РД 445

О ЈЕДНОЈ НОВОЈ КЛАСИ ПОЛИНОМА У ТЕОРИЈИ СПЕЦИЈАЛНИХ ФУНКЦИЈА

ПРЕДГОВОР

Niels Nielsen је у својој књизи „Traité élémentaire des nombres de Bernoulli" [1] (Paris, 1923, стр.28) ~~увео један специјалан [illegible]~~-ки низ полинома. Ови полиноми кад им је аргумент нула, одређују један нарочити Euler-ов низ бројева, које је Euler увео у својим „Institutiones calculi differentialis" [2] (Петроград, 1755, стр.487-491).

Приметио сам да Nielsen-ови полиноми допуштају неограничено уопштење, тако да у овом раду уводим бесконачно много нових низова полинома. При томе сам нашао да Nielsen-ови полиноми не претстављају основни низ ових новоуведених полинома. У вези са вишим диференцијама функција дефинишем ове новоуведене полиноме као полиноме са два аргумента, а на основу тога уводим и Bernoulli-еве полиноме као полиноме са два аргумента. За сваки од ових бесконачно много низова полинома дајем функцију генератрису и доказујем више различитих својстава ових нових полинома. Исто тако одређујем до сада непознату функцију генератрису једног већ познатог низа полинома (E. Cesaro: „Lehrbuch der Algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung" [3], Leipzig, 1904, стр.872-873). На основу једног нарочитог својства ових новоуведених полинома одређујем Fourier-овом трансформацијом деветнаест низова несвојствених интеграла; Fourier-ове интеграле основнога низа полинома извео сам у раду „Sur une classe des polynômes et sur les intégrales s'y rattachant" [4]. Доводим у везу Nielsen-ове полиноме са Bernoulli-евим функцијама преко коефицијената који се добијају из ових новоуведених полинома. Доказујем равномерну конвергенцију извесних низова основнога двоструког низа полинома. Одређујем суме бесконачних редова потенција у којима као коефицијенти фигуришу ови новоуведени полиноми. Одређујем такође суме нарочитих функционалних редова.

О ЈЕДНОЈ НОВОЈ КЛАСИ ПОЛИНОМА У ТЕОРИЈИ СПЕЦИЈАЛНИХ ФУНКЦИЈА

1. ДЕФИНИЦИЈА ЈЕДНЕ НОВЕ КЛАСЕ ПОЛИНОМА. ЊИХОВА ОСНОВНА СВОЈСТВА

Приметио сам да Нилзен-ови полиноми [1]

$$A_{\nu}^{n}(\alpha)=\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^{i}\binom{n+1}{i}(\alpha+\nu-i)^{n} \tag{1}$$

допуштају неограничено уопштење, на основу кога уводим бесконачно много нових двоструких низова полинома дефинисаних формулама

$$ {}^{p}A_{\nu}^{n}(\alpha)=\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^{i}\binom{n+p}{i}(\alpha+\nu-i)^{n},\ p=1,2,3,\dots \tag{2}$$

$$ {}^{p}B_{\nu}^{n}(\alpha)=\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^{i}\binom{n-p}{i}(\alpha+\nu-i)^{n},\ p=0,1,2,\dots \tag{3}$$

Полиноми ове класе могу се приказати јединственом формулом

$$ {}^{n+k}B_{\nu}^{n}(\alpha)=\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^{i}\binom{-k}{i}(\alpha+\nu-i)^{n},\ k=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{4}$$

Ако у формулу (3) наместимо ν ставимо $n-p$, добијамо

$$ {}^{p}B_{n-p}^{n}(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-p}(-1)^{i}\binom{n-p}{i}(a+\overline{n-p}-i)^{n}\equiv D_{p}^{n}(\alpha), \tag{5}$$

где смо уопште са симболом $D_{p}^{n}(\alpha)$ означили уназадну диференцију реда p потенције $(\alpha+p)^{n}$, дакле

$$D_{p}^{n}(\alpha)=\Delta_{0}^{n}(\alpha+p)^{n} \tag{6}$$

Знамо да је

$$D_{n}^{n}(\alpha)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}(\alpha+n-i)^{n}\equiv n! \tag{7}$$

и да је

$$D_{n+p}^{n}(\alpha)=\sum_{i=0}^{n+p}(-1)^{i}\binom{n+p}{i}(\alpha+n+p-i)^{n}\equiv 0 \ \text{за}\ p=1,2,3, \tag{8}$$

Ако у (5) развијемо суму и израчунамо потенције $(\alpha+n-p-i)^{n}$ по бигавити $i = k-1$;

$$A^{n}_{\nu-1}(\alpha)=\sum_{i=0}^{\nu-1}(-1)^{i}\binom{n+p}{i}(\alpha+\overline{\nu-1}-i)^{n}\equiv\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k-1}\binom{n+p}{k-1}\left[\alpha+(\nu-1)-(k-1)\right]^{n}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k-1}\binom{n+p}{k-1}(\alpha+\nu-k)^{n},$$

$$A^{n}_{\nu}(\alpha)\cdot {}^{p}A^{n}_{\nu-1}(\alpha)=\binom{n+p}{0}(\alpha+\nu)^{n}+\sum_{k=1}^{\nu}\left[(-1)^{k}\binom{n+p}{k}-(-1)^{k-1}\binom{n+p}{k-1}\right](\alpha+\nu-k)^{n}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^{k}\binom{n+p+1}{k}(\alpha+\nu-k)^{n}\equiv {}^{p+1}A^{n}_{\nu}(\alpha).$$

эследњи доказ вреди и у случају ако у (13) ставимо $p=-m<0$, дакле вреди

$${}^{-m+1}A^{n}_{\nu}(\alpha)={}^{-m}A^{n}_{\nu}(\alpha)-{}^{-m}A^{n}_{\nu-1}(\alpha)$$

$${}^{m-1}B^{n}_{\nu}(\alpha)={}^{m}B^{n}_{\nu}(\alpha)-{}^{m}B^{n}_{\nu-1}(\alpha) \tag{14}$$

ли

з (13)за $\nu=n+p$ следи

$${}^{p+1}A^{n}_{n+p}(\alpha)={}^{p}A^{n}_{n+p}(\alpha)-{}^{p}A^{n}_{n+p-1}(\alpha)$$

то због (12) даје

$${}^{p+1}A^{n}_{n+p}(\alpha)=-{}^{p}A^{n}_{n+p-1}(\alpha) \tag{15}$$

(14) ставићемо $m=p+1$ и $\nu=0$

$${}^{p}B^{n}_{0}(\alpha)={}^{p+1}B^{n}_{0}(\alpha)-{}^{p+1}B^{n}_{-1}(\alpha)$$

ако је према дефиниционој формули (3), ${}^{p}B^{n}_{0}(\alpha)=\alpha^{n}$ и ${}^{p+1}B^{n}_{0}(\alpha)=\alpha^{n}$,
о видимо да за сваки цео број p ,позитиван или негативан,треба дефини-
ати

$${}^{p+1}B^{n}_{-1}(\alpha)\equiv 0$$

ли уопште

$${}^{p+1}B^{n}_{-k}(\alpha)\equiv 0,\quad k=1,2,3,\ldots \tag{16}$$

(13) ћемо ставити $\nu=0,1,2,\ldots\nu$ и добивене једнакости сабрати; добија се

$$\sum_{i=0}^{\nu} {}^{p+1}A_i^n(\alpha) = {}^{p}A_\nu^n(\alpha)\,; \tag{17}$$

аналогно следи из (14)

$$\sum_{i=0}^{\nu} {}^{p}B_i^n(\alpha) = {}^{p+1}B_\nu^n(\alpha) \tag{18}$$

ставимо у формулу (17) $(p+1)$ наместо p и узмимо $\nu=n+p$, па ћемо због (15) добити

$$\sum_{i=0}^{n+p} {}^{p+2}A_i^n(\alpha) = {}^{p+1}A_{n+p}^n(\alpha) = -{}^{p}A_{n+p-1}^n(\alpha) \tag{19}$$

ставимо у (18) $\nu=n-m$, $m<n$; $p=m-2$; сада (18) гласи

$$\sum_{i=0}^{n-m} {}^{m-2}B_i^n(\alpha) = {}^{m-1}B_{n-m}^n(\alpha) \tag{20}$$

Формула (14) за $\nu=n-m$ даје

$${}^{m-1}B_{n-m}^n(\alpha) = {}^{m}B_{n-m}^n(\alpha) - {}^{m}B_{n-m-1}^n(\alpha). \tag{21}$$

Из (20) и (21) следи

$$\sum_{i=0}^{n-m} {}^{m-2}B_i^n(\alpha) = -{}^{m}B_{n-m-1}^n(\alpha) + {}^{m}B_{n-m}^n(\alpha)\,;$$

пишимо у последњој једнакости p наместо m

$$\sum_{i=0}^{n-p} {}^{m-2}B_i^n(\alpha) = -{}^{p}B_{n-p-1}^n(\alpha) + {}^{p}B_{n-p}^n(\alpha)\,,$$

а последња формула писана помоћу симбола ${}^{p}A_i^n(\alpha)$ гласи

$$\sum_{i=0}^{n-p} {}^{-p+2}A_i^n(\alpha) = -{}^{-p}A_{n-p-1}^n(\alpha) + {}^{-p}A_{n-p}^n(\alpha). \tag{22}$$

Ако у (22) променимо $-p<0$ у $+p>0$ тада други члан на десној страни у (22) постаје ${}^{p}A_{n+p}^n(\alpha)\equiv 0$ и формула (22) прелази у формулу (19).
Из (3) добија се диференцирањем

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{{}^{p}B_\nu^n(\alpha)\right\} = n\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i\binom{n-p}{i}(\alpha+\nu-i)^{n-1},$$

а због

$${}^{p-1}B_\nu^{n-1}(\alpha) = \sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i\binom{n-p}{i}(\alpha+\nu-i)^{n-1}$$

следи
$$\frac{d}{d\alpha}\left\{{}^{p}B_{\nu}^{n}(\alpha)\right\} = n\cdot\left\{{}^{p-1}B_{\nu}^{n-1}(\alpha)\right\} \qquad (23)$$

ично вреди за полиноме (2)
$$\frac{d}{d\alpha}\left\{{}^{p}A_{\nu}^{n}(\alpha)\right\} = n\cdot\left\{{}^{p+1}A_{\nu}^{n-1}(\alpha)\right\} \qquad (24)$$

2. ГЕНЕРАТРИСЕ ПОЛИНОМА ${}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha)$ И ${}^{-1}B_{\nu}^{n}(\alpha)$ НИЗОВИ ФУНКЦИЈА

$(\alpha,z)\}$ и $\{{}^{-1}p_n(\alpha,z)\}$.

За целу класу новоуведених полинома (2) и (3) од основне је важности из $\{{}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha)\}$. Функција генератриса основнога двострукога низа полинома ${}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha)\}$ је

$$\mathcal{G}_{\circ}(\alpha,X,Z) = \frac{e^{(1-X)\alpha Z}}{1-Xe^{(1-X)Z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{X^{\nu}Z^{n}}{n!}\left\{{}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha)\right\},\ |X|<1,\ |Z|<1 \qquad (25)$$

ретходно ћемо показати да је функција $e^{z(e^{\alpha}-1)}$ функција генератриса ећ познатих [2] полинома

$$s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n}\mathfrak{S}_{\nu}^{n} z^{\nu} = e^{-z}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu!}\nu^{n};$$

$$\sum\frac{\alpha^n}{n!}s_n(z) = e^{-z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu!}\nu^{n} = e^{-z}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\nu^{n} = e^{-z}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu!}e^{\alpha\nu} = e^{z(e^{\alpha}-1)}$$

тавимо
$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu!}e^{\alpha\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu!}\sum_{k=0}\binom{\nu}{k}(e^{\alpha}-1)^{k}$$

трансформишимо последњи ред у ред по степенима од $(e^{\alpha}-1)$

$$e^{ze^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}(e^{\alpha}-1)^{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{n}\frac{z^{n+\nu}}{(n+\nu)!}; \qquad (26)$$

ејлоров ред функције $e^{ze^{\alpha}}$ по степенима од $(e^{\alpha}-1)$ гласи

$$e^{ze^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}e^{z}}{n!}(e^{\alpha}-1)^{n}; \qquad (27)$$

з последња два развоја следи

$$q_n(z) \equiv \frac{z^{n}e^{z}}{n!} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{n}\frac{z^{n+\nu}}{(n+\nu)!} \qquad (28)$$

Ставиhемо

$$\frac{e^{(1-X)\alpha z}}{1-Xe^{(1-X)z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {}^{\circ}\varphi_n(\alpha,z) \right\} X^n; \tag{29}$$

ада овај ред **конвергира** за

$$|X|<1,\ |z|<1 \ \text{и}\ |\alpha|<M$$

эр

$$\frac{{}^{\circ}\varphi_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{\circ}\varphi_n(\alpha,z)} \longrightarrow 1, \ \text{кад}\ n \to \infty \tag{30}$$

з услов

$$|z|<1 \ \text{и}\ |\alpha|<M$$

эфицијенти ${}^{\circ}\varphi_n(\alpha,z)$ развоја (29) су функције облика

$${}^{\circ}\varphi_n(\alpha,z) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \frac{\{(\alpha+n-\nu)z\}^{\nu}}{\nu!} e^{\{(\alpha+n-\nu)z\}}, \quad n=0,1,2,\dots \tag{31}$$

ı основу развоја (28) развој функције

$$q_{\nu}\{(\alpha+n-\nu)z\} = \frac{\{(\alpha+n-\nu)z\}^{\nu}}{\nu!} e^{\{(\alpha+n-\nu)z\}} \tag{32}$$

ıаси

$$\frac{\{(\alpha+n-\nu)z\}^{\nu}}{\nu!} e^{\{(\alpha+n-\nu)z\}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{\nu} \frac{\{(\alpha+n-\nu)z\}^{\nu+k}}{(\nu+k)!} \tag{33}$$

ıзвијајуhи све функције $q_{\alpha\nu}\{(\alpha+n-\nu)z\}$, $\nu=0,1,2,\dots,n$ у изразу (31) на ıчин (33) добијамо

$${}^{\circ}\varphi_n(\alpha,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_n^k(\alpha)}{k!} z^k \tag{34}$$

·де је

$${}^{\circ}B_n^k(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{k}{i} (\alpha+n-i)^k. \tag{35}$$

Іножењем једнакости (29) са $(1-X)$ добија се

$$\frac{(1-X)e^{(1-X)\alpha z}}{1-Xe^{(1-X)z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (X^n - X^{n+1}) \left\{ {}^{\circ}\varphi_n(\alpha,z) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {}^{\circ}\varphi_n(\alpha,z) - {}^{\circ}\varphi_{n-1}(\alpha,z) \right\} X^n \tag{36}$$

тавиһемо

$$-{}^{1}p_n(\alpha,x) = {}^{0}p_n(\alpha,x) - {}^{0}p_{n-1}(\alpha,x) \tag{37}$$

ɔункције ${}^{0}p_n(\alpha,x)$ и ${}^{0}p_{n-1}(\alpha,x)$ развиһемо на начин (34); тако добијамо

$$-{}^{1}p_n(\alpha,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\left\{{}^{0}B_n^m(\alpha) - {}^{0}B_{n-1}^m(\alpha)\right\} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\left\{{}^{1}A_n^m(\alpha)\right\} \tag{38}$$

ɔг ${}^{1}A_n^m(\alpha)=0$ за $m<n$ може се последњи ред овако писати

$$-{}^{1}p_n(\alpha,x) = \sum_{m=n}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\left\{{}^{1}A_n^m(\alpha)\right\},\ n=0,1,2,\dots \tag{39}$$

з (36),(37) и (39) следи

$$g_{-1}(\alpha,X,z) \equiv \frac{(1-X)e^{(1-X)\alpha z}}{1-Xe^{(1-X)z}} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n \sum_{m=n}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\left\{{}^{1}A_n^m(\alpha)\right\}. \tag{40}$$

ɔеуређењем реда (4о) добија се

$$g_{-1}(\alpha,X,z) \equiv \frac{(1-X)e^{(1-X)\alpha z}}{1-Xe^{(1-X)z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} X^k\left\{{}^{1}A_k^n(\alpha)\right\},\ |X|<1,\ |z|<1 \tag{41}$$

ᵓдуһи да

$$\frac{(1-X)e^{(1-X)\alpha z}}{1-Xe^{(1-X)z}} \longrightarrow \frac{1}{1-z} \quad \text{kad } X \longrightarrow 1 \tag{42}$$

ι из (41) следи

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left\{{}^{1}A_k^n(\alpha)\right\}$$

ιкле

$$\sum_{k=0}^{n} {}^{1}A_k^n(\alpha) = n! \tag{43}$$

ɪднакост (17) за $p=0$ даје

$$\sum_{i=0}^{\nu} {}^{1}A_i^n(\alpha) = {}^{0}B_\nu^n(\alpha), \tag{44}$$

.кле на основу (43) и (44) је

$$ {}^{0}B_n^n(\alpha) = n! \tag{45}$$

и како је ${}^{1}A^{n}_{n+k}$ за $k=1,2,3\ldots$ то је на основу (44) и (43) такође

$$^{\circ}B^{n}_{n+k}(\alpha) = n!\ , \ k=0,1,2,\ldots \tag{46}$$

з (34) на основу (46) следи

$$^{\circ}\varphi_n(\alpha,z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{^{\circ}B^{n+k}_{n}(\alpha)}{(n+k)!} z^{n+k} \tag{47}$$

тавићемо

$$R_n(\alpha,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{^{\circ}B^{n+k}_{n}(\alpha)}{(n+k)!} z^{n+k} \tag{48}$$

статак $R_n(\alpha,z)$ развоја (47) тежи нули кад $n \to \infty$ само ако је $|z|<1$

$$R_n(\alpha,z) \to 0,\ kad\ n \to \infty\ \ za\ |z|<1 \tag{49}$$

стога је

$$\lim_{n\to\infty}\left\{^{\circ}\varphi_n(\alpha,z)\right\} = \frac{1}{1-z}\ ,\ |z|<1\ ,\ |\alpha|<M. \tag{50}$$

а основу (5о) добијамо Даламбер-ову граничну вредност (3о)
параграфу 8.показаћемо да ред $R_n(\alpha,z)$ конвергира за $|z|<1$, $|\alpha|<M$
де је M произвољно велики реалан број.
а бисмо доказали (49) показаћемо да вреди

$$\frac{^{\circ}B^{n+k}_{n}(\alpha)}{(n+k)!} \to 1\ kad\ n \to \infty \tag{51}$$

а основу формула (7) и (3) добијамо

$$D^{n}_{n}(\alpha-k) = {}^{\circ}B^{n}_{n-k}(\alpha) + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{n-i}(\alpha-k+i)^{n}$$

пи

$$^{\circ}B^{n}_{n-k}(\alpha) = n! + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(k-i-\alpha)^{n}, \tag{52}$$

це је $k = 1,2,3,\ldots n$;

бог $$\frac{\binom{n}{i}(k-i-\alpha)^{n}}{n!} \to 0\ \ kad\ n \to \infty$$

е је $i = 0,1,2,\ldots,k-1$

добијамо граничну вредност (51) у следећем облику

$$\frac{{}^{0}B^{n}_{n-k}(\alpha)}{n!} \to 1 \quad \text{kag } n \to \infty \tag{53}$$

3. КВАДРАТНЕ ШЕМЕ ПОЛИНОМА ${}^{0}B^{n}_{\nu}(\alpha)$ И ${}^{1}A^{n}_{\nu}(\alpha)$. ИЗВЕСНЕ ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ КОЈЕ СЕ ОДНОСЕ НА ОВЕ ШЕМЕ. ФУНКЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПОЛИНОМА ${}^{0}B^{n}_{\nu}(\alpha)$ И ${}^{1}A^{n}_{\nu}(\alpha)$. ПОСЛЕДИЦЕ ФУНКЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПОЛИНОМА ${}^{0}B^{n}_{\nu}(\alpha)$ ВРЕДНОСТИ ПОЛИНОМА ${}^{1}B^{n}_{n-1}(\alpha)$. ДОКАЗ ДА ЈЕ $St^{n}_{n-1} = \binom{n}{2}$.

Посматрамо квадратне шеме

$$\frac{{}^{0}B^{n+\nu}_{\nu}(\alpha)}{(n+\nu)!}, \quad n, \nu = 0, 1, 2, \dots \tag{54}$$

$$\frac{{}^{1}A^{n+\nu}_{\nu}(\alpha)}{(n+\nu)!} \quad n, \nu = 0, 1, 2, \dots \tag{55}$$

Резултат (53) значи да низови по врстама шеме (54) имају граничну вредност 1.

Формула (13) за $p=0$ и $\nu = n-k$ гласи

$${}^{1}A^{n}_{n-k}(\alpha) = {}^{0}B^{n}_{n-k}(\alpha) - {}^{0}B^{n}_{n-k-1}(\alpha), \quad k = 0, 1, 2, \dots n \tag{56}$$

Из (56) делењем са $n!$ и због (53) следи

$$\frac{{}^{1}A^{n}_{n-k}(\alpha)}{n!} \to 0 \quad \text{kag } n \to \infty$$

или

$$\frac{{}^{1}A^{n+k}_{n}(\alpha)}{(n+k)!} \to 0 \quad \text{kag } n \to \infty \tag{57}$$

То значи: у шеми (55) низови по врстама имају граничну вредност нула.
Из (56) на основу (52) добија се

$$A^{n}_{n-k}(\alpha) = n! + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (k-i-\alpha)^{n} - \left\{ n! + \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (k+1-i-\alpha)^{n} \right\} =$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (k-i-\alpha)^{n} - \left[(-1)^{1} \binom{n}{0} (k+1-\alpha)^{n} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (k+1-i-\alpha)^{n} \right\};$$

У првој суми ставићемо $i+1 = m$; следи

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1}\binom{n}{i}(k-i-\alpha)^n \equiv \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \binom{n}{m-1}(k-m+1-\alpha)^n.$$

У другој суми једноставно ћемо наместо сумационог слова i писати m и ту другу суму одузети од прве

$$\sum_{1} (-1)^m \binom{n}{m-1}(k-m+1-\alpha)^n - \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \binom{n}{m}(k-m+1-\alpha)^n = \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \binom{n+1}{m}(k-m+1-\alpha)^n;$$

$$A^n_{n-k}(\alpha) = \binom{n+1}{0}(k+1-\alpha)^n + \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \binom{n+1}{m}(k-m+1-\alpha)^n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{n+1}{m}(k-m+1-\alpha)^n;$$

дакле $\quad {}^1A^n_{n-k}(1-\alpha) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{n+1}{m}\left[k-m+1-(1-\alpha)\right]^n \equiv {}^1A^n_k(\alpha),$

$$ {}^1A^n_{n-k}(1-\alpha) = {}^1A^n_k(\alpha). \tag{58}$$

дентичност (58) је функционалне једначина за полиноме ${}^1A^n_k(\alpha)$
аставићемо суму

$$\sum_{\nu=0}^{n} {}^1A^n_\nu(\alpha) = n! \tag{43}$$

а два дела

$$\sum_{\nu=0}^{n-k-1} {}^1A^n_\nu(\alpha) + \sum_{\nu=n-k}^{n} {}^1A^n_\nu(\alpha) = n! \tag{59}$$

а основу (44) је

$$\sum_{\nu=0}^{n-k-1} {}^1A^n_\nu(\alpha) = {}^0B^n_{n-k-1}(\alpha).$$

руги део у суми (59) трансформисаћемо на основу (58) и (44) овако

$$\sum_{n-k}^{\nu} {}^1A^n_\nu(\alpha) = \sum_{\nu=n-k}^{n} {}^1A^n_{n-\nu}(1-\alpha) = \sum_{i=0}^{k} {}^1A^n_i(1-\alpha) \equiv {}^0B^n_k(1-\alpha)$$

дакле

$$ {}^0B^n_{n-k-1}(\alpha) + {}^0B^n_k(1-\alpha) = n! \tag{60}$$

Идентичност (6o) је функционална једначина за полиноме ${}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha)$
Из (6o) следи

$$\frac{{}^{\circ}B_{n-k-1}^{n}(\alpha)}{n!}+\frac{{}^{\circ}B_{k}^{n}(1-\alpha)}{n!}=1,$$

будући да на основу (53) први део ове суме тежи на 1 ,то имамо

$$\frac{{}^{\circ}B_{k}^{n}(1-\alpha)}{n!}\longrightarrow 0 \text{ kag } n\longrightarrow\infty \tag{61}$$

о значи:низови по колонама у шеми (54) имају граничну вредност нула.
ормула (13) ~~за~~ $p=0$ даје

$${}^{1}A_{k}^{n}(\alpha)={}^{\circ}B_{k}^{n}(\alpha)-{}^{\circ}B_{k-1}^{n}(\alpha)$$

дакле

$$\frac{{}^{1}A_{k}^{n}(\alpha)}{n!}=\frac{{}^{\circ}B_{k}^{n}(\alpha)}{n!}-\frac{{}^{\circ}B_{k-1}^{n}(\alpha)}{n!} \tag{62}$$

а како због (61) оба члана на десној страни у (62) теже ка нули,то имамо

$$\frac{{}^{1}A_{k}^{n}(\alpha)}{n!}\longrightarrow 0 \text{ kag } n\longrightarrow\infty$$

Го значи:низови по колонама у шеми (55) имају граничну вредност нула.
У функционалној једначини (6o) узећемо $n=2p$, $k=p-1$;следи

$${}^{\circ}B_{p}^{2p}(\alpha)+{}^{\circ}B_{p-1}^{2p}(1-\alpha)=(2p)! \tag{63}$$

а одавде за $\alpha=0$ следи

$${}^{\circ}B_{p}^{2p}(0)=\frac{(2p)!}{2},\quad p=1,2,3,\dots \tag{64}$$

У функционалној једначини (6o) узећемо $n=2p+1$, $k=p$, $\alpha=\frac{1}{2}$,доби-
а се

$${}^{\circ}B_{p}^{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2p+1)!}{2},\quad p=0,1,2,\dots \tag{65}$$

Из (64) и (65) следи

$${}^{\circ}B_{p}^{2p+1}-{}^{\circ}B_{p}^{2p}(0)=(2p)!\cdot p$$

$$\frac{{}^{\circ}B_{p}^{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2p)!\,p}-\frac{{}^{\circ}B_{p}^{2p}(0)}{(2p)!\,p}=1,\quad \frac{{}^{\circ}B_{p}^{2p}(0)}{(2p)!}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{p \to \infty} \frac{{}^{\circ}B^{2p+1}_{p}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2p)!\, p} = 1 . \tag{66}$$

з (64) и (65) следи

$$ {}^{\circ}B^{2p+1}_{p}\left(\frac{1}{2}\right) = (2p+1) \cdot {}^{\circ}B^{2p}_{p}(0) . \tag{67}$$

вези са вредностима (64) и (65) извешћемо извесне граничне вредности ни-
ова паралелних са главном дијагоналом у шеми (54) и то за оне вредности
роменљиве α које су цели бројеви.

$$\ldots_{+k}(\alpha) = \sum_{i=0}^{p+k} (-1)^{i} \binom{2p}{i} (\alpha+p+k-i)^{2p} \equiv \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i} \binom{2p}{i} (\alpha+p+k-i)^{2p} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{p+i} \binom{2p}{p+i} (\alpha+k-i)^{2p}$$

$$ {}^{\circ}B^{2p}_{p}(\alpha+k) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i} \binom{2p}{i} (\alpha+k+p-i)^{2p},$$

$$\frac{{}^{\circ}B^{2p}_{p+k}(\alpha)}{(2p)!} - \frac{{}^{\circ}B^{2p}_{p}(\alpha+k)}{(2p)!} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (-1)^{p+i} \binom{2p}{p+i} (\alpha+k-i)^{n}}{(2p)!} \tag{68}$$

удући да је

$$\frac{\binom{2p}{p+i}}{(2p)!} = \frac{\binom{2p}{p-i}}{(2p)!} = \frac{1}{(p-i)!\,(p+i)!} \to 0 \text{ кад } p \to \infty$$

о из (68) следи

$$\lim_{p \to \infty} \frac{{}^{\circ}B^{2p}_{p+k}(\alpha)}{(2p)!} = \lim_{p \to \infty} \frac{{}^{\circ}B^{2p}_{p}(\alpha+k)}{(2p)!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{69}$$

а $\alpha = -k$ следи из (69)

$$\lim_{p \to \infty} \frac{{}^{\circ}B^{2p}_{p+k}(-k)}{(2p)!} = \lim_{p \to \infty} \frac{{}^{\circ}B^{2p}_{p}(0)}{(2p)!} = \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \tag{70}$$

ункционална једначина (60) за $\alpha = -X$ даје

$$ {}^{\circ}B^{2p}_{2p-k-1}(X) = (2p)! - {}^{\circ}B^{2p}_{k}(1+X) ;$$

За $k = p - m$ имамо

$$ {}^{\circ}B^{2p}_{m+p-1}(-X) = (2p)! - {}^{\circ}B^{2p}_{p-m}(1+X)$$

одавде за $X = m - 1$ добијамо

$$°B^{2p}_{p+m-1}\{-(m-1)\} = (2p)! - °B^{2p}_{p-m}(m).$$

Ставимо ли $m-1=q$

биће $$\frac{°B^{2p}_{p-m}(+m)}{(2p)!} = 1 - \frac{°B^{2p}_{p+q}(-q)}{(2p)!}$$

а одавде због (7o) добијамо

$$\lim_{p\to\infty}\frac{°B^{2p}_{p-m}(+m)}{(2p)!} = \frac{1}{2},\ m=0,1,2,\dots \tag{71}$$

Код граничних вредности полинома $°B^{2p+1}_{p+k}(\alpha)$,које ћемо сада извести,аргумент ће бити цео број увећан за $\frac{1}{2}$.

$$°B^{2p+1}_{p+k}(\alpha) = \sum_{i=0}^{p+k}(-1)^i\binom{2p+1}{i}(\alpha+p+k-i)^{2p+1} \equiv$$
$$\equiv \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{2p+1}{i}(\alpha+p+k-i)^{2p+1} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{p+i}\binom{2p+1}{p+i}(\alpha+k-i)^{2p+1},$$

$$°B^{2p+1}_{p}(\alpha+k) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{2p+1}{i}(\alpha+k+p-i)^{2p+1},$$

$$\frac{°B^{2p+1}_{p+k}(\alpha)}{(2p+1)!} - \frac{°B^{2p+1}_{p}(\alpha+k)}{(2p+1)!} = \frac{1}{(2p+1)!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{p+i}\binom{2p+1}{p+i}(\alpha+k-i)^{2p+1} \tag{72}$$

Будући да је

$$\frac{\binom{2p+1}{p+i}}{(2p+1)!} = \frac{\binom{2p+1}{p+1-i}}{(2p+1)!} = \frac{1}{(p+1-i)!\,(p+i)!} \to 0 \text{ kad } p\to\infty$$

то из (72) следи

$$\lim_{p\to\infty}\frac{°B^{2p+1}_{p+k}(\alpha)}{(2p+1)!} = \lim_{p\to\infty}\frac{°B^{2p+1}_{p}(\alpha+k)}{(2p+1)!},\ k=0,1,2,\dots \tag{73}$$

У (73) ставићемо

$$\alpha = -k + \frac{1}{2};$$

следи

$$\lim_{p\to\infty}\frac{°B^{2p+1}_{p+k}(-k+\frac{1}{2})}{(2p+1)!} = \lim_{p\to\infty}\frac{°B^{2p+1}_{p}(\frac{1}{2})}{(2p+1)!} = \frac{1}{2},\ k=0,1,2,\dots \tag{74}$$

Функционална једначина (6о) за $\alpha = -X$ даје

$$ {}^{\circ}B_{2p-k}^{2p+1}(-X) = (2p+1)! - {}^{\circ}B_{k}^{2p+1}(1+X) ;$$

за $k = p - m$ имамо

$$ {}^{\circ}B_{p+m}^{2p+1}(-X) = (2p+1)! - {}^{\circ}B_{p-m}^{2p+1}(1+X) $$

а одавде за $X = m - \frac{1}{2}$, $1+X = m + \frac{1}{2}$,добијамо

$$ \frac{{}^{\circ}B_{p-m}^{2p+1}(m+\frac{1}{2})}{(2p+1)!} = 1 - \frac{{}^{\circ}B_{p+m}^{2p+1}(-m+\frac{1}{2})}{(2p+1)!} $$

а одавде због (74) следи

$$ \lim_{p\to\infty} \frac{{}^{\circ}B_{p-m}^{2p+1}(m+\frac{1}{2})}{(2p+1)!} = \frac{1}{2}, \; m = 0,1,2,\dots \qquad (75) $$

Iз функционалне једначине (6о) за $n = 2p$ и $\alpha = 0$ добијамо

$$ {}^{\circ}B_{2p-k-1}^{2p}(0) + {}^{\circ}B_{k+1}^{2p}(0) = (2p)! $$

за $k = p+m-1$ је $2p-k-1 = p-m$,

дакле $$ {}^{\circ}B_{p-m}^{2p}(0) + {}^{\circ}B_{p+m}^{2p}(0) = 2p! \qquad (76) $$

Из функционалне једначине (6о) за $n = 2p-1$ и $\alpha = 0$ добијамо

$$ {}^{\circ}B_{2p-k-2}^{2p-1}(0) + {}^{\circ}B_{k+1}^{2p-1}(0) = (2p-1)! $$

за $k = p+m-1$ је $2p-k-2 = p-m+1$,

дакле $$ {}^{\circ}B_{p-(m+1)}^{2p-1}(0) + {}^{\circ}B_{p+m}^{2p-1}(0) = (2p-1)! \qquad (77) $$

Према (18) је

$$ \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{ {}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha) \right\} = {}^{1}B_{n-1}^{n}(\alpha) $$

вредност полинома ${}^{1}B_{n-1}^{n}(\alpha)$ израчунаћемо по формули (1о)

$$ {}^{1}B_{n-1}^{n}(\alpha) = (n-1)! \left\{ \binom{n}{1} St_{n-1}^{n-1} \alpha^{1} + \binom{n}{0} St_{n-1}^{n} \alpha^{0} \right\} ; \qquad (78) $$

будући да је $St_{n}^{n} = 1$,то из (78) следи

$$ {}^{1}B_{n-1}^{n}(\alpha) = n!\,\alpha + (n-1)!\, St_{n-1}^{n} \qquad (79) $$

Ако у (5) ставимо $\alpha = 0$ добијамо на основу дефиниције Стирлинг-ових бројева друге врсте

$$ {}^{p}B^{n}_{n-p}(0) = D^{n}_{n-p}(0) = (n-p)!\ \mathfrak{S}^{n}_{n-p} $$

стога (79) постаје

$$ {}^{1}B^{n}_{n-1}(\alpha) = n!\,\alpha + {}^{1}B^{n}_{n-1}(0). \tag{80} $$

Формула (18) за $p=0,\ \alpha=0$ и $\nu=n-1$ даје

$$ \sum_{\nu=0}^{n-1}\left\{{}^{0}B^{n}_{\nu}(0)\right\} = {}^{1}B^{n}_{n-1}(0) \tag{81} $$

Због суме (81) начинићемо прво збир

$$ B^{2p}_{0} + {}^{0}B^{2p}_{1} + {}^{0}B^{2p}_{2} + \dots + {}^{0}B^{2p}_{p-1} + {}^{0}B^{2p}_{p} + {}^{0}B^{2p}_{p+1} + \dots + {}^{0}B^{2p}_{2p-2} + {}^{0}B^{2p}_{2p-1} + {}^{0}B^{2p}_{2p} \tag{82} $$

У збиру (82) има свега $(2p+1)$ чланова од којих је ${}^{0}B^{2p}_{0}=0$.
У збиру (82) скупићемо у једну заграду она два члана који су једнако удаљени од оба краја; тако настаје израз

$$ {}^{0}B^{2p}_{p} + \sum_{\nu=0}^{p-1}\left({}^{0}B^{2p}_{\nu} + {}^{0}B^{2p}_{2p-\nu}\right). \tag{83} $$

Збир ${}^{0}B^{2p}_{\nu} + {}^{0}B^{2p}_{2p-\nu}$ је управо лева страна формуле (76); стога израз (83) има вредност

$$ \frac{(2p)!}{2} + p\cdot(2p)! \tag{84} $$

Како је збир (82) од кога смо пошли, управо ${}^{1}B^{2p}_{2p}(0)$ то је

$$ {}^{1}B^{2p}_{2p}(0) = \frac{(2p)!}{2} + p\,(2p)! = \frac{(2p+1)\,(2p)!}{2} $$

дакле

$$ \sum_{\nu=0}^{2p}\left\{{}^{0}B^{2p}_{\nu}(0)\right\} = {}^{1}B^{2p}_{2p}(0) = \frac{(2p+1)!}{2} \tag{85} $$

Ако из суме (85) издвојимо последњи члан ${}^{0}B^{2p}_{2p}(0) = (2p)!$ и пребацимо га на десну страну, добијамо

$$ {}^{1}B^{2p}_{2p-1}(0) = \frac{2p-1}{2}\,(2p)! \tag{86} $$

Из (79) за $n=2p$ добија се

$$ {}^{1}B^{2p}_{2p-1}(\alpha) = (2p)!\,\alpha + (2p-1)\ \mathfrak{S}^{2p}_{2p-1} \tag{87} $$

а одавде за $\alpha = 0$ добијамо

$$ {}^{1}B^{2p}_{2p-1}(0) = (2p-1)! \; \mathfrak{St}^{2p}_{2p-1} \tag{88}$$

Из (86) и (88) следи

$$\frac{2p-1}{2}\cdot(2p)! = (2p-1)! \; \mathfrak{St}^{2p}_{2p-1}$$

дакле

$$\mathfrak{St}^{2p}_{2p-1} = \binom{2p}{2} \tag{89}$$

Слично збиру (82) начинићемо збир

$$B^{2p-1}_{0} + {}^{\circ}B^{2p-1}_{1} + {}^{\circ}B^{2p-1}_{2} + \dots + {}^{\circ}B^{2p-1}_{p-1} + {}^{\circ}B^{2p-1}_{p} + \dots + {}^{\circ}B^{2p-1}_{2p-3} + {}^{\circ}B^{2p-1}_{2p-2} + {}^{\circ}B^{2p-1}_{2p-1}; \tag{90}$$

У збиру (90) има свега $2p$ чланова од којих је ${}^{\circ}B^{2p-1}_{0} = 0$ у збиру (90) скупићемо у једну заграду она два члана који су једнако удаљени од оба краја; тако настаје израз

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} \left({}^{\circ}B^{2p-1}_{\nu} + {}^{\circ}B^{2p-1}_{2p-1-\nu} \right) \tag{91}$$

Збир ${}^{\circ}B^{2p-1}_{\nu} + {}^{\circ}B^{2p-1}_{2p-1-\nu}$ је управо лева страна формуле (77); стога израз (91) има вредност

$$p\cdot(2p-1)! \tag{92}$$

Тако је збир (90), од кога смо пошли, управо ${}^{1}B^{2p-1}_{2p-1}$ то је

$${}^{1}B^{2p-1}_{2p-1} = p\cdot(2p-1)! = \frac{(2p)!}{2}$$

Дакле

$$\sum_{\nu=0}^{2p-1} \left\{ {}^{\circ}B^{2p-1}_{\nu}(0) \right\} = {}^{1}B^{2p-1}_{2p-1}(0) = \frac{(2p)!}{2} \tag{93}$$

Ако из суме (93) издвосимо последњи члан ${}^{\circ}B^{2p-1}_{2p-1} = (2p-1)!$ и пребацимо га на десну страну, добијамо

$${}^{1}B^{2p-1}_{2p-2}(0) = \frac{2p-2}{2}\cdot(2p-1)! \tag{94}$$

Из (79) за $n = 2p-1$ добија се

$${}^{1}B^{2p-1}_{2p-2}(\alpha) = (2p-1)!\,\alpha + (2p-2)! \; \mathfrak{St}^{2p-1}_{2p-2} \tag{95}$$

а одавде за $\alpha = 0$ добијамо

$$ {}^{1}B^{2p-1}_{2p-2}(0) = (2p-2)!\, St^{2p-1}_{2p-2} \tag{96} $$

Из (94) и (96) следи

$$ \frac{2p-2}{2}\cdot(2p-1)! = (2p-2)!\, St^{2p-1}_{2p-2} $$

дакле

$$ St^{2p-1}_{(2p-1)-1} = \binom{2p-1}{2} \tag{97} $$

Формула (89) и (97) могу се написати уједно.

$$ St^{n}_{n-1} = \binom{n}{2} \tag{98} $$

Из (79) и (98) следи

$$ {}^{1}B^{n}_{n-1}(\alpha) = n!\,\alpha + (n-1)!\binom{n}{2} \tag{99} $$

4. НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ ФУНКЦИЈА ${}^{0}p_n(\alpha,x)$. ФУНКЦИЈА ГЕНЕРАТРИСА $\psi_1(\alpha,X,x)$. ФУНКЦИЈЕ ${}^{1}p_n(\alpha,x)$. СУМА РЕДА $\sum_{p=0}^{\infty} R_p(\alpha,x)$. АСИМПТОТСКИ ИЗРАЗ ЗА ФУНКЦИЈЕ ${}^{1}p_n(\alpha,x)$. НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ ФУНКЦИЈА ${}^{k}p_n(\alpha,x), k=1,2,3,\dots$ ФУНКЦИЈА ГЕНЕРАТРИСА $\psi_k(\alpha,X,x), k=1,2,3,\dots$. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ИЗРАЗА $\sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{n-p+k-1}{k-1}}{\binom{n+k-1}{k-1}} R_p(\alpha,x)$ кад $n \to \infty$. АСИМПТОТСКИ ИЗРАЗИ ЗА ФУНКЦИЈЕ ${}^{k}p_n(\alpha,x)$. РЕДОВИ ПОТЕНЦИЈА ЧИЈИ СУ КОЕФИЦИЈЕНТИ ПОЛИНОМИ ${}^{k}B^{m}_{n}(\alpha)$. ЈЕДНО НАРОЧИТО СВОЈСТВО ИНТЕГРАЛА ${}^{k}p_n(\alpha,x)$ И ПОЛИНОМА ${}^{k}B^{m}_{n}(\alpha), k=0,1,2$

Егзистенција интеграла

$$ \int_{-\infty}^{\alpha} \left\{ {}^{0}p_n(\alpha,x) \right\} d\alpha \tag{100} $$

своди се према аналитичком изразу (31) за функцију ${}^{0}p_n(\alpha,x)$ на егзистенцију интеграла

$$ \int_{-\infty}^{\alpha} x^n e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sum_{\nu=0}^{n} \nu!\binom{n}{\nu}\left(\frac{-1}{a}\right)^{\nu}\alpha^{n-\nu} \tag{101} $$

Из истог разлога постоји интеграл

$$ \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{(1-X)\alpha x}}{1-Xe^{(1-X)x}}\,dx = \frac{1}{(1-X)x}\cdot\frac{e^{(1-X)\alpha x}}{1-Xe^{(1-X)x}} \tag{102} $$

Због (1o2) и (1oo) а на основу развоја (29) имамо

$$\frac{1}{(1-X)z}\cdot\frac{e^{(1-X)\alpha z}}{1-Xe^{(1-X)z}}=\sum_{n=0}^{\infty}X^n\int_{-\infty}^{\alpha}\{{}^{\circ}\varphi_n(\alpha,z)\}\,d\alpha. \qquad (103)$$

Начинићемо производ

$$J_1(\alpha,X,z)\equiv\frac{1}{1-X}\cdot\frac{e^{(1-X)\alpha z}}{1-Xe^{(1-X)z}}=\sum_{n=0}^{\infty}X^n\sum_{n=0}^{\infty}\{{}^{\circ}\varphi_n(\alpha,z)\}X^n\equiv\sum_{n=0}^{\infty}X^n\sum_{\nu=0}^{n}\{{}^{\circ}\varphi_\nu(\alpha,z)\} \qquad (104)$$

Из (1o3) и (1o4) следи

$$\int_{-\infty}^{\alpha}\{{}^{\circ}\varphi_n(\alpha,z)\}\,d\alpha=\frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{n}\{{}^{\circ}\varphi_\nu(\alpha,z)\}\;z\neq 0 \qquad (105)$$

Уводимо ознаку

$$\sum_{\nu=0}^{n}\{{}^{\circ}\varphi_\nu(\alpha,z)\}={}^{1}\varphi_n(\alpha,z)\;, \qquad (106)$$

па се (1o5) може написати

$$\int_{-\infty}^{\alpha}\{{}^{\circ}\varphi_n(\alpha,z)\}\,d\alpha=\frac{1}{z}\{{}^{1}\varphi_n(\alpha,z)\},\;z\neq 0 \qquad (107)$$

Показаћемо да је

$$\lim_{n\to\infty}\{{}^{1}\varphi_n(\alpha,z)\}=+\infty,\quad за\;\;|z|<1,\;\;|\alpha|<M. \qquad (108)$$

Функција ${}^{\circ}\varphi_\nu(\alpha,z)$ у суми на левој страни формуле (1o6) развићемо у ред према развоју (47) и добивене развоје ћемо сабрати; тако добијамо

$${}^{1}\varphi_n(\alpha,z)=\frac{n+1}{1-z}-\frac{z(1-z^{n+1})}{(1-z)^2}+\sum_{p=0}^{n}R_p(\alpha,z) \qquad (109)$$

Израчунаћемо граничну вредност израза (1o9) за $|z|<1$, дакле

$$\lim_{n\to\infty}\{{}^{1}\varphi_n(\alpha,z)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{1-z}-\lim_{n\to\infty}\frac{z(1-z)^{n+1}}{(1-z)^2}+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{{}^{\circ}B_p^{p+k}(\alpha)}{(p+k)!}z^{p+k},\;|z|<1 \qquad (110)$$

Да одредимо суму двострукога реда

$$\sum_{p=0}^{\infty}R_p(\alpha,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{{}^{\circ}B_p^{p+k}(\alpha)}{(p+k)!}z^{p+k} \qquad (111)$$

начинићемо редове (48) за $n=0,1,2,\dots$ и сабрати их; тако добијамо

$$\sum_{p=0}^{\infty} R_p(\alpha,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{n-1}\{{}^0B_\nu^n(\alpha)\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\{{}^1B_{n-1}^n(\alpha)\}$$

а одавде због (99) добијамо

$$\sum_{p=0}^{\infty} R_p(\alpha,z)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}(n-1)!\binom{n}{2}=\frac{2\alpha z-(2\alpha-1)z^2}{2(1-z)^2},\ |z|<1,\ |\alpha|<M \quad (112)$$

У изразу (1о9) други и трећи члан имају, дакле, коначно одређене граничне вредности а први члан неограничено расте са n ;
стога је

$$\lim_{n\to\infty}\{{}^1p_n(\alpha,z)\}=+\infty,\ |z|<1,\ |\alpha|<M. \quad (108)$$

Ако вредност (1о7) интеграла (1оо) ставимо у развој (1о3) добијамо

$$g_1(\alpha,x,z)\equiv\frac{1}{1-x}\cdot\frac{e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\{{}^1p_n(\alpha,z)\}x^n,\ |x|<1,\ |z|<1,\ |\alpha|<M \quad (113)$$

Добили смо функцију генератрису функција ${}^1p_n(\alpha,z)$. За ред (114) показаћемо

да вреди
$$\frac{{}^1p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^1p_n(\alpha,z)}\longrightarrow 1 \quad \text{kag } n\longrightarrow\infty \quad (114)$$

уз услов $|z|<1,\ |\alpha|<M$;

на основу (1о8) и (5о) имамо

$$\frac{{}^1p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^1p_n(\alpha,z)}=\frac{{}^1p_n(\alpha,z+{}^0p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^1p_n(\alpha,z)}=1+\frac{{}^0p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^1p_n(\alpha,z)}\longrightarrow 1 \quad \text{kag } n\longrightarrow\infty \quad (115)$$

Показаћемо да је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^1p_n(\alpha,z)}{\binom{n+1}{1}}=\frac{1}{1-z} \quad (116)$$

уз услов $|z|<1,\ |\alpha|<M$

Из (1о9) следи

$$\frac{{}^1p_n(\alpha,z)}{\binom{n+1}{1}}=\frac{1}{1-z}-\frac{z(1-z^{n+1})}{(1-z)^2\binom{n+1}{1}}+\frac{1}{\binom{n+1}{1}}\sum_{p=0}^{n}R_p(\alpha,z); \quad (117)$$

Због

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n} R_p(\alpha,x) = \frac{2\alpha x-(2\alpha-1)x^2}{2(1-x)^2},\ |x|<1, |\alpha|<M \tag{112$_1$}$$

имамо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\binom{n+1}{1}}\sum_{p=0}^{n} R_p(\alpha,x)=0\ ; \tag{118}$$

стога вреди (116).Из (117) следи

$$\frac{{}^1p_n(\alpha,x)}{\left[\frac{\binom{n+1}{1}}{1-x}\right]} = 1-\frac{x(1-x^{n+1})}{(1-x)\binom{n+1}{1}}+\frac{1-x}{\binom{n+1}{1}}\sum_{p=0}^{n} R_p(\alpha,x),$$

стога

$${}^1p_n(\alpha,x)\sim\frac{\binom{n+1}{1}}{1-x}\ \text{kag}\ n\to\infty,\ |x|<1,\ |\alpha|<M \tag{119}$$

Из (1o9) следи

$$\frac{{}^1p_n(\alpha,x)}{\left(\frac{n}{1-x}\right)} = 1+\frac{1}{n}-\frac{x(1-x^{n+1})}{n(1-x)}+\frac{1-x}{n}\sum_{p=0}^{n} R_p(\alpha,x)$$

Стога је такође

$${}^1p_n(\alpha,x)\sim\frac{n}{1-x}\ \text{kag}\ n\to\infty,\ |x|<1,\ |\alpha|<M \tag{120}$$

Јасно је да се поступак добијања генератрисе $g_1(\alpha,X,x)$ и функција ${}^1p_n(\alpha,x)$ може неограничено пута поновити.Тако добијамо

$$g_k(\alpha,X,x)\equiv\frac{1}{(1-X)^k}\cdot\frac{e^{(1-X)\alpha x}}{1-Xe^{(1-X)x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^k p_n(\alpha,x)\right\}X^n,\ |X|<1, |x|<1, |\alpha|<M \tag{121}$$

где је

$${}^k p_n(\alpha,x)=\sum_{\nu=0}^{n}\left\{{}^{k-1}p_\nu(\alpha,x)\right\},\ k=1,2,3,\dots\ ; \tag{122}$$

накнадно ћемо утврдити област конвергенције реда (121)
Из

$$\frac{1}{(1-X)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}X^n,\ |X|<1$$

и развоја (29) следи

$$g_{k+1}(\alpha,x,z)=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}\cdot\frac{e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}x^n\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{0}p_n(\alpha,z)\right\}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k}\left\{{}^{0}p_{n-i}(\alpha,z)\right\}, \tag{123}$$

дакле

$$^{k+1}p_n(\alpha,z)=\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k}\left\{{}^{0}p_{n-i}(\alpha,z)\right\} \tag{124}$$

Како је

$$\int_{-\infty}^{\alpha} g_k(\alpha,x,z)\,d\alpha=\frac{1}{z}\,g_{k+1}(\alpha,x,z) \tag{125}$$

то је

$$\int_{-\infty}^{\alpha}\left\{{}^{k}p_n(\alpha,z)\right\}d\alpha=\frac{1}{z}\left\{{}^{k+1}p_n(\alpha,z)\right\},\ z\neq 0 \tag{126}$$

За функције ${}^{k}p_n(\alpha,z)$ аналогне релације релацијама под бројевима од (108) до (120) извешћемо индуктивним путем.
У формулу (109) наместо n ставићемо $0,1,2,\dots,n$ и добивене развоје ћемо сабрати; тако добијамо

$$^{2}p_n(\alpha,z)=\frac{\binom{n+2}{2}}{1-z}-\frac{\binom{n+1}{1}z}{(1-z)^2}+\frac{z^2(1-z^{n+1})}{(1-z)^3}+\sum_{p=0}^{n}\binom{n-p+1}{1}R_p(\alpha,z) \tag{127}$$

У (127) наместо n ставићемо $0,1,2,\dots n$ и добивене развоје ћемо сабрати; тако добијамо

$$^{3}p_n(\alpha,z)=\frac{\binom{n+3}{3}}{1-z}-\frac{\binom{n+2}{2}z}{(1-z)^2}+\frac{\binom{n+1}{1}z^2}{(1-z)^3}-\frac{z^3(1-z^{n+1})}{(1-z)^4}+\sum_{p=0}^{n}\binom{n-p+2}{2}R_p(\alpha,z) \tag{128}$$

Извођење формула облика (127) или (128) за ма који природан број основа се уопште на формули

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\dots+\binom{k+p}{k}=\binom{k+p+1}{k+1};$$

стога је уопште

$$^{k}p_n(\alpha,z)=\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\frac{\binom{n+k-m}{k-m}}{(1-z)^{m+1}}+(-1)^k\frac{(1-z^{n+1})z^k}{(1-z)^{k+1}}+\sum_{p=0}^{n}\binom{n-p+k-1}{k-1}R_p(\alpha,z). \tag{129}$$

Из (127) следи

$$\frac{2\,p_n(\alpha,z)}{\binom{n+1}{1}} = \frac{\binom{n+2}{2}}{1-z} - \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{z^2(1-z^{n+1})}{(1-z)^3\binom{n+1}{1}} + \sum_{p=0}^{n}\left(1-\frac{p}{n+1}\right)R_p(\alpha,z) \quad (13$$

Израчунаћемо

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n}\left(1-\frac{p}{n+1}\right)R_p(\alpha,z); \quad (13$$

$$\sum_{p=0}^{n}\left(1-\frac{p}{n+1}\right)R_p(\alpha,z) = R_0+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)R_1+\left(1-\frac{2}{n+1}\right)R_2+\dots+\left(1+\frac{n}{n+1}\right)R_n =$$

$$=\left(R_0+R_1+R_2+\dots+R_n\right)-\left(\frac{1}{n+1}R_1+\frac{2}{n+1}R_2+\dots+\frac{n}{n+1}R_n\right) \quad (13$$

Показаћемо да уз услов $|z)<1$ имамо

$$\left|\frac{1}{1+1}R_1+\frac{2}{n+1}R_2+\dots+\frac{n}{n+1}R_n\right| \to 0 \text{ kad } n\to\infty \quad (13$$

Претходно ћемо показати да је уз услов $|z)<1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!}z^k=\frac{z}{1-z},\ |z)<1 \quad (13$$

да је дакле на основу (47) такође

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{z^n}\left({}^{\circ}p_n(\alpha,z)\right)-\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right\}=\frac{z}{1-z},\ |z|<1 \quad (135$$

Због

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!}=1,\ k=0,1,2,\dots \quad (61)$$

можемо ставити

$$\frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} = 1+\varepsilon_{n+k}(\alpha),\ k=1,2,3,\dots \quad (136$$

где

$$\varepsilon_{n+k}(\alpha)\to 0 \text{ kad } n\to\infty \quad (13$$

На основу граничне вредности (61) је

$$\lim_{k \to \infty} \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} = 0 \tag{138}$$

На основу (136) имамо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} z^k = \sum_{p=1}^{\infty} \left[1 + \mathcal{E}_{n+p}(\alpha)\right] z^p \tag{139}$$

Због (138) имамо

$$\left[1 + \mathcal{E}_{n+p}(\alpha)\right] \to 0 \text{ kad } p \to \infty, \text{ a } z^p \to 0 \text{ kad } p \to \infty \text{ za } |z| < 1$$

дакле

$$\left[1 + \mathcal{E}_{n+p}(\alpha)\right] z^p \to 0 \text{ kad } p \to \infty \text{ za } |z| < 1$$

т.ј.општи члан реда на десној страни (139) тежи нули кад $p \to \infty$
Због (137) имамо

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \left[1 + \mathcal{E}_{n+p}(\alpha)\right] z^p \right\} = z \sum_{p=0}^{\infty} z^p = \frac{z}{1-z}, \; |z| < 1 \tag{134}$$

Напоменимо да израз на левој страни у (135) прима неодређену форму $\frac{0}{0}$ за $z = 0$ и $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$. Али како је

$$\lim_{z \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} z^k = 0$$

то је такође

$$\lim_{z \to 0} \left\{ \frac{1}{z^n} \left[{}^{\circ}p_n(\alpha, z) - \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right] \right\} = 0 \tag{140}$$

за $n = 1, 2, 3 \ldots$,

за $n = 0$ имамо

$$\frac{1}{z^0} \left[{}^{\circ}p_0(\alpha, z) - \frac{1 - z}{1 - z} = e^{\alpha z} - 1 \right.$$

дакле за $z = 0$ следи

$$e^0 - 1 \equiv 0$$

Из (134) следи да сви редови $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} x^k$, $n=0,1,2,\ldots$ имају одређене и ограничене суме за $|x|<1$. Стога можемо сабрати константу $\mathcal{K}$ такву да је

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha)}{(n+k)!} x^k \right| < \mathcal{K} \text{ за } n=0,1,2,\ldots \quad |x|<1 \tag{141}$$

На основу (141) је

$$|R_n(\alpha,x)| < \mathcal{K}|x^n|, \quad |x|<1 \tag{142}$$

Коши-ев став о нула-низу гласи: Ако $X_n \to 0$ кад $n \to \infty$ тада и $\frac{X_0+X_1+\cdots X_n}{n+1} \to 0$ кад $n \to \infty$. Познат је и овај став: Ако је $|a|<1$, тада је $\{n a^n\}$ нула-низ
Јасно је да се Коши-ев став о нула-низу може и овако писати

$$\frac{u_1+u_2+\cdots u_n}{n+1} \to 0 \text{ ako } u_n \to 0 \text{ kad } n \to \infty \tag{143}$$

За $|X|<1$ ставићемо $u_1 = X^1, u_2 = 2X^2, \ldots, u_n = nX^n$, па је тада на основу

$$\frac{X^1+2X^2+3X^3+\cdots+nX^n}{n+1} \to 0 \text{ kad } n \to \infty \text{ za } |X|<1 \tag{144}$$

На основу (144) доказаћемо граничну вредност (133):

$$\left| \frac{1}{n+1}R_1 + \frac{2}{n+1}R_2 + \cdots + \frac{n}{n+1}R_n \right| \le \frac{1}{n+1}|R_1| + \frac{2}{n+1}|R_2| + \cdots + \frac{n}{n+1}|R_n| <$$

$$< \frac{1}{n+1}\mathcal{K}|x^1| + \frac{2}{n+1}\mathcal{K}|x^2| + \cdots + \frac{n}{n+1}\mathcal{K}|x^n| =$$

$$= \mathcal{K}\frac{|x^1|+2|x^2|+\cdots+n|x^n|}{n+1} \to 0 \text{ kad } n \to \infty$$

Из (132) на основу (112) и (133) имамо

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} \left(1-\frac{p}{n+1}\right) R_p(\alpha,x) = \frac{2\alpha x-(2\alpha-1)x^2}{2(1-x)^2} \quad |x|<1, |\alpha|<M \tag{145}$$

Ако једнакост (13о) разделимо са $\frac{n+2}{2}$,добијамо

$$\frac{2p_n(\alpha,z)}{\binom{n+2}{2}} = \frac{1}{1-z} - \frac{z}{(1-z)^2\binom{n+2}{2}} + \frac{z^2(1-z^{n+1})}{(1-z)^3\binom{n+2}{2}} + \frac{2}{n+2}\sum_{p=0}^{n}\left(1-\frac{p}{n+1}\right)R_p(\alpha,z). \tag{146}$$

Из (146) због (145) следи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^2p_n(\alpha,z)}{\binom{n+2}{2}} = \frac{1}{1-z} \tag{147}$$

Из (13о) следи

$$\frac{2p_n(\alpha,z)}{\binom{n+1}{1}} = \frac{n}{2(1-z)} + \left[\frac{z}{2(1-z)} - \frac{z}{(1-z)^2}\right] + \frac{z^2(1-z^{n+1})}{(1-z)^3\binom{n+1}{1}} + \sum_{p=0}^{n}\left(1-\frac{p}{n+1}\right)R_p(\alpha,z)$$

дакле

$$\frac{{}^2p_n(\alpha,z)}{\binom{n+1}{1}} \sim \frac{n}{2(1-z)} \text{ kag } n\to\infty \text{ за } |z|<1 \tag{148}$$

Из (146) следи

$$\frac{2p_n(\alpha,z)}{\left\{\frac{\binom{n+2}{2}}{1-z}\right\}} = 1 - \frac{z}{(1-z)\cdot\frac{n+2}{2}} + \frac{z^2(1-z^{n+1})}{(1-z)^2\binom{n+2}{2}} + \frac{2(1-z)}{n+2}\sum_{p=0}^{n}\left(1-\frac{p}{n+1}\right)R_p(\alpha,z)$$

стога је

$${}^2p_n(\alpha,z) \sim \frac{\binom{n+2}{2}}{1-z} \text{ kag } n\to\infty\ |z|<1,\ |\alpha|<M \tag{149}$$

или

$${}^2p_n(\alpha,z) \sim \frac{n^2}{2!(1-z)} \text{ kag } n\to\infty,\ |z|<1,\ |\alpha|<M \tag{150}$$

Асимптотска једнакост (15о) добија се директно из (127) делењем са $\frac{n^2}{2!(1-z)}$ и граничним прелазом $n\to\infty$

Развој (121) за $k=2$ гласи

$$g_2(\alpha,x,z) = \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\{{}^2p_n(\alpha,z)\}x^n,\ |x|<1,\ |z|<1,\ |\alpha|<M \tag{151}$$

За овај ред је такође

$$\frac{{}^2p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^2p_n(\alpha,z)} \to 1 \text{ kag } n\to\infty \tag{152}$$

Уз услов $|x|<1, \quad |\alpha|<M$

$$\frac{{}^2p_{n+1}(\alpha,x)}{{}^2p_n(\alpha,x)} = \frac{{}^2p_n(\alpha,x)+{}^1p_{n+1}(\alpha,x)}{{}^2p_n(\alpha,x)} = 1+\frac{{}^1p_{n+1}(\alpha,x)}{{}^2p_n(\alpha,x)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^1p_{n+1}(\alpha,x)}{{}^2p_n(\alpha,x)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{{}^1p_n(\alpha,x)}{\binom{n+1}{1}}\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{{}^2p_n(\alpha,x)}{\binom{n+1}{1}}\right]}; \tag{153}$$

гранична вредност бројитеља на основу (116) је $\frac{1}{1-x}$,а именитељ на основу (148) неограничено расте са n

Из (128) следи

$$\frac{p_n(\alpha,x)}{\binom{n+2}{2}} = \frac{\binom{n+3}{3}}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{\binom{n+1}{2}x^2}{(1-x)^3\binom{n+2}{2}} - \frac{x^3(1-x^{n+1})}{(1-x)^3\binom{n+2}{2}} + \sum_{p=0}^{n}\frac{\binom{n-p+2}{2}}{\binom{n+2}{2}}R_p(\alpha,x). \tag{154}$$

Израчунаћемо

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{\binom{n-p+2}{2}}{\binom{n+2}{2}}R_p(\alpha,x), \tag{155}$$

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{\binom{n-p+2}{2}}{\binom{n+2}{2}}R_p(\alpha,x) = \sum_{p=0}^{n}\left(1-\frac{p}{n+1}-\frac{p}{n+2}+\frac{p^2}{(n+1)(n+2)}\right)R_p(\alpha,x) \tag{156}$$

Познат је став:Ако је $|a|<1$ и α произвољан реалан број ,тада је $\{n^\alpha a^n\}$ нула-низ.На основу овога става и Коши-ева става о нула-низу је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2x^1+2^2x^2+3^2x^3+\dots+n^2x^n}{n+1} = 0 \quad за\ |x|<1$$

а тим пре је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2x^1+2^2x^2+3^2x^3+\dots n^2x^n}{(n+1)(n+2)} = 0 \quad за\ |x|<1 \tag{157}$$

На основу (157) добијамо

$$\left|\frac{1^2}{(n+1)(n+2)}R_1+\frac{2^2}{(n+1)(n+2)}R_2+\cdots+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}R_n\right|\leq\frac{1^2}{(n+1)(n+2)}|R_1|+\frac{2^2}{(n+1)(n+2)}|R_2|+\cdots\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}|R_n|$$

$$<\frac{1^2}{(n+1)(n+2)}\cdot K|z^1|+\frac{2^2}{(n+1)(n+2)}\cdot K|z^2|+\cdots+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}K|z^n|=$$

$$=K\frac{1^2|z^1|+2^2|z^2|+3^2|z^3|+\cdots+n^2|z^n|}{(n+1)(n+2)}\to 0 \text{ кад } n\to\infty \text{ за } |z|<1 \qquad (158)$$

Из (156) на основу (112),(118) и (158) следи

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{\binom{n-p+2}{2}}{\binom{n+2}{2}}R_p(\alpha,z)=\frac{2\alpha z-(2\alpha-1)z^2}{2(1-z)^2},\ |z|<1,\ |\alpha|<M \qquad (159)$$

Из (154) следи

$$\frac{{}^3p_n(\alpha,z)}{\binom{n+3}{3}}=\frac{1}{1-z}-\frac{z}{(1-z)^2\,\frac{n+3}{3}}+\frac{\binom{n+1}{1}z^2}{\binom{n+3}{3}(1-z)^3}-\frac{(1-z^{n+1})z^3}{(1-z)^4\binom{n+3}{3}}+\frac{3}{n+3}\sum_{p=0}^{n}\frac{\binom{n-p+2}{2}}{\binom{n+2}{2}}R_p(\alpha,z) \qquad (160)$$

а одавде због (159) добијамо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^3p_n(\alpha,z)}{\binom{n+3}{3}}=\frac{1}{1-z} \qquad (161)$$

уз услов $\qquad |z|<1,\ |\alpha|<M.$

Из (154) следи

$$\frac{p_n(\alpha,z)}{\binom{n+2}{2}}=\frac{n}{3(1-z)}+\left[\frac{3}{3(1-z)}-\frac{z}{(1-z)^2}\right]+\frac{\binom{n+1}{1}z^2}{\binom{n+2}{2}(1-z)^3}-\frac{(1-z^{n+1})z^3}{\binom{n+2}{2}(1-z)^4}+\sum_{p=0}^{n}\frac{\binom{n-p+2}{2}}{\binom{n+2}{2}}R_p(\alpha,z)$$

дакле

$$\frac{{}^3p_n(\alpha,z)}{\binom{n+2}{2}}\sim\frac{n}{3(1-z)} \text{ кад } n\to\infty \text{ за } |z|<1. \qquad (162)$$

Из (160) следи

$$\frac{{}^3p_n(\alpha,z)}{\left\{\frac{\binom{n+3}{3}}{1-z}\right\}} = 1 - \frac{z}{(1-z)\frac{n+3}{3}} + \frac{\binom{n+1}{1}z}{\binom{n+3}{3}(1-z)^2} - \frac{(1-z^{n+1})\,z^3}{(1-z)^3\binom{n+3}{3}} + \frac{3(1-z)}{n+3}\sum_{p=0}^{n}\frac{\binom{n-p+2}{2}}{\binom{n+2}{2}}R_p(\alpha,z),$$

стога је

$$ {}^3p_n(\alpha,z) \sim \frac{\binom{n+3}{3}}{1-z}\ \text{кад}\ n \to \infty,\ |z|<1,\ |\alpha|<M \qquad (163)$$

или

$$ {}^3p_n(\alpha,z) \sim \frac{n^3}{3!(1-z)}\ \text{кад}\ n \to \infty,\ |z|<1,\ |\alpha|<M. \qquad (164)$$

Асимптотска једнакост (164) добија се директно из (128) делењем са $\frac{n^3}{3!(1-z)}$ и граничном прелазом $n \to \infty$

Развој (121) за $k=3$ гласи

$$ {}_3(\alpha,X,z) = \frac{1}{(1-X)^3}\ \frac{e^{(1-X)\alpha z}}{1-Xe^{(1-X)z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^3p_n(\alpha,z)\right\}X^n,\ |X|<1, |z|<1,\ |\alpha|<M \qquad (165)$$

За овај ред је такође

$$\frac{{}^3p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^3p_n(\alpha,z)} \to 1\ \text{кад}\ n \to \infty \qquad (166)$$

уз услов $\quad |z|<1,\ |\alpha|<M;$

$$\frac{{}^3p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^3p_n(\alpha,z)} = \frac{{}^3p_n(\alpha,z)+{}^2p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^3p_n(\alpha,z)} = 1 + \frac{{}^2p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^3p_n(\alpha,z)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^2p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^3p_n(\alpha,z)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{{}^2p_{n+1}(\alpha,z)}{\binom{n+2}{2}}\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{{}^3p_n(\alpha,z)}{\binom{n+2}{2}}\right]};$$

гранична вредност бројитеља на основу (147) је $\frac{1}{1-z}$, а именитељ на основу (162) неограничено расте са n

Код функције

$$p_n(\alpha,z) = \frac{\binom{n+4}{4}}{1-z} - \frac{\binom{n+3}{3}z}{(1-z)^2} + \frac{\binom{n+2}{2}z^2}{(1-z)^3} - \frac{\binom{n+1}{1}z^3}{(1-z)^4} + \frac{(1-z^{n+1})z^4}{(1-z)^5} + \sum_{p=0}^{n}\binom{n-p+3}{3}R_p(\alpha,z) \qquad (164)$$

имаћемо у формули за количник $\frac{{}^4p_n(\alpha,z)}{\binom{n+3}{3}}$ овај израз

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{n-p+3}{3}}{\binom{n+3}{3}} R_p(\alpha,z) =$$

$$\sum_{p=0}^{n} \left\{1-\left(\frac{p}{n+1}+\frac{p}{n+2}+\frac{p}{n+3}\right)+\left[\frac{p^2}{(n+1)(n+2)}+\frac{p^2}{(n+1)(n+3)}+\frac{p^2}{(n+2)(n+3)}\right]-\frac{p^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\} R_p(\alpha,z) \qquad (168)$$

Ако у изразу (168) ставимо

$$\frac{p}{n+1}=\alpha_1, \qquad \frac{p}{n+2}=\alpha_2, \qquad \frac{p}{n+3}=\alpha_3 \qquad (169)$$

тада је

$$\frac{\binom{n-p+3}{3}}{\binom{n+3}{3}} = 1-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 ; \qquad (170)$$

видимо да се код функције $^4p_n(\alpha,z)$ појављују симетричне функције величина (169) алгебарске једначине трећег степена.
Због

$$n^k x^n \to 0 \quad kad \quad n \to \infty \quad za\ |x|<1$$

где је k ма који природан број, имамо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k x^1+2^k x^2+3^k x^3 \dots + n^k x^n}{n+1} = 0 \quad za\ |x|<1 \qquad (171)$$

Ако у имениоцу израза на левој страни формуле (171) додамо још произвољан коначан број фактора облика $(n+\nu)$, добивени низ ће тим пре тежити нули

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k x^1+2^k x^2+3^k x^3+\dots+n^k x^n}{\prod_{\nu=1}^{m}(n+\nu)} = 0 \quad za\ |x|<1 \qquad (172)$$

сто тако ако у имениоцу израза на левој страни формуле (171) додамо роизвољан број фактора који садржавају n а који су различити од блика $(n+\nu), \nu=1,2,\dots,m$, добивени низ ће такође бити нула-низ ви изрази који долазе у коефицијентима од $R_p(\alpha,z)$ у (168) нису риказани формулом (172), но слично формули (172) и будући да је $|R_p(\alpha,z)|<K|z^p|$ а $|z|<1$ и за ма који природан број p, видимо да сви чланови, осим рвог, у изразу (168) теже нули кад $n \to \infty$. Стога је

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{n-p+3}{3}}{\binom{n+3}{3}} R_p(\alpha,z) = \frac{2\alpha z-(2\alpha-1)z^2}{2(1-z)^2}, \ |z|<1, \ |\alpha|<M. \qquad (173)$$

Код функције ${}^{k}p_n(\alpha,z)$ имаћемо у формули за количник $\dfrac{{}^{k}p_n(\alpha,z)}{\binom{n+k-1}{k-1}}$ овај израз

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{n-p+k-1}{k-1}}{\binom{n+k-1}{k-1}} R_p(\alpha,z)\,; \tag{174}$$

количник $\dfrac{\binom{n-p+k-1}{k-1}}{\binom{n+k-1}{k-1}}$ може да се прикаже изразом аналогним изразу (170) у коме ће сада долазити симетричне функције величина $\dfrac{p}{n+i-1}$, $i=2,3,\dots k$ (175)

алгебарске једначине $(k-1)$ -ог степена, а с тим у вези закључивање аналогно као за (173) даје

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{n-p+k-1}{k-1}}{\binom{n+k-1}{k-1}} R_p(\alpha,z) = \frac{2\alpha z-(2\alpha-1)z^2}{2(1-z)^2}, \ |z|<1, |\alpha|<M \tag{176}$$

$k=1,2,3,\dots,m$

где је m произвољно велики број.
Због (176) добијамо из (129)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}^{k}p_n(\alpha,z)}{\binom{n+k}{k}} = \frac{1}{1-z}, \ k=0,1,2,\dots \tag{177}$$

уз услов $|z|<1$, $|\alpha|<M$;

$$\frac{{}^{k}p_n(\alpha,z)}{\binom{n+k-1}{k-1}} \sim \frac{n}{k(1-z)} \text{ kad } n\to\infty, |z|<1, |\alpha|<M; \tag{178}$$

$$ {}^{k}p_n(\alpha,z) \sim \frac{\binom{n+k}{k}}{1-z} \quad \text{kad } n\to\infty, |z|<1, |\alpha|<M. \tag{179}$$

или

$$ {}^{k}p_n(\alpha,z) \sim \frac{n^k}{k!\,(1-z)} \text{ kad } n\to\infty, |z|<1, |\alpha|<M \tag{180}$$

$$k=0,1,2,\dots$$

Ред (121) конвергира за $|X|<1$, $|z|<1$, $|\alpha|<M$
јер

$$\frac{{}^{k}p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{k}p_n(\alpha,z)} \to 1 \quad \text{kad } n\to\infty \tag{181}$$

уз услов

$$|z|<1, \quad |\alpha|<M$$

где је k ма како велик коначан број;на основу (177) и (178) је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}^{k-1}p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{k}p_{n}(\alpha,z)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{{}^{k-1}p_{n+1}(\alpha,z)}{\binom{n+k-1}{k-1}}\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{{}^{k}p_{n}(\alpha,z)}{\binom{n+k-1}{k-1}}\right]} = 0 \tag{182}$$

стога

$$\frac{{}^{k}p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{k}p_{n}(\alpha,z)} = \frac{{}^{k}p_{n}(\alpha,z)+{}^{k-1}p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{k}p_{n}(\alpha,z)} = 1+\frac{{}^{k-1}p_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{k}p_{n}(\alpha,z)} \to 1 \text{ кад } n\to\infty$$

на основу

$$ {}^{k+1}p_{n}(\alpha,z) = \sum_{\nu=0}^{n}\left\{{}^{k}p_{\nu}(\alpha,z)\right\},\ k=0,1,2,\ldots \tag{124}$$

и на основу

$$ {}^{k+1}B_{n}^{m}(\alpha) = \sum_{\nu=0}^{n}\left\{{}^{k}B_{\nu}^{m}(\alpha)\right\},\ k=0,1,2,\ldots \tag{181}$$

следи из развоја (47) развој функције ${}^{k}p_{n}(\alpha,z)$ по степенима од z

$${}^{k}p_{n}(\alpha,z) = {}^{k}B_{n}^{0}(\alpha) + {}^{k}B_{n}^{1}(\alpha)\frac{z^{1}}{1!}+\cdots+{}^{k}B_{n}^{k}(\alpha)\frac{z^{k}}{k!}+{}^{k}B_{n}^{k+1}(\alpha)\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}+\cdots$$

$$+{}^{k}B_{n}^{k+n}(\alpha)\frac{z^{k+n}}{(k+n)!}+{}^{k}B_{n}^{k+n+1}(\alpha)\frac{z^{k+n+1}}{(k+n+1)!}+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{m}}{m!}\left\{{}^{k}B_{n}^{m}(\alpha)\right\} \tag{183}$$

развоју (183),полиноми ${}^{k}B_{n}^{k}(\alpha), {}^{k}B_{n}^{k+1}(\alpha), \ldots, {}^{k}B_{n}^{k+n}(\alpha)$ сви су степена k ер им је разлика горњих индекса мања,највише једнака доњем индексу.

Ако у формули (124) развијемо функције ${}^{0}p_{n-i}(\alpha,z),\ i=0,1,2,\ldots n$ а начин (47),добијамо овај облик за полиноме ${}^{k+1}B_{n}^{m}(\alpha)$

$${}^{k+1}B_{n}^{m}(\alpha) = \sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k}\left\{{}^{0}B_{n-i}^{m}(\alpha)\right\} \tag{184}$$

а основу (121) и (183) имамо

$$\frac{1}{(1-X)^{k+1}}\cdot\frac{e^{(1-X)\alpha z}}{1-Xe^{(1-X)z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{k+1}p_{n}(\alpha,z)\right\}X^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}X^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{m}}{m!}\left\{{}^{k+1}B_{n}^{m}(\alpha)\right\} \tag{185}$$

одавде у вези са (184) добија се

$$\frac{1}{(1-X)^{k+1}}\cdot\frac{e^{(1-X)\alpha z}}{1-Xe^{(1-X)z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{X^n z^m}{m!}\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{i}\left\{{}^{0}B^{m}_{n-i}(\alpha)\right\}, \tag{186}$$

$$|X|<1,\ |z|<1,\ |\alpha|<M,\ k=-1,0,1,2,\ldots$$

Применићемо (177) на развој (183)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{k}p_n(\alpha,z)}{\binom{n+k}{k}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{{}^{k}B^{m}_{n}(\alpha)\right\}}{\binom{n+k}{k}},\ |z|<1,\ |\alpha|<M$$

па добијамо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{{}^{k}B^{m}_{n}(\alpha)\right\}}{\binom{n+k}{k}}=m! \tag{187}$$

Због $n\to\infty$ и (1o) може се формули (187) дати други облик. Према (1o) је

$${}^{k}B^{m}_{m-k}(\alpha)=(m-k)!\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{k-i}\mathfrak{S}^{m-k+i}_{m-k}\,\alpha^{k-i}$$

Када доњи индекс n у формули (187) пролази низ природних бројева, узеће вредност $(m-k)$ а затим ћемо следеће природне бројеве приказати у облику

$$n=m-k+p\ ,\ p=1,2,3,\ldots$$

$$n+k=m+p,\ m=\text{const}\ ,\ k=\text{const}\ ;\ n\to\infty\ ,\ p\to\infty\ ;$$

$${}^{k}B^{m}_{m-k+p}(\alpha)\equiv{}^{k}B^{m}_{m-k}(\alpha+p)=(m-k)!\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{k-i}\mathfrak{S}^{m-k+i}_{m-k}(\alpha+p)^{k-i}$$

$$\frac{{}^{k}B^{m}_{n}(\alpha)}{\binom{n+k}{k}}=\frac{{}^{k}B^{m}_{n-k+p}(\alpha)}{\binom{n+k}{k}}=\frac{{}^{k}B^{m}_{m-k}(\alpha+p)}{\binom{m+p}{k}}=\frac{(m-k)!\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{m}{k-i}\mathfrak{S}^{m-k+i}_{m-k}(\alpha+p)^{k-i}}{\left[\frac{(m+p)(m+p-1)\cdots(m+p-k+1)}{k!}\right]}$$

$$=k!\,(m-k)!\,\frac{\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{m}{k-i}\mathfrak{S}^{m-k+i}_{m-k}(\alpha+p)^{k-i}}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(m+p-i)}\ ,$$

$$\lim_{\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{m}{k-i}\mathfrak{S}^{m-k+i}_{m-k}(\alpha+p)^{k-i}}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(m+p-i)}=\frac{m!}{k!\,(m-k)!}$$

дакле

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{k-i} St_{m-k}^{m-k+i} (\alpha+p)^{k-i}}{\prod_{i=0}^{k-1} (m+p-i)} = \binom{m}{k} \qquad (188)$$

Извешћемо једно нарочито својство функција ${}^k p_n(\alpha,z)$, $k=0,1,2,\cdots$ и полинома ${}^k B_n^m(\alpha)$, $k=0,1,2,\cdots$

У једнакост

$$\varphi_0(\alpha,X,z) = \frac{e^{(1-X)\alpha z}}{1-Xe^{(1-X)z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^0 p_n(\alpha,z)\} X^n \qquad (189)$$

ставићемо $\alpha=1$ и $\alpha=0$

за $\alpha = 1$ имамо

$$\varphi_0(1,X,z) = \frac{e^{(1-X)z}}{1-Xe^{(1-X)z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^0 p_n(1,z)\} X^n; \qquad (190)$$

за $\alpha=0$ имамо

$$\varphi_0(0,X,z) = \frac{1}{1-Xe^{(1-X)z}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \{{}^0 p_n(0,z)\} X^n,$$

јер је

$${}^0 p_0(\alpha,z) = e^{\alpha z}, \text{ дакле } {}^0 p_0(0,z) = 1$$

Из (19o) због (189) добијамо

$$\frac{1}{1-Xe^{(1-X)z}} - 1 = \frac{1-1+Xe^{(1-X)z}}{1-Xe^{(1-X)z}} = \frac{Xe^{(1-X)z}}{1-Xe^{(1-X)z}} = \varphi(1,X,z)$$

дакле

$$\varphi_0(0,X;z) - 1 = X \cdot \varphi_0(1,X,z) \qquad (191)$$

Из развоја (189) добијамо

$$X \cdot \varphi_0(1,X,z) = \frac{Xe^{(1-X)z}}{1-Xe^{(1-X)z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \{{}^0 p_n(1,z)\} X^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \{{}^0 p_{n-1}(1,z)\} X^n \qquad (192)$$

Из развоја (19o) добијамо

$$\mathfrak{h}_0(0,X,z)-1=\frac{Xe^{(1-X)z}}{1-Xe^{(1-X)z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{{}^{\circ}p_n(0,z)\right\}X^n \tag{193}$$

Из (192) и (193) следи

$${}^{\circ}p_{n-1}(1,z)={}^{\circ}p_n(0,z)$$

или

$${}^{\circ}p_n(1,z)={}^{\circ}p_{n+1}(0,z) \tag{194}$$

На основу развоја (34) имамо

$${}^{\circ}p_n(1,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\left\{{}^{\circ}B_n^m(1)\right\} \tag{195}$$

и

$${}^{\circ}p_{n+1}(0,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\left\{{}^{\circ}B_{n+1}^m(0)\right\} \tag{196}$$

па **због** (194) следи из (195) и (196)

$${}^{\circ}B_n^m(1)={}^{\circ}B_{n+1}^m(0) \tag{197}$$

Из једнакости (191) добија се множењем са $\dfrac{1}{(1-X)^k}$

$$\frac{1}{(1-X)^k}\cdot\mathfrak{h}_0(0,X,z)-\frac{1}{(1-X)^k}=X\frac{1}{(1-X)^k}\cdot\mathfrak{h}_0(1,X,z)$$

или

$$\mathfrak{h}_k(0,X,z)-\frac{1}{(1-X)^k}=X\cdot\mathfrak{h}_k(1,X,z) \tag{198}$$

Из

$$\mathfrak{h}_k(0,X,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{k}p_n(0,z)\right\}X^n,\quad \frac{1}{(1-X)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}X^n$$

због

$${}^{k}p_0(\alpha,z)\equiv{}^{\circ}p_0(\alpha,z)=e^{\alpha z};\quad {}^{k}p_0(0,z)=e^0=1$$

следи

$$g_k(0,x,z) - \frac{1}{(1-x)^k} = {}^k p_0(0,z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ {}^k p_n(0,z) \right\} x^n - \binom{k-1}{0} - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ {}^k p_n(0,z) - \binom{n+k-1}{n} \right\} x^n \qquad (199)$$

Будући да је

$$x \cdot g_k(1,x,z) = x \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {}^k p_n(1,z) \right\} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {}^k p_n(1,z) \right\} x^{n+1} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ {}^k p_{n-1}(1,z) \right\} x^n$$

дакле

$$x \cdot g_k(1,x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ {}^k p_{n-1}(1,z) \right\} x^n \qquad (200)$$

то из (199) и (2оо) следи

$${}^k p_{n-1}(1,z) = {}^k p_n(0,z) - \binom{n+k-1}{n}$$

или, ако наместо n ставимо $(n+1)$

$${}^k p_n(1,z) = {}^k p_{n+1}(0,z) - \binom{n+k}{n+1} \qquad (201)$$

Према (183) биће

$${}^k p_n(1,z) = {}^k B_n^0(1) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \left\{ {}^k B_n^m(1) \right\} \qquad (202)$$

и

$${}^k p_{n+1}(0,z) = {}^k B_{n+1}^0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \left\{ {}^k B_{n+1}^m(0) \right\} \qquad (203)$$

Показаћемо да се константа $\binom{n+k}{n+1}$ у формули (2о1) односи на прве чланове у развојима (2о2) и (2о3)

$${}^k B_n^0(1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{-k}{i} (1+n-i)^0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (-1)^i \binom{i+k-1}{i} = \binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n}$$

$${}^k B_{n+1}^0(0) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{-k}{i} (0+\overline{n+1}-i)^0 = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (-1)^i \binom{i+k-1}{i} = \binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

Из $$\binom{n+k}{n} + \binom{n+k}{n+1} = \binom{n+k-1}{n+1}$$

следи

$$ {}^{k}B_{n}^{o}(1)+\binom{n+k}{n+1}={}^{k}B_{n+1}^{o}(0) $$

или

$$ {}^{k}B_{n}^{o}(1)={}^{k}B_{n+1}^{o}(0)-\binom{n+k}{n+1} \qquad (204) $$

Из (2o1),(2o2),(2o3) и (2o4) следи

$$ {}^{k}B_{n}^{m}(1)={}^{k}B_{n+1}^{m}(0) \qquad (205) $$

за

$$ m=1,2,3,\ldots $$

Из формуле (11) за $p=1$ следи

$$ {}^{k}B_{m-k+1}^{m}(\alpha)={}^{k}B_{m-k}^{m}(\alpha+1) $$

а одавде за $\alpha=0$ добија се

$$ {}^{k}B_{m-k}^{m}(1)={}^{k}B_{m-k+1}^{m}(0) \qquad (206) $$

Према дефиниционој формули (3) је

$$ {}^{p}B_{n-p+(k-1)}^{n}(\alpha+1)=\sum_{i=0}^{n-p+k-1}(-1)^{i}\binom{n-p}{i}(\overline{\alpha+1}+\overline{n-p+k-1}-i)^{n}\equiv\sum_{i=0}^{n-p}(-1)^{i}\binom{n-p}{i}(\alpha+n-p+k-i)^{n}, \qquad (207) $$

$$ {}^{p}B_{n-p+k}^{n}(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-p+k}(-1)^{i}\binom{n-p}{i}(\alpha+n-p+k-i)^{n}\equiv\sum_{i=0}^{n-p}(-1)^{i}\binom{n-p}{i}(\alpha+n-p+k-i)^{n} \qquad (208) $$

Из (2o7) и (2o8) следи

$$ {}^{p}B_{n-p+(k-1)}^{n}(\alpha+1)={}^{p}B_{n-p+k}^{n}(\alpha) \qquad (209) $$

а одавде за $\alpha=0$ следи

$$ {}^{p}B_{n-p+(k-1)}^{n}(1)={}^{p}B_{n-p+k}^{n}(0). \qquad (210) $$

5. ВИШИ ИЗВОДИ ФУНКЦИЈА ${}^{o}\wp_n(\alpha,z)$. ФУНКЦИЈА ГЕНЕРАТРИСА $\mathcal{G}_{-k}(\alpha,x,z)$ ФУНКЦИЈЕ . РЕДОВИ ПОТЕНЦИЈА ЧИЈИ СУ КОЕФИЦИЈЕНТИ ПОЛИНОМИ ${}^{k}A_n^m(\alpha)$. ЈЕДНО НАРОЧИТО СВОЈСТВО ФУНКЦИЈА ${}^{-k}\wp_n(\alpha,z)$ И ПОЛИНОМА ${}^{k}A_n^m(\alpha)$. ФУНКЦИОНАЛНА ЈЕДНАЧИНА ПОЛИНОМА ${}^{k}A_n^m(\alpha)$, $k=1,2,3\ldots$. РЕДОВИ ФУНКЦИЈА ${}^{k}\wp_n(\alpha,z)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Из (29) следи диференцирањем по α

$$\frac{(1-x)e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{{}^{o}\wp_n(\alpha,z)\right\}x^n \tag{211}$$

а множењем једнакости (29) са $(1-x)$ добили смо у (36) и (37)

$$\mathcal{G}_{-1}(\alpha,x,z) \equiv \frac{(1-x)e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{-1}\wp_n(\alpha,z)\right\}x^n,\quad |x|<1,\ |z|<1,\ |\alpha|<M; \tag{212}$$

стога је

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{{}^{o}\wp_n(\alpha,z)\right\} = z\left\{{}^{-1}\wp_n(\alpha,z)\right\} = z\left\{{}^{o}\wp_n(\alpha,z) - {}^{o}\wp_{n-1}(\alpha,z)\right\} \tag{213}$$

Из

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{-1}\wp_n(\alpha,z)\right\}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{o}\wp_n(\alpha,z)\right\}x^n - x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{o}\wp_{n-1}(\alpha,z)\right\}x^n$$

следи да ред (212) конвергира за $|x|<1$, $|z|<1$, $|\alpha|<M$, а на основу овога је

$$\frac{{}^{-1}\wp_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{-1}\wp_n(\alpha,z)} \to 1 \text{ kad } n\to\infty \tag{214}$$

уз услов

$$|z|<1,\ |\alpha|<M$$

Напоменимо да се гранична вредност (214) јавља у неодређеној форми $\frac{0}{0}$, јер је због (37) и (5о)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{-1}\wp_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{-1}\wp_n(\alpha,z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{{}^{o}\wp_{n+1}(\alpha,z)-{}^{o}\wp_n(\alpha,z)}{{}^{o}\wp_n(\alpha,z)-{}^{o}\wp_{n-1}(\alpha,z)} = \frac{\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-z}}{\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-z}}$$

Из (213) следи диференцирањем по α

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left\{{}^{\circ}p_n(\alpha,z)\right\} = z\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[{}^{\circ}p_n(\alpha,z)\right] - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[{}^{\circ}p_{n-1}(\alpha,z)\right]\right\}$$

а одавде на основу (213) следи

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left\{{}^{\circ}p_n(\alpha,z)\right\} = z^2\left\{{}^{\circ}p_n(\alpha,z) - 2\,{}^{\circ}p_{n-1}(\alpha,z) + {}^{\circ}p_{n-2}(\alpha,z)\right\}$$

Показаћемо индукцијом да вреди формула

$$\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}\left\{{}^{\circ}p_n(\alpha,z)\right\} = z^k \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\left\{{}^{\circ}p_{n-i}(\alpha,z)\right\}; \tag{215}$$

одавде се добија диференцирањем по α

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial\alpha^{k+1}}\left\{{}^{\circ}p_n(\alpha,z)\right\} = z^k \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{{}^{\circ}p_{n-i}(\alpha,z)\right\} = z^{k+1}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\left\{{}^{\circ}p_{n-i}(\alpha,z) - {}^{\circ}p_{n-1-i}(\alpha,z)\right\} =$$

$$z^{k+1}\left\{\binom{k}{0}\left[{}^{\circ}p_n(\alpha,z)\right] + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\left[\binom{k}{i-1}+\binom{k}{i}\right]\left[{}^{\circ}p_{n-i}(\alpha,z)\right] + (-1)^{k+1}\binom{k}{k}\left[{}^{\circ}p_{n-(k+1)}(\alpha,z)\right]\right\} =$$

$$k+1\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}\left\{{}^{\circ}p_{n-i}(\alpha,z)\right\}.$$

Из (212) следи диференцирањем по α

$$\frac{(1-x)^2 e^{(1-x)\alpha z}}{1-x\,e^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{{}^{-1}p_n(\alpha,z)\right\}x^n, \quad |x|<1,\ |z|<1,\ |\alpha|<M \tag{216}$$

а множењем истога развоја (212) са $(1-x)$ добија се

$$g_2(\alpha,x,z) \equiv \frac{(1-x)^2 e^{(1-x)\alpha z}}{1-x\,e^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{-1}p_n(\alpha,z) - {}^{-1}p_{n-1}(\alpha,z)\right\}x^n$$

или стављајући

$$-{}^{2}p_n(\alpha,z) = {}^{-1}p_n(\alpha,z) - {}^{-1}p_{n-1}(\alpha,z) \tag{217}$$

добијамо

$$\frac{(1-x)^2 e^{(1-x)}}{1-x\, e^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{-2}\wp_n(\alpha,z)\right\}x^n,\ |x|<1,\ |z|<1,\ |\alpha|<M. \tag{218}$$

Из

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{-2}\wp_n(\alpha,z)\right\}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{{}^{-1}\wp_n(\alpha,z)\right\}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{-1}\wp_n(\alpha,z)\right\}x^n$$

следи да ред (218) конвергира за $|x|<1,\ |z|<1,\ |\alpha|<M$,а на основу овога је

$$\frac{{}^{-2}\wp_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{-2}\wp_n(\alpha,z)} \longrightarrow 1 \text{ kad } n \longrightarrow \infty \tag{219}$$

уз услов

$$|z|<1,\quad |\alpha|<M$$

Из (217) и (37) следи

$${}^{-2}\wp_n(\alpha,z) = {}^{0}\wp_n(\alpha,z) - 2\,{}^{0}\wp_{n-1}(\alpha,z) + {}^{0}\wp_{n-2}(\alpha,z) \tag{220}$$

Напоменимо да се гранична вредност (219) јавља у неодређеној форми $\frac{0}{0}$, јер је због (22о) и (5о)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{-2}\wp_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{-2}\wp_n(\alpha,z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{{}^{0}\wp_{n+1}(\alpha,z) - 2\,{}^{0}\wp_n(\alpha,z) + {}^{0}\wp_{n-1}(\alpha,z)}{{}^{0}\wp_n(\alpha,z) - 2\,{}^{0}\wp_{n-1}(\alpha,z) + {}^{0}\wp_{n-2}(\alpha,x)} = \frac{2\left(\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-z}\right)}{2\left(\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-z}\right)}$$

Јасно је да се поступак добијања генератрисе $l_{3}(\alpha,x,z)$ и функција ${}^{-1}\wp_n(\alpha,z)$ може неограничено пута поновити.Тако добијамо

$$l_{3-k}(\alpha,x,z) = \frac{1}{(1-x)^{-k}}\cdot\frac{e^{(1-x)\alpha z}}{1-xe^{(1-x)z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{-k}\wp_n(\alpha,z)\right\}x^n,\ |x|<1,\ |z|<1,\ |\alpha|<M \tag{221}$$

где је

$${}^{-k}\wp_n(\alpha,z) = {}^{-(k-1)}\wp_n(\alpha,z) - {}^{-(k-1)}\wp_{n-1}(\alpha,z) \tag{222}$$

а одавде у вези са (37) следи

$${}^{-k}\wp_n(\alpha,z) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\left\{{}^{0}\wp_{n-i}(\alpha,z)\right\} \tag{223}$$

а ово унето у (215) даје

$$\frac{\partial^k}{\partial \alpha^k}\left\{{}^{0}\varphi_n(\alpha,z)\right\} = z^k\cdot\left\{{}^{-k}\varphi_n(\alpha,z)\right\}. \qquad (224)$$

Из

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{-k}\varphi_n(\alpha,z)\right\}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{-(k-1)}\varphi_n(\alpha,z)\right\}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{-(k-1)}\varphi_n(\alpha,z)\right\}x^n,\ k = 1,2,3\ldots$$

следи да ред (221) конвергира за $|x|<1,\ |z|<1,\ |\alpha|<M$,а на основу овога је

$$\frac{{}^{-k}\varphi_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{-k}\varphi_n(\alpha,z)} \longrightarrow 1 \text{ kad } n\to\infty \qquad (225)$$

Уз услов

$$|z|<1,\ |\alpha|<M.$$

Напоменимо да се гранична вредност (225) јавља у неодређеној форми $\frac{0}{0}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{-k}\varphi_{n+1}(\alpha,z)}{{}^{-k}\varphi_n(\alpha,z)} = \frac{z^{k-1}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-z}\right)}{z^{k-1}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-z}\right)} \qquad (226)$$

Коефицијенти z^{k-1} долазе од формуле (223),јер је

$$\lim_{n\to\infty}\left\{{}^{-k}\varphi_n(\alpha,z)\right\} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\lim_{n\to\infty}\left\{{}^{0}\varphi_{n-i}(\alpha,z)\right\} = \frac{1}{1-z}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i} = \frac{1}{1-z}\left(z^{k-1}-z^{k-1}\right),$$

дакле имамо и ову граничну вредност

$$\lim_{n\to\infty}\left\{{}^{-k}\varphi_n(\alpha,z)\right\} = 0 \qquad (227)$$

Уз услов

$$|z|<1,\quad |\alpha|<M$$

за

$$k = 1,2,3,\ldots$$

Наћинићемо развоје функција ${}^{-1}p_n(\alpha,z),{}^{-2}p_n(\alpha,z),{}^{-3}p_n(\alpha,z),\dots{}^{-k}p_n(\alpha,z)$

у ред по степенима од z
Развој (39) начинимо за функције ${}^{-1}p_n(\alpha,z)$ и ${}^{-2}p_n(\alpha,z)$; тада због (217) добијамо

$$
{}^{-2}p_n(\alpha,z)=-{}^{1}A^{n-1}_{n-1}(\alpha)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\left({}^{1}A^{n+k}_{n}(\alpha)-{}^{1}A^{n+k}_{n-1}(\alpha)\right)\frac{z^{n+k}}{(n+k)!}
\tag{228}
$$

Ако у формули (15) ставимо $(n-1)$ наместо n и $p=1$,добијамо

$$
-{}^{1}A^{n-1}_{n-1}(\alpha)={}^{2}A^{n-1}_{n}(\alpha)
\tag{229}
$$

Примењујући формулу (13) за $p=1$ и релацију (229) добијамо из (228)

$$
{}^{-2}p_n(\alpha,z)=\sum_{m=n-1}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\left\{{}^{2}A^{m}_{n}(\alpha)\right\},\quad n=0,1,2
\tag{230}
$$

Развој (230) начинићемо за функције ${}^{-2}p_n(\alpha,z)$ и ${}^{-2}p_{n-1}(\alpha,z)$ и применићемо формулу (222) за $k=3$;тако добијамо

$$
{}^{-3}p_n(\alpha,z)=-{}^{2}A^{n-2}_{n-1}(\alpha)\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}+\sum_{k=-1}^{\infty}\left({}^{2}A^{n+k}_{n}(\alpha)-{}^{2}A^{n+k}_{n-1}(\alpha)\right)\frac{z^{n+k}}{(n+k)!}
\tag{231}
$$

Ако у формули (15) ставимо $(n-2)$ наместо n и $p=2$ добијамо

$$
-{}^{2}A^{n-2}_{n-1}(\alpha)={}^{3}A^{n-2}_{n}(\alpha)
\tag{232}
$$

Примењујући формулу (13) за $p=2$ и релацију (232) добијамо из (231)

$$
{}^{-3}p_n(\alpha,z)=\sum_{m=n-2}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\left\{{}^{3}A^{m}_{n}(\alpha)\right\},\quad n=0,1,2,\dots
\tag{233}
$$

Из развоја̂ (39),(230) и (233) видимо да почетни сумациони индекс у тим развојима постаје за 1 мањи када апсолутна вредност левог индекса функције ${}^{-k}p_n(\alpha,z)$ постаје за 1 већа.Из поменутих развоја видимо да је

$$
{}^{-k}p_n(\alpha,z)=\sum_{m=n-k+1}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\left\{{}^{k}A^{m}_{n}(\alpha)\right\},\quad n=0,1,2,\dots,\ k=1,2,3\dots n+1
\tag{234}
$$

За $k=n$ имамо

$$^{-n}p_n(\alpha,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!}\left\{{}^nA_n^m(\alpha)\right\} \tag{235}$$

За $k = n+1$ имамо

$$^{-(n+1)}p_n(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}\left\{{}^{n+1}A_n^m(\alpha)\right\} \tag{236}$$

У развоју (234) за $k > n+1$ треба узети

$$^kA_n^m(\alpha) = 0 \tag{237}$$

где је m неки природан број.

Извешћемо једно нарочито својство функцијâ $^{-k}p_n(\alpha,z)$ и полиномâ $^kA_n^m(\alpha)$

Из једнакости (191) добија се множењем са $(1-X)^k$

$$(1-X)^k\, l_{j_0}(0,X,z) - (1-X)^k = X\cdot(1-X)^k\, l_{j_0}(1,X,z)$$

или $$l_{j_{-k}}(0,X,z) - (1-X)^k = X\cdot l_{j_{-k}}(1,X,z) \tag{238}$$

Будући да је $^{-k}p_0(\alpha,z) \equiv {}^0p_0(\alpha,z) = e^{\alpha z}$,дакле $^{-k}p_0(0,z) = 1$

то је

$$l_{j_{-k}}(0,X,z) - (1-X)^k = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{{}^{-k}p_n(\alpha,z)\right\}X^n - \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}X^i,$$

а како је $\binom{k}{k+p} = 0$ за $p = 1,2,3,\ldots$ то је формално $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}X^i = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{k}{n}X^n$,

стога је

$$l_{j_{-k}}(0,X,z) - (1-X)^k = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{{}^{-k}p_n(0,z) - (-1)^n\binom{k}{n}\right\}X^n. \tag{239}$$

је
$$x\cdot l_{s-k}(1,x,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{{}^{-k}p_{n-1}(\alpha,z)\right\}x^{n} \tag{240}$$

то из (239) и (240) следи
$$-{}^{k}p_{n-1}(1,z)={}^{-k}p_{n}(0,z)-(-1)^{n}\binom{k}{n}$$

о наместо n ставимо $(n+1)$
$$-{}^{k}p_{n}(1,z)={}^{-k}p_{n+1}(0,z)+(-1)^{n}\binom{k}{n+1} \tag{241}$$
$$n=0,1,2,\ldots,k-1\ ;\ k,k+1,\ldots\ldots$$

У формулу (241) ставиheмо $n=k+m,\ m=0,1,2,\ldots\ldots$
$$-{}^{k}p_{k+m}(1,z)={}^{-k}p_{k+m+1}(0,z)+(-1)^{k+m}\binom{k}{k+m+1}$$
$$-{}^{k}p_{k+m}(1,z)={}^{-k}p_{k+m+1}(0,z),\ m=0,1,2\ldots\ldots \tag{242}$$

Будуhи да је
$$-{}^{k}p_{k+m}(1,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{m}}{m!}\left\{{}^{1}A^{n}_{k+m}(1)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{m+n}}{(m+n)!}\left\{{}^{k}A^{m+n}_{k+m}(1)\right\}\ldots \tag{243}$$
$$-{}^{k}p_{k+m+1}(0,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}\left\{{}^{k}A^{n}_{k+m+1}(0)\right\}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{m+n}}{(m+n)!}\left\{{}^{k}A^{m+n}_{k+m+1}(0)\right\} \quad " \tag{244}$$

то из (243) и (244) следи на основу (242)
$${}^{k}A^{m+1}_{k+m}(1)\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}+{}^{k}A^{m+2}_{k+m}(1)\frac{z^{m+2}}{(m+2)!}+\cdots\equiv{}^{k}A^{m+2}_{k+m+1}(0)\frac{z^{m+2}}{(m+2)!}+{}^{k}A^{m+3}_{k+m+1}(0)\frac{z^{m+3}}{(m+3)!}+\cdots \tag{245}$$

Из (245) следи прво ${}^{k}A^{m+1}_{k+m}(1)\equiv 0$, $m=0,1,2,\ldots$

а то знаhи, да је $\alpha=1$ нула полинома ${}^{k}A^{m+1}_{k+m}(\alpha)\ m=0,1,2,\ldots$ (246)

друго

$$^{k}A^{m+n}_{k+m}(1) = {}^{k}A^{m+n}_{m+k+1}(0), \quad n=2,3,4,\ldots \quad m=0,1,2,\ldots \tag{247}$$

Формално, релацију (246) можемо написати у складу са релацијама (247) овако

$$^{k}A^{m+1}_{k+m}(1) = {}^{k}A^{m+1}_{k+m+1}(0) \equiv 0 \tag{246}$$

међутим, због (12) је стварно $^{k}A^{m+1}_{k+m+1}(0) \equiv 0$. Стога релација (247) вреди за за $n = 1,2,3,\ldots$, а како је због (12)

$$^{k}A^{m}_{k+m}(1) \equiv 0 \quad и \quad {}^{k}A^{m}_{m+k+1}(0) \equiv 0$$

та релација (247) вреди и за $n = 0$; дакле

$$^{k}A^{m+n}_{k+m}(1) = {}^{k}A^{m+n}_{m+n+1}(0), \quad n=0,1,2,\ldots \quad m=0,1,2 \tag{247$_1$}$$

Извешћемо функционалну једначину полинома $^{k}A^{m}_{n}(\alpha)$, $k=1,2,3,\ldots$

Диференцирањем функционалне једначине (58) добијамо

$$^{k}A^{n-1}_{k}(\alpha) = -{}^{2}A^{n-1}_{n-k}(1-\alpha) \tag{248}$$

$2+n-1 = n+1$, дакле $k = 0,1,2\ldots, n$

Ставићемо $n-1 = m$ па (248) гласи

$$^{2}A^{m}_{k}(\alpha) = -{}^{2}A^{m}_{m+1-k}(1-\alpha) \tag{249}$$

$$k = 0,1,2,\ldots\ldots m+1.$$

Једначина (58) диференцирана $(p-1)$ пута даје

$$^{p}A^{n-(p-1)}_{k}(\alpha) = (-1)^{p-1}\left\{{}^{p}A^{n-(p-1)}_{n\cdot k}(1-\alpha)\right\} \tag{250}$$

$$k = 0,1,2,\ldots\ldots, n$$

Ставићемо $n-p+1=m$, $n=m+p-1$,па (25o) гласи

$$ {}^{p}A_{k}^{m}(\alpha) = (-1)^{p-1}\left\{ {}^{p}A_{m+p-k-1}^{m}(1-\alpha) \right\} \tag{251}$$

$$k=0,1,2,\ldots\ldots m-p+1.$$

Из развоја (212) добија се за $X=1$ на основу (42)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{ {}^{-1}p_n(\alpha,z) \right\},\ |z|<1,\ |\alpha|<M \tag{252}$$

Показаћемо да ред функција (252) заиста конвергира уз услов $|z|<1$

И да му је збир $\frac{1}{1-z}$.Збир првих $(n+1)$ чланова реда (252) износи

$$\sum_{\nu=0}^{n}\left\{ {}^{-1}p_\nu(\alpha,z) \right\} = {}^{0}p_n(\alpha,z) \tag{253}$$

што се добија из (37).Из (253) на основу (5o) следи

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\left\{ {}^{-1}p_\nu(\alpha,z) \right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{ {}^{0}p_n(\alpha,z) \right\} = \frac{1}{1-z}$$

Из услов

$$|z|<1,\quad |\alpha|<M,$$

дакле

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{ {}^{-1}p_\nu(\alpha,z) \right\} = \frac{1}{1-z} \quad \text{за } |z|<1,\ |\alpha|<M \tag{254}$$

Редови функција ${}^{-k}p_n(\alpha,z)$ такође конвергирају,дакле редови

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{ {}^{-k}p_n(\alpha,z) \right\} = \quad k=2,3,4,\ldots \tag{255}$$

такође конвергирају за $|z|<1$ и сума им је нула

Како је на основу (222)

$$\sum_{\nu=0}^{n}\left\{{}^{-k}p_\nu(\alpha,z)\right\}={}^{-(k-1)}p_n(\alpha,z) \tag{256}$$

то је на основу (227)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{{}^{-k}p_\nu(\alpha,z)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{{}^{-(k-1)}p_n(\alpha,z)\right\}=0,\ k=2,3,4,\dots \tag{257}$$

дакле

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{-k}p_n(\alpha,z)\right\}=0,\ |z|<1,\ |\alpha|<M,\ k=2,3,4\dots \tag{258}$$

На основу (258) и (5о) добија се

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\{{}^{-(k+1)}p_n(\alpha,z)\right\}=-\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\left\{{}^{0}p_{m-i}(\alpha,z)\right\}=0 \text{ за } |z|<1 \tag{259}$$

Редови функција ${}^{k}p_n(\alpha,z)$,дакле редови

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{k}p_n(\alpha,z)\right\},\ k=0,1,2,\dots \tag{260}$$

дивергирају за $|z|<1$ и сума им је $(+\infty)$

На основу (18о) и (122) добијамо

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\left\{{}^{k}p_\nu(\alpha,z)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{{}^{k+1}p_n(\alpha,z)\right\}=+\infty,\ |z|<1,\ |\alpha|<M,\ k=0,1,2,\dots \tag{261}$$

дакле

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{}^{k}p_n(\alpha,z)\right\}=+\infty \text{ за } |z|<1,\ |\alpha|<M,\ k=0,1,2,\dots \tag{262}$$

6.ПОЛИНОМИ ${}^{k}B_n^m(\alpha)$, $k=0,-1,-2,\dots$ КАО ФУРИЕ-ОВИ ИНТЕГРАЛИ.ОСНОВНИ ИНТЕГРАЛИ.ИЗРАЧУНАВАЊЕ ОСТАЛИХ ИНТЕГРАЛА ОВЕ КЛАСЕ ИЗ ОСНОВНИХ.

На основу својства (197) узећемо на сваку јединицу апсцисне осе у размаку $0\le x\le n$ по један лук парабола

$$y={}^{0}B_k^n(x-k),\ k\le x\le k+1,\ k=0,1,2,\dots,n-1 \tag{263}$$

два суседна лука (263)

$$y = {}^{\circ}B^{n}_{k-1}(x-(k-1)),\ k-1 \le x \le k \quad и \quad y = {}^{\circ}B^{n}_{k}(x-k),\ k \le x \le k+1 \tag{264}$$

имају исту ординату у тачки са апсцисом $x = k$,јер је

$${}^{\circ}B^{n}_{k-1}(k-(k-1)) = {}^{\circ}B^{n}_{k-1}(1) = {}^{\circ}B^{n}_{k}(0),\quad {}^{\circ}B^{n}_{k}(k-k) = {}^{\circ}B^{n}_{k}(0).$$

Луци параболе (263) чине непрекидну криву у интервалу $0 \le x \le n$.
Криву (263) помакнуһемо у лево дуж осе X за n јединица;тако добијамо

$$y = {}^{\circ}B^{n}_{k}(x+n-k),\ k \le x+n \le k+1,\ k = 0,1,2,\dots,n-1 \tag{265}$$

Луке (265) обрнуһемо око осе Y за 180° ;тако добијамо

$$y = {}^{\circ}B^{n}_{k}(-x+n-k),\ k \le x \le k+1,\ k = 0,1,2,\dots,n-1 \tag{266}$$

Луци (265) и (266) приказаһемо са функцијом

$$y = {}^{\circ}B^{n}_{-|x|+n} = \sum_{\nu=0}^{[-|x|+n]} (-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}(-|x|+n-\nu)^{n},\ -n \le x \le +n. \tag{267}$$

На пр.за $k-1 < x \le k$ је $-k \le -|x| < -(k-1),\ n-k \le -|x|+n < n-k+1$

$${}^{\circ}B^{n}_{n-k} \le (-|x|+k) < n-k+1 = \sum_{\nu=0}^{n-k} (-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}(-|x|+n-\nu)^{n}; \tag{268}$$

Како је $${}^{\circ}B^{n}_{n-k}(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{i}\binom{n}{i}(\alpha+n-k-i)^{n} \tag{269}$$

то из (268) и (269) следи $\alpha = -|x|+k$,дакле функција (267) за $k-1 < x \le k$ одређује полином ${}^{\circ}B^{n}_{n-k}(-|x|+k),\ k = 1,2,3,\dots n$

Израчунаћемо унутрашњи интеграл за Фурие-ов интеграл функције (267)

$$\int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n}\, e^{2itu}\, du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} {}^\circ B^n_{n(k+1)}(-u+k+1)\, e^{2itu}\, du, \quad i=\sqrt{-1} \tag{270}$$

У интегралу (27o) извршићемо смену $-u+k+1 = \xi$; тада је

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} {}^\circ B^n_{n-(k+1)}(-u+k+1)\, e^{2itu}\, du =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 {}^\circ B^n_{n-(k+1)}(\xi)\, e^{2it(k+1-\xi)}\, d\xi = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{2it})^{k+1} \int_0^1 {}^\circ B^n_{n-(k+1)}(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi . \tag{271}$$

Ставимо $k+1 = \nu$,па (271) постаје

$$\int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n}\, e^{2itu}\, du = \sum_{\nu=1}^{n} (e^{2it})^{\nu} \int_0^1 {}^\circ B^n_{n-\nu}(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi . \tag{272}$$

У (272) уводимо израз

$${}^\circ B^n_{n-\nu}(\xi) = \sum_{i=0}^{n-\nu} (-1)^i \binom{n}{i} (\xi+n-\nu-i)^n \tag{273}$$

дакле

$$\int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n}\, e^{2itu}\, du = \sum_{\nu=1}^{n} \int_0^1 (e^{2it})^{\nu} \sum_{i=0}^{n-\nu} (-1)^i \binom{n}{i} (\xi+n-\nu-i)^n e^{-2it\xi}\, d\xi \tag{274}$$

У (274) извршићемо множења полинома ${}^\circ B^n_{n-\nu}(\xi),\ \nu=1,2,3,\dots n$ са $(e^{2it})^{\nu}$ и добићемо

$$\int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n}\, e^{2itu}\, du = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-(k+1)} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} (e^{2it})^{n-k-\nu} \int_0^1 (\xi+k)^n e^{-2it\xi}\, d\xi \tag{275}$$

У интегралима

$$\int_0^1 (\xi+k)^n e^{-2it\xi}\, d\xi , \quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

извршићемо смену $\xi+k = \alpha$

$$\int_0^1 (\xi+k)^n e^{-2it\xi}\, d\xi = (e^{2it})^k \int_k^{k+1} \alpha^n e^{-2it\alpha}\, d\alpha ;$$

стога сума (275) постаје

$$\int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n} e^{2itu} du = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-(k+1)} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (e^{2it})^{n-\nu} \int_k^{k+1} \alpha^n e^{-2it\alpha} d\alpha . \qquad (276)$$

Развијањем суме по индексима k и ν добијамо изразе облика

$$(-1)^k \binom{n}{k} (e^{2it})^{n-k} \int_0^{n-k} \alpha^n e^{-2it\alpha} d\alpha , \; k = 0,1,2,\ldots,n$$

које треба сабрати; дакле

$$\int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n} e^{2itu} du = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (e^{2it})^{n-k} \int_0^{n-k} \alpha^n e^{-2it\alpha} d\alpha \qquad (277)$$

Применом формуле

$$\int_0^\lambda \alpha^n e^{-2it\alpha} d\alpha = \frac{e^{-2it\lambda}}{(-2it)} \sum_{k=0}^{n} \frac{k!\binom{n}{k}}{(2it)^k} \lambda^{n-k} - \frac{n!\binom{n}{n}}{(-2it)} \cdot \frac{1}{(2it)^n} \cdot \lambda = 1,2,3,\ldots n$$

на израз (277) добија се

$$\int_0^n {}^\circ B^n_{-|u|+n} e^{2itu} du =$$

$$= \frac{1}{(-2it)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \nu! \binom{n}{\nu} \left(\frac{1}{2it}\right)^\nu D^{n-\nu}_n(0) + n! \binom{n}{n} \left(\frac{1}{2it}\right)^n \left[D^0_n(0) - (-1)^n \binom{n}{n} \right] - \right.$$

$$\left. - n! \binom{n}{n} \left(\frac{1}{2it}\right)^n \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (e^{2it})^{n-\nu} \right\} \qquad (278)$$

Како је $D^n_n(0) = n!$, $D^{n-\nu}_n(0) = 0$ за $\nu = 1,2,3,\ldots n-1$ и $D^0_n(0) - (-1)^n \binom{n}{n} = (-1)^{n+1}$, то је

$$\int_0^n {}^\circ B^n_{-(u)+n} e^{2itu} du = \frac{1}{(-2it)} \left\{ n! + (-1)^{n+1} \frac{n!}{(2it)^n} - \frac{n!}{(2it)^n} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (e^{2it})^{n-\nu} \right\}$$

дакле

$$\int_0^n {}^\circ B^n_{-(u)+n} e^{2itu} du = \frac{n!}{(-2it)} \left\{ 1 - \frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^n} \right\} . \qquad (279)$$

Израчунаћемо реални и имагинарни део израза (279). У једнакост

$$(e^{2it}-1)^n = (e^{it} - e^{-it})^n (e^{it})^n = (2i\sin t)^n \left[\cos(nt) + i \sin(nt) \right] \qquad (280)$$

ставићемо $n = 1+4m,\ 2+4m,\ 3+4m,\ 4+4m\ ,\ m = 0,1,2,\cdots\ ;$ (281)

добија се (282)

$$(e^{2it}-1)^{1+4m} = i\cdot 2^{1+4m}\sin^{1+4m}t\cos(1+4m)t - 2^{1+4m}\sin^{1+4m}t\sin(1+4m)t$$

$$(e^{2it}-1)^{2+4m} = -2^{2+4m}\sin^{2+4m}t\cos(2+4m)t - i\cdot 2^{2+4m}\sin^{2+4m}t\sin(2+4m)t \tag{283}$$

$$(e^{2it}-1)^{3+4m} = -i\cdot 2^{3+4m}\sin^{3+4m}t\cos(3+4m)t + 2^{3+4m}\sin^{3+4m}t\sin(3+4m)t \tag{284}$$

$$(e^{2it}-1)^{4+4m} = 2^{4+4m}\sin^{4+4m}t\cos(4+4m)t + i\cdot 2^{4+4m}\sin^{4+4m}t\sin(4+4m)t \tag{285}$$

Стављајући бројеве (281) у израз (279) добијамо у сва четири случаја резултате једнако грађене а у којима наместо n стоје бројеви (281); стога је за сваки природан број

$$R\left\{\frac{n!}{-(-2it)}\left[1-\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^n}\right]\right\} = n!\,\frac{\sin(nt)\sin^n t}{2t^{n+1}}\ , \tag{286}$$

$$J\left\{\frac{n!}{(-2it)}\left[1-\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^n}\right]\right\} = n!\left(\frac{1}{2t}-\frac{\cos(nt)\sin^n t}{2t^{n+1}}\right). \tag{287}$$

Из Фурие-ова интеграла

$$\int_0^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\left[\alpha(u-x)\right]du = \pi f(x)$$

произлази за парну функцију

$$\pi f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}A(2t)\cos(2xt)\,dt \tag{288}$$

$$A(2t) = \int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos(2tu)\,du\ , \tag{289}$$

а за непарну функцију

$$\pi f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}B(2t)\sin(2xt).\,dt \tag{290}$$

$$B(2t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin(2ut)\,du \tag{291}$$

На основу (286) је

$$\int_{-n}^{+n} {}^{\circ}B^{n}_{-|u|+n} \cos(2tu)\,du = n!\,\frac{\sin(nt)\sin^{n}t}{t^{n+1}} \tag{292}$$

а на основу овога и (288) добијамо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nt)\sin^{n}t}{t^{n+1}} \cos(2xt)\,dt = \frac{\pi}{n!}\left\{{}^{\circ}B^{n}_{\nu}(-x+n-\nu)\right\}$$

$$n-\nu-1 \leq x \leq n-\nu \quad , \quad n=1,2,3,\dots \quad , \quad \nu=0,1,2,\dots,n-1 \tag{293}$$

$$-(n-\nu) \leq x \leq -(n-\nu-1)$$

Дефинишимо непарну функцију овако

$$ {}^{\circ}b^{n}_{-|x|+n} = {}^{\circ}B^{n}_{-|x|+n} \quad за\ -n \leq x \leq 0 \tag{294}$$

$$ {}^{\circ}b^{n}_{-|x|+n} = -{}^{\circ}B^{n}_{-|x|+n} \quad за \leq x \leq n. \tag{295}$$

За $\quad 0 \leq x \leq n \quad$ је на основу (287) и због (295)

$$\int_{0}^{+n} {}^{\circ}b^{n}_{-|u|+n} \sin(2tu)\,du = -\int_{0}^{+n} {}^{\circ}B^{n}_{-|u|+n} \sin(2tu)\,du = n!\left(\frac{\cos(nt)\sin^{n}t}{2t^{n+1}} - \frac{1}{2t}\right) \tag{296}$$

Будући да је подинтегрална функција ${}^{\circ}B^{n}_{-|u|+n}\sin(2tu$ непарна, то је

$$\int_{-n}^{0} {}^{\circ}B^{n}_{-(u)+n} \sin(2tu)\,du = -\int_{0}^{+n} {}^{\circ}B^{n}_{-|u|+n} \sin(2tu)\,du = n!\left(\frac{\cos(nt)\sin nt}{2t^{n+1}} - \frac{1}{2t}\right) \tag{297}$$

Из (296) и (297) због (294) следи

$$\int_{-n}^{+n} {}^{\circ}b^{n}_{-|u|+n} \sin(2tu)\,du = n!\left(\frac{\cos(nt)\sin^{n}t}{t^{n+1}} - \frac{1}{t}\right) \tag{298}$$

За $0 < x \leq n$ следи из (298) због (295) а на основу (29o)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\cos(nt)\sin^{n}t}{t^{n+1}}-\frac{1}{t}\right)\sin(2xt)\,dt=\frac{\pi}{n!}\left\{-{}^{\circ}B^{n}_{-|x|+n}\right\}; \tag{299}$$

лева страна има вредност нулу за $x=0$. Из $\displaystyle {}^{\circ}B^{n}_{-|x|+n}=\sum_{\nu=0}^{[-|x|+n]}(-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}(-|x|+n-\nu)^{n}$ за $x=0$

следи

$$ {}^{\circ}B^{n}_{0+n}={}^{\circ}B^{n}_{n}(0)=n!\ ;$$

десна страна у (299) за $x=0$ има вредност

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n!}\left\{{}^{\circ}b^{n}_{-|-0|+n}+{}^{\circ}b^{n}_{-|+0|+n}\right\}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n!}\left\{{}^{\circ}B^{n}_{0+n}-{}^{\circ}B^{n}_{0+n}\right\}=0\ ;$$

интеграл (299) за $x=0$ има вредност нулу.
Из (299) следи

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(nt)\sin^{n}t}{t^{n+1}}\sin(2xt)\,dt=\pi-\frac{\pi}{n!}\left\{{}^{\circ}B^{n}_{\nu}(-|x|+n-\nu)\right\} \tag{300}$$

$$n-\nu-1\leq x\leq n-\nu,\ n=1,2,3,\ldots,\ \nu=0,1,2,\ldots,n-1.$$

За $\nu=n-1$ је $0\leq x\leq 1$, дакле за $x=0$ имамо ${}^{\circ}B^{n}_{n-1}(0+n-(n-1))={}^{\circ}B^{n}_{n}(0)=n!$;

стога десна страна интеграла (3oo) за $x=0$ има вредност $\pi-\frac{\pi}{n!}\,n!=0$

Дакле (3oo) вреди и за $x=0$.

Из низа полинома (266) добија се диференцирањем, изостављајући фактор $(-n)$, овај низ

$$y={}^{1}A^{n-1}_{k}(-x+n-k),\ k\leq x\leq k+1,\ k=0,1,2,\ldots,n-1 \tag{301}$$

Луци (3o1) чине непрекидну криву у интегралу $0\leq x\leq n$ на основу својства (247). Луци (3o1) приказани су функцијом

$$y={}^{1}A^{n-1}_{-|x|+n}=\sum_{\nu=0}^{[-|x|+n]}(-1)^{\nu}(-|x|+n-\nu)^{n-1},\ -n\leq x\leq +n. \tag{302}$$

Функција (3o2) је парна функција. Из ове функције добићемо непарну

$y = {}^1 a^{n-1}_{-|x|+n}$ обртањем једне њене гране за $180°$ око осе X

Диференцирањем p пута низа полинома (266), изостављајући факторе који настају при диференцирању, добијамо ове низове

$$y = {}^p A^{n-p}_k(-|x|+n-k), \; k \le x \le k+1, \; k=0,1,2,\dots,n-1; \; p=1,2,3,\dots n \qquad (303)$$

Луци (3o3) чине непрекидну кривуљ у интервалу $0 \le x \le n$ на основу својства (247). Луци (3o3) приказани су функцијом

$$y = {}^p A^{n-p}_{-|x|+n} = \sum_{\nu=0}^{[-|x|+n]} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (-|x|+n-\nu)^{n-p}, \; p=1,2,3,\dots n; \; -n \le x \le +n \qquad (304)$$

Функција (3o4) је парна функција. Из ове функције добићемо непарну

$y = {}^p a^{n-p}_{-|x|+n}$ обртањем једне њене гране за $180°$ око осе X.

Израчунаћемо интеграл

$$\int_0^n {}^1 A^{n-1}_{-|u|+n} e^{2itu} du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} {}^1 A^{n-1}_{n-(k+1)}(-u+k+1) e^{2itu} du, \; i=\sqrt{-1} \qquad (305)$$

Трансформацијом променљиве $-u+k+1 = \xi$ и сменом индекса $k+1=\nu$ добијамо из (3o5)

$$\int_0^n {}^1 A^{n-1}_{-|u|+n} e^{2itu} du = \sum_{\nu=1}^{n} (e^{2it})^\nu \int_0^1 {}^1 A^{n-1}_{n-\nu}(\xi) e^{-2it\xi} d\xi \qquad (306)$$

Применом формуле ${}^1 A^{n-1}_\nu(\alpha) = {}^0 B^{n-1}_{\nu}(\alpha) - {}^0 B^{n-1}_{\nu-1}(\alpha)$ на (3o6) добија се

$$\int_0^n {}^1 A^{n-1}_{-|u|+n} e^{2itu} du = e^{2it} \int_0^1 {}^0 B^{n-1}_{n-1}(\xi) e^{-2it} \int_0^{n-1} {}^0 B^{n-1}_{-|u|+(n-1)} e^{2itu} du - \int_0^{n-1} {}^0 B^{n-1}_{-|u|+|n-1|} e^{2itu} du, \qquad (307)$$

а одавде применом интеграла (279) добијамо

$$\int_0^n {}^1 A^{n-1}_{-|u|+n} e^{2itu} du = (n-1)! \, \frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^n}, \; n=1,2,3,\dots \qquad (308)$$

Израчунаћемо интеграл

$$\int_0^n {}^{p+1} A^{n-(p+1)}_{-|u|+n} e^{2itu} du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} {}^{p+1} A^{n-(p+1)}_{n-(k+1)}(-u+k+1) e^{2itu} du, \; i=\sqrt{-1} \qquad (309)$$

Трансформацијом променљиве $-u+k+1=\xi$ и сменом индекса $k+1=\nu$ добијамо

$$\int_0^n {}^{p+1}A^{n-(p+1)}_{-|u|+n}\, e^{2itu}\, du = \sum_{\nu=1}^{n} (e^{2it})^{\nu} \int_0^1 {}^{p+1}A^{n-(p+1)}_{n-\nu}(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} (e^{2it})^{\nu} \int_0^1 \left[{}^{p}A^{n-(p+1)}_{n-\nu}(\xi) - {}^{p}A^{n-(p+1)}_{n-\nu-1}(\xi) \right] e^{-2it\xi}\, d\xi \; ; \quad (310)$$

прва сума даје

$$\sum_{\nu=1}^{n} (e^{2it})^{\nu} \int_0^1 {}^{p}A^{n-(p+1)}_{n-\nu}(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi =$$

$$= (e^{2it})^{1} \int_0^1 {}^{p}A^{(n-1)-p}_{n-1}(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi + \dots + (e^{2it})^{n} \int_0^1 {}^{p}A^{(n-1)-p}_{0}(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi =$$

$$= e^{2it} \left[e^{2it} \int_0^1 {}^{p}A^{(n-1)-p}_{(n-1)-1}(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi + \dots + (e^{2it})^{n-1} \int_0^1 {}^{p}A^{(n-1)-p}_{(n-1)-(n-1)}(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi \right] =$$

$$= e^{2it} \int_0^{n-1} {}^{p}A^{(n-1)-p}_{-|u|+(n-1)}\, e^{2itu}\, du \; ; \quad (311)$$

друга сума даје $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} (e^{2it})^{\nu} \int_0^1 {}^{p}A^{(n-1)-p}_{n-\nu-1}(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi =$

$$= (e^{2it})^{1} \int_0^1 {}^{p}A^{(n-1)-p}_{n-2}(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi + \dots + (e^{2it})^{n-1} \int_0^1 {}^{p}A^{(n-1)-p}_{n-(n-1)-1}(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi + (e^{2it})^{n} \int_0^1 {}^{p}A^{(n-1)-p}_{n-n-1}(\xi)\, e^{-2it\xi}\, d\xi$$

$$= \int_0^{n-1} {}^{p}A^{(n-1)-p}_{-|u|+(n-1)}\, e^{2itu}\, du \; ; \quad (312)$$

стога је

$$\int_0^{n} {}^{p+1}A^{n-(p+1)}_{-|u|+n} e^{2itu} du = (e^{2it}-1)\int_0^{n-1} {}^{p}A^{(n-1)-p}_{-|u|+(n-1)} e^{2itu} du \tag{313}$$

Формула (313) је рекурентна формула у односу на p .Стављајући у интеграл (308) $(n-1)$ наместо n добијамо сукцесивно помоћу формуле (313)

$$\int_0^{n} {}^{2}A^{n-2}_{-|u|+n} e^{2itu} du = (n-2)!\ \frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-1}},\ n=2,3,4,\dots \tag{314}$$

$$\int_0^{n} {}^{3}A^{n-3}_{-|u|+n} e^{2itu} du = (n-3)!\ \frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-2}},\ n=3,4,5,\dots \tag{315}$$

$$\int_0^{n} {}^{4}A^{n-4}_{-|u|+n} e^{2itu} du = (n-4)!\ \frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-3}},\ n=4,5,6,\dots \tag{316}$$

и уопште

$$\int_0^{n} {}^{h+1+4k}A^{n-(h+1+4k)}_{-|u|+n} e^{2itu} du = \left[n-(h+1+4k)\right]!\ \frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-h-4k}} \tag{317}$$

$$h=0,1,2,3;\quad n=h+1+4k+\nu,\quad \nu=0,1,2,\dots$$

с тим да у вези са функцијом (304) мора бити $h+1+4k\le n$ то јест $k=0,1,2,\dots\left[\frac{n-h-1}{4}\right]$ Интеграли (308),(314),(315) и (316) потребни су нам ради одређивања реалног и имагинарног дела интеграла (317).Реални и имагинарни делови поменутих интеграла добијају се помоћу формула (282) до (285);

$$R\left\{(n-1)!\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^n}\right\} = (n-1)!\ \frac{\cos(nt)\sin^n t}{t^n} \tag{318}$$

$$J\left\{(n-1)!\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^n}\right\} = (n-1)!\ \frac{\sin(nt)\sin^n t}{t^n} \tag{319}$$

$$R\left\{(n-2)!\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-1}}\right\} = (n-2)!\ \frac{2\sin(nt)\sin^n t}{t^{n-1}} \tag{320}$$

$$J\left\{(n-2)!\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-1}}\right\} = (n-2)!\ \frac{2\cos(nt)\sin^n t}{t^{n-1}} \tag{321}$$

$$R\left\{(n-3)!\frac{(e^{2it}-1)^n}{\dots}\right\} = (n-3)!\ \frac{2^2\cos(nt)\sin^n t}{\dots}$$

Реални и имагинарни делови од $\frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-h-4k}}$ добиће се, дакле да се изрази (318) до (325) помноже са 2^{4k} а у имenитeљима ће стајати t^{n-h-4k} у (317) узећемо $h=2q-1, q=1,2,3,\dots$; тада је $h+1+4k=2q+4k$; ставићемо $2p=2q+4k$ и тада је $h+4k=2q-1+4k=2p-1$ па (317) изгледа овако

$$\int_0^n {}^{2p}A^{n-2p}_{-|u|+n} e^{2itu} du = (n-2p)! \frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-(2p-1)}} ; \tag{328}$$

стога је за парну функцију $y={}^{2p}A^{n-2p}_{-|u|+n}$ на основу (320), (324) и (326) за $h=1,3$

$$\int_{-n}^{+n} {}^{2p}A^{n-2p}_{-|u|+n} \cos(2tu)\, du = (n-2p)!(-1)^p 2^{2p} \frac{\sin(nt)\sin^n t}{t^{n-(2p-1)}} ; \tag{329}$$

дакле
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nt)\sin^n t}{t^{n-(2p-1)}} \cos(2xt)\, dt = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \frac{\pi}{(n-2p)!} \left\{ {}^{2p}A^{n-2p}_{\nu} (-|x|+n-\nu) \right\} \tag{330}$$

$n-\nu-1 \le x \le n-\nu$, $n=2,3,4,\dots$; $2 \le 2p \le n$, $p=1,2,3,\dots\left[\frac{n}{2}\right]$.
$-(n-\nu) \le x \le -(n-\nu-1)$, $\nu=0,1,2\dots,n-1$

За непарну функцију $y={}^{2p}a^{n-2p}_{-|u|+n}$ на основу (321), (325) и (327) за $h=1,3$

добија се

$$\int_{-n}^{+n} {}^{2p}a^{n-2p}_{-|u|+n} \sin(2tu)\, du = (n-2p)!(-1)^p 2^{2p} \frac{\cos(nt)\sin^n t}{t^{n-(2p-1)}} , \tag{331}$$

дакле
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nt)\sin^n t}{t^{n-(2p-1)}} \sin(2xt)\, dt = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \frac{\pi}{(n-2p)!} \left\{ {}^{2p}A^{n-2p}_{\nu} (-|x|+n-\nu) \right\} \tag{332}$$

$n-\nu-1 \le x \le n-\nu$; $n=2,3,4\dots$; $2 \le 2p \le n$, $p=1,2,3,\dots\left[\frac{n}{2}\right]$
$\nu=0,1,2,\dots n-1$

У (317) узећемо $h=2q$, $q=1,2,3,\dots$; тада је $h+1+4k=(2q+4k)+1=2p+1$, $h+4k=2p$

па (317) овако изгледа

$$\int_0^n {}^{2p+1}A^{n-(2p+1)}_{-|u|+n} e^{2itu} du = (n-2p-1)! \frac{(e^{2it}-1)^n}{(2it)^{n-2p}} ; \tag{333}$$

стога је за парну функцију $y={}^{2p+1}A^{n(2p+1)}_{-|u|+n}$ на основу (318), (322) и (326) за $h=0,2$

$$\int_{-n}^{+n} {}^{2p+1}A^{n-(2p+1)}_{-|u|+n} \cos(2tu)\,du = (n-2p-1)!\,(-1)^p\, 2^{2p+1} \frac{\cos(nt)\sin^n t}{t^{n-2p}}, \tag{334}$$

дакле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nt)\sin^n t}{t^{n-2p}} \cos(2xt)\,dt = \frac{(-1)^p}{2^{2p+1}}\,\frac{\pi}{(n-2p-1)!}\left\{ {}^{2p+1}A^{n-(2p+1)}_{\nu\ (-|x|+n-\nu)}\right\} \tag{335}$$

$$n-\nu-1 \le x \le n-\nu, \quad n = 1,2,3,\dots \quad ; \ 1 \le 2p+1 \le n;\ p = 0,1,2,\dots\left[\frac{n-1}{2}\right]$$
$$-(n-\nu) \le x \le -(n-\nu-1) \quad \nu = 0,1,2,\dots n-1$$

За непарну функцију $y = {}^{2p+1}a^{n-(2p+1)}_{-|u|+n}$ на основу (319),(323) и (327) за $h = 0,2$ добија се

$$\int_{-n}^{+n} {}^{2p+1}a^{n-(2p+1)}_{-|u|+n} \sin(2tu)\,du = (n-2p-1)!\,(-1)^p\, 2^{2p+1} \frac{\sin(nt)\sin^n t}{t^{n-2p}}, \tag{336}$$

дакле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nt)\sin^n t}{t^{n-2p}} \sin(2xt)\,dt = \frac{(-1)^p}{2^{2p+1}}\,\frac{\pi}{(n-2p-1)!}\left\{ {}^{2p+1}A^{n-(2p+1)}_{\nu\ (-|x|+n-\nu)}\right\} \tag{337}$$

$$n-\nu-1 \le x \le n-\nu, \quad n = 1,2,3,\dots \quad ; \ 1 \le 2p+1 \le n,\ p = 0,1,2,\dots\left[\frac{n-1}{2}\right].$$
$$\nu = 0,1,2,\dots,n-1$$

Наместо коначног низа кривих (3o4) посматрамо бесконачан низ кривих

$$y = {}^{p}A^{m}_{-|x|+(m+p)}, \quad p = 1,2,3,\dots \tag{338}$$

Крива (338) постаје из криве (3o4) да ставимо $n - p = m$.
Низ полинома

$$y = {}^{p}A^{m}_{k}(x-k), \quad k \le x \le k+1, \quad k = 0,1,2,\dots,m+p-1 \tag{339}$$

чини непрекидну криву у интервалу $0 \le x \le m+p$ на основу својства (247)

За $x=0$ и $x=m+p$ ордината криве (339) је нула. На онову функционалне једначине (251) је

$$(-1)^{p-1}\left\{ {}^{p}A^{m}_{k}(x-k)\right\} = {}^{p}A^{m}_{(m+p-1)-k}(-x+k+1),\ k=0,1,2,\dots m+p-1 \tag{340}$$

Полиноми на десној страни једнакости (34o) приказани су овом функцијом

$$y = {}^{p}A^{m}_{-|x|+(m+p)} = \sum_{v=0}^{[-|x|+m+p]} (-1)^{v}\binom{m+p}{v}\left(-|x|+\overline{m+p-v}\right)^{m},\ -(m+p\le x\le +(m+p)\ ; \tag{341}$$

за $k<x\le k+1$ је $[-|x|+m+p]=m+p-(k+1)$ и сума је

$${}^{0}A^{m}_{m+p-(k+1)\le(-|x|+m+p)<m+p-k} = {}^{p}A^{m}_{m+p-(k+1)}(-|x|+k+1),\ k=0,1,2,\dots,m+p-1$$

Изван интервала $\left[-(m+p)+(m+p)\right]$ дефинишемо функцију која је свуда нула.

У интервалу (317) ставиһемо $h+1+4k=p$

$$\int_0^{n} {}^{p}A^{n-p}_{-|u|+n}\, e^{2itu}\,du = (n-p)!\,\frac{(e^{2it}-1)^{n}}{(2it)^{n-p+1}},\ p=1,2,3,\dots n. \tag{342}$$

На основу смене $n-p=m$ добијамо из (342)

$$\int_0^{m+p} {}^{p}A^{m}_{-|u|+(m+p)}\, e^{2itu}\,du = m!\,\frac{(e^{2it}-1)^{m+p}}{(2it)^{m+1}},\ p=1,2,3,\dots \tag{343}$$

Реални и имагинарни делови интеграла (317) дати су формулама (326) и (327) у коју треба заврстити одговарајуһе изразе између израза под бројевима (318) до (325). Стављајуһи у тако добивене изразе $n-h-1-4k=m$,добиһемо

$$R\left\{m!\,\frac{(e^{2it}-1)^{m+1+4k}}{(2it)^{m+1}}\right\} = m!\,\frac{2^{4k}\cos(m+1+4k)t\,\sin^{m+1+4k}t}{t^{m+1}} \tag{344}$$

$$J\left\{m\,\frac{(e^{2it}-1)^{m+1+4k}}{(2it)\,m+1}\right\} = m!\,\frac{2^{4k}\sin(m+1+4k)t\,\sin^{m+1+4k}t}{t^{m+1}} \tag{345}$$

$$R\left\{m!\,\frac{(2it-1)\,m+2+4k}{(2it)\,m+1}\right\} = -m!\,\frac{2^{1+4k}\sin(m+2+4k)t\,\sin^{m+2+4k}t}{t^{m+1}} \tag{346}$$

$$J\left\{m!\,\frac{(2it-1)\,m+2+4k}{(2it)\,m+1}\right\} = +m!\,\frac{2^{1+4k}\cos(m+2+4k)t\,\sin^{m+3+4k}t}{t\,m+1} \tag{347}$$

$$R\left\{m!\,\frac{(2it-1)\,m+3+4k}{(2it)\,m+1}\right\} = -m!\,\frac{2^{2+4k}\cos(m+3+4k)t\,\sin^{m+3+4k}t}{t^{m+1}} \tag{348}$$

$$J\left\{m!\,\frac{(2it-1)\,m+3+4k}{(2it)\,m+1}\right\} = -m!\,\frac{2^{2+4k}\sin(m+3+4k)t\,\sin^{m+3+4k}t}{t^{m+1}} \tag{349}$$

$$\mathcal{R}\left\{m!\,\frac{(e^{2it}-1)^{m+4+4k}}{(2it)^{m+1}}\right\}=+m!\;\frac{2^{3+4k}\sin(m+4+4k)t\,\sin^{m+4+4k}t}{t^{m+1}} \quad (350)$$

$$\mathcal{J}\left\{m!\,\frac{(e^{2it}-1)^{m+4+4k}}{(2it)^{m+1}}\right\}=-m!\;\frac{2^{3+4k}\cos(m+4+4k)t\,\sin^{m+4+4k}t}{t^{m+1}} \quad (351)$$

У замени $n=m+h+1+4k$ ставили смо $p=h+1+4k$, $h=0,1,2,3,;$ $k=0,1,2,\dots$

За $h=0$ добијамо у вези са (341)

$$y={}^{1+4k}A^{m}_{-|X|+(m+1+4k)}=\sum_{\nu=0}^{[-|X|+m+1+4k]}(-1)^{\nu}\binom{m+1+4k}{\nu}\left(-|X|+\overline{m+1+4k-\nu}\right)^{m} \quad (352)$$

Парна функција (352) основа је интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(m+1+4k)t\,\sin^{m+1+4k}t}{t^{m+1}}\cos(2xt)\,dt=\frac{+1}{2^{1+4k}}\cdot\frac{\pi}{m!}\left\{{}^{1+4k}A^{m}_{\nu}\left(-|X|+\overline{m+1+4k-\nu}\right)\right\} \quad (353)$$

$$(m+1+4k)-\nu-1\le X\le(m+1+4k)-\nu\ ,\quad m=0,1,2,\dots\quad k=0,1,2,\dots$$

$$-\left[(m+1+4k)-\nu\right]\le X\le-\left[(m+1+4k)-\nu-1\right],\quad \nu=0,1,2,\dots\ m+4k$$

Непарна функција $y={}^{1+4k}a^{m}_{-|X|+(m+1+4k)}$ основа је интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(m+1+4k)t\,\sin^{m+1+4k}t}{t^{m+1}}\sin(2xt)\,dt=\frac{+1}{2^{1+4k}}\cdot\frac{\pi}{m!}\left\{{}^{1+4k}A^{m}_{\nu}\left(-|X|+\overline{m+1+4k-\nu}\right)\right\} \quad (354)$$

$$(m+1+4k)-\nu-1\le X\le(m+1+4k)-\nu\ ,\quad m=0,1,2,\dots\quad ,\ k=0,1,2,\dots$$
$$\nu=0,1,2,\dots,m+4k.$$

За $h=1$ добијамо у вези са (341)

$$y={}^{2+4k}A^{m}_{-|X|+(m+2+4k)}=\sum_{\nu=0}^{[-|X|+m+2+4k]}(-1)^{\nu}\binom{m+2+4k}{\nu}\left(-|X|+\overline{m+2+4k-\nu}\right)^{m} \quad (355)$$

Парна функција (355) основа је интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(m+2+4k)t\,\sin^{m+2+4k}t}{t^{m+1}}\cos(2xt)\,dt=\frac{-1}{2^{2+4k}}\cdot\frac{\pi}{m!}\left\{{}^{2+4k}A^{m}_{\nu}\left(-|X|+\overline{m+2+4k-\nu}\right)\right\} \quad (356)$$

$$(m+2+4k)-\nu-1\le X\le(m+2+4k)-\nu\ ,\quad m=0,1,2,\dots\quad k=0,1,2,\dots$$

$$-\left[(m+2+4k)-\nu\right]\le X\le-\left[(m+2+4k-\nu-1\right],\ \nu=0,1,2,\dots,m+1+4k$$

Непарна функција $y = {}^{2+4k}a^{m}_{-|X|+(m+2+4k)}$ основа је интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(m+2+4k)t \sin^{m+2+4k} t}{t^{m+1}} \sin(2xt)\,dt = \frac{+1}{2^{2+4k}} \cdot \frac{\pi}{m!} \left\{ {}^{2+4k}A^{m}_{v}\,\overline{(-|X|+m+2+4k-v)} \right\} \quad (357)$$

$(m+2+4k)-v-1 \leq X \leq (m+2+4k)-v, \quad m = 0,1,2,\dots, \quad k = 0,1,2$

$v = 0,1,2,\dots \; m+1+4k,$

За $h = 2$ добијамо у вези са (341)

$$y = {}^{3+4k}A^{m}_{-|X|+(m+3+4k)} = \sum_{v=0}^{[-|X|+m+3+4k]} (-1)^{v} \binom{m+3+4k}{v} \overline{(-|X|+m+3+4k-v)}^{\,m} \quad (358)$$

Парна функција (358) основа је интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(m+3+4k)t \sin^{m+3+4k} t}{t^{m+1}} \cos(2Xt)\,dt = \frac{-1}{2^{3+4k}} \cdot \frac{\pi}{m!} \left\{ {}^{3+4k}A^{m}_{\gamma}\,\overline{(-|X|+m+3+4k-v)} \right\} \quad (359)$$

$(m+3+4k)-v-1 \leq X \leq (m+3+4k)-v, \quad m = 0,1,2,\dots, \quad k = 0,1,2,$

$-[(m+3+4k)-v] \leq X \leq -[(m+3+4k)-v-1] \quad v = 0,1,2,\dots \; m+2+4k.$

Непарна функција $y = {}^{3+4k}a^{m}_{-|X|+(m+3+4k)}$ основа је интегралу

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{\sin(m+3+4k)t \sin^{m+3+4k} t}{t^{m+1}} \sin(2Xt)\,dt = \frac{-1}{2^{3+4k}} \cdot \frac{\pi}{m!} \left\{ {}^{3+4k}A^{m}_{v}\,\overline{(-|X|+m+3+4k-v)} \right\} \quad (360)$$

$(m+3+4k)-v-1 \leq X \leq (m+3+4k)-v, \quad m = 0,1,2,\dots, \quad k = 0,1,2,\dots$

$v = 0,1,2\dots \; m+2+4k.$

За $h = 3$ добијамо у вези са (341)

$$y = {}^{4+4k}A^{m}_{-|X|+(m+4+4k)} = \sum_{v=0}^{[-|X|+m+4+4k]} (-1)^{v} \binom{m+4+4k}{v} \overline{(-|X|+m+4+4k-v)}^{\,m} \quad (361)$$

Парна функција (361) основа је интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(m+4+4k)t \sin^{m+4+4k} t}{t^{m+1}} \cos(2xt)\,dt = \frac{+1}{2^{4+4k}} \cdot \frac{\pi}{m!} \left\{ {}^{4+4k}A^m_v(-|x|+\overline{m+4+4k-v}) \right\} \quad (362)$$

$$(m+4+4k)-v-1 \le x \le (m+4+4k)-v \;,\; m=0,1,2,\dots \;,\; k=0,1,2,\dots$$

$$-\left[(m+4+4k)-v\right] \le x \le \left[(m+4+4k)-v-1\right], \; v=0,1,2,\dots, m+3+4k$$

Непарна функција $y^{4+4k}\,a^m_{-|x|+(m+4+4k)}$ основа је интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(m+4+4k)t \sin^{m+4+4k} t}{t^{m+1}} \sin(2xt)\,dt = \frac{-1}{2^{4+4k}} \frac{\pi}{m!} \left\{ {}^{4+4k}A^m_v(-|x|+\overline{m+4+4k-v}) \right\} \quad (363)$$

$$(m+4+4k)-v-1 \le x \le (m+4+4k)-v, \; m=0,1,2,\dots \quad k=0,1,2,\dots$$

$$v=0,1,2\dots \quad m+3+4k.$$

Десну грану криве (341) помакнућемо транслаторно дуж осе X за $\frac{m+p}{2}$ јединица у лево. Тако добијамо криву чија је једначина

$$y = {}^pA^m_{-x+\frac{m+p}{2}} = \sum_{v=0}^{\left[x+\frac{m+p}{2}\right]} (-1)^v \binom{m+p}{v}\left(-x+\frac{m+p}{2}-v\right)^m, \; p=1,2,3,\dots \; -\frac{m+p}{2} \le x \le +\frac{m+p}{2} \quad (364)$$

Ова функција преставља луке (340) помакнуте за $\frac{m+p}{2}$ јединица у лево; за $-\frac{m+p}{2}+k < x \le -\frac{m+p}{2}+k+1$ је $\left[-x+\frac{m+p}{2}\right] = m+p-(k+1)$ и стога је

$${}^pA^m_{m+p-(k-1) \le (-x+\frac{m+p}{2}) < m+p-(k+1)}\left(-x-\frac{m+p}{2}+k+1\right), k=0,1,2,\dots m+p-1.$$

Показаћемо да је

$$J_{\frac{m+p}{2}} = \int_{-\frac{m+p}{2}}^{+\frac{m+p}{2}} {}^pA^m_{-u+\frac{m+p}{2}}\, e^{2itu}\,du = \left[\int_0^m {}^pA^m_{-|u|+(m+p)}\, e^{2itu}\,du\right] \cdot \left(e^{-2it}\right)^{\frac{m+p}{2}} \quad (365)$$

Будући да је

$$J_{\frac{m+p}{2}} = \sum_{k=0}^{m+p-1} \int_{-\frac{m+p}{2}}^{-\frac{m+p}{2}+k+1} {}^pA^m_{m+p-(k+1)}\left(-u-\frac{m+p}{2}+k+1\right) e^{2itu}\,du,$$

добија се трансформацијом променљиве $-u-\frac{m+p}{2}+k+1=\xi$ и сменом индекса $k+1=v$

$$J_{\frac{m+p}{2}} = (e^{-2it})^{\frac{m+p}{2}} \sum_{\nu=1}^{m+p} (e^{2it})^{\nu} \int_0^1 {}^{p}A^{m}_{m+p-\nu}(\xi) e^{-2it\xi} d\xi \; ; \qquad (366)$$

полазећи од полинома (34о) добијамо за интеграл (343)

$$\int_0^{m+p} {}^{p}A^{m}_{-|u|+(m+p)} e^{2itu} du = \sum_{\nu=1}^{m+p} (e^{2it})^{\nu} \int_0^1 {}^{p}A^{m}_{m+p-\nu}(\xi) e^{-2it\xi} d\xi \; . \qquad (367)$$

Из (366) и (367) следи (365).Из (365) и (343) следи

$$\int_{-\frac{m+p}{2}}^{+\frac{m+p}{2}} {}^{p}A^{m}_{-u+\frac{m+p}{2}} e^{2itu} du = \left[m! \frac{(e^{2it}-1)^{m+p}}{(2it)^{m+1}} \right] (e^{-2it})^{\frac{m+p}{2}} = m! (2i)^{p-1} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{m+1} \sin^{p-1} t \quad (368)$$

За $p-1 = 2\nu+1$ последњи израз изгледа овако

$$m!\, 2^{2\nu+1} (-1)^{\nu} i \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{m+1} \sin^{2\nu+1} t$$

или ако пишемо n наместо m p наместо ν, имамо

$$n!\, 2^{2p+1} (-1)^{p} i \left(\frac{\sin t}{t}\right) \sin^{2p+1} t . \qquad (369)$$

Израз (369) је имагинаран;због тога имамо Фурие-ов интеграл непарне функције

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} \sin^{2p+1} t \sin(2xt)\, dt = \frac{(-1)^{p}}{2^{2p+1}} \frac{\pi}{n!} \left\{ {}^{2p+2}A^{n}_{n+2p+2-(k+1)}\left(-x - \frac{n+2p+2}{2} + k+1\right) \right\};$$

на основу функционалне једначине (251) добија се

$${}^{2p+2}A^{n}_{n+2p+2-(k+1)}\left(-x - \frac{n+2p+2}{2} + k+1\right) = -\, {}^{2p+2}A^{n}_{k}\left(x + \frac{n+2p+2}{2} - k\right) \text{ и стога је}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} \sin^{2p+1} t \sin(2xt)\, dt = \frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p+1}} \frac{\pi}{n!} \left\{ {}^{2p+2}A^{n}_{k}\left(x + \frac{n+2p+2}{2} - k\right) \right\} \qquad (370)$$

$$-\frac{n+2p+2}{2} + k \le x \le -\frac{n+2p+2}{2} + k+1, \quad k = 0,1,2,\dots, n+2p+1,$$
$$n = 0,1,2,\dots \qquad , \qquad p = 0,1,2,\dots$$

За $p-1 = 2\nu$ израз (368) изгледа овако

$$m!\, 2^{2\nu} (-1)^{\nu} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{m+1} \sin^{2\nu} t$$

или ако пишемо n наместо m , p наместо ν ,имамо

$$n!\, 2^{2p}(-1)^p \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{p+1} \sin^{2p} t . \tag{371}$$

Израз (371) је реалан;због тога имамо Фурие-ов интеграл парне функције

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1}\sin^{2p}t\cos(2xt)\,dt=\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\frac{\pi}{n!}\left\{{}^{2p+1}A^{n}_{n+2p+1-(k+1)}\left(-x-\frac{n+2p+1}{2}+k+1\right)\right\};$$

на основу функционалне једначине (251) добија се

$${}^{2p+1}A^{n}_{k}\left(x+\frac{n+2p+1}{2}-k\right)=(-1)^{2p}\left\{{}^{2p+1}A^{n}_{n+2p+1-(k+1)}\left(-x-\frac{n+2p+1}{2}+k+1\right)\right\}$$ и стога је

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1}\sin^{2p}t\cos(2xt)\,dt=\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\frac{\pi}{n!}\left\{{}^{2p+1}A^{n}_{k}\left(x+\frac{n+2p+1}{2}-k\right)\right\} \tag{372}$$

$$-\frac{n+2p+1}{2}+k\le x\le-\frac{n+2p+1}{2}+k+1\,,\ k=0,1,2,\dots n+2p\,,$$

за $n=0$ је $p=1,2,3,\dots$ за $n=1,2,3,\dots$ је $p=0,1,2,\dots$

У низу (304) збир горњих индекаа је n .Узећемо сличан низ у коме је збир горњих индекса $(n+1)$

$$y={}^{p}A^{(n+1)-p}_{-|x|+(n+1)}=\sum_{\nu=0}^{[-|x|+n+1]}(-1)^{\nu}\binom{n+1}{\nu}\left(-|x|+\overline{n+1}-\nu\right)^{(n+1)-p},\quad p=1,2,3,\dots n+1 \quad -(n+1)\le x\le+(n+1) \tag{373}$$

Унутрашњи интеграл за Фуриеов интеграл функције (373) израчунаћемо тако да интеграл (342) наместо n ставимо $(n+1)$

$$\int_0^{n+1}{}^{p}A^{(n+1)-p}_{-|u|+(n+1)}e^{2itu}\,du=(n+1-p)!\,\frac{(e^{2it}-1)^{n+1}}{(2it)^{(n+1)-(p-1)}}\,,\ p=1,2,3,\dots (n+1) \tag{374}$$

Десну грану криве (373) помакнућемо транслаторно дуж осе X за $\frac{n+1}{2}$ јединица у лево.Тако добијамо криву чија је једначина

$$y={}^{p}A^{(n+1)-p}_{-x+\frac{n+1}{2}}=\sum_{\nu=0}^{\left[-x+\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^{\nu}\binom{n+1}{\nu}\left(-x+\frac{n+1}{2}-\nu\right)^{(n+1)-p}\quad p=1,2,3,\dots,n+1 \quad -\frac{n+1}{2}\le x\le+\frac{n+1}{2} \tag{375}$$

Аналогно формули (365) доказује се да вреди

$$\int_{-\frac{n+1}{2}}^{+\frac{n+1}{2}}{}^{p}A^{(n+1)-p}_{-u+\frac{n+1}{2}}e^{2itu}\,du=\left[\int_0^{n+1}{}^{p}A^{(n+1)-p}_{-(u)+(n+1)}e^{2itu}\,du\right]\cdot\left(e^{-2it}\right)^{\frac{n+1}{2}} \tag{376}$$

стога је

$$\int_{-\frac{n+1}{2}}^{+\frac{n+1}{2}} {}^{p}A^{(n+1)-p}_{-u+\frac{n+1}{2}}\, e^{2itu}\, du = (n+1-p)!\,\frac{(e^{2it}-1)^{n+1}}{(2it)^{(n+1)-(p-1)}}\,(e^{-2it})^{\frac{n+1}{2}} \equiv (n+1-p)!\,(2i)^{p-1}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-p+2}\sin^{p-1}t \qquad (377)$$

За $p-1=2k+1$ последњи израз изгледа овако

$$[n-(2k+1)]!\;2^{2k+1}(-1)^k i\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-2k}\sin^{2k+1}t. \qquad (378)$$

Израз (378) је имагинаран; због тога имамо Фуриеов интеграл непарне функције

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-2k}\sin^{2k+1}t\,\sin(2xt)\,dt = \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}\,\frac{\pi}{[n-(2k+1)]!}\left\{{}^{2k+2}A^{n-(2p+1)}_{p}\left(-x+\frac{n+1}{2}-p\right)\right\};$$

на основу функционалне једначине (251) добија се

$${}^{2k+2}A^{n-(2k+1)}_{p}\left(-x+\frac{n+1}{2}-p\right) = -\,{}^{2k+2}A^{n-(2k+1)}_{v}\left(x+\frac{n+1}{2}-v\right)$$ и стога је

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-2p}\sin^{2p+1}t\,\sin(2xt)\,dt = \frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p+1}}\,\frac{\pi}{[n-(2p+1)]!}\left\{{}^{2p+2}A^{n-(2p+1)}\left(x+\frac{n+1}{2}-v\right)\right\} \qquad (379)$$

$$-\frac{n+1}{2}+v \le x \le -\frac{n+1}{2}+v+1 \quad n=1,2,3\ldots,\; v=0,1,2,\ldots n, \quad 1\le 2p+1\le n,\; p=0,1,2,\ldots\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

За $p-1=2k$ израз (377) изгледа овако

$$(n-2k)!\;2^{2k}(-1)^k\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-(2k+1)}\sin^{2k}t \qquad (380)$$

Израз (380) је реалан; због тога имамо Фуриеов интеграл парне функције

$$\int_{\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-(2k-1)}\sin^{2k}t\,\cos(2xt)\,dt = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\,\frac{\pi}{(n-2k)!}\left\{{}^{2k+1}A^{n-2k}_{p}\left(-x+\frac{n+1}{2}-p\right)\right\};$$

на основу функционалне једначине (251) добија се

$${}^{2k+1}A^{n-2k}_{p}\left(-x+\frac{n+1}{2}-p\right) = {}^{2k+1}A^{n-2k}_{v}\left(x+\frac{n+1}{2}-v\right)$$

и стога је

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n-(2p-1)}\sin^{2p}t\,\cos(2xt)\,dt = \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\left\{{}^{2p+1}A^{n-2p}_{v}\left(x+\frac{n+1}{2}-v\right)\right\} \qquad (381)$$

$$-\frac{n+1}{2}+v \le x \le -\frac{n+1}{2}+v+1 \quad n=0,1,2\ldots,\; v=0,1,2,\ldots n, \quad 0\le 2p\le n,\; p=0,1,2,\ldots\left[\frac{n}{2}\right].$$

На основу десне гране криве (267) извешћемо још једну класу интеграла.

Криву

$$y = {}^{\circ}B^{n+1}_{-|x|+(n+1)} = \sum_{v=0}^{[-|x|+n+1]} (-1)^v \binom{n+1}{v} (-|x| + \overline{n+1} - v)^{n+1}, \quad 0 \le x \le n+1 \qquad (382)$$

помаћи ћемо транслаторно у правцу негативног дела осе X за $\frac{n+1}{2}$ јединица ,а затим ћемо је помаћи транслаторно у правцу негативног дела осе Y за $\frac{(n+1)!}{2}$ јединица.Прва транслација даје криву чија је једначина

$$y = {}^{\circ}B^{n+1}_{-x+\frac{n+1}{2}} = \sum_{v=0}^{[-x+\frac{n+1}{2}]} (-1)^v \binom{n+1}{v} \left(-x + \frac{n+1}{2} - v\right)^{n+1}; \quad -\frac{n+1}{2} \le x \le +\frac{n+1}{2} \qquad (383)$$

Друга транслација даје криву чија је једначина

$$y = {}^{\circ}B^{n+1}_{-x+\frac{n+1}{2}} - \frac{(n+1)!}{2}, \quad -\frac{n+1}{2} \le x \le \frac{n+1}{2} \qquad (384)$$

Ставићемо $n+1 = m$ и израчунаћемо интеграл

$$\int_{-\frac{m}{2}}^{+\frac{m}{2}} {}^{\circ}B^{m}_{-u+\frac{m}{2}} e^{2itu} du = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{-\frac{m}{2}+k}^{-\frac{m}{2}+k+1} {}^{\circ}B^{m}_{m-(k+1)} \left(-u - \frac{m}{2} + k + 1\right) e^{2itu} du; \qquad (385)$$

трансформацијом променљиве $-u - \frac{m}{2} + k + 1 = \xi$ и сменом индекса $k+1 = v$ добија се

$$\int_{-\frac{m}{2}}^{+\frac{m}{2}} {}^{\circ}B^{m}_{-u+\frac{m}{2}} e^{2itu} du = \left[\int_{0}^{m} {}^{\circ}B^{m}_{-|u|+m} e^{2itu} du\right] \cdot \left(e^{-2it}\right)^{\frac{m}{2}}; \qquad (386)$$

стога је

$$\int_{-\frac{m}{2}}^{+\frac{m}{2}} {}^{\circ}B^{m}_{-u+\frac{m}{2}} e^{2itu} du = \frac{m!}{(-2it)} \left\{1 - \frac{(e^{2it} - 1)^m}{(2it)^m}\right\} \cdot \left(e^{-2it}\right)^{\frac{m}{2}}; \qquad (387)$$

реални и имагинарни део интеграла (387) јесу

$$R = m!\, \frac{\sin(mt)}{2t} \; (388), \quad J = m! \left[\frac{\cos(mt)}{2t} - \frac{1}{2t}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m\right] (389)$$

У вези са (387) је

$$J_{\frac{m}{2}}=\int_{-\frac{m}{2}}^{+\frac{m}{2}}\left({}^{\circ}B^{m}_{-u+\frac{m}{2}}-\frac{m}{2}!\right)e^{2itu}du=\frac{m!}{(-2it)}\left\{1-\frac{(2it_1)^m}{(2it)^m}\right\}(e^{-2it})^{\frac{m}{2}}-\frac{m!}{2}\,\frac{\sin(mt)}{t} \quad (390)$$

На основу (388) и (389) добија се реални и имагинарни део интеграла $J_{\frac{m}{2}}$

$$R\left\{J_{\frac{m}{2}}\right\}=\frac{m!}{2}\,\frac{\sin(mt)}{t}-\frac{m!}{2}\,\frac{\sin(mt)}{t}=0 \quad (391)$$

$$J\left\{J_{\frac{m}{2}}\right\}=m!\left[\frac{\cos(mt)}{2t}=-\frac{1}{2t}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m\right]; \quad (392)$$

стога је за функцију

$$y=\begin{cases}{}^{\circ}B^{n+1}_{-x+\frac{n+1}{2}}-\frac{(n+1)!}{2}, & -\frac{n+1}{2}\le x\le+\frac{n+1}{2}\\ 0, & |x|\ge(-\frac{n+1}{2})\end{cases} \quad (393)$$

$$J\left\{\int_{-\frac{n+1}{2}}^{+\frac{n+1}{2}}\left({}^{\circ}B^{n+1}_{-x+\frac{n+1}{2}}-\frac{(n+1)!}{2}\right)e^{2itu}du\right.=(n+1)!\left[\frac{\cos(n+1)t}{2t}-\frac{1}{2t}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1}\right] \quad (394)$$

На основу (394) имамо

$$\int_{+\infty}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n+1)t}{2t}-\frac{1}{2t}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1}\right]\sin(2xt)dt=\frac{\pi}{(n+1)!}\left\{{}^{\circ}B^{n+1}_{-x+\frac{n+1}{2}}-\frac{(n+1)!}{2}\right\}\; -\frac{n+1}{2}<x<+\frac{n+1}{2} \quad (395)$$

На горњој граници интервала $x=\frac{n+1}{2}$ имамо ${}^{\circ}B^{n+1}_{0}\le(-x+\frac{n+1}{2})_{<1}={}^{\circ}B^{n+1}_{0}(-\frac{n+1}{2}+\frac{n+1}{2})$

па интеграл (395) за $x=\frac{n+1}{2}$ има вредност

$$\frac{\pi}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2}\left\{\left[{}^{\circ}B^{n+1}_{0}(0)-\frac{(n+1)!}{2}\right]+0\right\}=-\frac{\pi}{4}. \quad (396)$$

Из (395) следи

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1}\frac{\sin(2xt)}{t}dt=\pi-\frac{2\pi}{(n+1)!}\left\{{}^{\circ}B^{n+1}_{-x+\frac{n+1}{2}}\right\}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(n+1)t\sin(2xt)}{t}dt,\; -\frac{n+1}{2}<x<+\frac{n+1}{2} \quad (397)$$

У вези са интеграл-синусом последњи интеграл на десној страни у (397) има ове вредности: 0 за $|2x|<n+1$, $\frac{\pi}{2}$ за $|2x|=n+1$, π за $|2x|>n+1$.

Стога из (397) следи

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1}\frac{\sin(2xt)}{t}dt = \pi - \frac{2\pi}{(n+1)!}\left\{{}^{0}B_{n-k}^{n+1}\left(-x-\frac{n+1}{2}+k+1\right)\right\} \tag{398}$$

$-\frac{n+1}{2}+k \le x \le -\frac{n+1}{2}+k+1,\ k=0,1,2,\dots,n;\ -\frac{n+1}{2} < x < +\frac{n+1}{2}.$

На основу функционалне једначине (60) добија се

$${}^{0}B_{n-k}^{n+1}\left(-x-\frac{n+1}{2}+k+1\right) = {}^{0}B_{p}^{n+1}\left(-x+\frac{n+1}{2}-p\right),\ n-k=p$$

$$\pi - \frac{2\pi}{n+1!}\left\{{}^{0}B_{p}^{n+1}\left(-x+\frac{n+1}{2}-p\right)\right\} = \pi + \frac{2\pi}{(n+1)!}\left\{{}^{0}B_{\nu}^{n+1}\left(x+\frac{n+1}{2}-\nu\right)\right\},\ n=p+\nu;$$

стога је

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1}\frac{\sin(2xt)}{t}dt = -\pi + \frac{2\pi}{(n+1)!}\left\{{}^{0}B_{\nu}^{n+1}\left(x+\frac{n+1}{2}-\nu\right)\right\} \tag{399}$$

$-\frac{n+1}{2}+\nu \le x \le -\frac{n+1}{2}+\nu+1,\ n=0,1,2,\dots,\ \nu=0,1,2,\dots,n.$

7. РАВНОМЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА НИЗА ПОЛИНОМА НА ГЛАВНОЈ ДИЈАГОНАЛИ У ШЕМИ(54) И НИЗОВА ПАРАЛЕЛНИХ СА ГЛАВНОМ ДИЈАГОНАЛОМ. ВЕЗА ИЗМЕЂУ НИЛОВИХ ПОЛИНОМА И БЕРНУЛИ – ЈЕВИХ ФУНКЦИЈА.

Начинићемо сада непарну функцију на следећи начин

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2n)!}\left\{{}^{0}B_{-|x|+2n}^{2n}\right\} = \frac{1}{(2n)!}\sum_{\nu=0}^{[-|x|+2n]}(-1)^{\nu}\binom{2n}{\nu}(-|x|+2n-\nu)^{2n},\quad 0\le x\le n \\ f(-x) &= -f(x)\qquad\qquad ,\ -2n<-x\le 0 \end{aligned}\right\} \tag{400}$$

Фуриеов ред функције (400) гласи

$$\frac{{}^{0}B_{-|x|+2n}^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\left[1-\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{k\pi}{4n}}{\frac{k\pi}{4n}}\right)^{2n}\right]\sin\left(\frac{2k\pi}{4n}x\right) \tag{401}$$

Раздвајањем парних од непарних чланова у реду (401) добија се

$$\frac{{}^{0}B_{-|x|+2n}^{2n}}{(2n)!} = \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)}\sin\left[\frac{(2p-1)\pi}{2n}x\right] + \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\left[1-(-1)^{p}\left(\frac{\sin\frac{p\pi}{2n}}{\frac{p\pi}{2n}}\right)^{2n}\right]\sin\left(\frac{2p\pi}{2n}x\right) \tag{402}$$

$0<x\le 2n,\ -2n\le x<0$

Вредност функција (400) у интервалу $(n-k-1, n-k]$, $k=0,1,2,\dots n-1$ и кад је $x=n-k-\alpha, 0\le\alpha<1$ јесте ${}^{0}B_{n+k}^{2n}(\alpha)$. Развој (402) за $x=n-k-\alpha$

изгледа овако

$$\frac{B_{n+k}^{2n}(\alpha)}{(2n)!} = \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)}\cos\frac{(2p-1)\pi(k+\alpha)}{2n} + \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\left[1-(-1)^p\left(\frac{\sin\frac{p\pi}{2n}}{\frac{p\pi}{2n}}\right)^{2n}\right]\sin\frac{p\pi(k+\alpha)}{n}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\left[1-(-1)^p\left(\frac{\sin\frac{p\pi}{2n}}{\frac{p\pi}{2n}}\right)^{2n}\right]\sin\frac{p\pi(k+\alpha)}{n}. \tag{403}$$

Коефицијенти реда у (4о3) остају коначни кад је $n\to\infty$ јер је $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{p\pi}{2n}}{\frac{p\pi}{2n}}\right)^{2n}=1-0$; стога из (4о3) следи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_{n+k}^{2n}(\alpha)}{(2n)!} = \frac{1}{2},\ 0\le\alpha\le 1. \tag{404}$$

Из (69) на основу (4о4) следи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_{n}^{2n}(\alpha,k)}{(2n)!} = \frac{1}{2},\ 0\le\alpha\le 1. \tag{405}$$

Будући да k у формули (4о4) може бити произвољно велик коначан природан број, јер n неограничено расте, то формулу (4о5) можемо написати овако

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_{n}^{2n}[(\alpha+p)+(k-p)]}{(2n)!} = \frac{1}{2},\ 0\le\alpha\le 1,\ 0\le p\le k \tag{406}$$

или стављајући $\alpha+p=x$, $k-p=m$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_{n}^{2n}(x+m)}{(2n)!} = \frac{1}{2},\ x\ge p. \tag{407}$$

Из (69) на основу (4о7) следи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_{n}^{2n}(x+n)}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}B_{n+m}^{2n}(x)}{(2n)!} = \frac{1}{2},\ x\ge p,\ m\ne n. \tag{408}$$

Између Нилзен-ових полинома ${}^{1}A_{\nu}^{n}(x)$ и Бернули-јевих функција

$$Б_{2p+1}(x) = (-1)^{p+1}\,2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi\nu x)}{(2\pi\nu)^{2p+1}},\ p=0,1,2,\dots$$

$$Б_{2p}(x) = (-1)^{p+1}\,2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi\nu x)}{(2\pi\nu)^{2p}},\ p=1,2,3,\dots$$

постоје ове везе

$$ {}^{1}A_{v}^{2n}(x)+{}^{1}A_{v}^{2n}(1-x)=\frac{2\left\{{}^{1}A_{v+1}^{2n+1}\right\}}{2n+1}+2\sum_{p=1}^{n}(2p-1)!\binom{2n}{2p-1}\left\{{}^{2p+1}A_{v+1}^{2n-2p+1}(0)\right\}B_{2p}(x) \quad (409)$$

$$v=0,1,2,\dots,n;$$

$$ {}^{1}A_{v}^{2n-1}(x)-{}^{1}A_{v}^{2n-1}(1-x)=2\sum_{p=1}^{n}(2p-2)!\binom{2n-1}{2p-2}\left\{{}^{2p}A_{v+1}^{2n-2p+1}(0)\right\}B_{2p+1}(x) \quad (410)$$

$$v=0,1,2,\dots n-1$$

Помоћу вредности полинома ${}^{1}A_{v}^{2n}(x)$ и ${}^{1}A_{v}^{2n}(1-x)$ из интервала $(0,1)$ начинимо парне функције у интервалу $-1\le x\le +1$. Развијемо ове две функције у Фурие-ове редове и саберемо ова два реда. Тако се добија формула (409). Аналогно поступамо за формулу (410).

8. ПОЛИНОМИ СА ДВА АРГУМЕНТА ${}^{0}B_{v}^{n}(\alpha,\beta)$ и ${}^{1}A_{v}^{n}(\alpha,\beta)$. СВОЈСТВА ОВИХ ПОЛИНОМА И ЊИХОВЕ ГЕНЕРАТРИСЕ. КОНВЕРГЕНЦИЈА РЕДА $R_{n}(\alpha,\beta,x)$. СУМА РЕДА $\sum_{v=0}(\alpha+v\beta)^{n}x^{v}$

Полиноме ${}^{0}B_{v}^{n}(\alpha,\beta)$ дефинишемо формулом

$$ {}^{0}B_{v}^{n}(\alpha,\beta)=\sum_{i=0}^{v}(-1)^{i}\binom{n}{i}(\alpha+(v-i)\beta)^{n}; \quad (411)$$

$$ {}^{0}B_{v}^{n}(\alpha,\beta)=\sum_{i=0}^{v}(-1)^{i}\binom{n}{i}\left(\frac{\alpha+(v-i)\beta}{\beta}\beta\right)^{n}=\beta^{n}\left\{{}^{0}B_{v}^{n}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right\},\ \beta\neq 0 \quad (412)$$

Полиноми имају између осталих, и ова својства

$$B_{v}^{n}(\alpha,0)=\alpha^{n}\cdot(-1)^{v},\ (413),\quad {}^{0}B_{v}^{n}(0,\beta)=\left\{{}^{0}B_{v}^{n}(0)\right\}\beta^{n},\ (414),\quad B_{v}^{n}(\alpha,\alpha)=\left\{{}^{0}B_{v+1}^{n}(0)\right\}\alpha^{n},\ (415)$$

Из (412) за $v=n$ добија се

$$ {}^{0}B_{n}^{n}(\alpha,\beta)=n!\,\beta^{n} \quad (416)$$

а на основу овога из дефиниционе формуле следи

$$ {}^{0}B_{n+k}^{n}(\alpha,\beta)=n!\,\beta^{n},\ k=0,1,2,\dots \quad (417)$$

Из функционалне једначине (60) добија се

$$ {}^{\circ}B^{n}_{n-k-1}(\alpha,\beta) + {}^{\circ}B^{n}_{k}(B-\alpha,\beta) = n!\,\beta^{n} \tag{418}$$

а из функционалне једначине (418) добијају се дужим трансформацијама следеће две

$$ {}^{\circ}B^{n+p}_{n}(-X,\beta) = (n+p)!\,\beta^{n+p} - {}^{\circ}B^{n+p}_{p-1}(\beta+X,\beta), \quad \beta>0, X>0, p=1,2,3,\ldots \tag{419}$$

$$ {}^{\circ}B^{n+p}_{n}(\alpha,-\beta) = (-\beta)^{n+p}\left[(n+p)! - {}^{\circ}B^{n+p}_{p-1}\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)\right], \quad \alpha>0, \beta>0, p=1,2,3. \tag{420}$$

Генератриса полинома $\quad {}^{\circ}B^{n}_{\nu}(\alpha,\beta) \quad$ је

$$ \frac{e^{(1-X)\alpha z}}{1-X e^{(1-X)\beta z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {}^{\circ}p_n(\alpha,\beta,z)\right\} X^n, \quad |X|<1, \; |z|<1, \; |\beta|<1, \; |\alpha|<M \tag{421}$$

где је

$$ {}^{\circ}p_n(\alpha,\beta,z) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \frac{\{(\alpha+(n-\nu)\beta)z\}^{\nu}}{\nu!} e^{\{(\alpha+(n-\nu)\beta)z\}} \tag{422}$$

За функцију ${}^{\circ}p_n(\alpha,\beta,z)$ на основу својства (417) имамо овај развој

$$ {}^{\circ}p_n(\alpha,\beta,z) = \frac{1-(\beta z)^{n+1}}{1-\beta z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B^{n+k}_{n}(\alpha,\beta)}{(n+k)!} z^{n+k} \tag{423}$$

Из Даламбер-овог критеријума добија се да ред

$$ R_n(\alpha,\beta,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B^{n+k}_{n}(\alpha,\beta)}{(n+k)!} z^{n+k} \tag{424}$$

конвергира за свако реално z када је $\alpha>0, \beta>0$ или $\alpha<0, \beta<0$

За $\alpha = -X < 0; \; \beta > 0$ употребићемо формулу (419) и добијамо

$$ R_n(-X,\beta,z) = \frac{(\beta z)^{n+1}}{1-\beta z} - z^{n+1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{{}^{\circ}B^{n+p+1}_{n}(\beta+X,\beta)}{(n+p+1)!} z^{p} \quad |\beta z|<1 \tag{425}$$

а ред на десној страни у (425) конвергира за $|\beta x|<1$ што се утврђује такође Даламбр-овим критеријумом; при томе користимо граничну вредност (61). Дакле за $\alpha<0,\ \beta>0$ ред (424) конвергира за $|x|<\frac{1}{\beta},\ |\alpha|<M$.
За $\alpha>0,\ -\beta<0$ употребићемо формулу (42о) и добијамо

$$R_n(\alpha,-\beta,x)=\frac{(-\beta x)^{n+1}}{1+\beta x}-(-\beta x)^{n+1}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{{}^{\circ}B_p^{n+p+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)}{(n+p+1)!}(-\beta x)^p,\quad |-\beta x|<1 \tag{426}$$

а ред на десној страни у (426) конвергира за $|-\beta x|<1$, што се утврђује такође Даламбер-овим критеријумом. Дакле за $\alpha>0,\ -\beta<0$ ред (424) конвергира за $|x|<\frac{1}{|-\beta|}$. Стога за $\operatorname{sign}\alpha=-\operatorname{sign}\beta$ имамо

$$\lim_{n\to\infty}\left\{x^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{{}^{\circ}B_n^{n+k}(\alpha,\beta)}{(n+k)!}x^k\right\}=0,\quad |x|<1,\ |\beta|<1,\ |\alpha|<M \tag{427}$$

За $|\beta|<1$ може бити $x=\pm1$; за $\beta=+1$ мора бити $|x|<1$.
Из развоја (423) следи на основу (427)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{{}^{\circ}p_n(\alpha,\beta,x)\right\}=\frac{1}{1-\beta x},\ |x|<1,\ |\beta|<1,\ |\alpha|<M, \tag{428}$$

а на основу (428) је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{\circ}p_{n+1}(\alpha,\beta,x)}{{}^{\circ}p_n(\alpha,\beta,x)}=1,\ |x|<1,\ |\beta|<1,\ |\alpha|<M \tag{429}$$

Из (429) следи да развој (421) конвергира за $|X|<1,\ |x|<1,\ |\beta|<1,\ |\alpha|<M$
Множењем развоја (421) са $(1-X)$ добија се генератриса полинома ${}^{1}A_{\nu}^{n}(\alpha,\beta)$

$$\frac{(1-X)e^{(1-X)\alpha x}}{1-Xe^{(1-X)\beta x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}X^k\left\{{}^{1}A_k^n(\alpha,\beta)\right\}. \tag{430}$$

Из (421) добија се преуређењем

$$\frac{e^{(1-X)\alpha x}}{1-Xe^{(1-X)\beta x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{\infty}X^{\nu}\left\{{}^{\circ}B_{\nu}^{n}(\alpha,\beta)\right\} \tag{431}$$

а из (43о) делењем са $(1-X)$

$$\frac{e^{(1-X)\alpha x}}{1-Xe^{(1-X)\beta x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left\{\frac{1}{1-X}\sum_{k=0}^{n}X^k\left\{{}^{1}A_k^n(\alpha,\beta)\right\}\right\}; \tag{432}$$

Из (431) и (432) следи

$$\sum_{v=0}^{\infty} x^v \left\{ {}^0B_v^n(\alpha,\beta) \right\} = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{n} x^k \left\{ {}^1A_k^n(\alpha,\beta) \right\} \tag{433}$$

У (432) извршиһемо смену $(1-x)z = u$;добијамо

$$\frac{e^{\alpha u}}{1-xe^{\beta u}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \left\{ \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} x^k \left\{ {}^1A_k^n(\alpha,\beta) \right\} \right\} \tag{434}$$

Будуһи да је

$$\frac{e^{\alpha u}}{1-xe^{\beta u}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \sum_{v=0}^{\infty} (\alpha + v\beta)^n x^v \tag{435}$$

то из (434) и (435) следи

$$\sum_{v=0}^{\infty} (\alpha + v\beta)^n x^v = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} x^k \left\{ {}^1A_k^n(\alpha,\beta) \right\}, \quad |x|<1 \tag{436}$$

9. БЕРНУЛИ-ЕВИ ПОЛИНОМИ СА ДВА АРГУМЕНТА. ЈЕДАН НАРОЧИТИ ОБЛИК БЕТА-ФУНКЦИЈЕ. ГЕНЕРАТРИСА $\frac{\beta z}{e^{\beta z}-1}$ БЕРНУЛИ-ЕВИХ БРОЈЕВА КАО НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ. РАЗЛАГАЊЕ БЕРНУЛИ-ЕВИХ ПОЛИНОМА $P_n(\alpha,\beta)$ НА ПОЛИНОМЕ ${}^1A_v^n(\alpha,\beta)$. РАЗЛАГАЊЕ БЕРНУЛИ-ЕВИХ ПОЛИНОМА $Q_n(\alpha,\beta)$ НА ПОЛИНОМЕ ${}^0B_v^n(\alpha,\beta)$.

Лако је увидети да се генератриса Бернули-евих бројева може и овако написати

$$\frac{\beta z}{e^{\beta z}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (B\beta)^n \frac{z^n}{n!} \tag{437}$$

а одавде добијамо генератрису Бернули-евих полинома са два аргумента

$$\frac{\beta z e^{\alpha z}}{e^{\beta z}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (B\beta)^n \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (\alpha + B\beta)^n. \tag{438}$$

Разликоваһемо три врсте Бернули-евих полинома

$B_n(\alpha,\beta) = (\alpha + B\beta)^n$, (439), $P_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{n!}(\alpha + B\beta)^n$, (440), $Q_n(\alpha,\beta) = \frac{(\alpha+B\beta)^{n+1} - (B\beta)^{n+1}}{n+1}$ (441)

Показаћемо да се полиноми $B_n(\alpha,\beta)$ могу разложити на полиноме ${}^1A^n_v(\alpha,\beta)$ према формули

$$(\alpha+B\beta)^n=\sum_{v=0}^{n}\frac{(-1)^v}{(v+1)\binom{n+1}{v+1}}\left\{{}^1A^n_v(\alpha,\beta)\right\} \tag{442}$$

У познатом облику за бета-функцију

$$B(p,q)=\int_0^{-\infty}\frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}}=\frac{1}{p\binom{p+q-1}{p}},\quad p \text{ и } q \text{ природни бројеви.}$$

извршићемо смену $t=-u$;добијамо

$$B(p,q)=\int_{-\infty}^{0}\frac{(-u)^{p-1}\,du}{(+1-u)^{p+q}}\ ; \tag{443}$$

ставимо у (443) $p=v+1,\ q=n-v+1$

$$B(v+1,n-v+1)=\int_{-\infty}^{0}\frac{(-u)^v\,du}{(1-u)^{n+2}}=\frac{1}{(v+1)\binom{n+1}{v+1}} \tag{444}$$

Из (434) добија се

$$\frac{e^{\alpha u}}{(1-x)(1-xe^{\beta u})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\sum_{v=0}^{n}\frac{x^v}{(1-x)^{n+2}}\left\{{}^1A^n_v(\alpha,\beta)\right\} \tag{445}$$

Будући да је

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{\alpha u}}{(1-x)(1-xe^{\beta u})}\,dx=\frac{\beta u e^{\alpha u}}{e^{\beta u}-1} \tag{446}$$

то из (445) на основу (446),(444) и (438) следи

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}(\alpha+B\beta)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\sum_{v=0}^{n}\frac{(-1)^v}{(v+1)\binom{n+1}{v+1}}\left\{{}^1A^n_v(\alpha,\beta)\right\},$$

а одавде следи (442)
На основу (23) доказује се да је

$$\int_0^x {}^1A^n_v(x,\beta)\,dx=\frac{1}{n+1}\left\{{}^0B^{n+1}_v(x,\beta)-{}^0B^{n+1}_v(0,\beta)\right\} \tag{44}$$

а слично као и за полиноме $P_n(\alpha) = \frac{1}{n!}(\alpha + B)^n$ изводи се да је

$$\int_0^\alpha P_n(\alpha, \beta)\, d\alpha = P_{n+1}(\alpha, \beta) - P_{n+1}(0, \beta) \tag{448}$$

Из (442) следи множењем са $\frac{1}{n!}$ и интегрирањем од 0 до α

$$P_{n+1}(\alpha,\beta) - P_{n+1}(0,\beta) = \frac{1}{n!}\sum_{v=0}^{n} \frac{(-1)^v}{(v+1)\binom{n+1}{v+1}} \left\{ \frac{{}^{\circ}B_v^{n+1}(\alpha,\beta) - {}^{\circ}B_v^{n+1}(0,\beta)}{n+1} \right\} \tag{449}$$

Како је

$$P_{n+1}(\alpha,\beta) = \frac{1}{(n+1)!}(\alpha + B\beta)^{n+1}, \quad P_{n+1}(0,\beta) = \frac{1}{(n+1)!}(B\beta)^{n+1}$$

то је

$$\frac{(\alpha + B\beta)^{n+1} - (B\beta)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}\sum_{v=0}^{n} \frac{(-1)^v}{(v+1)\binom{n+1}{v+1}} \left\{ \frac{{}^{\circ}B_v^{n+1}(\alpha,\beta) - {}^{\circ}B_v^{n+1}(0,\beta)}{n+1} \right\}$$

или

$$\frac{(\alpha + B\beta)^{n+1} - (B\beta)^{n+1}}{n+1} = \sum_{v=0}^{n} \frac{(-1)^v}{(v+1)\binom{n+1}{v+1}} \left\{ \frac{{}^{\circ}B_v^{n+1}(\alpha,\beta) - {}^{\circ}B_v^{n+1}(0,\beta)}{n+1} \right\}. \tag{450}$$

Literatura

1. Niels Nielsen: Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris, 1923, str. 28

2. L. Euler: Institutiones calculi differentialis, Petrograd, 1755, str. 487-491

3. E. Cesaro: Lehrbuch der Algebraischen Analysis und dem Infinitesimalrechnung Leipzig, 19o4

4. B. S. Tomić: Sur une classe des polynômes et sur les intégrales s'y rattachant, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, SerijaII, T.9, Zagreb, 1954, Broj3-4, str. 229-243