине који су веома слични са оним које је у стара времена употребљавао власник конака користећи се рабошем. Најстарији пример коришћења рабоша припада епохи палеолита. У Вестоници (Моравска) откривена је жбица вука, дужине око 17 цм, са 55 дубока зареза. Првих двадесет и пет зареза распоређено је у групе по пет, затим следи зарез двоструке дужине којим се завршава тај ред, а затим новим зарезом двоструке дужине почиње нови ред зареза.

На даљем ступњу развоја човека, настанком сталних насеља, бављењем заната, попут грнчарских, ткачких, итд. настаје потреба да се структуре естетски уобличе и суштински унапреде.Човек неолита развијао је фини осећај за геометријске облике. Печење и украшавање глинених посуда, израда асура, корпи и тканина од трске, а касније обрада метала допринели су формирању представа о односима у равни и простору. Неолитски орнаменти били су пријатни за око, јер су у њима били садржани једнакост, симетрија и сличност фигура. У тим фигурама било је и нумеричких односа, у којима су представљени на пример троугласти бројеви, или па у неким орнаментима откривамо " свете " бројеве. Религиозни обреди били су потпуно прожети магијом. Елементи магије увлачили су се и у тадашње нумеричке и геометријске представе, а налазе се, такође и у вајарству, музици и сликарству. Постојали су магични бројеви 3, 4, 7 и магичне фигуре, на пример петокрака звезда, кукасти крст.



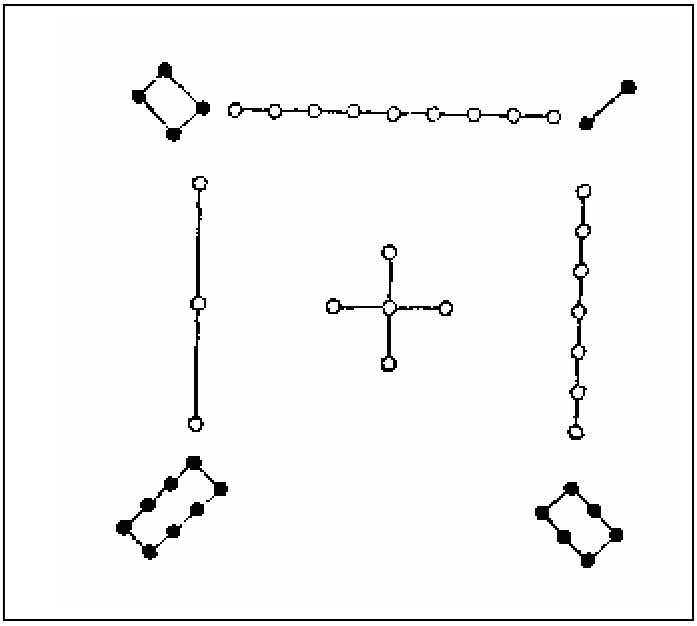
Слика 1.1

Фигуре са слике 1.1 представљају примерке интересантних геометријских облика на грнчарији, тканинама и плетарским производима. Цртеж на првој фигури налази се на неолитској грнчарији пронађене у Босни, као и на уметничким предметима из Месопотамије из периода Ур. Цртеж са друге фигуре је са египатске грнчарије (4000 – 3500 године пре нове ере). На трећој фигури је мотив који се налазио на сојеницама код Љубљане (1000 – 500 године пре нове ере). На четвртој фигури су мотиви нађени на урнама из гробова у Мађарској. Они представљају покушај формирања троугластих бројева који су имали важну улогу у питагорејској математици каснијег периода.

Настанком држава, и сталешког друштвеног уређења, долази до још развијенијих и савршенијих комбинаторних структура. Што из потребе, а што из разоноде, комбинаторни дух човека се најбоље испољио на идеји лавиринта. Лавиринтима су антички писци назвали грађевине са многобројним одајама, повезаним на веома компликован начин, из којих је било тешко наћи излаз. Појављују се у унутрашњости пирамида, као и у једном од најлепших грчких митова о Тезеју и Аријадни, која му је помогла да изађе из лавиринта и спасе од смртоносне руке Минотаура. Први познати цртеж лавиринта сачуван је на печатима из Мемфиса, који датирају из периода око 2500 година пре нове ере.

Поред лавиринта, појављују се и магични квадрати, као добра и напредна комбинаторна структура.Нај ранији спомени о њима се налазе, како изгледа, у кинеским књигама 4. и 5. Века старе ере. Од свих који су стигли до наших дана, “ најстарији” магични квадрат, је таблица Ло Шуа

(2200 године пре нове ере), која се налазила, према легенди, на оклопу корњаче, која је изронила из реке Ло у време цара Ји (слика 1.2).



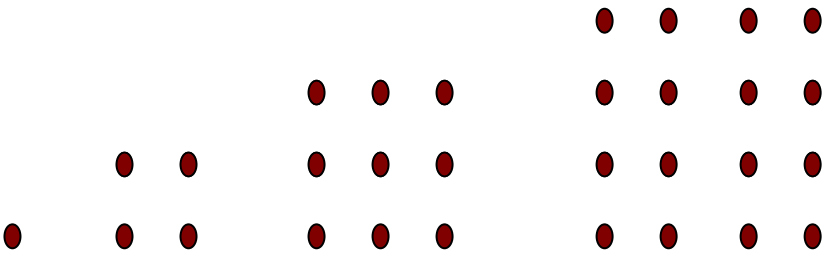
Ако сваку групу кружића заменимо одговарајућим бројем добијамо следећи магични квадрат

4	9	2
3	5	7
8	1	6

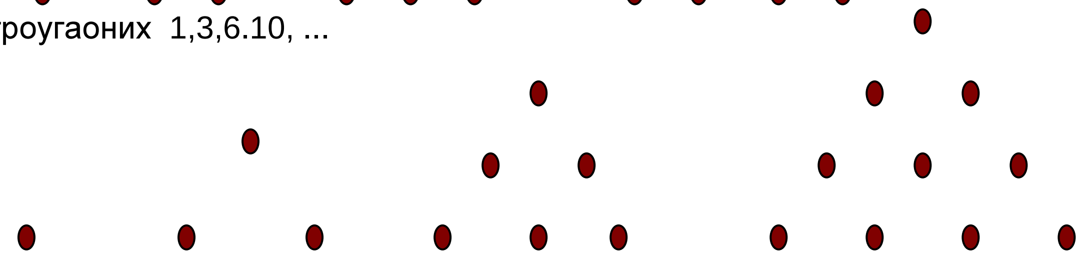
Слика 1.2.

Следећи по старости магични квадрати долазе из Индије и Византије. У Европи се први пут среће на гравури “Меланхолија” немачког сликара Дирера (1514 г.). Магични квадрати су добили назив “магични” од Арапа, који су у оваквим саставима бројева гледали нешто чудесно и мистично.

Велики допринос у откривању многих законитости које поседују природни бројеви, допринели су грчки математичари још у 5. веку пре нове ере. Још су Питагора и његови следбеници сматрали да се сви природни закони могу описати помоћу бројева, па су из тог разлога, да би упознали свет, питагоранци изучавали природне бројеве. Дошли су до многих законитости које поседују природни бројеви, о парним и непарним бројевима, дељивост бројева, простим и сложеним бројевима, ... Посебно су их занимали савршени бројеви, то јест бројева једнаких збиру своих делилаца (6 = 1+2+3, 28 = 1+2+7+14, ...), као и бројева правилних геометриских облика нпр. квадратних 1, 4,9,16, ...



троугаоних 1,3,6.10, ...



Биномни бројеви, први “прави” комбинаторни бројеви, су највише проучавани и имају веома интересантну историју. Сами они, по свом значају и обиму заслужују посебну тематску обраду.

Таблица биномних бројева добила је назив Паскалов троугао зато што се први пут појављује у Паскаловом раду “*Тракт о аритметичком троуглу*”, који је објављен тек после његове смрти 1665. Године. Паскалов троугао биномних бројева приказан је у табели 1.1. Саме биномне бројеве није открио Паскал; они су већ били познати Европљанима. Код кинеског математичара Јанг Хуеја, из времена династије Сун (960 – 1279), налазимо најстарије познато представљање Паскаловог троугла. У расправи *Сзу јиен Ји – чиен* (Тачно огледало четири елемента), коју је написао кинески математичар Чжу - Ши Чи, 1303.године, такође се налази таблица биномних бројева. У истој расправи за биномне бројеве се каже да су познати од давнина.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Табела 1.1 Биномни бројеви.

За мале вредности к, бројеви облика $\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$ били су познати грчким математичарима, који су им дали геометријску интерпретацију. Ознаку $\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$ увео је Андрес фон Етингсхаузен, у својој књизи “*Die Kombinatorische Analysis*” издатој у Бечу !826. године, мада се заслуга за то приписује Рабеу. Биномна формула била је позната у Европи у 16. веку, а на Истоку још и раније.

Коначан облик формуле, у данашњем смислу, за израчунавање броја комбинација, дао је у 14. веку математичар Л.Гершон, доказавши да је

$$\boldsymbol{C}_{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})} = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)(\boldsymbol{n}-2)\cdots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \boldsymbol{\ldots}\cdot \boldsymbol{k}}$$

Надаље, велики допринос развоју математике у Европи, дао је Л.Фибоначи, који уводи арапске бројеве, као и задатак о зечевима, у којем се први пут појављује рекурентна формула: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Метод рекурентних формула се показао једним од значајних могућности за решавање многих комбинаторних задатака.

Комбинаторика посебан развој достиже у 17. и 18. веку у радовима Лајбница, Стирлинга, Јакова Бернулија и Леонарда Ојлера, што је иницирало развој посебних научних дисциплина, са применама које су и данас значајне.

После радова Паскала,Ферма, Лајбница и Ојлера, можемо говорити о комбинаторици као о самосталној математичкој грани, тесно повезаној са осталим математичким дисциплинама посебно са вероватноћом и теоријом графова.

Свој данашњи облик, формуле комбинаторике добиле су почетком 19. века, када се у потпуности уобличила и савремена алгебарска симболика. Сама комбинаторика је пак тесно повезана са многим гранама тзв. Дискретне математике као што су теорија алгоритама, теорија информација, теорија аутомата, теорија логичких кола, итд. У 20. веку комбинаторика доживљава препород, а најважнији разлог за то је техничко – економске природе. Проблеми везани за савремени технички развој захтевају испитивање комбинаторних структура, што изискује решавање проблема егзистенције и конструкције комбинаторних објеката са датим својствима, а поготову решавање проблема оптимизације. Све ово је довољан разлог да се комбинаторним структурама посвети значајна пажња.

И овај рад је покушај да се обухвате и повежу неке комбинаторне структуре, преко одговарајућих резултата, тј. посебних комбинаторних бројева. Интересантно је како се помоћу неких једноставних комбинаторних структура могу решити многи проблеми из природе, уметности, неких математичких дисциплина, технике, итд.

II ПЕРМУТАЦИЈЕ

Дефиниција: Пермутација скупа A са n елемената тј кардиналности n је бијективно пресликавање скупа A у самог себе. тј. n-торка различитих елемената n-скупа A.

***Примери*:** (рађени у програмској апликацији *Математика*)

***Permutations*[{1,2,3}]**

{{1,2,3},{1,3,2},{2,1,3},{2,3,1},{3,1,2},{3,2,1}}

***Permutations* [{а,б,ц,д}]**

{{а,б,ц,д},{а,б,д,ц},{а,ц,б,д},{а,ц,д,б},{а,д,б,ц},{а,д,ц,б}{б,а,ц,д},{б,а,д,ц}
, {б,ц,а,д},{б,ц,д,а},{б,д,а,ц},{б,д,ц,а}
{ц,а,б,д},{ц,а,д,б},{ц,б,а,д},{ц,б,д,а},{ц,д,а,б},{ц,д,б,а}
{д,а,б,ц},{д,а,ц,б},{д,б,а,ц},{д,б,ц,а},{д,ц,а,б},{д,ц,б,а}}

Без нарушавањЈа општости можемо посматрати само пермутације над коначним n-скупом A природних бројева, јер постоји бијекција између ових и одговарајућих пермутација над некм другим скупом.

Пермутације можемо претставити као пресликавање

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

где су $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \cdots a_n$ различити елементи скупа {1,2,3,4, ..., n} и при томе то је пресликавање бијективно. Дакле броју 1 можемо да доделимо било који од n бројева из скупа {1,2,3,4, ..., n}, нпр a_1 затим броју 2 неки a_2 од преосталих $n-1$, броју 3 опет један број a_3 од преосталих $n-2$ итд. тако да ће за доделу броју n остати само један број a_n. Према томе укупан број бијекција, а самим тим и пермутација, n-скупа {1,2,3,4, ..., n} једнак је $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \cdots\ \cdot 2\cdot 1 = n!$

Пермутације можемо представити, поред n-торке различитих елемената или пресликавањем, и као помоћу квадратне матрице реда $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$ чији су елементи 0 и 1, тј. квадратне матрице које у свакој колони и сваком реду поседује тачно један не нула елемент, односно 1. Пермутацији p придружује се пермутациона матрица $p = \left\| a_{ij} \right\|_1^n$ где је $a_{ij} = 1$ ако је $a(i) = j$. Тада пермутацији $\{ a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \}$ додељујемо квадратну матрице реда 4×4 тако да у a_j-том реду и j-тој колони постављамо 1, а на осталим местима 0. Репрезентовање пермутација помоћу матрица има доста предности, обзиром на добро проучен матрични рачун, али има и недостатака, наиме пермутационе матрице су слабо попуњене матрице (садрже доста 0). На пример пермутацију $p = \{ 2,3,4,1 \}$ представљамо матрицом

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пермутације можемо посматрати и као нарушавање стандардног поретка који називамо природним тј. почетним (нпр. алфабетским)

На пример пермутација $\boldsymbol{p} = \{ 4,3,7,5,6,9,2,8,1,12,11,10 \}$ представља нарушавање природног поретка првих 12 природних бројева. То нарушавање поретка можемо начинити на више начина. На пример:

$\boldsymbol{p}_0 = \{ 1,2,3,\underline{4},5,6,7,8,9,10,11,12 \}$ прво преместмо 4 на прво место

$\boldsymbol{p}_1 = \{ \underline{4},1,2,\underline{3},5,6,7,8,9,10,11,12 \}$ онда на друго место ставимо 3

$\boldsymbol{p}_2 = \{ \underline{4},\underline{3},1,2,5,6,\underline{7},8,9,10,11,12 \}$ затим на треће место поставимо 7

$\boldsymbol{p}_3 = \{ \underline{4},\underline{3},\underline{7},1,2,\underline{5},6,8,9,10,11,12 \}$ потом 5 поставимо на 4-то место

$\boldsymbol{p}_4 = \{ \underline{4},\underline{3},\underline{7},\underline{5},1,2,\underline{6},8,9,10,11,12 \}$ на пето место преместимо 6

$\boldsymbol{p}_5 = \{ \underline{4},\underline{3},\underline{7},\underline{5},\underline{6},1,2,8,\underline{9},10,11,12 \}$ онда на шесто место преместимо 9

$\boldsymbol{p}_6 = \{ \underline{4},\underline{3},\underline{7},\underline{5},\underline{6},\underline{9},1,\underline{2},8,10,11,12 \}$ на седмо место сместимо 2

$\boldsymbol{p}_7 = \{ \underline{4},\underline{3},\underline{7},\underline{5},\underline{6},\underline{9},\underline{2},1,\underline{8},10,11,12 \}$ па 8 поставимо 8 место

$\boldsymbol{p}_8 = \{ \underline{4},\underline{3},\underline{7},\underline{5},\underline{6},\underline{9},\underline{2},\underline{8},\underline{1},10,11,12 \}$ затим оставимо 1 на девето место

$\boldsymbol{p}_9 = \{ \underline{4},\underline{3},\underline{7},\underline{5},\underline{6},\underline{9},\underline{2},\underline{8},\underline{1},10,11,\underline{12} \}$ онда на десето место преместимо 12

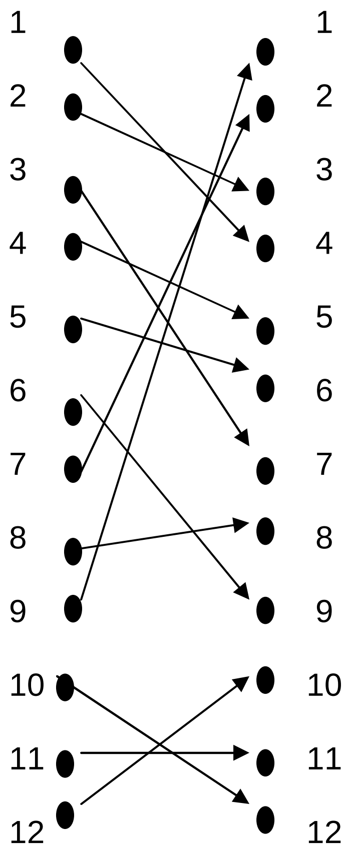
$\boldsymbol{p}_{10} = \{ \underline{4},\underline{3},\underline{7},\underline{5},\underline{6},\underline{9},\underline{2},\underline{8},\underline{1},\underline{12},10,\underline{11} \}$ и на крају 11 поставимо на 11. место

$\boldsymbol{p}_{11} = \{ \underline{4},\underline{3},\underline{7},\underline{5},\underline{6},\underline{9},\underline{2},\underline{8},\underline{1},\underline{12},\underline{11},10 \}$

Овај поступак премештања одговарајућих елемената на прво, друго, ..., дванаесто место управо представља једно формирање коначног низа $\{ \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5,\boldsymbol{a}_6,\boldsymbol{a}_7,\boldsymbol{a}_8,\boldsymbol{a}_9,\boldsymbol{a}_{10},\boldsymbol{a}_{11},\boldsymbol{a}_{12} \}$ тј у нашем случају задану пермутацију $\{ 4,3,7,5,6,9,2,8,1,12,11,10 \}$, а како је коначан низ пресликавање скупа првих $\boldsymbol{n}$ природних бројева С$\boldsymbol{n}$ у скуп природних бројева, но у овом случају у исти тај скуп, добијамо већ раније дефинисано пермутационо пресликавање

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 3 & 7 & 5 & 6 & 9 & 2 & 8 & 1 & 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

На основу чега можемо конструисати и оријентисани граф, тј *Königov*-граф или краће К-граф, тако да горње бројеве прдставимо означеним тачкама које називамо изворним чворовима, доње бројеве означеним тачкама тј. завршним чворовима, а затим спајамо само одговарајуће изворне са завршним чворовима, оријентисаним линијама које називамо усмерене гране графа.



Други начин нарушавања поретка може тећи замењивањем места одговарајућих елемената. На пимер за пермутацију

$\boldsymbol{p}=\{\ 4,3,7,5,6,9,2,8,1,12,11,10\ \}$ имамо

$\boldsymbol{p}_0=\{\underline{1},2,3,\underline{4},5,6,7,8,9,10,11,12\ \}$ заменимо међусобно 1 и 4 и добијамо

$\boldsymbol{p}_1=\{\ 4,\underline{2},\underline{3},1,5,6,7,8,9,10,11,12\ \}$ па онда заменимо међусобно места 2 и 3

$\boldsymbol{p}_2=\{\ 4,3,\underline{2},1,5,6,\underline{7},8,9,10,11,12\ \}$ онда 2 и 7

$\boldsymbol{p}_3=\{\ 4,3,7,\underline{1},\underline{5},6,2,8,9,10,11,12\ \}$ сад замењујемо међусобно места 1 и 5

$\boldsymbol{p}_4=\{\ 4,3,7,5,\underline{1},\underline{6},2,8,9,10,11,12\ \}$ затим мењамо 1 и 6

$\boldsymbol{p}_5=\{\ 4,3,7,5,6,\underline{1},2,8,\underline{9},10,11,12\ \}$ онда 1 и 9

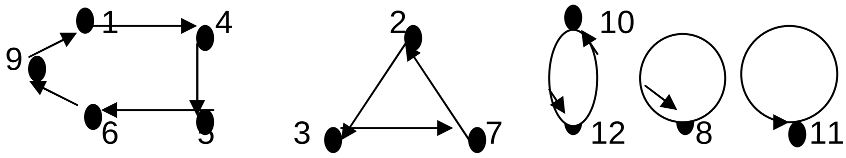
$\boldsymbol{p}_6=\{\ 4,3,7,5,6,9,2,8,1,\underline{10},11,\underline{12}\ \}$ и коначно замењујући 10 и 12 међусобно

$\boldsymbol{p}_7=\{\ 4,3,7,5,6,9,2,8,1,\underline{12},11,\underline{10}\ \}$ добијамо нашу пермутацију

$\boldsymbol{p}=\{\ 4,3,7,5,6,9,2,8,1,12,11,10\ \}$ коју можемо записати и у облику засебних група (1,4,5,6,9) обзиром да се 1 замењивало са 4,5 и 6 затим (2,3,7) обзиром да се 2 замењивало са 3 и 7 , (10,12) јер се 10 замењивало са 12, даље приметимо да су 8 и 11 остали на својим местима без замењивања, то њих можемо представити групом (8) тј. (11). Наша пермутација се дакле може представити као

$\boldsymbol{p} = (1,4,5,6,9)(2,3,7)(10,12)(8)(11)$. Овај начин називамо циклично представљање пермутација, но о томе нешто касније.

Ову пермутацију можемо представити одговарајућим *Coamesovim* оријентисаним графом или краће С-графом, на следећи начин



Дефиниција: Деаранжман на $\boldsymbol{n}$ различитих уређених симбола је пермутација у којој ни један од $\boldsymbol{n}$ симбола није пресликан у самог себе, тј. нема фиксних или непокретни тачака. Број деаранжмана означавамо са $\boldsymbol{D_n}$, а самим тим и број циклова дужине $\boldsymbol{n}$.

Узимамо да је $\boldsymbol{D}_1 = 0$, имајући у виду да је пермутација од једног елемента остаје иста као и изворни елемент. За $\boldsymbol{n} = 2$, постоје две пермутације $\{1,2\},\{2,1\}$ представљене пермутационом функцијом $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ дакле постоји један деаранжман $\boldsymbol{D}_2 = 1$. У случају три елемента имамо 6 пермутација

$$\{1,2,3\},\{1,3,2\},\{2,1,3\},\{2,3,1\},\{3,1,2\},\{3,2,1\}$$

или $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ од којих су $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ деаранжмани $\boldsymbol{D}_3 = 2$.

Број деаранжмана за $\boldsymbol{n} = 4$ ћемо израчунати користећи методе за пребројавање. Нека је $\boldsymbol{P}$ скуп свих пермутација над скупом $\boldsymbol{S} = \{1,2,3,4\}$. Према томе $|\boldsymbol{P}| = 4! = 24$. Ако је $\boldsymbol{P}_1$ скуп свих пермутација у којима је фиксиран број 1, $\boldsymbol{P}_2$ скуп пермутација у којима је фиксиран број 2, $\boldsymbol{P}_3$ скуп свих пермутација у којима је фиксиран број 3 и $\boldsymbol{P}_4$ скуп свих пермутација у којима је фиксиран број 4. Скуп $\boldsymbol{P}_1' \cap \boldsymbol{P}_2' \cap \boldsymbol{P}_3' \cap \boldsymbol{P}_4'$ представља све пермутације у којима није фиксиран ни један од бројева 1,2,3,4. По формули укључења и искључења имамо

$$|\boldsymbol{P}_1' \cap \boldsymbol{P}_2' \cap \boldsymbol{P}_3' \cap \boldsymbol{P}_4'| = |\boldsymbol{P}| - \sum_{i \le 4} |\boldsymbol{P}_i| + \sum_{i<j\le 4} |\boldsymbol{P}_i \cap \boldsymbol{P}_j| - \sum_{i<j<k\le 4} |\boldsymbol{P}_i \cap \boldsymbol{P}_j \cap \boldsymbol{P}_k| +$$

$$+ |\boldsymbol{P}_1 \cap \boldsymbol{P}_2 \cap \boldsymbol{P}_3 \cap \boldsymbol{P}_4|$$

Нека је $\boldsymbol{P}_{ij} = \boldsymbol{P}_i \cap \boldsymbol{P}_j$ скуп свих пермитуција у којима су $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ фиксне, $\boldsymbol{P}_{ijk} = \boldsymbol{P}_i \cap \boldsymbol{P}_j \cap \boldsymbol{P}_k$ скуп свих пермутација у којима су $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ фиксни, $\boldsymbol{P}_{1234}$ пермутација у којима су бројеви 1,2,3 и 4 фиксни. Израчунајмо најпре $\sum_{i \le 4} |\boldsymbol{P}_i|$

број пермутација које фиксирају i. Свака пермутација у P_1 оставља 1 фиксним па их је укупно $|P_1 = 3!| = 6$ слично је и за $|P_2| = 3!, |P_3| = 3!, |P_4| = 3!$ дакле имамо $|P_1| + |P_2| + |P_3| + |P_4| = 4 \cdot 3! = 4! = 4! \cdot \frac{1}{1!}$

Сада налазимо $\sum_{i<j\leq 4} |P_i \cap P_j| = \sum_{i<j\leq 4} |P_{ij}|$ два фиксна броја од 4 можемо изабрати на $\binom{4}{2}$ начина, а преостала два можемо пермутовати на $2!$ начина, дакле добијамо $\sum_{i<j\leq 4} |P_{ij}| = \binom{4}{2} \cdot 2! = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 2! = 4! \frac{1}{2!}$

Затим израчунавамо број пермутација са три фиксна брија, која бирамо од могућих 4, а то износи $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!}$, преостли један елемент можемо пермутовати на$1!$ начина, па је $\sum_{i<j<k\leq 4} |P_i \cap P_j \cap P_k| = \sum_{i<j<k\leq 4} |P_{ijk}| = \frac{4!}{3! \cdot 1!} 1! = 4! \frac{1}{3!}$

И на крају постоји само једна пермутација са 4 фиксна броја, што можемо записати $1 = 4! \frac{1}{4!}$. Укупан број деаранжмана за четири елемента износиће

$$|P_1' \cap P_2' \cap P_3' \cap P_4'| = 4! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$$

и то су пермутације $\{2,1,4,3\}, \{2,3,4,1\}, \{2,4,1,3\}, \{3,1,4,2\}, \{3,4,2,1\}$ $\{3,4,1,2\} \{4,3,1,2\} \{4,1,2,3\} \{4,3,2,1\}$

Теорема: Број деаранжмана D_n за n симбола $\{1,2,\cdots,n\}$ $n > 1$ дат је формулом $D_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right)$

Доказ: Слично доказу у предходном примеру, изводи се доказ за деаранжмане пермутација од n елемената. Број деаранжмана ћемо израчунати користећи методе за пребројавање. Нека је P скуп свих пермутација над скупом $S = \{1,2,\cdots,n\}$. Према томе $|P| = n!$. Ако је P_1 скуп свих пермутација у којима је фиксиран број 1, P_2 скуп пермутација у којима је фиксиран број 2, P_3 скуп свих пермутација у којима је фиксиран број 3 итд. P_n скуп свих пермутација у којима је фиксиран број n. Скуп $P_1' \cap P_2' \cap \cdots \cap P_n'$ представља све пермутације у којима није фиксиран ни један од бројева 1,2,3,$\cdots, n$. По формули укључења и искључења имамо

$$\left|P_1'\cap P_2'\cap\cdots\cap P_n'\right| = |P| - \sum_{i_1\le n}\left|P_{i_1}\right| + \sum_{i_1<i_2\le n}\left|P_{i_1}\cap P_{i_2}\right| - \sum_{i_1<i_2<i_3\le n}\left|P_{i_1}\cap P_{i_2}\cap P_{i_3}\right| +$$
$$+\cdots+\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\left|P_{i_1}\cap P_{i_2}\cap\cdots\cap P_{i_k}\right| + \cdots + (-1)^{n+1}\left|P_1\cap P_2\cap\cdots\cap P_n\right|$$

Нека је $P_{i_1 i_2} = P_{i_1}\cap P_{i_2}$ скуп свих пермитуција у којима су i_1, i_2 фиксне, $P_{i_1 i_2 i_3} = P_{i_1}\cap P_{i_2}\cap P_{i_3}$ скуп свих пермутација у којима су i_1, i_2, i_3 фиксни, $P_{i_1 i_2\cdots i_n}$ пермутација у којима су бројеви $i_1, i_2, \cdots$ и i_n фиксни. Израчунајмо најпре $\sum_{i_1\le n}\left|P_{i_1}\right|$

број пермутација које фиксирају i_1. Свака пермутација у P_1 оставлјља 1 фиксним па их је укупно $\left|P_1!\right| = (n-1)!$ слично је и за $\left|P_2\right| = (n-1)!, \left|P_3\right| = (n-1)!\cdots, \left|P_n\right| = (n-1)!$ дакле имамо $\left|P_1\right| + \left|P_2\right| + \left|P_3\right| + \cdots + \left|P_n\right| = n\cdot(n-1)! = n! = n!\cdot\frac{1}{1!}$

Сада налазимо $\sum_{i_1<i_2\le n}\left|P_{i_1}\cap P_{i_2}\right| = \sum_{i_1<i_2\le n}\left|P_{i_1 i_2}\right|$ два фиксна броја од n можемо изабрати на $\binom{n}{2}$ начина, а преостала $n-2$ можемо пермутовати на $(n-2)!$ начина, дакле добијамо

$$\sum_{i_1<i_2\le n}\left|P_{i_1 i_2}\right| = \binom{n}{2}\cdot(n-2)! = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}\cdot(n-2)! = n!\frac{1}{2!}$$

Затим израчунавамо број пермутација са три фиксна брија, која бирамо од могућих n, а то износи $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}$, преостлих $(n-3)$ елемента можемо пермутовати на $(n-3)!$ начина, па је

$$\sum_{i_1<i_2<i_3\le n}\left|P_{i_1}\cap P_{i_2}\cap P_{i_3}\right| = \sum_{i_1<i_2<i_3\le n}\left|P_{i_1 i_2 i_3}\right| = \frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}(n-3)! = n!\frac{1}{3!} \text{ итд.}$$

И на крају постоји само једна пермутација са n фиксних бројева, што можемо записати $1 = n!\frac{1}{n!}$. Укупан број деаранжмана за n елемента износиће

$$D_n = \left|P_1'\cap P_2'\cap\cdots\cap P_n'\right| = n!\cdot\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right) \approx n!\cdot e^{-1}$$

Јер је $e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$ ■

Од ове формуле лако долазимо до рекурентне формуле за израчунавање укупног броја деранажмана.

$$D_n = (n-1)\cdot(D_{n-1} + D_{n-2}) \text{ , тј } \quad D_n = n\cdot D_{n-1} + (-1)^n$$

У вези са нарушавањем природног поретка елемената и инверзија елемената пермутација имамо:

Дефиниција: елементи a_i и a_j чине инверзију у пермутацији $\{a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4 \cdots a_n\}$ ако важи $a_i > a_j$ када је $j > i$

Дефиниција: Пермутацију називамо парном ако је број свих инверзија у тој пермутацији паран број, а пермутација је непарна, ако је тај број непаран.

Теорема: Кад замене места било која два суседна елемента у некој пермутацији, онда се мења парност пермутације (број инверзија се повећава или смањује за 1)

Доказ: Нека је $p = \{a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \cdots a_i,\ a_{i+1}, \cdots a_n\}$ задана пермутација и нека је на пример у првом случају $a_i > a_{i+1}$, тада ће број инверзија пермутације $p = \{a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \cdots a_{i+1},\ a_i, \cdots a_n\}$ у односу на a_i остати исти, а у односу на a_{i+1}ће се смањити за 1, значи да ће се укупан број инверзија смањити за 1, а самим тим и парност пермутације променити.

У другом случају , када је $a_i < a_{i+1}$ број инверзија у односу на a_i ће се повећати за 1, а у односу a_{i+1}ће остати непромењено, па се укупан број инверзија у пермутацији повећао за 1, што опет доводи до промене парности пермутације.

Дакле у оба случаја се парност променила, јер се број инверзија променио за 1. ■

Теорема: Ако у пермутацији $p = \{a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4 \cdots a_n\}$ замене места било која два елемента, онда се мења парност те пермутације

Доказ: нека се између два елемента која међусобно заменјњују места, налази к елемената нпр $c_1, c_2, \cdots c_k$, тако да пермутација има облик

$p = \{\ a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \cdots a,\ c_1, c_2\ , \cdots c_k, b, \cdots a_n\ \}$. Елементе a и b замењујемо на следећи начин; прво међусобно замене места a и c_1 тако да добијемо $p_1 = \{\ a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \cdots c_1,\ a, c_2\ , \cdots c_k, b, \cdots a_n\ \}$ онда a и c_2 тј. добијамо $p_2 = \{\ a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \cdots c_1,\ c_2, a, \cdots c_k, b, \cdots a_n\ \}$ и тако редом после $k+1$промена aса суседним елементима добијамо пермутацију облика:

$$p_{k+1} = \{\ a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ \cdots c_1, c_2\ , \cdots c_k, b, a \cdots a_n\ \}.$$

Затим мењамо b са суседним елеметима $c_k, c_{k-1}, \cdots c_1$ дакле све док не дође испред c_1, после још k размена, тј. укупно $2k+1$промена места суседних елемената добијамо пермутацију

$$p_{2k+1} = \{\ a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \cdots b, c_1, c_2\ , \cdots c_k, , a \cdots a_n\ \}$$

па према претходној теореми имамо $2k+1$промена парности, тј $\sum_{1}^{2k+1}(\pm 1)$ што је $\sum_{1}^{2k}(\pm 1)\ \pm 1$. Сума $\sum_{1}^{2k}(\pm 1)$ представља паран цео број, што значи да се укупан број инверзија повећао или смањио за паран број, али при том се парност пермутације

$p_{2k}=\{a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ c_1, b, c_2\ ,\cdots c_k, , a\cdots a_n\ \}$ није изменила, па додавањем још ± 1 претходно израчунатом броју инверзија, добијамо промену парности тог броја, а самим тим и парности пермутације

$p_{2k+1}=\{\ a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \cdots b, c_1, c_2\ ,\cdots c_k, a, \cdots a_n\ \}$ у односну на претходну, тј на почетну

$$p=\{\ a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \cdots a,\ c_1, c_2\ ,\cdots c_k, b, \cdots a_n\ \}. \qquad \blacksquare$$

Највише инверзија има последња пермутација у лексикографском поретку тј $p=\{\ n, n-1, \cdots 2, 1\ \}$. Укупан број инверзија је једнак збиру ; 1 има $n-1$инверзија, 2 има $n-2$ инверзија итд $n-1$има само 1 инверзију, а nнема ни једну, дакле укупно $\sum_{i=1}^{n-1} i=\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$. До истог резултата можемо доћи и комбинаторним путем; пошто свака два елемента пермутације $p=\{n, n-1, \cdots 2, 1\}$ представљају инверзију, то је њихов укупан број једнак броју 2-кобинација без понављања n- скупа тј. $\binom{n}{2}$.

Производ две пермутације p и q представља композицију њихових бијективних пресликавања, која их репрезентују, па као резултат опет добијамо пермутациону функцију, која је такође бијекција, што представља нову резултујућу пермутацију над истим скупом. Дакле за пермутациона пресликавања

$$p=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\cdots & a_n \end{pmatrix} \text{ и } \quad q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\cdots & n \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\cdots & b_n \end{pmatrix}$$

при чему је $a_i=a(i)$ и $b_i=b(i)$, добијамо производ ове две пермутације као композицију

$$q\cdot p=\begin{pmatrix} i \\ b(a(i)) \end{pmatrix}_1^n=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ b(a(1)) & b(a(2)) & \cdots & b(a(n)) \end{pmatrix}=r$$

На пример за

$$p=\{\ 3,1,6,4,2,5\ \}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ имамо}$$

$$a(1)=3,\quad a(2)=1,\quad a(3)=6,\quad a(4)=4,\quad a(5)=2,\quad a(6)=5$$

за пермутацију

$$q=\{\ 2,4,6,5,3,1\ \}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ имамо}$$

$$b(1)=2,\quad b(2)=4,\quad b(3)=6,\quad b(4)=5,\quad b(5)=3,\quad b(6)=1$$

обијамо њихов производ $c(i)=b\circ a(i)=b(a(i))$ то јест редом, имамо

$$c(1)=b(a(1))=b(3)=6,\quad c(2)=b(a(2))=b(1)=2,\quad c(3)=b(a(3))=b(6)=1$$

$$c(4)=b(a(4))=b(4)=5,\quad c(5)=b(a(5))=b(2)=4,\quad c(6)=b(a(6))=b(5)=3$$

$$q\cdot p=\{\,2,4,6,5,3,1\,\}\cdot\{\,3,1,6,4,2,5\,\}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&6&5&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&6&4&2&5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&2&1&5&4&3\end{pmatrix}=\{\,6,2,1,5,4,3\}=r$$

Исти овај пример можемо урадити и преко матричне презентације.

$$q\cdot p=\{\,2,4,6,5,3,1\,\}\cdot\{\,3,1,6,4,2,5\,\}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\{\,6,2,1,5,4,3\,\}=r$$

Посматрајмо сада производ једне исте пермутације, тј. посматрајмо степен пермутације

Дефиниција n-ти степен пермутације p, скупа S представљене бијекцијом $\varphi:S\to S$ је $p^n=\varphi^n=\underbrace{\varphi\circ\varphi\circ\cdots\circ\varphi}_{n}$ где $n\in N$

нпр. степен пермутације

$$p=\{\,2,4,6,5,3,1\,\}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$ тад имамо

$$p^2 = \{2, 4, 6, 5, 3, 1\}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ // MatrixForm} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \{4, 5, 1, 3, 6, 2\}$$

$$p^3 = \{4, 5, 1, 3, 6, 2\}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ // MatrixForm}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \{5, 3, 2, 6, 1, 4\}$$

$$p^4 = \{5, 3, 2, 6, 1, 4\}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ // MatrixForm}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \{3, 6, 4, 1, 2, 5\}$$

$$p^5 = \{3, 6, 4, 1, 2, 5\}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ // MatrixForm}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \{6, 1, 5, 2, 4, 3\}$$

$$p^6 = \{6, 1, 5, 2, 4, 3\}^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} // \text{MatrixForm}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Следећи степени се понавлљљају

Посматрајмо други пример тј. пермутацију $p = \{3,2,1,5,4,6\}$, или

ToCicles[**{3,2,1,5,4,6}**] = {{3,1},{2},{5,4},{6}}.

Тада добијамо

$$p^2 = \{3, 2, 1, 5, 4, 6\}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} // \text{MatrixForm}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Или трећи пример за пермутацију $p = \{2,1,6,3,4,5\}$ или

ToCicles [**{2,1,6,3,4,5}]=** {{2,1},{6,5,4,3}}

$$p^2 = \{2, 1, 6, 3, 4, 5\}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} // \text{MatrixForm}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \{1, 2, 5, 6, 3, 4\}$$

$$p^3 = \{1, 2, 5, 6, 3, 4\}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ // MatrixForm}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \{2, 1, 4, 5, 6, 3\}$$

$$p^4 = \{2, 1, 4, 5, 6, 3\}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ // MatrixForm}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Дале, како је пермутационо пресликавање бијекција скупа на самог себе, то постоји инверзно пермутационо пресликавање од заданог, које називамо инверзном пермутацијом

$$p^{-1} = \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \cdots & \varphi(n) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(2) & \cdots & \varphi^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

где је $\varphi^{-1}(k)$ представља инверзно пресликавање елемената скупа слика $\varphi(k)$ при чему је $\varphi^{-1} \circ \varphi(k) = k$

На премер

***InversePermutation*[{2,4,6,5,3,1}]=**{6,1,5,2,4,3}

Или матрично

$$p^{-1} = [illegible], [illegible], 6, 5, 3, 1 \qquad [illegible]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [illegible] & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & [illegible] & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [illegible] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ [illegible] & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Према томе степени пермутација се понашају као обични степени бројева, тј. важе следеће формуле

$p^n \circ p^k = p^{n+k}$; $\quad p^{-1} \circ p = p \circ p^{-1} = I$; где је I почетна пермутација представњена индетичним пермутационим пресликавањем

$$\left(p^n\right)^k = p^{n \cdot k}; \qquad p^{-n} = \underbrace{p^{-1} \circ p^{-1} \circ \cdots p^{-1}}_{n} = \left(p^{-1}\right)^n$$

Како је композиција пермутација такође пермутација, то свака пермутациона функција $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \cdots$ представља неку пермутацију коначног n-скупа S. А како је број пермутација над n-скупом S коначан, тј има их $n!$, онда морају постојати природни бројеви n, m тако да је $\varphi^m = \varphi^n$, а одатле добијамо $\varphi^{m-n} = \varphi^m \circ \varphi^{-n} = \varphi^n \circ \varphi^{-n} = I$ дакле

Теорема: Постоји бар један природан број k такав да је $\varphi^k = I$

Дефиниција: Ред пермутације представљене пермутационим песликавањем φ јсте најмањи природан број k за који је $\varphi^k = \varphi^0 = I$ идентично пермутационо пресликавање што представља почетну пермутацију.

Теорема: Постоји бесконачно много природних бројева n таквих да важи $\varphi^n = I$, и тада је n дељиво са редом пермутације представљене са φ.

Доказ: Нека је k ред пермутације представљене са φ тј. $\varphi^k = I$. Тада је за свако $m \in N$ $\quad \varphi^{k \cdot m} = \left(\varphi^k\right)^m = I^m = I = \varphi^n$ дакле имамо да је $n = m \cdot k$ ■

Дефиниција(Орбита елемента):Нека је $\varphi : S \to S$ пермутационо пресликавање коначног скупа S на самог себе и нека је a произвољан елемен тог скупа, низ $a, \varphi(a), \varphi^2(a), \varphi^3(a), \cdots$ називамо орбитом елемента a за пермутационо пресликавање φ тј. пермутацију p одређену тим пресликавањем.

Пошто скуп S има коначно много елемената, то овај низ тј. орбита, има коначно много различитих чланова. Скуп чланова орбите $O_\varphi(a) = \left\{a, \varphi(a), \varphi^2(a), \varphi^3(a), \cdots \varphi^k(a)\right\}$ је подскуп скупа S тј. $O_\varphi(a) \subset S$

Дефиниција: Дужина орбите је број елемената скупа $O_\varphi(a)$ и једнак је $|O_\varphi(a)|$

Дефиниција: Пермутација одређена пермутационим пресликаванјем φ, је циклична пермутација ако је скуп S једнак скупу $O_\varphi(a)$ тј. $O_\varphi(a) = S$.

Теорема: За произвољне елементе $a,b \in S$ и произвољну пермутацију одређену са $\varphi : S \to S$ важи тачно једна од једнакости $O_\varphi(a) = O_\varphi(b)$ или

$$O_\varphi(a) \cap O_\varphi(b) = \phi$$

Доказ: Нека је $|O_\varphi(a)| = m$ и 1) $b \in O_\varphi(a)$ тад имамо да постоји неко $k \le m$ тако да је $b = \varphi^k(a),\quad \varphi(b) = \varphi^{k+1}(a),\quad \cdots \varphi^{m-k}(b) = \varphi^m(a)$ па је $\varphi^{m-k+1}(b) = a,\quad \cdots \varphi^m(b) = \varphi^{k-1}(a),\quad b = \varphi^k(a)$. Дакле добијамо да је $O_\varphi(b) = \{\varphi^k(a), \varphi^{k+1}(a), \cdots \varphi^m(a), a, \varphi(a), \cdots \varphi^{k-1}(a)\} = O_\varphi(a)$

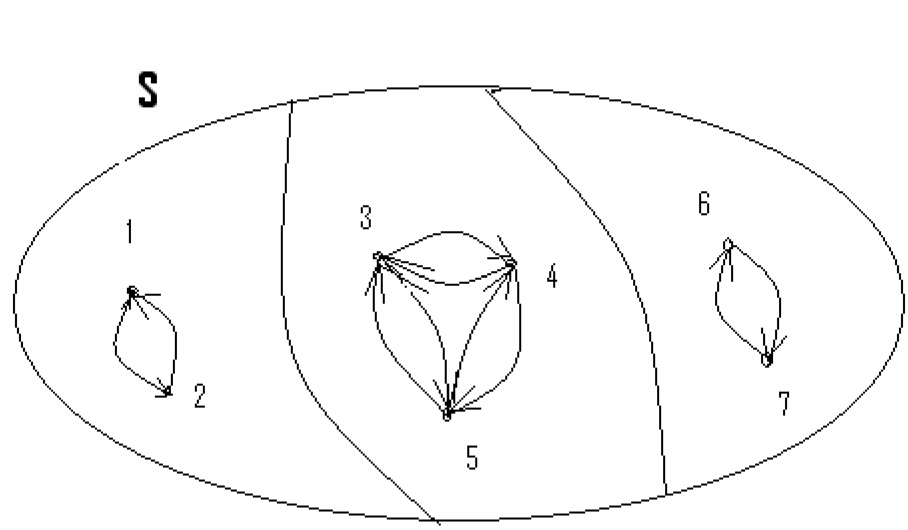
2) Претпоставимо сада да $b \notin O_\varphi(a)$ и да је $\varphi^k(b) \in O_\varphi(a)$ тада би смо имали

$$\varphi^k(b) = \varphi^n(a), \varphi^{k+1}(b) = \varphi^{n+1}(a), \cdots \varphi^{k+m-n}(b) = \varphi^m(a),$$

$\varphi^{k+m-n+1}(b) = a$ Због коначности скупа S и бијективности функције φ један од степена $\varphi^i(b)$ мора бити једнак b према томе добили би смо супротно претпоставци да је $b \in O_\varphi(a)$. Дакле ни један елемент орбите $O_\varphi(b)$ не може бити у орбити $O_\varphi(a)$, па је $O_\varphi(a) \cap O_\varphi(b) = \phi$.

Дефинишимо сада релацију τ скупа S на следећи начин $a\,\tau\,b \Leftrightarrow a,b \in O_\varphi$, (јесу чланови исте орбите).

Теорема: Релација τ је релација еквиваленције на скупу S, а свака класа еквиваленције је орбита неког елемента..



Доказ: Пошто орбите представљају разбијање скупа S, на међусобно дисјунктне скупове, при чему су сви елементи једног подскупа тј. орбите међусобно у дефинисаној релацији τ, то је према основној теореми о релацијама, та релација еквиваленција, а ти дисјунктни подскупови предстаљјају класе те еквиваленције.

Дефиниција: Две пермутације на истом скупу S, су узајамно просте, ако су им скупови покретних тачака дисјунктни.

Теорема: Производ две узајамно просте пермутације добијамо од слика покретних тачака и заједничких фиксних.

Нпр $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

добијамо $\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Дакле имамо $\varphi(a_i) \neq a_i \Rightarrow \psi(a_i) = a_i$ и $\psi(a_i) \neq a_i \Rightarrow \varphi(a_i) = a_i$, могу настати следећи случајеви:

1) $\varphi \circ \psi(a_i) = \varphi(a_i) = b_i \neq a_i$ покретна за φ
2) $\varphi \circ \psi(a_i) = \varphi(b_i) = b_i \neq a_i$ покретна за ψ
3) $\varphi \circ \psi(a_i) = \varphi(a_i) = a_i$ фиксна за обе и φ и ψ

Теорема: Композиција две узајамно просте пермутације скупа S је комутативна, тј. не зависи од поретка чинилаца или $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ где су φ и ψ пермутационе функције.

Доказ: Нека су φ и ψ пермутационе функције међусобно простих пермутација на скупу S и нека је a произвољан елемент скупа S. Тада елемент a може бити покретна тачка највише једне од пермутација представљених са φ или ψ. Ако је $a \in S$ непокретна тачка сваке од тих пермутација, онда је

$$\varphi \circ \psi(a) = \varphi(\psi(a)) = \varphi(a) = a = \psi(a) = \psi(\varphi(a)) = \psi \circ \varphi(a)$$

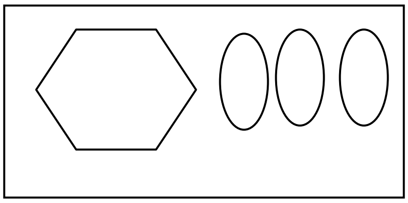
Нека је a покретна тачка нпр. пермутације представљене пермутационим пресликавањем φ и нека је $\varphi(a) = b \neq a$. Тада је $\varphi(b) \neq b$, јер би у противном било $\varphi(a) = \varphi(b) = b$ и $a \neq b$ што је немогуће имајући у обзир да је φ бијекција. Дакле и b је покретна тачка пермутације представљене са φ, а самим тим су ти елементи непокретне тачке пермутације представљене са ψ. Имамо

$$\varphi \circ \psi(a) = \varphi(\psi(a)) = \varphi(a) = b = \psi(b) = \psi(\varphi(a)) = \psi \circ \varphi(a)$$

Према томе увек је $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ ■

Дефиниција:(цикла) Нека је функција $\overline{\varphi} : S \mapsto S$ дефинисана за било који елемент $a \in S$ коначног скупа S и за пермутацију задану пермутационом функцијом $\varphi : S \mapsto S$ на следећи начин:

$$\overline{\varphi}_a(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{ako je } x\in O_{\varphi}(a)\\ x & \text{ako je } x\notin O_{\varphi}(a)\end{cases}$$ граф цикла је



Функција $\overline{\varphi}_a$ је пермутациона функција скупа S и представља проширење пермутације скупа $O_{\varphi}(a)$ која је одређена премутационом функцијом φ. Пермутација одређена са $\overline{\varphi_a}$ у таквом облику се назива цикл.

Теорема: Свака пермутација на коначном скупу може се разложити на производ узајамно простих циклова, при чему је то разлагање једнозначно до на поредак фактора.

Доказ: Нека је $\varphi : S \mapsto S$ пермутационо пресликавање скупа S. Скуп S можемо претставити у облику $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$ при чему су $S_1, S_2, \cdots, S_k$ међусобно дисјунктни скупови и сваки од њих је орбита неког елемента.

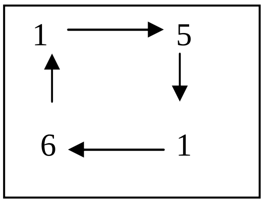
Нека је $\overline{\varphi}_i(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{ako je } x\in S_i\\ x & \text{ako je } x\notin S_i\end{cases}$ за $i = 1,2,\cdots,k$.

Тада је $\overline{\varphi}_i$ пермутациона функција скупа S чији је скуп покретних тачака једино скуп S_i. Како су скупови $S_1, S_2, \cdots, S_k$ међусобно дисјунктни, то су пермутације представљене са $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots, \overline{\varphi}_k$ узајамно прости циклови и при томе важи $\varphi = \overline{\varphi}_1 \circ \overline{\varphi}_2 \circ \cdots \circ \overline{\varphi}_k$ ■

Теорема(Критеријум одређивања реда произвољне пермутације)
Нека је $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_k$ циклусна декомпозиција пермутације представљене пермутационом функцијом φ у облку производа дисјунктних циклова. Ако циклови $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ имају редове $n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k$ редом, онда је ред пермутације представљене са φ једнак $NZS(n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k)$

Доказ: Композиција узајамно простих пермутација $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_k$ пресликава сваку своју покретну тачку a у онај елемент у који је пресликава она од пермутација $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ за коју је a покретна тачка. Одатле следи да је композиција неколико узајамно простих пермутација једнака почетној пермутацији представљеној идентичним пресликавањем I тада и само тада када је свака од тих пермутација почетна тј представљена идентичним пресликавањем, дакле једнакост $\varphi^n = I$ важи, ако и само ако је $\varphi_1^n = I, \quad \varphi_2^n = I, \quad \cdots \quad ,\varphi_k^n = I$, а ове једнакости ће важити само ако је број n дељив са сваким од бројева $n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k$. Најмањи такав број једнак је $NZS(n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k)$. ■

Теорема: Сваки цикл пдужине k постоји k различитих записа. На пример имамо да су следећи циклови једнаки: $(2,5,1,6),(5,1,6,2),(1,6,2,5),(6,2,5,1)$, тј за сва четири цикла добија о један исти граф



Доказ: Ако све елементе неког цикла у померимо у лево (десно), за једно место при чему први (последњи) елемент заузме последње (прво) место, пермутација се не мења, јер се све оне представљају једним истим пермутационим пресликавањем. Нека је задан цикл $(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k)$ он представља пермутацију репрезентовану са $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_k & a_1 \end{pmatrix}$.
Ако елементе заданог цикла ротирамо за једно место у лево тј $(a_2, a_3, \cdots, a_k, a_1)$ добијамо исту пермутациону функцију $\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_k & a_1 \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ а самим тим исту пермутацију . Како постоји k ротација елемената до поклапања са почетним циклом, то значи да постоји k различитих записа једног цикла који представља једну исту пермутацију. ■

Претпоставимо да нека пермутација дефинисана на n-скупу S садржи k_1 циклова који се састоји из 1 елемента, тј 1-цикл, затим k_2 циклова који се састоје од два елемента (2-цикл), k_3 циклова од три елемента, итд. до k_n циклова са свих n елемената. Тад се она назива $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$-пермутација или пермутација облика $1^{k_1}2^{k_2}\cdots n^{k_n}$ где је очигледно

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot k_i = n$$

Теорема: Број пермутација облика $1^{k_1}2^{k_2}\cdots n^{k_n}$ је једнак

$$P(k_1, k_2, \cdots, k_n) = \frac{n!}{1^{k_1} \cdot k_1! \cdot 2^{k_2} \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot n^{k_n} \cdot k_n!}$$

Доказ: Посматрајмо запис пермутације облика $1^{k_1}2^{k_2}\cdots n^{k_n}$ разложене на циклове на почетку са k_1 пари заграда за циклове дужине 1, затим са k_2 пари заграда за циклове дужине 2, итд. На постојећих n места унутар постављених заграда можемо уметнути n елемената на $n!$ начина и свака од добијених пермутација је облика $1^{k_1}2^{k_2}\cdots n^{k_n}$, обзиром да су заграде фиксиране. Међутим сред тих $n!$ пермутација срећемо различите записе једне исте пермутације. Нађимо сада број различитих записа једне исте пермутације. Најпре, сваки цикл дужине k_i има k_i различитих записа који представљају једну исту пермутација (претходна теорема), па како у пермутацији облика $1^{k_1}2^{k_2}\cdots \boldsymbol{n}^{k_n}$ имамо $\boldsymbol{k}_1$ циклова дужине 1, $\boldsymbol{k}_2$ циклова дужине 2, $\boldsymbol{k}_3$ циклова дужине 3, итд., то примењујући правило производа, добијамо $1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot 3^{k_3}\cdot\cdots\cdot \boldsymbol{n}^{k_n}$ различитих записа једне исте пермутације. С друге стране почетних $\boldsymbol{k}_1$ заграда са по једним постављеним елементом тј првих $\boldsymbol{k}_1$ циклова дужине 1, можемо пермутовати на $\boldsymbol{k}_1!$ начина, а да при том сви ти записи представљају једну те исту пермутацију. Слично томе следећих $\boldsymbol{k}_2$ циклова дужине 2 можемо пермутовати на $\boldsymbol{k}_2!$ начина, а да ти различити записи опет представљају једну те исту пермутацију, итд. Па опет на основу правила производа добијамо да је укупан број различитих записа једне исте пермутације једнак $\boldsymbol{N}=1^{k_1}\cdot\boldsymbol{k}_1!\cdot 2^{k_2}\cdot\boldsymbol{k}_2!\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{n}^{k_n}\cdot\boldsymbol{k}_n!$, дакле укупан број $(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_n)$-пермутација облика тј. $1^{k_1}2^{k_2}\cdots\boldsymbol{n}^{k_n}$ износи

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_n)=\frac{\boldsymbol{n}!}{1^{k_1}\cdot\boldsymbol{k}_1!\cdot 2^{k_2}\cdot\boldsymbol{k}_2!\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{n}^{k_n}\cdot\boldsymbol{k}_n!}\qquad\blacksquare$$

Представљање пермутација у облику производа циклова, служи, као извор многих комбинаторних задатака. На пример наћи број пермутација $\boldsymbol{n}$- скупа које имају тачан број циклова без увида у њихову дужину; остављајући задане елементе фиксним; које имају дати број циклова задане дужине, итд.

Размотримо предходну теорму на примеру пермутације облика $(2,3,2)$ тј. $1^2 2^3 3^2$. Прикажимо то следећом табелом за почетну пермутацију, приказану помоћу циклова

$$(1)(2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10,11)(12,13,14)$$

$(1)(2)$ $(2)(1)$ укупно 2	$(3,4)(5,6)(7,8)$ $(3,4)(5,6)(8,7)$ $(3,4)(6,5)(7,8)$ $(3,4)(6,5)(8,7)$ $(4,3)(5,6)(7,8)$ $(4,3)(5,6)(8,7)$ $(4,3)(6,5)(7,8)$ $(4,3)(6,5)(8,7)$ укупно 8 __________________ $(3,4)(7,8)(5,6)$ $(3,4)(8,7)(5,6)$ $(3,4)(8,7)(6,5)$	$(9,10,11)(13,14,12)$ $(9,10,11)(14,12,13)$ $(9,10,11)(12,13,14)$ $(10,11,9)(13,14,12)$ $(10,11,9)(14,12,13)$ $(10,9,11)(12,13,14)$ $(11,9,10)(13,14,12)$ $(11,9,10)(14,12,13)$ $(11,9,10)(12,13,14)$ укупно9 -----------------------------

	(3,4)(8,7)(6,5) (4,3)(7,8)(5,6) (4,3)(8,7)(5,6) (4,3)(7,8)(6,5) укупно 8 ------------------- (5,6)(7,8)(3,4) (5,6)(8,7)(3,4) (6,5)(7,8)(3,4) (6,5)(8,7)(3,4) (5,6)(7,8)(4,3) (5,6)(8,7)(4,3) (6,5)(7,8)(4,3) (6,5)(8,7)(4,3) укупно 8 -------------------- (7,8)(3,4)(5,6) (8,7)(3,4)(5,6) (7,8)(3,4)(6,5) (8,7)(3,4)(6,5) (7,8)(4,3)(5,6) (8,7)(4,3)(5,6) (7,8)(4,3)(6,5) (8,7)(4,3)(6,5) укупно 8 ----------------------------- --- (5,6)(3,4)(7,8) (5,6)(3,4)(8,7) (6,5)(3,4)(8,7) (6,5)(3,4)(8,7) (5,6)(4,3)(7,8) (5,6)(4,3)(8,7) (6,5)(4,3)(7,8) (6,5)(4,3)(8,7) укупно 8 ---------------------- (7,8)(5,6)(3,4) (8,7)(5,6)(3,4) (8,7)(6,5)(3,4) (8,7)(6,5)(3,4) (7,8)(5,6)(4,3)	(13,14,12)(9,10,11) (14,12,13)(9,10,11) (12,13,14)(9,10,11) (13,14,12)(10,11,9) (14,12,13)(10,11,9) (12,13,14)(10,11,9) (13,14,12)(11,9,10) (14,12,13)(11,9,10) (12,13,14)(11,9,10) укупно 9

	$(8,7)(5,6)(4,3)$ $(7,8)(6,5)(4,3)$ $(8,7)(6,5)(4,3)$ укупно 8	
укупно $1^2 \cdot 2!$	укупно $2^3 \cdot 3!$	укупно $3^2 \cdot 2!$

Укупно истих записа за ову пермутацију је $\boldsymbol{N} = 1^2 2! \cdot 2^3 3! \cdot 3^2 2! = 864$

Укупан број пермутација облика $1^2 2^3 3^2$ је

$$\boldsymbol{P}(2,3,2) = \frac{14!}{864} = 100900800$$

III ГРУПЕ

Дефиниција: Група је непразан скуп G заједно са бинарном операцијом $\circ$ над G, при чему је:

-Операција $\circ$ затворена у скупу G тј за свака два елемента $a,b\in G$ је и њихов резултат дејства операције у скупу G, тј. $a\circ b\in G$

-Операција $\circ$ је асоцијативна у скупу G тј за свака три елемента $a,b,c\in G$ важи $(\forall a,b,c\in G)(a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c)$

-У G постоји неутрални елемент e са својством $a\circ e=e\circ a=a$ за сваки елемент a из скупа G.

-Сваки елемент из G поседује инверз тј.

$$(\forall a\in G)(\exists a^{-1}\in G)(a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e)$$

Теорема: Неутрални елемент групе G је јединствен

Доказ: Ако би постојао још један неутрални елемент нпр. n, онда би смо имали следећу једнакост $e=e\circ n=n\circ e=n$ ■

Теорема: У групи G инверзни елемент сваког елемента је јединствен

Доказ: Нека су за елемент $a\in G$ елементи b,c инверзни; тада би било $b=b\circ e=b\circ(a\circ c)=(b\circ a)\circ c=e\circ c=c$ ■

Теорема: За сваки елемент a из групе G важи $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$

Доказ: На основу особине инверзије, из једнакости

$$\left(a^{-1}\right)^{-1}=\left(a^{-1}\right)^{-1}\circ e=\left(a^{-1}\right)^{-1}\circ\left(a^{-1}\circ a\right)=\left(\left(a^{-1}\right)^{-1}\circ a^{-1}\right)\circ a=e\circ a=a$$ ■

Теорема: За било која два елемента из група G важи једнакост $(a\circ b)^{-1}=b^{-1}\circ a^{-1}$

Доказ:

$$(a\circ b)\circ\left(b^{-1}\circ a^{-1}\right)=\left((a\circ b)\circ b^{-1}\right)\circ a^{-1}=\left(a\circ\left(b\circ b^{-1}\right)\right)\circ a^{-1}=(a\circ e)\circ a^{-1}=$$

$=a\circ a^{-1}=e$ са друге стране имамо једнакост $(a\circ b)\circ(a\circ b)^{-1}=e$, па на основу јединствености инверзног елемента за $(a\circ b)$ добијамо тражену једнакост $(a\circ b)^{-1}=b^{-1}\circ a^{-1}$. ■

Дефиниција: (Степена) Нека је a^k, k је позитиван цео број, ознака за $\underbrace{a \circ a \cdots \circ a}_{k} = a^k$, где је $a \in G$ елемент групе G, тада означимо $\left(a^{-1}\right)^k$ са a^{-k}, а неутрални елемент e можемо означити као a^0

Тада имамо основне теореме о операцијама са степенима

Теорема: Нека је G група и нека је a елемент из G, тда важи

а) $a^k \circ a^{-k}$ за све позитивне целе бројеве k

б) $a^{(m+n)} = a^m \circ a^n$ за све целе бројеве m,n

в) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ за све целе бројеве m,n

г) $\left(a^{-n}\right)^{-1} = a^n$ за све позитивне целе бројеве n

Доказ ових једнакости следи директно из дефиниције степена. ■

Теорема: Ако је a елемент групе $(G,\circ)$ и ако важи $a \circ a = a$ тада је $a = e$

Доказ следи из јединствености неутралног елемента. ■

Теорема: Ако је G коначна група и ако је a елемент из G, онда за неки позитиван цео број n важи $a^n = 1$

Доказ: Ако је G коначна група и ако је a из G, тада морају постојати позитивни цели бројеви k и m тако да је $a^m = a^k$, јер постоји само коначно много различитих степена. Користећи ову једнакост уз претпоставку да је $m > k$ добијамо $a^{m-k} = a^{-k} \circ a^m = a^{-k} \circ a^k = e$ па је $n = m - k$ ■

Дефиниција: Ред елемента a из групе G је најмањи позитиван цео број p за који важи једнакост $a^p = e$

Сви елементи скупа $\left\{a, a^2, a^3, \cdots, a^p = e\right\}$ су међусобно различити, где је p ред елемента a у групи G. Стварно, ако би нека два елемента из датог скупа били једнаки нпр. $a^i = a^j$ и при том имали да је $0 \le i, j < p$ и рецимо $i < j$,онда би $a^{j-i} = e = a^p$ што је супротно чињеници да је p ред елемента a. Такође ако је $n > p$, онда је $a^n = a^r$ за неко r и $0 \le r < p$ јер ако је $n = pq + r$ за неко $0 \le r < p$ имамо

$$a^n = a^{pq+r} = \left(a^p\right)^q \circ a^r = e^q \circ a^r = e \circ a^r = a^r$$

Теорема: Нека је G група и a неки елемент из те групе, ако је за неки цео број s, $a^s = e$ онда је број s дељив са редом елемента a тј. $p \mid s$.

Доказ: Нека је p ред елемента a из групе G тј. $a^p = e$ и p је најмањи цео позитиван број са овим својством. Тад на основу предходно изложеног за $s = pq + r$ за неко $0 \le r < p$ имамо
$a^s = a^{pq+r} = \left(a^p\right)^q \circ a^r = e^q \circ a^r = e \circ a^r = a^r = e = a^0$ дакле $s = pq$ па $p \mid s$.■

Дефиниција: Подгрупа $(H,\circ)$ групе $(G,\circ)$ је подскуп H скупа G при чему је H такође група у односу на исту операцију дефинисану у G.

Теорема: Непразан подскуп H групе $(G,\circ)$ је подгрупа ако и само ако је за свака два елемента $a,b \in H$, важи $a \circ b^{-1} \in H$.

Доказ: Прво предпоставимо да је H група и да $a,b \in H$. Из овога следи да је b^{-1} у групи, јер инверзни елемент посматраног елемента увек припада групи., одатле из особине затворености операције у групи $a \circ b^{-1}$ такође припада групи. Предпоставимо сада обрнуто, да за свака два елемента $a,b \in H$, важи $a \circ b^{-1} \in H$. Ако у једнакости $a \circ b^{-1} \in H$ уместо b ставимо a добијамо $a \circ a^{-1} \in H$, тј да неутрални елемрнт e припада H, тада је $e \circ b^{-1} \in H$ и $b^{-1} \in H$. На крају, ако $a,b \in H$, тада је $a \circ \left(b^{-1}\right)^{-1} = a \circ b \in H$.
Одатле следи да је H група. ■

Теорема: Ако је a у групиG, $a^n = e$ за неко n, и p је најмањи позитивни цео број такав да је $a^p = 1$, онда је скуп $H = \left\{a, a^2, \cdots, a^p\right\}$ подгрупа од G.

Доказ: Што се тиче затворености операције у скупу H, она проистиче из предеходних теорема, наиме имамо $a^q \circ a^t = a^{q+t} = a^s = a^{pm+r} = a^r \in H$
Асоцијативност је наслеђена из групе G, H поседује неутрални елемент $a^p = e$ и сваки елемент a^r, $0 \le r \le p$ из H има свој инверз, a^{p-r} јер је $a^r \circ a^{p-r} = a^{r+(p-r)} = a^p = e$. Дакле H је група, а самим тим и подгрупа групе G. ■

Дефиниција: Коначна циклична група или циклична група генерисана из g је $\left(G\langle g\rangle, \circ\right)$ скупа $\left\{g, g^2, \cdots, g^p\right\}$ коју означаваqмо са $\langle g\rangle$, при чему је $g^p = e$

Нека је $(G,\circ)$ група и нека $a_1, a_2, \ldots, a_k \in G$. Нека су $A = \left\{a_1, a_2, \ldots, a_k\right\}$ и $A^* = \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\right\rangle$ скупови који садрже све коначне производе елемената $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и њима одговарајућих инверзних елемената. Тадда је A^* група, шта више A^* је најмања подгрупа од G која садржи A.

Дефиниција: Ако је A подскуп групе G, подскуп A^* зовемо групом генерисаном из A, ако скуп A генерише групу H и ни један други подскуп од A не генерише H, онда је A минимални генеришући скуп за H. Ако A садржи само један елемент, онда је A^* циклична група.

У цикличној групи генеришући скуп се може добити и од само једног елемента. Могуће је имати минимални генеришући скуп са више од једног елемента, а да се и даље има циклична група.

Дефиниција: За подгрупу H групе G и било које $a \in G,\ a \circ H = \{ a \circ h ; \text{за неко } h \in H \}$ је леви косет (леви $a-$положај H у G) од H у G

Теорема: За фиксну подгрупу H од G леви косет од H у G чини партицију од G.

Доказ: Сваки леви косет је непразан, јер за леви косет $a \circ H$ је $a = a \circ e$ који јесте у $a \circ H$. Претпоставимо да пресек левих косета $a \circ H$ и $b \circ H$ јесте непразан скуп тј. $a \circ H \cap b \circ H \neq \phi$, нека се рецимо у том пресеку налази елемент $c,\ c \in (a \circ H \cap b \circ H)$. Онда би за неко h_1 и h_2 из H имали једнакост $c = a \circ h_1 = b \circ h_2$. Множењем обе стране једнакости са h_1^{-1} имамо $a \circ h_1 \circ h_1^{-1} = b \circ h_2 \circ h_1^{-1}$; по дефиницији инверзног елемента добијамо $a = b \circ (h_2 \circ h_1^{-1}) = b \circ h$, дакле a је у левом косету $b \circ H$. Према томе, $a \circ h_1$ је у $b \circ H$ за свако h_1 за H тако да је $a \circ H \subseteq b \circ H$. Слично доказујемо да је и $b \circ H \subseteq a \circ H$, што значи да су ова два косета једнака, $a \circ H = b \circ H$. Према томе леви косет представља партицију скупа G. ■

Пошто леви косети од H у G представљају партицију од G, косети чине класу еквиваленције релације еквиваленције.

Теорема: Ако је G коначна група и H подгрупа од G, онда сви косети од H у G садрже исти број елемената, тј број елемената у H.

Доказ: Нека је $a \circ H$ леви косет од H у G. Дефинишимо пресликавање $f : H \to a \circ H$ као $f(h) = a \circ h$, лако се доказује да је то пресликавање бијекција. ■

Теорема (Лагранж): Ако је G коначна група и ако је H подгрупа од G, тада ред од H дели ред од G

Доказ: Ако је p ред подгрупе H и нека је k број левих косета, онда је на основу предходне две теорем е, производ $k \cdot p$ ред групе G што значи да је ред групе G дељив редом подгрупе H. ■

Теорема: Ако је G група реда n и ако је g у G, тада је $g^n = e$

Доказ: Нека је p најмањи позитивни цео број такав да је $g^p = e$ и $H = \{ g, g^2, \cdots, g^p \}$, тада је H подгрупа са p елемената и стога је n дељиво са p, нека је рецимо $n = p \cdot k$, онда добијамо $g^n = g^{p \cdot k} = (g^p)^k = e^k = e$ ■

Хоморфизми група

Између група постоји посебна врста пресликавања којим се поједина својства, између групе домена и групе кодомена, чувају.

Дефиниција: Нека су $(G, \circ)$ и $(H, *)$ групе и нека је $f : G \to H$ пресликавање. Функција f је хомоморфизам ако важи $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ за свако a и b у G. Хомоморфизам је мономорфизам ако је пресликавање f « 1-1» , а епиморфизам ако је пресликавање f « на » или изоморфизам ако је пресликавање f « 1-1» и « на ».

Некае особине хомоморфизма:

a) Нека је $f : G \to H$ хомоморфизам из групе G у групу H и нека је e неутрални елемент групе G. Тада је $f(e)$ неутрални елемент групе H.
b) Нека је $f : G \to H$ хомоморфизам из групе G у групу H и нека је a^{-1} инверзни елемент елемента a из G, тада је $f(a^{-1})$ је инверзни елемент елемента $f(a)$ из H
c) Ако је $f : G \to H$ хомоморфизам из групе G у групу H и ако је K подгрупа од H, онда је $f^{-1}(K)$ подгрупа од G
d) Ако је $f : G \to H$ хомоморфизам из групе G у групу H и ако је K подгрупа од G, онда је $f(K)$ подгрупа од H

Дефиниција: Нека је $H \circ K = \{ h \circ k : h \in H, k \in K \}$ за подскупове H и K групе $(G, \circ)$. Када је позната операција $\circ$, $H \circ K$ често записујемо скраћено као HK. Када је $H = \{ h \}$, тада $H \circ K$ обично означимо са hK

Теорема: Ако су H, K и L подскупови групе $(G, \circ)$ онда важи закон асоцијације за ове подскупове $(H \circ K) \circ L = H \circ (K \circ L)$

Дефиниција: Ако је H подгрупа групе $(G, \circ)$ и има својство да је $gHg^{-1} = H$ за свацко $g \in G$, тада се H зове нормална подгрупа.

Дефиниција: Нека је $f : G \to H$ хомоморфизам из групе G у групу H. Језгро хомоморфизма f је скуп $\{x : x \in G, f(x) = e\} = f^{-1}(\{e\})$, при чему је e неутрални елемент у H.

Теорема: Језгро од $f : G \to H$ је нормална подгрупа групе G.

Теорема: Подгрупа H групе $(G, \circ)$ је нормална подгрупа ако и само ако је $gH = Hg$ за свако $g \in G$.

Доказ: Предпоставимо да је H нормална подгрупа од G, тако да је $gHg^{-1} = H$ за свако $g \in G$. Нека $gh \in gH$. Важи да је $gHg^{-1} = H$, па је $ghg^{-1} = h'$ за неко $h' \in H$, стога је $gh = h'g$ и $gh \in Hg$, тако да је $gH \subseteq Hg$. Слично доказује мо и да је $Hg \subseteq gH$, одакле добијамо да је $gH = Hg$. ■

Теорема: Ако је H подгрупа групе $(G, \circ)$, онда је $H \circ H = H$

Доказ: Предпоставимо да је H група. Прма дефиницији затворености, имамо да је $H \circ H \subseteq H$. Пошто је H група, онда за $h \in H$ имамо $h = h \circ e_G$, где је e_G неутрални елемент за G, а самим тим и за H. Према томе, $h \in H \circ H$ и $H \subseteq H \circ H$. Стога је $H \circ H = H$ ■
Обрнута теорема не важи, на пример за скуп позитивних целих бројева у односу на множење је $N \cdot N = N$, али $(N, \cdot)$ није група.

Теорема: Ако је H нормална подгрупа групе $(G, \circ)$, онда важи $abH = (aH)(bH)$ за свако $a, b \in G$.

Доказ: За $a, b \in G$, имамо према предходни теоремама следеће једнакости $abH = a(bH) = a(b(HH)) = a(bH)H = a(Hb)H = (aH)(bH)$ ■

Последица 1: Ако је H нормална подгрупа групе $(G, \circ)$, онда косети од H у G чине групу под операцијом $(aH)(bH) = abH$. Ова група се назива факторска група и означава се са G/H

Последица 2: Ако је $f : G \to G/H$ дефинисано са $f(a) = aH$ онда је f хомоморфизам.

Теорема: (прва теорема о разлагању хомоморфизма за групе) Неке је $f : G \to H$ епиморфизам са језгром K. Онда је количничка група G/K изоморфна са H.

Доказ: Дефинишимо пресликавање $l : G/K \to H$ као $l(gK) = f(g)$ за свако $g \in G$. Најпре морамо доказати да је l добро дефинисано, што значи да ако је $gK = g'K$, да из $l(gK) = h$ и $l(gK) = h'$, следи $h = h'$. Нека је $gK = g'K$ и $f(g) = h,\ f(g') = h'$. Како је $gK = g'K,\ g = g'k$ за неко $k \in K$, имамо $h = f(g) = f(g'k) = f(g')f(k) = f(g') \circ e$ (јер је k у језгру f) $= f(g') = h'$. Сада доказујемо да је l хомоморфизам. $l(gKg'K) = l(gg'K) = f(gg') = f(g)f(g') = l(gK)l(g'K)$. Очигледно је l епиморфизам. Пошто је f епиморфизам, за $h \in H$, постоји $g \in G,\ f(g) = h$, тако да је $l(gK) = h$. Даље показујемо да је l мономорфизам. Ако је $l(hK) = l(h'K)$, тада је $f(h) = f(h')$ и $f(h)f(h)^{-1} = f(h')f(h)^{-1}$ тако да је $f(hh^{-1}) = f(h'h^{-1})$ или $f(e) = f(h'h^{-1})$. Пошто је $f(e) = e,\ f(h'h^{-1}) = e$ и $h'h^{-1} \in K$. Одатле је $h'K = hK$. ■

IV ПЕРМУТАЦИОНЕ ГРУПЕ

Једна од најважнијих група су пермутационе групе, тј. групе и подгрупе пермутација. Све пермутације коначног скупа чине групу:
Производ две пермутације из скупа $\boldsymbol{S} = \{1,2,\ldots,\boldsymbol{n}\}$ је опет пермутација из тог скупа, јер пермутације представљају аутоморфизам скупа $\boldsymbol{S}$.
Даље, важи асоцијативност, јер је произвд, тј. слагање пресликавања, асоцијативно
Такође је идентична пермутација уједно и неутрални елемент тог слагања, а и свака пермутација има и своју инверзну пермутацију, због аутоморфизма.
Ову групу називамо симетричном групом у ознаци $\boldsymbol{S_n}$ и реда је $\boldsymbol{n!}$.
Управо због Келијеве теореме којом тврдимо да је свака група изоморфна некој пермутационој групи, она добија на значају, јер проучавањем пермутационе групе и то само на скупу $\boldsymbol{S} = \{1,2,\ldots,\boldsymbol{n}\}$, не умањује се општост у проучавању било које друге групе.
На пример група $+_3$ у скупу $\{0,1,2\}$ приказана табелом

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Изоморфна је пермутационој групи $\boldsymbol{S}_3$ скупа пермутација

P_1	1	2	3
P_2	1	3	2
P3	2	1	3
P_4	2	3	1
P_5	3	1	2
P_6	3	2	1

o	P_1	P_4	P_5
P_1	P_1	P_4	P_5
P_4	P_4	P_5	P_1
P_5	P_5	P_1	P_4

Или за групу

$\bullet_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Која је изоморфна пермутационој групи , где су $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_{11}, \boldsymbol{p}_{14}, \boldsymbol{p}_{24}\}$ редом пермутације $\boldsymbol{p}_1 = 1234, \boldsymbol{p}_{11} = 2413, \boldsymbol{p}_{14} = 3142, \boldsymbol{p}_{24} = 4321$ која је подгрупа симетричне групе $\boldsymbol{S}_4$,задане табелом

$\circ$	p_1	p_{11}	p_{14}	p_{24}
p_1	p_1	p_{11}	p_{14}	p_{24}
p_{11}	p_{11}	p_{24}	p_1	p_{14}
p_{14}	p_{14}	p_1	P_{24}	p_{11}
p_{24}	p_{24}	p_{14}	p_{11}	p_1

Или група $\{1, i, -1, -i\}$ задана таблицом

●	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

која је изоморфна пермутационој групи $\{p_1, p_{10}, p_{17}, p_{19}\}$ подгрупи S_4, и чија таблица изгледа

	P_1	P_{10}	P_{17}	P_{19}
P_1	P_1	P_{10}	P_{17}	P_{19}
P_{10}	P_{10}	P_{17}	P_{19}	P_1
P_{17}	P_{17}	P_{19}	P_1	P_{10}
P_{19}	P_{19}	P_1	P_{10}	P_{17}

А сад ево и теореме са доказом:

Теорема: Свака група G је изоморфна и некој подгрупи симетричне групе S_G њеног скупа-носача G.

Доказ: Како сваки од елемената a групе G има инверз, лако се провери да је са $\pi_a(x) = ax$ дефинисана једна пермутација π_a скупа G. При том, за свако $a, b \in A$ важи $\pi_a = \pi_b \Leftrightarrow a = b$, као и $\pi_a \circ \pi_b = \pi_{ab}$. Отуда је са $f(a) = \pi_a \ (a \in G)$ дефинисан и један аутоморфизам $f : G \to S_G$ уочене групе G у групу S_G. Самим тим је и слика $f(G)$ тог мономорфизма f једна подгрупа групе S_G изоморфна са G. Што је и крај доказа. ■

Ако скупови A и B имају исти кардинални број, то јест постоји бар једна бијекција $f : A \to B$, Њихове симетричне групе су изоморфне, то јест: $|A| = |B| \Leftrightarrow S_A \cong S_B$. Наиме, лако се провери да је тада $L(\pi) = f^{-1} \circ \pi \circ f$ дефинисан и један изоморфизам групе S_B на групу S_A. Посебно, симетрична група било ког коначног скупа са n елемената је изоморфна симетричној групи скупа $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Како је скуп N коначан, пресликавање $\pi : N \to N$ је једна његова пермутација, то јест, бијективно, ако и само ако је инјективно. У том случају, саму ту пермутацију $\pi \in S_n$, представљамо уређеном n – торком $\pi = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ из N^n, уз напомену да је њена r – та компонента a_r управо слика $\pi(r)$ од r при том пресликавању π, као и да међу тим компонентама нема истих.

Дејство групе

Под дејством групе G на било ком непразном скупу U подруземавамо сваку спољну G-операцију у том скупу, тј. свако пресликавање $(a,u) \mapsto au$ скупа $G \times U$ у сам скуп U, са особином да за свако $a, b \in G$ и свако $u \in U$ важи

$$a(bu) = (ab)u \quad (1)$$

$$eu = u, \quad (2)$$

где је e неутрални елемент и ab производ од a и b у посматраној групи G.

У том случају такође говоримо о G-дејству на скуп U, уз напомену да ту G и U не морају бити ни у каквој посебној вези.

Теорема: Свако дејство $(a,u) \mapsto au$ групе G на скупу U индукује и један њен хоморфизам f у симетричну групу S_U скупа U, и обрнуто.

Доказ: Прво, ако је $(a,u) \mapsto au$ дејство групе G, свако $a \in G$ индукује једну пермутацију $\pi_a : u \mapsto au$ скупа U. Наиме, ако је ако је $au = av$, на основу (1) и (2), из $a^{-1}au = a^{-1}av$ следи да је тада $eu = ev$, а тиме и $u = v$. Такође, за свако $v \in U$ и $u = a^{-1}v$ важи $au = v$, па је π_a бијекција. Уз то је јасно да важи и $\pi_a \circ \pi_b = \pi_{ab} \quad (a, b \in G)$,

Што тачно значи да је са $f : a \mapsto \pi_a$ дефинисан један хомоморфизам групе G у групу S_U. И обрнуто, ако је $f : a \mapsto \pi_a$ било који хоморфизам тих група, лако се провери да је тада са $au = \pi_a(u)$ дефинисано једно дејство групе G на самом скупу U. ■

Дефиниција :Нека је сада · фиксирано дејство групе G на неком скупу U. Ако је u било који елемент из U, скуп свих елемената au, за $a \in G$, зовемо њеном **орбитом** или путањом под тим дејством и означавамо са

$$\Omega_u = \{au : \quad a \in G\}.$$

При том из (1) и (2) непосредно следи да је са $u \sim v \Leftrightarrow v \in \Omega_u$ дефинисана и једна еквиваленција ~ у скупу U. И да је класа еквиваленције која садржи елемент u управо њена орбита Ω_u. Отуда су и различите орбите и дисјунктне, и сам скуп U је унија свих различитих, а тиме и дисјунктних орбита Ω_u уоченог дејства групе G.

За то дејство кажемо да је транзитивно, ако има тачно једну орбиту, то јест ако за свака два елемента u и v из скупа U постоји и бар једно a из G за које је $au = v$.

Нека је G скуп од неколико пермутација скупа $S=\{1,2,...,n\}$. На скупу S дефинишемо релацију ~ на следећи начин: За елементе $a,b\in S$ важи $a\sim b$, ако постоји пермутација $\varphi\in G$ таква да важи $\varphi(a)=b.$ Довољни услови да је ~ релација еквиваленције су:
(1) Идентична пермутација ε припада сккупу G.
(2) Ако $\varphi\in G$, онда и инверзна пермутација $\varphi^{-1}\in G$.
(3) Ако $\varphi\in G$ и $\psi\in G$ онда и $\varphi\circ\psi\in G$.
Ако важе услови (1), (2) и (3), онда се скуп G зове група пермутација скупа S. Релација ~ је у том случају релација еквиваленције и она разбија скуп S на међусобно дисјунктне класе еквиваленције. Свака од тих класа еквиваленције зове се орбита групе G. Број елемената орбите групе назива се дужина орбите.
Из дефиниције релације ~ и дефиниције орбите групе G следи да је скуп $O\subset S$ орбита групе G, ако и само ако важе следећа два услова:

1. Свака пермутација из G слика сваки елемент из подскупа O у елемент који припада подскупу O.
2. Сваки елемент из подскупа O је слика неког елемента из тог подскупа, при некој пермутацији из G.

Нека је S коначан скуп, $G=\{\varepsilon=\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{k-1}\}$ група пермутација скупа S и $a\in S$. Тада је скуп $O(a)=\{\varphi_0(a),\varphi_1(a),...,\varphi_{k-1}(a)\}$ орбита групе G, која се назива и орбитом елемента a.
Заиста за $\alpha_i\in G$ и $b=\alpha_j(a)\in O(a)$ важи $\alpha_i(b)=\alpha_i(\alpha_j(a))=(\alpha_i\circ\alpha_j)(a)\in O(a)$ јер $\alpha_i\circ\alpha_j\in G$. Даље, за $b=\alpha_i(a)\in O(a)$ и $c=\alpha_j(a)\in O(a)$ важи $b=\alpha_i(a)=(\alpha_i\circ\alpha_j^{-1}\circ\alpha_j)(a)=(\alpha_i\circ\alpha_j^{-1})(c)\in G$ и при томе је $\alpha_i\circ\alpha_j^{-1}\in G$ јер је G група.

С друге стране, за фиксирану тачку u из U, скуп свих $a\in G$ за које је $au=u$ зовемо и њеним **стабилизатором** у односу на уочено дејство групе G на скупу U и означавамо са

$$\Sigma_u=\{a\in :\quad au=u\}$$

Како је $eu=u$, скуп Σ_u садржи бар неутрал e. Такође, ако је $a,b\in\Sigma_u$, заједно са $au=bu=u$, према (1) и (2) мора бити и $a^{-1}u=u, abu=u$, то јест $ab,a^{-1}\in\Sigma_u$, па је тако стабилизатор Σ_u било које тачке u и једна подгрупа групе G. При томе важи

Теорема: Ако је $\cdot$ било које дејство коначне групе G на скуп U, број елемената орбите Ω_u било које тачке u из U је управо индекс њеног стабилизатора Σ_u у тој групи, а тиме и $|\Omega_u||\Sigma_u|=|G|$.

Доказ: Нека је Σ_u подгрупа групе G, релација $a\Sigma_u=b\Sigma_u$ управо значи да је $a^{-1}b\in\Sigma_u$, то јест $a^{-1}bu=u$, а самим тим и $au=bu$, па је тако са $f(au)=a\Sigma_u$

Добро дефинисана и једна бијекција скупа Ω_u на скуп свих левих положаја (косета) те подгрупе у групи G. Отуда је и $|\Omega_u| = |G : \Sigma_u|$. Крај доказа.

Такође, ако је $v = au$ било који елемент орбите Ω_u и $b \in \Sigma_v$, тада је релација $bv = v$, то јест $bau = au$ еквивалентна са $a^{-1}ba \in \Sigma_u$, па је тако и $\Sigma_u = a^{-1}\Sigma_v a$

Другим речима, ако елементи u и v припадају истој орбити уоченог дејства, њихови стабилизатори Σ_u и Σ_v су и узајамно конјуговане подгрупе у G.

Најзад, ако је $au = u$, за елемент u такође кажемо и да је **непокретна** или **фиксна тачка** у односу на елемент a групе G под уоченим G-дејством. За фиксно a из G, то су управо они елементи $u \in U$ чији стабилизатори Σ_u садрже a. При томе важи генерализација Бернсајдове леме преко дејства групе.

Теорема: Ако је n_a број елемената u које су непокретне у удносу на елеменат a и r број орбита под дејством · групе G реда n на коначном скупу U, тада је $\sum n_a = rn$, при чему се сумирање врши по свим $a \in G$.

Доказ: Пре свега, сума свих бројева n_a је управо број свих парова (a, u) из $G \times U$ за које је $au = u$. С друге стране, број таквих парова за које елемент u припада фиксној орбити Ω је тачно n. Наиме тај број за један елемент u из Ω је ред њеног стабилизатора Σ_u, а тиме и $|G| / |\Omega|$. Отуда је и $\sum n_a = rn$, јер тих орбита има r, и сваке две од њих су дисјунктне.■

Бернсајдова лема

Још један приступ Бетнсајдовој леми, али сада помоћу графа

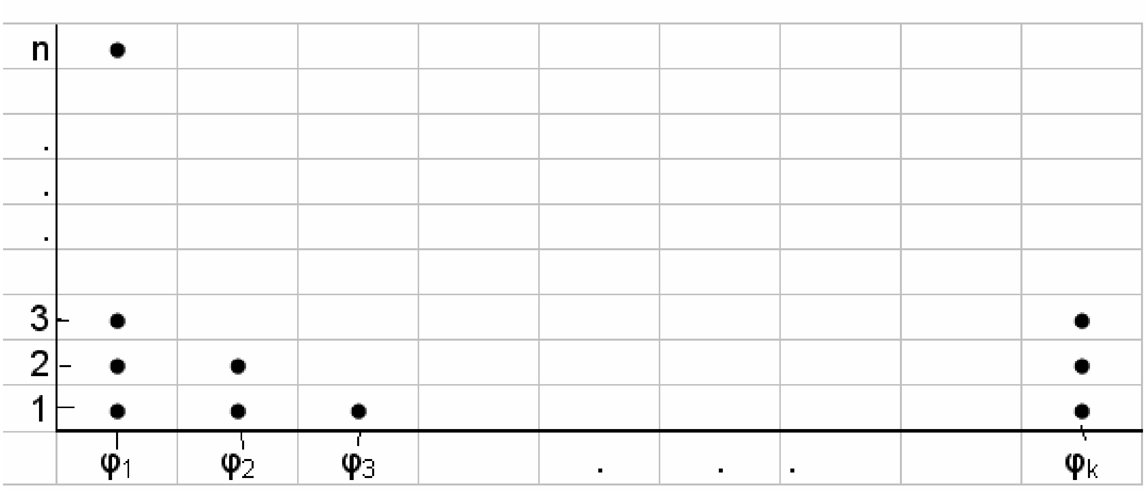
Теорема: Нека је $G = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_k\}$ група пермутација на скупу $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, $B = B(G)$ број орбита те групе и $f(\varphi)$ број непокретних тачака пермутације φ. Тада важи једнакост:

$$B(G) = \frac{1}{|G|}\left(f(\varphi_1) + f(\varphi_2) + \cdots + f(\varphi_k)\right)$$

Доказ: Дефинишимо релацију $\rho \subset G \times S$ на следећи начин

$$(\varphi, j) \in \rho \Leftrightarrow \varphi(j) = j$$

Одредимо број елемената скупа ρ на два начина: на графику релације ρ пребројимо тачке које одређују парове елемената који су у релацији једном прво по вертикалам , а затим по хоризонталама.



На вертикали са апсцисом φ_j налази се $f(\varphi_j)$ тачака графика, па следи

$$|\rho| = f(\varphi_1) + f(\varphi_2) + \cdots + f(\varphi_k) = \sum_{\varphi \in G} f(\varphi)$$

На хоризонтали са ординатом j налази се $|G_j| = |G| : |O(j)|$ тачака графика, па је

$$|\rho| = |G_1 + |G_2|| + \cdots + |G_n| = \sum_{j=1}^{n} |G_j|$$

Елементи $i, j \in S$ припадају истој орбити, онда важи једнакост $O(i) = O(j)$ и $|G_i| = |G| : |O(i)| = |G| : |O(j)| = |G_j|$. Нека су $O_1, O_2, \ldots, O_B$ све орбите групе G. Тада је $S = O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_B$ и скупови $O_1, O_2, \ldots, O_B$ су међусобно дисјунктни. Даље, важе следеће једнакости:

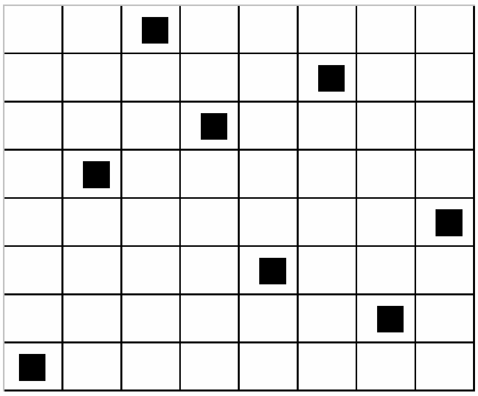
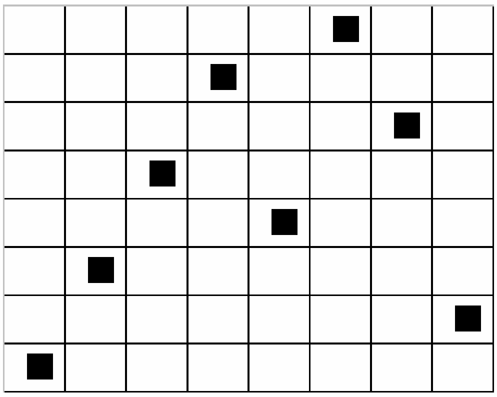
$$\sum_{j=1}^{n} |G_j| = \sum_{j \in O_1} |G_j| + \sum_{j \in O_2} |G_j| + \cdots + \sum_{j \in O_B} |G_j| = \sum_{m=1}^{B} \sum_{j \in O_m} |G_j| = \sum_{m=1}^{B} \sum_{j \in O_m} \frac{|G|}{|O_m|} = \sum_{m=1}^{B} |G| = B \cdot |G|$$

Из ових једнакости добијамо $B(G) = \dfrac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{n} |G_j| = |\rho| = \sum_{\varphi \in G} f(\varphi)$.

Што је и крај доказа. ■

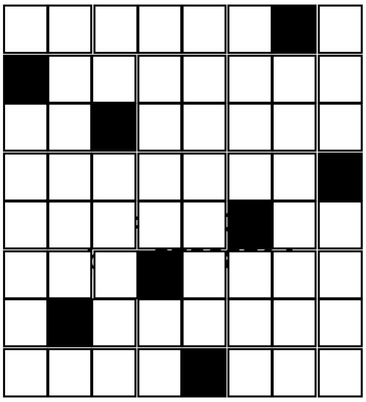
V КОМБИНАТОРИКА ОРБИТА

На основу неколико примера, објаснићемо појам орбите и цикличног индекса. Методом пребројавања решимо следећи задатак: На шаховску таблу поставити највећи број краљица, тако да ни једна од њих не узима другу. Како је на шаховској плочи само осам хоризонталних поља, то је могуће поставити највише осам дама на тим пољима. Према томе покушајмо да поставимо осам дама, тако да оне испуњавају задане услове. За сваку такву поставку на свакој вертикали, као и на свакој хоризонтали може да се постави само једна дама, што нам омогућује да заузета поља запишемо уређеном осморком у којој број на $i-$том месту представља ниво вертикалног положаја у $i-$тој колони. На пример осморка 32654178 представља заузетост следећих полја А-3, Б-2, Ц-6, Д-5, Е-4, Ф-1, Г-7, Х-8
Све могуће позиције можемо добити постављањем прве даме на прво доње поље, а следећу на прво слободно поље навише у следећем реду, и тако редом док не исцрипимо сва поља. нпр. 15863724, или 13574862

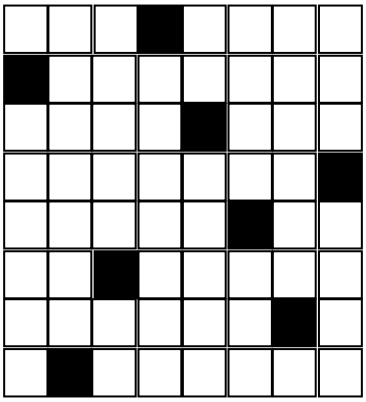



На овај начин добијао 92 могућа положаја. Међутим уочимо да ако нађемо један такав положај можемо добити још 7 положаја ако шаховску плочу ротирамо за 90°, 180° или 270° као применом осних симетрија у односу на осе страница или дијагонале

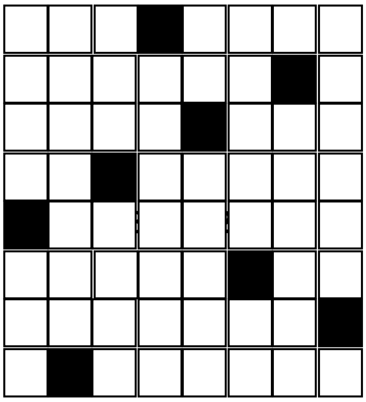
ф$_1$ = 72631485



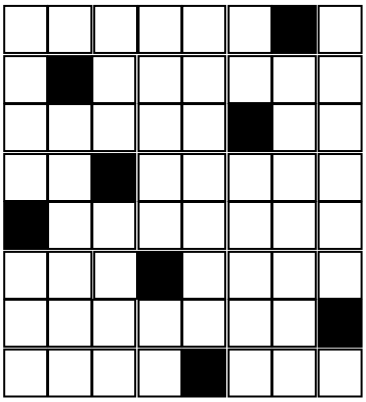
ф$_2$ = 71386425



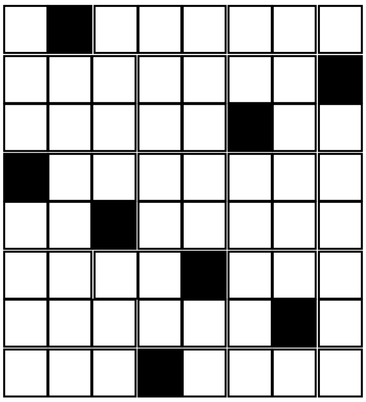
ф$_3$ = 41586372



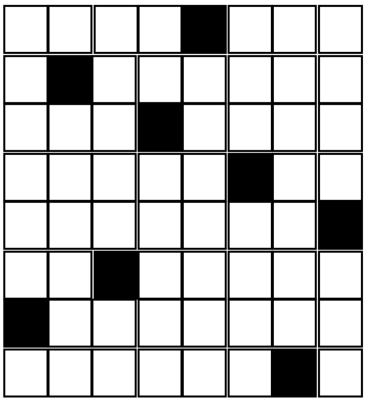
ф$_4$ = 47531682



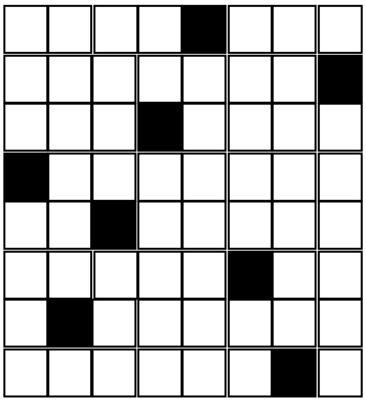
ф$_5$ = 58413627



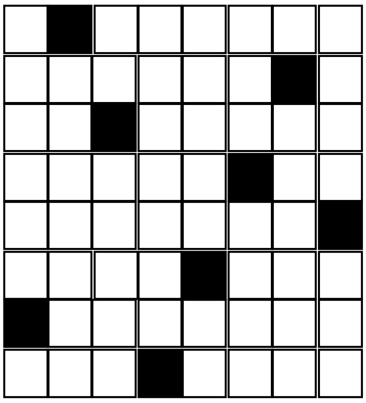
ф$_6$ = 27368514



ф$_7$ = 52468317



ф$_8$ = 28613574



Да би смо добили потпун списак распореда, довољно је приказати по један распоред из сваке орбите, нпр. 72631485, 61528374, 5841726, 46152837, 57263148, 16837425, 57263184, 48157263, 51468273, 42751863, 35281746.

Размотримо овј пример детаљније, увођењем комплексних бројева. Нека је $\boldsymbol{k}$ колона, а $\boldsymbol{p}$ врста у којој је постављена дама, тада позицију даме можемо представити комплексним бројем $\boldsymbol{k + pi}$.

Уведемо сад пресликавања еквивалентних положаја

$\boldsymbol{I = f_1 = f_1(x + yi) = x + yi}$ - идентично пресликавање

$\boldsymbol{R}_{90^\circ} = \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}) = (9-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{x}\boldsymbol{i}$ - ротација за 90°

$\boldsymbol{R}_{180^\circ} = \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}) = (9-\boldsymbol{x})+(9-\boldsymbol{y})\boldsymbol{i}$ -ротација за 180°

$\boldsymbol{R}_{270^\circ} = \boldsymbol{f}_4 = \boldsymbol{f}_4(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{y}+(9-\boldsymbol{x})\boldsymbol{i}$ - ротација зs 270°

$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{s}1} = \boldsymbol{f}_5 = \boldsymbol{f}_5(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}) = (9-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}$ - осна симетрја хоризонталне странице

$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{s}2} = \boldsymbol{f}_6 = \boldsymbol{f}_6(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{x}+(9-\boldsymbol{y})\boldsymbol{i}$ - осна симетрја вертикалне странице

$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{d}1} = \boldsymbol{f}_7 = \boldsymbol{f}_7(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{i}$ - осна симетрја дијагонале из левог доњег краја

$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{d}2} = \boldsymbol{f}_8 = \boldsymbol{f}_8(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}) = (9-\boldsymbol{y})+(9-\boldsymbol{x})\boldsymbol{i}$ - осна симетрја дијагонале из левог горњег краја.

ф$_и$°ф$_j$	**ф$_1$**	**ф$_2$**	**ф$_3$**	**ф$_4$**	**ф$_5$**	**ф$_6$**	**ф$_7$**	**ф$_8$**
ф$_1$	ф$_1$	ф$_2$	ф$_3$	ф$_4$	ф$_5$	ф$_6$	ф$_7$	ф$_8$
ф$_2$	ф$_2$	ф$_3$	ф$_4$	ф$_1$	ф$_8$	ф$_7$	ф$_6$	ф$_5$
ф$_3$	ф$_3$	ф$_4$	ф$_1$	ф$_2$	ф$_6$	ф$_5$	ф$_8$	ф$_7$
ф$_4$	ф$_4$	ф$_1$	ф$_2$	ф$_3$	ф$_7$	ф$_8$	ф$_6$	ф$_5$
ф$_5$	ф$_5$	ф$_7$	ф$_6$	ф$_8$	ф$_1$	ф$_3$	ф$_2$	ф$_4$
ф$_6$	ф$_6$	ф$_8$	ф$_5$	ф$_7$	ф$_3$	ф$_1$	ф$_4$	ф$_2$
ф$_7$	ф$_7$	ф$_6$	ф$_8$	ф$_5$	ф$_4$	ф$_2$	ф$_1$	ф$_3$
ф$_8$	ф$_8$	ф$_5$	ф$_7$	ф$_6$	ф$_2$	ф$_4$	ф$_3$	ф$_1$

При сваком од тих пресликавања дама, чувају се иста својства и по хоризонталама и по вертикалама као и по дијагоналама. На тај начин , Скуп од 92 могућа распореда дама, се дели на класе еквиваленције, које се састоје од распореда који се могу добити једн од других применом горе наведених пресликавања. Те класе еквиваленције називамо орбитама. Уопште говорећи свака орбита би се састојала од осам распореда дама, али неке орбите ће имати мањи број распореда, обзиром да ће се неки распореди приликом деловања ових трансформација пресликавати у самог себе. Проверавањем добијамо 11 орбита са 8 распореда дама, и једна орбита са 4 елемента, у којој при ротацији за 180° се они пресликавају у самог себе.

Дејство ове групе на положаје даме приказано је у следећој таблици, у којој ознаке имају следеће значење

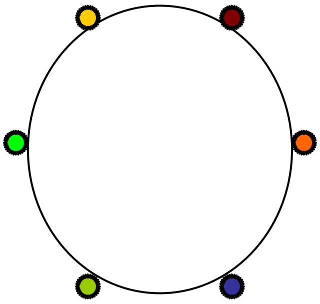
$\boldsymbol{p}_1 = 72631485$, $\boldsymbol{p}_2 = 61528374$, $\boldsymbol{p}_3 = 5841726$, $\boldsymbol{p}_4 = 46152837$, $\boldsymbol{p}_5 = 57263148$, $\boldsymbol{p}_6 = 16837425$, $\boldsymbol{p}_7 = 57263184$, $\boldsymbol{p}_8 = 48157263$, $\boldsymbol{p}_9 = 51468273$, $\boldsymbol{p}_{10} = 42751863$, $\boldsymbol{p}_{11} = 35281746$

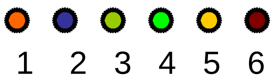
$f_i(p_k)$	$f_1(k+pi)=k+pi$	$f_2(k+pi)=9-p+ki$	$f_3(k+pi)=9-k+(9-p)i$	$f_4(k+pi)=p+(9-k)i$	$f_5(k+pi)=9-k+pi$	$f_6(k+pi)=k+(9-p)i$	$f_7(k+pi)=p+ki$	$f_8(k+pi)=9-p+(9-k)i$
p_1=72631485	72631485	71386425	41586372	47531682	58413627	27368514	52468317	28613574
p_2=61528374	61528374	57138642	52617483	75316824	47382516	38471625	24683175	42861357
p_3=58417263	58417263	25713864	63728514	53168247	36271485	41582736	46831752	74286135
p_4=35841726	35841726	36824175	37285146	42857136	62714853	64158273	57142863	63175824
p_5=46152837	46152837	68241753	26174835	64285713	73825164	53847162	32714286	31758246
p_6=57263148	57263148	82417536	15863724	36428571	84135275	42736851	63571428	17582463
p_7=16837425	16837425	35286471	47526138	82531746	52473861	83162574	17468253	64713528
p_8=57263184	57263184	72418536	51863724	36418572	48136275	42736815	63581427	27581463
p_9=48157263	48157263	25741863	63724815	63185247	36275184	51842736	36814752	74258136
p_{10}=51468273	51468273	57413862	62713584	73168524	37286415	48531726	26831475	42586137
p_{11}=42751863	42751863	63741825	63184275	47185263	36815724	57248136	52814736	36258174
p_{12}=35281746	35281746	46827135	35281746	46827135	64718253	64718253	53172864	53172864

О општем задатку о орбитама у скупу неких преуређења.

Преуређивање скупа X је пресликавање, при којем сваком елементу x из X одговара тачно један елемент y такође из истог скупа X - слику елемента x при том преуређењу, при чему је свако y из X јесте слика тачно једног елемента x. Слику елемента $x \in X$ при прерасподели f означавамо са $f(x)$. Ако је G нека свеукупност прерасподела скупа X, то орбитом елемента x у односу на свеукупност G зовемо скуп слика при свим прерасподелама из G. При неким условима (касније ће мо их навести) цео скуп X се разлаже на орбите својих елемената, и задатак се састоји у томе, да се нађе број таквих орбита. Одговор, зависи не само од скупа X, него и од свеукупности прерасподела G.

Следећи пример: Шест девојака се ухватило у коло. Пронаћи број могућих распореда играча. Представимо играче у колу са шест разнобојних тачака постављених на кругу на једнаком растојању. Ако свакој тачки доделимо број од 1 до 6, то је број различитих положаја једнак броју различитих распореда бројева 1,2,3,4,5,6, што представља број пермутација 6! = 720



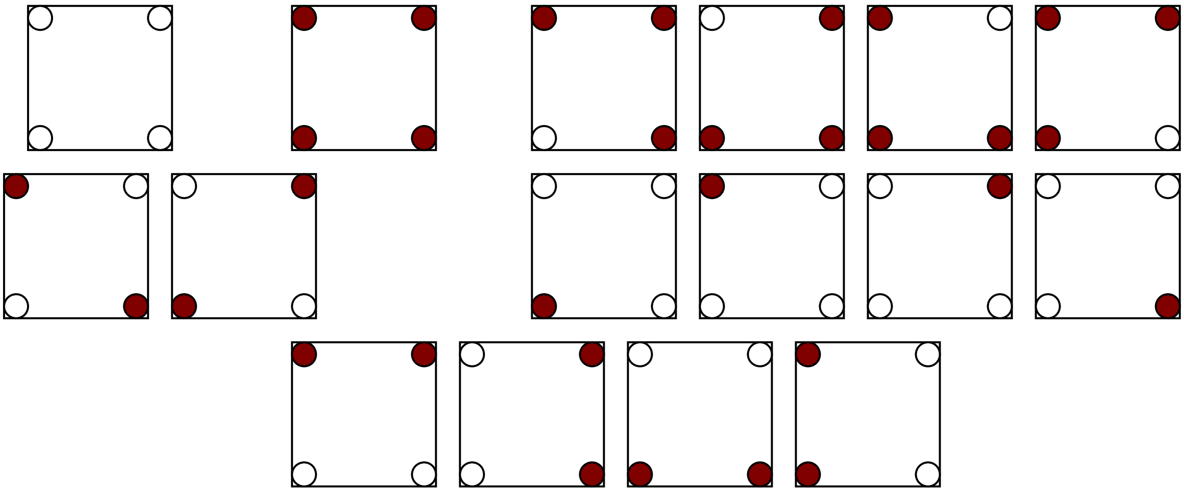


Ако се девојке окрећу по кругу, оне мењају место али не и положај у колу. Дакле распоред играча остаје исти. На тај начин , скуп X свих размештаја играча разлаже се на класе еквиваленције, при чему у једну класу спадају сви распореди добијени један од другог крећући се по кругу.

Очито да се свака класа састоји од по 6 распореда, јер се од једног распореда може добити још пет, ако се првобитни распоред ротира за 60°, затим 120°, 180°, 240° и 300°. Према томе скуп свих 720 распореда се разбија на класе, које се састоје од 6 распореда. Према томе број различитих класа једнак је 720:6 = 120. Уопштавањем овог задатка, узимајући n играча добијамо $n!:n=(n-1)!$ различитих кружних распореда.

Слично овом задатку посматрајмо на колико начина можемо да направимо различитих огрлица од 6 разнобојних перли. Аналогно предходном задатку број различитих огрлица би требало да буде колико и различитих распореда перли кружно распоређених, тј (6 - 1)! = 5! = 120. Међутим огрлицу можемо и да преокренемо на другу страну, па се класе еквиваленције састоје не из 6 распореда, него од 12 распореда перли и број таквих распореда је 720:12 = 60. Уопште можемо рећи да је број распореда n различитих предмета по кругу, могуће извести на $(n-1)!:2$ различитих начина тј класа еквиваленција (орбита), при чему распореде добијене једне од других ротирањем по кругу или превртањем круга сматрамо еквивалентним.

Пример црно белог квадрата



На колико се различитих начина могу обојити темена квадрата са две боје (нпр. црном и белом) , при чему сматрамо да су два бојења квадрата једнака ако се један може добити од другог обртањем квадрата око центра.
Дакле постоји по један квадрат са свим белим односно свим црним теменима. Даље, постоје по четири еквивалентна квадрата са једним белим и три црна темена, односно једним црним и три бела. Они су еквивалентни јер се сваки од њих може добити ротацијом једног за 90°, 180° 270°. Што се тиче бојења са две боје постоје две групе различитих бојења, два квадрата са два наспрамна бела темена тј два наспрамна црна темена, а друга група од четири квадрата са два суседна бела темена, тј два суседна црна темена. Дакле постоји шест различитих геометријских бојења квадрата са две боје, то јест шест орбита, две са по једним елементом (квадратом), једна са два елемента и три орбите или класе еквиваленције са четири квадрата.

Веза орбите и групе пресликавања

Како би смо пронашли математички модел, који би задовољио све наведене примере, најпре одговоримо на питање, каква треба бити свеукупност G свих пресликавања скупа X да би се он разбио на дисјунктан скуп орбита. Ради тога уводимо за елементе скупа X релацију ρ тако да су елементи x и y из скупа X у заданој релацији ако се један може добити од другог неким пресликавањем из G. При том ако је та релација рефлексивна, симетрична и транзитивна, тј. она је релација еквиваленције, онда се скуп X разбија на класе еквиваленције, тј. орбите.
Рефлексивност следи једноставно из услова да елемент $x \in X$ може да се добије од самог себе при неком пресликавању из G. То значи да скуп пресликавања G мора да садржи идентично пресликавање ε. Симетричност следи из услова да ако је $y \in X$ добијено од $x \in X$ неким пресликавањем $f \in G$ то мора постојати у G пресликавање такво да добијено y поново врати у првобитно x. То значи да свако пресликавање $f \in G$ мора да има инверзију у скупу G тј. $f^{-1} \in G$. Још је остало да

одредимо услов за транзитивност релације. Она означава то, да ако је y слика неког x при пресликавању $f \in G$ и z слика добијеног y при неком пресликавању $g \in G$, то скупу G мора постојати пресликавање којим би се x пресликало у z. Да би ово било испуњено довољно је да за $f \in G$ и $g \in G$, скупу G припада и њихова композиција, тј. да постоји $h = g \circ f$ дефинисане тако да за свако $x \in X$ имамо $h(x) = g(f(x))$. И тако, да би свеукупност пресликавања G скупа X одређивала разбијање тог скупа на орбите, довољно је да су испуњена следећа три услова:

1) G садржи идентично пресликавање ε
2) заједно са пресликавањем f скуп G садржи и инверзно пресликавање f^{-1}
3) заједно са два произвољна пресликавања f и g свеукупност G садржи и њихову композицију $g \circ f$.

Како је композиција пресликавања асоцијативна то скуп пресликавања G представља групу пресликавања скупа X.

Фиксне тачке

Први корак је учињен, пронађен је математички модел свих претходних задатака, посматрајући скуп X и групу G пресликавања тог скупа. Треба пронаћи број орбита у X при дејству групе G.

Нека је g неко пресликавање скупа X, то се може догодити да неки елементи при том пресликавању остану непокретни тј. фиксни. На пример, ако је X скуп страна коцке, а g ротација коцке за 90°, 180° или 270° око осе, која је нормална на страну a у њеном средишту, тад се та страна a и наспрамна у односу на њу страна b пресликавају у саму себе, тј. остају фиксне при овим ротацијама. Означимо са $\psi(g)$ број свих фиксних елемената скупа X при пресликавању g. У нашем примеру је $\psi(g) = 2$, у саму себе су се пресликале две стране коцке. За идентично пресликавање коцке имамо $\psi(\varepsilon) = 6$, а за обртање коцке око дијагонале за 120° или 240° имамо $\psi(g) = 0$. Такође је $\psi(g) = 0$ и за ротације коцке око оса које пролазе кроз средишта наспрамних паралелних ивица различитих страна. Према томе укупан број фиксних тачака за све ротације коцке, тј, групе G ротације коцке лако израчунавамо $6 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Но исти тај број представља и број свих елемената, тј. ротација групе G. Није ли случајна веза између броја елемената групе G броја свих фиксних елемената из скупа X при деловању свих пресликавања $g \in G$?

Погледајмо још један пример, ради контроле. Нека је G скуп свих ротација коцке око осе једне стране, која је нормална на њу у њеном средишту, за 0°,90°, 180° или 270°, а елементи скупа X нека буду 6 страна коцке. Као и у претходном примеру за идентично пресликавање , тј. ротацију за 0°, је $\psi(\varepsilon) = 6$, а за остале три ротације је $\psi(g) = 2$. Према томе добијамо $6 + 3 \cdot 2 = 12$ фиксних тачака, а број ротација групе G је 4. Ова два примера указују да је општи закључак нешто сложенији, него што смо претпостављали. Али ако пажљивије размотримо ове примере, уочићемо,

да је у последњем случају скуп страна коцке, разбијен на три орбите, две орбите са по једним елементом, то су наспрамне стране коцке нормалне на осу обртања и једну орбиту од четири преостале стране коцке,паралелних оси обртања, које при свим ротацијама прелазе једна у другу.
Сад можемо претпоставити опште правило: ако поделимо број свих фиксних елемената $\psi(g)$ при свим пресликавањима $g \in G$ са бројем елемената $n(G)$ групе пресликавања G добијамо број орбита $O(X)$:

$$O(X) = \frac{1}{n(G)} \sum_{g \in G} \psi(g) \qquad (1)$$

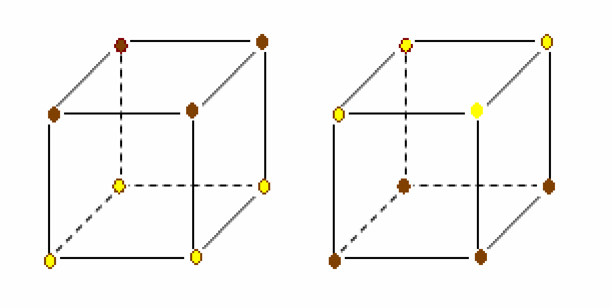
Ова формула важи и за предходни пример, јер у том случају свака страна коцке може да се преслика у било коју другу страну коцке неким од ротација групе G, што значи да су све те стране коцке у једној орбити па је

$1 = \frac{1}{n(G)} \sum_{g \in G} \psi(g)$ тј. $n(G) = \sum_{g \in G} \psi(g)$

Једнакост (1) је први доказао Бернсајд, за произвољну групу пресликавања коначног скупа X, па се по њему назива Бернсајдова лема
Посебно је једноставано решавање задатака применом Бернсајдове леме, у случају када нема фиксних тачака (као што је био пример шест девојака у колу), осим идентичног пресликавања. Тада је $\sum_{g \in G} \psi(g) = n(X)$, где је $n(X)$ број елемената скупа X. На пример у примеру шест девојака у колу, скуп X се састојао од 720 елемената, тј. различитих пермутација, а група G од шест различитих ротација, које су један распоред играча преводиле у други. Осим идентичног пресликавања, свако ротирање је мењало елементе пермутације, дакле без фиксних елемената, па је број орбита $O(X) = \frac{1}{n(G)} \sum_{g \in G} \psi(g) = \frac{1}{6} \cdot 720 = 120$

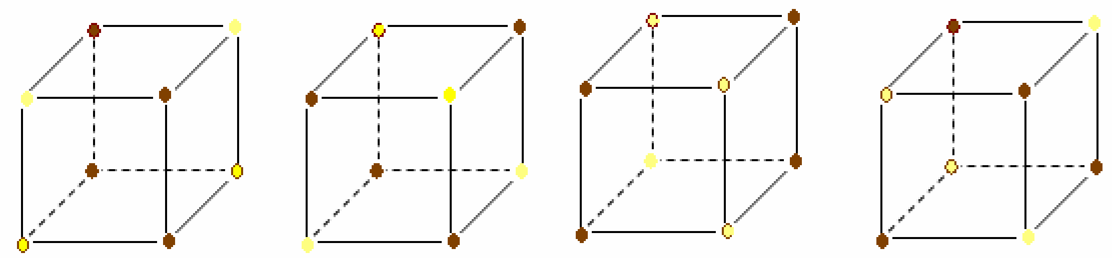
Црно бела коцка

Нађимо на колико геометријски различитих начина можемо обојити темена коцке белом и црном бојом, тако да добијемо 4 бела и 4 црна темена. У овом случају већ смо видели да се група G састоји од 24 ротација коцке, а X од 8 елемената тј. 4 темена коцке, обојена црном и 4 темена обојена белом бојом. Бројање фиксних елемената ћемо извести посебно за сваки облик обртања.
Почнимо са са ротацијом за 90° око осе, нормалне на страну коцке у њеном средишту. Уочавамо да сваком од таквих ротација постоје само два начина бојења темена која остају неизмењена, ако сва темена једне стране која је нормална на осу ротације обојимо једном бојом, а темена њој паралелне стране другом бојом.

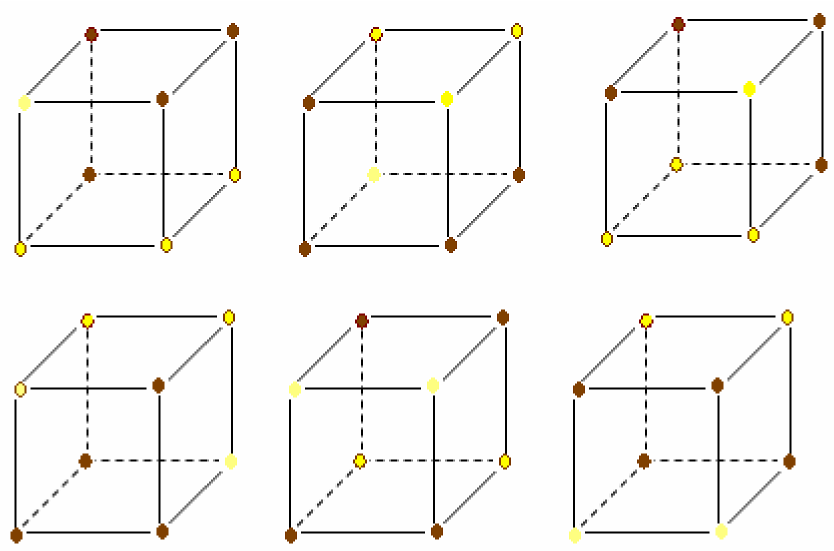


Како постоје три осе тј. три пара паралелних страна коцке и како то исто важи и за ротацију од

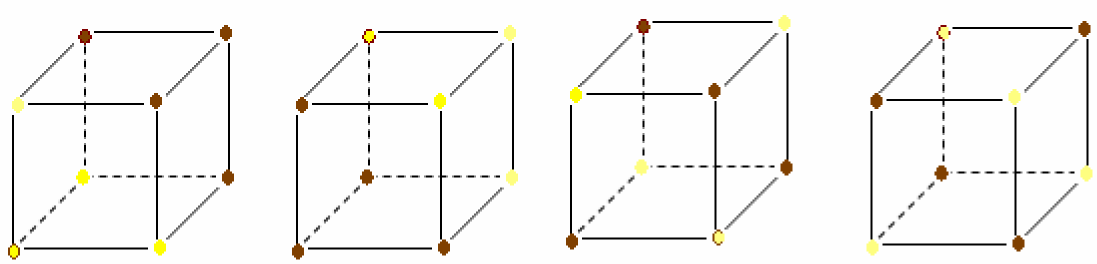
270° тј -90°, укупно ће бити $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ инваријантних начина бојењја
Што се тиче ротације за 180° око ових истих оса, ова два начина бојења остају неизмењена и при овој ротацији за сваку осу, али постоје још 4 различита бојења која остају инваријантна, као што је представљено на доњој слици, што даје још $(2+4) \cdot 3 = 18$ фиксних бојења
По 6 начина инваријантних бојења добијамо и ротацијом за 180° око 6 оса које су нормалне у средишту паралелних ивица различитих страна.



Дакле добијамо још $6 \cdot 6 = 36$ инваријантних бојења.

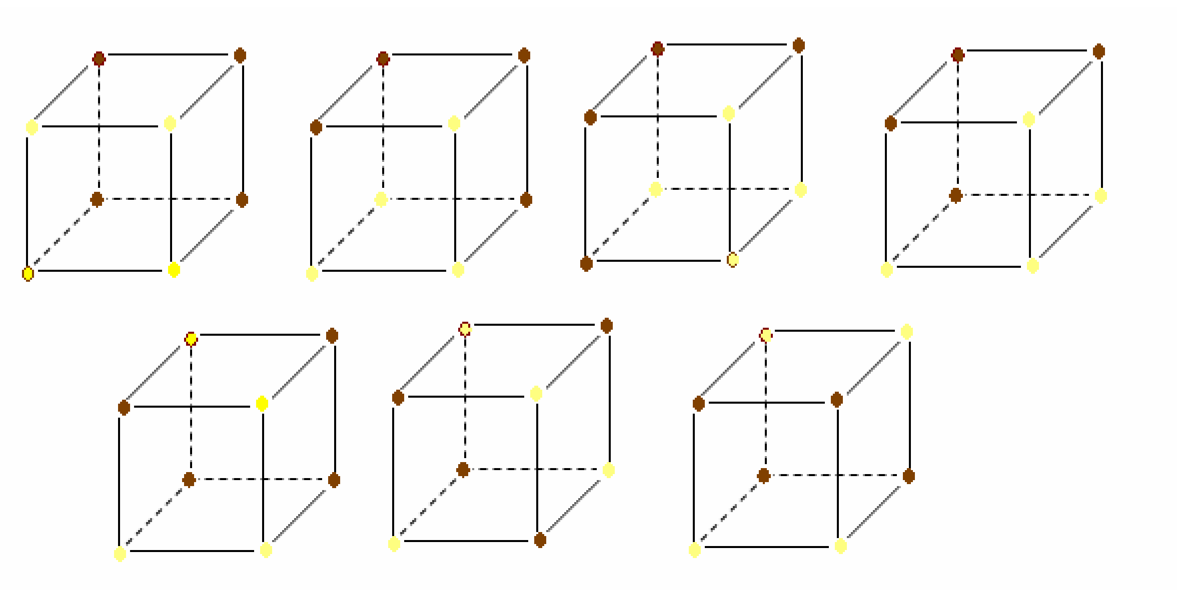


Даље, остаје да размотримо ротације коцке око њених дијагонала за 120° и 240°. У обе те ротације за сваку дијагоналу постоје 4 инваријантна бојења.



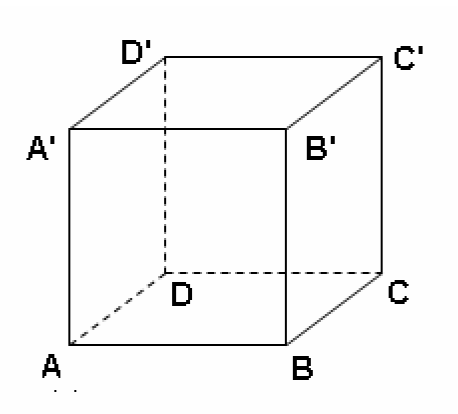
Т у увом случају добијамо $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ фиксна бојења.
И на крају остаје да видимо фиксна бојења при идентичном пресликавању. Како у том случају свако бојење остаје фиксно потребно је само да испуни

услов да се расподеле 4 бела и 4 црна темена на свих 8 места што $\binom{8}{4}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70$ могућности тј фиксних бојења. Ако извршимо сабирање свих фиксних бојења за сваку ротацију, добијамо $\sum_{g\in G}\psi(g)=12+18+36+32+70=168$, а како је број елемената групе ротација једнак 24 $(n(g)=24)$, то је број различитих нееквивалентних бојења једнак $\frac{168}{24}=7$ или 7 орбита. Свих седам нееквивалентних бојења приказано је на следећој слици.



Конјугованост и цикли

Решавајући предходни задатак, обједињавали смо аналогна ротирања (нпр. све ротације око дијагонала), израчунали смо број инваријантних бојења једне ротације, па га помножили са бројем ротација аналогних датом. Прецизирајмо неколико нејасноћа појма аналогних ротација.



Узмимо на пример ротацију коцке око дијагонале AC' и BD'. Ако обрнемо коцку за 90° око вертикалне осе и означимо ову ротацију са h, то ће дијагонала AC' да се преслика у дијагоналу BD'. Направимо после тога ротацију g коцке , за 120° око дијагонале BD' и на крају супротну ротацију h^{-1} за - 90° око вертикалне осе. После ових пресликавања која можемо записати као

$h^{-1} \circ g \circ h$ дијагонала AC' долази на своје место, но цела коцка се ротира око те дијагонале.

$$h = \begin{pmatrix} A & B & C & D & A' & B' & C' & D' \\ B & C & D & A & B' & C' & D' & A' \end{pmatrix}$$
$$g = \begin{pmatrix} A & B & C & D & A' & B' & C' & D' \\ C & B & B' & C' & D & A & A' & D' \end{pmatrix}$$
$$h^{-1} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & A' & B' & C' & D' \\ D & A & B & C & D' & A' & B' & C' \end{pmatrix}$$
$$g \circ h = \begin{pmatrix} A & B & C & D & A' & B' & C' & D' \\ B & B' & C' & C & A & A' & D' & D \end{pmatrix}$$
$$h^{-1} \circ g \circ h = \begin{pmatrix} A & B & C & D & A' & B' & C' & D' \\ A & A' & B' & B & D & D' & C' & C \end{pmatrix}$$

$$r_{AC'} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & A' & B' & C' & D' \\ A & A' & B' & B & D & D' & C' & C \end{pmatrix}$$

Наиме, примењујући ротације h и h^{-1} омогућило нам је да ротацијом коцке око дијагонале BD' добијемо резултат ротације око дијагонале AC'. За оваква пресликавања кажемо да су конјугована.

Уопште нека је G - група пресликавања скупа X. Два пресликавања g и g_1 из групе G су конјугована, ако постоји пресликавање $h \in G$, такво да је $g_1 = h^{-1} \circ g \circ h$. Није тешко доказати да је тада $\psi(g_1) = \psi(g)$. Наиме, функција $\psi(g)$ је иста на свим класама међусобно конјугованих пресликавања.

То нам омогућује да формулу Бернсада прикаћемо у нешто измењеном облику

$$O(X) = \sum_i \frac{\chi_i \psi_i}{n(G)}$$

где је χ_i број елемената у $i-$тој класи конјугованих елемената, ψ_i $-$вредност $\psi(g)$

у тој класи, а сумирање се изводи по свим класама. Например, група ротација коцке се састоји из 5 класа конјугованих елемената. Једна од њих је идентично пресликаванје, друга се састоји од ротација за 90° и 270° око осе нормалне на паралелне стране коцке, трећа - од ротације за 180° око исте те осе, четврта-од ротације за 120° и 240° око дијагонале коцке, пета-од ротације за 180° око осе која пролази кроз средине паралелних ивица из различитих страна коцке. Зато у израчунавању укупног броја фиксних бојења

$\sum_{g \in G} \psi(g) = 12 + 18 + 36 + 32 + 70 = 168$ имамо 5 сабирака.

У закључку останимо на пребројавању броја инваријантних бојења за задану ротацију. До сада смо то чинили непосредно. Но можемо поступити и овако. Узмимо било које пресликавање g скупа X и елемент x тог скупа. Примењујући неколико пута узастопно пресликавање g, добијамо елементе $x, gx, g^2x, \cdots, g^n x, \cdots$ из X. Како је скуп X коначан, то ћемо после одређеног броја корака добити затворен циклус пресликавања и добијамо на пример да је $g^k x = x$. Примењујући такође то пресликавање g на друге елементе скупа X, који нису обухваћени предходним цикловима, добијамо разлагање тог скупа на циклове, који се састоје од елемената кији настају једни из других при деловању пресликавања g. На пример ако се скуп X састоји из 8 темена коцке, а g представља ротацију коцке око дијагонале AC' (предходна слика), тад имамо четири цикла, два се састоје од по једног елемента и садрже темена дијагонале (A), (C'), и два цикла од по три елемента, при чему се један састоји од темена (A', B, D), а други од темена (C, B', D'). У том случају говоримо да ротација g има цикличну структуру $1^2 3^2$. Уопште, запис цикличне структуре $1^{m_1} 2^{m_2} \cdots k^{m_k}$ означава, то да имамо m_1 циклова од једног елемента, m_2 циклова од два елемента и на крају m_k циклова од k елемената. Наравно да је збир елемената свих циклова једнак збиру елемената целог скупа, тј. $m_1 + 2m_2 + \cdots + km_k = n(X)$. Конјуговани елементи групе, имају исту цикличну структуру. Уместо записа $1^{m_1} 2^{m_2} \cdots k^{m_k}$ такође користимо степени запис $t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdots t_k^{m_k}$. Овај запис омогућује да представимо цикличну структуру целе групе у виду полинома $\sum a_{m_1, m_2, \cdots, m_k} t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdots t_k^{m_k}$. Са $a_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ означавамо број елемената цикличне структуре $t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdots t_k^{m_k}$. На пример, ако је X скуп темена коцке, а G група ротација коцке, то полином ове групе има облик $t_1^8 + 9t_2^4 + 6t_4^2 + 8t_1^2 t_3^2$.

Члан t_1^8 одговара идентичном пресликавању, при чему се темена распоређују на 8 циклова дужине 1 тј. сваки цикл садржи по једно теме. Члан $9t_2^4$ представља два облика ротација, обртање за 180° око осе нормалне на наспрамне паралелне стране коцке, као и ротирање за 180° око оса које пролазе кроз средишта наспрамних паралелних ивица из различитих страна коцке. Првих је 3, а других ротација је 6. Члан $6t_4^2$ се добија од ротација за 90° и 270° око осе нормалне на наспрамне паралелне стране коцке, којих је по 3. И на крају члан $8t_1^2 t_3^2$ представља ротације око дијагонала коцке за 120° и 270° којих има по 4 (у овом случају добијамо два цикла са по једном тачком дијагонале, и два цикла са по три темена).

Нека је задана циклична структура $t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdots t_k^{m_k}$ елемента g групе G, и нека се елементи скупа X боје са r различитих боја. Јасно је да

инваријантно бојење које се односи на елемент g, може бити само оно бојење којим се сви елементи једног цикла боје само једном бојом. Према томе број различитих бојења инваријантних у односу на g, једнак је броју распореда $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ циклова на r "ћелија".
Ако је задани број елемената, који добијају задану боју, то расподела треба бити таква, да у свакој ћелији лежи задани број елемената. На пример, ако циклична структура елемента g има облик $t_1^2 t_2^4$ и бојење обављамо са две боје, при чему у првој треба обојити 6 елемената, а у другој четири елемента. То су могуће такве варијанте првом бојом обојити или 3 цикла дужине 2, што је могуће то учинити на $\binom{4}{3} = 4$ начина, или два цикла дужине 1 и два цикла дужине 2 што се може учинити на $\binom{4}{2} = 6$ начина. Укупно добијамо 10 начина бојења, инваријантних у односу на G
Опишимо сада општи план пребројавања орбита за случај, када је задана група пресликавања G скупа X и када се боји са r различитих боја, помоћу којих се могу обојити елементи скупа X. Орбите се укључују у скуп свих бојења X тим бојама и групу G преводи из једног начина бојењја у други).
1) За све елементе X одредимо цикличне индексе (конјуговани елементи имају исте цикличне индексе)
2) За сваки облик цикличног индекса одредимо број начина бојења циклова, којим су испуњени задани услови.
3) Применом формуле Бернсајда израчунамо број орбита.

VI КОНАЧНЕ ГРУПЕ РОТАЦИЈА

Опишимо, сада, све коначне групе ротације еуклидског простора $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_3$ димензије 3. Пре свега, према теореми 1 (За сваку коначну подгрупу Γ грруппе изометрија $\boldsymbol{GI}(\boldsymbol{V})$ постоји бар један инваријантан вектор, тј. бар један вектор $\boldsymbol{c}$ такав да је $\phi(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}$ за свако ϕ из Γ.), за сваку од тих група Γ постоји бар једна Γ-инваријантна тачка, то јест бар једна тачка $\boldsymbol{O}$ таква да је $\phi(\boldsymbol{O}) = \boldsymbol{O}$ за сваку ротацију ϕ из Γ.

Посебно, како све инваријантне тачке праве ротације $\phi \neq \varepsilon$ простора $\boldsymbol{E}$ припадају њеној оси, јасно је да ту тачка $\boldsymbol{O}$ припада осама сваке од ротација из Γ. Такође, ако је $\boldsymbol{S}$ јединична сфера са центром у тачки $\boldsymbol{O}$, за свако то ϕ важи и $\phi(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{S}$.

Према томе, сама оса било које од ротација $\phi \neq \varepsilon$ из Γ сече сферу $\boldsymbol{S}$ у две дијаметрално супротне тачке, на пример $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{P}'$. Зовемо их **половима** саме те ротације ϕ. То су и једине тачке тачке сфере $\boldsymbol{S}$ које су инваријантне у односу на ϕ.

Уз то, ако је ψ било која од тих ротација, из $\phi(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}$ следи да је и тачка $\boldsymbol{Q} = \psi(\boldsymbol{P})$ један пол ротације $\psi\phi\psi^{-1}$. То посебно значи да је са $\psi\boldsymbol{P} = \psi(\boldsymbol{P})$ дефинисано и једно дејство групе Γ на скупу $\boldsymbol{U}$ свих њених полова, то јест свих тачака сфере $\boldsymbol{S}$ које су инваријантне у односу на бар једну ротацију $\phi \neq \varepsilon$ из Γ.

Ако је та група Γ реда $\boldsymbol{n} > 1$, скуп $\boldsymbol{U}$ је коначан и унија свих различитих орбита $\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2, ..., \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{r}}$ уоченог Γ-дејства. Штавише, сваке две од тих орбита су и дисјунктне, па ако је $\boldsymbol{k}$, број тачака орбите $\boldsymbol{\Omega}$, биће и $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \cdots + \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{r}}$, број тачака самог скупа $\boldsymbol{U}$.

С друге стране, свака од $\boldsymbol{n} - 1$ ротација $\phi \neq \varepsilon$ из Γ фиксира тачно две тачке из $\boldsymbol{U}$, док их идентична изометрија ε фиксира све. Упоређено са теоремом(Теорема: Ако је $\cdot$ било које дејство коначне групе $\boldsymbol{G}$ на скуп $\boldsymbol{U}$, број елемената орбите $\Omega_{\boldsymbol{u}}$ било које тачке $\boldsymbol{u}$ из $\boldsymbol{U}$ је управо индекс (количнички скуп, вишеструкост) њеног стабилизатора $\Sigma_{\boldsymbol{u}}$ у тој групи, а тиме и $|\Omega_{\boldsymbol{u}}||\Sigma_{\boldsymbol{u}}| = |\boldsymbol{G}|$.) то посебно значи да је ту $\boldsymbol{nr} = \boldsymbol{k} + 2(\boldsymbol{n} - 1)$, а тиме и

$$\sum(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}_s) = 2(\boldsymbol{n} - 1) \qquad (1)$$

Уз то, ако је $\boldsymbol{m}_s$ ред стабилизатора $\boldsymbol{\Sigma}_s$ било које тачке $\boldsymbol{P}$ из $\boldsymbol{\Omega}_s$, тј. број свих ротација ϕ из Γ за које је $\phi\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}$, биће $\boldsymbol{m}_s\boldsymbol{k}_s = \boldsymbol{n}$, па се тако, после дељења са $\boldsymbol{n}$, претходна релација своди на

$$\sum\left(1 - \frac{1}{\boldsymbol{m}_s}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\boldsymbol{n}}\right) \qquad (2)$$

Због $n>1$, десна страна у тој релацији је мања од 2, али није и од 1. При томе је $m_s \geq 2$, па број r свих сабирака на левој страни у (2) није већи од 3. То управо значи да уочено дејство групе Γ може имати само две или три орбите.

Случај две орбите

Због $r=2$, из (1) непосредно следи да тада мора бити $k_1+k_2=2$, то јест $k_1=k_2=1$, а самим тим и $m_1=m_2=n$. То такође значи да је тада скуп $U=\{P,P'\}$ двочлан, као и да је права PP' оса сваке од ротација из уочене групе Γ. Штавише, због њене коначности, у тој групи постоји и ротација $\phi \neq \varepsilon$ са минималним углом ротације $\theta>0$. Уз то, ако је ψ било која ротација из Γ, за њен угао, на пример ω, постојие цели бројеви s и угао $0 \leq \tau < \theta$ такви да је $\omega = s\theta+\tau$. Како је и $\tau=\omega-s\theta$ угао ротације $\psi\phi^{-1}$ из Γ, ту мора бити $\tau=0$, то јест $\omega=s\theta$. Отуда је и $\psi=\phi^s$, па је та група Γ циклична и реда је n. За $n\geq 3$, таква је, на пример, група ротација било које праве пирамиде чија је основа правилан n-тоугао, и која за $n=3$ није и правилна (тетраедар).

Случај три орбите

Сада је $r=3$, и на левој страни у (2) фигуришу тачно три сабирка. При томе је $m_s \geq 2$ за свако s, као и $m_s=2$ за бар једно s. Ово последње зато што би већ и за $m_1=m_2=m_3=3$ лева страна у (2) била већа од десне. На тај начин, ако је ту $m_1 \leq m_2 \leq m_3$, тада мора бити $m_1=2$, па се тако и (2) своди на

$$\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=\frac{1}{2}+\frac{2}{n} \quad (3)$$

Како ту не може бити и $m_2>3$ и $m_3>3$, биће $m_2=2$ или $m_3=3$. Сада из (3) следи да је у првом случају $m_3=\frac{n}{2}$, а тиме и n парно, док је у другом $m_3<6$. Такође је $m_s k_s = n$, па на основу (2) следи да овде могу наступити следеће четири могућности

$r=3$	n	m_1	m_2	m_3	k_1	k_2	k_3	k
(1)	$2m$	2	2	m	m	m	m	$2m+2$
(2)	12	2	3	3	6	4	4	14
(3)	24	2	3	4	12	8	6	26
(4)	60	2	3	5	30	20	12	62

Докажимо, сада, да те групе заиста постоје, као и да је свака од њих одређена једнозначно до на изоморфизам.

1) Пре свега овде је група Γ парног реда $n=2m$ и њено уочено дејство има тачно једну двочлану орбиту, на пример $\Omega_3=\{P,Q\}$. Уз то је стабилизатор $\Sigma_3=\Sigma$ пола P једна подгрупа од Γ реда m, у којој све ротације имају заједничку осу OP. Шта више, према претходном случају, она је циклична и генерисана ротацијом ϕ око осе OP за угао $\frac{2\pi}{m}$. Даље

како орбита $\boldsymbol{\Omega}_3$ садржи и $\phi \boldsymbol{Q}$, биће $\phi \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}$, па је и $\boldsymbol{Q}$ пол ротације ϕ, а тиме и $\boldsymbol{PQ}$ један пречник сфере $\boldsymbol{S}$.

С друге стране, ако је ψ било која од преосталих ротација из $\boldsymbol{\Gamma}$ и $\boldsymbol{A}$ њен пол, из $\psi(\boldsymbol{\Omega}_3) = \boldsymbol{\Omega}_3$ следи да ту мора бити $\psi \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}$ и $\psi \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}$. Отуда је ψ ротација за угао π око осе $\boldsymbol{AO}$ која је ортогонална на $\boldsymbol{PQ}$. То посебно значи да се сви полови из $\boldsymbol{U} \setminus \boldsymbol{\Omega}_3$ налазе на главном кругу сфере $\boldsymbol{S}$ који је ортогоналан на пречник $\boldsymbol{PQ}$.

Наравно тај круг садржи и орбиту $\boldsymbol{\Omega}_1$ пола $\boldsymbol{A}$. Она је реда $\boldsymbol{m}$ и садржи сваку од $\boldsymbol{m}$ тачака

$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_2 = \phi \boldsymbol{A}, ..., \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}} = \phi^{\boldsymbol{m}-1} \boldsymbol{A}$, па је тако и $\boldsymbol{\Omega}_1 = \{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}}\}$. Тиме је и правилан $\boldsymbol{m}$-тоугао $\Pi = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 \cdots \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}}$ инваријантан у односу на све ротације из $\boldsymbol{\Gamma}$, па је $\boldsymbol{\Gamma}$ и подгрупа групе $\boldsymbol{GR}(\Pi)$ свих ротација τ простора $\boldsymbol{E}$ за које је $\tau(\Pi) = \Pi$.

Најзад како се свака ротација тог полинома Π око његове осе симетрије за угао π подудара са његовом рефлексијом у односу на ту осу, биће група $\boldsymbol{GR}(\Pi)$ изоморфна групи $\boldsymbol{GI}(\Pi)$ свих изометрија правилног $\boldsymbol{m}$-тоугла Π у његовој равни $\boldsymbol{E}_2$, а тиме и реда $2\boldsymbol{m}$. Сада из $\boldsymbol{\Gamma} \subset \boldsymbol{GR}(\Pi)$ следи да ту мора важити једнакост,цпа је тако и група $\boldsymbol{\Gamma}$ са назначеним својствима изоморфна диједарској групи $\boldsymbol{D}_{2\boldsymbol{m}}$.

2) Нека је $\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\}$ једна од орбита реда 4. Према горњој таблици стабилизатор $\boldsymbol{\Sigma}$ пола $\boldsymbol{D}$ је подгрупа од $\boldsymbol{\Gamma}$ реда 3. Она је циклична и генерисана је ротацијом ϕ око осе $\boldsymbol{DO}$ за угао $\dfrac{2\pi}{3}$. Уз то је, заједно са $\boldsymbol{\Omega}$ и троугао $\boldsymbol{ABC}$ инваријантан у односу на ϕ, а тиме и једнакостраничан. И слично за пол $\boldsymbol{C}$ и троугао $\boldsymbol{ABD}$, и тако даље, па је $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ABCD}$ и један правилан тетраедар у простору $\boldsymbol{E}$. Тиме је и група $\boldsymbol{\Gamma}$ садржана у групи $\boldsymbol{GR}(\boldsymbol{T})$ свих ротација ψ простора $\boldsymbol{E}$ који чувају тај тетраедар, при томе је и она реда $\boldsymbol{n} = 12$, па то мора бити и $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{GR}(\boldsymbol{T})$. Јасно је да је ту друга орбита реда 4 симетрична уоченој орбити $\boldsymbol{\Omega}$ у односу на тачку $\boldsymbol{O}$. Стабилизатори њихових тачака садрже тачно 9 ротација из $\boldsymbol{\Gamma}$. Преостале три су ротације за π око оса одређених средиштима наспрамних ивица тетраедра $\boldsymbol{T}$, и њихови полови формирају орбите реда 6.

С друге стране, непосредно следи да свака од тих ротација ϕ индукује и једну парну пермутацију ϕ' скупа $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\}$, као и да је са $\phi \mapsto \phi'$ дефинисан један изоморфизам групе $\boldsymbol{\Gamma}$ на групу свих парних пермутација $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{\Omega}}$, па је тако и $\boldsymbol{\Gamma} \cong \boldsymbol{A}_4$.

3) Пре свега, стабилизатор $\boldsymbol{\Sigma}$ неког пола $\boldsymbol{P}$ је реда 4 , ако и само ако тај пол припада једној орбити реда 6, на пример $\boldsymbol{\Omega}$. Јасно је да тада $\boldsymbol{\Omega}$ садржи и њему дијаметрално супротан пол $\boldsymbol{Q}$. Уз то је $\boldsymbol{PQ}$ оса свих ротација из $\boldsymbol{\Sigma}$, а тиме и $\boldsymbol{\Sigma} = \{\varepsilon, \phi, \phi^2, \phi^3\}$, где је ϕ ротација за угао $\dfrac{2\pi}{4}$.

Отуда, ако је $\boldsymbol{A}$ било који од преосталих полова из $\boldsymbol{\Omega}$, као и у (1) следи да

су тачке $A, B = \phi A, C = \phi^2 A, D = \phi^3 A$ темена једног, квадрата у коме су AC и BD пречници сфере S ортогонални на пречнику PQ. Тиме су у полиједру $O = PABCDQ$ све пљосни једнакостранични троуглови, па је он и правилан октаедар, чија је група ротација $G = GR(O)$ садржи Γ. Штавише, како је и она реда 24, ту мора бити и $\Gamma = G$.
Прецизније, стабилизатори полова из орбите Ω садрже тачно 9 правих ротација из G. Даље, права одређена средиштима наспрамних пљосни је оса тачно две ротације из G. Таквих ротација је 4, њихови пресеци са сфером S формирају орбиту реда 8, и оне одређују нових 8 правих ротација из G. Најзад, праве одређене средиштима наспрамних ивица октаедра O су осе тачно по једне праве ротације из G, и њихови полови формирају орбиту реда 12. Уз то је јасно да октаедар O нема других оса симетрије, па је тако и група G реда 1 + 9 + 8 + 6 = 24.
Такође, како су средишта пљосни тог октаедра темена једне коцке, то јест правилног хексаедра K, јасно је да два узајамно дуална правилна полиедра имају исту групу ротација: $GR(O) = GR(K)$. Шта више, ако је $\Delta = \{a, b, c, d\}$ скуп свих дијагонала те коцке, са $\phi \to (\phi a, \phi b, \phi c, \phi d)$ је дефинисан један изоморфизам групе $GR(K)$ на групу S_Δ, па тако у овом случају мора бити и $\Gamma \cong S_4$.
4) Ако таква група Γ постоји, одговарајућа орбита реда 12 садржи тачно оне полове из U чији су стабилизатори реда 5. Самим тим, заједно са полом P, та орбита садржи и њему дијаметрално супротан пол P', и његов стабилизатор је подгрупа $\Sigma = \langle \phi \rangle$ генерисана ротацијим ϕ око осе PP' за угао $\frac{2\pi}{5}$. Ако је A било који од преосталих полова из те орбите Ω, она садржи и сваку од тачака $B = \phi A, C = \phi B, D = \phi C, E = \phi D$, као и њима дијаметрално супротне тачке сфере S. При томе је $\Pi = PABCDE$ пирамида чија је основа $ABCDE$ правилан петоугао, и чије су бочне стране подударни једнакостранични троуглови. Наравно, то важи за сваки пол P из Ω, па је тако Ω и скуп темена једног правилног полиедра I, чије су пљосни једнакостранични троуглови и чијим и у чијим се теменима сустиче тачно по пет ивица. Зовемо га и правилним икосоедром.
Сада је јасно да је сама група Γ подгрупа групе $G = GR(I)$ свих ротација простора E које чувају тај икосоедар. Штавише, и она је реда 60, па је и $\Gamma = G$. Наиме, стабилизатори полова из Ω садрже $6 \cdot (5-1) = 24$ правих ротација. Даље, праве одређене средиштима наспрамнихпљосни су осе тачно по две праве ротације из G, и њихови полови формирају орбиту реда 20. Слично, праве одређене средиштима наспрамних ивица икосоедра I су осе тачно по једне праве ротације из G, и оне одређују орбите реда 30. Уз то је јасно да тај икосоедар нема других оса симетрије, па је тако и група G реда 1 + 24 + 20 + 15 = 60. Такође, средиште пљосни тог икосоедра су темена њему дуалног правилног полиедра D.
Чије су пљосни правилни петоуглови. Зовемо га и правилним додекаедром. При томе је јасно да ти полиедри имају исту групу ротација. Штавише, може се доказати да је она изоморфна и алтернативној групи A_5 (видети наредну примедбу), па тако важи :

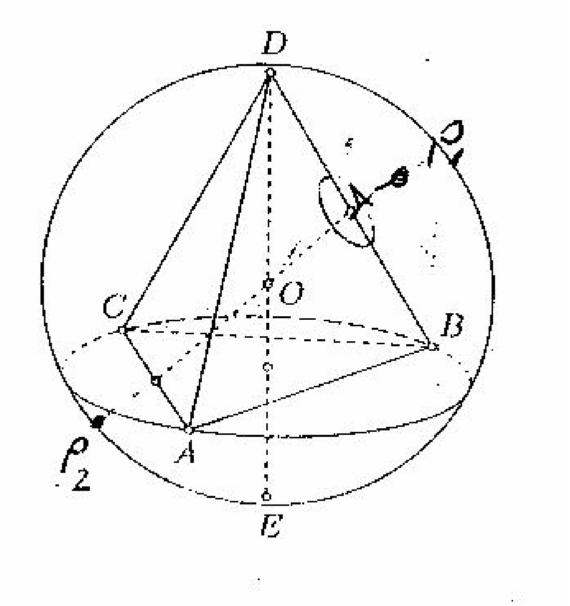
Теорема: Једине коначне групе ротација еуклидског простора $\boldsymbol{E}_3$ су група ротација:

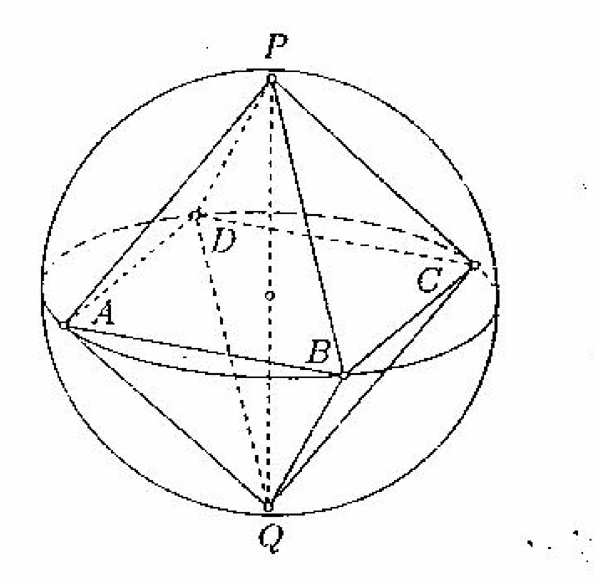
- Правих пирамида чије су основе правилни полигони
- Правилних полигона
- Правилних тетраедара
- Правилних октаедара, односно хексаедара
- Правилних икосоедара, односно додекаедара

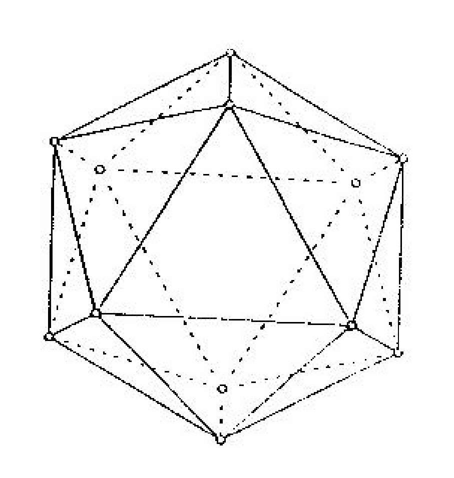
И свака од њих је, тим редом изоморфна тачно једној од цикличних група $\boldsymbol{Z}_n$, диједарских група $\boldsymbol{D}_{2m}$, алтернативне групе $\boldsymbol{A}_4$, симетричне групе $\boldsymbol{S}_4$ и алтернирајуће групе $\boldsymbol{A}_5$.

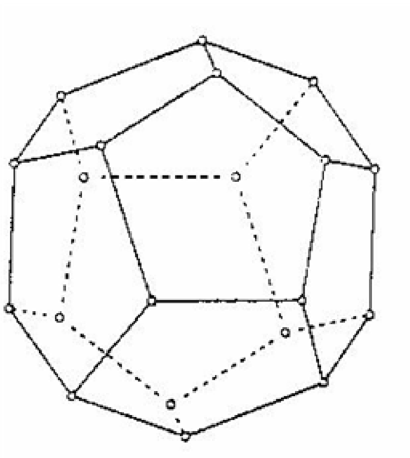
Примедба. Из претходног такође следи да у еуклидском простору постоји тачно пет класа правилних полиедара (наравно до на њихову сличност), као и да су групе ротација сличних полиедара и узајамно конјуговане у групи свих изометрија простора $\boldsymbol{E}_3$.

Такође, може се доказати да је група $\boldsymbol{G}$ правилног икосоедра проста, да има тачно пет Силових подгрупа $\boldsymbol{\Delta}_x$ реда $2^2 = 4$, као и да свако ϕ из $\boldsymbol{G}$ индукује и једну парну пермутацију $\phi'(\Delta_x) = \phi\Delta_x\phi^{-1}$ самог скупа $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_5\}$. Штавише, са $\varphi \mapsto \phi'$ је дефинисан један изоморфизам групе $\boldsymbol{G}$ на групу $\boldsymbol{A}_5$ па је тако $\boldsymbol{G} \cong \boldsymbol{A}_5$.




P
D
C
A
B
Q





VII ТЕОРЕМА ПОЉАЈА

Применом Бернсајдове теореме можемо одредити само број орбита неког скупа, док се о самим орбитама није могло ништа рећи. Овај недостатак у великој нери отклања Пољина теорема. у њој је извршено спајање Бернсајдове теореме и технике пребројавања на бази функције генератрисе.

Техника пребројавања на бази Пољине теореме састоји се у следећем. Посматра се скуп функција $\boldsymbol{R^D}$, тј. скуп свих функција које пресликавају скуп $\boldsymbol{D}$ у скуп $\boldsymbol{R}$. Сва пребројавања се врше над елементима скупа $\boldsymbol{R^D}$, или тачније, над орбтама скупа $\boldsymbol{R^D}$ насталих дејством неке пермутационе групе. Пермутациона група $\boldsymbol{G'}$ која делује на $\boldsymbol{R^D}$ уводи се посредством пермутационе групе $\boldsymbol{G}$ која делује на скуп $\boldsymbol{D}$ на следећи начин: свакој пермутацији $\boldsymbol{g}$ из $\boldsymbol{G}$ одговара пермутација $\boldsymbol{g'}$ из $\boldsymbol{G'}$ таква да важи $\boldsymbol{g'(f) = f \cdot g}$, за свако $\boldsymbol{f}$ из $\boldsymbol{R^D}$. Две функције $\boldsymbol{f_1, f_2}$ из $\boldsymbol{R^D}$ су еквивалентне ако и само ако постоји пермутација $\boldsymbol{g}$ из $\boldsymbol{G}$ таква да важи $\boldsymbol{f_1(d) = f_2(g(d))}$, за свако $\boldsymbol{d}$ из $\boldsymbol{D}$. За произвољну функцију $\boldsymbol{f}$ из $\boldsymbol{R^D}$, $\boldsymbol{o(f)}$ означава њену орбиту, тј. скуп свих функција из $\boldsymbol{R^D}$ које су еквивалентне са $\boldsymbol{f}$.

Скуп свих орбита из $\boldsymbol{R^D}$ означимо са $\boldsymbol{F}$, тј имамо

$$(1) \qquad \boldsymbol{F = \{o(f) \mid f \in R^D\}}$$

Основна идеје примене функције генератрисе, састоји се у томе да се елементима који се пребројавају придружи нека тежина, при чему се међусобно еквивалентним елементима придружују једнаке тежине. Према томе, сада би требало свакој функцији из $\boldsymbol{R^D}$ придружити неку тежину и то такву да све међусобно еквивалентне функције имају исту тежину.. У том циљу нека је најпре сваком елементу $\boldsymbol{r}$ из $\boldsymbol{R}$ придружена тежина $\boldsymbol{w(r)}$. За произвољну функцију $\boldsymbol{f}$ из $\boldsymbol{R^D}$ тежина се уводи преко тежина њених слика, тј важи

$$(2) \qquad \boldsymbol{W(f) = \prod_{d \in D} w(f(d))}.$$

Приметимо да је у овом случају испуњен услов да све међусобно еквивалентне функције имају исту тежину. Наиме, ако су функције $\boldsymbol{f_1}$ и $\boldsymbol{f_2}$ еквивалентне, тада је $\boldsymbol{w(f_1) = \prod_{d \in D} w(f_1(d)) = \prod_{d \in D} f_2(g(d)) =}$ $\boldsymbol{\prod_{d \in D} w(f_2(d)) = w(f_2)}$, јер је $\boldsymbol{g}$ пермутација скупа $\boldsymbol{D}$. Обрнуто у општем случају не важи. Могу постојати и нееквивалентне функције са истим тежинама. Тежина орбите се уводи као тежина било које функције из те орбите, тј. за тежину орбите $\boldsymbol{\psi = o(f)}$ важи

$$(3) \qquad \boldsymbol{w(\psi) = w(f)}$$

Сумирањем тежина појединих елемената добија се тежина скупа коме ти елементи припадају, односно добија се функција генератриса тог скупа. На пример, за тежину скупа $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{D}}$ важи

(4) $$W(\Phi) = \sum_{f \in \Phi} w(f)$$

Нас ће интересовати орбите скупа $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{D}}$, а не елементи. Стога дефинишемо тежину скупа $\boldsymbol{F}$ (Орбита скупа $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{D}}$).

(5) $$W(F) = \sum_{\psi \in F} w(\psi)$$

$W(F)$ је управо функција генератриса која се одређује Пољином теоремом.
Дефинишимо сад још две тежинске функције. С обзиром да је већ дефинисана тежина сваког елемента из $\boldsymbol{R}$, то за тежину скупа $\boldsymbol{R}$ важи

(6) $$W(R) = \sum_{r \in R} w(r).$$

Ако у (6) уместо $w(r)$ ставимо $w(r)^k$, где је k фиксни број, тад се функцијс генератриса

(7) $$W_k(R) = \sum_{r \in R} w(r)^k$$

назива функција генератриса $k -$ тих момената скупа $\boldsymbol{R}$.
Уведимо још појам циклусног индекса неке пермутационе групе
Дефиниција: Нека је G пермутациона група степена m, а $t_1, t_2, \ldots, t_m$ промењљиве. Полином

(8) $$Z_G(t_1, t_2, \ldots, t_m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} t_1^{k_1(g)} \cdot t_2^{k_2(g)} \cdots t_m^{k_m(g)},$$

Где је $k_i(g)$ број циклуса у пермутацији g чија је дужина $i\ (i = 1, 2, \ldots, m)$, назива се полином циклусног индекса пермутационе групе. Из облика (8) може се прећи и на облик

(9)
$$Z_G(t_1, t_2, \ldots, t_m) = \frac{1}{|G|} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \cdots \sum_{k_m} N_{k_1, k_2, \ldots, k_m} t_1^{k_1} \cdot t_2^{k_2} \cdots t_m^{k_m}$$

Где је $N_{k_1, k_2, \ldots, k_m}$ број пермутација из G које имају k_i циклуса дужине $i\ (i = 1, 2, \ldots, m)$. Сумирање у (9) се врши по свим $m -$торкама $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ за које важи $\sum_{i=1}^{m} i \cdot k_i = m$.

Оһигледно да све међусобно изоморфне пермутационе групе истог степена имају једнаке полиноме циклусног индекса. Обрнуто не важи.
Полиноми циклусног индекса за неке пермутационе групе су:

1) - цикличне групе реда n
2) функција $\phi(k)$ ознаке $Z_{I_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = t_1^n$ - јединичне групе

3) $Z_{C_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\frac{1}{n}\sum_{k|n}\phi(k)t_k^{\frac{n}{k}}$ представља број природних

бројева мањих од k који су релативно прости са k.

4) $$Z_{D_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\frac{1}{2n}\sum_{k|n}\phi(k)t_k^{\frac{n}{k}}+\begin{cases}\frac{1}{4}\left(t_1^2\cdot t_2^{\frac{n}{2}-1}+t_2^{\frac{n}{2}}\right) & n\equiv 0\,\mathbf{mod}(2)\\ \frac{1}{2}\cdot t_1\cdot t_2^{\frac{n-1}{2}} & n=1\,\mathbf{mod}(2)\end{cases}$$

за диједарску групу реда n

функција $\phi(k)$ означава број природних бројева мањих

од k који су релативно прости са k.

5) $$Z_{A_n}(t_1,t_2,\ldots,t_m)=\sum_{k_1}\sum_{k_2}\cdots\sum_{k_m}\frac{1+(-1)^{n-\sum_{i=1}^{n}k_i}}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_n!\cdot 1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdots n^{k_n}}t_1^{k_1}\cdot t_2^{k_2}\cdots t_m^{k_m}$$

за алтернативну групу и $\sum_{i=1}^{n}i\cdot k_i=n$

6) $$Z_{S_n}(t_1,t_2,\ldots,t_m)=\sum_{k_1}\sum_{k_2}\cdots\sum_{k_m}\frac{1}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_n!\cdot 1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdots n^{k_n}}t_1^{k_1}\cdot t_2^{k_2}\cdots t_m^{k_m}$$

за симетричну групу и $\sum_{i=1}^{n}i\cdot k_i=n$.

Пољина теорема прецизира везу која постоји између функције генератрисе за орбите F скупа R^D и функција генератриса пермутационе групе G.

Теорема: Функција генератриса за орбите F дата је са

(10) $$W(F)=Z_G(W_1(R),W_2(R),\ldots,W_m(R)),$$

где је m кардиналан број скупа D, тј. степен пермутационе групе G.

Доказ: Полазећи од (5), груписањем свих чланова са истим тежинама, добијамо

(11) $$W(F)=\sum_{W}p_w w$$

Где је p_w број орбита са тежином w, а сумирање у (11) се врши по тежинама орбита из R^D, тј. елемената из F. Са R_W^D означимо све функције из R^D које имају тежину w. У скупу R_W^D укључене су као подскупови и све орбите из R^D чија је тежина w. Даље, нека је $I_W(g)$ ознака за број функција из R_W^D које су инваријантне у односу на произвољну пермутацију g из G. Применом Бернсајдове теореме следи

(12) $$p_w=\frac{1}{|G|}\sum_{g}I_w(g)$$

Одавди и из (11) добијамо

$$(13)\qquad W(F)=\frac{1}{|G|}\sum_{w}\sum_{g} I_w(g)w$$

Или после измене редоследа сумирања

$$(14)\qquad W(F)=\frac{1}{|G|}\sum_{g}\left(\sum_{w} I_w(g)w\right).$$

Нека је f произвољњ функција из R^D која је инваријантна у односу на g и чија је тежина w. Да би боље сагледали како пермутација g делује на f, извршимо декомпозицију пермутације g на дисјунктне циклусе, тј. нека је $g = g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_t$. Тако је $D = D_1 + D_2 + \cdots + D_t$ партиција скупа D индукована декомпозицијом пермутације г; циклус g_s одговара скупу D_s $(s = 1,2,\ldots,t)$.Како за свако d из D важи $f(d) = f(g(d))$, то за d из D_s важи $f(d) = f(g_s(d)) = f(g_s^2(d)) = \ldots$, другим речима, функција f мора бити константна на сваком од скупова D_s, тада је она инваријантна у односу на g. Према томе, да би се добила било која функција инваријантна у односу на g, а тежине w, довољно је за свако $s = 1,2,\ldots,t$ све елементе скупа D_s пресликавати у тачно један елемент скупа R, рецимо r_s, тако да је

$$w=\prod_{s=1}^{t} w(r_s)^{|D_s|}$$

Одавде следи, да коефицијенти уз w производа

$$(15)\qquad \prod_{s=1}^{t}\left(\sum_{r} w(r)^{|D_s|}\right)$$

Управо једнак броју функција инваријантних у односу на g, а тежине w. Заменом (15) у (14) добијамо

$$(16)\qquad W(F)=\frac{1}{|G|}\sum_{g}\left(\prod_{s=1}^{t}\left(\sum_{r} w(r)^{|D_s|}\right)\right).$$

Узимајући да $k_1(g)$ (као у дефиницији 1) означава број циклуса дужине i у пермутацији g из (16) следи

$$(17)\qquad W(F)=\frac{1}{|G|}\sum_{g}\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{r} w(r)^{i}\right)^{k_i(g)}$$

Односно

$$(18)\qquad W(F)=\frac{1}{|G|}\sum_{g}\prod_{i=1}^{m} W_i(R)^{k_i(g)}$$

Одавде непосредно излази (10).Овим је теорема доказана. ■

У конкретним разматрањима обично се за тежине елемената из $\boldsymbol{R}$ узимају неке променљиве. У случају да је $\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{n}}\}$, тада можемо узети да је $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}})=\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}$ (најчешће се узима да је $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}_1)=1$, тако да уместо $\boldsymbol{n}$ имамо $\boldsymbol{n}-1$ променљиву). Сада из (2) следи да је тежина било које функције дата са $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{f})=\prod_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{i}}}$, где је $\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{i}}$ број елемената из $\boldsymbol{D}$ који се пресликавају у $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}$, тј. $\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{i}}=\left|\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}})\right|$. Према (3), исту тежину ће имати и орбита која садржи функцију $\boldsymbol{f}$. Из (7) следи $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{R})=\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{k}}$, тако да се сада заменом у (109 добија

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}}\left(\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}},\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^{2},\ldots,\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{m}}\right) \tag{19}$$

Коефицијент у (19) уз $\prod_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{i}}}$ даје управо број међусобно нееквивалентних функција таквих да се $\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{i}}$ елемената из $\boldsymbol{D}$ пресликавају у елемент $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}$ из $\boldsymbol{R}$.

Из Пољине теореме као последицу имамо да је број орбита(скупа $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{D}}$), дат са

$$\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}}(|\boldsymbol{R}|,|\boldsymbol{R}|,\ldots,|\boldsymbol{R}|) \tag{20}$$

Разматране су многе генерализације Пољине теореме, на пример Де Број је посматрао случај када не само на скуп $\boldsymbol{D}$, већ и на $\boldsymbol{R}$ делује пермутациомнагрупа. Другим речима, тада имамо пермутационе групе $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{H}$ од којих прва делује на скуп $\boldsymbol{D}$, а друга на скуп $\boldsymbol{R}$. Две функције $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ из $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{D}}$ су еквивалентне ако постоје пермутације $\boldsymbol{g}$ из $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{h}$ из $\boldsymbol{H}$, такве да за свако $\boldsymbol{d}$ из $\boldsymbol{D}$ важи $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{d})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{d})))$.

Као што смо могли видети познавањем полинома циклусног индекса неке пермутационе групе задатак пребројавања је начелно решен. Нажалост, проблем одређивања полинома циклусног индекса је у општем случају доста компликован. Једну олакшицу пружа могућност рекрузивног генерисања полинома циклусног индекса у случају да су познати полиноми циклусног индекса појединих група из којих се рекрузивном процедуром добија посматрана група. Генерално гледано, многи проблеми везани за примену Пољине теореме решавају се помоћу рачунара.

VIII ПРИМЕНА ПОЉИНЕ ТЕОРЕМЕ У ПРИМЕРУ БОЈЕЊА ТЕМЕНА КВАДРАТА СА ДВЕ БОЈЕ

Сада излажем све предходно изнето, на примеру бојења темена квадрата са две боје. Ако посматрамо бојење квадрата са две боје, за сваку пермутацију $p \in G$, можемо да приозведемо пермутацију p' између бојења, где је $p'(b_i) = b_j$, ако је b_j бојење добијено када се квадрат са бојењем b_i трансформише преко пермутације p. На пример $p_2'(b_1) = b_2$ или $p_1'(b_{11}) = b_{12}$. Ради једноставности ознаком p ћемо представљати и пермутације темена, као и пермутацију бојења.
Уводимо релацију ρ на скупу свих бојења $b_i \rho b_j \Leftrightarrow (\exists p \in G)(p(b_i) = b_j)$ дакле два бојења су еквивалентна ако постуји пермутација из задане групе којом једно бојење преводи у друго.
Још раније наведену теорему , интерпретирам је опет, али сад уже, прико бојења.

Теорема: Нека је K скуп свих бојења на скупу S, а G скуп свих пермутација над S. Нека је ρ релација над K за коју важи $b_i \rho b_j$ уколико постоји пермутација $p \in G$ таква да је $p(b_i) = b_j$. Овако дефинисана релација је релација еквиваленције.

Доказ: Како је идентично пресликавање тј. пермутација $p_1 \in G$ то је $p_1(b_i) = b_i$ па је $b_i \rho b_i$, дакле релација ρ јесте рефлексивна. Пошто је скуп пермутација G група, то за сваку пермутацију $p \in G$ постоји њој инверзна пермутација $p^{-1} \in G$, па имамо да из релације
$b_i \rho b_j$ следи да је $p(b_i) = b_j$, а одавде $b_i = p^{-1}(b_j)$ па је $b_j \rho b_i$, дакле релација ρ је и симетрична. Транзитивност следи из затворености производа две пермутације тј. $p \circ \overline{p} \in G$ за сваке две пермутације p и $\overline{p}$ из G. Дакле имамо из $b_i \rho b_j$ и $b_j \rho b_k$ да је $p(b_i) = b_j$ као и $\overline{p}(b_j) = b_k$ одакла је $\overline{p}(p(b_i)) = b_k$ или $\overline{p} \circ p(b_i) = b_k$ тј. $\overline{\overline{p}}(b_i) = b_k$ коначно $b_i \rho b_k$ што доказује транзитивност релације ρ. Крај доказа теореме. ■

Сад се задатак налажења свих нееквивалентних бојења своди на одређивање броја класа еквиваленција, овако дефинисане релације, јер су сва бојења унутар једне класе еквивалентна.
Слично у примеру округлог стола око којег седи n људи. Сматрамо да су два распореда седења иста, ако свако са своје леве и десне стране има исте особе. Према томе постоји n

Ротација које испуњавају овај услов, тј. дају исти распоред (ротација за $k \cdot \frac{360°}{n}, k = 0,1,\ldots,n-1$ Симетрије се не разматрају јер ће бити замењене особе са леве и десне стране. Укупан број распореда седења је $n!$, а нееквивалентних је $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ Дакле свака класа еквиваленције има n елемената, а укупан број класа еквиваленција је $(n-1)!$. Ако би овај прблем повезали са бојењем, можемо сматрати да свака особа представља теме правилног $n-$тоугла различите боје.
Из ових примера можемо видети да класе еквиваленције нису увек истобројне. Такође можемо приметити да неке пермутације не мењају нека бојења, тј. остављају их фиксним.

Дефиниција: Стабилизатор бојења b представља скуп свих пермутација у G које то бојење оставља фиксним тј. непромењеним. $G_b = \{p \in G : p(b) = b\}$.

Теорема: За фиксно бојење b, стабилизатор G_b представља подгрупу групе пермутација G.

Доказ: Докажимо прво затвореност производа пермутацију у скупу G_b. Нека су p_i и p_j две пермутације из скупа G_b, тад из услова $p_i(b) = b$ и $p_j(b) = b$, добијамо $p_i \circ p_j(b) = p_i(p_j(b)) = \quad p_i(b) = b$. Неутрални елемент је идентична пермутације p_1, јер је за свако бојење b_i је $p_1(b_i) = b_i$. Важи закон асоцијације, јер је свака пермутација неко пресликавање, а производ пресликавања је асоцијатевно, па је и производ пермутација асоцијативан. И на крају покажимо да свака пермутација из G_b има инверзну пермутацију у истом том скупу. Како је $b = p_1(b) = p^{-1} \circ p(b) = p^{-1}(p(b)) = p^{-1}(b)$ према томе за сваку пермутацију $p \in G_b$ имамо $p^{-1} \in G_b$. Тиме је доказано да је G_b група, тј подгрупа групе G. ■

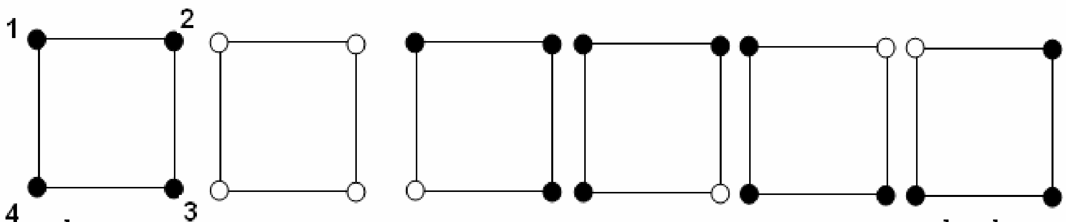
Теорема : Нека су b и b' два бојења из исте класе еквиваленције. Тада је број пермутација у G које пресликавају b у b' једнак $|G_b|$

Доказ: Нека је $p_0(b) = b'$ и $p(b) = b$. Тад је $p_0 \circ p(b) = p_0(p(b)) = p_0(b) = b'$. Према томе ако фиксирамо пермутацију p_0 тад за свако $p \in G_b$ тј $p(b) = b$ имамо да је укупан број пермутациј а $p_0 \circ p$ које пресликавају бојење b у бојење b'.

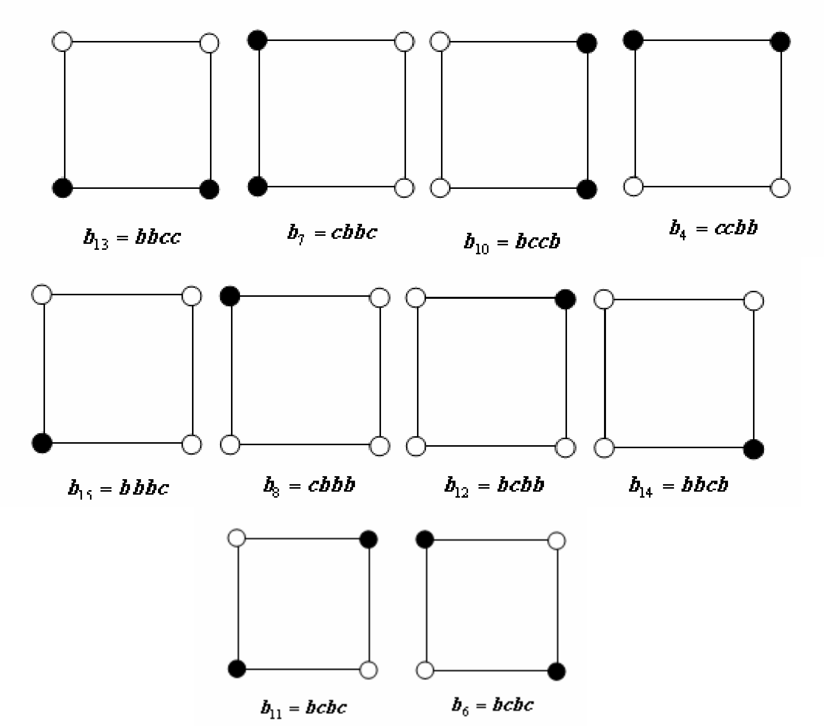
Нека је $f(p) = p_0 \circ p.$, за сваку пермутацију p такву да је $p(b) = b$, Тада f пресликава сваку пермутацију која слика b у b, пресликава у пермутацију која пресликава b у b'. Даље, ако су p' и p'' пресликавања која пресликавају b у b и $p_0 \circ p' = f_1 = f_2 = p_0 \circ p''$ тада је $p_0^{-1} \circ (p_0 \circ p') = p_0^{-1} \circ (p_0 \circ p'')$ па је $\left(p_0^{-1} \circ p_0\right) \circ p' = \left(p_0^{-1} \circ p_0\right) \circ p''$ па имамо $p_1 \circ p' = p_2 \circ p''$ односно $p' = p''$. Према томе f је 1-1 пресликавање. Нека је p пресликавање које које слика b у b'. Тада је $f\left(p_0^{-1} \circ p\right) = p_0 \circ \left(p_0^{-1} \circ p\right) = \left(p_0 \circ p_0^{-1}\right) \circ p = p_1 \circ p = p$, где је p_1 идентична пермутације. Тиме је доказано да је f ″ на ″- пресликавање, дакле f је обострано једнозначно пресликавање. Тиме доказујемо да је број пресликавања којим се слика b у b' једнак броју пермутација које пресликавају b у b. Према томе, ако су b' и b'' оба бојења у истој класи еквиваленције E као и бојење b, тад је број пермутација које пресликавају b у b' једнак броју пермутација које сликају b у b', односно G_b. Овај број се назива количником скупа еквиваленције E. Одатле добијамо $|G_b| \cdot |E| = |G|$. Ово такође можемо да напишемо као $|G| = \sum_{b \in E} |G_b|$. Тако да ако је N број класа еквиваленције, тада је $N \cdot |G| = \sum_{E} \sum_{b \in E} |G_b| = \sum_{b \in K} |G_b|$ где је K скуп свих бојења. Према томе, скуп свих различитих бојења, то јест, број N класа еквиваленција, дат је са $N = \dfrac{\sum_{b \in K} |G_b|}{|G|} = \dfrac{1}{|G|} \sum_{b \in K} |G_b|$.

За сваку пермутацију p, нека је $\varphi(p)$ једнак броју бојења које p оставља фиксним. Уочимо да ако за свако бојење пронађемо број пермутација које то бојење остављају фиксном и пронађемо ову суму над свим бојењима, добијамо исти резултат као кад проналазимо број бојења које сваку пермутацију остављају фиксном. Сумирање над скупом ових пермутација према томе даје $\sum_{b \in K} |G_b| = \sum_{p \in G} \varphi(p)$ и $N = \dfrac{1}{|G|} \sum_{b \in K} |G_b| = \dfrac{1}{|G|} \sum_{p \in G} \varphi(p)$ што представља резултат Бернсајдове леме: Ако је K скуп свих бојења над скупом S, G група пермутација на скупу S и N број класа еквиваленције (тј. број различитих бојења) тада је $N = \dfrac{1}{|G|} \sum_{b \in K} |G_b| = \dfrac{1}{|G|} \sum_{p \in G} \varphi(p)$.

Посматрајмо све ово изложено на већ споменутом примеру бојења квадрата са 2 боје



$b_1 = cccc$ $b_{16} = bbbb$ $b_2 = cccb$ $b_3 = ccbc$ $b_5 = cbcc$ $b_9 = bccc$


$b_{13} = bbcc$
$b_7 = cbbc$
$b_{10} = bccb$
$b_4 = ccbb$
$b_{15} = bbbc$
$b_8 = cbbb$
$b_{12} = bcbb$
$b_{14} = bbcb$
$b_{11} = bcbc$
$b_6 = bcbc$

При чему се сматрају еквивалентним бојењима сва она која се добијају ротацијом квадрата
$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_{90^\circ}$ и кое се може представити пермутацијом $\boldsymbol{p}_2 = (2341)$
$\boldsymbol{R}_{21} = \boldsymbol{R}_{180^\circ}$ и кое се може представити пермутацијом $\boldsymbol{p}_3 = (3412)$
$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_{270^\circ}$ и кое се може представити пермутацијом $\boldsymbol{p}_4 = (4123)$
Затим две симетрије у односу на симетрале страница и две у односу на дијагонале
$\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}_{12}$ и кое се може представити пермутацијом $\boldsymbol{p}_8 = (2143)$
$\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_{23}$ и кое се може представити пермутацијом $\boldsymbol{p}_7 = (4321)$
$\boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{S}_{13}$ и кое се може представити пермутацијом $\boldsymbol{p}_5 = (3214)$
$\boldsymbol{S}_4 = \boldsymbol{S}_{24}$ и кое се може представити пермутацијом $\boldsymbol{p}_6 = (1432)$
Као и идентично пресликавање $\boldsymbol{I}$ а које се представља пермутацијом $\boldsymbol{p}_1 = (1234)$ Ова пресликавања тј. пермутације чине окталну групу

$\boldsymbol{p}_i \circ \boldsymbol{p}_j$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_8$
$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_8$
$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_5$
$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_7$
$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_6$
$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_2$
$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_4$
$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_3$
$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_1$

Таблицу бојења темена квадрата са две боје добијамо

	p_1 1234	p_2 2341	p_3 3412	p_4 4123	p_5 3214	p_6 1432	p_7 4321	p_8 2143	$p(b_i)=b_i$
$b_1 = cccc$	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	8
$b_2 = cccb$	b_2	b_3	b_5	b_9	b_2	b_5	b_9	b_3	2
$b_3 = ccbc$	b_3	b_5	b_9	b_2	b_9	b_3	b_5	b_2	2
$b_4 = ccbb$	b_4	b_7	b_{13}	b_{10}	b_{10}	b_7	b_{13}	b_4	2
$b_5 = cbcc$	b_5	b_9	b_2	b_3	b_5	b_2	b_3	b_9	2
$b_6 = cbcb$	b_6	b_{11}	b_6	b_{11}	b_6	b_6	b_{11}	b_{11}	4
$b_7 = cbbc$	b_7	b_{13}	b_{10}	b_4	b_{13}	b_4	b_7	b_{10}	2
$b_8 = cbbb$	b_8	b_{15}	b_{14}	b_{12}	b_{14}	b_8	b_{15}	b_{12}	2
$b_9 = bccc$	b_9	b_2	b_3	b_5	b_3	b_9	b_2	b_5	2
$b_{10} = bccb$	b_{10}	b_4	b_7	b_{13}	b_4	b_{13}	b_{10}	b_7	2
$b_{11} = bcbc$	b_{11}	b_6	b_{11}	b_6	b_{11}	b_{11}	b_6	b_6	4
$b_{12} = bcbb$	b_{12}	b_8	b_{15}	b_{14}	b_{12}	b_{15}	b_{14}	b_8	2
$b_{13} = bbcc$	b_{13}	b_{10}	b_4	b_7	b_7	b_{10}	b_4	b_{13}	2
$b_{14} = bbcb$	b_{14}	b_{12}	b_8	b_{15}	b_8	b_{14}	b_{12}	b_{15}	2
$b_{15} = bbbc$	b_{15}	b_{14}	b_{12}	b_8	b_{15}	b_{12}	b_8	b_{14}	2
$b_{16} = bbbb$	b_{16}	b_{16}	b_{16}	b_{16}	b_{16}	b_{16}	b_{16}	b_{16}	8
$\varphi(p)$	16	2	4	2	8	8	4	4	48/6

Примена Бернсајдове теореме, у општем случају, има уочљив недостатак. Наиме за групу великог реда потребно је је за сваку њену пењрмутацију наћи број фиксних тачака. Са порастом реда групе , рачунање постаје напорно. Нешто мало упрошћење представња деловање конјугованом групом, јер имају исту цикличну структуру као и почетна група, па према томе те конјуговане групе имају исти број фиксних тачака. На основу теореме: Нека је $p = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1k_1})(a_{21}, a_{22}, ..., a_{2k_2})...(a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nk_n})$ произвољна пермутација. Тада за пермзтацију $q = \alpha p \alpha^{-1}$, такозвану конјуговану пермутацију пермутације p, важи

$$q = (\alpha(a_{11}), \alpha(a_{12}), ..., \alpha(a_{1k_1}))(\alpha(a_{21}), \alpha(a_{22}), ..., \alpha(a_{2k_2}))...(\alpha(a_{n1}), \alpha(a_{n2}), ..., \alpha(a_{nk_n}))$$

Стога се уместо сумирања по свим пермутацијама, може сумирати по класама конјугованости. То значи да до истог резултата можемо доћи применом само ротација квадрата. У нашем случају класу конјугованости добијамо од пермутација $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4\}$ јер је $\boldsymbol{p_i} \circ \boldsymbol{p}_1 \circ \boldsymbol{p_i}^{-1} \in \boldsymbol{K},\ \boldsymbol{p_i} \in \boldsymbol{G}; \cdots; \boldsymbol{p_i} \circ \boldsymbol{p}_4 \circ \boldsymbol{p_i}^{-1} \in \boldsymbol{K},\ \boldsymbol{p_i} \in \boldsymbol{G};$

$\boldsymbol{p_i} \circ \boldsymbol{p_j}$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_8$
$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_8$
$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_5$
$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_7$
$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_6$
$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_2$
$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_4$
$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_3$
$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_8$	$\boldsymbol{p}_6$	$\boldsymbol{p}_7$	$\boldsymbol{p}_5$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_1$

Тако да добијамо исти резултат када узмемо подгрупу

$\boldsymbol{p_i} \circ \boldsymbol{p_j}$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$
$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$
$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_1$
$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_3$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$
$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_4$	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$

Што после дејства овом групом на скуп бојења, добијамо следећу табелу

	p_1 1234	p_2 2341	p_3 3412	p_4 4123	$p(b_i)=b_i$
$b_1=cccc$	b_1	b_1	b_1	b_1	8
$b_2=cccb$	b_2	b_3	b_5	b_9	2
$b_3=ccbc$	b_3	b_5	b_9	b_2	2
$b_4=ccbb$	b_4	b_7	b_{13}	b_{10}	2
$b_5=cbcc$	b_5	b_9	b_2	b_3	2
$b_6=cbcb$	b_6	b_{11}	b_6	b_{11}	4
$b_7=cbbc$	b_7	b_{13}	b_{10}	b_4	2
$b_8=cbbb$	b_8	b_{15}	b_{14}	b_{12}	2
$b_9=bccc$	b_9	b_2	b_3	b_5	2
$b_{10}=bccb$	b_{10}	b_4	b_7	b_{13}	2
$b_{11}=bcbc$	b_{11}	b_6	b_{11}	b_6	4
$b_{12}=bcbb$	b_{12}	b_8	b_{15}	b_{14}	2
$b_{13}=bbcc$	b_{13}	b_{10}	b_4	b_7	2
$b_{14}=bbcb$	b_{14}	b_{12}	b_8	b_{15}	2
$b_{15}=bbbc$	b_{15}	b_{14}	b_{12}	b_8	2
$b_{16}=bbbb$	b_{16}	b_{16}	b_{16}	b_{16}	8
$\varphi(p)$	16	2	4	2	24/4=6

+

Циклусни индекс

Ако сваку пермутацију представимо у облику производа циклова нпр $p_7=4321=(14)(23)$ и при томе бојење у неком циклусу остаје неизмењено , боја сваког елемента (темена) мора да буде иста као боја следећег елемента у кој се он пресликава. Према томе сви елементи једног цикла морају бити исте боје. Тако на пример за пермутацију $p_7=(14)(23)$ са два циклуса постоји 4 могућности тј фиксног бојења са две боје која, теме 1 и 4 боји са две боје, а темена 2 и 3 такође са две боје , што даје следећа 4 бојења: $b_1=cccc$, $b_{16}=bbbb$, $b_7=cbbc$, $b_{10}=bccb$. Како за сваки циклус постоје две могућности за избор боје, то је укупан број бојења који остаје исти применом пермутације p је $2^{Cy(p)}$, где је $Cy(p)$ број циклуса у пермутацији p, укључујићи и циклусе дужине 1. За представљање структуре циклуса користимо ознаку, где је n број циклуса дужине m .Као што је већ споменуто , да би смо пронашли број бојења која остају фиксна по примени неке пермутације p , треба да израчунамо $2^{Cy(p)}$ где је $Cy(p)$

број циклуса у пермутацији $\boldsymbol{p}$. Тад израчунамо суму над свим пермутацијама како би смо пронашли $\sum_{p\in G}\varphi(p)$.

Други начин јесте да се узме циклична форма и узме за сваки циклус број боја (у нашем случају то је 2). На пример $p_7=(14)(23)=c_2c_2=c_z^2=2^2=4$ па онда онда израчунамо збир $\sum_{p\in G}\varphi(p)$.

Трећа метода јесте да се за сваку пермутацију нађе њена циклична форма

$p_1=(1)(2)(3)(4)=c_1^4$

$p_2=(1234)=c_4$

$p_3=(13)(24)=c_2^2$

$p_4=(1432)=c_4$

$p_5=(13)(2)(4)=c_1^2c_2$

$p_6=(1)(24)(3)=c_1^2c_2$

$p_7=(14)(23)=c_2^2$

$p_8=(12)(34)=c_2^2$

па онда саберу цикличне форме тј за наш пример добијамо

$c_1^4+2c_4+2c_1^2c_2+3c_2^2$ који називамо полином циклусног индекса или краће циклусни индекс, ако тај збир поделимо редом групе $Z(c_1,c_2,c_3,c_4)=\frac{1}{|G|}(c_1^4+2c_4+2c_1^2c_2+3c_2^2)$, па за сваки циклус ставимо вредност 2, добијамо $2^4+2\cdot2+2\cdot2^2\cdot2+3\cdot2^2=16+4+16+12=48$. Ако сад тај број поделимо бројем пермутацја, добијамо број нееквивалентних бојења.

$$\frac{1}{|G|}\sum_{p\in G}\varphi(p)=\frac{48}{8}=6, \text{ тј. } Z(2,2,2,2)=\frac{1}{|8|}(2^4+2\cdot2+2\cdot2^2\cdot2+3\cdot2^2)=6$$

У општем случају за m боја добијамо нееквивалентних бојења темњна квадрата укупно

$$Z(m,m,m,m)=\frac{1}{8}(m^4+2m+2m^3+3m^2).$$

Примена Пољине теореме

У предходном излагању смо видели да се применом Бернсајдове теореме може одредити само број орбита, тј. нееквивалентних бојења, док се о самим орбитама (њиховој кардиналности) није могло ништа рећи. Овај недостатак отклања Пољина теорема. У њој је на својствен начин извршено спајање Бернсадове теореме и технике пребројавања на бази функција генератрисе.

Размотримо сад структуру бојења за сваки циклус:

Најпре размотримо дејство пермутације представљених са четири циклуса дужине 1,

$p_1=(1)(2)(3)(4)=c_1^4$ тад имамо следеће следећих 16 случајева

$cccc, cccb, ccbc, ccbb, cbcc, cbcb, cbbc, cbbb, bbbb, bbbc, bbcb, bbcc, bcbb, bcbc, bccb, bccc$

или у облику $c^4+4c^3b+6c^2b^2+4cb^3+b^4=(b+c)^4$, до ког смо могли доћи и следећим резоновањем. Циклус дужине 1 може битти обојен само на један начин бојом b или c, а пошто имамо четири таква циклуса , све могућности бојења су изражене формулом $(b+c)^4$

$p_2=(1234)=c_4$ и $p_4=(1432)=c_4$ сад имамо две могућности јер сва четири темена морају бити исто обојена са b или c бојом, $bbbb=b^4$, $cccc=c^4$ што можемо представити са форомулом b^4+c^4. Следеће пермутације $p_3=(13)(24)=c_2^2$, $p_7=(14)(23)=c_2^2$, $p_8=(12)(34)=c_2^2$ даје следеће случајеве $cccc, ccbb, bbbb, bbcc$ или формулу $b^4+2b^2c^2+c^4=(b^2+c^2)^2$. И на крају $p_5=(13)(2)(4)=c_1^2c_2$ и $p_6=(1)(24)(3)=c_1^2c_2$, дају случајеве $cccc, ccbc, cbcb, cbbb, bbbb, bbcb, bccc, bcbc$ или формулом $b^4+2c^3b+2c^2b^2+2cb^3+b^4=(b+c)^2(b^2+c^2)$.

Можемо уопштити резултат па за n циклуса дужине m тј c_m^n тад се бојење тих циклуса може представити формулом $(b^m+c^m)^n$ јер се n циклуса могу бојити или са b или са c, дакле

B^kC^{n-k} представља случај када је k циклуса обојено са b, а остали са c. Број начина на који се може овако изабраног бојења једнак је броју начина да се од n циклуса изабере k, што је једнако $\binom{n}{k}$. Према томе сматраћемо да $\binom{n}{k}B^kC^{n-k}$ представља бојења за k циклуса обојених у бело и $n-k$ циклуса обојених у бело. Али овај израз представља члан развијеног бинома $(B+C)^n$, јер сва бојења цилуса добијамо сабирањем свих тих чланова за $k=0,1,2,...,n$. Према томе бојење циклуса c_m^n представљамо формулом $(B+C)^n$. Како се свако бојење циклуса састоји од m елемената (темена) стављамо да је $B = b^m$ и $C = c^m$. Према томе, наша формула за c_m^n описана је формулом $(b^m + c^m)^n$.

Тако да за бојење четвороугла са две боје добијамо следећу структуру бојења

пермутације	Структура циклуса	Структура фиксних бојења	
$p_1 = (1)(2)(3)(4)$	c_1^4	$(b+c)^4$	$c^4 + 4c^3b + 6c^2b^2 + 4cb^3$
$p_2 = (1234)$	c_4	$b^4 + c^4$	$b^4 + c^4$
$p_3 = (13)(24)$	c_2^2	$(b^2 + c^2)^2$	$b^4 + 2b^2c^2 + c^4$
$p_4 = (1432)$	c_4	$b^4 + c^4$	$b^4 + c^4$
$p_5 = (13)(2)(4)$	$c_1^2c_2$	$(b+c)^2(b^2 + c$	$b^4 + 2c^3b + 2c^2b^2 + 2cb^3$
$p_6 = (1)(24)(3)$	$c_1^2c_2$	$(b+c)^2(b^2 + c$	$b^4 + 2c^3b + 2c^2b^2 + 2cb^3$
$p_7 = (14)(23)$	c_2^2	$(b^2 + c^2)^2$	$b^4 + 2b^2c^2 + c^4$
$p_8 = (12)(34)$	c_2^2	$(b^2 + c^2)^2$	$b^4 + 2b^2c^2 + c^4$
$Z(c_1, c_2, c_3, c_4) = \frac{1}{8}(c_1^4 + 2c_1^2c_2 + 3c$		$\frac{1}{8}(8b^4 + 8b^3c + 16b^2c^2 + 8bc^3 + 8c^4) =$ $b^4 + b^3c + 2b^2c^2 + bc^3 + c^4$	

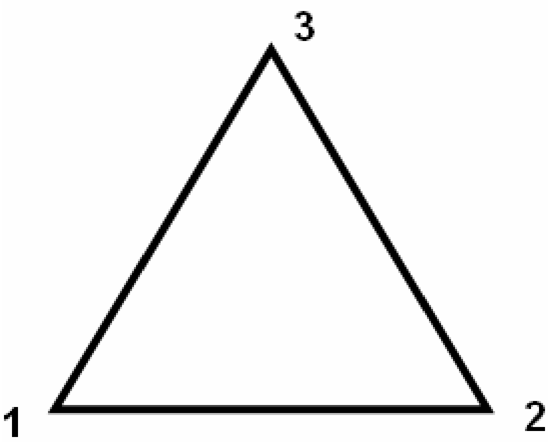
У случају конјуговане класе $K = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ добијамо следећу табелу

пермутације	Структура циклуса	Структура фиксних бојења	
$p_1 = (1)(2)(3)(4)$	c_1^4	$(b+c)^4$	$c^4 + 4c^3b + 6c^2b^2 + 4cb^3 + b^4$
$p_2 = (1234)$	c_4	$b^4 + c^4$	$b^4 + c^4$
$p_3 = (13)(24)$	c_2^2	$(b^2 + c^2)^2$	$b^4 + 2b^2c^2 + c^4$
$p_4 = (1432)$	c_4	$b^4 + c^4$	$b^4 + c^4$
$Z(c_1, c_2, c_3, c_4) = \frac{1}{4}(c_1^4 + c_2^2 + 2c_4)$	$\frac{1}{4}(4b^4 + 4b^3c + 8b^2c^2 + 4bc^3 + 4c^4) =$ $b^4 + b^3c + 2b^2c^2 + bc^3 + c^4$		

Што даје исти резултат као и случају целе групе G.

IX БОЈЕЊЕ ТЕМЕНА ТРОУГЛА

Посматрајмо једнакостраничан троугао чија су темена означена редом бројевима, 1,2,3. Ако уочимо све ротације и рефлексије, које овај троугао пресликава у њега самог, тад имамо: једно идентично пресликавање, које можемо представити пермутацијом $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}$, затим две ротацоје око центра троугла за 60° и 120° што мпжемо представити пермутацијама $\boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{p}_5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}$ као три симетрије $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_6 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}$



Та пресликавања тј. пермутације образују групу, у односу на слагање, приказану у следећој таблици

p_i o p_k	P_1 = 123	P_2 = 132	P_3 = 213	P_4 = 231	P_5 =312	P_6 = 321
P_1 = 123	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2 = 132	P_2	P_1	P_5	P_6	P_3	P_4
P_3 = 213	P_3	P_4	P_1	P_2	P_6	P_5
P_4 = 231	P_4	P_3	P_6	P_5	P_1	P_2
P_5 =312	P_5	P_6	P_2	P_1	P_4	P_3
P_6 = 321	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1

Ако сада посматрамо сва бојења темена са три боје: B, C, Z тад дејством ових пермутација на бојења темена, дају следеће резултате приказане у табели

b02 = CCB	P_1 = 123 b2 = CCB	P_2 = 132 b4 = CBC	P_3 = 213 b2 = CCB	P_4 = 231 b4 = CBC	P_5 = 312 b10 = BCC	P_6 = 321 b10 = BCC
b03 = CCZ	P_1 b3 = CCZ = (1)(2)(3)	b7 = CZC P_2 = (1)(23)	b3 = CCZ P_3 =(12)(3)	b7 = CZC P_4 =(123)	b19 = ZCC P_5 =(132)	b19 = ZCC P_6 = (2)(13)
B04 = CBC	b4 = CBC	b2 = CCB	b10 = BCC	b10 = BCC	b2 = CCB	b4 = CBC
b01= CCC	b1 = CCC	b1 = CCC	b1 = CCC	b1 = CCC	b1 = CCC	b1 = CCC

B05 = CBB	b5 = CBB	b5 = CBB	b11 = BCB	b13 = BBC	b11 = BCB	b13 = BBC
B06 = CBZ	b6 = CBZ	b8 = CZB	b12 = BCZ	b16 = BZC	b20 = ZCB	b22 = ZBC
B07 = CZC	b7 = CZC	b3 = CCZ	b19 = ZCC	b19 = ZCC	b3 = CCZ	b7 = CZC
B08 = CZB	b8 = CZB	b6 = CBZ	b20 = ZCB	b22 = ZBC	b12 = BCZ	b16 = BZC
B09 = CZZ	b9 = CZZ	b9 = CZZ	b21 = ZCZ	b25 = ZZC	b21 = ZCZ	b25 = ZZC
b10 = BCC	b10 = BCC	b10 = BCC	b4 = CBC	b2 = CCB	b4 = CBC	b2 = CCB
b11 = BCB	b11 = BCB	b13 = BBC	b5 = CBB	b5 = CBB	b13 = BBC	b11 = BCB
b12 = BCZ	b12 = BCZ	b16 = BZC	b6 = CBZ	b8 = CZB	b22 = ZBC	b20 = ZCB
b13 = BBC	b13 = BBC	b11 = BCB	b13 = BBC	b11 = BCB	b5 = CBB	b5 = CBB
b14 = BBB	b14 = BBB	b14 = BBB	b14 = BBB	b14 = BBB	b14 = BBB	b14 = BBB
b15 = BBZ	b15 = BBZ	b17 = BZB	b15 = BBZ	b17= BZB	b23 = ZBB	b23 = ZBB
b16 = BZC	b16 = BZC	b12 = BCZ	b22 = ZBC	b20 = ZCB	b6 = CBZ	b8 = CZB
b17 = BZB	b17 = BZB	b15 = BBZ	b23 = ZBB	b23 = ZBB	b15 = BBZ	b17 = BZB
b18 = BZZ	b18 = BZZ	b18 = BZZ	b24 = ZBZ	b26 = ZZB	b24 = ZBZ	b26 = ZZB
b19 = ZCC	b19 = ZCC	b19 = ZCC	b7 = CZC	b3 = CCZ	b7 = CZC	b3 = CCZ
b20 = ZCB	b20 = ZCB	b22 = ZBC	b8 = CZB	b6 = CBZ	b16 = BZC	b12 = BCZ
b21 = ZCZ	b21 = ZCZ	b25 = ZZC	b9 = CZZ	b9 = CZZ	b25 = ZZC	b21 = ZCZ
b22 = ZBC	b22 = ZBC	b20 = ZCB	b16 = BZC	b12 = BCZ	b8 = CZB	b6 = CBZ
b23 = ZBB	b23 = ZBB	b23 = ZBB	b17 = BZB	b15 = BBZ	b17 = BZB	b15 = BBZ
b24 = ZBZ	b24 = ZBZ	b26 = ZZB	b18 = BZZ	b18 = BZZ	b26 = ZZB	b24 = ZBZ
b25 = ZZC	b25 = ZZC	b21 = ZCZ	b25 = ZZC	b21 = ZCZ	b9 = CZZ	b9 = CZZ
b26 = ZZB	b26 = ZZB	b24 = ZBZ	b26 = ZZB	b24 = ZBZ	b18 = BZZ	b18 = BZZ
b27 = ZZZ	b27 = ZZZ	b27 = ZZZ	b27 = ZZZ	b27 = ZZZ	b27 = ZZZ	b27 = ZZZ

Посматрајмо сада исти проблем пребројавања различитих бојења деловањем пермутационе групе.

Ако у неком циклусу бојење остаје неизмењено, боја сваког елемента мора да буде иста као и боја следећег елемета у који се он пресликава. Према томе сваки илемент једног цикла мора бити исто обојен

Тако на пример за пермутацију $\boldsymbol{p}_3 = (12)(3)$ са два циклуса постоји 9 могућности тј фикснс бојења са три боје која, теме 1 и 2 бојји са са три боје, а темена 3 такође са три боје , што даје следећих 9 бојења: $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{CCC}$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{CCB}$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{CCZ}$, $\boldsymbol{b}_{13} = \boldsymbol{BBC}$, $\boldsymbol{b}_{14} = \boldsymbol{BBB}$, $\boldsymbol{b}_{15} = \boldsymbol{BBZ}$, $\boldsymbol{b}_{25} = \boldsymbol{ZZC}$, $\boldsymbol{b}_{26} = \boldsymbol{ZZB}$, $\boldsymbol{b}_{27} = \boldsymbol{ZZZ}$. Како за сваки циклус постоје три могућности за избор боје, то је укупан број бојења који остаје исти применом пермутације $\boldsymbol{p}$ је $3^{\boldsymbol{Cy}(\boldsymbol{p})}$, где је $\boldsymbol{Cy}(\boldsymbol{p})$ број циклуса у пермутацији $\boldsymbol{p}$, укључујући и циклусе дужине 1. За представљање структуре циклуса користимо ознаку, где је $\boldsymbol{n}$ број циклуса дужине $\boldsymbol{m}$. Као што је већ споменуто , да би смо пронашли број бојења која остају фиксна по примени неке пермутације $\boldsymbol{p}$, треба да израчунамо $3^{\boldsymbol{Cy}(\boldsymbol{p})}$ где је $\boldsymbol{Cy}(\boldsymbol{p})$ број циклуса у пермутацији $\boldsymbol{p}$.

Тад израчунамо суму над свим пермутацијама како би смо пронашли $\sum_{p \in G} \varphi(p)$.

Други начин јесте да се узме циклична форма и узме за сваки циклус број боја (у нашем случају то је 2). На пример $p_3 = (12)(3) = c_1 c_2 = 3 \cdot 3 = 9$ или $p_5 = (123) = c_3 = 3$ фиксних бојења,па онда онда израчунамо збир $\sum_{p \in G} \varphi(p)$..

	$P_1 = 123$	$P_2 = 132$	$P_3 = 213$	$P_4 = 231$	$P_5 = 312$	$P_6 = 321$		
	$P_1=(1)(2)(3)$	$P_2= (1)(23)$	$P_3=(12)(3)$	$P_4=(123)$	$P_5=(132)$	$P_6=(2)(13)$	**стабилизатор**	
b01= CCC	b1	b1	b1	b1	b1	b1	$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$	6
b02 = CCB	b2	b4	b2	b4	b10	b10	p_1, p_3	2
b03 = CCZ	b3	b7	b3	b7	b19	b19	p_1, p_3	2
b04 = CBC	b4	b2	b10	b10	b2	b4	p_1, p_6	2
b05 = CBB	b5	b5	b11	b13	b11	b13	p_1, p_2	2
b06 = CBZ	b6	b8	b12	b16	b20	b22	p_1	1
b07 = CZC	b7	b3	b19	b19	b3	b7	p_1, p_6	2
b08 = CZB	b8	b6	b20	b22	b12	b16	p_1	1
b09 = CZZ	b9	b9	b21	b25	b21	b25	p_1, p_2	2
b10 = BCC	b10	b10	b4	b2	b4	b2	p_1, p_2	2
b11 = BCB	b11	b13	b5	b5	b13	b11	p_1, p_6	2
b12 = BCZ	b12	b16	b6	b8	b22	b20	p_1	1
b13 = BBC	b13	b11	b13	b11	b5	b5	p_1, p_3	2
b14 = BBB	b14	b14	b14	b14	b14	b14	$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$	6
b15 = BBZ	b15	b17	b15	b17	b23	b23	p_1, p_3	2
b16 = BZC	b16	b12	b22	b20	b6	b8	p_1	1
b17 = BZB	b17	b15	b23	b23	b15	b17	p_1, p_6	2
b18 = BZZ	b18	b18	b24	b26	b24	b26	p_1, p_2	2
b19 = ZCC	b19	b19	b7	b3	b7	b3	p_1, p_2	2
b20 = ZCB	b20	b22	b8	b6	b16	b12	p_1	1
b21 = ZCZ	b21	b25	b9	b9	b25	b21	p_1, p_6	2
b22 = ZBC	b22	b20	b16	b12	b8	b6	p_1	1
b23 = ZBB	b23	b23	b17	b15	b17	b15	p_1, p_2	2
b24 = ZBZ	b24	b26	b18	b18	b26	b24	p_1, p_6	2
b25 = ZZC	b25	b21	b25	b21	b9	b9	p_1, p_3	2
b26 = ZZB	b26	b24	b26	b24	b18	b18	p_1, p_3	2
b27 = ZZZ	b27	b27	b27	b27	b27	b27	$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$	6
фиксна бојења	b1,b2,...b6,b27	b1,b5,b9, b10, b14, b18,b19, b23,b27	b1,b2.b3, b13,b14, b15,b25, b26,b27	b1,b14,b27	b1,b14, b27	b1,b4,b7,b11,b14, b17,b21, b24,b27		$\sum =60$
	$\varphi(p_1) =27$	$\varphi(p_2)=9$	$\varphi(p_3)=9$	$\varphi(p_4)=3$	$\varphi(p_5)=3$	$\varphi(p_6)=9$	$\sum = 60$	$\frac{60}{6} = 10$

Трећа метода јесте да се за сваку пермутацију нађе њена циклична форма

$P_1=(1)(2)(3)$	c_1^3
$P_2= (1)(23)$	c_1c_2
$P_3=(12)(3)$	c_1c_2
$P_4=(123)$	c_3
$P_5=(132)$	c_3
$P_6=(2)(13)$	c_1c_2

па онда саберу цикличне форме тј за наш пример добијамо $c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3$ који називамо полином циклусног индекса или краће циклусни индекс, ако тај збир поделимо редом групе $Z(c_1, c_2, c_3) = \frac{1}{|G|}(c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3)$, па за сваки циклус ставимо вредност 3, добијамо $3^3 + 3\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 3 \ = 27 + 27 + 6 = 60$. Ако сад тај број поделимо бројем пермутација, добијамо број нееквивалентних бојења. $\frac{1}{|G|}\sum_{p\in G}\varphi(p) = \frac{60}{6} = 10$, тј. $Z(3,3,3) = \frac{1}{|6|}\left(3^3 + 3\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 3 \ \right) = 10$

У општем случају за m боја добијамо нееквивалентних бојења темњна квадрата укупно $Z(m, m, m) = \frac{1}{6}(m^3 + 3m^2 + 2m)$.

пермутације	циклуси	Структура боја циклуса	Структура боја циклуса
$P_1=(1)(2)(3)$	c_1^3	$(C + B + Z)^3$	$B^3 + 3B^2C + 3BC^2 + C^3 + 6BCZ + 3B^2Z + 3C^2Z + 3BZ^2 + 3CZ^2 + Z^3$
$P_2= (1)(23)$	c_1c_2	$(C + B + Z)(C^2 + B^2 + Z^2)$	$B^3 + B^2C + BC^2 + C^3 + B^2Z + C^2Z + BZ^2 + CZ^2 + Z^3$
$P_3=(12)(3)$	c_1c_2	$(C + B + Z)(C^2 + B^2 + Z^2)$	$B^3 + B^2C + BC^2 + C^3 + B^2Z + C^2Z + BZ^2 + CZ^2 + Z^3$
$P_4=(123)$	c_3	$C^3 + B^3 + Z^3$	$C^3 + B^3 + Z^3$
$P_5=(132)$	c_3	$C^3 + B^3 + Z^3$	$C^3 + B^3 + Z^3$
$P_6=(2)(13)$	c_1c_2	$(C + B + Z)(C^2 + B^2 + Z^2)$	$B^3 + B^2C + BC^2 + C^3 + B^2Z + C^2Z + BZ^2 + CZ^2 + Z^3$
$Z(c_1, c_2, c_3) = c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3$			$6B^3 + 6B^2C + 6BC^2 + 6C^3 + 6B^2Z + 6BCZ + 6C^2Z + 6BZ^2 + 6CZ^2 + 6Z^3$
За $c_i = 3$ је $Z(3, 3, 3) = 3^3 + 3\bullet3\bullet3 + 2\bullet3 = 60$			$(6B^3 + 6B^2C + 6BC^2 + 6C^3 + 6B^2Z + 6BCZ + 6C^2Z + 6BZ^2 + 6CZ^2 + 6Z^3)/6=$
Нееквивалентних бојења је 60/6 = 10			Структура бојења $B^3 + B^2C + BC^2 + C^3 + BCZ + B^2Z + C^2Z + BZ^2 + CZ^2 + Z^3$

X БОЈЕЊЕ ТЕТРАЕДРА

Група пресликавања ивица тетраедра као пермутациона група

P_1 =	1	2	3	4	5	6	(1)(2)(3)(4)(5)(6)
P_2 =	3	6	4	1	2	5	(1 3 4)(6 5 2)
P_3 =	4	5	1	3	6	2	(1 4 3)(5 6 2)
P_4 =	2	5	6	3	1	4	(1 2 5)(6 4 3)
P_5 =	5	1	4	6	2	3	(1 5 2)(4 6 3)
P_6 =	5	6	2	1	4	3	(1 5 4)(6 3 2)
P_7 =	4	3	6	5	1	2	(1 4 5)(3 6 2)
P_8 =	2	3	1	5	6	4	(1 2 3)(5 6 4)
P_9 =	3	1	2	6	4	5	(1 3 2)(6 5 4)
P_{10} =	1	4	5	2	3	6	(1)(4 2)(5 3)(6)
P_{11} =	6	2	5	4	3	1	(1 6)(2)(5 3)(4)
P_{12} =	6	4	3	2	5	1	(1 6)(4 2)(3)(5)

Циклусни индекс групе ивица тетраедра

(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	+
(Z_3)	(Z_3)	+				
(Z_3)	(Z_3)	+				
(Z_3)	(Z_3)	+				
(Z_3)	(Z_3)	+				
(Z_3)	(Z_3)	+				
(Z_3)	(Z_3)	+				
(Z_3)	(Z_3)	+				
(Z_3)	(Z_3)	+				
(Z_1)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_1)	+		
(Z_2)	(Z_1)	(Z_2)	(Z_1)	+		
(Z_2)	(Z_2)	(Z_1)	(Z_1)	=		

$$\frac{1}{12}\left(Z1^6 + 3\,Z1^2\,Z2^2 + 8\,Z3^2\right)$$

Група пресликавања ивица тетраедра као пермутациона група

	f1	**f2**	**f3**	**f4**	**f5**	**f6**
p1	1,2	2,3	1,3	1,4	2,4	3,4
p2	1,3	3,4	1,4	1,2	2,3	2,4
p3	1,4	2,4	1,2	1,3	3,4	2,3
p4	2,3	2,4	3,4	1,3	1,2	1,4
p5	2,4	1,2	1,4	3,4	2,3	1,3
p6	2,4	3,4	2,3	1,2	1,4	1,3
p7	1,4	1,3	3,4	2,4	1,2	2,3
p8	2,3	1,3	1,2	2,4	3,4	1,4
p9	1,3	1,2	2,3	3,4	1,4	2,4
p10	1,2	1,4	2,4	2,3	1,3	3,4
p11	3,4	2,3	2,4	1,4	1,3	1,2
p12	3,4	1,4	1,3	2,3	2,4	1,2

Група пресликавања ивица тетраедра као пермутациона група

p1 =	{1,2,3,4,5,6}
p2 =	{3,6,4,1,2,5}
p3 =	{4,5,1,3,6,2}
p4 =	{2,5,6,3,1,4}
p5 =	{5,1,4,6,2,3}
p6 =	{5,6,2,1,4,3}
p7 =	{4,3,6,5,1,2}
p8 =	{2,3,1,5,6,4}
p9 =	{3,1,2,6,4,5}
p10 =	{1,4,5,2,3,6}
p11 =	{6,2,5,4,3,1}
p12 =	{6,4,3,2,5,1}

Таблица групе ивица тетраедра

	p1	**p2**	**p3**	**p4**	**p5**	**p6**	**p7**	**p8**	**p9**	**p10**	**p11**	**p12**
p1	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12
p2	p2	p3	p1	p12	p7	p8	p11	p10	p4	p6	p5	p9
p3	p3	p1	p2	p9	p11	p10	p5	p6	p12	p8	p7	p4
p4	p4	p11	p6	p5	p1	p12	p9	p2	p10	p7	p8	p3
p5	p5	p8	p12	p1	p4	p3	p10	p11	p7	p9	p2	p6
p6	p6	p4	p11	p10	p8	p7	p1	p12	p3	p2	p9	p5
p7	p7	p10	p9	p2	p12	p1	p6	p5	p11	p4	p3	p8
p8	p8	p12	p5	p6	p10	p11	p2	p9	p1	p3	p4	p7
p9	p9	p7	p10	p11	p3	p4	p12	p1	p8	p5	p6	p2
p10	p10	p9	p7	p8	p6	p5	p3	p4	p2	p1	p12	p11
p11	p11	p6	p4	p3	p9	p2	p8	p7	p5	p12	p1	p10
p12	p12	p5	p8	p7	p2	p9	p4	p3	p6	p11	p10	p1

Таблица групе ивица тетраедра

	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12
p1	1,2,3,4,5,6	3,6,4,1,2,5	4,5,1,3,6,2	2,5,6,3,1,4	5,1,4,6,2,3	5,6,2,1,4,3	4,3,6,5,1,2	2,3,1,5,6,4	3,1,2,6,4,5	1,4,5,2,3,6	6,2,5,4,3,1	6,4,3,2,5,1
p2	3,6,4,1,2,5	4,5,1,3,6,2	1,2,3,4,5,6	6,4,3,2,5,1	4,3,6,5,1,2	2,3,1,5,6,4	6,2,5,4,3,1	1,4,5,2,3,6	2,5,6,3,1,4	5,6,2,1,4,3	5,1,4,6,2,3	3,1,2,6,4,5
p3	4,5,1,3,6,2	1,2,3,4,5,6	3,6,4,1,2,5	3,1,2,6,4,5	6,2,5,4,3,1	1,4,5,2,3,6	5,1,4,6,2,3	5,6,2,1,4,3	6,4,3,2,5,1	2,3,1,5,6,4	4,3,6,5,1,2	2,5,6,3,1,4
p4	2,5,6,3,1,4	6,2,5,4,3,1	5,6,2,1,4,3	5,1,4,6,2,3	1,2,3,4,5,6	6,4,3,2,5,1	3,1,2,6,4,5	3,6,4,1,2,5	1,4,5,2,3,6	4,3,6,5,1,2	2,3,1,5,6,4	4,5,1,3,6,2
p5	5,1,4,6,2,3	2,3,1,5,6,4	6,4,3,2,5,1	1,2,3,4,5,6	2,5,6,3,1,4	4,5,1,3,6,2	1,4,5,2,3,6	6,2,5,4,3,1	4,3,6,5,1,2	3,1,2,6,4,5	3,6,4,1,2,5	5,6,2,1,4,3
p6	5,6,2,1,4,3	2,5,6,3,1,4	6,2,5,4,3,1	1,4,5,2,3,6	2,3,1,5,6,4	4,3,6,5,1,2	1,2,3,4,5,6	6,4,3,2,5,1	4,5,1,3,6,2	3,6,4,1,2,5	3,1,2,6,4,5	5,1,4,6,2,3
p7	4,3,6,5,1,2	1,4,5,2,3,6	3,1,2,6,4,5	3,6,4,1,2,5	6,4,3,2,5,1	1,2,3,4,5,6	5,6,2,1,4,3	5,1,4,6,2,3	6,2,5,4,3,1	2,5,6,3,1,4	4,5,1,3,6,2	2,3,1,5,6,4
p8	2,3,1,5,6,4	6,4,3,2,5,1	5,1,4,6,2,3	5,6,2,1,4,3	1,4,5,2,3,6	6,2,5,4,3,1	3,6,4,1,2,5	3,1,2,6,4,5	1,2,3,4,5,6	4,5,1,3,6,2	2,5,6,3,1,4	4,3,6,5,1,2
p9	3,1,2,6,4,5	4,3,6,5,1,2	1,4,5,2,3,6	6,2,5,4,3,1	4,5,1,3,6,2	2,5,6,3,1,4	6,4,3,2,5,1	1,2,3,4,5,6	2,3,1,5,6,4	5,1,4,6,2,3	5,6,2,1,4,3	3,6,4,1,2,5
p10	1,4,5,2,3,6	3,1,2,6,4,5	4,3,6,5,1,2	2,3,1,5,6,4	5,6,2,1,4,3	5,1,4,6,2,3	4,5,1,3,6,2	2,5,6,3,1,4	3,6,4,1,2,5	1,2,3,4,5,6	6,4,3,2,5,1	6,2,5,4,3,1
p11	6,2,5,4,3,1	5,6,2,1,4,3	2,5,6,3,1,4	4,5,1,3,6,2	3,1,2,6,4,5	3,6,4,1,2,5	2,3,1,5,6,4	4,3,6,5,1,2	5,1,4,6,2,3	6,4,3,2,5,1	1,2,3,4,5,6	1,4,5,2,3,6
p12	6,4,3,2,5,1	5,1,4,6,2,3	2,3,1,5,6,4	4,3,6,5,1,2	3,6,4,1,2,5	3,1,2,6,4,5	2,5,6,3,1,4	4,5,1,3,6,2	5,6,2,1,4,3	6,2,5,4,3,1	1,4,5,2,3,6	1,2,3,4,5,6

Бојење ивица тетраедра са две боје																														
B1	a	a	a	a	a	a	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	(P1)	(P2)	(P3)	(P4)	(P5)	(P6)	(P7)	(P8)	(P9)	(P10)	(P11)	(P12)	12
B2	a	a	a	a	a	b	B2	B17	B3	B9	B5	B17	B9	B3	B5	B2	B33	B33	(P1)	(P10)											2
B3	a	a	a	a	b	a	B3	B2	B17	B17	B33	B33	B5	B5	B2	B9	B9	B3	(P1)	(P12)											2
B4	a	a	a	a	b	b	B4	B18	B19	B25	B37	B49	B13	B7	B6	B10	B41	B35	(P1)												1
B5	a	a	a	b	a	a	B5	B9	B33	B2	B9	B3	B33	B2	B3	B17	B5	B17	(P1)	(P11)											2
B6	a	a	a	b	a	b	B6	B25	B35	B10	B13	B19	B41	B4	B7	B18	B37	B49	(P1)												1
B7	a	a	a	b	b	a	B7	B10	B49	B18	B41	B35	B37	B6	B4	B25	B13	B19	(P1)												1
B8	a	a	a	b	b	b	B8	B26	B51	B26	B45	B51	B45	B8	B8	B26	B45	B51	(P1)	(P8)	(P9)										3
B9	a	a	b	a	a	a	B9	B33	B5	B5	B2	B2	B17	B17	B33	B3	B3	B9	(P1)	(P12)											2
B10	a	a	b	a	a	b	B10	B49	B7	B13	B6	B18	B25	B19	B37	B4	B35	B41	(P1)												1
B11	a	a	b	a	b	a	B11	B34	B21	B21	B34	B34	B21	B21	B34	B11	B11	B11	(P1)	(P10)	(P11)	(P12)									4
B12	a	a	b	a	b	b	B12	B50	B23	B29	B38	B50	B29	B23	B38	B12	B43	B43	(P1)	(P10)											2
B13	a	a	b	b	a	a	B13	B41	B37	B6	B10	B4	B49	B18	B35	B19	B7	B25	(P1)												1
B14	a	a	b	b	a	b	B14	B57	B39	B14	B14	B20	B57	B20	B39	B20	B39	B57	(P1)	(P4)	(P5)										3
B15	a	a	b	b	b	a	B15	B42	B53	B22	B42	B36	B53	B22	B36	B27	B15	B27	(P1)	(P11)											2
B16	a	a	b	b	b	b	B16	B58	B55	B30	B46	B52	B61	B24	B40	B28	B47	B59	(P1)												1
B17	a	b	a	a	a	a	B17	B3	B2	B33	B3	B9	B2	B33	B9	B5	B17	B5	(P1)	(P11)											2
B18	a	b	a	a	a	b	B18	B19	B4	B41	B7	B25	B10	B35	B13	B6	B49	B37	(P1)												1
B19	a	b	a	a	b	a	B19	B4	B18	B49	B35	B41	B6	B37	B10	B13	B25	B7	(P1)												1
B20	a	b	a	a	b	b	B20	B20	B20	B57	B39	B57	B14	B39	B14	B14	B57	B39	(P1)	(P2)	(P3)										3
B21	a	b	a	b	a	a	B21	B11	B34	B34	B11	B11	B34	B34	B11	B21	B21	B21	(P1)	(P10)	(P11)	(P12)									4
B22	a	b	a	b	a	b	B22	B27	B36	B42	B15	B27	B42	B36	B15	B22	B53	B53	(P1)	(P10)											2
B23	a	b	a	b	b	a	B23	B12	B50	B50	B43	B43	B38	B38	B12	B29	B29	B23	(P1)	(P12)											2
B24	a	b	a	b	b	b	B24	B28	B52	B58	B47	B59	B46	B40	B16	B30	B61	B55	(P1)												1
B25	a	b	b	a	a	a	B25	B35	B6	B37	B4	B10	B18	B49	B41	B7	B19	B13	(P1)												1
B26	a	b	b	a	a	b	B26	B51	B8	B45	B8	B26	B26	B51	B45	B8	B51	B45	(P1)	(P6)	(P7)										3
B27	a	b	b	a	b	a	B27	B36	B22	B53	B36	B42	B22	B53	B42	B15	B27	B15	(P1)	(P11)											2
B28	a	b	b	a	b	b	B28	B52	B24	B61	B40	B58	B30	B55	B46	B16	B59	B47	(P1)												1
B29	a	b	b	b	a	a	B29	B43	B38	B38	B12	B12	B50	B50	B43	B23	B23	B29	(P1)	(P12)											2
B30	a	b	b	b	a	b	B30	B59	B40	B46	B16	B28	B58	B52	B47	B24	B55	B61	(P1)												1
B31	a	b	b	b	b	a	B31	B44	B54	B54	B44	B44	B54	B54	B44	B31	B31	B31	(P1)	(P10)	(P11)	(P12)									4
B32	a	b	b	b	b	b	B32	B60	B56	B62	B48	B60	B62	B56	B48	B32	B63	B63	(P1)	(P10)											2
B33	b	a	a	a	a	a	B33	B5	B9	B3	B17	B5	B3	B9	B17	B33	B2	B2	(P1)	(P10)											2

B34	b	a	a	a	a	b	B34	B21	B11	B11	B21	B21	B11	B11	B21	B34	B34	B34		(P1)	(P10)	(P11)	(P12)									4
B35	b	a	a	a	b	a	B35	B6	B25	B19	B49	B37	B7	B13	B18	B41	B10	B4		(P1)												1
B36	b	a	a	a	b	b	B36	B22	B27	B27	B53	B53	B15	B15	B22	B42	B42	B36		(P1)	(P12)											2
B37	b	a	a	b	a	a	B37	B13	B41	B4	B25	B7	B35	B10	B19	B49	B6	B18		(P1)												1
B38	b	a	a	b	a	b	B38	B29	B43	B12	B29	B23	B43	B12	B23	B50	B38	B50		(P1)	(P11)											2
B39	b	a	a	b	b	a	B39	B14	B57	B20	B57	B39	B39	B14	B20	B57	B14	B20		(P1)	(P6)	(P7)										3
B40	b	a	a	b	b	b	B40	B30	B59	B28	B61	B55	B47	B16	B24	B58	B46	B52		(P1)												1
B41	b	a	b	a	a	a	B41	B37	B13	B7	B18	B6	B19	B25	B49	B35	B4	B10		(P1)												1
B42	b	a	b	a	a	b	B42	B53	B15	B15	B22	B22	B27	B27	B53	B36	B36	B42		(P1)	(P12)											2
B43	b	a	b	a	b	a	B43	B38	B29	B23	B50	B38	B23	B29	B50	B43	B12	B12		(P1)	(P10)											2
B44	b	a	b	a	b	b	B44	B54	B31	B31	B54	B54	B31	B31	B54	B44	B44	B44		(P1)	(P10)	(P11)	(P12)									4
B45	b	a	b	b	a	a	B45	B45	B45	B8	B26	B8	B51	B26	B51	B51	B8	B26		(P1)	(P2)	(P3)										3
B46	b	a	b	b	a	b	B46	B61	B47	B16	B30	B24	B59	B28	B55	B52	B40	B58		(P1)												1
B47	b	a	b	b	b	a	B47	B46	B61	B24	B58	B40	B55	B30	B52	B59	B16	B28		(P1)												1
B48	b	a	b	b	b	b	B48	B62	B63	B32	B62	B56	B63	B32	B56	B60	B48	B60		(P1)	(P11)											2
B49	b	b	a	a	a	a	B49	B7	B10	B35	B19	B13	B4	B41	B25	B37	B18	B6		(P1)												1
B50	b	b	a	a	a	b	B50	B23	B12	B43	B23	B29	B12	B43	B29	B38	B50	B38		(P1)	(P11)											2
B51	b	b	a	a	b	a	B51	B8	B26	B51	B51	B45	B8	B45	B26	B45	B26	B8		(P1)	(P4)	(P5)										3
B52	b	b	a	a	b	b	B52	B24	B28	B59	B55	B61	B16	B47	B30	B46	B58	B40		(P1)												1
B53	b	b	a	b	a	a	B53	B15	B42	B36	B27	B15	B36	B42	B27	B53	B22	B22		(P1)	(P10)											2
B54	b	b	a	b	a	b	B54	B31	B44	B44	B31	B31	B44	B44	B31	B54	B54	B54		(P1)	(P10)	(P11)	(P12)									4
B55	b	b	a	b	b	a	B55	B16	B58	B52	B59	B47	B40	B46	B28	B61	B30	B24		(P1)												1
B56	b	b	a	b	b	b	B56	B32	B60	B60	B63	B63	B48	B48	B32	B62	B62	B56		(P1)	(P12)											2
B57	b	b	b	a	a	a	B57	B39	B14	B39	B20	B14	B20	B57	B57	B39	B20	B14		(P1)	(P8)	(P9)										3
B58	b	b	b	a	a	b	B58	B55	B16	B47	B24	B30	B28	B59	B61	B40	B52	B46		(P1)												1
B59	b	b	b	a	b	a	B59	B40	B30	B55	B52	B46	B24	B61	B58	B47	B28	B16		(P1)												1
B60	b	b	b	a	b	b	B60	B56	B32	B63	B56	B62	B32	B63	B62	B48	B60	B48		(P1)	(P11)											2
B61	b	b	b	b	a	a	B61	B47	B46	B40	B28	B16	B52	B58	B59	B55	B24	B30		(P1)												1
B62	b	b	b	b	a	b	B62	B63	B48	B48	B32	B32	B60	B60	B63	B56	B56	B62		(P1)	(P12)											2
B63	b	b	b	b	b	a	B63	B48	B62	B56	B60	B48	B56	B62	B60	B63	B32	B32		(P1)	(P10)											2
B64	b	b	b	b	b	b	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64		(P1)	(P2)	(P3)	(P4)	(P5)	(P6)	(P7)	(P8)	(P9)	(P10)	(P11)	(P12)	12
				фиксна бојења			64	4	4	4	4	4	4	4	4	16	16	16	144													144
										Не еквивалентна бојења									12													12

Ивентар бојења ивица тетраедра са две боје

Циклусни индекс $1^6 + 3\, Z1^2\, Z2^2 + 8\, Z3^2 \; 1$

$f\; x1\_,\, x2\_,\, x3\_ \quad 1^6 + 3 * x2^2 * x1^2 + 8 * x3^2 \; 1$

$f\; + c \; b,\; a^2 + c^2 + b^2,\; a^3 + c^3 + b^3$

$+ b \quad + b \quad + b^2 \; + \quad + b^3$

$2\, a^6 + 12\, a^5\, b + 24\, a^4\, b^2 + 48\, a^3\, b^3 + 24\, a^2\, b^4 + 12\, a\, b^5 + 12\, b^6 \; 1 =$

$\frac{1}{12}\; 2\, a^6 \; 12\, a^5\, b + 24\, a^4\, b^2 + 48\, a^3\, b^3 + 24\, a^2\, b^4 + 12\, a\, b^5 + 12\, b^6$

••••••• ••••••

$a^6 + a^5\, b + 2\, a^4\, b^2 + 4\, a^3\, b^3 + 2\, a^2\, b^4 + a\, b^5 + b^6$

Два бојења свих шест ивиц прво бојом a а затим бојом b
Два бојења пет ивиц бојом a (b) и једну ивицу бојом b (a)
По два бојења четири ивице бојом b (a) и две ивице бојом a (b)
И четири бојења три ивице бојом a и три ивице бојом b

```
f[2,2,2]= 12
```

Дакле укупно 12 нееквивалентних бојења.

Ивентар бојења ивица тетраедра са три боје

Циклусни индекс $1^6 + 3\, Z1^2\, Z2^2 + 8\, Z3^2 \; 1$

$f\; x1\_,\, x2\_,\, x3\_ \quad 1^6 + 3 * x2^2 * x1^2 + 8 * x3^2 \; 1$

$f\; + c \; b,\; a^2 + c^2 + b^2,\; a^3 + c^3 + b^3$

$+ b \; c \quad + b \; c \quad + b^2 + c^2 \; + \quad + b^3 + c^3 =$

$\frac{1}{12}\; + b \; c \quad + b \; c \quad ^2 + b \; + c^2 \quad ^3 + b \; + c^3$

••••••• ••••••

$a^6 + a^5\, b + 2\, a^4\, b^2 + 4\, a^3\, b^3 + 2\, a^2\, b^4 + a\, b^5 + b^6 + a^5\, c + 3\, a^4\, b\, c + 6\, a^3\, b^2\, c + 6\, a^2\, b^3\, c +$
$3\, a\, b^4\, c + b^5\, c + 2\, a^4\, c^2 + 6\, a^3\, b\, c^2 + 9\, a^2\, b^2\, c^2 + 6\, a\, b^3\, c^2 + 2\, b^4\, c^2 + 4\, a^3\, c^3 +$
$6\, a^2\, b\, c^3 + 6\, a\, b^2\, c^3 + 4\, b^3\, c^3 + 2\, a^2\, c^4 + 3\, a\, b\, c^4 + 2\, b^2\, c^4 + a\, c^5 + b\, c^5 + c^6$

```
f[3,3,3]= 87
```

Дакле укупно 87 нееквивалентних бојења.

Ивентар бојења ивица тетраедра са четири боје

Циклусни индекс $(Z1^6 + 3\,Z1^2\,Z2^2 + 8\,Z3^2)/12$

```
f[x1_, x2_, x3_] := (x1^6 + 3* x2^2 * x1^2 + 8* x3^2)/12
```

$f[a+c+b+d,\ a^2+c^2+b^2+d^2,\ a^3+c^3+b^3+d^3]$

$\frac{1}{12}\left((a+b+c+d)^6 + 3\,(a+b+c+d)^2\,(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 + 8\,(a^3+b^3+c^3+d^3)^2\right)$

$$a^6+a^5 b+2a^4 b^2+4a^3 b^3+2a^2 b^4+a b^5+b^6+a^5 c+3a^4 bc+6a^3 b^2 c+6a^2 b^3 c+3ab^4 c+b^5 c+2a^4 c^2+6a^3 bc^2+9a^2 b^2 c^2+6ab^3 c^2+2b^4 c^2+4a^3 c^3+6a^2 bc^3+6ab^2 c^3+4b^3 c^3+2a^2 c^4+3abc^4+2b^2 c^4+ac^5+bc^5+c^6+a^5 d+3a^4 bd+6a^3 b^2 d+6a^2 b^3 d+3ab^4 d+b^5 d+3a^4 cd+10a^3 bcd+16a^2 b^2 cd+10ab^3 cd+3b^4 cd+6a^3 c^2 d+16a^2 bc^2 d+16ab^2 c^2 d+6b^3 c^2 d+6a^2 c^3 d+10abc^3 d+6b^2 c^3 d+3ac^4 d+3bc^4 d+c^5 d+2a^4 d^2+6a^3 bd^2+9a^2 b^2 d^2+6ab^3 d^2+2b^4 d^2+6a^3 cd^2+16a^2 bcd^2+16ab^2 cd^2+6b^3 cd^2+9a^2 c^2 d^2+16abc^2 d^2+9b^2 c^2 d^2+6ac^3 d^2+6bc^3 d^2+2c^4 d^2+4a^3 d^3+6a^2 bd^3+6ab^2 d^3+4b^3 d^3+6a^2 cd^3+10abcd^3+6b^2 cd^3+6ac^2 d^3+6bc^2 d^3+4c^3 d^3+2a^2 d^4+3abd^4+2b^2 d^4+3acd^4+3bcd^4+2c^2 d^4+ad^5+bd^5+cd^5+d^6$$

```
f[4,4,4]= 416
```

Дакле укупно 416 нееквивалентних бојења.

Група пресликавања страна тетраедра као пермутациона група

P_1 =	1	2	3	4
P_2 =	4	1	3	2
P_3 =	2	4	3	1
P_4 =	3	1	2	4
P_5 =	2	3	1	4
P_6 =	3	2	4	1
P_7 =	4	2	1	3
P_8 =	1	3	4	2
P_9 =	1	4	2	3
P_{10} =	2	1	4	3
P_{11} =	3	4	1	2
P_{12} =	4	3	2	1

(	1	)	(	2	)	(	3	)	(	4	)
(	1	4	2	)	(	3	)				
(	1	2	4	)	(	3	)				
(	1	3	2	)	(	4	)				
(	1	2	3	)	(	4	)				
(	1	3	4	)	(	2	)				
(	1	4	3	)	(	2	)				
(	1	)	(	3	4	2	)				
(	1	)	(	4	3	2	)				
(	1	2	)	(	4	3	)				
(	1	3	)	(	4	2	)				
(	1	4	)	(	3	2	)				

Циклусни индекс групе страна етраедра

P_1 =	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)
P_2 =	(Z_3)	(Z_1)	+	
P_3 =	(Z_3)	(Z_1)	+	
P_4 =	(Z_3)	(Z_1)	+	
P_5 =	(Z_3)	(Z_1)	+	
P_6 =	(Z_3)	(Z_1)	+	
P_7 =	(Z_3)	(Z_1)	+	
P_8 =	(Z_1)	(Z_3)	+	
P_9 =	(Z_1)	(Z_3)	+	
P_{10} =	(Z_2)	(Z_2)	+	
P_{11} =	(Z_2)	(Z_2)	+	
P_{12} =	(Z_2)	(Z_2)	=	

[illegible]$1^4 + 3\,Z2^2 + 8\,Z1\,Z3$ [illegible] 1[illegible]

Група пресликавања страна тетраедра као пермутациона група

	f1	**f2**	**f3**	**f4**
p1	1,2,3	1,2,4	2,3,4	1,3,4
p2	1,3,4	1,2,3	2,3,4	1,2,4
p3	1,2,4	1,3,4	2,3,4	1,2,3
p4	2,3,4	1,2,3	1,2,4	1,3,4
p5	1,2,4	2,3,4	1,2,3	1,3,4
p6	2,3,4	1,2,4	1,3,4	1,2,3
p7	1,3,4	1,2,4	1,2,3	2,3,4
p8	1,2,3	2,3,4	1,3,4	1,2,4
p9	1,2,3	1,3,4	1,2,4	2,3,4
p10	1,2,4	1,2,3	1,3,4	2,3,4
p11	2,3,4	1,3,4	1,2,3	1,2,4
p12	1,3,4	2,3,4	1,2,4	1,2,3

Група пресликавања страна тетраедра као пермутациона група

p1	{1,2,3,4}
p2	{4,1,3,2}
p3	{2,4,3,1}
p4	{3,1,2,4}
p5	{2,3,1,4}
p6	{3,2,4,1}
p7	{4,2,1,3}
p8	{1,3,4,2}
p9	{1,4,2,3}
p10	{2,1,4,3}
p11	{3,4,1,2}
p12	{4,3,2,1}

таблица групе страна тетраедра

	p1	**p2**	**p3**	**p4**	**p5**	**p6**	**p7**	**p8**	**p9**	**p10**	**p11**	**p12**
p1	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12
p2	p2	p3	p1	p12	p7	p8	p11	p10	p4	p6	p5	p9
p3	p3	p1	p2	p9	p11	p10	p5	p6	p12	p8	p7	p4
p4	p4	p11	p6	p5	p1	p12	p9	p2	p10	p7	p8	p3
p5	p5	p8	p12	p1	p4	p3	p10	p11	p7	p9	p2	p6
p6	p6	p4	p11	p10	p8	p7	p1	p12	p3	p2	p9	p5
p7	p7	p10	p9	p2	p12	p1	p6	p5	p11	p4	p3	p8
p8	p8	p12	p5	p6	p10	p11	p2	p9	p1	p3	p4	p7
	p9	p7	p10	p11	p3	p4	p12	p1	p8	p5	p6	p2
p10	p10	p9	p7	p8	p6	p5	p3	p4	p2	p1	p12	p11
p11	p11	p6	p4	p3	p9	p2	p8	p7	p5	p12	p1	p10
p12	p12	p5	p8	p7	p2	p9	p4	p3	p6	p11	p10	p1

таблица групе страна тетраедра

p3	**p4**	**p5**	**p6**	**p7**	**p8**	**p9**	**p10**	**p11**	**p12**
2,4,3,1	3,1,2,4	2,3,1,4	3,2,4,1	4,2,1,3	1,3,4,2	1,4,2,3	2,1,4,3	3,4,1,2	4,3,2,1
1,2,3,4	4,3,2,1	4,2,1,3	1,3,4,2	3,4,1,2	2,1,4,3	3,1,2,4	3,2,4,1	2,3,1,4	1,4,2,3
4,1,3,2	1,4,2,3	3,4,1,2	2,1,4,3	2,3,1,4	3,2,4,1	4,3,2,1	1,3,4,2	4,2,1,3	3,1,2,4
3,2,4,1	2,3,1,4	1,2,3,4	4,3,2,1	1,4,2,3	4,1,3,2	2,1,4,3	4,2,1,3	1,3,4,2	2,4,3,1
4,3,2,1	1,2,3,4	3,1,2,4	2,4,3,1	2,1,4,3	3,4,1,2	4,2,1,3	1,4,2,3	4,1,3,2	3,2,4,1
3,4,1,2	2,1,4,3	1,3,4,2	4,2,1,3	1,2,3,4	4,3,2,1	2,4,3,1	4,1,3,2	1,4,2,3	2,3,1,4
1,4,2,3	4,1,3,2	4,3,2,1	1,2,3,4	3,2,4,1	2,3,1,4	3,4,1,2	3,1,2,4	2,4,3,1	1,3,4,2
2,3,1,4	3,2,4,1	2,1,4,3	3,4,1,2	4,1,3,2	1,4,2,3	1,2,3,4	2,4,3,1	3,1,2,4	4,2,1,3
2,1,4,3	3,4,1,2	2,4,3,1	3,1,2,4	4,3,2,1	1,2,3,4	1,3,4,2	2,3,1,4	3,2,4,1	4,1,3,2
4,2,1,3	1,3,4,2	3,2,4,1	2,3,1,4	2,4,3,1	3,1,2,4	4,1,3,2	1,2,3,4	4,3,2,1	3,4,1,2
3,1,2,4	2,4,3,1	1,4,2,3	4,1,3,2	1,3,4,2	4,2,1,3	2,3,1,4	4,3,2,1	1,2,3,4	2,1,4,3
1,3,4,2	4,2,1,3	4,1,3,2	1,4,2,3	3,1,2,4	2,4,3,1	3,2,4,1	3,4,1,2	2,1,4,3	1,2,3,4

Бојење страна тетраедра са три боје

B1	a	a	a	a	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	(P1)	(P2)	(P3)	(P4)	(P5)	(P6)	(P7)	(P8)	(P9)	(P10)	(P11)	(P12)
B2	a	a	a	b	B2	B28	B10	B2	B2	B4	B28	B4	B10	B4	B10	B28	(P1)	(P4)	(P5)									
B3	a	a	a	c	B3	B55	B19	B3	B3	B7	B55	B7	B19	B7	B19	B55	(P1)	(P4)	(P5)									
B4	a	a	b	a	B4	B4	B4	B28	B10	B28	B2	B10	B2	B2	B28	B10	(P1)	(P2)	(P3)									
B5	a	a	b	b	B5	B31	B13	B29	B11	B31	B29	B13	B11	B5	B37	B37	(P1)	(P10)										
B6	a	a	b	c	B6	B58	B22	B30	B12	B34	B56	B16	B20	B8	B46	B64	(P1)											
B7	a	a	c	a	B7	B7	B7	B55	B19	B55	B3	B19	B3	B3	B55	B19	(P1)	(P2)	(P3)									
B8	a	a	c	b	B8	B34	B16	B56	B20	B58	B30	B22	B12	B6	B64	B46	(P1)											
B9	a	a	c	c	B9	B61	B25	B57	B21	B61	B57	B25	B21	B9	B73	B73	(P1)	(P10)										
B10	a	b	a	a	B10	B2	B28	B4	B28	B10	B10	B2	B4	B28	B2	B4	(P1)	(P6)	(P7)									
B11	a	b	a	b	B11	B29	B37	B5	B29	B13	B37	B5	B13	B31	B11	B31	(P1)	(P11)										
B12	a	b	a	c	B12	B56	B46	B6	B30	B16	B64	B8	B22	B34	B20	B58	(P1)											
B13	a	b	b	a	B13	B5	B31	B31	B37	B37	B11	B11	B5	B29	B29	B13	(P1)	(P12)										
B14	a	b	b	b	B14	B32	B40	B32	B38	B40	B38	B14	B14	B32	B38	B40	(P1)	(P8)	(P9)									
B15	a	b	b	c	B15	B59	B49	B33	B39	B43	B65	B17	B23	B35	B47	B67	(P1)											
B16	a	b	c	a	B16	B8	B34	B58	B46	B64	B12	B20	B6	B30	B56	B22	(P1)											
B17	a	b	c	b	B17	B35	B43	B59	B47	B67	B39	B23	B15	B33	B65	B49	(P1)											
B18	a	b	c	c	B18	B62	B52	B60	B48	B70	B66	B26	B24	B36	B74	B76	(P1)											
B19	a	c	a	a	B19	B3	B55	B7	B55	B19	B19	B3	B7	B55	B3	B7	(P1)	(P6)	(P7)									
B20	a	c	a	b	B20	B30	B64	B8	B56	B22	B46	B6	B16	B58	B12	B34	(P1)											
B21	a	c	a	c	B21	B57	B73	B9	B57	B25	B73	B9	B25	B61	B21	B61	(P1)	(P11)										
B22	a	c	b	a	B22	B6	B58	B34	B64	B46	B20	B12	B8	B56	B30	B16	(P1)											
B23	a	c	b	b	B23	B33	B67	B35	B65	B49	B47	B15	B17	B59	B39	B43	(P1)											
B24	a	c	b	c	B24	B60	B76	B36	B66	B52	B74	B18	B26	B62	B48	B70	(P1)											
B25	a	c	c	a	B25	B9	B61	B61	B73	B73	B21	B21	B9	B57	B57	B25	(P1)	(P12)										
B26	a	c	c	b	B26	B36	B70	B62	B74	B76	B48	B24	B18	B60	B66	B52	(P1)											
B27	a	c	c	c	B27	B63	B79	B63	B75	B79	B75	B27	B27	B63	B75	B79	(P1)	(P8)	(P9)									
B28	b	a	a	a	B28	B10	B2	B10	B4	B2	B4	B28	B28	B10	B4	B2	(P1)	(P8)	(P9)									
B29	b	a	a	b	B29	B37	B11	B11	B5	B5	B31	B31	B37	B13	B13	B29	(P1)	(P12)										
B30	b	a	a	c	B30	B64	B20	B12	B6	B8	B58	B34	B46	B16	B22	B56	(P1)											
B31	b	a	b	a	B31	B13	B5	B37	B13	B29	B5	B37	B29	B11	B31	B11	(P1)	(P11)										
B32	b	a	b	b	B32	B40	B14	B38	B14	B32	B32	B40	B38	B14	B40	B38	(P1)	(P6)	(P7)									
B33	b	a	b	c	B33	B67	B23	B39	B15	B35	B59	B43	B47	B17	B49	B65	(P1)											
B34	b	a	c	a	B34	B16	B8	B64	B22	B56	B6	B46	B30	B12	B58	B20	(P1)											
B35	b	a	c	b	B35	B43	B17	B65	B23	B59	B33	B49	B39	B15	B67	B47	(P1)											
B36	b	a	c	c	B36	B70	B26	B66	B24	B62	B60	B52	B48	B18	B76	B74	(P1)											
B37	b	b	a	a	B37	B11	B29	B13	B31	B11	B13	B29	B31	B37	B5	B5	(P1)	(P10)										
B38	b	b	a	b	B38	B38	B38	B14	B32	B14	B40	B32	B40	B40	B14	B32	(P1)	(P2)	(P3)									
B39	b	b	a	c	B39	B65	B47	B15	B33	B17	B67	B35	B49	B43	B23	B59	(P1)											
B40	b	b	b	a	B40	B14	B32	B40	B40	B38	B14	B38	B32	B38	B32	B14	(P1)	(P4)	(P5)									
B41	b	b	b	b	B41	B41	B41	B41	B41	B41	B41	B41	B41	B41	B41	B41	(P1)	(P2)	(P3)	(P4)	(P5)	(P6)	(P7)	(P8)	(P9)	(P10)	(P11)	(P12)
B42	b	b	b	c	B42	B68	B50	B42	B42	B44	B68	B44	B50	B44	B50	B68	(P1)	(P4)	(P5)									

B42	b	b	b	c		B42	B68	B50	B42	B42	B44	B68	B44	B50	B44	B50	B68		(P1)	(P4)	(P5)										3
B43	b	b	c	a		B43	B17	B35	B67	B49	B65	B15	B47	B33	B39	B59	B23		(P1)												1
B44	b	b	c	b		B44	B44	B44	B68	B50	B68	B42	B50	B42	B42	B68	B50		(P1)	(P2)	(P3)										3
B45	b	b	c	c		B45	B71	B53	B69	B51	B71	B69	B53	B51	B45	B77	B77		(P1)	(P10)											2
B46	b	c	a	a		B46	B12	B56	B16	B58	B20	B22	B30	B34	B64	B6	B8		(P1)												1
B47	b	c	a	b		B47	B39	B65	B17	B59	B23	B49	B33	B43	B67	B15	B35		(P1)												1
B48	b	c	a	c		B48	B66	B74	B18	B60	B26	B76	B36	B52	B70	B24	B62		(P1)												1
B49	b	c	b	a		B49	B15	B59	B43	B67	B47	B23	B39	B35	B65	B33	B17		(P1)												1
B50	b	c	b	b		B50	B42	B68	B44	B68	B50	B50	B42	B44	B68	B42	B44		(P1)	(P6)	(P7)										3
B51	b	c	b	c		B51	B69	B77	B45	B69	B53	B77	B45	B53	B71	B51	B71		(P1)	(P11)											2
B52	b	c	c	a		B52	B18	B62	B70	B76	B74	B24	B48	B36	B66	B60	B26		(P1)												1
B53	b	c	c	b		B53	B45	B71	B71	B77	B77	B51	B51	B45	B69	B69	B53		(P1)	(P12)											2
B54	b	c	c	c		B54	B72	B80	B72	B78	B80	B78	B54	B54	B72	B78	B80		(P1)	(P8)	(P9)										3
B55	c	a	a	a		B55	B19	B3	B19	B7	B3	B7	B55	B55	B19	B7	B3		(P1)	(P8)	(P9)										3
B56	c	a	a	b		B56	B46	B12	B20	B8	B6	B34	B58	B64	B22	B16	B30		(P1)												1
B57	c	a	a	c		B57	B73	B21	B21	B9	B9	B61	B61	B73	B25	B25	B57		(P1)	(P12)											2
B58	c	a	b	a		B58	B22	B6	B46	B16	B30	B8	B64	B56	B20	B34	B12		(P1)												1
B59	c	a	b	b		B59	B49	B15	B47	B17	B33	B35	B67	B65	B23	B43	B39		(P1)												1
B60	c	a	b	c		B60	B76	B24	B48	B18	B36	B62	B70	B74	B26	B52	B66		(P1)												1
B61	c	a	c	a		B61	B25	B9	B73	B25	B57	B9	B73	B57	B21	B61	B21		(P1)	(P11)											2
B62	c	a	c	b		B62	B52	B18	B74	B26	B60	B36	B76	B66	B24	B70	B48		(P1)												1
B63	c	a	c	c		B63	B79	B27	B75	B27	B63	B63	B79	B75	B27	B79	B75		(P1)	(P6)	(P7)										3
B64	c	b	a	a		B64	B20	B30	B22	B34	B12	B16	B56	B58	B46	B8	B6		(P1)												1
B65	c	b	a	b		B65	B47	B39	B23	B35	B15	B43	B59	B67	B49	B17	B33		(P1)												1
B66	c	b	a	c		B66	B74	B48	B24	B36	B18	B70	B62	B76	B52	B26	B60		(P1)												1
B67	c	b	b	a		B67	B23	B33	B49	B43	B39	B17	B65	B59	B47	B35	B15		(P1)												1
B68	c	b	b	b		B68	B50	B42	B50	B44	B42	B44	B68	B68	B50	B44	B42		(P1)	(P8)	(P9)										3
B69	c	b	b	c		B69	B77	B51	B51	B45	B45	B71	B71	B77	B53	B53	B69		(P1)	(P12)											2
B70	c	b	c	a		B70	B26	B36	B76	B52	B66	B18	B74	B60	B48	B62	B24		(P1)												1
B71	c	b	c	b		B71	B53	B45	B77	B53	B69	B45	B77	B69	B51	B71	B51		(P1)	(P11)											2
B72	c	b	c	c		B72	B80	B54	B78	B54	B72	B72	B80	B78	B54	B80	B78		(P1)	(P6)	(P7)										3
B73	c	c	a	a		B73	B21	B57	B25	B61	B21	B25	B57	B61	B73	B9	B9		(P1)	(P10)											2
B74	c	c	a	b		B74	B48	B66	B26	B62	B24	B52	B60	B70	B76	B18	B36		(P1)												1
B75	c	c	a	c		B75	B75	B75	B27	B63	B27	B79	B63	B79	B79	B27	B63		(P1)	(P2)	(P3)										3
B76	c	c	b	a		B76	B24	B60	B52	B70	B48	B26	B66	B62	B74	B36	B18		(P1)												1
B77	c	c	b	b		B77	B51	B69	B53	B71	B51	B53	B69	B71	B77	B45	B45		(P1)	(P10)											2
B78	c	c	b	c		B78	B78	B78	B54	B72	B54	B80	B72	B80	B80	B54	B72		(P1)	(P2)	(P3)										3
B79	c	c	c	a		B79	B27	B63	B79	B79	B75	B27	B75	B63	B75	B63	B27		(P1)	(P4)	(P5)										3
B80	c	c	c	b		B80	B54	B72	B80	B80	B78	B54	B78	B72	B78	B72	B54		(P1)	(P4)	(P5)										3
B81	c	c	c	c		B81	B81	B81	B81	B81	B81	B81	B81	B81	B81	B81	B81		(P1)	(P2)	(P3)	(P4)	(P5)	(P6)	(P7)	(P8)	(P9)	(P10)	(P11)	(P12)	12
						81	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	180													180
																		15													15

Ивентар бојења страна тетраедра са три боје

Циклусни индекс $Z1^4 + 3\,Z2^2 + 8\,Z1\,Z3$ 12

f z1_, z2_, z3_ 1$^4 + 3\,Z2^2 + 8\,Z1\,Z3$ 1

f z1_, z2_, z3_ 1$^4 + 3\,Z2^2 + 8\,Z1\,Z3$ 1 =

$\frac{1}{12}$ + b c $^2 + b^2 + c^2$ + + b c $b^3 + c^3$

$a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4 + a^3 c + a^2 b c + a b^2 c + b^3 c + a^2 c^2 + a b c^2 + b^2 c^2 + a c^3 + b c^3 + c^4$

```
f[3,3,3]= 15
```

Дакле укупно 15 нееквивалентних бојења.

Група темена тетраедра

P_1 =	1	2	3	4	(1) (2) (3) (4)
P_2 =	1	3	4	2	(1) (3 4 2)
P_3 =	1	4	2	3	(1) (4 3 2)
P_4 =	3	2	4	1	(1 3 4) (2)
P_5 =	4	2	1	3	(1 4 3) (2)
P_6 =	2	4	3	1	(1 2 4) (3)
P_7 =	4	1	3	2	(1 4 2) (3)
P_8 =	2	3	1	4	(1 2 3) (4)
P_9 =	3	1	2	4	(1 3 2) (4)
P_{10} =	2	1	4	3	(1 2) (4 3)
P_{11} =	4	3	2	1	(1 4) (3 2)
P_{12} =	3	4	1	2	(1 3) (4 2)

(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	+
(Z_1)	(Z_3)	+		
(Z_1)	(Z_3)	+		
(Z_3)	(Z_1)	+		
(Z_3)	(Z_1)	+		
(Z_3)	(Z_1)	+		
(Z_3)	(Z_1)	+		
(Z_3)	(Z_1)	+		
(Z_3)	(Z_1)	+		
(Z_2)	(Z_2)	+		
(Z_2)	(Z_2)	+		
(Z_2)	(Z_2)	=	$(Z1^4 + 3\,Z2^2 + 8\,Z1\,Z3)\,/\,12$	

Таблица групе темена тетраедра

	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12
p1	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12
p2	p2	p3	p1	p12	p7	p8	p11	p10	p4	p6	p5	p9
p3	p3	p1	p2	p9	p11	p10	p5	p6	p12	p8	p7	p4
p4	p4	p11	p6	p5	p1	p12	p9	p2	p10	p7	p8	p3
p5	p5	p8	p12	p1	p4	p3	p10	p11	p7	p9	p2	p6
p6	p6	p4	p11	p10	p8	p7	p1	p12	p3	p2	p9	p5
p7	p7	p10	p9	p2	p12	p1	p6	p5	p11	p4	p3	p8
p8	p8	p12	p5	p6	p10	p11	p2	p9	p1	p3	p4	p7
p9	p9	p7	p10	p11	p3	p4	p12	p1	p8	p5	p6	p2
p10	p10	p9	p7	p8	p6	p5	p3	p4	p2	p1	p12	p11
p11	p11	p6	p4	p3	p9	p2	p8	p7	p5	p12	p1	p10
p12	p12	p5	p8	p7	p2	p9	p4	p3	p6	p11	p10	p1

Таблица групе темена тетраедра

	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12
p1	1,2,3,4	1,3,4,2	1,4,2,3	3,2,4,1	4,2,1,3	2,4,3,1	4,1,3,2	2,3,1,4	3,1,2,4	2,1,4,3	4,3,2,1	3,4,1,2
p2	1,3,4,2	1,4,2,3	1,2,3,4	3,4,1,2	4,1,3,2	2,3,1,4	4,3,2,1	2,1,4,3	3,2,4,1	2,4,3,1	4,2,1,3	3,1,2,4
p3	1,4,2,3	1,2,3,4	1,3,4,2	3,1,2,4	4,3,2,1	2,1,4,3	4,2,1,3	2,4,3,1	3,4,1,2	2,3,1,4	4,1,3,2	3,2,4,1
p4	3,2,4,1	4,3,2,1	2,4,3,1	4,2,1,3	1,2,3,4	3,4,1,2	3,1,2,4	1,3,4,2	2,1,4,3	4,1,3,2	2,3,1,4	1,4,2,3
p5	4,2,1,3	2,3,1,4	3,4,1,2	1,2,3,4	3,2,4,1	1,4,2,3	2,1,4,3	4,3,2,1	4,1,3,2	3,1,2,4	1,3,4,2	2,4,3,1
p6	2,4,3,1	3,2,4,1	4,3,2,1	2,1,4,3	2,3,1,4	4,1,3,2	1,2,3,4	3,4,1,2	1,4,2,3	1,3,4,2	3,1,2,4	4,2,1,3
p7	4,1,3,2	2,1,4,3	3,1,2,4	1,3,4,2	3,4,1,2	1,2,3,4	2,4,3,1	4,2,1,3	4,3,2,1	3,2,4,1	1,4,2,3	2,3,1,4
p8	2,3,1,4	3,4,1,2	4,2,1,3	2,4,3,1	2,1,4,3	4,3,2,1	1,3,4,2	3,1,2,4	1,2,3,4	1,4,2,3	3,2,4,1	4,1,3,2
p9	3,1,2,4	4,1,3,2	2,1,4,3	4,3,2,1	1,4,2,3	3,2,4,1	3,4,1,2	1,2,3,4	2,3,1,4	4,2,1,3	2,4,3,1	1,3,4,2
p10	2,1,4,3	3,1,2,4	4,1,3,2	2,3,1,4	2,4,3,1	4,2,1,3	1,4,2,3	3,2,4,1	1,3,4,2	1,2,3,4	3,4,1,2	4,3,2,1
p11	4,3,2,1	2,4,3,1	3,2,4,1	1,4,2,3	3,1,2,4	1,3,4,2	2,3,1,4	4,1,3,2	4,2,1,3	3,4,1,2	1,2,3,4	2,1,4,3
p12	3,4,1,2	4,2,1,3	2,3,1,4	4,1,3,2	1,3,4,2	3,1,2,4	3,2,4,1	1,4,2,3	2,4,3,1	4,3,2,1	2,1,4,3	1,2,3,4

bojenje sa četiri boje																		stabilizator										
B1	a	a	a	a	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	p(8)	p(9)	p(10)	p(11)	p(12)
B2	a	a	a	b	B2	B5	B17	B5	B65	B17	B65	B2	B2	B5	B65	B17	p(1)	p(8)	p(9)									
B3	a	a	a	c	B3	B9	B33	B9	B129	B33	B129	B3	B3	B9	B129	B33	p(1)	p(8)	p(9)									
B4	a	a	a	d	B4	B13	B49	B13	B193	B49	B193	B4	B4	B13	B193	B49	p(1)	p(8)	p(9)									
B5	a	a	b	a	B5	B17	B2	B65	B2	B5	B5	B17	B65	B2	B17	B65	p(1)	p(6)	p(7)									
B6	a	a	b	b	B6	B21	B18	B69	B66	B21	B69	B18	B66	B6	B81	B81	p(1)	p(10)										
B7	a	a	b	c	B7	B25	B34	B73	B130	B37	B133	B19	B67	B10	B145	B97	p(1)											
B8	a	a	b	d	B8	B29	B50	B77	B194	B53	B197	B20	B68	B14	B209	B113	p(1)											
B9	a	a	c	a	B9	B33	B3	B129	B3	B9	B9	B33	B129	B3	B33	B129	p(1)	p(6)	p(7)									
B10	a	a	c	b	B10	B37	B19	B133	B67	B25	B73	B34	B130	B7	B97	B145	p(1)											
B11	a	a	c	c	B11	B41	B35	B137	B131	B41	B137	B35	B131	B11	B161	B161	p(1)	p(10)										
B12	a	a	c	d	B12	B45	B51	B141	B195	B57	B201	B36	B132	B15	B225	B177	p(1)											
B13	a	a	d	a	B13	B49	B4	B193	B4	B13	B13	B49	B193	B4	B49	B193	p(1)	p(6)	p(7)									
B14	a	a	d	b	B14	B53	B20	B197	B68	B29	B77	B50	B194	B8	B113	B209	p(1)											
B15	a	a	d	c	B15	B57	B36	B201	B132	B45	B141	B51	B195	B12	B177	B225	p(1)											
B16	a	a	d	d	B16	B61	B52	B205	B196	B61	B205	B52	B196	B16	B241	B241	p(1)	p(10)										
B17	a	b	a	a	B17	B2	B5	B17	B17	B65	B2	B65	B5	B65	B5	B2	p(1)	p(4)	p(5)									
B18	a	b	a	b	B18	B6	B21	B21	B81	B81	B66	B66	B6	B69	B69	B18	p(1)	p(12)										
B19	a	b	a	c	B19	B10	B37	B25	B145	B97	B130	B67	B7	B73	B133	B34	p(1)											
B20	a	b	a	d	B20	B14	B53	B29	B209	B113	B194	B68	B8	B77	B197	B50	p(1)											
B21	a	b	b	a	B21	B18	B6	B81	B18	B69	B6	B81	B69	B66	B21	B66	p(1)	p(11)										
B22	a	b	b	b	B22	B22	B22	B85	B82	B85	B70	B82	B70	B70	B85	B82	p(1)	p(2)	p(3)									
B23	a	b	b	c	B23	B26	B38	B89	B146	B101	B134	B83	B71	B74	B149	B98	p(1)											
B24	a	b	b	d	B24	B30	B54	B93	B210	B117	B198	B84	B72	B78	B213	B114	p(1)											
B25	a	b	c	a	B25	B34	B7	B145	B19	B73	B10	B97	B133	B67	B37	B130	p(1)											
B26	a	b	c	b	B26	B38	B23	B149	B83	B89	B74	B98	B134	B71	B101	B146	p(1)											
B27	a	b	c	c	B27	B42	B39	B153	B147	B105	B138	B99	B135	B75	B165	B162	p(1)											
B28	a	b	c	d	B28	B46	B55	B157	B211	B121	B202	B100	B136	B79	B229	B178	p(1)											
B29	a	b	d	a	B29	B50	B8	B209	B20	B77	B14	B113	B197	B68	B53	B194	p(1)											
B30	a	b	d	b	B30	B54	B24	B213	B84	B93	B78	B114	B198	B72	B117	B210	p(1)											
B31	a	b	d	c	B31	B58	B40	B217	B148	B109	B142	B115	B199	B76	B181	B226	p(1)											
B32	a	b	d	d	B32	B62	B56	B221	B212	B125	B206	B116	B200	B80	B245	B242	p(1)											
B33	a	c	a	a	B33	B3	B9	B33	B33	B129	B3	B129	B9	B129	B9	B3	p(1)	p(4)	p(5)									
B34	a	c	a	b	B34	B7	B25	B37	B97	B145	B67	B130	B10	B133	B73	B19	p(1)											
B35	a	c	a	c	B35	B11	B41	B41	B161	B161	B131	B131	B11	B137	B137	B35	p(1)	p(12)										
B36	a	c	a	d	B36	B15	B57	B45	B225	B177	B195	B132	B12	B141	B201	B51	p(1)											
B37	a	c	b	a	B37	B19	B10	B97	B34	B133	B7	B145	B73	B130	B25	B67	p(1)											
B38	a	c	b	b	B38	B23	B26	B101	B98	B149	B71	B146	B74	B134	B89	B83	p(1)											
B39	a	c	b	c	B39	B27	B42	B105	B162	B165	B135	B147	B75	B138	B153	B99	p(1)											
B40	a	c	b	d	B40	B31	B58	B109	B226	B181	B199	B148	B76	B142	B217	B115	p(1)											
B41	a	c	c	a	B41	B35	B11	B161	B35	B137	B11	B161	B137	B131	B41	B131	p(1)	p(11)										
B42	a	c	c	b	B42	B39	B27	B165	B99	B153	B75	B162	B138	B135	B105	B147	p(1)											
B43	a	c	c	c	B43	B43	B43	B169	B163	B169	B139	B163	B139	B139	B169	B163	p(1)	p(2)	p(3)									
B44	a	c	c	d	B44	B47	B59	B173	B227	B185	B203	B164	B140	B143	B233	B179	p(1)											
B45	a	c	d	a	B45	B51	B12	B225	B36	B141	B15	B177	B201	B132	B57	B195	p(1)											
B46	a	c	d	b	B46	B55	B28	B229	B100	B157	B79	B178	B202	B136	B121	B211	p(1)											
B47	a	c	d	c	B47	B59	B44	B233	B164	B173	B143	B179	B203	B140	B185	B227	p(1)											
B48	a	c	d	d	B48	B63	B60	B237	B228	B189	B207	B180	B204	B144	B249	B243	p(1)											
B49	a	d	a	a	B49	B4	B13	B49	B49	B193	B4	B193	B13	B193	B13	B4	p(1)	p(4)	p(5)									
B50	a	d	a	b	B50	B8	B29	B53	B113	B209	B68	B194	B14	B197	B77	B20	p(1)											
B51	a	d	a	c	B51	B12	B45	B57	B177	B225	B132	B195	B15	B201	B141	B36	p(1)											
B52	a	d	a	d	B52	B16	B61	B61	B241	B241	B196	B196	B16	B205	B205	B52	p(1)	p(12)										
B53	a	d	b	a	B53	B20	B14	B113	B50	B197	B8	B209	B77	B194	B29	B68	p(1)											
B54	a	d	b	b	B54	B24	B30	B117	B114	B213	B72	B210	B78	B198	B93	B84	p(1)											

B55	a	d	b	c	B55	B28	B46	B121	B178	B229	B136	B211	B79	B202	B157	B100	p(1)												1
B56	a	d	b	d	B56	B32	B62	B125	B242	B245	B200	B212	B80	B206	B221	B116	p(1)												1
B57	a	d	c	a	B57	B36	B15	B177	B51	B201	B12	B225	B141	B195	B45	B132	p(1)												1
B58	a	d	c	b	B58	B40	B31	B181	B115	B217	B76	B226	B142	B199	B109	B148	p(1)												1
B59	a	d	c	c	B59	B44	B47	B185	B179	B233	B140	B227	B143	B203	B173	B164	p(1)												1
B60	a	d	c	d	B60	B48	B63	B189	B243	B249	B204	B228	B144	B207	B237	B180	p(1)												1
B61	a	d	d	a	B61	B52	B16	B241	B52	B205	B16	B241	B205	B196	B61	B196	p(1)	p(11)											2
B62	a	d	d	b	B62	B56	B32	B245	B116	B221	B80	B242	B206	B200	B125	B212	p(1)												1
B63	a	d	d	c	B63	B60	B48	B249	B180	B237	B144	B243	B207	B204	B189	B228	p(1)												1
B64	a	d	d	d	B64	B64	B64	B253	B244	B253	B208	B244	B208	B208	B253	B244	p(1)	p(2)	p(3)										3
B65	b	a	a	a	B65	B65	B65	B2	B5	B2	B17	B5	B17	B17	B2	B5	p(1)	p(2)	p(3)										3
B66	b	a	a	b	B66	B69	B81	B6	B69	B18	B81	B6	B18	B21	B66	B21	p(1)	p(11)											2
B67	b	a	a	c	B67	B73	B97	B10	B133	B34	B145	B7	B19	B25	B130	B37	p(1)												1
B68	b	a	a	d	B68	B77	B113	B14	B197	B50	B209	B8	B20	B29	B194	B53	p(1)												1
B69	b	a	b	a	B69	B81	B66	B66	B6	B6	B21	B21	B81	B18	B18	B69	p(1)	p(12)											2
B70	b	a	b	b	B70	B85	B82	B70	B70	B22	B85	B22	B82	B22	B82	B85	p(1)	p(4)	p(5)										3
B71	b	a	b	c	B71	B89	B98	B74	B134	B38	B149	B23	B83	B26	B146	B101	p(1)												1
B72	b	a	b	d	B72	B93	B114	B78	B198	B54	B213	B24	B84	B30	B210	B117	p(1)												1
B73	b	a	c	a	B73	B97	B67	B130	B7	B10	B25	B37	B145	B19	B34	B133	p(1)												1
B74	b	a	c	b	B74	B101	B83	B134	B71	B26	B89	B38	B146	B23	B98	B149	p(1)												1
B75	b	a	c	c	B75	B105	B99	B138	B135	B42	B153	B39	B147	B27	B162	B165	p(1)												1
B76	b	a	c	d	B76	B109	B115	B142	B199	B58	B217	B40	B148	B31	B226	B181	p(1)												1
B77	b	a	d	a	B77	B113	B68	B194	B8	B14	B29	B53	B209	B20	B50	B197	p(1)												1
B78	b	a	d	b	B78	B117	B84	B198	B72	B30	B93	B54	B210	B24	B114	B213	p(1)												1
B79	b	a	d	c	B79	B121	B100	B202	B136	B46	B157	B55	B211	B28	B178	B229	p(1)												1
B80	b	a	d	d	B80	B125	B116	B206	B200	B62	B221	B56	B212	B32	B242	B245	p(1)												1
B81	b	b	a	a	B81	B66	B69	B18	B21	B66	B18	B69	B21	B81	B6	B6	p(1)	p(10)											2
B82	b	b	a	b	B82	B70	B85	B22	B85	B82	B82	B70	B22	B85	B70	B22	p(1)	p(6)	p(7)										3
B83	b	b	a	c	B83	B74	B101	B26	B149	B98	B146	B71	B23	B89	B134	B38	p(1)												1
B84	b	b	a	d	B84	B78	B117	B30	B213	B114	B210	B72	B24	B93	B198	B54	p(1)												1
B85	b	b	b	a	B85	B82	B70	B82	B22	B70	B22	B85	B85	B82	B22	B70	p(1)	p(8)	p(9)										3
B86	b	b	b	b	B86	B86	B86	B86	B86	B86	B86	B86	B86	B86	B86	B86	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	p(8)	p(9)	p(10)	p(11)	p(12)	12
B87	b	b	b	c	B87	B90	B102	B90	B150	B102	B150	B87	B87	B90	B150	B102	p(1)	p(8)	p(9)										3
B88	b	b	b	d	B88	B94	B118	B94	B214	B118	B214	B88	B88	B94	B214	B118	p(1)	p(8)	p(9)										3
B89	b	b	c	a	B89	B98	B71	B146	B23	B74	B26	B101	B149	B83	B38	B134	p(1)												1
B90	b	b	c	b	B90	B102	B87	B150	B87	B90	B90	B102	B150	B87	B102	B150	p(1)	p(6)	p(7)										3
B91	b	b	c	c	B91	B106	B103	B154	B151	B106	B154	B103	B151	B91	B166	B166	p(1)	p(10)											2
B92	b	b	c	d	B92	B110	B119	B158	B215	B122	B218	B104	B152	B95	B230	B182	p(1)												1
B93	b	b	d	a	B93	B114	B72	B210	B24	B78	B30	B117	B213	B84	B54	B198	p(1)												1
B94	b	b	d	b	B94	B118	B88	B214	B88	B94	B94	B118	B214	B88	B118	B214	p(1)	p(6)	p(7)										3
B95	b	b	d	c	B95	B122	B104	B218	B152	B110	B158	B119	B215	B92	B182	B230	p(1)												1
B96	b	b	d	d	B96	B126	B120	B222	B216	B126	B222	B120	B216	B96	B246	B246	p(1)	p(10)											2
B97	b	c	a	a	B97	B67	B73	B34	B37	B130	B19	B133	B25	B145	B10	B7	p(1)												1
B98	b	c	a	b	B98	B71	B89	B38	B101	B146	B83	B134	B26	B149	B74	B23	p(1)												1
B99	b	c	a	c	B99	B75	B105	B42	B165	B162	B147	B135	B27	B153	B138	B39	p(1)												1
B100	b	c	a	d	B100	B79	B121	B46	B229	B178	B211	B136	B28	B157	B202	B55	p(1)												1
B101	b	c	b	a	B101	B83	B74	B98	B38	B134	B23	B149	B89	B146	B26	B71	p(1)												1
B102	b	c	b	b	B102	B87	B90	B102	B102	B150	B87	B150	B90	B150	B90	B87	p(1)	p(4)	p(5)										3
B103	b	c	b	c	B103	B91	B106	B106	B166	B166	B151	B151	B91	B154	B154	B103	p(1)	p(12)											2
B104	b	c	b	d	B104	B95	B122	B110	B230	B182	B215	B152	B92	B158	B218	B119	p(1)												1
B105	b	c	c	a	B105	B99	B75	B162	B39	B138	B27	B165	B153	B147	B42	B135	p(1)												1
B106	b	c	c	b	B106	B103	B91	B166	B103	B154	B91	B166	B154	B151	B106	B151	p(1)	p(11)											2
B107	b	c	c	c	B107	B107	B107	B170	B167	B170	B155	B167	B155	B155	B170	B167	p(1)	p(2)	p(3)										3
B108	b	c	c	d	B108	B111	B123	B174	B231	B186	B219	B168	B156	B159	B234	B183	p(1)												1
B109	b	c	d	a	B109	B115	B76	B226	B40	B142	B31	B181	B217	B148	B58	B199	p(1)												1

B110	b	c	d	b	B110	B119	B92	B230	B104	B158	B95	B182	B218	B152	B122	B215	p(1)			1
B111	b	c	d	c	B111	B123	B108	B234	B168	B174	B159	B183	B219	B156	B186	B231	p(1)			1
B112	b	c	d	d	B112	B127	B124	B238	B232	B190	B223	B184	B220	B160	B250	B247	p(1)			1
B113	b	d	a	a	B113	B68	B77	B50	B53	B194	B20	B197	B29	B209	B14	B8	p(1)			1
B114	b	d	a	b	B114	B72	B93	B54	B117	B210	B84	B198	B30	B213	B78	B24	p(1)			1
B115	b	d	a	c	B115	B76	B109	B58	B181	B226	B148	B199	B31	B217	B142	B40	p(1)			1
B116	b	d	a	d	B116	B80	B125	B62	B245	B242	B212	B200	B32	B221	B206	B56	p(1)			1
B117	b	d	b	a	B117	B84	B78	B114	B54	B198	B24	B213	B93	B210	B30	B72	p(1)			1
B118	b	d	b	b	B118	B88	B94	B118	B118	B214	B88	B214	B94	B214	B94	B88	p(1)	p(4)	p(5)	3
B119	b	d	b	c	B119	B92	B110	B122	B182	B230	B152	B215	B95	B218	B158	B104	p(1)			1
B120	b	d	b	d	B120	B96	B126	B126	B246	B246	B216	B216	B96	B222	B222	B120	p(1)	p(12)		2
B121	b	d	c	a	B121	B100	B79	B178	B55	B202	B28	B229	B157	B211	B46	B136	p(1)			1
B122	b	d	c	b	B122	B104	B95	B182	B119	B218	B92	B230	B158	B215	B110	B152	p(1)			1
B123	b	d	c	c	B123	B108	B111	B186	B183	B234	B156	B231	B159	B219	B174	B168	p(1)			1
B124	b	d	c	d	B124	B112	B127	B190	B247	B250	B220	B232	B160	B223	B238	B184	p(1)			1
B125	b	d	d	a	B125	B116	B80	B242	B56	B206	B32	B245	B221	B212	B62	B200	p(1)			1
B126	b	d	d	b	B126	B120	B96	B246	B120	B222	B96	B246	B222	B216	B126	B216	p(1)	p(11)		2
B127	b	d	d	c	B127	B124	B112	B250	B184	B238	B160	B247	B223	B220	B190	B232	p(1)			1
B128	b	d	d	d	B128	B128	B128	B254	B248	B254	B224	B248	B224	B224	B254	B248	p(1)	p(2)	p(3)	3
B129	c	a	a	a	B129	B129	B129	B3	B9	B3	B33	B9	B33	B33	B3	B9	p(1)	p(2)	p(3)	3
B130	c	a	a	b	B130	B133	B145	B7	B73	B19	B97	B10	B34	B37	B67	B25	p(1)			1
B131	c	a	a	c	B131	B137	B161	B11	B137	B35	B161	B11	B35	B41	B131	B41	p(1)	p(11)		2
B132	c	a	a	d	B132	B141	B177	B15	B201	B51	B225	B12	B36	B45	B195	B57	p(1)			1
B133	c	a	b	a	B133	B145	B130	B67	B10	B7	B37	B25	B97	B34	B19	B73	p(1)			1
B134	c	a	b	b	B134	B149	B146	B71	B74	B23	B101	B26	B98	B38	B83	B89	p(1)			1
B135	c	a	b	c	B135	B153	B162	B75	B138	B39	B165	B27	B99	B42	B147	B105	p(1)			1
B136	c	a	b	d	B136	B157	B178	B79	B202	B55	B229	B28	B100	B46	B211	B121	p(1)			1
B137	c	a	c	a	B137	B161	B131	B131	B11	B11	B41	B41	B161	B35	B35	B137	p(1)	p(12)		2
B138	c	a	c	b	B138	B165	B147	B135	B75	B27	B105	B42	B162	B39	B99	B153	p(1)			1
B139	c	a	c	c	B139	B169	B163	B139	B139	B43	B169	B43	B163	B43	B163	B169	p(1)	p(4)	p(5)	3
B140	c	a	c	d	B140	B173	B179	B143	B203	B59	B233	B44	B164	B47	B227	B185	p(1)			1
B141	c	a	d	a	B141	B177	B132	B195	B12	B15	B45	B57	B225	B36	B51	B201	p(1)			1
B142	c	a	d	b	B142	B181	B148	B199	B76	B31	B109	B58	B226	B40	B115	B217	p(1)			1
B143	c	a	d	c	B143	B185	B164	B203	B140	B47	B173	B59	B227	B44	B179	B233	p(1)			1
B144	c	a	d	d	B144	B189	B180	B207	B204	B63	B237	B60	B228	B48	B243	B249	p(1)			1
B145	c	b	a	a	B145	B130	B133	B19	B25	B67	B34	B73	B37	B97	B7	B10	p(1)			1
B146	c	b	a	b	B146	B134	B149	B23	B89	B83	B98	B74	B38	B101	B71	B26	p(1)			1
B147	c	b	a	c	B147	B138	B165	B27	B153	B99	B162	B75	B39	B105	B135	B42	p(1)			1
B148	c	b	a	d	B148	B142	B181	B31	B217	B115	B226	B76	B40	B109	B199	B58	p(1)			1
B149	c	b	b	a	B149	B146	B134	B83	B26	B71	B38	B89	B101	B98	B23	B74	p(1)			1
B150	c	b	b	b	B150	B150	B150	B87	B90	B87	B102	B90	B102	B102	B87	B90	p(1)	p(2)	p(3)	3
B151	c	b	b	c	B151	B154	B166	B91	B154	B103	B166	B91	B103	B106	B151	B106	p(1)	p(11)		2
B152	c	b	b	d	B152	B158	B182	B95	B218	B119	B230	B92	B104	B110	B215	B122	p(1)			1
B153	c	b	c	a	B153	B162	B135	B147	B27	B75	B42	B105	B165	B99	B39	B138	p(1)			1
B154	c	b	c	b	B154	B166	B151	B151	B91	B91	B106	B106	B166	B103	B103	B154	p(1)	p(12)		2

B155	c	b	c	c		B155	B170	B167	B155	B155	B107	B170	B107	B167	B107	B167	B170		p(1)	p(4)	p(5)										3	
B156	c	b	c	d		B156	B174	B183	B159	B219	B123	B234	B108	B168	B111	B231	B186		p(1)												1	
B157	c	b	d	a		B157	B178	B136	B211	B28	B79	B46	B121	B229	B100	B55	B202		p(1)												1	
B158	c	b	d	b		B158	B182	B152	B215	B92	B95	B110	B122	B230	B104	B119	B218		p(1)												1	
B159	c	b	d	c		B159	B186	B168	B219	B156	B111	B174	B123	B231	B108	B183	B234		p(1)												1	
B160	c	b	d	d		B160	B190	B184	B223	B220	B127	B238	B124	B232	B112	B247	B250		p(1)												1	
B161	c	c	a	a		B161	B131	B137	B35	B41	B131	B35	B137	B41	B161	B11	B11		p(1)	p(10)											2	
B162	c	c	a	b		B162	B135	B153	B39	B105	B147	B99	B138	B42	B165	B75	B27		p(1)												1	
B163	c	c	a	c		B163	B139	B169	B43	B169	B163	B163	B139	B43	B169	B139	B43		p(1)	p(6)	p(7)										3	
B164	c	c	a	d		B164	B143	B185	B47	B233	B179	B227	B140	B44	B173	B203	B59		p(1)												1	
B165	c	c	b	a		B165	B147	B138	B99	B42	B135	B39	B153	B105	B162	B27	B75		p(1)												1	
B166	c	c	b	b		B166	B151	B154	B103	B106	B151	B103	B154	B106	B166	B91	B91		p(1)	p(10)											2	
B167	c	c	b	c		B167	B155	B170	B107	B170	B167	B167	B155	B107	B170	B155	B107		p(1)	p(6)	p(7)										3	
B168	c	c	b	d		B168	B159	B186	B111	B234	B183	B231	B156	B108	B174	B219	B123		p(1)												1	
B169	c	c	c	a		B169	B163	B139	B163	B43	B139	B43	B169	B169	B163	B43	B139		p(1)	p(8)	p(9)										3	
B170	c	c	c	b		B170	B167	B155	B167	B107	B155	B107	B170	B170	B167	B107	B155		p(1)	p(8)	p(9)										3	
B171	c	c	c	c		B171	B171	B171	B171	B171	B171	B171	B171	B171	B171	B171	B171		p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	p(8)	p(9)	p(10)	p(11)	p(12)	12	
B172	c	c	c	d		B172	B175	B187	B175	B235	B187	B235	B172	B172	B175	B235	B187		p(1)	p(8)	p(9)										3	
B173	c	c	d	a		B173	B179	B140	B227	B44	B143	B47	B185	B233	B164	B59	B203		p(1)												1	
B174	c	c	d	b		B174	B183	B156	B231	B108	B159	B111	B186	B234	B168	B123	B219		p(1)												1	
B175	c	c	d	c		B175	B187	B172	B235	B172	B175	B175	B187	B235	B172	B187	B235		p(1)	p(6)	p(7)										3	
B176	c	c	d	d		B176	B191	B188	B239	B236	B191	B239	B188	B236	B176	B251	B251		p(1)	p(10)											2	
B177	c	d	a	a		B177	B132	B141	B51	B57	B195	B36	B201	B45	B225	B15	B12		p(1)												1	
B178	c	d	a	b		B178	B136	B157	B55	B121	B211	B100	B202	B46	B229	B79	B28		p(1)												1	
B179	c	d	a	c		B179	B140	B173	B59	B185	B227	B164	B203	B47	B233	B143	B44		p(1)												1	
B180	c	d	a	d		B180	B144	B189	B63	B249	B243	B228	B204	B48	B237	B207	B60		p(1)												1	
B181	c	d	b	a		B181	B148	B142	B115	B58	B199	B40	B217	B109	B226	B31	B76		p(1)												1	
B182	c	d	b	b		B182	B152	B158	B119	B122	B215	B104	B218	B110	B230	B95	B92		p(1)												1	
B183	c	d	b	c		B183	B156	B174	B123	B186	B231	B168	B219	B111	B234	B159	B108		p(1)												1	
B184	c	d	b	d		B184	B160	B190	B127	B250	B247	B232	B220	B112	B238	B223	B124		p(1)												1	
B185	c	d	c	a		B185	B164	B143	B179	B59	B203	B44	B233	B173	B227	B47	B140		p(1)												1	
B186	c	d	c	b		B186	B168	B159	B183	B123	B219	B108	B234	B174	B231	B111	B156		p(1)												1	
B187	c	d	c	c		B187	B172	B175	B187	B187	B235	B172	B235	B175	B235	B175	B172		p(1)	p(4)	p(5)										3	
B188	c	d	c	d		B188	B176	B191	B191	B251	B251	B236	B236	B176	B239	B239	B188		p(1)	p(12)											2	
B189	c	d	d	a		B189	B180	B144	B243	B60	B207	B48	B249	B237	B228	B63	B204		p(1)												1	
B190	c	d	d	b		B190	B184	B160	B247	B124	B223	B112	B250	B238	B232	B127	B220		p(1)												1	
B191	c	d	d	c		B191	B188	B176	B251	B188	B239	B176	B251	B239	B236	B191	B236		p(1)	p(11)											2	
B192	c	d	d	d		B192	B192	B192	B255	B252	B255	B240	B252	B240	B240	B255	B252		p(1)	p(2)	p(3)										3	
B193	d	a	a	a		B193	B193	B193	B4	B13	B4	B49	B13	B49	B49	B4	B13		p(1)	p(2)	p(3)										3	
B194	d	a	a	b		B194	B197	B209	B8	B77	B20	B113	B14	B50	B53	B68	B29		p(1)												1	
B195	d	a	a	c		B195	B201	B225	B12	B141	B36	B177	B15	B51	B57	B132	B45		p(1)												1	
B196	d	a	a	d		B196	B205	B241	B16	B205	B52	B241	B16	B52	B61	B196	B61		p(1)	p(11)											2	
B197	d	a	b	a		B197	B209	B194	B68	B14	B8	B53	B29	B113	B50	B20	B77		p(1)												1	
B198	d	a	b	b		B198	B213	B210	B72	B78	B24	B117	B30	B114	B54	B84	B93		p(1)												1	
B199	d	a	b	c		B199	B217	B226	B76	B142	B40	B181	B31	B115	B58	B148	B109		p(1)												1	
B200	d	a	b	d		B200	B221	B242	B80	B206	B56	B245	B32	B116	B62	B212	B125		p(1)												1	
B201	d	a	c	a		B201	B225	B195	B132	B15	B12	B57	B45	B177	B51	B36	B141		p(1)												1	
B202	d	a	c	b		B202	B229	B211	B136	B79	B28	B121	B46	B178	B55	B100	B157		p(1)												1	
B203	d	a	c	c		B203	B233	B227	B140	B143	B44	B185	B47	B179	B59	B164	B173		p(1)												1	
B204	d	a	c	d		B204	B237	B243	B144	B207	B60	B249	B48	B180	B63	B228	B189		p(1)												1	
B205	d	a	d	a		B205	B241	B196	B196	B16	B16	B61	B61	B241	B52	B52	B205		p(1)	p(12)											2	
B206	d	a	d	b		B206	B245	B212	B200	B80	B32	B125	B62	B242	B56	B116	B221		p(1)												1	
B207	d	a	d	c		B207	B249	B228	B204	B144	B48	B189	B63	B243	B60	B180	B237		p(1)												1	
B208	d	a	d	d		B208	B253	B244	B208	B208	B64	B253	B64	B244	B64	B244	B253		p(1)	p(4)	p(5)										3	
B209	d	b	a	a		B209	B194	B197	B20	B29	B68	B50	B77	B53	B113	B8	B14		p(1)												1	
B210	d	b	a	b		B210	B198	B213	B24	B93	B84	B114	B78	B54	B117	B72	B30		p(1)												1	

B211	d	b	a	c		B211	B202	B229	B28	B157	B100	B178	B79	B55	B121	B136	B46		p(1)											
B212	d	b	a	d		B212	B206	B245	B32	B221	B116	B242	B80	B56	B125	B200	B62		p(1)											
B213	d	b	b	a		B213	B210	B198	B84	B30	B72	B54	B93	B117	B114	B24	B78		p(1)											
B214	d	b	b	b		B214	B214	B214	B88	B94	B88	B118	B94	B118	B118	B88	B94		p(1)	p(2)	p(3)									
B215	d	b	b	c		B215	B218	B230	B92	B158	B104	B182	B95	B119	B122	B152	B110		p(1)											
B216	d	b	b	d		B216	B222	B246	B96	B222	B120	B246	B96	B120	B126	B216	B126		p(1)	p(11)										
B217	d	b	c	a		B217	B226	B199	B148	B31	B76	B58	B109	B181	B115	B40	B142		p(1)											
B218	d	b	c	b		B218	B230	B215	B152	B95	B92	B122	B110	B182	B119	B104	B158		p(1)											
B219	d	b	c	c		B219	B234	B231	B156	B159	B108	B186	B111	B183	B123	B168	B174		p(1)											
B220	d	b	c	d		B220	B238	B247	B160	B223	B124	B250	B112	B184	B127	B232	B190		p(1)											
B221	d	b	d	a		B221	B242	B200	B212	B32	B80	B62	B125	B245	B116	B56	B206		p(1)											
B222	d	b	d	b		B222	B246	B216	B216	B96	B96	B126	B126	B246	B120	B120	B222		p(1)	p(12)										
B223	d	b	d	c		B223	B250	B232	B220	B160	B112	B190	B127	B247	B124	B184	B238		p(1)											
B224	d	b	d	d		B224	B254	B248	B224	B224	B128	B254	B128	B248	B128	B248	B254		p(1)	p(4)	p(5)									
B225	d	c	a	a		B225	B195	B201	B36	B45	B132	B51	B141	B57	B177	B12	B15		p(1)											
B226	d	c	a	b		B226	B199	B217	B40	B109	B148	B115	B142	B58	B181	B76	B31		p(1)											
B227	d	c	a	c		B227	B203	B233	B44	B173	B164	B179	B143	B59	B185	B140	B47		p(1)											
B228	d	c	a	d		B228	B207	B249	B48	B237	B180	B243	B144	B60	B189	B204	B63		p(1)											
B229	d	c	b	a		B229	B211	B202	B100	B46	B136	B55	B157	B121	B178	B28	B79		p(1)											
B230	d	c	b	b		B230	B215	B218	B104	B110	B152	B119	B158	B122	B182	B92	B95		p(1)											
B231	d	c	b	c		B231	B219	B234	B108	B174	B168	B183	B159	B123	B186	B156	B111		p(1)											
B232	d	c	b	d		B232	B223	B250	B112	B238	B184	B247	B160	B124	B190	B220	B127		p(1)											
B233	d	c	c	a		B233	B227	B203	B164	B47	B140	B59	B173	B185	B179	B44	B143		p(1)											
B234	d	c	c	b		B234	B231	B219	B168	B111	B156	B123	B174	B186	B183	B108	B159		p(1)											
B235	d	c	c	c		B235	B235	B235	B172	B175	B172	B187	B175	B187	B187	B172	B175		p(1)	p(2)	p(3)									
B236	d	c	c	d		B236	B239	B251	B176	B239	B188	B251	B176	B188	B191	B236	B191		p(1)	p(11)										
B237	d	c	d	a		B237	B243	B204	B228	B48	B144	B63	B189	B249	B180	B60	B207		p(1)											
B238	d	c	d	b		B238	B247	B220	B232	B112	B160	B127	B190	B250	B184	B124	B223		p(1)											
B239	d	c	d	c		B239	B251	B236	B236	B176	B176	B191	B191	B251	B188	B188	B239		p(1)	p(12)										
B240	d	c	d	d		B240	B255	B252	B240	B240	B192	B255	B192	B252	B192	B252	B255		p(1)	p(4)	p(5)									
B241	d	d	a	a		B241	B196	B205	B52	B61	B196	B52	B205	B61	B241	B16	B16		p(1)	p(10)										
B242	d	d	a	b		B242	B200	B221	B56	B125	B212	B116	B206	B62	B245	B80	B32		p(1)											
B243	d	d	a	c		B243	B204	B237	B60	B189	B228	B180	B207	B63	B249	B144	B48		p(1)											
B244	d	d	a	d		B244	B208	B253	B64	B253	B244	B244	B208	B64	B253	B208	B64		p(1)	p(6)	p(7)									
B245	d	d	b	a		B245	B212	B206	B116	B62	B200	B56	B221	B125	B242	B32	B80		p(1)											
B246	d	d	b	b		B246	B216	B222	B120	B126	B216	B120	B222	B126	B246	B96	B96		p(1)	p(10)										
B247	d	d	b	c		B247	B220	B238	B124	B190	B232	B184	B223	B127	B250	B160	B112		p(1)											
B248	d	d	b	d		B248	B224	B254	B128	B254	B248	B248	B224	B128	B254	B224	B128		p(1)	p(6)	p(7)									
B249	d	d	c	a		B249	B228	B207	B180	B63	B204	B60	B237	B189	B243	B48	B144		p(1)											
B250	d	d	c	b		B250	B232	B223	B184	B127	B220	B124	B238	B190	B247	B112	B160		p(1)											
B251	d	d	c	c		B251	B236	B239	B188	B191	B236	B188	B239	B191	B251	B176	B176		p(1)	p(10)										
B252	d	d	c	d		B252	B240	B255	B192	B255	B252	B252	B240	B192	B255	B240	B192		p(1)	p(6)	p(7)									
B253	d	d	d	a		B253	B244	B208	B244	B64	B208	B64	B253	B253	B244	B64	B208		p(1)	p(8)	p(9)									
B254	d	d	d	b		B254	B248	B224	B248	B128	B224	B128	B254	B254	B248	B128	B224		p(1)	p(8)	p(9)									
B255	d	d	d	c		B255	B252	B240	B252	B192	B240	B192	B255	B255	B252	B192	B240		p(1)	p(8)	p(9)									
B256	d	d	d	d		B256	B256	B256	B256	B256	B256	B256	B256	B256	B256	B256	B256		p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	p(8)	p(9)	p(10)	p(11)	p(12)
					broj fiksnih	φ(1)=256	φ(2)=16	φ(3)=16	φ(4)=16	φ(5)=16	φ(6)=16	φ(7)=16	φ(8)=16	φ(9)=16	φ(10)=16	φ(11)=16	φ(12)=16	432									različita bojenja			
																različita bojenja		36												

Ивентар бојења темена тетраедра са четири боје

Циклусни индекс $\frac{1}{12}\left(Z1^4+3\,Z2^2+8\,Z1\,Z3\right)$

$f[Z1\_,Z2\_,Z3\_]:=\frac{1}{12}\left(Z1^4+3\,Z2^2+8\,Z1\,Z3\right)$

$f[a+c+b+d,\ a^2+c^2+b^2+d^2,\ a^3+c^3+b^3+d^3]$

$$\frac{1}{12}\left((a+b+c+d)^4+3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2+8\,(a+b+c+d)\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\right)$$

••••••• ••••••

$$a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4+a^3c+a^2bc+ab^2c+b^3c+a^2c^2+abc^2+b^2c^2+ac^3+bc^3+c^4+a^3d+a^2bd+ab^2d+b^3d+a^2cd+2abcd+b^2cd+ac^2d+bc^2d+c^3d+a^2d^2+abd^2+b^2d^2+acd^2+bcd^2+c^2d^2+ad^3+bd^3+cd^3+d^4$$

f[4,4,4]= 36

Дакле укупно 36 нееквивалентних бојења.

XI Бојење коцке

група пресликавања страна коцке							
P_1 =	1	2	3	4	5	6	(1) (2) (3) (4) (5) (6)
P_2 =	6	4	3	1	5	2	(1 6 2 4) (3) (5)
P_3 =	2	1	3	6	5	4	(1 2) (3) (6 4) (5)
P_4 =	4	6	3	2	5	1	(1 4 2 6) (3) (5)
P_5 =	1	2	6	3	4	5	(1) (2) (6 5 4 3)
P_6 =	1	2	5	6	3	4	(1) (2) (5 3) (6 4)
P_7 =	1	2	4	5	6	3	(1) (2) (4 5 6 3)
P_8 =	3	5	2	4	1	6	(1 3 2 5) (4) (6)
P_9 =	2	1	5	4	3	6	(1 2) (5 3) (4) (6)
P_{10} =	5	3	1	4	2	6	(1 5 2 3) (4) (6)
P_{11} =	6	4	1	5	2	3	(1 6 3) (4 5 2)
P_{12} =	3	5	6	2	4	1	(1 3 6) (5 4 2)
P_{13} =	5	3	4	2	6	1	(1 5 6) (3 4 2)
P_{14} =	6	4	2	3	1	5	(1 6 5) (4 3 2)
P_{15} =	5	3	6	1	4	2	(1 5 4) (3 6 2)
P_{16} =	4	6	2	5	1	3	(1 4 5) (6 3 2)
P_{17} =	4	6	1	3	2	5	(1 4 3) (6 5 2)
P_{18} =	3	5	4	1	6	2	(1 3 4) (5 6 2)
P_{19} =	2	1	6	5	4	3	(1 2) (6 3) (5 4)
P_{20} =	6	4	5	2	3	1	(1 6) (4 2) (5 3)
P_{21} =	5	3	2	6	1	4	(1 5) (3 2) (6 4)
P_{22} =	2	1	4	3	6	5	(1 2) (4 3) (6 5)
P_{23} =	4	6	5	1	3	2	(1 4) (6 2) (5 3)
P_{24} =	3	5	1	6	2	4	(1 3) (5 2) (6 4)

$(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)$ +
$(Z_4)(Z_1)(Z_1)$ +
$(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_1)$ +
$(Z_4)(Z_1)(Z_1)$ +
$(Z_1)(Z_1)(Z_4)$ +
$(Z_1)(Z_1)(Z_2)(Z_2)$ +
$(Z_1)(Z_1)(Z_4)$ +
$(Z_4)(Z_1)(Z_1)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_1)$ +
$(Z_4)(Z_1)(Z_1)$ +
$(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_2)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_2)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_2)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_2)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_2)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_2)$ = $(Z1^6 + 3Z1^2 Z2^2 + 6Z2^3 + 8Z3^2 + 6Z1^2 Z4) / 24$

Пермутациона група пресликавања страна коцке

p1	{1,2,3,4,5,6}
p2	{6,4,3,1,5,2}
p3	{2,1,3,6,5,4}
p4	{4,6,3,2,5,1}
p5	{1,2,6,3,4,5}
p6	{1,2,5,6,3,4}
p7	{1,2,4,5,6,3}
p8	{3,5,2,4,1,6}
p9	{2,1,5,4,3,6}
p10	{5,3,1,4,2,6}
p11	{6,4,1,5,2,3}
p12	{3,5,6,2,4,1}
p13	{5,3,4,2,6,1}
p14	{6,4,2,3,1,5}
p15	{5,3,6,1,4,2}
p16	{4,6,2,5,1,3}
p17	{4,6,1,3,2,5}
p18	{3,5,4,1,6,2}
p19	{2,1,6,5,4,3}
p20	{6,4,5,2,3,1}
p21	{5,3,2,6,1,4}
p22	{2,1,4,3,6,5}
p23	{4,6,5,1,3,2}
p24	{3,5,1,6,2,4}

Таблица пермутационе групе пресликавања страна коцке

	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	p24
p1	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	p24
p2	p2	p3	p4	p1	p15	p23	p18	p14	p20	p11	p24	p5	p7	p21	p19	p8	p10	p22	p12	p6	p16	p13	p9	p17
p3	p3	p4	p1	p2	p19	p9	p22	p21	p6	p24	p17	p15	p18	p16	p12	p14	p11	p13	p5	p23	p8	p7	p20	p10
p4	p4	p1	p2	p3	p12	p20	p13	p16	p23	p17	p10	p19	p22	p8	p5	p21	p24	p7	p15	p9	p14	p18	p6	p11
p5	p5	p14	p22	p17	p6	p7	p1	p12	p19	p15	p2	p24	p10	p20	p21	p4	p23	p8	p3	p11	p13	p9	p16	p18
p6	p6	p20	p9	p23	p7	p1	p5	p24	p3	p21	p14	p18	p15	p11	p13	p17	p16	p12	p22	p2	p10	p19	p4	p8
p7	p7	p11	p19	p16	p1	p5	p6	p18	p22	p13	p20	p8	p21	p2	p10	p23	p4	p24	p9	p14	p15	p3	p17	p12
p8	p8	p18	p24	p12	p14	p21	p16	p9	p10	p1	p7	p20	p4	p22	p2	p19	p5	p23	p11	p13	p3	p17	p15	p6
p9	p9	p23	p6	p20	p22	p3	p19	p10	p1	p8	p16	p13	p12	p17	p18	p11	p14	p15	p7	p4	p24	p5	p2	p21
p10	p10	p15	p21	p13	p17	p24	p11	p1	p8	p9	p19	p4	p20	p5	p23	p7	p22	p2	p16	p12	p6	p14	p18	p3
p11	p11	p19	p16	p7	p10	p17	p24	p2	p14	p20	p12	p1	p6	p15	p9	p18	p13	p3	p8	p5	p23	p21	p22	p4
p12	p12	p8	p18	p24	p20	p13	p4	p19	p15	p5	p1	p11	p17	p9	p14	p3	p6	p16	p2	p10	p22	p23	p21	p7
p13	p13	p10	p15	p21	p4	p12	p20	p7	p18	p22	p9	p16	p14	p1	p17	p6	p3	p11	p23	p8	p5	p2	p24	p19
p14	p14	p22	p17	p5	p21	p16	p8	p20	p11	p2	p18	p6	p1	p13	p3	p12	p15	p9	p24	p7	p4	p10	p19	p23
p15	p15	p21	p13	p10	p23	p18	p2	p5	p12	p19	p3	p17	p11	p6	p16	p1	p9	p14	p4	p24	p7	p20	p8	p22
p16	p16	p7	p11	p19	p8	p14	p21	p23	p17	p4	p13	p9	p3	p18	p1	p15	p12	p6	p10	p22	p2	p24	p5	p20
p17	p17	p5	p14	p22	p24	p11	p10	p4	p16	p23	p15	p3	p9	p12	p6	p13	p18	p1	p21	p19	p20	p8	p7	p2
p18	p18	p24	p12	p8	p2	p15	p23	p22	p13	p7	p6	p14	p16	p3	p11	p9	p1	p17	p20	p21	p19	p4	p10	p5
p19	p19	p16	p7	p11	p9	p22	p3	p15	p5	p12	p4	p10	p24	p23	p8	p2	p20	p21	p1	p17	p18	p6	p14	p13
p20	p20	p9	p23	p6	p13	p4	p12	p11	p2	p14	p8	p7	p5	p10	p22	p24	p21	p19	p18	p1	p17	p15	p3	p16
p21	p21	p13	p10	p15	p16	p8	p14	p6	p24	p3	p22	p23	p2	p7	p4	p5	p19	p20	p17	p18	p1	p11	p12	p9
p22	p22	p17	p5	p14	p3	p19	p9	p13	p7	p18	p23	p21	p8	p4	p24	p20	p2	p10	p6	p16	p12	p1	p11	p15
p23	p23	p6	p20	p9	p18	p2	p15	p17	p4	p16	p21	p22	p19	p24	p7	p10	p8	p5	p13	p3	p11	p12	p1	p14
p24	p24	p12	p8	p18	p11	p10	p17	p3	p21	p6	p5	p2	p23	p19	p20	p22	p7	p4	p14	p15	p9	p16	p13	p1

Таблица пермутационе групе пресликавања страна коцке

	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12
p1	1,2,3,4,5,6	6,4,3,1,5,2	2,1,3,6,5,4	4,6,3,2,5,1	1,2,6,3,4,5	1,2,5,6,3,4	1,2,4,5,6,3	3,5,2,4,1,6	2,1,5,4,3,6	5,3,1,4,2,6	6,4,1,5,2,3	3,5,6,2,4,1
p2	6,4,3,1,5,2	2,1,3,6,5,4	4,6,3,2,5,1	1,2,3,4,5,6	5,3,6,1,4,2	4,6,5,1,3,2	3,5,4,1,6,2	6,4,2,3,1,5	6,4,5,2,3,1	6,4,1,5,2,3	3,5,1,6,2,4	1,2,6,3,4,5
p3	2,1,3,6,5,4	4,6,3,2,5,1	1,2,3,4,5,6	6,4,3,1,5,2	2,1,6,5,4,3	2,1,5,4,3,6	2,1,4,3,6,5	5,3,2,6,1,4	1,2,5,6,3,4	3,5,1,6,2,4	4,6,1,3,2,5	5,3,6,1,4,2
p4	4,6,3,2,5,1	1,2,3,4,5,6	6,4,3,1,5,2	2,1,3,6,5,4	3,5,6,2,4,1	6,4,5,2,3,1	5,3,4,2,6,1	4,6,2,5,1,3	4,6,5,1,3,2	4,6,1,3,2,5	5,3,1,4,2,6	2,1,6,5,4,3
p5	1,2,6,3,4,5	6,4,2,3,1,5	2,1,4,3,6,5	4,6,1,3,2,5	1,2,5,6,3,4	1,2,4,5,6,3	1,2,3,4,5,6	3,5,6,2,4,1	2,1,6,5,4,3	5,3,6,1,4,2	6,4,3,1,5,2	3,5,1,6,2,4
p6	1,2,5,6,3,4	6,4,5,2,3,1	2,1,5,4,3,6	4,6,5,1,3,2	1,2,4,5,6,3	1,2,3,4,5,6	1,2,6,3,4,5	3,5,1,6,2,4	2,1,3,6,5,4	5,3,2,6,1,4	6,4,2,3,1,5	3,5,4,1,6,2
p7	1,2,4,5,6,3	6,4,1,5,2,3	2,1,6,5,4,3	4,6,2,5,1,3	1,2,3,4,5,6	1,2,6,3,4,5	1,2,5,6,3,4	3,5,4,1,6,2	2,1,4,3,6,5	5,3,4,2,6,1	6,4,5,2,3,1	3,5,2,4,1,6
p8	3,5,2,4,1,6	3,5,4,1,6,2	3,5,1,6,2,4	3,5,6,2,4,1	6,4,2,3,1,5	5,3,2,6,1,4	4,6,2,5,1,3	2,1,5,4,3,6	5,3,1,4,2,6	1,2,3,4,5,6	1,2,4,5,6,3	6,4,5,2,3,1
p9	2,1,5,4,3,6	4,6,5,1,3,2	1,2,5,6,3,4	6,4,5,2,3,1	2,1,4,3,6,5	2,1,3,6,5,4	2,1,6,5,4,3	5,3,1,4,2,6	1,2,3,4,5,6	3,5,2,4,1,6	4,6,2,5,1,3	5,3,4,2,6,1
p10	5,3,1,4,2,6	5,3,6,1,4,2	5,3,2,6,1,4	5,3,4,2,6,1	4,6,1,3,2,5	3,5,1,6,2,4	6,4,1,5,2,3	1,2,3,4,5,6	3,5,2,4,1,6	2,1,5,4,3,6	2,1,6,5,4,3	4,6,3,2,5,1
p11	6,4,1,5,2,3	2,1,6,5,4,3	4,6,2,5,1,3	1,2,4,5,6,3	5,3,1,4,2,6	4,6,1,3,2,5	3,5,1,6,2,4	6,4,3,1,5,2	6,4,2,3,1,5	6,4,5,2,3,1	3,5,6,2,4,1	1,2,3,4,5,6
p12	3,5,6,2,4,1	3,5,2,4,1,6	3,5,4,1,6,2	3,5,1,6,2,4	6,4,5,2,3,1	5,3,4,2,6,1	4,6,3,2,5,1	2,1,6,5,4,3	5,3,6,1,4,2	1,2,6,3,4,5	1,2,3,4,5,6	6,4,1,5,2,3
p13	5,3,4,2,6,1	5,3,1,4,2,6	5,3,6,1,4,2	5,3,2,6,1,4	4,6,3,2,5,1	3,5,6,2,4,1	6,4,5,2,3,1	1,2,4,5,6,3	3,5,4,1,6,2	2,1,4,3,6,5	2,1,5,4,3,6	4,6,2,5,1,3
p14	6,4,2,3,1,5	2,1,4,3,6,5	4,6,1,3,2,5	1,2,6,3,4,5	5,3,2,6,1,4	4,6,2,5,1,3	3,5,2,4,1,6	6,4,5,2,3,1	6,4,1,5,2,3	6,4,3,1,5,2	3,5,4,1,6,2	1,2,5,6,3,4
p15	5,3,6,1,4,2	5,3,2,6,1,4	5,3,4,2,6,1	5,3,1,4,2,6	4,6,5,1,3,2	3,5,4,1,6,2	6,4,3,1,5,2	1,2,6,3,4,5	3,5,6,2,4,1	2,1,6,5,4,3	2,1,3,6,5,4	4,6,1,3,2,5
p16	4,6,2,5,1,3	1,2,4,5,6,3	6,4,1,5,2,3	2,1,6,5,4,3	3,5,2,4,1,6	6,4,2,3,1,5	5,3,2,6,1,4	4,6,5,1,3,2	4,6,1,3,2,5	4,6,3,2,5,1	5,3,4,2,6,1	2,1,5,4,3,6
p17	4,6,1,3,2,5	1,2,6,3,4,5	6,4,2,3,1,5	2,1,4,3,6,5	3,5,1,6,2,4	6,4,1,5,2,3	5,3,1,4,2,6	4,6,3,2,5,1	4,6,2,5,1,3	4,6,5,1,3,2	5,3,6,1,4,2	2,1,3,6,5,4
p18	3,5,4,1,6,2	3,5,1,6,2,4	3,5,6,2,4,1	3,5,2,4,1,6	6,4,3,1,5,2	5,3,6,1,4,2	4,6,5,1,3,2	2,1,4,3,6,5	5,3,4,2,6,1	1,2,4,5,6,3	1,2,5,6,3,4	6,4,2,3,1,5
p19	2,1,6,5,4,3	4,6,2,5,1,3	1,2,4,5,6,3	6,4,1,5,2,3	2,1,5,4,3,6	2,1,4,3,6,5	2,1,3,6,5,4	5,3,6,1,4,2	1,2,6,3,4,5	3,5,6,2,4,1	4,6,3,2,5,1	5,3,1,4,2,6
p20	6,4,5,2,3,1	2,1,5,4,3,6	4,6,5,1,3,2	1,2,5,6,3,4	5,3,4,2,6,1	4,6,3,2,5,1	3,5,6,2,4,1	6,4,1,5,2,3	6,4,3,1,5,2	6,4,2,3,1,5	3,5,2,4,1,6	1,2,4,5,6,3
p21	5,3,2,6,1,4	5,3,4,2,6,1	5,3,1,4,2,6	5,3,6,1,4,2	4,6,2,5,1,3	3,5,2,4,1,6	6,4,2,3,1,5	1,2,5,6,3,4	3,5,1,6,2,4	2,1,3,6,5,4	2,1,4,3,6,5	4,6,5,1,3,2
p22	2,1,4,3,6,5	4,6,1,3,2,5	1,2,6,3,4,5	6,4,2,3,1,5	2,1,3,6,5,4	2,1,6,5,4,3	2,1,5,4,3,6	5,3,4,2,6,1	1,2,4,5,6,3	3,5,4,1,6,2	4,6,5,1,3,2	5,3,2,6,1,4
p23	4,6,5,1,3,2	1,2,5,6,3,4	6,4,5,2,3,1	2,1,5,4,3,6	3,5,4,1,6,2	6,4,3,1,5,2	5,3,6,1,4,2	4,6,1,3,2,5	4,6,3,2,5,1	4,6,2,5,1,3	5,3,2,6,1,4	2,1,4,3,6,5
p24	3,5,1,6,2,4	3,5,6,2,4,1	3,5,2,4,1,6	3,5,4,1,6,2	6,4,1,5,2,3	5,3,1,4,2,6	4,6,1,3,2,5	2,1,3,6,5,4	5,3,2,6,1,4	1,2,5,6,3,4	1,2,6,3,4,5	6,4,3,1,5,2

	p13	p14	p15	p16	p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	p24
p1	5,3,4,2,6,1	6,4,2,3,1,5	5,3,6,1,4,2	4,6,2,5,1,3	4,6,1,3,2,5	3,5,4,1,6,2	2,1,6,5,4,3	6,4,5,2,3,1	5,3,2,6,1,4	2,1,4,3,6,5	4,6,5,1,3,2	3,5,1,6,2,4
p2	1,2,4,5,6,3	5,3,2,6,1,4	2,1,6,5,4,3	3,5,2,4,1,6	5,3,1,4,2,6	2,1,4,3,6,5	3,5,6,2,4,1	1,2,5,6,3,4	4,6,2,5,1,3	5,3,4,2,6,1	2,1,5,4,3,6	4,6,1,3,2,5
p3	3,5,4,1,6,2	4,6,2,5,1,3	3,5,6,2,4,1	6,4,2,3,1,5	6,4,1,5,2,3	5,3,4,2,6,1	1,2,6,3,4,5	4,6,5,1,3,2	3,5,2,4,1,6	1,2,4,5,6,3	6,4,5,2,3,1	5,3,1,4,2,6
p4	2,1,4,3,6,5	3,5,2,4,1,6	1,2,6,3,4,5	5,3,2,6,1,4	3,5,1,6,2,4	1,2,4,5,6,3	5,3,6,1,4,2	2,1,5,4,3,6	6,4,2,3,1,5	3,5,4,1,6,2	1,2,5,6,3,4	6,4,1,5,2,3
p5	5,3,1,4,2,6	6,4,5,2,3,1	5,3,2,6,1,4	4,6,3,2,5,1	4,6,5,1,3,2	3,5,2,4,1,6	2,1,3,6,5,4	6,4,1,5,2,3	5,3,4,2,6,1	2,1,5,4,3,6	4,6,2,5,1,3	3,5,4,1,6,2
p6	5,3,6,1,4,2	6,4,1,5,2,3	5,3,4,2,6,1	4,6,1,3,2,5	4,6,2,5,1,3	3,5,6,2,4,1	2,1,4,3,6,5	6,4,3,1,5,2	5,3,1,4,2,6	2,1,6,5,4,3	4,6,3,2,5,1	3,5,2,4,1,6
p7	5,3,2,6,1,4	6,4,3,1,5,2	5,3,1,4,2,6	4,6,5,1,3,2	4,6,3,2,5,1	3,5,1,6,2,4	2,1,5,4,3,6	6,4,2,3,1,5	5,3,6,1,4,2	2,1,3,6,5,4	4,6,1,3,2,5	3,5,6,2,4,1
p8	4,6,3,2,5,1	2,1,4,3,6,5	6,4,3,1,5,2	2,1,6,5,4,3	1,2,6,3,4,5	4,6,5,1,3,2	6,4,1,5,2,3	5,3,4,2,6,1	2,1,3,6,5,4	4,6,1,3,2,5	5,3,6,1,4,2	1,2,5,6,3,4
p9	3,5,6,2,4,1	4,6,1,3,2,5	3,5,4,1,6,2	6,4,1,5,2,3	6,4,2,3,1,5	5,3,6,1,4,2	1,2,4,5,6,3	4,6,3,2,5,1	3,5,1,6,2,4	1,2,6,3,4,5	6,4,3,1,5,2	5,3,2,6,1,4
p10	6,4,5,2,3,1	1,2,6,3,4,5	4,6,5,1,3,2	1,2,4,5,6,3	2,1,4,3,6,5	6,4,3,1,5,2	4,6,2,5,1,3	3,5,6,2,4,1	1,2,5,6,3,4	6,4,2,3,1,5	3,5,4,1,6,2	2,1,3,6,5,4
p11	1,2,5,6,3,4	5,3,6,1,4,2	2,1,5,4,3,6	3,5,4,1,6,2	5,3,4,2,6,1	2,1,3,6,5,4	3,5,2,4,1,6	1,2,6,3,4,5	4,6,5,1,3,2	5,3,2,6,1,4	2,1,4,3,6,5	4,6,3,2,5,1
p12	4,6,1,3,2,5	2,1,5,4,3,6	6,4,2,3,1,5	2,1,3,6,5,4	1,2,5,6,3,4	4,6,2,5,1,3	6,4,3,1,5,2	5,3,1,4,2,6	2,1,4,3,6,5	4,6,5,1,3,2	5,3,2,6,1,4	1,2,4,5,6,3
p13	6,4,2,3,1,5	1,2,3,4,5,6	4,6,1,3,2,5	1,2,5,6,3,4	2,1,3,6,5,4	6,4,1,5,2,3	4,6,5,1,3,2	3,5,2,4,1,6	1,2,6,3,4,5	6,4,3,1,5,2	3,5,1,6,2,4	2,1,6,5,4,3
p14	1,2,3,4,5,6	5,3,4,2,6,1	2,1,3,6,5,4	3,5,6,2,4,1	5,3,6,1,4,2	2,1,5,4,3,6	3,5,1,6,2,4	1,2,4,5,6,3	4,6,3,2,5,1	5,3,1,4,2,6	2,1,6,5,4,3	4,6,5,1,3,2
p15	6,4,1,5,2,3	1,2,5,6,3,4	4,6,2,5,1,3	1,2,3,4,5,6	2,1,5,4,3,6	6,4,2,3,1,5	4,6,3,2,5,1	3,5,1,6,2,4	1,2,4,5,6,3	6,4,5,2,3,1	3,5,2,4,1,6	2,1,4,3,6,5
p16	2,1,3,6,5,4	3,5,4,1,6,2	1,2,3,4,5,6	5,3,6,1,4,2	3,5,6,2,4,1	1,2,5,6,3,4	5,3,1,4,2,6	2,1,4,3,6,5	6,4,3,1,5,2	3,5,1,6,2,4	1,2,6,3,4,5	6,4,5,2,3,1
p17	2,1,5,4,3,6	3,5,6,2,4,1	1,2,5,6,3,4	5,3,4,2,6,1	3,5,4,1,6,2	1,2,3,4,5,6	5,3,2,6,1,4	2,1,6,5,4,3	6,4,5,2,3,1	3,5,2,4,1,6	1,2,4,5,6,3	6,4,3,1,5,2
p18	4,6,2,5,1,3	2,1,3,6,5,4	6,4,1,5,2,3	2,1,5,4,3,6	1,2,3,4,5,6	4,6,1,3,2,5	6,4,5,2,3,1	5,3,2,6,1,4	2,1,6,5,4,3	4,6,3,2,5,1	5,3,1,4,2,6	1,2,6,3,4,5
p19	3,5,1,6,2,4	4,6,5,1,3,2	3,5,2,4,1,6	6,4,3,1,5,2	6,4,5,2,3,1	5,3,2,6,1,4	1,2,3,4,5,6	4,6,1,3,2,5	3,5,4,1,6,2	1,2,5,6,3,4	6,4,2,3,1,5	5,3,4,2,6,1
p20	1,2,6,3,4,5	5,3,1,4,2,6	2,1,4,3,6,5	3,5,1,6,2,4	5,3,2,6,1,4	2,1,6,5,4,3	3,5,4,1,6,2	1,2,3,4,5,6	4,6,1,3,2,5	5,3,6,1,4,2	2,1,3,6,5,4	4,6,2,5,1,3
p21	6,4,3,1,5,2	1,2,4,5,6,3	4,6,3,2,5,1	1,2,6,3,4,5	2,1,6,5,4,3	6,4,5,2,3,1	4,6,1,3,2,5	3,5,4,1,6,2	1,2,3,4,5,6	6,4,1,5,2,3	3,5,6,2,4,1	2,1,5,4,3,6
p22	3,5,2,4,1,6	4,6,3,2,5,1	3,5,1,6,2,4	6,4,5,2,3,1	6,4,3,1,5,2	5,3,1,4,2,6	1,2,5,6,3,4	4,6,2,5,1,3	3,5,6,2,4,1	1,2,3,4,5,6	6,4,1,5,2,3	5,3,6,1,4,2
p23	2,1,6,5,4,3	3,5,1,6,2,4	1,2,4,5,6,3	5,3,1,4,2,6	3,5,2,4,1,6	1,2,6,3,4,5	5,3,4,2,6,1	2,1,3,6,5,4	6,4,1,5,2,3	3,5,6,2,4,1	1,2,3,4,5,6	6,4,2,3,1,5
p24	4,6,5,1,3,2	2,1,6,5,4,3	6,4,5,2,3,1	2,1,4,3,6,5	1,2,4,5,6,3	4,6,3,2,5,1	6,4,2,3,1,5	5,3,6,1,4,2	2,1,5,4,3,6	4,6,2,5,1,3	5,3,4,2,6,1	1,2,3,4,5,6

БОЈЕЊЕ СТРАНА КОЦКЕ СА ДВЕ БОЈЕ

B1	a	a	a	a	a	a	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	(P1)	(P2)	(P3)	(P4)	(P5)	(P6)	(P7)	(P8)	(P9)	(P10)	(P11)	(P12)	(P13)	(P14)	(P15)	(P16)	(P17)	(P18)	(P19)	(P20)	(P21)	(P22)	(P23)	(P24)	24
B2	a	a	a	a	a	b	B2	B33	B5	B17	B9	B5	B3	B2	B2	B2	B33	B9	B3	B33	B9	B17	B17	B3	B9	B33	B5	B3	B17	B5	(P1)	(P8)	(P9)	(P10)																					4
B3	a	a	a	a	b	a	B3	B3	B3	B3	B2	B9	B5	B17	B9	B33	B5	B17	B33	B2	B33	B5	B2	B17	B5	B9	B33	B2	B9	B17	(P1)	(P2)	(P3)	(P4)																					4
B4	a	a	a	a	b	b	B4	B35	B7	B19	B10	B13	B7	B18	B10	B34	B37	B25	B35	B34	B41	B21	B18	B19	B13	B41	B37	B4	B25	B21	(P1)	(P22)																							2
B5	a	a	a	b	a	a	B5	B17	B2	B33	B3	B2	B9	B5	B5	B5	B17	B3	B9	B17	B3	B33	B33	B9	B3	B17	B2	B9	B33	B2	(P1)	(P8)	(P9)	(P10)																					4
B6	a	a	a	b	a	b	B6	B49	B6	B49	B11	B6	B11	B6	B6	B6	B49	B11	B11	B49	B11	B49	B49	B11	B11	B49	B6	B11	B49	B6	(P1)	(P3)	(P6)	(P8)	(P9)	(P10)	(P21)	(P24)																	8
B7	a	a	a	b	b	a	B7	B19	B4	B35	B4	B10	B13	B21	B13	B37	B21	B19	B41	B18	B35	B37	B34	B25	B7	B25	B34	B10	B41	B18	(P1)	(P19)																							2
B8	a	a	a	b	b	b	B8	B51	B8	B51	B12	B14	B15	B22	B14	B38	B53	B27	B43	B50	B43	B53	B50	B27	B15	B57	B38	B12	B57	B22	(P1)	(P3)																							2
B9	a	a	b	a	a	a	B9	B9	B9	B9	B5	B3	B2	B33	B3	B17	B2	B33	B17	B5	B17	B2	B5	B33	B2	B3	B17	B5	B3	B33	(P1)	(P2)	(P3)	(P4)																					4
B10	a	a	b	a	a	b	B10	B41	B13	B25	B13	B7	B4	B34	B4	B18	B34	B41	B19	B37	B25	B18	B21	B35	B10	B35	B21	B7	B19	B37	(P1)	(P19)																							2
B11	a	a	b	a	b	a	B11	B11	B11	B11	B6	B11	B6	B49	B11	B49	B6	B49	B49	B6	B49	B6	B6	B49	B6	B11	B49	B6	B11	B49	(P1)	(P2)	(P3)	(P4)	(P6)	(P9)	(P20)	(P23)																	8
B12	a	a	b	a	b	b	B12	B43	B15	B27	B14	B15	B8	B50	B12	B50	B38	B57	B51	B38	B57	B22	B22	B51	B14	B43	B53	B8	B27	B53	(P1)	(P9)																							2
B13	a	a	b	b	a	a	B13	B25	B10	B41	B7	B4	B10	B37	B7	B21	B18	B35	B25	B21	B19	B34	B37	B41	B4	B19	B18	B13	B35	B34	(P1)	(P22)																							2
B14	a	a	b	b	a	b	B14	B57	B14	B57	B15	B8	B12	B38	B8	B22	B50	B43	B27	B53	B27	B50	B53	B43	B12	B51	B22	B15	B51	B38	(P1)	(P3)																							2
B15	a	a	b	b	b	a	B15	B27	B12	B43	B8	B12	B14	B53	B15	B53	B22	B51	B57	B22	B51	B38	B38	B57	B8	B27	B50	B14	B43	B50	(P1)	(P9)																							2
B16	a	a	b	b	b	b	B16	B59	B16	B59	B16	B16	B16	B54	B16	B54	B54	B59	B59	B54	B59	B54	B54	B59	B16	B59	B54	B16	B59	B54	(P1)	(P3)	(P5)	(P6)	(P7)	(P9)	(P19)	(P22)																	8
B17	a	b	a	a	a	a	B17	B2	B33	B5	B17	B17	B17	B9	B33	B3	B3	B5	B5	B9	B2	B9	B3	B2	B33	B5	B9	B33	B2	B3	(P1)	(P5)	(P6)	(P7)																					4
B18	a	b	a	a	a	b	B18	B34	B37	B21	B25	B21	B19	B10	B34	B4	B35	B13	B7	B41	B10	B25	B19	B4	B41	B37	B13	B35	B18	B7	(P1)	(P23)																							2
B19	a	b	a	a	b	a	B19	B4	B35	B7	B18	B25	B21	B25	B41	B35	B7	B21	B37	B10	B34	B13	B4	B18	B37	B13	B41	B34	B10	B19	(P1)	(P24)																							2
B20	a	b	a	a	b	b	B20	B36	B39	B23	B26	B29	B23	B26	B42	B36	B39	B29	B39	B42	B42	B29	B20	B20	B45	B45	B45	B36	B26	B23	(P1)	(P17)	(P18)																						3
B21	a	b	a	b	a	a	B21	B18	B34	B37	B19	B18	B25	B13	B37	B7	B19	B7	B13	B25	B4	B41	B35	B10	B35	B21	B10	B41	B34	B4	(P1)	(P20)																							2
B22	a	b	a	b	a	b	B22	B50	B38	B53	B27	B22	B27	B14	B38	B8	B51	B15	B15	B57	B12	B57	B51	B12	B43	B53	B14	B43	B50	B8	(P1)	(P6)																							2
B23	a	b	a	b	b	a	B23	B20	B36	B39	B20	B26	B29	B29	B45	B39	B23	B23	B45	B26	B36	B45	B36	B26	B39	B29	B42	B42	B42	B20	(P1)	(P11)	(P12)																						3
B24	a	b	a	b	b	b	B24	B52	B40	B55	B28	B30	B31	B30	B46	B40	B55	B31	B47	B58	B44	B61	B52	B28	B47	B61	B46	B44	B58	B24	(P1)	(P24)																							2
B25	a	b	b	a	a	a	B25	B10	B41	B13	B21	B19	B18	B41	B35	B19	B4	B37	B21	B13	B18	B10	B7	B34	B34	B7	B25	B37	B4	B35	(P1)	(P21)																							2
B26	a	b	b	a	a	b	B26	B42	B45	B29	B29	B23	B20	B42	B36	B20	B36	B45	B23	B45	B26	B26	B23	B36	B42	B39	B29	B39	B20	B39	(P1)	(P15)	(P16)																						3
B27	a	b	b	a	b	a	B27	B12	B43	B15	B22	B27	B22	B57	B43	B51	B8	B53	B53	B14	B50	B14	B8	B50	B38	B15	B57	B38	B12	B51	(P1)	(P6)																							2
B28	a	b	b	a	b	b	B28	B44	B47	B31	B30	B31	B24	B58	B44	B52	B40	B61	B55	B46	B58	B30	B24	B52	B46	B47	B61	B40	B28	B55	(P1)	(P23)																							2
B29	a	b	b	b	a	a	B29	B26	B42	B45	B23	B20	B26	B45	B39	B23	B20	B39	B29	B29	B20	B42	B39	B42	B36	B23	B26	B45	B36	B36	(P1)	(P13)	(P14)																						3
B30	a	b	b	b	a	b	B30	B58	B46	B61	B31	B24	B28	B46	B40	B24	B52	B47	B31	B61	B28	B58	B55	B44	B44	B55	B30	B47	B52	B40	(P1)	(P21)																							2
B31	a	b	b	b	b	a	B31	B28	B44	B47	B24	B28	B30	B61	B47	B55	B24	B55	B61	B30	B52	B46	B40	B58	B40	B31	B58	B46	B44	B52	(P1)	(P20)																							2
B32	a	b	b	b	b	b	B32	B60	B48	B63	B32	B32	B32	B62	B48	B56	B56	B63	B63	B62	B60	B62	B56	B60	B48	B63	B62	B48	B60	B56	(P1)	(P5)	(P6)	(P7)																					4
B33	b	a	a	a	a	a	B33	B5	B17	B2	B33	B33	B33	B3	B17	B9	B9	B2	B2	B3	B5	B3	B9	B5	B17	B2	B3	B17	B5	B9	(P1)	(P5)	(P6)	(P7)																					4

B34	b	a	a	a	a	b	B34	B37	B21	B18	B41	B37	B35	B4	B18	B10	B41	B10	B4	B35	B13	B19	B25	B7	B25	B34	B7	B19	B21	B13		(P1)	(P20)																								2
B35	b	a	a	a	b	a	B35	B7	B19	B4	B34	B41	B37	B19	B25	B41	B13	B18	B34	B4	B37	B7	B10	B21	B21	B10	B35	B18	B13	B25		(P1)	(P21)																								2
B36	b	a	a	a	b	b	B36	B39	B23	B20	B42	B45	B39	B20	B26	B42	B45	B26	B36	B36	B45	B23	B26	B23	B29	B42	B39	B20	B29	B29		(P1)	(P13)	(P14)																							3
B37	b	a	a	b	a	a	B37	B21	B18	B34	B35	B34	B41	B7	B21	B13	B25	B4	B10	B19	B7	B35	B41	B13	B19	B18	B4	B25	B37	B10		(P1)	(P23)																								2
B38	b	a	a	b	a	b	B38	B53	B22	B50	B43	B38	B43	B8	B22	B14	B57	B12	B12	B51	B15	B51	B57	B15	B27	B50	B8	B27	B53	B14		(P1)	(P6)																								2
B39	b	a	a	b	b	a	B39	B23	B20	B36	B36	B42	B45	B23	B29	B45	B29	B20	B42	B20	B39	B39	B42	B29	B23	B26	B36	B26	B45	B26		(P1)	(P15)	(P16)																							3
B40	b	a	a	b	b	b	B40	B55	B24	B52	B44	B46	B47	B24	B30	B46	B61	B28	B44	B52	B47	B55	B58	B31	B31	B58	B40	B28	B61	B30		(P1)	(P21)																								2
B41	b	a	b	a	a	a	B41	B13	B25	B10	B37	B35	B34	B35	B19	B25	B10	B34	B18	B7	B21	B4	B13	B37	B18	B4	B19	B21	B7	B41		(P1)	(P24)																								2
B42	b	a	b	a	a	b	B42	B45	B29	B26	B45	B39	B36	B36	B20	B26	B42	B42	B20	B39	B29	B20	B29	B39	B26	B36	B23	B23	B23	B45		(P1)	(P11)	(P12)																							3
B43	b	a	b	a	b	a	B43	B15	B27	B12	B38	B43	B38	B51	B27	B57	B14	B50	B50	B8	B53	B8	B14	B53	B22	B12	B51	B22	B15	B57		(P1)	(P6)																								2
B44	b	a	b	a	b	b	B44	B47	B31	B28	B46	B47	B40	B52	B28	B58	B46	B58	B52	B40	B61	B24	B30	B55	B30	B44	B55	B24	B31	B61		(P1)	(P20)																								2
B45	b	a	b	b	a	a	B45	B29	B26	B42	B39	B36	B42	B39	B23	B29	B26	B36	B26	B23	B23	B36	B45	B45	B20	B20	B20	B29	B39	B42		(P1)	(P17)	(P18)																							3
B46	b	a	b	b	a	b	B46	B61	B30	B58	B47	B40	B44	B40	B24	B30	B58	B44	B28	B55	B31	B52	B61	B47	B28	B52	B24	B31	B55	B46		(P1)	(P24)																								2
B47	b	a	b	b	b	a	B47	B31	B28	B44	B40	B44	B46	B55	B31	B61	B30	B52	B58	B24	B55	B40	B46	B61	B24	B28	B52	B30	B47	B58		(P1)	(P23)																								2
B48	b	a	b	b	b	b	B48	B63	B32	B60	B48	B48	B48	B56	B32	B62	B62	B60	B60	B56	B63	B56	B62	B63	B32	B60	B56	B32	B63	B62		(P1)	(P5)	(P6)	(P7)																						4
B49	b	b	a	a	a	a	B49	B6	B49	B6	B49	B49	B49	B11	B49	B11	B11	B6	B6	B11	B6	B11	B11	B6	B49	B6	B11	B49	B6	B11		(P1)	(P3)	(P5)	(P6)	(P7)	(P9)	(P19)	(P22)																		8
B50	b	b	a	a	a	b	B50	B38	B53	B22	B57	B53	B51	B12	B50	B12	B43	B14	B8	B43	B14	B27	B27	B8	B57	B38	B15	B51	B22	B15		(P1)	(P9)																								2
B51	b	b	a	a	b	a	B51	B8	B51	B8	B50	B57	B53	B27	B57	B43	B15	B22	B38	B12	B38	B15	B12	B22	B53	B14	B43	B50	B14	B27		(P1)	(P3)																								2
B52	b	b	a	a	b	b	B52	B40	B55	B24	B58	B61	B55	B28	B58	B44	B47	B30	B40	B44	B46	B31	B28	B24	B61	B46	B47	B52	B30	B31		(P1)	(P22)																								2
B53	b	b	a	b	a	a	B53	B22	B50	B38	B51	B50	B57	B15	B53	B15	B27	B8	B14	B27	B8	B43	B43	B14	B51	B22	B12	B57	B38	B12		(P1)	(P9)																								2
B54	b	b	a	b	a	b	B54	B54	B54	B54	B59	B54	B59	B16	B54	B16	B59	B16	B16	B59	B16	B59	B59	B16	B59	B54	B16	B59	B54	B16		(P1)	(P2)	(P3)	(P4)	(P6)	(P9)	(P20)	(P23)																		8
B55	b	b	a	b	b	a	B55	B24	B52	B40	B52	B58	B61	B31	B61	B47	B31	B24	B46	B28	B40	B47	B44	B30	B55	B30	B44	B58	B46	B28		(P1)	(P19)																								2
B56	b	b	a	b	b	b	B56	B56	B56	B56	B60	B62	B63	B32	B62	B48	B63	B32	B48	B60	B48	B63	B60	B32	B63	B62	B48	B60	B62	B32		(P1)	(P2)	(P3)	(P4)																						4
B57	b	b	b	a	a	a	B57	B14	B57	B14	B53	B51	B50	B43	B51	B27	B12	B38	B22	B15	B22	B12	B15	B38	B50	B8	B27	B53	B8	B43		(P1)	(P3)																								2
B58	b	b	b	a	a	b	B58	B46	B61	B30	B61	B55	B52	B44	B52	B28	B44	B46	B24	B47	B30	B28	B31	B40	B58	B40	B31	B55	B24	B47		(P1)	(P19)																								2
B59	b	b	b	a	b	a	B59	B16	B59	B16	B54	B59	B54	B59	B59	B59	B16	B54	B54	B16	B54	B16	B16	B54	B54	B16	B59	B54	B16	B59		(P1)	(P3)	(P6)	(P8)	(P9)	(P10)	(P21)	(P24)																		8
B60	b	b	b	a	b	b	B60	B48	B63	B32	B62	B63	B56	B60	B60	B60	B48	B62	B56	B48	B62	B32	B32	B56	B62	B48	B63	B56	B32	B63		(P1)	(P8)	(P9)	(P10)																						4
B61	b	b	b	b	a	a	B61	B30	B58	B46	B55	B52	B58	B47	B55	B31	B28	B40	B30	B31	B24	B44	B47	B46	B52	B24	B28	B61	B40	B44		(P1)	(P22)																								2
B62	b	b	b	b	a	b	B62	B62	B62	B62	B63	B56	B60	B48	B56	B32	B60	B48	B32	B63	B32	B60	B63	B48	B60	B56	B32	B63	B56	B48		(P1)	(P2)	(P3)	(P4)																						4
B63	b	b	b	b	b	a	B63	B32	B60	B48	B56	B60	B62	B63	B63	B63	B32	B56	B62	B32	B56	B48	B48	B62	B56	B32	B60	B62	B48	B60		(P1)	(P8)	(P9)	(P10)																						4
B64	b	b	b	b	b	b	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64	B64		(P1)	(P2)	(P3)	(P4)	(P5)	(P6)	(P7)	(P8)	(P9)	(P10)	(P11)	(P12)	(P13)	(P14)	(P15)	(P16)	(P17)	(P18)	(P19)	(P20)	(P21)	(P22)	(P23)	(P24)	24
																																																								240
							64	8	16	8	8	16	8	8	16	8	4	4	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	240																									10
																															10																									

Ивентар бојења стеана коцке са две боје

Циклусни индекс $(Z1^6 + 3\,Z1^2\,Z2^2 + 6\,Z2^3 + 8\,Z3^2 + 6\,Z1^2\,Z4)/24$

$$F[Z1\_,\ Z2\_,\ Z3\_,\ Z4\_] := (Z1^6 + 3\,Z1^2\,Z2^2 + 6\,Z2^3 + 8\,Z3^2 + 6\,Z1^2\,Z4)/24$$

$$F[a + b,\ a^2 + b^2,\ a^3 + b^3,\ a^4 + b^4]$$

$$\frac{1}{24}\left((a+b)^6 + 3\,(a+b)^2\,(a^2+b^2)^2 + 6\,(a^2+b^2)^3 + 8\,(a^3+b^3)^2 + 6\,(a+b)^2\,(a^4+b^4)\right)$$

••••••• ••••••

$$a^6 + a^5\,b + 2\,a^4\,b^2 + 2\,a^3\,b^3 + 2\,a^2\,b^4 + a\,b^5 + b^6$$

Два бојења свих шест страна прво бојом a а затим бојом b

Два бојења пет странабојом a (b) и једну страну бојом b (а)

По два бојења четири стране бојом b (a) и две стране бојом a (b)

И по два бојења три стране бојом a и три стране бојом b

F[2,2,2,2]= 10

Дакле укупно 10 нееквивалентних бојења.

Ивентар бојења страна коцке са четири боје

Циклусни индекс $(Z1^6 + 3\,Z1^2\,Z2^2 + 6\,Z2^3 + 8\,Z3^2 + 6\,Z1^2\,Z4)/24$

$$F[Z1\_,\ Z2\_,\ Z3\_,\ Z4\_] := (Z1^6 + 3\,Z1^2\,Z2^2 + 6\,Z2^3 + 8\,Z3^2 + 6\,Z1^2\,Z4)/24$$

$$F[a + b + c + d,\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2,\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3,\ a^4 + b^4 + c^4 + d^4] =$$

$$\frac{1}{24}\left((a+b+c+d)^6 + 3\,(a+b+c+d)^2\,(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 + 6\,(a^2+b^2+c^2+d^2)^3 + 8\,(a^3+b^3+c^3+d^3)^2 + 6\,(a+b+c+d)^2\,(a^4+b^4+c^4+d^4)\right)$$

••••••• ••••••

$$\begin{aligned}
&a^6 + a^5\,b + 2\,a^4\,b^2 + 2\,a^3\,b^3 + 2\,a^2\,b^4 + a\,b^5 + b^6 + a^5\,c + 2\,a^4\,b\,c + 3\,a^3\,b^2\,c + \\
&3\,a^2\,b^3\,c + 2\,a\,b^4\,c + b^5\,c + 2\,a^4\,c^2 + 3\,a^3\,b\,c^2 + 6\,a^2\,b^2\,c^2 + 3\,a\,b^3\,c^2 + 2\,b^4\,c^2 + \\
&2\,a^3\,c^3 + 3\,a^2\,b\,c^3 + 3\,a\,b^2\,c^3 + 2\,b^3\,c^3 + 2\,a^2\,c^4 + 2\,a\,b\,c^4 + 2\,b^2\,c^4 + a\,c^5 + b\,c^5 + \\
&c^6 + a^5\,d + 2\,a^4\,b\,d + 3\,a^3\,b^2\,d + 3\,a^2\,b^3\,d + 2\,a\,b^4\,d + b^5\,d + 2\,a^4\,c\,d + 5\,a^3\,b\,c\,d + \\
&8\,a^2\,b^2\,c\,d + 5\,a\,b^3\,c\,d + 2\,b^4\,c\,d + 3\,a^3\,c^2\,d + 8\,a^2\,b\,c^2\,d + 8\,a\,b^2\,c^2\,d + 3\,b^3\,c^2\,d + \\
&3\,a^2\,c^3\,d + 5\,a\,b\,c^3\,d + 3\,b^2\,c^3\,d + 2\,a\,c^4\,d + 2\,b\,c^4\,d + c^5\,d + 2\,a^4\,d^2 + 3\,a^3\,b\,d^2 + \\
&6\,a^2\,b^2\,d^2 + 3\,a\,b^3\,d^2 + 2\,b^4\,d^2 + 3\,a^3\,c\,d^2 + 8\,a^2\,b\,c\,d^2 + 8\,a\,b^2\,c\,d^2 + 3\,b^3\,c\,d^2 + \\
&6\,a^2\,c^2\,d^2 + 8\,a\,b\,c^2\,d^2 + 6\,b^2\,c^2\,d^2 + 3\,a\,c^3\,d^2 + 3\,b\,c^3\,d^2 + 2\,c^4\,d^2 + 2\,a^3\,d^3 + \\
&3\,a^2\,b\,d^3 + 3\,a\,b^2\,d^3 + 2\,b^3\,d^3 + 3\,a^2\,c\,d^3 + 5\,a\,b\,c\,d^3 + 3\,b^2\,c\,d^3 + 3\,a\,c^2\,d^3 + \\
&3\,b\,c^2\,d^3 + 2\,c^3\,d^3 + 2\,a^2\,d^4 + 2\,a\,b\,d^4 + 2\,b^2\,d^4 + 2\,a\,c\,d^4 + 2\,b\,c\,d^4 + 2\,c^2\,d^4 + \\
&a\,d^5 + b\,d^5 + c\,d^5 + d^6
\end{aligned}$$

F[4,4,4,4]= 240

Дакле укупно 240 нееквивалентних бојења.

Група пресликавања ивица коцке

P_1 =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12)
P_2 =	5	10	1	9	7	11	3	12	8	6	2	4	(1 5 7 3) (10 6 11 2) (9 8 12 4)
P_3 =	7	6	5	8	3	2	1	4	12	11	10	9	(1 7) (6 2) (5 3) (8 4) (12 9) (11 10)
P_4 =	3	11	7	12	1	10	5	9	4	2	6	8	(1 3 7 5) (11 6 10 2) (12 8 9 4)
P_5 =	2	3	4	1	6	7	8	5	10	11	12	9	(1 2 3 4) (6 7 8 5) (10 11 12 9)
P_6 =	3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10	(1 3) (4 2) (7 5) (8 6) (11 9) (12 10)
P_7 =	4	1	2	3	8	5	6	7	12	9	10	11	(1 4 3 2) (8 7 6 5) (12 11 10 9)
P_8 =	9	4	12	8	10	2	11	6	5	1	3	7	(1 9 5 10) (4 8 6 2) (12 7 11 3)
P_9 =	5	8	7	6	1	4	3	2	10	9	12	11	(1 5) (8 2) (7 3) (6 4) (10 9) (12 11)
P_{10} =	10	6	11	2	9	8	12	4	1	5	7	3	(1 10 5 9) (6 8 4 2) (11 7 12 3)
P_{11} =	9	5	10	1	12	7	11	3	4	8	6	2	(1 9 4) (5 12 2) (10 8 3) (7 11 6)
P_{12} =	4	12	8	9	2	11	6	10	1	3	7	5	(1 4 9) (12 5 2) (8 10 3) (11 7 6)
P_{13} =	2	10	6	11	4	9	8	12	3	1	5	7	(1 2 10) (6 9 3) (11 5 4) (8 12 7)
P_{14} =	10	1	9	5	11	3	12	7	6	2	4	8	(1 10 2) (9 6 3) (5 11 4) (12 8 7)
P_{15} =	6	11	2	10	8	12	4	9	5	7	3	1	(1 6 12) (11 3 2) (10 7 4) (8 9 5)
P_{16} =	12	3	11	7	9	1	10	5	8	4	2	6	(1 12 6) (3 11 2) (7 10 4) (9 8 5)
P_{17} =	11	7	12	3	10	5	9	1	2	6	8	4	(1 11 8) (7 9 2) (12 4 3) (10 6 5)
P_{18} =	8	9	4	12	6	10	2	11	7	5	1	3	(1 8 11) (9 7 2) (4 12 3) (6 10 5)
P_{19} =	8	7	6	5	4	3	2	1	9	12	11	10	(1 8) (7 2) (6 3) (5 4) (9) (12 10) (11)
P_{20} =	1	9	5	10	3	12	7	11	2	4	8	6	(1) (9 2) (5 3) (10 4) (12 6) (7) (11 8)
P_{21} =	11	2	10	6	12	4	9	8	7	3	1	5	(1 11) (2) (10 3) (6 4) (12 5) (9 7) (8)
P_{22} =	6	5	8	7	2	1	4	3	11	10	9	12	(1 6) (5 2) (8 3) (7 4) (11 9) (10) (12)
P_{23} =	7	12	3	11	5	9	1	10	6	8	4	2	(1 7) (12 2) (3) (11 4) (5) (9 6) (10 8)
P_{24} =	12	8	9	4	11	6	10	2	3	7	5	1	(1 12) (8 2) (9 3) (4) (11 5) (6) (10 7)

$(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)$ +
$(Z_4)(Z_4)(Z_4)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)$ +
$(Z_4)(Z_4)(Z_4)$ +
$(Z_4)(Z_4)(Z_4)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)$ +
$(Z_4)(Z_4)(Z_4)$ +
$(Z_4)(Z_4)(Z_4)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)$ +
$(Z_4)(Z_4)(Z_4)$ +
$(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_1)$ +
$(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)$ +
$(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_1)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)$ +
$(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_1)(Z_2)$ = $\left(Z1^{12} + 6\,Z1^{2}Z2^{5} + 3\,Z2^{6} + 8\,Z3^{4} + 6\,Z4^{3}\right) / 24$

Таблица групе пресликавања ивица коцке																								
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}	P_{17}	P_{18}	P_{19}	P_{20}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{24}
P_1 =	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	p24
P_2 =	p2	p3	p4	p1	p15	p23	p18	p14	p20	p11	p24	p5	p7	p21	p19	p8	p10	p22	p12	p6	p16	p13	p9	p17
P_3 =	p3	p4	p1	p2	p19	p9	p22	p21	p6	p24	p17	p15	p18	p16	p12	p14	p11	p13	p5	p23	p8	p7	p20	p10
P_4 =	p4	p1	p2	p3	p12	p20	p13	p16	p23	p17	p10	p19	p22	p8	p5	p21	p24	p7	p15	p9	p14	p18	p6	p11
P_5 =	p5	p14	p22	p17	p6	p7	p1	p12	p19	p15	p2	p24	p10	p20	p21	p4	p23	p8	p3	p11	p13	p9	p16	p18
P_6 =	p6	p20	p9	p23	p7	p1	p5	p24	p3	p21	p14	p18	p15	p11	p13	p17	p16	p12	p22	p2	p10	p19	p4	p8
P_7 =	p7	p11	p19	p16	p1	p5	p6	p18	p22	p13	p20	p8	p21	p2	p10	p23	p4	p24	p9	p14	p15	p3	p17	p12
P_8 =	p8	p18	p24	p12	p14	p21	p16	p9	p10	p1	p7	p20	p4	p22	p2	p19	p5	p23	p11	p13	p3	p17	p15	p6
P_9 =	p9	p23	p6	p20	p22	p3	p19	p10	p1	p8	p16	p13	p12	p17	p18	p11	p14	p15	p7	p4	p24	p5	p2	p21
P_{10} =	p10	p15	p21	p13	p17	p24	p11	p1	p8	p9	p19	p4	p20	p5	p23	p7	p22	p2	p16	p12	p6	p14	p18	p3
P_{11} =	p11	p19	p16	p7	p10	p17	p24	p2	p14	p20	p12	p1	p6	p15	p9	p18	p13	p3	p8	p5	p23	p21	p22	p4
P_{12} =	p12	p8	p18	p24	p20	p13	p4	p19	p15	p5	p1	p11	p17	p9	p14	p3	p6	p16	p2	p10	p22	p23	p21	p7
P_{13} =	p13	p10	p15	p21	p4	p12	p20	p7	p18	p22	p9	p16	p14	p1	p17	p6	p3	p11	p23	p8	p5	p2	p24	p19
P_{14} =	p14	p22	p17	p5	p21	p16	p8	p20	p11	p2	p18	p6	p1	p13	p3	p12	p15	p9	p24	p7	p4	p10	p19	p23
P_{15} =	p15	p21	p13	p10	p23	p18	p2	p5	p12	p19	p3	p17	p11	p6	p16	p1	p9	p14	p4	p24	p7	p20	p8	p22
P_{16} =	p16	p7	p11	p19	p8	p14	p21	p23	p17	p4	p13	p9	p3	p18	p1	p15	p12	p6	p10	p22	p2	p24	p5	p20
P_{17} =	p17	p5	p14	p22	p24	p11	p10	p4	p16	p23	p15	p3	p9	p12	p6	p13	p18	p1	p21	p19	p20	p8	p7	p2
P_{18} =	p18	p24	p12	p8	p2	p15	p23	p22	p13	p7	p6	p14	p16	p3	p11	p9	p1	p17	p20	p21	p19	p4	p10	p5
P_{19} =	p19	p16	p7	p11	p9	p22	p3	p15	p5	p12	p4	p10	p24	p23	p8	p2	p20	p21	p1	p17	p18	p6	p14	p13
P_{20} =	p20	p9	p23	p6	p13	p4	p12	p11	p2	p14	p8	p7	p5	p10	p22	p24	p21	p19	p18	p1	p17	p15	p3	p16
P_{21} =	p21	p13	p10	p15	p16	p8	p14	p6	p24	p3	p22	p23	p2	p7	p4	p5	p19	p20	p17	p18	p1	p11	p12	p9
P_{22} =	p22	p17	p5	p14	p3	p19	p9	p13	p7	p18	p23	p21	p8	p4	p24	p20	p2	p10	p6	p16	p12	p1	p11	p15
P_{23} =	p23	p6	p20	p9	p18	p2	p15	p17	p4	p16	p21	p22	p19	p24	p7	p10	p8	p5	p13	p3	p11	p12	p1	p14
P_{24} =	p24	p12	p8	p18	p11	p10	p17	p3	p21	p6	p5	p2	p23	p19	p20	p22	p7	p4	p14	p15	p9	p16	p13	p1

Ивентар бојења ивица коцке са четири боје

Циклусни индекс $\left(Z1^{12} + 6\, Z1^2\, Z2^5 + 3\, Z2^6 + 8\, Z3^4 + 6\, Z4^3\right)/24$

$$F[Z1\_, Z2\_, Z3\_, Z4\_] := \left(Z1^{12} + 6\, Z1^2\, Z2^5 + 3\, Z2^6 + 8\, Z3^4 + 6\, Z4^3\right)/24$$

$$F\left[a+b+c+d,\ a^2+b^2+c^2+d^2,\ a^3+b^3+c^3+d^3,\ a^4+b^4+c^4+d^4\right] =$$

$$\frac{1}{24}\Big((a+b+c+d)^{12} + 6\,(a+b+c+d)^2\,(a^2+b^2+c^2+d^2)^5 + 3\,(a^2+b^2+c^2+d^2)^6 + 8\,(a^3+b^3+c^3+d^3)^4 + 6\,(a^4+b^4+c^4+d^4)^3\Big)$$

••••••• ••••••

$$a^{12} + a^{11}\, b + 5\, a^{10}\, b^2 + 13\, a^9\, b^3 + 27\, a^8\, b^4 + 38\, a^7\, b^5 + 48\, a^6\, b^6 + 38\, a^5\, b^7 + 27\, a^4\, b^8 +$$
$$13\, a^3\, b^9 + 5\, a^2\, b^{10} + a\, b^{11} + b^{12} + a^{11}\, c + 6\, a^{10}\, b\, c + 30\, a^9\, b^2\, c + 85\, a^8\, b^3\, c +$$
$$170\, a^7\, b^4\, c + 236\, a^6\, b^5\, c + 236\, a^5\, b^6\, c + 170\, a^4\, b^7\, c + 85\, a^3\, b^8\, c + 30\, a^2\, b^9\, c +$$
$$6\, a\, b^{10}\, c + b^{11}\, c + 5\, a^{10}\, c^2 + 30\, a^9\, b\, c^2 + 135\, a^8\, b^2\, c^2 + 340\, a^7\, b^3\, c^2 + 600\, a^6\, b^4\, c^2 +$$
$$708\, a^5\, b^5\, c^2 + 600\, a^4\, b^6\, c^2 + 340\, a^3\, b^7\, c^2 + 135\, a^2\, b^8\, c^2 + 30\, a\, b^9\, c^2 + 5\, b^{10}\, c^2 +$$
$$13\, a^9\, c^3 + 85\, a^8\, b\, c^3 + 340\, a^7\, b^2\, c^3 + 784\, a^6\, b^3\, c^3 + 1170\, a^5\, b^4\, c^3 + 1170\, a^4\, b^5\, c^3 +$$
$$784\, a^3\, b^6\, c^3 + 340\, a^2\, b^7\, c^3 + 85\, a\, b^8\, c^3 + 13\, b^9\, c^3 + 27\, a^8\, c^4 + 170\, a^7\, b\, c^4 +$$
$$600\, a^6\, b^2\, c^4 + 1170\, a^5\, b^3\, c^4 + 1479\, a^4\, b^4\, c^4 + 1170\, a^3\, b^5\, c^4 + 600\, a^2\, b^6\, c^4 +$$
$$170\, a\, b^7\, c^4 + 27\, b^8\, c^4 + 38\, a^7\, c^5 + 236\, a^6\, b\, c^5 + 708\, a^5\, b^2\, c^5 + 1170\, a^4\, b^3\, c^5 +$$
$$1170\, a^3\, b^4\, c^5 + 708\, a^2\, b^5\, c^5 + 236\, a\, b^6\, c^5 + 38\, b^7\, c^5 + 48\, a^6\, c^6 + 236\, a^5\, b\, c^6 +$$

$600\,a^4 b^2 c^6 + 784\,a^3 b^3 c^6 + 600\,a^2 b^4 c^6 + 236\,a\,b^5 c^6 + 48\,b^6 c^6 + 38\,a^5 c^7 +$
$170\,a^4 b\,c^7 + 340\,a^3 b^2 c^7 + 340\,a^2 b^3 c^7 + 170\,a\,b^4 c^7 + 38\,b^5 c^7 + 27\,a^4 c^8 +$
$85\,a^3 b\,c^8 + 135\,a^2 b^2 c^8 + 85\,a\,b^3 c^8 + 27\,b^4 c^8 + 13\,a^3 c^9 + 30\,a^2 b\,c^9 + 30\,a\,b^2 c^9 +$
$13\,b^3 c^9 + 5\,a^2 c^{10} + 6\,a\,b\,c^{10} + 5\,b^2 c^{10} + a\,c^{11} + b\,c^{11} + c^{12} + a^{11} d + 6\,a^{10} b\,d +$
$30\,a^9 b^2 d + 85\,a^8 b^3 d + 170\,a^7 b^4 d + 236\,a^6 b^5 d + 236\,a^5 b^6 d + 170\,a^4 b^7 d +$
$85\,a^3 b^8 d + 30\,a^2 b^9 d + 6\,a\,b^{10} d + b^{11} d + 6\,a^{10} c\,d + 55\,a^9 b\,c\,d + 250\,a^8 b^2 c\,d +$
$660\,a^7 b^3 c\,d + 1160\,a^6 b^4 c\,d + 1386\,a^5 b^5 c\,d + 1160\,a^4 b^6 c\,d + 660\,a^3 b^7 c\,d +$
$250\,a^2 b^8 c\,d + 55\,a\,b^9 c\,d + 6\,b^{10} c\,d + 30\,a^9 c^2 d + 250\,a^8 b\,c^2 d + 1000\,a^7 b^2 c^2 d +$
$2320\,a^6 b^3 c^2 d + 3480\,a^5 b^4 c^2 d + 3480\,a^4 b^5 c^2 d + 2320\,a^3 b^6 c^2 d + 1000\,a^2 b^7 c^2 d +$
$250\,a\,b^8 c^2 d + 30\,b^9 c^2 d + 85\,a^8 c^3 d + 660\,a^7 b\,c^3 d + 2320\,a^6 b^2 c^3 d +$
$4620\,a^5 b^3 c^3 d + 5790\,a^4 b^4 c^3 d + 4620\,a^3 b^5 c^3 d + 2320\,a^2 b^6 c^3 d + 660\,a\,b^7 c^3 d +$
$85\,b^8 c^3 d + 170\,a^7 c^4 d + 1160\,a^6 b\,c^4 d + 3480\,a^5 b^2 c^4 d + 5790\,a^4 b^3 c^4 d +$
$5790\,a^3 b^4 c^4 d + 3480\,a^2 b^5 c^4 d + 1160\,a\,b^6 c^4 d + 170\,b^7 c^4 d + 236\,a^6 c^5 d +$
$1386\,a^5 b\,c^5 d + 3480\,a^4 b^2 c^5 d + 4620\,a^3 b^3 c^5 d + 3480\,a^2 b^4 c^5 d + 1386\,a\,b^5 c^5 d +$
$236\,b^6 c^5 d + 236\,a^5 c^6 d + 1160\,a^4 b\,c^6 d + 2320\,a^3 b^2 c^6 d + 2320\,a^2 b^3 c^6 d +$
$1160\,a\,b^4 c^6 d + 236\,b^5 c^6 d + 170\,a^4 c^7 d + 660\,a^3 b\,c^7 d + 1000\,a^2 b^2 c^7 d +$
$660\,a\,b^3 c^7 d + 170\,b^4 c^7 d + 85\,a^3 c^8 d + 250\,a^2 b\,c^8 d + 250\,a\,b^2 c^8 d + 85\,b^3 c^8 d +$
$30\,a^2 c^9 d + 55\,a\,b\,c^9 d + 30\,b^2 c^9 d + 6\,a\,c^{10} d + 6\,b\,c^{10} d + c^{11} d + 5\,a^{10} d^2 +$
$30\,a^9 b\,d^2 + 135\,a^8 b^2 d^2 + 340\,a^7 b^3 d^2 + 600\,a^6 b^4 d^2 + 708\,a^5 b^5 d^2 + 600\,a^4 b^6 d^2 +$
$340\,a^3 b^7 d^2 + 135\,a^2 b^8 d^2 + 30\,a\,b^9 d^2 + 5\,b^{10} d^2 + 30\,a^9 c\,d^2 + 250\,a^8 b\,c\,d^2 +$
$1000\,a^7 b^2 c\,d^2 + 2320\,a^6 b^3 c\,d^2 + 3480\,a^5 b^4 c\,d^2 + 3480\,a^4 b^5 c\,d^2 + 2320\,a^3 b^6 c\,d^2 +$
$1000\,a^2 b^7 c\,d^2 + 250\,a\,b^8 c\,d^2 + 30\,b^9 c\,d^2 + 135\,a^8 c^2 d^2 + 1000\,a^7 b\,c^2 d^2 +$
$3510\,a^6 b^2 c^2 d^2 + 6960\,a^5 b^3 c^2 d^2 + 8730\,a^4 b^4 c^2 d^2 + 6960\,a^3 b^5 c^2 d^2 +$
$3510\,a^2 b^6 c^2 d^2 + 1000\,a\,b^7 c^2 d^2 + 135\,b^8 c^2 d^2 + 340\,a^7 c^3 d^2 + 2320\,a^6 b\,c^3 d^2 +$
$6960\,a^5 b^2 c^3 d^2 + 11580\,a^4 b^3 c^3 d^2 + 11580\,a^3 b^4 c^3 d^2 + 6960\,a^2 b^5 c^3 d^2 +$
$2320\,a\,b^6 c^3 d^2 + 340\,b^7 c^3 d^2 + 600\,a^6 c^4 d^2 + 3480\,a^5 b\,c^4 d^2 + 8730\,a^4 b^2 c^4 d^2 +$
$11580\,a^3 b^3 c^4 d^2 + 8730\,a^2 b^4 c^4 d^2 + 3480\,a\,b^5 c^4 d^2 + 600\,b^6 c^4 d^2 + 708\,a^5 c^5 d^2 +$
$3480\,a^4 b\,c^5 d^2 + 6960\,a^3 b^2 c^5 d^2 + 6960\,a^2 b^3 c^5 d^2 + 3480\,a\,b^4 c^5 d^2 + 708\,b^5 c^5 d^2 +$
$600\,a^4 c^6 d^2 + 2320\,a^3 b\,c^6 d^2 + 3510\,a^2 b^2 c^6 d^2 + 2320\,a\,b^3 c^6 d^2 + 600\,b^4 c^6 d^2 +$
$340\,a^3 c^7 d^2 + 1000\,a^2 b\,c^7 d^2 + 1000\,a\,b^2 c^7 d^2 + 340\,b^3 c^7 d^2 + 135\,a^2 c^8 d^2 +$
$250\,a\,b\,c^8 d^2 + 135\,b^2 c^8 d^2 + 30\,a\,c^9 d^2 + 30\,b\,c^9 d^2 + 5\,c^{10} d^2 + 13\,a^9 d^3 +$
$85\,a^8 b\,d^3 + 340\,a^7 b^2 d^3 + 784\,a^6 b^3 d^3 + 1170\,a^5 b^4 d^3 + 1170\,a^4 b^5 d^3 +$
$784\,a^3 b^6 d^3 + 340\,a^2 b^7 d^3 + 85\,a\,b^8 d^3 + 13\,b^9 d^3 + 85\,a^8 c\,d^3 + 660\,a^7 b\,c\,d^3 +$
$2320\,a^6 b^2 c\,d^3 + 4620\,a^5 b^3 c\,d^3 + 5790\,a^4 b^4 c\,d^3 + 4620\,a^3 b^5 c\,d^3 + 2320\,a^2 b^6 c\,d^3 +$
$660\,a\,b^7 c\,d^3 + 85\,b^8 c\,d^3 + 340\,a^7 c^2 d^3 + 2320\,a^6 b\,c^2 d^3 + 6960\,a^5 b^2 c^2 d^3 +$
$11580\,a^4 b^3 c^2 d^3 + 11580\,a^3 b^4 c^2 d^3 + 6960\,a^2 b^5 c^2 d^3 + 2320\,a\,b^6 c^2 d^3 +$
$340\,b^7 c^2 d^3 + 784\,a^6 c^3 d^3 + 4620\,a^5 b\,c^3 d^3 + 11580\,a^4 b^2 c^3 d^3 + 15408\,a^3 b^3 c^3 d^3 +$
$11580\,a^2 b^4 c^3 d^3 + 4620\,a\,b^5 c^3 d^3 + 784\,b^6 c^3 d^3 + 1170\,a^5 c^4 d^3 + 5790\,a^4 b\,c^4 d^3 +$
$11580\,a^3 b^2 c^4 d^3 + 11580\,a^2 b^3 c^4 d^3 + 5790\,a\,b^4 c^4 d^3 + 1170\,b^5 c^4 d^3 +$
$1170\,a^4 c^5 d^3 + 4620\,a^3 b\,c^5 d^3 + 6960\,a^2 b^2 c^5 d^3 + 4620\,a\,b^3 c^5 d^3 + 1170\,b^4 c^5 d^3 +$

$$784 a^3 c^6 d^3 + 2320 a^2 b c^6 d^3 + 2320 a b^2 c^6 d^3 + 784 b^3 c^6 d^3 + 340 a^2 c^7 d^3 +$$
$$660 a b c^7 d^3 + 340 b^2 c^7 d^3 + 85 a c^8 d^3 + 85 b c^8 d^3 + 13 c^9 d^3 + 27 a^8 d^4 +$$
$$170 a^7 b d^4 + 600 a^6 b^2 d^4 + 1170 a^5 b^3 d^4 + 1479 a^4 b^4 d^4 + 1170 a^3 b^5 d^4 +$$
$$600 a^2 b^6 d^4 + 170 a b^7 d^4 + 27 b^8 d^4 + 170 a^7 c d^4 + 1160 a^6 b c d^4 + 3480 a^5 b^2 c d^4 +$$
$$5790 a^4 b^3 c d^4 + 5790 a^3 b^4 c d^4 + 3480 a^2 b^5 c d^4 + 1160 a b^6 c d^4 + 170 b^7 c d^4 +$$
$$600 a^6 c^2 d^4 + 3480 a^5 b c^2 d^4 + 8730 a^4 b^2 c^2 d^4 + 11580 a^3 b^3 c^2 d^4 + 8730 a^2 b^4 c^2 d^4 +$$
$$3480 a b^5 c^2 d^4 + 600 b^6 c^2 d^4 + 1170 a^5 c^3 d^4 + 5790 a^4 b c^3 d^4 + 11580 a^3 b^2 c^3 d^4 +$$
$$11580 a^2 b^3 c^3 d^4 + 5790 a b^4 c^3 d^4 + 1170 b^5 c^3 d^4 + 1479 a^4 c^4 d^4 + 5790 a^3 b c^4 d^4 +$$
$$8730 a^2 b^2 c^4 d^4 + 5790 a b^3 c^4 d^4 + 1479 b^4 c^4 d^4 + 1170 a^3 c^5 d^4 + 3480 a^2 b c^5 d^4 +$$
$$3480 a b^2 c^5 d^4 + 1170 b^3 c^5 d^4 + 600 a^2 c^6 d^4 + 1160 a b c^6 d^4 + 600 b^2 c^6 d^4 +$$
$$170 a c^7 d^4 + 170 b c^7 d^4 + 27 c^8 d^4 + 38 a^7 d^5 + 236 a^6 b d^5 + 708 a^5 b^2 d^5 +$$
$$1170 a^4 b^3 d^5 + 1170 a^3 b^4 d^5 + 708 a^2 b^5 d^5 + 236 a b^6 d^5 + 38 b^7 d^5 + 236 a^6 c d^5 +$$
$$1386 a^5 b c d^5 + 3480 a^4 b^2 c d^5 + 4620 a^3 b^3 c d^5 + 3480 a^2 b^4 c d^5 + 1386 a b^5 c d^5 +$$
$$236 b^6 c d^5 + 708 a^5 c^2 d^5 + 3480 a^4 b c^2 d^5 + 6960 a^3 b^2 c^2 d^5 + 6960 a^2 b^3 c^2 d^5 +$$
$$3480 a b^4 c^2 d^5 + 708 b^5 c^2 d^5 + 1170 a^4 c^3 d^5 + 4620 a^3 b c^3 d^5 + 6960 a^2 b^2 c^3 d^5 +$$
$$4620 a b^3 c^3 d^5 + 1170 b^4 c^3 d^5 + 1170 a^3 c^4 d^5 + 3480 a^2 b c^4 d^5 + 3480 a b^2 c^4 d^5 +$$
$$1170 b^3 c^4 d^5 + 708 a^2 c^5 d^5 + 1386 a b c^5 d^5 + 708 b^2 c^5 d^5 + 236 a c^6 d^5 +$$
$$236 b c^6 d^5 + 38 c^7 d^5 + 48 a^6 d^6 + 236 a^5 b d^6 + 600 a^4 b^2 d^6 + 784 a^3 b^3 d^6 +$$
$$600 a^2 b^4 d^6 + 236 a b^5 d^6 + 48 b^6 d^6 + 236 a^5 c d^6 + 1160 a^4 b c d^6 + 2320 a^3 b^2 c d^6 +$$
$$2320 a^2 b^3 c d^6 + 1160 a b^4 c d^6 + 236 b^5 c d^6 + 600 a^4 c^2 d^6 + 2320 a^3 b c^2 d^6 +$$
$$3510 a^2 b^2 c^2 d^6 + 2320 a b^3 c^2 d^6 + 600 b^4 c^2 d^6 + 784 a^3 c^3 d^6 + 2320 a^2 b c^3 d^6 +$$
$$2320 a b^2 c^3 d^6 + 784 b^3 c^3 d^6 + 600 a^2 c^4 d^6 + 1160 a b c^4 d^6 + 600 b^2 c^4 d^6 +$$
$$236 a c^5 d^6 + 236 b c^5 d^6 + 48 c^6 d^6 + 38 a^5 d^7 + 170 a^4 b d^7 + 340 a^3 b^2 d^7 +$$
$$340 a^2 b^3 d^7 + 170 a b^4 d^7 + 38 b^5 d^7 + 170 a^4 c d^7 + 660 a^3 b c d^7 + 1000 a^2 b^2 c d^7 +$$
$$660 a b^3 c d^7 + 170 b^4 c d^7 + 340 a^3 c^2 d^7 + 1000 a^2 b c^2 d^7 + 1000 a b^2 c^2 d^7 +$$
$$340 b^3 c^2 d^7 + 340 a^2 c^3 d^7 + 660 a b c^3 d^7 + 340 b^2 c^3 d^7 + 170 a c^4 d^7 + 170 b c^4 d^7 +$$
$$38 c^5 d^7 + 27 a^4 d^8 + 85 a^3 b d^8 + 135 a^2 b^2 d^8 + 85 a b^3 d^8 + 27 b^4 d^8 + 85 a^3 c d^8 +$$
$$250 a^2 b c d^8 + 250 a b^2 c d^8 + 85 b^3 c d^8 + 135 a^2 c^2 d^8 + 250 a b c^2 d^8 + 135 b^2 c^2 d^8 +$$
$$85 a c^3 d^8 + 85 b c^3 d^8 + 27 c^4 d^8 + 13 a^3 d^9 + 30 a^2 b d^9 + 30 a b^2 d^9 + 13 b^3 d^9 +$$
$$30 a^2 c d^9 + 55 a b c d^9 + 30 b^2 c d^9 + 30 a c^2 d^9 + 30 b c^2 d^9 + 13 c^3 d^9 + 5 a^2 d^{10} +$$
$$6 a b d^{10} + 5 b^2 d^{10} + 6 a c d^{10} + 6 b c d^{10} + 5 c^2 d^{10} + a d^{11} + b d^{11} + c d^{11} + d^{12}$$

$F[4,4,4,4]= 703760$

Дакле укупно 703760 нееквивалентних бојења.

Група пресликавања темена коцке

P_1 =	1	2	3	4	5	6	7	8	(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)
P_2 =	5	6	2	1	8	7	3	4	(1 5 8 4) (6 7 3 2)
P_3 =	8	7	6	5	4	3	2	1	(1 8) (7 2) (6 3) (5 4)
P_4 =	4	3	7	8	1	2	6	5	(1 4 8 5) (3 7 6 2)
P_5 =	2	3	4	1	6	7	8	5	(1 2 3 4) (6 7 8 5)
P_6 =	3	4	1	2	7	8	5	6	(1 3) (4 2) (7 5) (8 6)
P_7 =	4	1	2	3	8	5	6	7	(1 4 3 2) (8 7 6 5)
P_8 =	5	1	4	8	6	2	3	7	(1 5 6 2) (4 8 7 3)
P_9 =	6	5	8	7	2	1	4	3	(1 6) (5 2) (8 3) (7 4)
P_{10} =	2	6	7	3	1	5	8	4	(1 2 6 5) (7 8 4 3)
P_{11} =	1	5	6	2	4	8	7	3	(1) (5 4 2) (6 8 3) (7)
P_{12} =	1	4	8	5	2	3	7	6	(1) (4 5 2) (8 6 3) (7)
P_{13} =	3	2	6	7	4	1	5	8	(1 3 6) (2) (7 5 4) (8)
P_{14} =	6	2	1	5	7	3	4	8	(1 6 3) (2) (5 7 4) (8)
P_{15} =	6	7	3	2	5	8	4	1	(1 6 8) (7 4 2) (3) (5)
P_{16} =	8	4	3	7	5	1	2	6	(1 8 6) (4 7 2) (3) (5)
P_{17} =	3	7	8	4	2	6	5	1	(1 3 8) (7 5 2) (4) (6)
P_{18} =	8	5	1	4	7	6	2	3	(1 8 3) (5 7 2) (4) (6)
P_{19} =	5	8	7	6	1	4	3	2	(1 5) (8 2) (7 3) (6 4)
P_{20} =	2	1	5	6	3	4	8	7	(1 2) (5 3) (6 4) (7 8)
P_{21} =	7	3	2	6	8	4	1	5	(1 7) (3 2) (6 4) (8 5)
P_{22} =	7	6	5	8	3	2	1	4	(1 7) (6 2) (5 3) (8 4)
P_{23} =	7	8	4	3	6	5	1	2	(1 7) (8 2) (4 3) (6 5)
P_{24} =	4	8	5	1	3	7	6	2	(1 4) (8 2) (5 3) (7 6)

$(Z_1)\ (Z_1)\ (Z_1)\ (Z_1)\ (Z_1)\ (Z_1)\ (Z_1)\ (Z_1)\ +$

$(Z_4)\ (Z_4)\ +$

$(Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ +$

$(Z_4)\ (Z_4)\ +$

$(Z_4)\ (Z_4)\ +$

$(Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ +$

$(Z_4)\ (Z_4)\ +$

$(Z_4)\ (Z_4)\ +$

$(Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ +$

$(Z_4)\ (Z_4)\ +$

$(Z_1)\ (Z_3)\ (Z_3)\ (Z_1)\ +$

$(Z_1)\ (Z_3)\ (Z_3)\ (Z_1)\ +$

$(Z_3)\ (Z_1)\ (Z_3)\ (Z_1)\ +$

$(Z_3)\ (Z_1)\ (Z_3)\ (Z_1)\ +$

$(Z_3)\ (Z_3)\ (Z_1)\ (Z_1)\ +$

$(Z_3)\ (Z_3)\ (Z_1)\ (Z_1)\ +$

$(Z_3)\ (Z_3)\ (Z_1)\ (Z_1)\ +$

$(Z_3)\ (Z_3)\ (Z_1)\ (Z_1)\ +$

$(Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ +$

$(Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ +$

$(Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ +$

$(Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ +$

$(Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ +$

$(Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ (Z_2)\ = \quad (Z1^8 + 9\ Z2^4 + 8\ Z1^2\ Z3^2 + 6\ Z4^2)\ /\ 24$

Таблица групе темена коцке																								
	p1	**p2**	**p3**	**p4**	**p5**	**p6**	**p7**	**p8**	**p9**	**p10**	**p11**	**p12**	**p13**	**p14**	**p15**	**p16**	**p17**	**p18**	**p19**	**p20**	**p21**	**p22**	**p23**	**p24**
p1	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	p24
p2	p2	p3	p4	p1	p15	p23	p18	p14	p20	p11	p24	p5	p7	p21	p19	p8	p10	p22	p12	p6	p16	p13	p9	p17
p3	p3	p4	p1	p2	p19	p9	p22	p21	p6	p24	p17	p15	p18	p16	p12	p14	p11	p13	p5	p23	p8	p7	p20	p10
p4	p4	p1	p2	p3	p12	p20	p13	p16	p23	p17	p10	p19	p22	p8	p5	p21	p24	p7	p15	p9	p14	p18	p6	p11
p5	p5	p14	p22	p17	p6	p7	p1	p12	p19	p15	p2	p24	p10	p20	p21	p4	p23	p8	p3	p11	p13	p9	p16	p18
p6	p6	p20	p9	p23	p7	p1	p5	p24	p3	p21	p14	p18	p15	p11	p13	p17	p16	p12	p22	p2	p10	p19	p4	p8
p7	p7	p11	p19	p16	p1	p5	p6	p18	p22	p13	p20	p8	p21	p2	p10	p23	p4	p24	p9	p14	p15	p3	p17	p12
p8	p8	p18	p24	p12	p14	p21	p16	p9	p10	p1	p7	p20	p4	p22	p2	p19	p5	p23	p11	p13	p3	p17	p15	p6
p9	p9	p23	p6	p20	p22	p3	p19	p10	p1	p8	p16	p13	p12	p17	p18	p11	p14	p15	p7	p4	p24	p5	p2	p21
p10	p10	p15	p21	p13	p17	p24	p11	p1	p8	p9	p19	p4	p20	p5	p23	p7	p22	p2	p16	p12	p6	p14	p18	p3
p11	p11	p19	p16	p7	p10	p17	p24	p2	p14	p20	p12	p1	p6	p15	p9	p18	p13	p3	p8	p5	p23	p21	p22	p4
p12	p12	p8	p18	p24	p20	p13	p4	p19	p15	p5	p1	p11	p17	p9	p14	p3	p6	p16	p2	p10	p22	p23	p21	p7
p13	p13	p10	p15	p21	p4	p12	p20	p7	p18	p22	p9	p16	p14	p1	p17	p6	p3	p11	p23	p8	p5	p2	p24	p19
p14	p14	p22	p17	p5	p21	p16	p8	p20	p11	p2	p18	p6	p1	p13	p3	p12	p15	p9	p24	p7	p4	p10	p19	p23
p15	p15	p21	p13	p10	p23	p18	p2	p5	p12	p19	p3	p17	p11	p6	p16	p1	p9	p14	p4	p24	p7	p20	p8	p22
p16	p16	p7	p11	p19	p8	p14	p21	p23	p17	p4	p13	p9	p3	p18	p1	p15	p12	p6	p10	p22	p2	p24	p5	p20
p17	p17	p5	p14	p22	p24	p11	p10	p4	p16	p23	p15	p3	p9	p12	p6	p13	p18	p1	p21	p19	p20	p8	p7	p2
p18	p18	p24	p12	p8	p2	p15	p23	p22	p13	p7	p6	p14	p16	p3	p11	p9	p1	p17	p20	p21	p19	p4	p10	p5
p19	p19	p16	p7	p11	p9	p22	p3	p15	p5	p12	p4	p10	p24	p23	p8	p2	p20	p21	p1	p17	p18	p6	p14	p13
p20	p20	p9	p23	p6	p13	p4	p12	p11	p2	p14	p8	p7	p5	p10	p22	p24	p21	p19	p18	p1	p17	p15	p3	p16
p21	p21	p13	p10	p15	p16	p8	p14	p6	p24	p3	p22	p23	p2	p7	p4	p5	p19	p20	p17	p18	p1	p11	p12	p9
p22	p22	p17	p5	p14	p3	p19	p9	p13	p7	p18	p23	p21	p8	p4	p24	p20	p2	p10	p6	p16	p12	p1	p11	p15
p23	p23	p6	p20	p9	p18	p2	p15	p17	p4	p16	p21	p22	p19	p24	p7	p10	p8	p5	p13	p3	p11	p12	p1	p14
p24	p24	p12	p8	p18	p11	p10	p17	p3	p21	p6	p5	p2	p23	p19	p20	p22	p7	p4	p14	p15	p9	p16	p13	p1

Ивентар бојења темена коцке са три боје

Циклусни индекс

F Z1_, Z2_, Z3_, Z4_ [illegible] 1^8 + 9 Z2^4 + 8 Z1^2 Z3^2 + 6 Z4^2 [illegible]

F [illegible] + b [illegible] c, $a^2 + b^2 + c^2$, $a^3 + b^3 + c^3$, $a^4 + b^4 + c^4$ [illegible]

$\frac{1}{24}$ [illegible] + b [illegible] c [illegible] ^{2} + b [illegible] + c^2 [illegible] + b [illegible] c [illegible] ^{3} + b [illegible] + c^3 [illegible] ^{4} + b [illegible] + c^4 [illegible]

• • • • • • •   • • • • • •

$$a^8 + a^7 b + 3 a^6 b^2 + 3 a^5 b^3 + 7 a^4 b^4 + 3 a^3 b^5 + 3 a^2 b^6 + a b^7 + b^8 + a^7 c + 3 a^6 b c + 7 a^5 b^2 c + 13 a^4 b^3 c + 13 a^3 b^4 c + 7 a^2 b^5 c + 3 a b^6 c + b^7 c + 3 a^6 c^2 + 7 a^5 b c^2 + 22 a^4 b^2 c^2 + 24 a^3 b^3 c^2 + 22 a^2 b^4 c^2 + 7 a b^5 c^2 + 3 b^6 c^2 + 3 a^5 c^3 + 13 a^4 b c^3 + 24 a^3 b^2 c^3 + 24 a^2 b^3 c^3 + 13 a b^4 c^3 + 3 b^5 c^3 + 7 a^4 c^4 + 13 a^3 b c^4 + 22 a^2 b^2 c^4 + 13 a b^3 c^4 + 7 b^4 c^4 + 3 a^3 c^5 + 7 a^2 b c^5 + 7 a b^2 c^5 + 3 b^3 c^5 + 3 a^2 c^6 + 3 a b c^6 + 3 b^2 c^6 + a c^7 + b c^7 + c^8$$

`F[3,3,3,3]`= 333

Дакле укупно 333 нееквивалентних бојења.

XII Бојење икосоедра

група пресликавања темена икосоедра												
P_1 =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_2 =	1	3	4	5	6	2	8	9	10	11	7	12
P_3 =	1	4	5	6	2	3	9	10	11	7	8	12
P_4 =	1	5	6	2	3	4	10	11	7	8	9	12
P_5 =	1	6	2	3	4	5	11	7	8	9	10	12
P_6 =	3	2	7	8	4	1	11	12	9	5	6	10
P_7 =	7	2	11	12	8	3	6	10	9	4	1	5
P_8 =	11	2	6	10	12	7	1	5	9	8	3	4
P_9 =	6	2	1	5	10	11	3	4	9	12	7	8
P_{10} =	2	7	3	1	6	11	8	4	5	10	12	9
P_{11} =	7	8	3	2	11	12	4	1	6	10	9	5
P_{12} =	8	4	3	7	12	9	1	2	11	10	5	6
P_{13} =	4	1	3	8	9	5	2	7	12	10	6	11
P_{14} =	3	7	8	4	1	2	12	9	5	6	11	10
P_{15} =	8	12	9	4	3	7	10	5	1	2	11	6
P_{16} =	9	10	5	4	8	12	6	1	3	7	11	2
P_{17} =	5	6	1	4	9	10	2	3	8	12	11	7
P_{18} =	6	11	2	1	5	10	7	3	4	9	12	8
P_{19} =	10	12	11	6	5	9	7	2	1	4	8	3
P_{20} =	9	8	12	10	5	4	7	11	6	1	3	2
P_{21} =	4	3	8	9	5	1	7	12	10	6	2	11
P_{22} =	2	11	7	3	1	6	12	8	4	5	10	9
P_{23} =	11	10	12	7	2	6	9	8	3	1	5	4
P_{24} =	10	5	9	12	11	6	4	8	7	2	1	3
P_{25} =	5	1	4	9	10	6	3	8	12	11	2	7
P_{26} =	8	7	12	9	4	3	11	10	5	1	2	6
P_{27} =	10	11	6	5	9	12	2	1	4	8	7	3
P_{28} =	2	6	11	7	3	1	10	12	8	4	5	9
P_{29} =	6	1	5	10	11	2	4	9	12	7	3	8
P_{30} =	6	10	11	2	1	5	12	7	3	4	9	8
P_{31} =	5	4	9	10	6	1	8	12	11	2	3	7
P_{32} =	4	8	9	5	1	3	12	10	6	2	7	11
P_{33} =	5	10	6	1	4	9	11	2	3	8	12	7
P_{34} =	2	3	1	6	11	7	4	5	10	12	8	9
P_{35} =	3	1	2	7	8	4	6	11	12	9	5	10
P_{36} =	3	8	4	1	2	7	9	5	6	11	12	10
P_{37} =	4	5	1	3	8	9	6	2	7	12	10	11
P_{38} =	11	7	2	6	10	12	3	1	5	9	8	4
P_{39} =	8	3	7	12	9	4	2	11	10	5	1	6
P_{40} =	11	12	7	2	6	10	8	3	1	5	9	4
P_{41} =	9	4	8	12	10	5	3	7	11	6	1	2
P_{42} =	7	12	8	3	2	11	9	4	1	6	10	5
P_{43} =	9	5	4	8	12	10	1	3	7	11	6	2
P_{44} =	7	11	12	8	3	2	10	9	4	1	6	5
P_{45} =	10	6	5	9	12	11	1	4	8	7	2	3
P_{46} =	2	1	6	11	7	3	5	10	12	8	4	9
P_{47} =	3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10
P_{48} =	4	9	5	1	3	8	10	6	2	7	12	11
P_{49} =	5	9	10	6	1	4	12	11	2	3	8	7
P_{50} =	6	5	10	11	2	1	9	12	7	3	4	8
P_{51} =	12	7	11	10	9	8	2	6	5	4	3	1
P_{52} =	7	3	2	11	12	8	1	6	10	9	4	5
P_{53} =	11	6	10	12	7	2	5	9	8	3	1	4
P_{54} =	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
P_{55} =	8	9	4	3	7	12	5	1	2	11	10	6
P_{56} =	12	9	8	7	11	10	4	3	2	6	5	1
P_{57} =	12	8	7	11	10	9	3	2	6	5	4	1
P_{58} =	9	12	10	5	4	8	11	6	1	3	7	2
P_{59} =	12	10	9	8	7	11	5	4	3	2	6	1
P_{60} =	10	9	12	11	6	5	8	7	2	1	4	3

	Пермутациона група темена икосоедра преко циклуса
P_1 =	(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12)
P_2 =	(1) (3 4 5 6 2) (8 9 10 11 7) (12)
P_3 =	(1) (4 6 3 5 2) (9 11 8 10 7) (12)
P_4 =	(1) (5 3 6 4 2) (10 8 11 9 7) (12)
P_5 =	(1) (6 5 4 3 2) (11 10 9 8 7) (12)
P_6 =	(1 3 7 11 6) (2) (8 12 10 5 4) (9)
P_7 =	(1 7 6 3 11) (2) (12 5 8 10 4) (9)
P_8 =	(1 11 3 6 7) (2) (10 8 5 12 4) (9)
P_9 =	(1 6 11 7 3) (2) (5 10 12 8 4) (9)
P_{10} =	(1 2 7 8 4) (3) (6 11 12 9 5) (10)
P_{11} =	(1 7 4 2 8) (3) (11 9 6 12 5) (10)
P_{12} =	(1 8 2 4 7) (3) (12 6 9 11 5) (10)
P_{13} =	(1 4 8 7 2) (3) (9 12 11 6 5) (10)
P_{14} =	(1 3 8 9 5) (7 12 10 6 2) (4) (11)
P_{15} =	(1 8 5 3 9) (12 6 7 10 2) (4) (11)
P_{16} =	(1 9 3 5 8) (10 7 6 12 2) (4) (11)
P_{17} =	(1 5 9 8 3) (6 10 12 7 2) (4) (11)
P_{18} =	(1 6 10 9 4) (11 12 8 3 2) (5) (7)
P_{19} =	(1 10 4 6 9) (12 3 11 8 2) (5) (7)
P_{20} =	(1 9 6 4 10) (8 11 3 12 2) (5) (7)
P_{21} =	(1 4 9 10 6) (3 8 12 11 2) (5) (7)
P_{22} =	(1 2 11 10 5) (7 12 9 4 3) (6) (8)
P_{23} =	(1 11 5 2 10) (12 4 7 9 3) (6) (8)
P_{24} =	(1 10 2 5 11) (9 7 4 12 3) (6) (8)
P_{25} =	(1 5 10 11 2) (4 9 12 7 3) (6) (8)
P_{26} =	(1 8 10) (7 11 2) (12 6 3) (9 5 4)
P_{27} =	(1 10 8) (11 7 2) (6 12 3) (5 9 4)
P_{28} =	(1 2 6) (11 5 3) (7 10 4) (12 9 8)
P_{29} =	(1 6 2) (5 11 3) (10 7 4) (9 12 8)
P_{30} =	(1 6 5) (10 4 2) (11 9 3) (12 8 7)
P_{31} =	(1 5 6) (4 10 2) (9 11 3) (8 12 7)
P_{32} =	(1 4 5) (8 10 2) (9 6 3) (12 11 7)
P_{33} =	(1 5 4) (10 8 2) (6 9 3) (11 12 7)
P_{34} =	(1 2 3) (6 7 4) (11 8 5) (10 12 9)
P_{35} =	(1 3 2) (7 6 4) (8 11 5) (12 10 9)
P_{36} =	(1 3 4) (8 5 2) (7 9 6) (11 12 10)
P_{37} =	(1 4 3) (5 8 2) (9 7 6) (12 11 10)
P_{38} =	(1 11 8) (7 3 2) (6 12 4) (10 9 5)
P_{39} =	(1 8 11) (3 7 2) (12 6 4) (9 10 5)
P_{40} =	(1 11 9) (12 4 2) (7 8 3) (6 10 5)
P_{41} =	(1 9 11) (4 12 2) (8 7 3) (10 6 5)
P_{42} =	(1 7 9) (12 5 2) (8 4 3) (11 10 6)
P_{43} =	(1 9 7) (5 12 2) (4 8 3) (10 11 6)
P_{44} =	(1 7 10) (11 6 2) (12 5 3) (8 9 4)
P_{45} =	(1 10 7) (6 11 2) (5 12 3) (9 8 4)
P_{46} =	(1 2) (6 3) (11 4) (7 5) (10 8) (12 9)
P_{47} =	(1 3) (4 2) (7 5) (8 6) (11 9) (12 10)
P_{48} =	(1 4) (9 2) (5 3) (8 6) (10 7) (12 11)
P_{49} =	(1 5) (9 2) (10 3) (6 4) (12 7) (11 8)
P_{50} =	(1 6) (5 2) (10 3) (11 4) (9 7) (12 8)
P_{51} =	(1 12) (7 2) (11 3) (10 4) (9 5) (8 6)
P_{52} =	(1 7) (3 2) (11 4) (12 5) (8 6) (10 9)
P_{53} =	(1 11) (6 2) (10 3) (12 4) (7 5) (9 8)
P_{54} =	(1 12) (11 2) (10 3) (9 4) (8 5) (7 6)
P_{55} =	(1 8) (9 2) (4 3) (7 5) (12 6) (11 10)
P_{56} =	(1 12) (9 2) (8 3) (7 4) (11 5) (10 6)
P_{57} =	(1 12) (8 2) (7 3) (11 4) (10 5) (9 6)
P_{58} =	(1 9) (12 2) (10 3) (5 4) (8 6) (11 7)
P_{59} =	(1 12) (10 2) (9 3) (8 4) (7 5) (11 6)
P_{60} =	(1 10) (9 2) (12 3) (11 4) (6 5) (8 7)

P_1 =	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	+			
P_2 =	(Z_1)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	+											
P_3 =	(Z_1)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	+											
P_4 =	(Z_1)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	+											
P_5 =	(Z_1)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	+											
P_6 =	(Z_5)	(Z_1)	(Z_5)	(Z_1)	+											
P_7 =	(Z_5)	(Z_1)	(Z_5)	(Z_1)	+											
P_8 =	(Z_5)	(Z_1)	(Z_5)	(Z_1)	+											
P_9 =	(Z_5)	(Z_1)	(Z_5)	(Z_1)	+											
P_{10} =	(Z_5)	(Z_1)	(Z_5)	(Z_1)	+											
P_{11} =	(Z_5)	(Z_1)	(Z_5)	(Z_1)	+											
P_{12} =	(Z_5)	(Z_1)	(Z_5)	(Z_1)	+											
P_{13} =	(Z_5)	(Z_1)	(Z_5)	(Z_1)	+											
P_{14} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	(Z_1)	+											
P_{15} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	(Z_1)	+											
P_{16} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	(Z_1)	+											
P_{17} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	(Z_1)	+											
P_{18} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	(Z_1)	+											
P_{19} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	(Z_1)	+											
P_{20} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	(Z_1)	+											
P_{21} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	(Z_1)	+											
P_{22} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	(Z_1)	+											
P_{23} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	(Z_1)	+											
P_{24} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	(Z_1)	+											
P_{25} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_1)	(Z_1)	+											
P_{26} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{27} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{28} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{29} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{30} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{31} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{32} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{33} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{34} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{35} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{36} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{37} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{38} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{39} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{40} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{41} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{42} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{43} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{44} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{45} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	+											
P_{46} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{47} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{48} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{49} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{50} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{51} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{52} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{53} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{54} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{55} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{56} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{57} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{58} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{59} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+									
P_{60} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	=	$(Z1^{12} + 15\,Z2^{6} + 20\,Z3^{4} + 24\,Z1^{2}\,Z5^{2}) / 60$								

Ивентар бојења темена икосоедра са две боје

Циклусни индекс

$$F[Z1\_, Z2\_, Z3\_, Z4\_, Z5\_] := \frac{1}{60}\left(Z1^{12} + 15\,Z2^{6} + 20\,Z3^{4} + 24\,Z1^{2}\,Z5^{2}\right)$$

$$\frac{1}{60}\left((a+b)^{12} + 15\,(a^{2}+b^{2})^{6} + 20\,(a^{3}+b^{3})^{4} + 24\,(a+b)^{2}\,(a^{5}+b^{5})^{2}\right)$$

Ивентар бојења

$$a^{12} + a^{11} b + 3 a^{10} b^{2} + 5 a^{9} b^{3} + 12 a^{8} b^{4} + 14 a^{7} b^{5} + 24 a^{6} b^{6} + 14 a^{5} b^{7} + 12 a^{4} b^{8} + 5 a^{3} b^{9} + 3 a^{2} b^{10} + a b^{11} + b^{12}$$

F[2,2,2,2,2]= 96

Дакле укупно 96 нееквивалентних бојења.

Ивентар бојења темена икосоедра са три боје

Циклусни индекс

$$F[Z1\_, Z2\_, Z3\_, Z4\_, Z5\_] := \frac{1}{60}\left(Z1^{12} + 15\,Z2^{6} + 20\,Z3^{4} + 24\,Z1^{2}\,Z5^{2}\right)$$

$$F[a+b+c,\ a^{2}+b^{2}+c^{2},\ a^{3}+b^{3}+c^{3},\ a^{4}+b^{4}+c^{4},\ a^{5}+b^{5}+c^{5}]$$

$$\frac{1}{60}\left((a+b+c)^{12} + 15\,(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{6} + 20\,(a^{3}+b^{3}+c^{3})^{4} + 24\,(a+b+c)^{2}\,(a^{5}+b^{5}+c^{5})^{2}\right)$$

Ивентар бојења

$$a^{12} + a^{11} b + 3 a^{10} b^{2} + 5 a^{9} b^{3} + 12 a^{8} b^{4} + 14 a^{7} b^{5} + 24 a^{6} b^{6} + 14 a^{5} b^{7} + 12 a^{4} b^{8} + 5 a^{3} b^{9} + 3 a^{2} b^{10} + a b^{11} + b^{12} + a^{11} c + 3 a^{10} b c + 11 a^{9} b^{2} c + 33 a^{8} b^{3} c + 66 a^{7} b^{4} c + 94 a^{6} b^{5} c + 94 a^{5} b^{6} c + 66 a^{4} b^{7} c + 33 a^{3} b^{8} c + 11 a^{2} b^{9} c + 3 a b^{10} c + b^{11} c + 3 a^{10} c^{2} + 11 a^{9} b c^{2} + 57 a^{8} b^{2} c^{2} + 132 a^{7} b^{3} c^{2} + 246 a^{6} b^{4} c^{2} + 278 a^{5} b^{5} c^{2} + 246 a^{4} b^{6} c^{2} + 132 a^{3} b^{7} c^{2} + 57 a^{2} b^{8} c^{2} + 11 a b^{9} c^{2} + 3 b^{10} c^{2} + 5 a^{9} c^{3} + 33 a^{8} b c^{3} + 132 a^{7} b^{2} c^{3} + 312 a^{6} b^{3} c^{3} + 462 a^{5} b^{4} c^{3} + 462 a^{4} b^{5} c^{3} + 312 a^{3} b^{6} c^{3} + 132 a^{2} b^{7} c^{3} + 33 a b^{8} c^{3} + 5 b^{9} c^{3} + 12 a^{8} c^{4} + 66 a^{7} b c^{4} + 246 a^{6} b^{2} c^{4} + 462 a^{5} b^{3} c^{4} + 600 a^{4} b^{4} c^{4} + 462 a^{3} b^{5} c^{4} + 246 a^{2} b^{6} c^{4} + 66 a b^{7} c^{4} + 12 b^{8} c^{4} + 14 a^{7} c^{5} + 94 a^{6} b c^{5} + 278 a^{5} b^{2} c^{5} + 462 a^{4} b^{3} c^{5} + 462 a^{3} b^{4} c^{5} + 278 a^{2} b^{5} c^{5} + 94 a b^{6} c^{5} + 14 b^{7} c^{5} + 24 a^{6} c^{6} + 94 a^{5} b c^{6} + 246 a^{4} b^{2} c^{6} + 312 a^{3} b^{3} c^{6} + 246 a^{2} b^{4} c^{6} + 94 a b^{5} c^{6} + 24 b^{6} c^{6} + 14 a^{5} c^{7} + 66 a^{4} b c^{7} + 132 a^{3} b^{2} c^{7} + 132 a^{2} b^{3} c^{7} + 66 a b^{4} c^{7} + 14 b^{5} c^{7} + 12 a^{4} c^{8} + 33 a^{3} b c^{8} + 57 a^{2} b^{2} c^{8} + 33 a b^{3} c^{8} + 12 b^{4} c^{8} + 5 a^{3} c^{9} + 11 a^{2} b c^{9} + 11 a b^{2} c^{9} + 5 b^{3} c^{9} + 3 a^{2} c^{10} + 3 a b c^{10} + 3 b^{2} c^{10} + a c^{11} + b c^{11} + c^{12}$$

F[3,3,3,3,3]= 9099

Дакле укупно 9099 нееквивалентних бојења.

Група пресликавања страна икосоедра																				
P_1 =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_2 =	2	3	4	5	1	8	9	10	11	12	13	14	15	6	7	17	18	19	20	16
P_3 =	3	4	5	1	2	10	11	12	13	14	15	6	7	8	9	18	19	20	16	17
P_4 =	4	5	1	2	3	12	13	14	15	6	7	8	9	10	11	19	20	16	17	18
P_5 =	5	1	2	3	4	14	15	6	7	8	9	10	11	12	13	20	16	17	18	19
P_6 =	6	7	8	2	1	15	20	16	17	9	10	3	4	5	14	19	18	11	12	13
P_7 =	15	20	16	7	6	14	13	19	18	17	9	8	2	1	5	12	11	10	3	4
P_8 =	14	13	19	20	15	5	4	12	11	18	17	16	7	6	1	3	10	9	8	2
P_9 =	5	4	12	13	14	1	2	3	10	11	18	19	20	15	6	8	9	17	16	7
P_{10} =	6	1	5	14	15	7	8	2	3	4	12	13	19	20	16	9	10	11	18	17
P_{11} =	7	6	15	20	16	8	2	1	5	14	13	19	18	17	9	3	4	12	11	10
P_{12} =	8	7	16	17	9	2	1	6	15	20	19	18	11	10	3	5	14	13	12	4
P_{13} =	2	8	9	10	3	1	6	7	16	17	18	11	12	4	5	15	20	19	13	14
P_{14} =	7	8	2	1	6	16	17	9	10	3	4	5	14	15	20	18	11	12	13	19
P_{15} =	17	9	8	7	16	18	11	10	3	2	1	6	15	20	19	12	4	5	14	13
P_{16} =	11	10	9	17	18	12	4	3	2	8	7	16	20	19	13	5	1	6	15	14
P_{17} =	4	3	10	11	12	5	1	2	8	9	17	18	19	13	14	6	7	16	20	15
P_{18} =	14	5	4	12	13	15	6	1	2	3	10	11	18	19	20	7	8	9	17	16
P_{19} =	19	13	12	11	18	20	15	14	5	4	3	10	9	17	16	6	1	2	8	7
P_{20} =	17	18	11	10	9	16	20	19	13	12	4	3	2	8	7	15	14	5	1	6
P_{21} =	8	9	10	3	2	7	16	17	18	11	12	4	5	1	6	20	19	13	14	15
P_{22} =	15	6	1	5	14	20	16	7	8	2	3	4	12	13	19	17	9	10	11	18
P_{23} =	19	20	15	14	13	18	17	16	7	6	1	5	4	12	11	9	8	2	3	10
P_{24} =	11	18	19	13	12	10	9	17	16	20	15	14	5	4	3	8	7	6	1	2
P_{25} =	3	10	11	12	4	2	8	9	17	18	19	13	14	5	1	7	16	20	15	6
P_{26} =	16	17	9	8	7	20	19	18	11	10	3	2	1	6	15	13	12	4	5	14
P_{27} =	13	12	11	18	19	14	5	4	3	10	9	17	16	20	15	1	2	8	7	6
P_{28} =	14	15	6	1	5	13	19	20	16	7	8	2	3	4	12	18	17	9	10	11
P_{29} =	4	12	13	14	5	3	10	11	18	19	20	15	6	1	2	9	17	16	7	8
P_{30} =	13	14	5	4	12	19	20	15	6	1	2	3	10	11	18	16	7	8	9	17
P_{31} =	10	11	12	4	3	9	17	18	19	13	14	5	1	2	8	16	20	15	6	7
P_{32} =	9	10	3	2	8	17	18	11	12	4	5	1	6	7	16	19	13	14	15	20
P_{33} =	12	4	3	10	11	13	14	5	1	2	8	9	17	18	19	15	6	7	16	20
P_{34} =	1	5	14	15	6	2	3	4	12	13	19	20	16	7	8	10	11	18	17	9
P_{35} =	1	6	7	8	2	5	14	15	20	16	17	9	10	3	4	13	19	18	11	12
P_{36} =	8	2	1	6	7	9	10	3	4	5	14	15	20	16	17	11	12	13	19	18
P_{37} =	3	2	8	9	10	4	5	1	6	7	16	17	18	11	12	14	15	20	19	13
P_{38} =	15	14	13	19	20	6	1	5	4	12	11	18	17	16	7	2	3	10	9	8
P_{39} =	7	16	17	9	8	6	15	20	19	18	11	10	3	2	1	14	13	12	4	5
P_{40} =	20	15	14	13	19	16	7	6	1	5	4	12	11	18	17	8	2	3	10	9
P_{41} =	9	17	18	11	10	8	7	16	20	19	13	12	4	3	2	6	15	14	5	1
P_{42} =	16	7	6	15	20	17	9	8	2	1	5	14	13	19	18	10	3	4	12	11
P_{43} =	10	9	17	18	11	3	2	8	7	16	20	19	13	12	4	1	6	15	14	5
P_{44} =	20	16	7	6	15	19	18	17	9	8	2	1	5	14	13	11	10	3	4	12
P_{45} =	12	11	18	19	13	4	3	10	9	17	16	20	15	14	5	2	8	7	6	1
P_{46} =	5	14	15	6	1	4	12	13	19	20	16	7	8	2	3	11	18	17	9	10
P_{47} =	2	1	6	7	8	3	4	5	14	15	20	16	17	9	10	12	13	19	18	11
P_{48} =	10	3	2	8	9	11	12	4	5	1	6	7	16	17	18	13	14	15	20	19
P_{49} =	11	12	4	3	10	18	19	13	14	5	1	2	8	9	17	20	15	6	7	16
P_{50} =	12	13	14	5	4	11	18	19	20	15	6	1	2	3	10	17	16	7	8	9
P_{51} =	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
P_{52} =	6	15	20	16	7	1	5	14	13	19	18	17	9	8	2	4	12	11	10	3
P_{53} =	13	19	20	15	14	12	11	18	17	16	7	6	1	5	4	10	9	8	2	3
P_{54} =	19	18	17	16	20	13	12	11	10	9	8	7	6	15	14	4	3	2	1	5
P_{55} =	9	8	7	16	17	10	3	2	1	6	15	20	19	18	11	4	5	14	13	12
P_{56} =	17	16	20	19	18	9	8	7	6	15	14	13	12	11	10	2	1	5	4	3
P_{57} =	16	20	19	18	17	7	6	15	14	13	12	11	10	9	8	1	5	4	3	2
P_{58} =	18	11	10	9	17	19	13	12	4	3	2	8	7	16	20	14	5	1	6	15
P_{59} =	18	17	16	20	19	11	10	9	8	7	6	15	14	13	12	3	2	1	5	4
P_{60} =	18	19	13	12	11	17	16	20	15	14	5	4	3	10	9	7	6	1	2	8

P_1 =	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	(Z_1)	+
P_2 =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_3 =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_4 =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_5 =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_6 =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_7 =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_8 =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_9 =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{10} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{11} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{12} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{13} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{14} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{15} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{16} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{17} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{18} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{19} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{20} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{21} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{22} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{23} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{24} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{25} =	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	(Z_5)	+																
P_{26} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_1)	+												
P_{27} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_1)	+												
P_{28} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{29} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{30} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{31} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{32} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{33} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{34} =	(Z_1)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{35} =	(Z_1)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{36} =	(Z_3)	(Z_1)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{37} =	(Z_3)	(Z_1)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{38} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{39} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{40} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_1)	+												
P_{41} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_1)	+												
P_{42} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{43} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_3)	(Z_1)	+												
P_{44} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_1)	+												
P_{45} =	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_3)	(Z_1)	(Z_1)	+												
P_{46} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{47} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{48} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{49} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{50} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{51} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{52} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{53} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{54} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{55} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{56} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{57} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{58} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{59} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	+										
P_{60} =	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	(Z_2)	=	$(Z1^{20} + 15\,Z2^{10} + 20\,Z1^{2}\,Z3^{6} + 24\,Z5^{4}) / 60$									

Ивентар бојења страна икосоедра са две боје

Циклусни индекс

$F[Z1\_, Z2\_, Z3\_, Z4\_, Z5\_]$ [illegible] $1^{20} + 15\, Z2^{10} + 20\, Z1^{2}\, Z3^{6} + 24\, Z5^{4}$ [illegible]
$F[$[illegible]$+ b,$ [illegible] $^{2} + b^{2},\ a^{3} + b^{3},\ a^{4} + b^{4},\ a^{5} + b^{5}$ [illegible]

$\frac{1}{60}$ [illegible] $+ b$ [illegible] 5 [illegible] $^{2} + b^{2}$ [illegible] 20 [illegible] $+ b$ [illegible] $+ b^{3}$ [illegible] 4 [illegible] $^{5} + b^{5}$ [illegible]

Ивентар бојења

$$a^{20} + a^{19} b + 6 a^{18} b^{2} + 21 a^{17} b^{3} + 96 a^{16} b^{4} + 262 a^{15} b^{5} + 681 a^{14} b^{6} + 1302 a^{13} b^{7} + 2157 a^{12} b^{8} + 2806 a^{11} b^{9} + 3158 a^{10} b^{10} + 2806 a^{9} b^{11} + 2157 a^{8} b^{12} + 1302 a^{7} b^{13} + 681 a^{6} b^{14} + 262 a^{5} b^{15} + 96 a^{4} b^{16} + 21 a^{3} b^{17} + 6 a^{2} b^{18} + a b^{19} + b^{20}$$

Дакле укупно 9099 нееквивалентних бојења.

Ивентар бојења страна икосоедра са три боје

Циклусни индекс

$F[Z1\_, Z2\_, Z3\_, Z4\_, Z5\_]$ [illegible] $1^{20} + 15\, Z2^{10} + 20\, Z1^{2}\, Z3^{6} + 24\, Z5^{4}$ [illegible]
$F[$[illegible]$+ b$ [illegible] $c,\ a^{2} + b^{2} + c^{2},\ a^{3} + b^{3} + c^{3},\ a^{4} + b^{4} + c^{4},\ a^{5} + b^{5} + c^{5}$ [illegible]
$\frac{1}{60}$ [illegible] $+ b$ [illegible] 5 [illegible] $^{2} + b^{2}$ [illegible] 20 [illegible] $+ b$ [illegible] $+ b^{3}$ [illegible] 4 [illegible] $^{5} + b^{5}$ [illegible]

Ивентар бојења

$$a^{20} + a^{19} b + 6 a^{18} b^{2} + 21 a^{17} b^{3} + 96 a^{16} b^{4} + 262 a^{15} b^{5} + 681 a^{14} b^{6} + 1302 a^{13} b^{7} + 2157 a^{12} b^{8} + 2806 a^{11} b^{9} + 3158 a^{10} b^{10} + 2806 a^{9} b^{11} + 2157 a^{8} b^{12} + 1302 a^{7} b^{13} + 681 a^{6} b^{14} + 262 a^{5} b^{15} + 96 a^{4} b^{16} + 21 a^{3} b^{17} + 6 a^{2} b^{18} + a b^{19} + b^{20} + a^{19} c + 7 a^{18} b c + 57 a^{17} b^{2} c + 327 a^{16} b^{3} c + 1296 a^{15} b^{4} c + 3876 a^{14} b^{5} c + 9054 a^{13} b^{6} c + 16806 a^{12} b^{7} c + 25194 a^{11} b^{8} c + 30806 a^{10} b^{9} c + 30806 a^{9} b^{10} c + 25194 a^{8} b^{11} c + 16806 a^{7} b^{12} c + 9054 a^{6} b^{13} c + 3876 a^{5} b^{14} c + 1296 a^{4} b^{15} c + 327 a^{3} b^{16} c + 57 a^{2} b^{17} c + 7 a b^{18} c + b^{19} c + 6 a^{18} c^{2} + 57 a^{17} b c^{2} + 507 a^{16} b^{2} c^{2} + 2586 a^{15} b^{3} c^{2} + 9780 a^{14} b^{4} c^{2} + 27132 a^{13} b^{5} c^{2} + 59001 a^{12} b^{6} c^{2} + 100776 a^{11} b^{7} c^{2} + 138882 a^{10} b^{8} c^{2} + 153970 a^{9} b^{9} c^{2} + 138882 a^{8} b^{10} c^{2} + 100776 a^{7} b^{11} c^{2} + 59001 a^{6} b^{12} c^{2} + 27132 a^{5} b^{13} c^{2} + 9780 a^{4} b^{14} c^{2} + 2586 a^{3} b^{15} c^{2} + 507 a^{2} b^{16} c^{2} + 57 a b^{17} c^{2} + 6 b^{18} c^{2} + 21 a^{17} c^{3} + 327 a^{16} b c^{3} + 2586 a^{15} b^{2} c^{3} + 12930 a^{14} b^{3} c^{3} + 45240 a^{13} b^{4} c^{3} + 117582 a^{12} b^{5} c^{3} + 235164 a^{11} b^{6} c^{3} + 369552 a^{10} b^{7} c^{3} + 461910 a^{9} b^{8} c^{3} + 461910 a^{8} b^{9} c^{3} + 369552 a^{7} b^{10} c^{3} + 235164 a^{6} b^{11} c^{3} + 117582 a^{5} b^{12} c^{3} + 45240 a^{4} b^{13} c^{3} + 12930 a^{3} b^{14} c^{3} + 2586 a^{2} b^{15} c^{3} + 327 a b^{16} c^{3} + 21 b^{17} c^{3} + 96 a^{16} c^{4} + 1296 a^{15} b c^{4} + 9780 a^{14} b^{2} c^{4} + 45240 a^{13} b^{3} c^{4} + 147300 a^{12} b^{4} c^{4} + 352716 a^{11} b^{5} c^{4} + 647316 a^{10} b^{6} c^{4} + 923820 a^{9} b^{7} c^{4} + 1040040 a^{8} b^{8} c^{4} + 923820 a^{7} b^{9} c^{4} + 647316 a^{6} b^{10} c^{4} + 352716 a^{5} b^{11} c^{4} + 147300 a^{4} b^{12} c^{4} +$$

$$45240\, a^{3} b^{13} c^{4} + 9780\, a^{2} b^{14} c^{4} + 1296\, a\, b^{15} c^{4} + 96\, b^{16} c^{4} + 262\, a^{15} c^{5} + 3876\, a^{14} b\, c^{5} +$$
$$27132\, a^{13} b^{2} c^{5} + 117582\, a^{12} b^{3} c^{5} + 352716\, a^{11} b^{4} c^{5} + 775980\, a^{10} b^{5} c^{5} + 1293312\, a^{9} b^{6} c^{5} +$$
$$1662804\, a^{8} b^{7} c^{5} + 1662804\, a^{7} b^{8} c^{5} + 1293312\, a^{6} b^{9} c^{5} + 775980\, a^{5} b^{10} c^{5} +$$
$$352716\, a^{4} b^{11} c^{5} + 117582\, a^{3} b^{12} c^{5} + 27132\, a^{2} b^{13} c^{5} + 3876\, a\, b^{14} c^{5} + 262\, b^{15} c^{5} +$$
$$681\, a^{14} c^{6} + 9054\, a^{13} b\, c^{6} + 59001\, a^{12} b^{2} c^{6} + 235164\, a^{11} b^{3} c^{6} + 647316\, a^{10} b^{4} c^{6} +$$
$$1293312\, a^{9} b^{5} c^{6} + 1941018\, a^{8} b^{6} c^{6} + 2217132\, a^{7} b^{7} c^{6} + 1941018\, a^{6} b^{8} c^{6} +$$
$$1293312\, a^{5} b^{9} c^{6} + 647316\, a^{4} b^{10} c^{6} + 235164\, a^{3} b^{11} c^{6} + 59001\, a^{2} b^{12} c^{6} + 9054\, a\, b^{13} c^{6} +$$
$$681\, b^{14} c^{6} + 1302\, a^{13} c^{7} + 16806\, a^{12} b\, c^{7} + 100776\, a^{11} b^{2} c^{7} + 369552\, a^{10} b^{3} c^{7} +$$
$$923820\, a^{9} b^{4} c^{7} + 1662804\, a^{8} b^{5} c^{7} + 2217132\, a^{7} b^{6} c^{7} + 2217132\, a^{6} b^{7} c^{7} +$$
$$1662804\, a^{5} b^{8} c^{7} + 923820\, a^{4} b^{9} c^{7} + 369552\, a^{3} b^{10} c^{7} + 100776\, a^{2} b^{11} c^{7} + 16806\, a\, b^{12} c^{7} +$$
$$1302\, b^{13} c^{7} + 2157\, a^{12} c^{8} + 25194\, a^{11} b\, c^{8} + 138882\, a^{10} b^{2} c^{8} + 461910\, a^{9} b^{3} c^{8} +$$
$$1040040\, a^{8} b^{4} c^{8} + 1662804\, a^{7} b^{5} c^{8} + 1941018\, a^{6} b^{6} c^{8} + 1662804\, a^{5} b^{7} c^{8} +$$
$$1040040\, a^{4} b^{8} c^{8} + 461910\, a^{3} b^{9} c^{8} + 138882\, a^{2} b^{10} c^{8} + 25194\, a\, b^{11} c^{8} + 2157\, b^{12} c^{8} +$$
$$2806\, a^{11} c^{9} + 30806\, a^{10} b\, c^{9} + 153970\, a^{9} b^{2} c^{9} + 461910\, a^{8} b^{3} c^{9} + 923820\, a^{7} b^{4} c^{9} +$$
$$1293312\, a^{6} b^{5} c^{9} + 1293312\, a^{5} b^{6} c^{9} + 923820\, a^{4} b^{7} c^{9} + 461910\, a^{3} b^{8} c^{9} + 153970\, a^{2} b^{9} c^{9} +$$
$$30806\, a\, b^{10} c^{9} + 2806\, b^{11} c^{9} + 3158\, a^{10} c^{10} + 30806\, a^{9} b\, c^{10} + 138882\, a^{8} b^{2} c^{10} +$$
$$369552\, a^{7} b^{3} c^{10} + 647316\, a^{6} b^{4} c^{10} + 775980\, a^{5} b^{5} c^{10} + 647316\, a^{4} b^{6} c^{10} +$$
$$369552\, a^{3} b^{7} c^{10} + 138882\, a^{2} b^{8} c^{10} + 30806\, a\, b^{9} c^{10} + 3158\, b^{10} c^{10} + 2806\, a^{9} c^{11} +$$
$$25194\, a^{8} b\, c^{11} + 100776\, a^{7} b^{2} c^{11} + 235164\, a^{6} b^{3} c^{11} + 352716\, a^{5} b^{4} c^{11} + 352716\, a^{4} b^{5} c^{11} +$$
$$235164\, a^{3} b^{6} c^{11} + 100776\, a^{2} b^{7} c^{11} + 25194\, a\, b^{8} c^{11} + 2806\, b^{9} c^{11} + 2157\, a^{8} c^{12} +$$
$$16806\, a^{7} b\, c^{12} + 59001\, a^{6} b^{2} c^{12} + 117582\, a^{5} b^{3} c^{12} + 147300\, a^{4} b^{4} c^{12} + 117582\, a^{3} b^{5} c^{12} +$$
$$59001\, a^{2} b^{6} c^{12} + 16806\, a\, b^{7} c^{12} + 2157\, b^{8} c^{12} + 1302\, a^{7} c^{13} + 9054\, a^{6} b\, c^{13} +$$
$$27132\, a^{5} b^{2} c^{13} + 45240\, a^{4} b^{3} c^{13} + 45240\, a^{3} b^{4} c^{13} + 27132\, a^{2} b^{5} c^{13} + 9054\, a\, b^{6} c^{13} +$$
$$1302\, b^{7} c^{13} + 681\, a^{6} c^{14} + 3876\, a^{5} b\, c^{14} + 9780\, a^{4} b^{2} c^{14} + 12930\, a^{3} b^{3} c^{14} + 9780\, a^{2} b^{4} c^{14} +$$
$$3876\, a\, b^{5} c^{14} + 681\, b^{6} c^{14} + 262\, a^{5} c^{15} + 1296\, a^{4} b\, c^{15} + 2586\, a^{3} b^{2} c^{15} + 2586\, a^{2} b^{3} c^{15} +$$
$$1296\, a\, b^{4} c^{15} + 262\, b^{5} c^{15} + 96\, a^{4} c^{16} + 327\, a^{3} b\, c^{16} + 507\, a^{2} b^{2} c^{16} + 327\, a\, b^{3} c^{16} +$$
$$96\, b^{4} c^{16} + 21\, a^{3} c^{17} + 57\, a^{2} b\, c^{17} + 57\, a\, b^{2} c^{17} + 21\, b^{3} c^{17} + 6\, a^{2} c^{18} + 7\, a\, b\, c^{18} +$$
$$6\, b^{2} c^{18} + a\, c^{19} + b\, c^{19} + c^{20}$$

F[3,3,3,3,3]= 58130055

Дакле укупно 58130055 нееквивалентних бојења.

Група пресликавања ивица икосоедра																														
P_{1} =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P_{2} =	2	3	4	5	1	7	8	9	10	6	13	14	15	16	17	18	19	20	11	12	22	23	24	25	21	27	28	29	30	26
P_{3} =	3	4	5	1	2	8	9	10	6	7	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14	23	24	25	21	22	28	29	30	26	27
P_{4} =	4	5	1	2	3	9	10	6	7	8	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16	24	25	21	22	23	29	30	26	27	28
P_{5} =	5	1	2	3	4	10	6	7	8	9	19	20	11	12	13	14	15	16	17	18	25	21	22	23	24	30	26	27	28	29
P_{6} =	6	12	13	7	2	11	21	14	3	1	20	25	26	27	22	15	8	4	5	10	30	28	16	9	19	24	29	23	17	18
P_{7} =	11	25	26	21	12	20	30	27	13	6	10	19	24	29	28	22	14	7	2	1	18	23	15	3	5	9	17	16	8	4
P_{8} =	20	19	24	30	25	10	18	29	26	11	1	5	9	17	23	28	27	21	12	6	4	16	22	13	2	3	8	15	14	7
P_{9} =	10	5	9	18	19	1	4	17	24	20	6	2	3	8	16	23	29	30	25	11	7	15	28	26	12	13	14	22	27	21
P_{10} =	11	6	1	10	20	12	2	5	19	25	21	13	7	3	4	9	18	24	30	26	14	8	17	29	27	22	15	16	23	28
P_{11} =	21	12	11	25	26	13	6	20	30	27	14	7	2	1	10	19	24	29	28	22	3	5	18	23	15	8	4	9	17	16
P_{12} =	14	13	21	27	22	7	12	26	28	15	3	2	6	11	25	30	29	23	16	8	1	20	24	17	4	5	10	19	18	9
P_{13} =	3	7	14	15	8	2	13	22	16	4	1	6	12	21	27	28	23	17	9	5	11	26	29	18	10	20	25	30	24	19
P_{14} =	12	13	7	2	6	21	14	3	1	11	26	27	22	15	8	4	5	10	20	25	28	16	9	19	30	29	23	17	18	24
P_{15} =	27	22	14	13	21	28	15	7	12	26	29	23	16	8	3	2	6	11	25	30	17	4	1	20	24	18	9	5	10	19
P_{16} =	23	16	15	22	28	17	8	14	27	29	18	9	4	3	7	13	21	26	30	24	5	2	12	25	19	10	1	6	11	20
P_{17} =	9	4	8	16	17	5	3	15	23	18	10	1	2	7	14	22	28	29	24	19	6	13	27	30	20	11	12	21	26	25
P_{18} =	19	10	5	9	18	20	1	4	17	24	25	11	6	2	3	8	16	23	29	30	12	7	15	28	26	21	13	14	22	27
P_{19} =	29	24	18	17	23	30	19	9	16	28	26	25	20	10	5	4	8	15	22	27	11	1	3	14	21	12	6	2	7	13
P_{20} =	22	28	23	16	15	27	29	17	8	14	21	26	30	24	18	9	4	3	7	13	25	19	5	2	12	11	20	10	1	6
P_{21} =	7	14	15	8	3	13	22	16	4	2	12	21	27	28	23	17	9	5	1	6	26	29	18	10	11	25	30	24	19	20
P_{22} =	20	11	6	1	10	25	12	2	5	19	30	26	21	13	7	3	4	9	18	24	27	14	8	17	29	28	22	15	16	23
P_{23} =	24	30	25	20	19	29	26	11	10	18	23	28	27	21	12	6	1	5	9	17	22	13	2	4	16	15	14	7	3	8
P_{24} =	17	23	29	24	18	16	28	30	19	9	8	15	22	27	26	25	20	10	5	4	14	21	11	1	3	7	13	12	6	2
P_{25} =	4	8	16	17	9	3	15	23	18	5	2	7	14	22	28	29	24	19	10	1	13	27	30	20	6	12	21	26	25	11
P_{26} =	21	27	22	14	13	26	28	15	7	12	25	30	29	23	16	8	3	2	6	11	24	17	4	1	20	19	18	9	5	10
P_{27} =	24	18	17	23	29	19	9	16	28	30	20	10	5	4	8	15	22	27	26	25	1	3	14	21	11	6	2	7	13	12
P_{28} =	10	20	11	6	1	19	25	12	2	5	18	24	30	26	21	13	7	3	4	9	29	27	14	8	17	23	28	22	15	16
P_{29} =	5	9	18	19	10	4	17	24	20	1	3	8	16	23	29	30	25	11	6	2	15	28	26	12	7	14	22	27	21	13
P_{30} =	18	19	10	5	9	24	20	1	4	17	29	30	25	11	6	2	3	8	16	23	26	12	7	15	28	27	21	13	14	22
P_{31} =	8	16	17	9	4	15	23	18	5	3	14	22	28	29	24	19	10	1	2	7	27	30	20	6	13	21	26	25	11	12
P_{32} =	14	15	8	3	7	22	16	4	2	13	27	28	23	17	9	5	1	6	12	21	29	18	10	11	26	30	24	19	20	25
P_{33} =	17	9	4	8	16	18	5	3	15	23	24	19	10	1	2	7	14	22	28	29	20	6	13	27	30	25	11	12	21	26
P_{34} =	6	1	10	20	11	2	5	19	25	12	7	3	4	9	18	24	30	26	21	13	8	17	29	27	14	15	16	23	28	22
P_{35} =	2	6	12	13	7	1	11	21	14	3	5	10	20	25	26	27	22	15	8	4	19	30	28	16	9	18	24	29	23	17
P_{36} =	13	7	2	6	12	14	3	1	11	21	22	15	8	4	5	10	20	25	26	27	16	9	19	30	28	23	17	18	24	29
P_{37} =	8	3	7	14	15	4	2	13	22	16	9	5	1	6	12	21	27	28	23	17	10	11	26	29	18	19	20	25	30	24
P_{38} =	25	20	19	24	30	11	10	18	29	26	12	6	1	5	9	17	23	28	27	21	2	4	16	22	13	7	3	8	15	14
P_{39} =	13	21	27	22	14	12	26	28	15	7	6	11	25	30	29	23	16	8	3	2	20	24	17	4	1	10	19	18	9	5
P_{40} =	30	25	20	19	24	26	11	10	18	29	27	21	12	6	1	5	9	17	23	28	13	2	4	16	22	14	7	3	8	15
P_{41} =	15	22	28	23	16	14	27	29	17	8	7	13	21	26	30	24	18	9	4	3	12	25	19	5	2	6	11	20	10	1
P_{42} =	26	21	12	11	25	27	13	6	20	30	28	22	14	7	2	1	10	19	24	29	15	3	5	18	23	16	8	4	9	17
P_{43} =	16	15	22	28	23	8	14	27	29	17	4	3	7	13	21	26	30	24	18	9	2	12	25	19	5	1	6	11	20	10
P_{44} =	25	26	21	12	11	30	27	13	6	20	24	29	28	22	14	7	2	1	10	19	23	15	3	5	18	17	16	8	4	9
P_{45} =	18	17	23	29	24	9	16	28	30	19	5	4	8	15	22	27	26	25	20	10	3	14	21	11	1	2	7	13	12	6
P_{46} =	1	10	20	11	6	5	19	25	12	2	4	9	18	24	30	26	21	13	7	3	17	29	27	14	8	16	23	28	22	15
P_{47} =	7	2	6	12	13	3	1	11	21	14	8	4	5	10	20	25	26	27	22	15	9	19	30	28	16	17	18	24	29	23
P_{48} =	15	8	3	7	14	16	4	2	13	22	23	17	9	5	1	6	12	21	27	28	18	10	11	26	29	24	19	20	25	30
P_{49} =	16	17	9	4	8	23	18	5	3	15	28	29	24	19	10	1	2	7	14	22	30	20	6	13	27	26	25	11	12	21
P_{50} =	9	18	19	10	5	17	24	20	1	4	16	23	29	30	25	11	6	2	3	8	28	26	12	7	15	22	27	21	13	14
P_{51} =	26	30	29	28	27	25	24	23	22	21	11	20	19	18	17	16	15	14	13	12	10	9	8	7	6	1	5	4	3	2
P_{52} =	12	11	25	26	21	6	20	30	27	13	2	1	10	19	24	29	28	22	14	7	5	18	23	15	3	4	9	17	16	8
P_{53} =	19	24	30	25	20	18	29	26	11	10	9	17	23	28	27	21	12	6	1	5	16	22	13	2	4	8	15	14	7	3
P_{54} =	30	29	28	27	26	24	23	22	21	25	19	18	17	16	15	14	13	12	11	20	9	8	7	6	10	5	4	3	2	1
P_{55} =	22	14	13	21	27	15	7	12	26	28	16	8	3	2	6	11	25	30	29	23	4	1	20	24	17	9	5	10	19	18
P_{56} =	28	27	26	30	29	22	21	25	24	23	15	14	13	12	11	20	19	18	17	16	7	6	10	9	8	3	2	1	5	4
P_{57} =	27	26	30	29	28	21	25	24	23	22	13	12	11	20	19	18	17	16	15	14	6	10	9	8	7	2	1	5	4	3
P_{58} =	28	23	16	15	22	29	17	8	14	27	30	24	18	9	4	3	7	13	21	26	19	5	2	12	25	20	10	1	6	11
P_{59} =	29	28	27	26	30	23	22	21	25	24	17	16	15	14	13	12	11	20	19	18	8	7	6	10	9	4	3	2	1	5
P_{60} =	23	29	24	18	17	28	30	19	9	16	22	27	26	25	20	10	5	4	8	15	21	11	1	3	14	13	12	6	2	7

Пермутациона група пресликавања ивица икосоедра у циклусима	
P_1 =	(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30)
P_2 =	(1 2 3 4 5) (7 8 9 10 6) (13 15 17 19 11) (14 16 18 20 12) (22 23 24 25 21) (27 28 29 30 26)
P_3 =	(1 3 5 2 4) (8 10 7 9 6) (15 19 13 17 11) (16 20 14 18 12) (23 25 22 24 21) (28 30 27 29 26)
P_4 =	(1 4 2 5 3) (9 7 10 8 6) (17 13 19 15 11) (18 14 20 16 12) (24 22 25 23 21) (29 27 30 28 26)
P_5 =	(1 5 4 3 2) (10 9 8 7 6) (19 17 15 13 11) (20 18 16 14 12) (25 24 23 22 21) (30 29 28 27 26)
P_6 =	(1 6 11 20 10) (12 25 19 5 2) (13 26 24 9 3) (7 21 30 18 4) (14 27 29 17 8) (22 28 23 16 15)
P_7 =	(1 11 10 6 20) (25 5 12 19 2) (26 9 13 24 3) (21 18 7 30 4) (27 17 14 29 8) (28 16 22 23 15)
P_8 =	(1 20 6 10 11) (19 12 5 25 2) (24 13 9 26 3) (30 7 18 21 4) (29 14 17 27 8) (23 22 16 28 15)
P_9 =	(1 10 20 11 6) (5 19 25 12 2) (9 24 26 13 3) (18 30 21 7 4) (17 29 27 14 8) (16 23 28 22 15)
P_{10} =	(1 11 21 14 3) (6 12 13 7 2) (10 25 27 15 4) (20 26 22 8 5) (19 30 28 16 9) (18 24 29 23 17)
P_{11} =	(1 21 3 11 14) (12 7 6 13 2) (25 15 10 27 4) (26 8 20 22 5) (30 16 19 28 9) (24 23 18 29 17)
P_{12} =	(1 14 11 3 21) (13 6 7 12 2) (27 10 15 25 4) (22 20 8 26 5) (28 19 16 30 9) (29 18 23 24 17)
P_{13} =	(1 3 14 21 11) (7 13 12 6 2) (15 27 25 10 4) (8 22 26 20 5) (16 28 30 19 9) (23 29 24 18 17)
P_{14} =	(1 12 27 23 9) (13 22 16 4 2) (7 14 15 8 3) (6 21 28 17 5) (11 26 29 18 10) (20 25 30 24 19)
P_{15} =	(1 27 9 12 23) (22 4 13 16 2) (14 8 7 15 3) (21 17 6 28 5) (26 18 11 29 10) (25 24 20 30 19)
P_{16} =	(1 23 12 9 27) (16 13 4 22 2) (15 7 8 14 3) (28 6 17 21 5) (29 11 18 26 10) (30 20 24 25 19)
P_{17} =	(1 9 23 27 12) (4 16 22 13 2) (8 15 14 7 3) (17 28 21 6 5) (18 29 26 11 10) (24 30 25 20 19)
P_{18} =	(1 19 29 22 7) (10 24 28 14 2) (5 18 23 15 3) (9 17 16 8 4) (20 30 27 13 6) (25 26 21 12 11)
P_{19} =	(1 29 7 19 22) (24 14 10 28 2) (18 15 5 23 3) (17 8 9 16 4) (30 13 20 27 6) (26 12 25 21 11)
P_{20} =	(1 22 19 7 29) (28 10 14 24 2) (23 5 15 18 3) (16 9 8 17 4) (27 20 13 30 6) (21 25 12 26 11)
P_{21} =	(1 7 22 29 19) (14 28 24 10 2) (15 23 18 5 3) (8 16 17 9 4) (13 27 30 20 6) (12 21 26 25 11)
P_{22} =	(1 20 24 17 4) (11 30 23 8 2) (6 25 29 16 3) (10 19 18 9 5) (12 26 28 15 7) (21 27 22 14 13)
P_{23} =	(1 24 4 20 17) (30 8 11 23 2) (25 16 6 29 3) (19 9 10 18 5) (26 15 12 28 7) (27 14 21 22 13)
P_{24} =	(1 17 20 4 24) (23 11 8 30 2) (29 6 16 25 3) (18 10 9 19 5) (28 12 15 26 7) (22 21 14 27 13)
P_{25} =	(1 4 17 24 20) (8 23 30 11 2) (16 29 25 6 3) (9 18 19 10 5) (15 28 26 12 7) (14 22 27 21 13)
P_{26} =	(1 21 24) (27 18 2) (22 17 3) (14 23 4) (13 29 5) (26 19 6) (28 9 7) (15 16 8) (12 30 10) (25 20 11)
P_{27} =	(1 24 21) (18 27 2) (17 22 3) (23 14 4) (29 13 5) (19 26 6) (9 28 7) (16 15 8) (30 12 10) (20 25 11)
P_{28} =	(1 10 5) (20 9 2) (11 18 3) (6 19 4) (25 17 7) (12 24 8) (30 16 13) (26 23 14) (21 29 15) (27 28 22)
P_{29} =	(1 5 10) (9 20 2) (18 11 3) (19 6 4) (17 25 7) (24 12 8) (16 30 13) (23 26 14) (29 21 15) (28 27 22)
P_{30} =	(1 18 8) (19 16 2) (10 17 3) (5 9 4) (24 15 6) (20 23 7) (29 14 11) (30 22 12) (25 28 13) (26 27 21)
P_{31} =	(1 8 18) (16 19 2) (17 10 3) (9 5 4) (15 24 6) (23 20 7) (14 29 11) (22 30 12) (28 25 13) (27 26 21)
P_{32} =	(1 14 17) (15 9 2) (8 4 3) (7 16 5) (22 18 6) (13 23 10) (27 24 11) (28 19 12) (21 29 20) (26 30 25)
P_{33} =	(1 17 14) (9 15 2) (4 8 3) (16 7 5) (18 22 6) (23 13 10) (24 27 11) (19 28 12) (29 21 20) (30 26 25)
P_{34} =	(1 6 2) (10 12 3) (20 13 4) (11 7 5) (19 21 8) (25 14 9) (18 26 15) (24 27 16) (30 22 17) (29 28 23)
P_{35} =	(1 2 6) (12 10 3) (13 20 4) (7 11 5) (21 19 8) (14 25 9) (26 18 15) (27 24 16) (22 30 17) (28 29 23)
P_{36} =	(1 13 8) (7 3 2) (6 14 4) (12 15 5) (11 22 9) (21 16 10) (20 27 17) (25 28 18) (26 23 19) (30 29 24)
P_{37} =	(1 8 13) (3 7 2) (14 6 4) (15 12 5) (22 11 9) (16 21 10) (27 20 17) (28 25 18) (23 26 19) (29 30 24)
P_{38} =	(1 25 13) (20 21 2) (19 27 3) (24 22 4) (30 14 5) (11 12 6) (10 26 7) (18 28 8) (29 15 9) (17 23 16)
P_{39} =	(1 13 25) (21 20 2) (27 19 3) (22 24 4) (14 30 5) (12 11 6) (26 10 7) (28 18 8) (15 29 9) (23 17 16)
P_{40} =	(1 30 15) (25 22 2) (20 28 3) (19 23 4) (24 16 5) (26 14 6) (11 27 7) (10 29 8) (18 17 9) (21 13 12)
P_{41} =	(1 15 30) (22 25 2) (28 20 3) (23 19 4) (16 24 5) (14 26 6) (27 11 7) (29 10 8) (17 18 9) (13 21 12)
P_{42} =	(1 26 16) (21 15 2) (12 22 3) (11 28 4) (25 23 5) (27 8 6) (13 14 7) (20 29 9) (30 17 10) (19 24 18)
P_{43} =	(1 16 26) (15 21 2) (22 12 3) (28 11 4) (23 25 5) (8 27 6) (14 13 7) (29 20 9) (17 30 10) (24 19 18)
P_{44} =	(1 25 18) (26 17 2) (21 23 3) (12 29 4) (11 24 5) (30 9 6) (27 16 7) (13 28 8) (20 19 10) (22 15 14)
P_{45} =	(1 18 25) (17 26 2) (23 21 3) (29 12 4) (24 11 5) (9 30 6) (16 27 7) (28 13 8) (19 20 10) (15 22 14)
P_{46} =	(1) (10 2) (20 3) (11 4) (6 5) (19 7) (25 8) (12 9) (18 13) (24 14) (30 15) (26 16) (21 17) (29 22) (27 23) (28)
P_{47} =	(1 7) (2) (6 3) (12 4) (13 5) (11 8) (21 9) (14 10) (20 15) (25 16) (26 17) (27 18) (22 19) (30 23) (28 24) (29)
P_{48} =	(1 15) (8 2) (3) (7 4) (14 5) (16 6) (13 9) (22 10) (23 11) (17 12) (21 18) (27 19) (28 20) (26 24) (29 25) (30)
P_{49} =	(1 16) (17 2) (9 3) (4) (8 5) (23 6) (18 7) (15 10) (28 11) (29 12) (24 13) (19 14) (22 20) (30 21) (27 25) (26)
P_{50} =	(1 9) (18 2) (19 3) (10 4) (5) (17 6) (24 7) (20 8) (16 11) (23 12) (29 13) (30 14) (25 15) (28 21) (26 22) (27)
P_{51} =	(1 26) (30 2) (29 3) (28 4) (27 5) (25 6) (24 7) (23 8) (22 9) (21 10) (11) (20 12) (19 13) (18 14) (17 15) (16)
P_{52} =	(1 12) (11 2) (25 3) (26 4) (21 5) (6) (20 7) (30 8) (27 9) (13 10) (19 14) (24 15) (29 16) (28 17) (22 18) (23)
P_{53} =	(1 19) (24 2) (30 3) (25 4) (20 5) (18 6) (29 7) (26 8) (11 9) (10) (17 12) (23 13) (28 14) (27 15) (21 16) (22)
P_{54} =	(1 30) (29 2) (28 3) (27 4) (26 5) (24 6) (23 7) (22 8) (21 9) (25 10) (19 11) (18 12) (17 13) (16 14) (15) (20)
P_{55} =	(1 22) (14 2) (13 3) (21 4) (27 5) (15 6) (7) (12 8) (26 9) (28 10) (16 11) (25 17) (30 18) (29 19) (23 20) (24)
P_{56} =	(1 28) (27 2) (26 3) (30 4) (29 5) (22 6) (21 7) (25 8) (24 9) (23 10) (15 11) (14 12) (13) (20 16) (19 17) (18)
P_{57} =	(1 27) (26 2) (30 3) (29 4) (28 5) (21 6) (25 7) (24 8) (23 9) (22 10) (13 11) (12) (20 14) (19 15) (18 16) (17)
P_{58} =	(1 28) (23 2) (16 3) (15 4) (22 5) (29 6) (17 7) (8) (14 9) (27 10) (30 11) (24 12) (18 13) (21 19) (26 20) (25)
P_{59} =	(1 29) (28 2) (27 3) (26 4) (30 5) (23 6) (22 7) (21 8) (25 9) (24 10) (17 11) (16 12) (15 13) (14) (20 18) (19)
P_{60} =	(1 23) (29 2) (24 3) (18 4) (17 5) (28 6) (30 7) (19 8) (9) (16 10) (22 11) (27 12) (26 13) (25 14) (20 15) (21)

$P_{1} = (Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1)(Z_1) +$

$P_{2} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{3} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{4} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{5} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{6} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{7} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{8} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{9} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{10} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{11} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{12} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{13} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{14} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{15} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{16} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{17} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{18} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{19} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{20} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{21} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{22} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{23} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{24} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{25} = (Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5)(Z_5) +$

$P_{26} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{27} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{28} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{29} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{30} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{31} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{32} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{33} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{34} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{35} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{36} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{37} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{38} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{39} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{40} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{41} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{42} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{43} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{44} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{45} = (Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3)(Z_3) +$

$P_{46} = (Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{47} = (Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{48} = (Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{49} = (Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{50} = (Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{51} = (Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{52} = (Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{53} = (Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{54} = (Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_1) +$

$P_{55} = (Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{56} = (Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{57} = (Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{58} = (Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{59} = (Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_1) +$

$P_{60} = (Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_2)(Z_1) = (Z1^{30} + 15\,Z1^{2}\,Z2^{14} + 20\,Z3^{10} + 24\,Z5^{6}) / 60$

Ивентар бојења ивица икосоедра са две боје

Циклусни индекс

F [redacted] Z1_, Z2_, Z3_, Z4_, Z5_ [redacted] $1^{30} + 15\, Z1^{2}\, Z2^{14} + 20\, Z3^{10} + 24\, Z5^{6}$ [redacted] 6 [redacted]

F [redacted] + b, [redacted] $a^{2}+b^{2}$, $a^{3}+b^{3}$, $a^{4}+b^{4}$, $a^{5}+b^{5}$ [redacted]

$\frac{1}{60}$ [redacted] + b [redacted] 5 [redacted] + b [redacted] + b^{2} [redacted] 4 [redacted] 20 [redacted] 3 + b^{3} [redacted] 0 [redacted] 24 [redacted] 5 + b^{5} [redacted]

Ивентар бојења

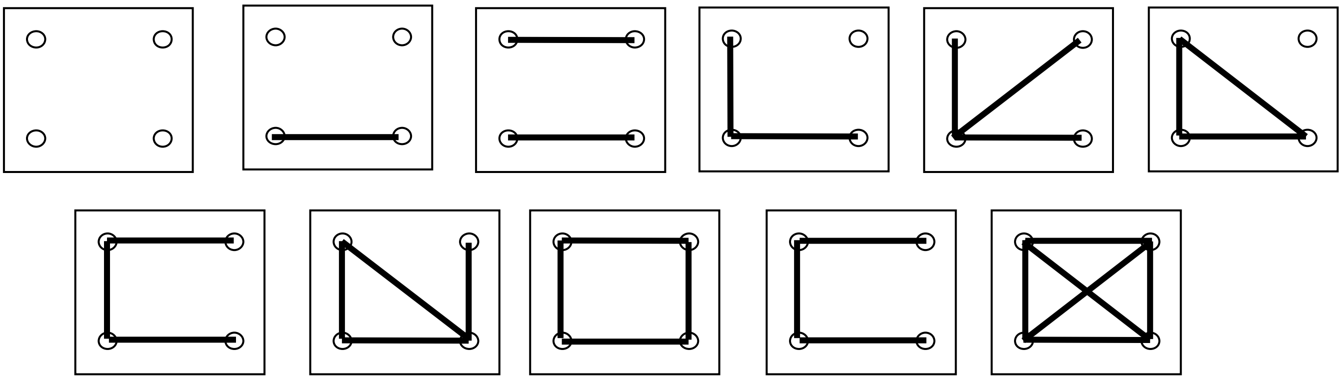
$$a^{30} + a^{29} b + 11 a^{28} b^{2} + 78 a^{27} b^{3} + 483 a^{26} b^{4} + 2423 a^{25} b^{5} + 10025 a^{24} b^{6} + 34112 a^{23} b^{7} + 97890 a^{22} b^{8} + 238993 a^{21} b^{9} + 501507 a^{20} b^{10} + 911456 a^{19} b^{11} + 1442875 a^{18} b^{12} + 1997499 a^{17} b^{13} + 2425320 a^{16} b^{14} + 2587100 a^{15} b^{15} + 2425320 a^{14} b^{16} + 1997499 a^{13} b^{17} + 1442875 a^{12} b^{18} + 911456 a^{11} b^{19} + 501507 a^{10} b^{20} + 238993 a^{9} b^{21} + 97890 a^{8} b^{22} + 34112 a^{7} b^{23} + 10025 a^{6} b^{24} + 2423 a^{5} b^{25} + 483 a^{4} b^{26} + 78 a^{3} b^{27} + 11 a^{2} b^{28} + a b^{29} + b^{30}$$

F[2,2,2,2,2]= 17912448

Дакле укупно 17912448 нееквивалентних бојења.

XIII Пребројавање неоријентисаних графова

Ограничићемо се на пребројавање неоријентисаних графова без петљи или вишеструких грана, такође, сматраћемо да су графови одређени до изоморфизма(два графа су изоморфна ако постоји узајамно једнозначно пресликавање скупова њихових чворова-из једног на други-које одржава особину суседности чворова. Два различита чвора неорјентисаног графа су суседна ако су спојена граном.), другим речима нећемо водити рачуна о ознакама чворова. На пример постоји тачно 11 графова са 4 чвора



Нека је сада $G=(X,E)$ произвољан граф. Скуп $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ представља скуп његових чворова; скуп $E\subseteq X^{(2)}$, где је $X^{(2)}=\{(x_i,x_j)\mid x_i,x_j\in X,\ x_i\neq x_j\}$, представља скуп његових грана. У случају када би водили рачуна о ознакама чворова тада би очигледно постојало $2^{\binom{n}{2}}$ међусобно различитих графова чији је скуп чворова једнак X. Међутим, ако нас интересује само број неизоморфних графова тада је тај број знатно мањи.

Да би се могла применити Полијева теорема на пребројавање посматраних графова потребно би било представити произвољан од тих графова у виду неке функције. Непосредно се види да се сваки од посматраних графова може схватити и као једна функција која пресликава скуп $X^{(2)}$ у скуп $\{0,1\}$. При томе, ако су чворови x_i и x_j суседни вредност те функције износи 1, односно 0 ако су несуседни. С обзиром да је X скуп чворова посматраних графова, два графа ће бити изоморфна (еквивалентна) ако постоји пермутација скупа X која одржава суседност чворова. Према томе, утврђивање да ли су два од посматраних графова изоморфна се своди на испитивање да ли постоји пермутација у $S_n(|X|=n)$ која чува суседност чворова. Значи можемо сматрати да на скупу X делује пермутациона група S_n. Група S_n индукује на скупу $X^{(2)}$ групу $S_n^{(2)}$ која је одређена на следећи начин: сваком $p\in S_n$ одговара (по обострано једнозначној коресподенцији) $p^{(2)}\in S_n^{(2)}$ тако да важи

$$p^{(2)}\left(\left\{x_i, x_j\right\}\right)=\left\{p\left(x_i\right), p\left(x_j\right)\right\} \qquad (1)$$

Овим је проблем пребројавања граффова у принципу решен. Остаје једино да се одреди полином циклусног индекса за пермутациону групу $S_n^{(2)}$. Следећа формула важи

$$Z_{S_n^{(2)}}=\frac{1}{n!}\sum_{(j)}\frac{n!}{\prod_k j_k! k^{j_k}}\prod_k t_{2k+1}^{k j_{2k+1}}\prod_k\left(t_k t_{2k}^{k-1}\right)^{j_{2k}} t_k^{k\binom{j_k}{2}}\prod_{r<s} t_{[r,s]}^{(r,s) j_r j_s} \qquad (2)$$

где сумирање (j) иде по свим партицијама броја n за које је $n=\sum_k k\cdot j_k$ а $[r,s]$ и (r,s) редом означавају најмањи заједнички умножак и највећи заједнички делитељ бројева r и s. На пример за $n=4$ имамо да је

$$Z_{S_n^{(2)}}=\frac{1}{24}\left(t_1^6+9t_1^2t_2^2+8t_3^2+6t_2t_4\right)$$

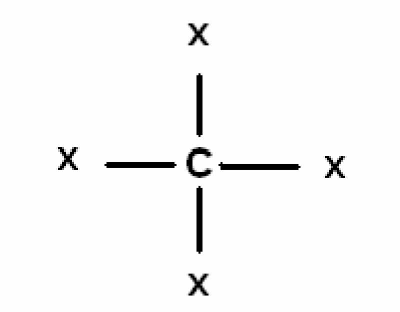
Ако се даље узме да је $w(0)=1, w(1)=x$ и стави у (2) да је $t=1+x$ добија се функција генератриса за пребројавање свих посматраних графова са тачно n чворова. Коефицијент уз x^m у добијеној функцији генератриси даје број $N(n,m)$ тражених графова са n чворова и m грана. Вредности броја $N(n,m)$ за неке вредности n и m дајемо у следећој табели

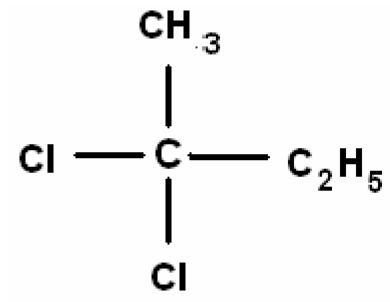
m	n								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	1	1	1	1	1	1	1
2			1	2	2	2	2	5	2
3				3	4	5	5	2	5
4				2	6	9	10	11	11
5				1	6	15	21	24	25
6				1	6	21	41	56	63
7					4	24	65	115	148
8					2	24	97	221	345
9					1	21	131	402	771
10					1	15	148	663	1637
11						9	148	980	3252
12						5	131	1312	5995
13						2	97	1557	10120
14						1	65	1646	15615
15						1	41	1557	21933
16							21	1312	27987
17							10	980	32403
18							5	663	34040
	2	2	4	8	16	32	1047	11516	154363

Приметимо да је у горњој табели узето да је $\boldsymbol{m} \leq \frac{1}{2}\binom{\boldsymbol{n}}{2}$; наиме очигледно је број графова са $\boldsymbol{n}$ чворова и $\boldsymbol{m}$ грана, односно $\binom{\boldsymbol{n}}{2} - \boldsymbol{m}$ грана једнак.

XiV Пребројавање ИЗОМЕРА

Пребројавање изомера органских једињења, дате молекулске структуре.





Где је C атом угљеника, а на местима означеним са X могу бити CH_3 (метил), $C_2\,H_5$ (етил), H (водоник) и Cl (хлор) нпр дихлор бутан
Математички модел тих молекула је тетраедар у чијем центру је атом угљеника. Задатак о пребројавању молекула своди се на задатак о броју класа еквиваленције $\boldsymbol{D}$ (за четири врха) $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{D}\mapsto\boldsymbol{R}$ где је $\boldsymbol{R}=\left\{\boldsymbol{CH}_5,\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{H}_5,\boldsymbol{H},\boldsymbol{Cl}\right\}$. Група $\boldsymbol{G}$ ће бити група ротација тетраедра која се састоји од: 1 идентичне пермутације врхова, 8 ротација за 120° око оса које садрже врхове тетраедра, 3 ротације за180° око осе која садржи средишта наспрамних ивица тетраедра. Тада је $\boldsymbol{P_G}\left(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\right)=\frac{1}{12}\left(\boldsymbol{x}_1^4+8\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3+3\boldsymbol{x}_2^2\right)$. Ако ставимо да су све тежине једнаке = 1, добијамо општи број молекула $\boldsymbol{P_G}(4,4,4)=36$
Посматрајмо посебне облике молекула у датој структури и израчунајмо колико има таквих молекула који не садрже водоников атом. У том случају за CH_3, $C_2\,H_5$ и Cl тежине ће бити једнаке =1, а за водоник H = 0. Тад је $\boldsymbol{P_G}(3,3,3)=\frac{1}{12}\left(3^4+8\cdot 3\cdot 3+3\cdot 3^2\right)=15$ тражених молекула. Да би смо класификовали осталих 21 молекула редом као и раније узимамо тежине = 1 за све CH_3, $C_2\,H_5$, Cl и тежину H за атом водоника, па добијамо

$$\boldsymbol{P_G}=\frac{1}{12}\left(\left(\boldsymbol{H}+3\right)^4+8\left(\boldsymbol{H}+3\right)\left(\boldsymbol{H}^3+3\right)+3\left(\boldsymbol{H}^2+3\right)^2\right)=\boldsymbol{H}^4+3\boldsymbol{H}^3+6\boldsymbol{H}^2+11\boldsymbol{H}+15$$

Према томе постоји 1 молекул CH_4 метан, 3 молекула са 3 атома водоника H, 6 молекула са 2 атома водоника, 11 молекула с 1 атомом H и 15 молекула без атома H.

XV ДОДАТАК

СВИ ПРОГРАМИ

Програми за тетраедар

```
Sub Permutacije_Strana_Tetraedra_u_Cikluse()
' Permutacije_strana_Tetraedra_u_Cikluse Macro
        'Deklarisanje promenljivih
Dim BrPer As Integer
Dim BrTem  As Integer
Dim BrStr As Integer, BrIvi As Integer
Dim BrBoja As Integer, BrBojTem As Single
Dim BrBojIvi As Single, BrBojStr As Single
'Postavljanje početnih vrednosti
BrPer = 12
BrTem = 4
BrStr = 4
BrIvi = 6

'Čitanje tabele2 permutacija temena

Dim a2 As Integer, b2 As Integer 'a2,b2 početna ćelija tabele1'
Dim Ps(60) As String, b(60, 20) As Integer  'permutacije temena i elementi
perm. strana
a2 = 2: b2 = 2
Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate
         Worksheets("Sheet1").Activate

For i = 1 To BrPer

    Ps(i) = ""
        For j = 1 To BrStr
        Worksheets("Sheet1").Activate
        b(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(i + a2 - 1, j + b2 - 1).Value
            Ps(i) = Ps(i) & b(i, j) & ","
        Next j
    'MsgBox (Pt(i))
Next i
'
    'Dimenzionisamje
   Dim s(20) As Integer   ' za masku
   Dim bt As Integer ' za pocetak novog ciklusa
   Dim Cps(20, 20) As Integer ' elemeni i-ciklusa
   Dim a4 As Integer, b4 As Integer ' pocetna adresa tabele permutacije za
stampanje

   'pocetne vrednosti
```

```
  a4 = 2: b4 = BrStr + 3

   For j = 1 To BrPer

         Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate
         Worksheets("Sheet1").Activate
                 Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Select
         ActiveCell.FormulaR1C1 = "P" & j & " ="
         Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(2, 1).Font.Subscript =
True
          Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(3, 1).Font.Subscript =
True
          Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(1, 1).Font.Bold = True
          Next j
  For k = 1 To BrPer
     For t = 1 To BrStr
        s(t) = 1
     Next t
  bt = 1
  s(1) = 0
  Dim q As Integer, q1 As Integer
  q = 0: q1 = 0

   For i = 1 To BrStr
     Cps(i, 1) = bt
     Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate
       Worksheets("Sheet1").Activate

     Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
     ActiveCell.FormulaR1C1 = "("
      Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate
          Worksheets("Sheet1").Activate
          Columns(b4 + q).Select
          Selection.ColumnWidth = 2
             With Selection
                   .HorizontalAlignment = xlCenter
             End With
     q = q + 1
     Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
     ActiveCell.FormulaR1C1 = Cps(i, 1)
     q = q + 1

        For j = 1 To BrStr
           Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate
           Worksheets("Sheet1").Activate
           Columns(b4 + q).Select
           Selection.ColumnWidth = 2
              With Selection
                    .HorizontalAlignment = xlCenter
              End With
           Cps(i, j + 1) = b(k, Cps(i, j))
             s(Cps(i, j + 1)) = 0 'proba
```

```
            If Cps(i, j + 1) = bt Then
                        s(i) = 0
                      Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
                       ActiveCell.FormulaR1C1 = ")"
                       q = q + 1

           Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 + 2).Select
            ActiveCell.FormulaR1C1 = "( Z" & j & " )"
           Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 + 2).Characters(4,
1).Font.Subscript = True

                       q1 = q1 + 1
                         For t = 1 To BrStr
                           If b(k, t) * s(t) = 0 Then
                                      GoTo 50
                                   Else
                                     bt = b(k, t)

                                      GoTo 100

                            End If
50                       Next t
                      GoTo 200

                      Else
            Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate
             Worksheets("Sheet1").Activate
             Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
              ActiveCell.FormulaR1C1 = Cps(i, j + 1)
               Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate
             Worksheets("Sheet1").Activate
             Columns(b4 + q).Select
             Selection.ColumnWidth = 2
                With Selection
                     .HorizontalAlignment = xlCenter
                End With
                       q = q + 1
                     GoTo 30
             End If
30       Next j
         GoTo 200
100   Next i

200 Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate
        Worksheets("Sheet1").Activate
          Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 + 2).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = " +"
Next k
' brisanje poslednjeg +
Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate
        Worksheets("Sheet1").Activate
          Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k - 1, q1 + 2).Select
```

```
        ActiveCell.FormulaR1C1 = " = "
End Sub
```

—

```
Sub Permutacije_Temena_Tetraedra_u_Cikluse()
'
' Permutacije_temena_tetraedra_u_Cikluse Macro
       'Deklarisanje promenljivih
Dim BrPer As Integer
Dim BrTem  As Integer
Dim BrStr As Integer, BrIvi As Integer
Dim BrBoja As Integer, BrBojTem As Single
Dim BrBojIvi As Single, BrBojStr As Single
'Postavljanje početnih vrednosti
BrPer = 12
BrTem = 4
BrStr = 4
BrIvi = 6

'Čitanje tabele2 permutacija temena

Dim a2 As Integer, b2 As Integer 'a2,b2 početna ćelija tabele1'
Dim Ps(60) As String, b(60, 20) As Integer  'permutacije temena i elementi
perm. strana
a2 = 2: b2 = 2
Workbooks("Grupa temena tetraedra").Activate
        Worksheets("Sheet1").Activate

For i = 1 To BrPer

    Ps(i) = ""
       For j = 1 To BrTem
       Worksheets("Sheet1").Activate
       b(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(i + a2 - 1, j + b2 - 1).Value
          Ps(i) = Ps(i) & b(i, j) & ","
       Next j
    'MsgBox (Pt(i))
Next i
    'Dimenzionisamje
   Dim s(20) As Integer   ' za masku
   Dim bt As Integer ' za pocetak novog ciklusa
   Dim Cps(20, 20) As Integer ' elemeni i-ciklusa
   Dim a4 As Integer, b4 As Integer ' pocetna adresa tabele permutacije za
stampanje

   'pocetne vrednosti
   a4 = 2: b4 = BrStr + 3

    For j = 1 To BrPer

          Workbooks("Grupa temena tetraedra").Activate
```

```
            Worksheets("Sheet1").Activate
            Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Select
            ActiveCell.FormulaR1C1 = "P" & j & "  ="
            Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(2, 1).Font.Subscript =
True
             Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(3, 1).Font.Subscript =
True
             Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(1, 1).Font.Bold = True
             Next j
   For k = 1 To BrPer
        For t = 1 To BrTem
           s(t) = 1
        Next t
   bt = 1
   s(1) = 0
   Dim q As Integer, q1 As Integer
   q = 0: q1 = 0

    For i = 1 To BrTem
        Cps(i, 1) = bt
        Workbooks("Grupa temena tetraedra").Activate
          Worksheets("Sheet1").Activate

        Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = "("
         Workbooks("Grupa temena tetraedra").Activate
               Worksheets("Sheet1").Activate
               Columns(b4 + q).Select
               Selection.ColumnWidth = 2
                   With Selection
                           .HorizontalAlignment = xlCenter
                   End With
        q = q + 1
        Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = Cps(i, 1)
        q = q + 1

            For j = 1 To BrTem
               Workbooks("Grupa temena tetraedra").Activate
               Worksheets("Sheet1").Activate
               Columns(b4 + q).Select
               Selection.ColumnWidth = 2
                   With Selection
                           .HorizontalAlignment = xlCenter
                   End With
               Cps(i, j + 1) = b(k, Cps(i, j))
                 s(Cps(i, j + 1)) = 0 'proba
               If Cps(i, j + 1) = bt Then
                                   s(i) = 0
                               Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
                                ActiveCell.FormulaR1C1 = ")"
                                q = q + 1
```

```
                              Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 +
2).Select
                             ActiveCell.FormulaR1C1 = "( Z" & j & " )"
                              Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 +
2).Characters(4, 1).Font.Subscript = True

                             q1 = q1 + 1
                               For t = 1 To BrStr
                                 If b(k, t) * s(t) = 0 Then
                                            GoTo 50
                                         Else
                                           bt = b(k, t)

                                            GoTo 100

                                  End If
50                             Next t
                             GoTo 200

                             Else
                             Workbooks("Grupa temena tetraedra").Activate
                             Worksheets("Sheet1").Activate
                              Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
                              ActiveCell.FormulaR1C1 = Cps(i, j + 1)
                               Workbooks("Grupa temena tetraedra").Activate
            Worksheets("Sheet1").Activate
            Columns(b4 + q).Select
            Selection.ColumnWidth = 2
              With Selection
                  .HorizontalAlignment = xlCenter
              End With
                              q = q + 1
                            GoTo 30
            End If
30        Next j
          GoTo 200
100   Next i


200 Workbooks("Grupa temena tetraedra").Activate
        Worksheets("Sheet1").Activate
          Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 + 2).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = " +"
Next k
' brisanje poslednjeg +
Workbooks("Grupa temena tetraedra").Activate
        Worksheets("Sheet1").Activate
          Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k - 1, q1 + 2).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = " = "
End Sub
```

Sub **Funkcija_Tetraedra_permutacije_temena_u_permutacije_ivica()**

```
'
' Funkcija_permutacije_temena_u_permutacije_ivica Macro
'Deklarisanje promenljivih
Dim BrPer As Integer, BrFun As Integer
Dim BrTem  As Integer, BrEleFun As Integer
Dim BrStr As Integer, BrIvi As Integer

'Postavljanje početnih vrednosti
BrPer = 12
BrFun = 6
BrTem = 4
BrEleFun = 2
BrStr = 4
BrIvi = 6
'Čitanje tabele permutacija temena i _
funkcija preslikavanja temena u strane
'Čitanje tabele1
Dim a1 As Integer, b1 As Integer 'a1,b1 početna ćelija tabele1'
Dim Pt(60) As String, a(60, 20) As Integer
a1 = 2: b1 = 2
Workbooks("Grupa temena tetraedra").Activate
         Worksheets("Sheet1").Activate

For i = 1 To BrPer
    Pt(i) = ""
        For j = 1 To BrTem
            a(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(i + a1 - 1, j + b1 - 1).Value
            Pt(i) = Pt(i) & a(i, j) & ","
        Next j
    'MsgBox (Pt(i))
Next i


'Čitanje tabele2
Dim a2 As Integer, b2 As Integer 'a2,b2 početna ćelija tabele1'
a2 = 2: b2 = 7
Dim Fn(20) As String, c(20, 20) As Integer
Workbooks("Grupa temena tetraedra").Activate
         Worksheets("Sheet7").Activate

For i = 1 To BrFun
    Fn(i) = ""
        For j = 1 To BrEleFun
            c(i, j) = Worksheets("Sheet7").Cells(i + a2 - 1, j + b2 - 1).Value
            Fn(i) = Fn(i) & c(i, j) & ","

         Next j
  'MsgBox (Fn(i))
```

```
Next i


' priprema
Dim Nf(20) As String ' nova funkcija
Dim Np(60) As String ' nova permutacija
Dim D(60, 20) As Integer ' elementi nove permutacije
Dim EFn(20, 20) As Integer 'elementi nove funkcije
Dim M As Integer ' pomoćna promenljiva
' izračunavanje elemenata nove funkcije
For k = 1 To BrPer
   For t = 1 To BrFun
      Nf(t) = ""
      For s = 1 To BrEleFun
         EFn(t, s) = a(k, c(t, s))
         Nf(t) = Nf(t) & EFn(t, s) & ","
      Next s

    Next t

' sortiranje elemenata nove funkcije uzlazno
For t = 1 To BrFun
    Nf(t) = ""
   For s = 1 To BrEleFun
      For j = s To BrEleFun
          If EFn(t, s) > EFn(t, j) Then
                     M = EFn(t, s)
                     EFn(t, s) = EFn(t, j)
                     EFn(t, j) = M
         End If


      Next j
        Nf(t) = Nf(t) & EFn(t, s) & ","
   Next s
   Nf(t) = Left$(Nf(t), Len(Nf(t)) - 1) 'brisanje poslednjeg zareza
   Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
        Worksheets("Sheet2").Activate


       Worksheets("Sheet2").Cells(k + 1, t + 1).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = Nf(t)
      'MsgBox (k & " -" & Nf(t))
Next t


 ' izračunavanje nove funkcije i nove permutacije

   Np(k) = ""
   For i = 1 To BrFun
      Nf(i) = ""
         For j = 1 To BrEleFun
```

```
            Nf(i) = Nf(i) & EFn(i, j) & ","
          Next j

'određivanje nove  permutacije
       For q = 1 To BrFun
       ' treba pronaći iste funkcije različitih rasporeda

             If Nf(i) = Fn(q) Then D(k, i) = q: Np(k) = Np(k) & q & ","


       Next q
         'MsgBox (k & "   " & D(k, i))
         Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
         Worksheets("Sheet1").Activate


        Worksheets("Sheet1").Cells(k + 1, i + 1).Select
          ActiveCell.FormulaR1C1 = D(k, i)
   Next i
   Np(k) = Left$(Np(k), Len(Np(k)) - 1) 'brisanje poslednjeg zareza
   Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
   Worksheets("Sheet3").Activate
       Worksheets("Sheet3").Cells(k + 1, 2).Select
         ActiveCell.FormulaR1C1 = "{" & Np(k) & "}"
   Next k

End Sub
```

```
Sub Permutacije_ivica_tetraedra_u_cikluse()
'
' Permutacije_ivica_tetraedra_u_cikluse Macro
       'Deklarisanje promenljivih
Dim BrPer As Integer
Dim BrTem  As Integer
Dim BrStr As Integer, BrIvi As Integer
Dim BrBoja As Integer, BrBojTem As Single
Dim BrBojIvi As Single, BrBojStr As Single
'Postavljanje početnih vrednosti
BrPer = 12
BrTem = 4
BrStr = 4
BrIvi = 6

'Čitanje tabele2 permutacija temena

Dim a2 As Integer, b2 As Integer 'a2,b2 početna ćelija tabele1'
Dim Ps(60) As String, b(60, 20) As Integer  'permutacije temena i elementi
perm. strana
a2 = 2: b2 = 2
Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
```

```
        Worksheets("Sheet1").Activate

For i = 1 To BrPer

    Ps(i) = ""
        For j = 1 To BrIvi
        Worksheets("Sheet1").Activate
        b(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(i + a2 - 1, j + b2 - 1).Value
            Ps(i) = Ps(i) & b(i, j) & ","
        Next j
    'MsgBox (Pt(i))
Next i



'
''Čitanje tabele3
'Dim a3 As Integer, b3 As Integer 'a3,b3 početna ćelija tabele3'
'a3 = 2: b3 = 20
'Dim Pi(60) As String, c(60, 20) As Integer 'permutacije ivica i elementi perm.
ivica
'
'For i = 1 To BrPer
'    Pi(i) = ""
'        For j = 1 To BrIvi
'            c(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(i + a3 - 1, j + b3 - 1).Value
'            Pi(i) = Pi(i) & c(i, j) & ","
'        Next j
'    'MsgBox (Pi(i))
'Next i
'
    'Dimenzionisamje
   Dim s(20) As Integer   ' za masku
   Dim bt As Integer ' za pocetak novog ciklusa
   Dim Cps(20, 20) As Integer ' elemeni i-ciklusa
   Dim a4 As Integer, b4 As Integer ' pocetna adresa tabele permutacije za
stampanje

   'pocetne vrednosti
   a4 = 2: b4 = BrIvi + 3

    For j = 1 To BrPer

            Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
            Worksheets("Sheet1").Activate
            Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Select
            ActiveCell.FormulaR1C1 = "P" & j & "  ="
            Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(2, 1).Font.Subscript =
True
             Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(3, 1).Font.Subscript =
True
             Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(1, 1).Font.Bold = True
```

```
          Next j
For k = 1 To BrPer
     For t = 1 To BrIvi
         s(t) = 1
     Next t
bt = 1
s(1) = 0
Dim q As Integer, q1 As Integer
q = 0: q1 = 0

 For i = 1 To BrIvi
     Cps(i, 1) = bt
     Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
       Worksheets("Sheet1").Activate

     Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
     ActiveCell.FormulaR1C1 = "("
      Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
             Worksheets("Sheet1").Activate
             Columns(b4 + q).Select
             Selection.ColumnWidth = 2
                 With Selection
                         .HorizontalAlignment = xlCenter
                 End With
     q = q + 1
     Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
     ActiveCell.FormulaR1C1 = Cps(i, 1)
     Columns(b4 + q).Select
             Selection.ColumnWidth = 2
     q = q + 1

         For j = 1 To BrIvi
             Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
             Worksheets("Sheet1").Activate
             Columns(b4 + q).Select
             Selection.ColumnWidth = 2
                 With Selection
                         .HorizontalAlignment = xlCenter
                 End With
             Cps(i, j + 1) = b(k, Cps(i, j))
               s(Cps(i, j + 1)) = 0 'proba
             If Cps(i, j + 1) = bt Then
                                   s(i) = 0
                               Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
                                ActiveCell.FormulaR1C1 = ")"
                                Columns(b4 + q).Select
                               Selection.ColumnWidth = 2
                                q = q + 1

                                 Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 +
2).Select
                                ActiveCell.FormulaR1C1 = "( Z" & j & " )"
```

```
                                Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 +
2).Characters(4, 1).Font.Subscript = True

                               q1 = q1 + 1
                                 For t = 1 To BrIvi
                                    If b(k, t) * s(t) = 0 Then
                                                 GoTo 50
                                             Else
                                                bt = b(k, t)

                                                 GoTo 100

                                     End If
50                               Next t
                              GoTo 200

                              Else
                              Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
                              Worksheets("Sheet1").Activate
                               Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
                               ActiveCell.FormulaR1C1 = Cps(i, j + 1)
                                 Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
             Worksheets("Sheet1").Activate
             Columns(b4 + q).Select
             Selection.ColumnWidth = 2
                With Selection
                      .HorizontalAlignment = xlCenter
                End With
                               q = q + 1
                             GoTo 30
             End If
30        Next j
          GoTo 200
100   Next i


200 Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
        Worksheets("Sheet1").Activate
          Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 + 2).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = " +"
Next k
' brisanje poslednjeg +
Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
        Worksheets("Sheet1").Activate
          Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k - 1, q1 + 2).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = " = "

End Sub
```

Sub **Tabela_Grupe_strana_tetraedra**()

```
'
' Tabela_Grupe_strana_tetraedra Macro
'Dim a(60, 24) As Integer
'Dim b(60) As String
Dim a(60, 60) As Integer
Dim b(60) As String
Dim a1 As Integer, b1 As Integer
a1 = 2: b1 = 2
Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate
Dim x As String
Dim BrPer As Integer, BrElePer As Integer
BrPer = 12
BrElePer = 4
For i = 1 To BrPer
x = ""
For j = 1 To BrElePer
x = x & Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + i - 1, b1 + j - 1).Value
a(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + i - 1, b1 + j - 1).Value
'MsgBox (a(i, j))
Next j
b(i) = x
'Worksheets("Sheet1").Cells(i + 1, 2).Select

'MsgBox (x)

Next i

'j = InputBox("unesi kolonu") + 1
'Worksheets("Sheet1").Cells(1, 12).Select

'ActiveCell.FormulaR1C1 = j & " izdvojena kolona"
'For i = 1 To 24
'Worksheets("Sheet1").Cells(i + 1, 12).Select

'ActiveCell.FormulaR1C1 = a(i, j)
'MsgBox (a(i + 1, j))
'Next i

    Dim k As Integer, l As Integer
    Dim M As Integer, N As Integer, brElemenata As Integer, brPermutacija As
Integer
    Dim p(60) As String
    Dim y As String
    'kreiranje datoteke


    'unos podataka'
    'brPermutacija = InputBox("Broj permutacija =")
    'brElemenata = InputBox("Broj elemenata permutacije =")
    Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate

    For i = 1 To BrPer
```

```
        For j = 1 To BrElePer

            a(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + i - 1, b1 + j - 1).Value

        Next

    Next

    For i = 1 To BrPer
        y = ""
        For j = 1 To BrElePer
            y = y & a(i, j) & ","
        Next
        p(i) = y
        'MsgBox (p(i))

    Next i
    'deo za obradu slaganja permutacija'

    For i = 1 To BrPer
        For k = 1 To BrPer
            x = "": y = ""

            For j = 1 To BrElePer
                M = a(k, j)
                N = a(i, M)
                y = y & N & ","
                x = x & Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + k - 1, b1 + j - 1).Value
'MsgBox (x)
            Next
            'MsgBox(n & "   " & x)

            For j = 1 To BrPer
                If p(j) = y Then
                    'MsgBox ("p(" & i & ")oP(" & k & ")=" & "P(" & j & ")")
                   Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate

                   Worksheets("Sheet4").Activate
                    Worksheets("Sheet4").Cells(k + 1, i + 1).Select

                    ActiveCell.FormulaR1C1 = "p" & j


                End If
            Next
         Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate

    y = Left$(y, Len(y) - 1)
   Worksheets("Sheet5").Activate

Worksheets("Sheet5").Cells(k + 1, 1 + i).Select
```

```
ActiveCell.FormulaR1C1 = y

        Next

   Next
End Sub
```

```
Sub Tabela_Grupe_ivica_tetraedra()
'
' Tabela_Grupe_ivica_tetraedra Macro
' Macro recorded 3/15/2009 by m m
'Dim a(60, 24) As Integer
'Dim b(60) As String
Dim a(60, 60) As Integer
Dim b(60) As String
Dim a1 As Integer, b1 As Integer
a1 = 2: b1 = 2
Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate
Dim x As String
Dim BrPer As Integer, BrElePer As Integer
BrPer = 12
BrElePer = 6
For i = 1 To BrPer
x = ""
For j = 1 To BrElePer
x = x & Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + i - 1, b1 + j - 1).Value
a(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + i - 1, b1 + j - 1).Value
'MsgBox (a(i, j))
Next j
b(i) = x
'Worksheets("Sheet1").Cells(i + 1, 2).Select

'MsgBox (x)

Next i

'j = InputBox("unesi kolonu") + 1
'Worksheets("Sheet1").Cells(1, 12).Select

'ActiveCell.FormulaR1C1 = j & " izdvojena kolona"
'For i = 1 To 24
'Worksheets("Sheet1").Cells(i + 1, 12).Select

'ActiveCell.FormulaR1C1 = a(i, j)
'MsgBox (a(i + 1, j))
'Next i

     Dim k As Integer, l As Integer
```

```
    Dim M As Integer, N As Integer, brElemenata As Integer, brPermutacija As
Integer
    Dim p(60) As String
    Dim y As String
    'kreiranje datoteke


    'unos podataka'
    'brPermutacija = InputBox("Broj permutacija =")
    'brElemenata = InputBox("Broj elemenata permutacije =")
    Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate

    For i = 1 To BrPer
      For j = 1 To BrElePer

        a(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + i - 1, b1 + j - 1).Value

      Next

    Next

    For i = 1 To BrPer
      y = ""
      For j = 1 To BrElePer
        y = y & a(i, j) & ","
      Next
      p(i) = y
      'MsgBox (p(i))

    Next i
    'deo za obradu slaganja permutacija'

    For i = 1 To BrPer
      For k = 1 To BrPer
        x = "": y = ""

        For j = 1 To BrElePer
          M = a(k, j)
          N = a(i, M)
          y = y & N & ","
          x = x & Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + k - 1, b1 + j - 1).Value
'MsgBox (x)
        Next
        'MsgBox(n & "   " & x)

        For j = 1 To BrPer
          If p(j) = y Then
            'MsgBox ("p(" & i & ")oP(" & k & ")=" & "P(" & j & ")")
           Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate

           Worksheets("Sheet4").Activate
            Worksheets("Sheet4").Cells(k + 1, i + 1).Select
```

```
                  ActiveCell.FormulaR1C1 = "p" & j


               End If
            Next
          Workbooks("Grupa ivica tetraedra").Activate

      y = Left$(y, Len(y) - 1)
     Worksheets("Sheet5").Activate

Worksheets("Sheet5").Cells(k + 1, 1 + i).Select

ActiveCell.FormulaR1C1 = y

        Next
     Next
End Sub
```

Sub **Bojenje_strana_tetraedra**()

```
'
' Bojenje_strana_tetraedra Macro
  'Deklarisanje promenljivih
Dim BrPer As Integer
Dim BrTem  As Integer
Dim BrStr As Integer, BrIvi As Integer
Dim BrBoja As Integer, BrBojTem As Single
Dim BrBojIvi As Single, BrBojStr As Single
'Postavljanje početnih vrednosti
BrPer = 12
BrTem = 4
BrStr = 4
BrIvi = 6

'Čitanje tabele permutacije strana
Dim a2 As Integer, b2 As Integer 'a2,b2 početna ćelija tabele
a2 = 2: b2 = 2
Dim Ps(60) As String, b(60, 20) As Integer 'permutacije strana i elementi perm.
strana

For i = 1 To BrPer
   Ps(i) = ""
      For j = 1 To BrStr
         b(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(i + a2 - 1, j + b2 - 1).Value
         Ps(i) = Ps(i) & b(i, j) & ","
      Next j
   'MsgBox (Ps(i))
Next i

'štampanje tabele bojenja strana tetraedra
```

```
BrBoja = InputBox(broj_boja)

BrBojStr = BrBoja ^ BrStr
For i = 1 To BrBojStr
    N = i - 1
    Ost = N - BrBoja * Int(N / BrBoja)
    For j = 1 To BrStr
        Ost = N - BrBoja * Int(N / BrBoja)
        N = Int(N / BrBoja)
        'Bo(i, BrStr - j + 1) = Ost 'Chr(97 + Ost)
         Workbooks("Grupa strana tetraedra").Activate
        Worksheets("Sheet6").Activate
        Worksheets("Sheet6").Cells(i + 1, 1).Select
          ActiveCell.FormulaR1C1 = "B" & i
         Worksheets("Sheet6").Cells(i + 1, BrStr - j + 2).Select
           ActiveCell.FormulaR1C1 = Chr(97 + Ost) 'Ost '
      Next j
Next i

  'formiranje bojenje strana pod dejstvom grupe permutacije strana
  Dim Bs(6) As Integer
  Dim Stabilizator As String
  Dim FixBoj(12) As Integer
  Dim Nb As Integer 'novo bojenje posle dejstva permutacije
    BrBojStr = BrBoja ^ BrStr
     For j = 1 To BrPer  'pocetna vrednost fiksnih bojenja
         FixBoj(j) = 0
      Next j
For i = 1 To BrBojStr
q = BrPer + BrStr + 4

    N = i - 1
    For j = 1 To BrStr
        Ost = N - BrBoja * Int(N / BrBoja)
        N = Int(N / BrBoja)
        Bs(BrStr - j + 1) = Ost
    Next j
  'delovanje permutacije temena
  For k = 1 To BrPer
  Nb = 1
    For j = 1 To BrStr
         Nb = Nb + Bs(b(k, j)) * BrBoja ^ (BrStr - j)
        'MsgBox (Nb)
    Next j
    If Nb = i Then
                    Stabilizator = "(P" & k & ")"
                    Worksheets("Sheet6").Activate
                    Worksheets("Sheet6").Cells(i + 1, q).Select
                    ActiveCell.FormulaR1C1 = Stabilizator
                    q = q + 1
                    FixBoj(k) = FixBoj(k) + 1
                    'MsgBox (Nb & "   " & i)
```

```
          Else
    End If

      Worksheets("Sheet6").Activate
        Worksheets("Sheet6").Cells(i + 1, k + BrStr + 2).Select
          ActiveCell.FormulaR1C1 = "B" & Nb

  Next k
Next i

For j = 1 To BrPer

Worksheets("Sheet6").Activate
        Worksheets("Sheet6").Cells(i + 2, j + BrStr + 2).Select
          ActiveCell.FormulaR1C1 = FixBoj(j)

  Next j
End Sub
```

Програми за коцку

```
Sub Tabela_grupe_permutacije_ivica_kocke()
'
' Tabela_grupe_permutacije_ivica_kocke Macro
'Dim a(60, 24) As Integer
'Dim b(60) As String
Dim a(60, 60) As Integer
Dim b(60) As String
Dim a1 As Integer, b1 As Integer
a1 = 2: b1 = 2
Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate
Dim x As String
Dim BrPer As Integer, BrElePer As Integer
BrPer = 24
BrElePer = 12
For i = 1 To BrPer
x = ""
For j = 1 To BrElePer
x = x & Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + i - 1, b1 + j - 1).Value
a(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + i - 1, b1 + j - 1).Value
```

```
'MsgBox (a(i, j))
Next j
b(i) = x
'Worksheets("Sheet1").Cells(i + 1, 2).Select

'MsgBox (x)

Next i

        Dim k As Integer, l As Integer
        Dim M As Integer, N As Integer, brElemenata As Integer, brPermutacija As
Integer
        Dim p(60) As String
        Dim y As String
        'kreiranje datoteke

        'unos podataka'

        Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate

        For i = 1 To BrPer
           For j = 1 To BrElePer

              a(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + i - 1, b1 + j - 1).Value

           Next
        Next

        For i = 1 To BrPer
           y = ""
           For j = 1 To BrElePer
              y = y & a(i, j) & ","
           Next
           p(i) = y
           'MsgBox (p(i))
        Next i
        'deo za obradu slaganja permutacija'

        For i = 1 To BrPer
           For k = 1 To BrPer
              x = "": y = ""

              For j = 1 To BrElePer
                 M = a(k, j)
                 N = a(i, M)
                 y = y & N & ","
                 x = x & Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + k - 1, b1 + j - 1).Value
'MsgBox (x)
              Next
              'MsgBox(n & "   " & x)

              For j = 1 To BrPer
```

```
                If p(j) = y Then
                   'MsgBox ("p(" & i & ")oP(" & k & ")=" & "P(" & j & ")")
                  Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate

                  Worksheets("Sheet4").Activate
                   Worksheets("Sheet4").Cells(k + 1, i + 1).Select

                   ActiveCell.FormulaR1C1 = "p" & j

                End If
             Next
           Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate

       y = Left$(y, Len(y) - 1)
     Worksheets("Sheet5").Activate

Worksheets("Sheet5").Cells(k + 1, 1 + i).Select

ActiveCell.FormulaR1C1 = y

          Next
      Next

End Sub
```

Sub **Permutacije_ivica_kocke_u_cikluse**()

```
'
' Permutacije_ivica_kocke_u_cikluse Macro

      'Deklarisanje promenljivih
Dim BrPer As Integer
Dim BrTem  As Integer
Dim BrStr As Integer, BrIvi As Integer
Dim BrBoja As Integer, BrBojTem As Single
Dim BrBojIvi As Single, BrBojStr As Single
'Postavljanje početnih vrednosti
BrPer = 24
BrTem = 8
BrStr = 6
BrIvi = 12

'Čitanje tabele permutacija ivica

Dim a2 As Integer, b2 As Integer 'a2,b2 početna ćelija tabele1'
Dim Ps(60) As String, b(60, 20) As Integer  'permutacije ivica i elementi perm.
strana
a2 = 2: b2 = 2
Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate
        Worksheets("Sheet1").Activate

For i = 1 To BrPer
```

```
    Ps(i) = ""
       For j = 1 To BrIvi
       Worksheets("Sheet1").Activate
       b(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(i + a2 - 1, j + b2 - 1).Value
          Ps(i) = Ps(i) & b(i, j) & ","
       Next j
    'MsgBox (Pt(i))
Next i

    'Dimenzionisamje
   Dim s(20) As Integer   ' za masku
   Dim bt As Integer ' za pocetak novog ciklusa
   Dim Cps(20, 20) As Integer ' elemeni i-ciklusa
   Dim a4 As Integer, b4 As Integer ' pocetna adresa tabele permutacije za
stampanje

   'pocetne vrednosti
   a4 = 2: b4 = BrIvi + 3

    For j = 1 To BrPer

          Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate
          Worksheets("Sheet1").Activate
          Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Select
          ActiveCell.FormulaR1C1 = "P" & j & "  ="
          Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(2, 1).Font.Subscript =
True
           Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(3, 1).Font.Subscript =
True
           Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(1, 1).Font.Bold = True
           Next j
   For k = 1 To BrPer
       For t = 1 To BrIvi
          s(t) = 1
       Next t
   bt = 1
   s(1) = 0
   Dim q As Integer, q1 As Integer
   q = 0: q1 = 0

    For i = 1 To BrIvi
       Cps(i, 1) = bt
       Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate
         Worksheets("Sheet1").Activate

       Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
       ActiveCell.FormulaR1C1 = "("
        Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate
            Worksheets("Sheet1").Activate
            Columns(b4 + q).Select
            Selection.ColumnWidth = 2
```

```
            With Selection
                  .HorizontalAlignment = xlCenter
            End With
    q = q + 1
    Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = Cps(i, 1)
    Columns(b4 + q).Select
          Selection.ColumnWidth = 2
    q = q + 1

       For j = 1 To BrIvi
          Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate
          Worksheets("Sheet1").Activate
          Columns(b4 + q).Select
          Selection.ColumnWidth = 2
             With Selection
                   .HorizontalAlignment = xlCenter
             End With
          Cps(i, j + 1) = b(k, Cps(i, j))
           s(Cps(i, j + 1)) = 0 'proba
          If Cps(i, j + 1) = bt Then
                               s(i) = 0
                          Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
                           ActiveCell.FormulaR1C1 = ")"
                           Columns(b4 + q).Select
                          Selection.ColumnWidth = 2
                           q = q + 1

                            Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 +
2).Select
                           ActiveCell.FormulaR1C1 = "( Z" & j & " )"
                             Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 +
2).Characters(4, 1).Font.Subscript = True

                           q1 = q1 + 1
                              For t = 1 To BrIvi
                                  If b(k, t) * s(t) = 0 Then
                                                 GoTo 50
                                             Else
                                                 bt = b(k, t)

                                                 GoTo 100


                                    End If
50                            Next t
                          GoTo 200

                          Else
                          Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate
                          Worksheets("Sheet1").Activate
                           Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
                           ActiveCell.FormulaR1C1 = Cps(i, j + 1)
```

```
                              Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate
            Worksheets("Sheet1").Activate
            Columns(b4 + q).Select
            Selection.ColumnWidth = 2
               With Selection
                     .HorizontalAlignment = xlCenter
               End With
                            q = q + 1
                          GoTo 30
            End If
30        Next j
          GoTo 200
100   Next i


200 Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate
        Worksheets("Sheet1").Activate
          Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 + 2).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = " +"
Next k
' brisanje poslednjeg +
Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate
        Worksheets("Sheet1").Activate
          Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k - 1, q1 + 2).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = " = "
End Sub
Sub Bojenje_ivica_kocke()
'
' Bojenje_ivica_kocke Macro
' Macro recorded 3/21/2009 by m m
'
  'Deklarisanje promenljivih
Dim BrPer As Integer
Dim BrTem  As Integer
Dim BrStr As Integer, BrIvi As Integer
Dim BrBoja As Integer, BrBojTem As Single
Dim BrBojIvi As Single, BrBojStr As Single
'Postavljanje početnih vrednosti
BrPer = 24
BrTem = 8
BrStr = 6
BrIvi = 12

'Čitanje tabele permutacije strana
Dim a2 As Integer, b2 As Integer 'a2,b2 početna ćelija tabele
a2 = 2: b2 = 2
Dim Ps(60) As String, b(60, 20) As Integer 'permutacije strana i elementi perm.
strana
Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate
For i = 1 To BrPer
   Ps(i) = ""
      For j = 1 To BrIvi
```

```
         b(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(i + a2 - 1, j + b2 - 1).Value
         Ps(i) = Ps(i) & b(i, j) & ","
      Next j
   'MsgBox (Ps(i))
Next i



'štampanje tabele bojenja strana kocke
BrBoja = InputBox(broj_boja)

BrBojIvi = BrBoja ^ BrIvi
For i = 1 To BrBojIvi
   N = i - 1
   Ost = N - BrBoja * Int(N / BrBoja)
   For j = 1 To BrIvi
      Ost = N - BrBoja * Int(N / BrBoja)
      N = Int(N / BrBoja)
      'Bo(i, BrStr - j + 1) = Ost 'Chr(97 + Ost)
       Workbooks("Grupa ivica kocke").Activate
      Worksheets("Sheet6").Activate
      Worksheets("Sheet6").Cells(i + 1, 1).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = "B" & i
       Worksheets("Sheet6").Cells(i + 1, BrIvi - j + 2).Select
         ActiveCell.FormulaR1C1 = Chr(97 + Ost) 'Ost '
     Next j
Next i


  'formiranje bojenje strana pod dejstvom grupe permutacije strana
  Dim Bs(60) As Integer
  Dim Stabilizator As String
  Dim FixBoj(60) As Integer
  Dim Nb As Integer 'novo bojenje posle dejstva permutacije
    BrBojIvi = BrBoja ^ BrIvi
     For j = 1 To BrPer  'pocetna vrednost fiksnih bojenja
        FixBoj(j) = 0
      Next j
For i = 1 To BrBojIvi
q = BrPer + BrIvi + 4

   N = i - 1
   For j = 1 To BrIvi
      Ost = N - BrBoja * Int(N / BrBoja)
      N = Int(N / BrBoja)
      Bs(BrIvi - j + 1) = Ost
   Next j
  'delovanje permutacije temena
  For k = 1 To BrPer
  Nb = 1
   For j = 1 To BrIvi
       Nb = Nb + Bs(b(k, j)) * BrBoja ^ (BrIvi - j)
```

```
        'MsgBox (Nb)
    Next j
    If Nb = i Then
                Stabilizator = "(P" & k & ")"
                Worksheets("Sheet6").Activate
                Worksheets("Sheet6").Cells(i + 1, q).Select
                ActiveCell.FormulaR1C1 = Stabilizator
                q = q + 1
                FixBoj(k) = FixBoj(k) + 1
                'MsgBox (Nb & "    " & i)
        Else
    End If


     Worksheets("Sheet6").Activate
      Worksheets("Sheet6").Cells(i + 1, k + BrIvi + 2).Select
       ActiveCell.FormulaR1C1 = "B" & Nb

  Next k
Next i

For j = 1 To BrPer

Worksheets("Sheet6").Activate
      Worksheets("Sheet6").Cells(i + 2, j + BrIvi + 2).Select
       ActiveCell.FormulaR1C1 = FixBoj(j)

  Next j
End Sub
```

Програми за икосоедар

```
Sub Tabela_grupe_temena_ikosoedra()
'
' Tabela_grupe_temena_ikosoedra Macro
' Macro recorded 3/22/2009 by m m
'


Dim a(60, 60) As Integer
Dim b(60) As String
Dim a1 As Integer, b1 As Integer
a1 = 2: b1 = 2
Workbooks("Grupa temena ikosoedra").Activate
Dim x As String
```

```
Dim BrPer As Integer, BrElePer As Integer
BrPer = 60
BrElePer = 12
For i = 1 To BrPer
x = ""
For j = 1 To BrElePer
x = x & Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + i - 1, b1 + j - 1).Value
a(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + i - 1, b1 + j - 1).Value
'MsgBox (a(i, j))
Next j
b(i) = x
'Worksheets("Sheet1").Cells(i + 1, 2).Select

'MsgBox (x)

Next i

    Dim k As Integer, l As Integer
    Dim M As Integer, N As Integer, brElemenata As Integer, brPermutacija As
Integer
    Dim p(60) As String
    Dim y As String
    'kreiranje datoteke

    'unos podataka'

    For i = 1 To BrPer
      For j = 1 To BrElePer

        a(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + i - 1, b1 + j - 1).Value

      Next

    Next

    For i = 1 To BrPer
      y = ""
      For j = 1 To BrElePer
        y = y & a(i, j) & ","
      Next
      p(i) = y
      'MsgBox (p(i))

    Next i
    'deo za obradu slaganja permutacija'

    For i = 1 To BrPer
      For k = 1 To BrPer
        x = "": y = ""

        For j = 1 To BrElePer
          M = a(k, j)
```

```
                N = a(i, M)
                y = y & N & ","
                x = x & Worksheets("Sheet1").Cells(a1 + k - 1, b1 + j - 1).Value
'MsgBox (x)
            Next
            'MsgBox(n & "   " & x)

            For j = 1 To BrPer
                If p(j) = y Then
                    'MsgBox ("p(" & i & ")oP(" & k & ")=" & "P(" & j & ")")

                   Worksheets("Sheet2").Activate
                    Worksheets("Sheet2").Cells(k + 1, i + 1).Select

                    ActiveCell.FormulaR1C1 = "p" & j


                End If
            Next
      y = Left$(y, Len(y) - 1)
     Worksheets("Sheet3").Activate

Worksheets("Sheet3").Cells(k + 1, 1 + i).Select

ActiveCell.FormulaR1C1 = y

         Next
    Next
End Sub
```

```
Sub Permutacije_temena_ikosoedra_u_cikluse()
'
' Permutacije_temena_ikosoedra_u_cikluse Macro
      'Deklarisanje promenljivih
Dim BrPer As Integer
Dim BrTem  As Integer
Dim BrStr As Integer, BrIvi As Integer
Dim BrBoja As Integer, BrBojTem As Single
Dim BrBojIvi As Single, BrBojStr As Single
'Postavljanje početnih vrednosti
BrPer = 60
BrTem = 12
BrStr = 20
BrIvi = 30

'Čitanje tabele permutacija temena

Dim a2 As Integer, b2 As Integer 'a2,b2 početna ćelija tabele1'
Dim Ps(60) As String, b(60, 60) As Integer  'permutacije temena i elementi
perm. strana
```

```
a2 = 2: b2 = 2
Workbooks("Grupa temena ikosoedra").Activate
        Worksheets("Sheet1").Activate

For i = 1 To BrPer

   Ps(i) = ""
      For j = 1 To BrTem
      Worksheets("Sheet1").Activate
      b(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(i + a2 - 1, j + b2 - 1).Value
         Ps(i) = Ps(i) & b(i, j) & ","
      Next j
   'MsgBox (Pt(i))
Next i

  'Dimenzionisamje
  Dim s(60) As Integer   ' za masku
  Dim Bt As Integer ' za pocetak novog ciklusa
  Dim Cps(60, 60) As Integer ' elemeni i-ciklusa
  Dim a4 As Integer, b4 As Integer ' pocetna adresa tabele permutacije za
stampanje

  'pocetne vrednosti
  a4 = 2: b4 = BrTem + 3

   For j = 1 To BrPer

         Workbooks("Grupa temena ikosoedra").Activate
         Worksheets("Sheet1").Activate
         Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Select
         ActiveCell.FormulaR1C1 = "P" & j & "  ="
         Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(2, 1).Font.Subscript =
True
          Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(3, 1).Font.Subscript =
True
          Worksheets("Sheet1").Cells(j + 1, 1).Characters(1, 1).Font.Bold = True
          Next j
  For k = 1 To BrPer
      For t = 1 To BrTem
         s(t) = 1
      Next t
  Bt = 1
  s(1) = 0
  Dim q As Integer, q1 As Integer
  q = 0: q1 = 0

   For i = 1 To BrTem
      Cps(i, 1) = Bt
      Workbooks("Grupa temena ikosoedra").Activate
        Worksheets("Sheet1").Activate

      Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
```

```
        ActiveCell.FormulaR1C1 = "("
         Workbooks("Grupa temena ikosoedra").Activate
              Worksheets("Sheet1").Activate
              Columns(b4 + q).Select
              Selection.ColumnWidth = 2
                 With Selection
                       .HorizontalAlignment = xlCenter
                 End With
        q = q + 1
        Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = Cps(i, 1)
        q = q + 1

           For j = 1 To BrTem
              Workbooks("Grupa temena ikosoedra").Activate
              Worksheets("Sheet1").Activate
              Columns(b4 + q).Select
              Selection.ColumnWidth = 2
                 With Selection
                       .HorizontalAlignment = xlCenter
                 End With
              Cps(i, j + 1) = b(k, Cps(i, j))
                s(Cps(i, j + 1)) = 0 'proba
              If Cps(i, j + 1) = Bt Then
                                   s(i) = 0
                                Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
                                 ActiveCell.FormulaR1C1 = ")"
                                 q = q + 1

                                  Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 +
2).Select
                                 ActiveCell.FormulaR1C1 = "( Z" & j & " )"
                                   Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 +
2).Characters(4, 1).Font.Subscript = True

                                 q1 = q1 + 1
                                   For t = 1 To BrStr
                                      If b(k, t) * s(t) = 0 Then
                                                    GoTo 50
                                                Else
                                                   Bt = b(k, t)

                                                    GoTo 100

                                       End If
50                                 Next t
                                GoTo 200

                                Else
                                Workbooks("Grupa temena ikosoedra").Activate
                                Worksheets("Sheet1").Activate
                                 Worksheets("Sheet1").Cells(a4 + k - 1, b4 + q).Select
```

```
                    ActiveCell.FormulaR1C1 = Cps(i, j + 1)
                     Workbooks("Grupa temena ikosoedra").Activate
          Worksheets("Sheet1").Activate
          Columns(b4 + q).Select
          Selection.ColumnWidth = 2
            With Selection
                .HorizontalAlignment = xlCenter
            End With
                    q = q + 1
                   GoTo 30
          End If
30      Next j
        GoTo 200
100   Next i


200 Workbooks("Grupa temena ikosoedra").Activate
       Worksheets("Sheet1").Activate
        Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k, q1 + 2).Select
       ActiveCell.FormulaR1C1 = " +"
Next k
' brisanje poslednjeg +
Workbooks("Grupa temena ikosoedra").Activate
       Worksheets("Sheet1").Activate
        Worksheets("Sheet1").Cells(BrPer + 3 + k - 1, q1 + 2).Select
       ActiveCell.FormulaR1C1 = " = "
End Sub
```

```
Sub Bojenje_temena_ikosoedra()
'
' Bojenje_temena_ikosoedra Macro
  'Deklarisanje promenljivih
Dim BrPer As Integer
Dim BrTem  As Integer
Dim BrStr As Integer, BrIvi As Integer
Dim BrBoja As Integer, BrBojTem As Single
Dim BrBojIvi As Single, BrBojStr As Single
'Postavljanje početnih vrednosti
BrPer = 60
BrTem = 12
BrStr = 20
BrIvi = 30


'Čitanje tabele permutacije temena
Dim a2 As Integer, b2 As Integer 'a2,b2 početna ćelija tabele
a2 = 2: b2 = 2
Dim Pt(60) As String, b(60, 60) As Integer 'permutacije temena i elementi perm.
temena
Workbooks("Grupa temena ikosoedra").Activate
```

```
For i = 1 To BrPer
   Pt(i) = ""
      For j = 1 To BrTem
         b(i, j) = Worksheets("Sheet1").Cells(i + a2 - 1, j + b2 - 1).Value
         Pt(i) = Pt(i) & b(i, j) & ","
      Next j
   'MsgBox (Ps(i))
Next i

'štampanje tabele bojenja temena ikosoedra
BrBoja = InputBox(broj_boja)

BrBojTem = BrBoja ^ BrTem
For i = 1 To BrBojTem
   N = i - 1
   Ost = N - BrBoja * Int(N / BrBoja)
   For j = 1 To BrTem
      Ost = N - BrBoja * Int(N / BrBoja)
      N = Int(N / BrBoja)
      'Bo(i, BrStr - j + 1) = Ost 'Chr(97 + Ost)
       Workbooks("Grupa temena ikosoedra").Activate
      Worksheets("Sheet4").Activate
      Worksheets("Sheet4").Cells(i + 1, 1).Select
        ActiveCell.FormulaR1C1 = "B" & i
       Worksheets("Sheet4").Cells(i + 1, BrTem - j + 2).Select
         ActiveCell.FormulaR1C1 = Chr(97 + Ost) 'Ost '
     Next j
Next i

  'formiranje bojenje temena pod dejstvom grupe permutacije temena
  Dim Bt(60) As Integer
  Dim Stabilizator As String
  Dim FixBoj(60) As Integer
  Dim Nb As Integer 'novo bojenje posle dejstva permutacije
   BrBojTem = BrBoja ^ BrTem
    For j = 1 To BrPer  'pocetna vrednost fiksnih bojenja
       FixBoj(j) = 0
     Next j
For i = 1 To BrBojTem
q = BrPer + BrTem + 4

   N = i - 1
   For j = 1 To BrTem
      Ost = N - BrBoja * Int(N / BrBoja)
      N = Int(N / BrBoja)
      Bt(BrTem - j + 1) = Ost
   Next j
  'delovanje permutacije temena
  For k = 1 To BrPer
  Nb = 1
   For j = 1 To BrTem
       Nb = Nb + Bt(b(k, j)) * BrBoja ^ (BrTem - j)
```

```
    'MsgBox (Nb)
  Next j
  If Nb = i Then
          Stabilizator = "(P" & k & ")"
          Worksheets("Sheet4").Activate
          Worksheets("Sheet4").Cells(i + 1, q).Select
          ActiveCell.FormulaR1C1 = Stabilizator
          q = q + 1
          FixBoj(k) = FixBoj(k) + 1
          'MsgBox (Nb & "   " & i)
      Else
  End If


   Worksheets("Sheet4").Activate
    Worksheets("Sheet4").Cells(i + 1, k + BrTem + 2).Select
     ActiveCell.FormulaR1C1 = "B" & Nb

 Next k
Next i

For j = 1 To BrPer

Worksheets("Sheet4").Activate
    Worksheets("Sheet4").Cells(i + 2, j + BrTem + 2).Select
     ActiveCell.FormulaR1C1 = FixBoj(j)

 Next j
End Sub
```

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Бородин, А.С.Бугай ; “Выдающиеся математики”
2. R.L.Graham, D.E. Knuth, D. Patasnik ; “Concrete mathematics”
3. Ђ.Курепа ; “Виша алгебра“
4. О.В.Матуров, Ю.К.Солнцев, Ю.И.Соркин, М.Г.Федин; “Толковый слобарь математических терминов“
5. П.Младеновић ; “Комбинаторика“
6. К.А.Рыбников ; “Введение в комбинаторный анализ“
7. Д.Цветковић, С.Симић ; “Комбинаторика класична и модерна“
8. D.J.Struik ; “A concise history of matematics“
9. Р.Тошић ; “Комбинаторика“
10. Г.М. Фихтенгольц ; “Курс дифференциального и инегрального исчисления“
11. Н. Я. Виленкин; “ Популярная комбинаторика“
12. Н. Я. Виленкин; “ Комбинаторика“
13. James A. Anderson; „ Дискретна математика са комбинаториком“
14. Гојко Калајџић „ Алгебра“
15. Ј.Мирковић, Д.Перић „Visual Basic“
16. G.Hart-Davis;“VBA 6“
17. E.A.Smith,V.Vinsler,H.Marquis; „Visual Basic 6“
18. E.Petroutsos; „Visual Basic Net“

Садржај