Zagorka Sakl Šnajder

ODREDJIVANJE TRAGOVA VIŠEDIMENZIONIH PROSTORA

SADRŽAJ

U V O D

1. Rešavanje prostornih problema pomoću raznih preslikavanja prostornih objekata na jednu ili više ravni koje se sve dovode u položaj jedne od njih, u tzv. ravan slike ili ravan crtanja, jeste predmet i metoda nacrtne geometrije. Kako je crtež sredstvo nacrtne geometrije, upotrebljavaju se preslikavanja kojima se preslikavani objekti mogu lako pretstaviti i konstruisati u crtežu.

Da bismo prišli problematici naše teze izložićemo nekoliko momenata iz razvoja nacrtne geometrije u novije vreme (od kraja prošlog stoleća).

U klasičnoj nacrtnoj geometriji objekat u trodimenzionom prostoru pretstavljen je svojom upravnom, kosom ili centralnom projekcijom na jednu ili više ravni. Ovo preslikavanje je, ustvari, geometrijski izražen proces gledanja. I danas ove vrste projekcija igraju važnu ulogu, naročito u praktičnoj primeni nacrtne geometrije u rešavanju problema raznih nauka: tehničkih i drugih. Kao nauka, nacrtna geometrija, jedna od grana geometrije, proširena je do danas na različite načine.

Povezivanje nacrtne geometrije sa apstraktnom projektivnom geometrijom omogućilo je razna uopštavanja metoda. Do tada poznata preslikavanja posmatraju se sa najopštije tačke gledišta. Tako je, napr., u E. Müllerovom članku: "Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie" (1905) ( ) dato preslikavanje u kome se uspostavlja projektivan odnos izmedju tačaka prostora i parova tačaka dvaju projektivnih pramenova u ravni crtanja. Zadaci u kojima se postavljaju problemi položaja rešavaju se ovom metodom, u suštini, na isti način kao i u upravnoj projekciji.

U nacrtnoj geometriji trodimenzionog prostora prostorni objekat se preslikavanjima jednoznačno pretstavlja figurom u ravni, dakle, objekat većeg broja dimenzija pretstavlja se objektom manjeg broja dimenzija. Mnoge metode nacrtne geometrije trodimenzionog euklidovskog prostora E_3 uopštene su i na euklidovske prostore većeg broja dimenzija E_n, $n > 3$. Metodama projektovanja u višedimenzionim prostorima omogućeno je jednoznačno pretstavljanje objekta višedimenzionog prostora pomoću njegovih projekcija: figurama u ravni ili objektima čiji je broj dimenzija manji od broja dimenzija posmatranog objekta.

E. Müller je u pomenutom članku (8) uopštio svoju novu metodu i za rešavanje problema u prostoru E_4. Ovom metodom je L. Hofmann u članku: "Konstruktive Lösung der Massaufgaben im vierdimensionalen euklidischen Raum" (1921) (2) rešio neke projektivne i metričke zadatke u prostoru E_4. G. Veronese je 1882 god. u radu objavljenom u časopisu Atti del R. Ist. Veneto (5)8, generalisao metodu centralne projekcije na prostor E_4. Ovom metodom je G. Loria u članku: "Sur quelques problèmes élémentaires de la géométrie descriptive à 3 et 4 dimensions" (1902) (3) rešio neke osnovne zadatke u prostoru E_4. I druge metode proširene uglavnom na E_4 nalazimo, napr., kod P.H. Schoutea: "Mehrdimensionale Geometrie" (1902) (10), L. Eckharta: "Konstruktive Abbildungsverfahren" (1926) (1), J. Maurina: "Géométrie descriptive à quatre dimensions" (1948) (4), Z.I. Prjanišnikove: "Obobščenie proekcii E.S. Fjodorova" (1955) (9), i dr.. Metodu upravnih projekcija koju je Schoute izložio u svojoj knjizi (10) data je uopšte za prostore E_n, $n > 3$, a neki osnovni zadaci rešeni su samo za E_4. Maurin je svoju metodu upravnih projekcija dao samo za prostor E_4 (4). Ove dve metode razlikuju se medju sobom u izboru projekcijskih ravni.

Medju metodama nacrtne geometrije višedimenzionih prostora metoda upravnih projekcija igra važnu ulogu. Ovom su metodom rešeni mnogi osnovni zadaci nacrtne geometrije višedimenzionih prostora i ona je naročito pogodna za primenu u rešavanju raznih problema.

Proširenje je izvršeno i nalaženjem novih preslikavanja. U nekim se preslikavanjima, napr.,elementi prostora - tačke i prave - ne preslikavaju u obično upotrebljavane elemente ravni crtanja, u tačke i prave, već na neke geometrijske tvorevine u ravni. Navedimo primer ciklografije u kojoj se tačke prostora preslikavaju na krugove u ravni crtanja. U pomenutoj Eckhartovoj knjizi(1) data su razna preslikavanja koja se upotrebljavaju u nacrtnoj geometriji.

Nova preslikavanja unela su i nove probleme koji se njima rešavaju. Predmet nacrtne geometrije postalo je takodje i nalaženje raznih novih preslikavanja pogodnih za rešavanje odredjenih problema, kao i rešavanje svih geometrijskih problema koji se tom prilikom pojavljuju. Tako je nacrtna geometrija tesno povezana sa svim oblastima geometrije.

Jednim od savremenih zadataka nacrtne geometrije treba smatrati i primenu poznatih metoda nacrtne geometrije ili nalaženje pogodnih novih preslikavanja za rešavanje raznih problema matematike, mehanike, hemije i drugih prirodnih nauka. Ovaj zadatak, a naročito primenu metoda nacrtne geometrije višedimenzionih prostora, isticao je često R. Mehmke u članku: " Über die darstellende Geometrie der Räume von vier und mehr Dimenzionen mit Anwendungen" (1904) (5) i na više mesta u odeljku Graphisches Rechnen, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften (   ) (6) . Pomenimo da su neka rešenja takvih problema metodama nacrtne geometrije data takodje i u pomenutom članku (9) Z.I. Prjanišnikove.

2. Mi smo u ovom radu, pre svega, metodu upravnog projektovanja koju je J. Maurin dao za prostor E_4 proširili i na prostore E_n, $n>4$.

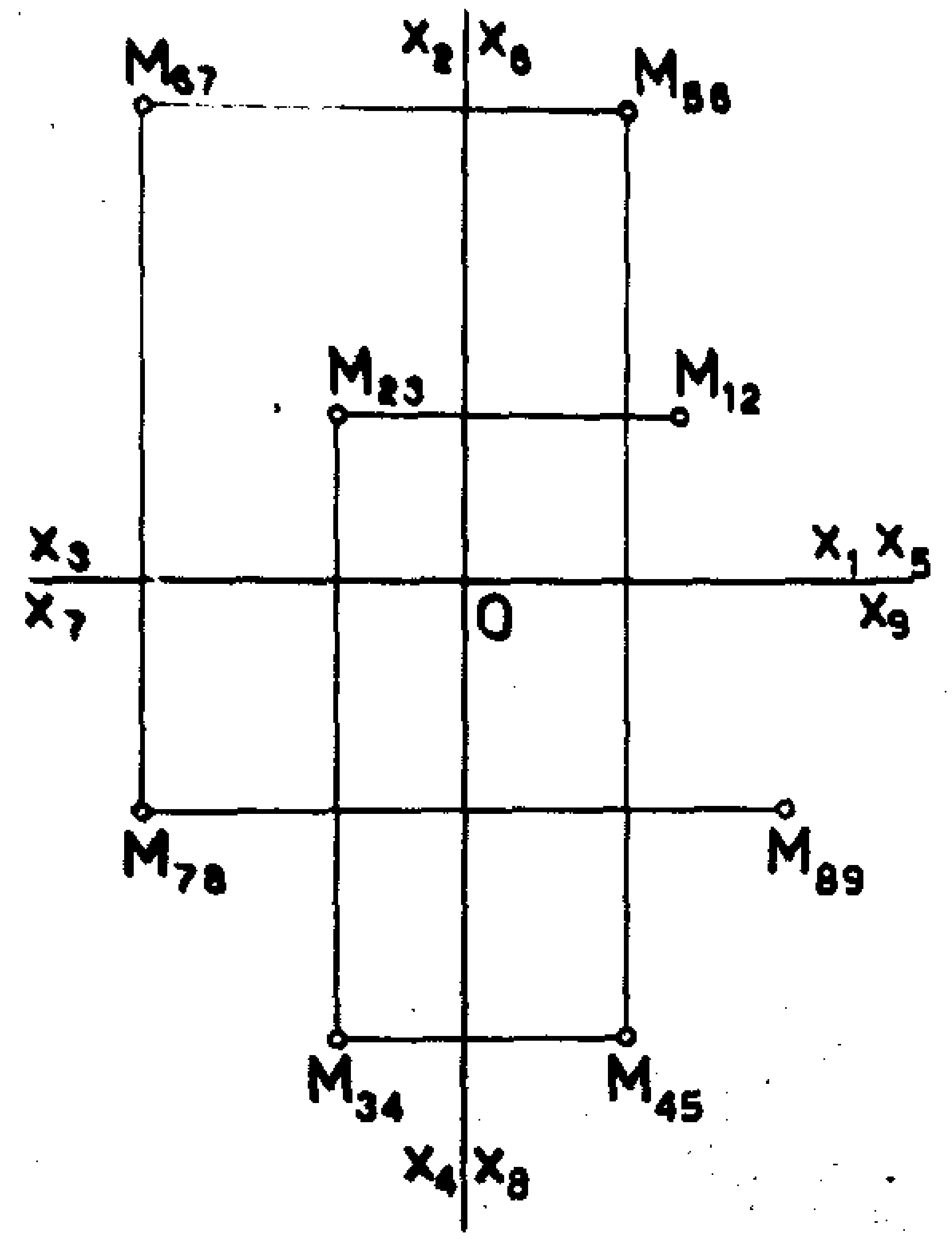
Maurinova metoda upravnog projektovanja u prostoru E_4 pretstavlja najprirodnije uopštenje Mongeove metode upravnog projektovanja u prostoru E_3. Pretpostavimo li da je prostor E_4 odredjen sa četiri uzajamno upravne prave x_1, x_2, x_3, x_4 kroz jednu tačku O, Maurin uzima ravni x_1x_j, $j=2,3,4$, za projekcijske ravni, za razliku od poznate metode upravnog projektovanja izložene u knjizi Mehrdimensionale Geometrie od Schoutea ( ) u kojoj su x_ix_{i+1}, $i=1,2,\ldots,n-1$, projekcijske ravni u prostoru E_n odredjenom uzajamno upravnim osama x_1, x_2, ... , x_n. Maurinovom metodom dobijaju se projekcije nekog objekta u pogodnijem, specijalnijem položaju u ravni crtanja u poredjenju sa prethodnom metodom, jer, dok u Maurinovoj metodi sve projekcije jedne tačke leže na istoj pravoj, u prethodnoj metodi one su temena jedne izlomljene linije. I proširenje metode na prostore E_n, koju donosimo u ovom radu, ima iste prednosti.

U metodi upravnog projektovanja u prostoru E_n, na ravni x_jx_n, $j=1,2,\ldots,n-1$, dali smo jedan način odredjivanja "tragova prostora" u kome se koristi perspektivno afino srodstvo projekcija.

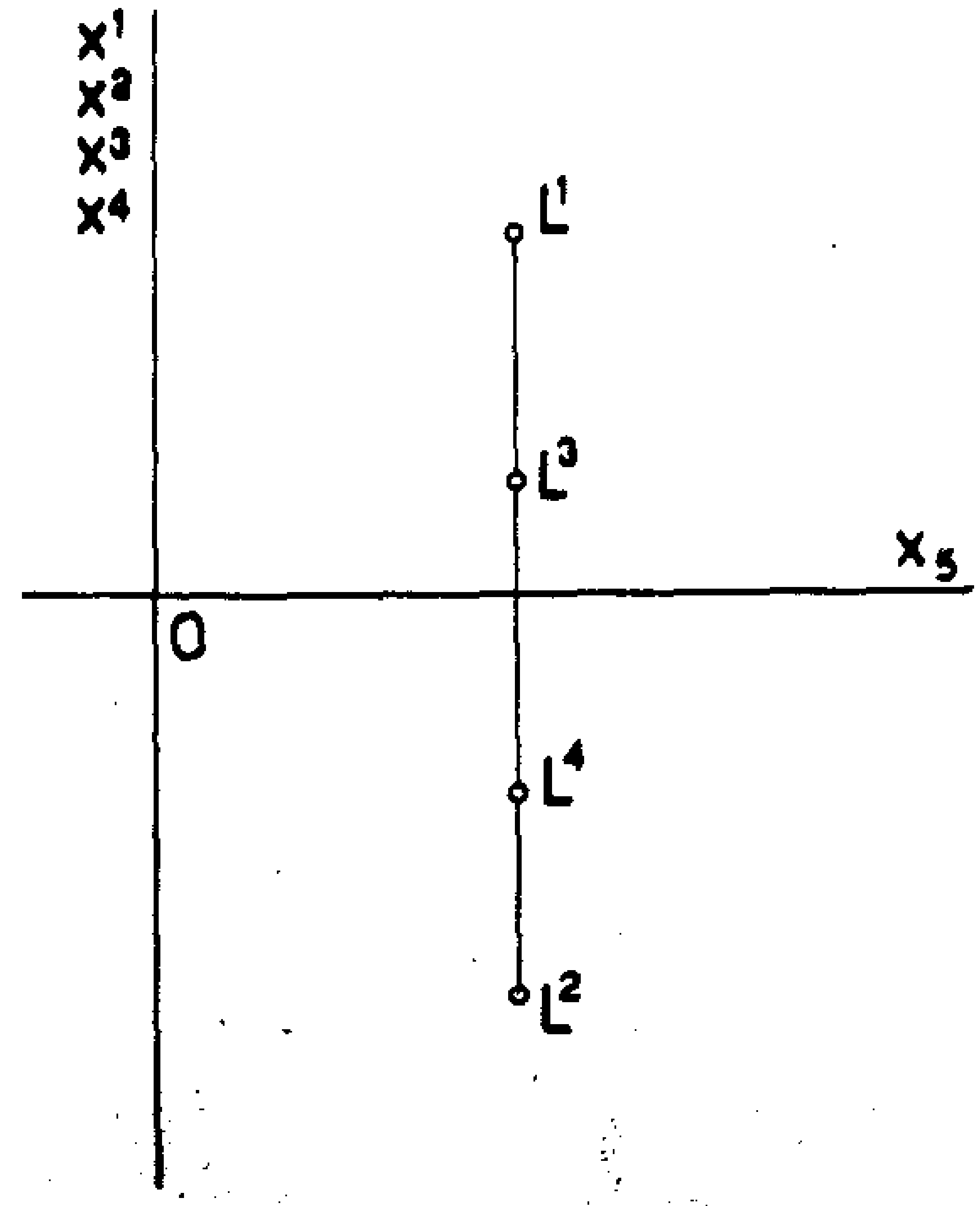
Odredjivanje tragova prostora je jedan od osnovnih zadataka nacrtne geometrije. U nacrtnoj geometriji prostora E_3 trag prave i trag ravni su poznati pojmovi i u mnogim problemima često korišćeni. U nacrtnoj geometriji višedimenzionih prostora, pošto su uglavnom obradjivani problemi prostora E_4, poznate su neke metode odredjivanja tragova ravni i trodimenzionog prostora u E_4. Zajednička tačka proizvoljne ravni i projekcijske ravni i zajednička prava trodimenzionog prostora proizvoljnog položaja i projekcijske ravni smatraju se tragom ravni, odnosno tragom prostora u prostoru E_4. U ovom radu su ove definicije tragova uopštene u prostoru E_n s jedne strane tako što se, u odnosu na projekcijske ravni, tragom smatra ili zajednička tačka ili zajednička prava datog prostora i projekcijske ravni, a sa druge strane, ukoliko su dimenzije projekcijskih prostora veće od dva, tragom se smatra zajednički potprostor datog prostora i projekcijskog prostora. Takodje je data i metoda za njihovo konstruisanje. Proizvoljan m-dimenzioni prostor u euklidskom prostoru E_n obeležavaćemo sa Σ_m, $m < n$, gde donji indeks pretstavlja dimenzije prostora. Kako je u metodi upravnog projektovanja koju smo u radu razvili, položaj projekcija prostora Σ_m pogodan za primenu perspektivno afinog srodstva, mi smo ga upotrebili u konstrukciji tragova prostora Σ_m u E_n.

3. Uočili smo dalje u radu da se ova konstrukcija tragova prostora može primeniti na rešavanje sistema n linearnih jednačina sa n nepoznatih. Upotrebljena metoda projektovanja i konstrukcija tragova omogućavaju da se jednoj grafičkoj metodi rešavanja sistema koju je dao Van den Berg (Amst.Akad. Versl. en Meded. (3)4 (1887), p.204) ( ) a uprostio R. Mehmke (Matem. Sbodnik 16(1892) p.324) (7), da izvesna interpretacija u prostoru E_{n+2}. U toj interpretaciji svakoj jednačini sistema sa n nepoznatih odgovara po jedna tačka, celom sistemu odgovara jedan (n-1)-dimenzioni prostor odredjen tim tačkama, a konstrukciji rešenja sistema odgovara odredjivanje tačaka-tragova (n-1)-dimenzionog prostora.

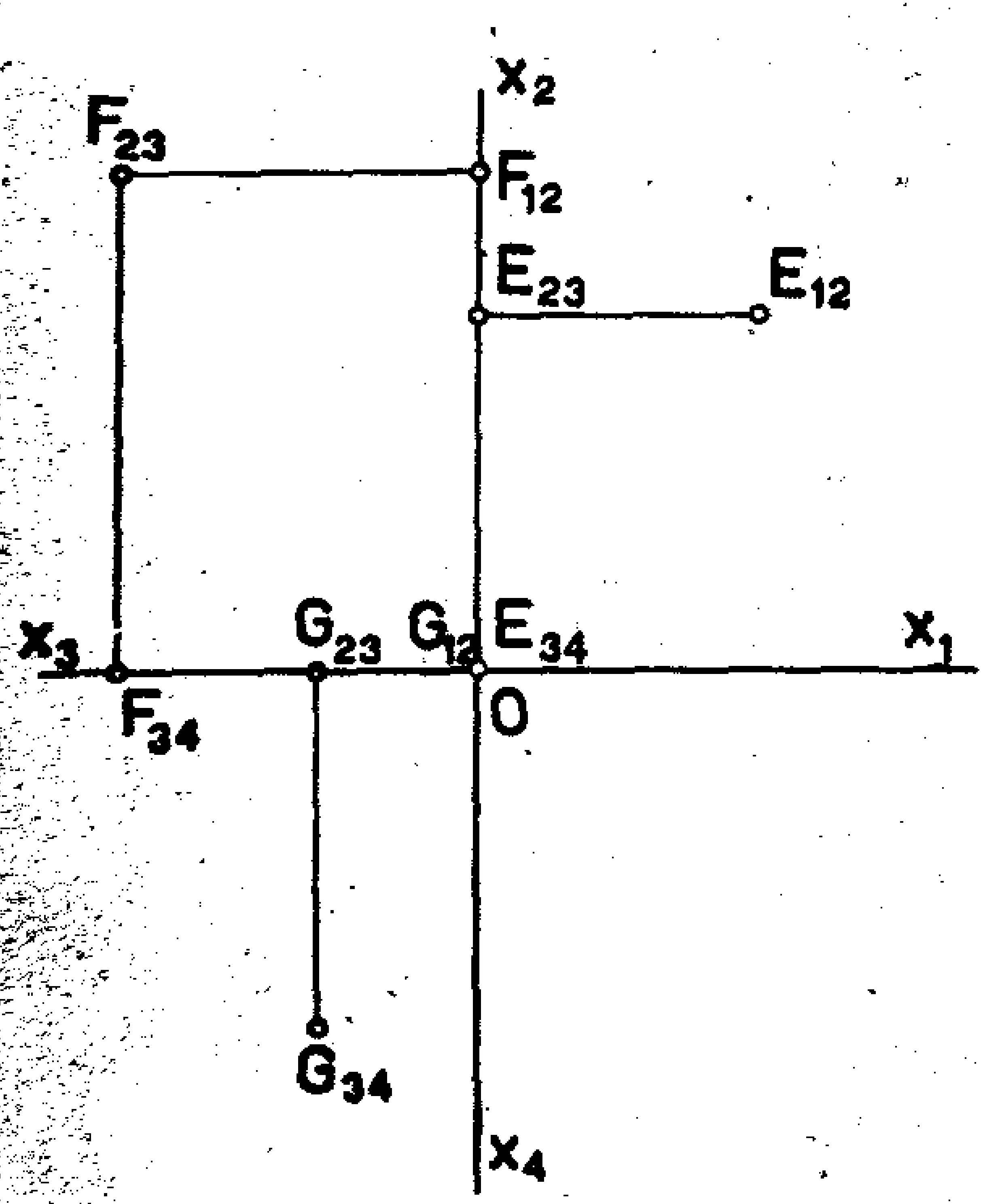
Pošto je uočena mogućnost pretstavljanja jedne jednačine tačkom prostora, dato je u ovom radu izvesno pojednostavljenje konstrukcije rešenja sistema tako što je preslikavanje sistema na prostor izvršeno u prostoru E_{n+1} u kome konstrukciji rešenja sistema odgovara konstrukcija tragova (n-1)-dimenzionog prostora kojim je sistem jednačina pretstavljen.



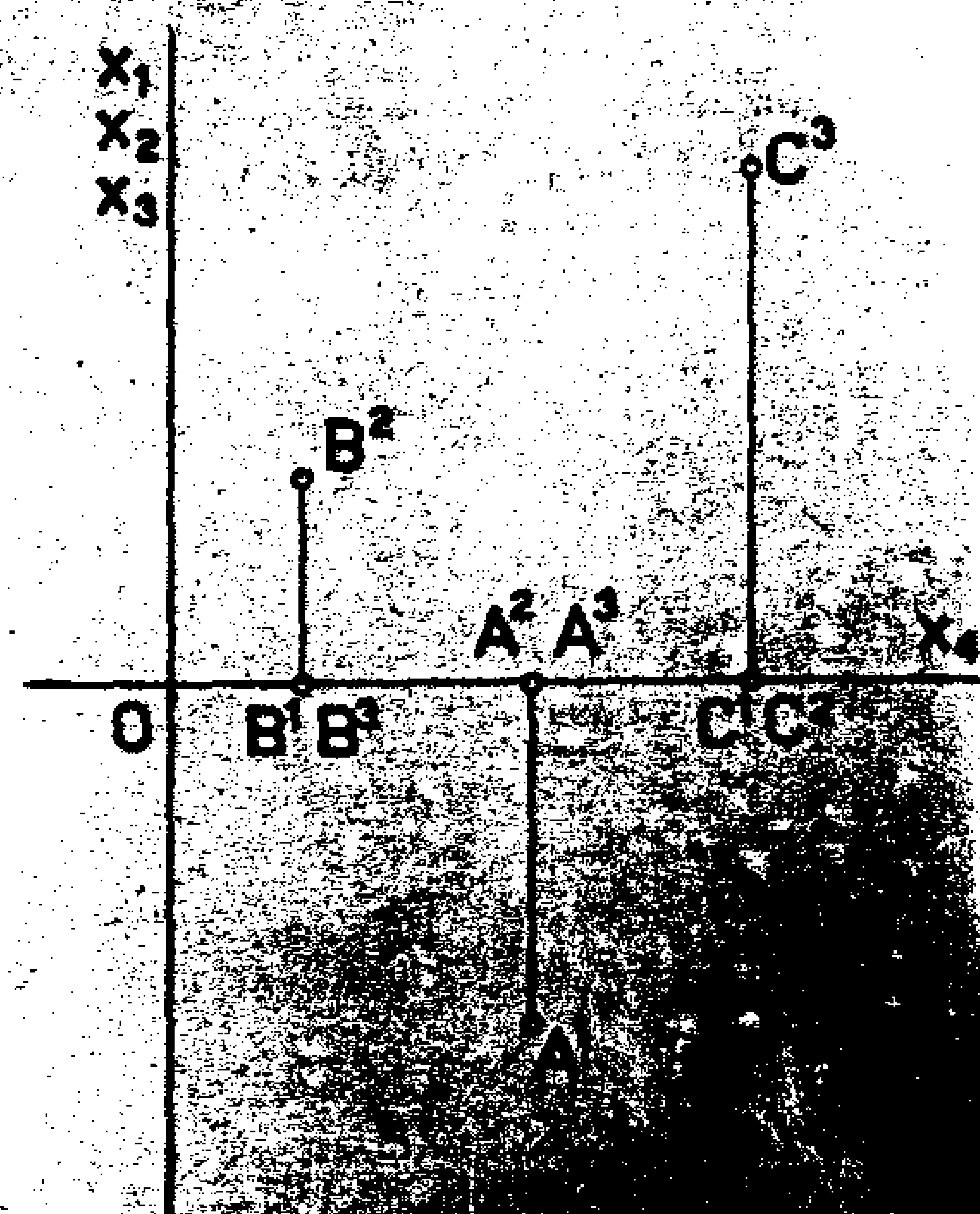
x_2 x_6
M_{67}
M_{56}
M_{23}
M_{12}
x_3
x_1 x_5
x_7
O
x_9
M_{78}
M_{89}
M_{34}
M_{45}
x_4 x_8



x^1
x^2
x^3
x^4
L^1
L^3
x_5
O
L^4
L^2



x_2
F_{23}
F_{12}
E_{23}
E_{12}
x_3
G_{23}
G_{12}
E_{34}
x_1
F_{34}
O
G_{34}
x_4



x_1
x_2
x_3
C^3
B^2
A^2 A^3
x_4
O
B^1 B^3
C^1 C^2
A^1

1. Metode upravnog projektovanja u prostoru E_n

Euklidovski n-dimenzioni prostor obeležavaćemo sa E_n, gde donji indeks pretstavlja dimenzije prostora.

U ovom radu služićemo se jednom metodom upravnog projektovanja koja je poznata za prostor E_4, a koju ćemo mi proširiti i na prostore E_n, $n>4$. Izložićemo zato prvo poznate metode upravnog projektovanja višedimenzione nacrtne geometrije.

Odeljak P.H.Schouteove knjige Mehrdimensionale Geometrie (1902), koji se odnosi na nacrtnu geometriju, ističe se u literaturi kao prva sistematski izložena nacrtna geometrija višedimenzionih prostora. U njoj su dati principi upravnog projektovanja u prostoru E_n, $n>3$, a za prostor E_4 sistematski su izloženi osnovni zadaci: pretstavljanje tačke, prave, ravni i trodimenzionog prostora u njihovim raznim medjusobnim položajima, odredjivanje preseka, prodora, pravih veličina, itd. .

Euklidovski prostor E_n odredjen je ovde sa n uzajamno upravnih osa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koje prolaze kroz tačku O. Projekcije se odredjuju na (n-1) ravni $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n$, koje ne pripadaju istom (n-1)-dimenzionom potprostoru. Rasklapanjem se ove ravni dovode u jednu ravan crtanja. Rasklapanje ravni vrši se tako da se ose u rasklopljenom položaju poklope sa jednom od dveju upravnih pravih ravni crtanja. Na sl.1 pretstavljena je projekcija tačke M u prostoru E_9.

Ovaj način projektovanja se i danas često upotrebljava u literaturi, napr., u geometriji četvorodimenzionog prostora, u odeljku koji se odnosi na nacrtnu geometriju, od W. Lietzmanna (1953) ( ) i Weitzenböcka (1956) ( ).

J. Maurin je u knjizi "Géométrie descriptive à quatre dimensions" (1948) izložio svoju metodu upravnog projektovanja u prostoru E_4 koja se razlikuje od prethodno izložene u izboru projekcijskih ravni. U ovom načinu projektovanja rešio je sistematski osnovne zadatke nacrtne geometrije u vezi sa projekcijama tačke, prave, ravni i trodimenzionog prostora.

Za ravni projekcija izabrao je ravni xy, xz, xt, gde su x, y, z, t uzajamno upravne ose kroz tačku O, koje odredjuju četvorodimenzioni euklidovski prostor E_4. Obaranjem ovih ravni oko ose x dovode se sve one u ravan xy, ravan crtanja. Tada se u ravni crtanja dobijaju dve uzajamno upravne prave: osa x i na njoj upravna prava na kojoj se poklapaju ose y, z, t. Tačka A prostora E_4 pretstavljena je svojim trima upravnim projekcijama a, a', a'' na ravni xy, xz, xt. U ravni crtanja se ove tri tačke nalaze na jednoj pravoj upravnoj na osu x.

U uvodu svoje knjige J. Maurin kaže: " Čini mi se, uostalom, da generalizacija procesa koju sam ja koristio može i dalje da se proširi na veći broj dimenzija... ". To je zaista moguće i mi ćemo to proširenje izvršiti na sledeći način.

Uvedimo oznake pogodne za proširenje na prostore E_n, $n>4$. Obeležimo sa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uzajamno upravne ose kroz tačku O koje odredjuju prostor E_n. Za ravni projekcija izabraćemo ravni $x_1x_n, x_2x_n, \ldots, x_{n-1}x_n$ koje imaju zajedničku osu x_n i ne pripadaju istom $(n-1)$-dimenzionom potprostoru. One se obaranjem oko ose x_n dovode u ravan crtanja x_1x_n. U ravni crtanja dobijaju se opet dve uzajamno upravne prave: osa x_n i na njoj upravna prava na kojoj se poklapaju ose $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$. Izvršimo obaranje tako da se pozitivni smerovi osa $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ poklope sa pozotivnim smerom ose x_1.

Projekciju neke tačke L prostora E_n na jednu od projekcijskih ravni dobijamo ako kroz tačku postavimo jedan $(n-2)$-dimenzioni prostor upravan na projekcijsku ravan. Tačka preseka ovog prostora i projekcijske ravni odredjuje projekciju tačke L. Projekciju tačke L na ravan x_1x_n obeležimo sa L^1. Gornji indeks 1 označava projekciju na osnu ravan odredjenu osama x_1 i x_n. Tačka L prostora E_n pretstavljena je svojim upravnim projekcijama $L^1, L^2, \ldots, L^{n-1}$ na ravni $x_1x_n, x_2x_n, \ldots, x_{n-1}x_n$. Sve projekcije jedne tačke nalaze se u ravni crtanja na jednoj upravnoj na osu x_n. Na sl.2 pretstavljena je tačka L u prostoru E_5.

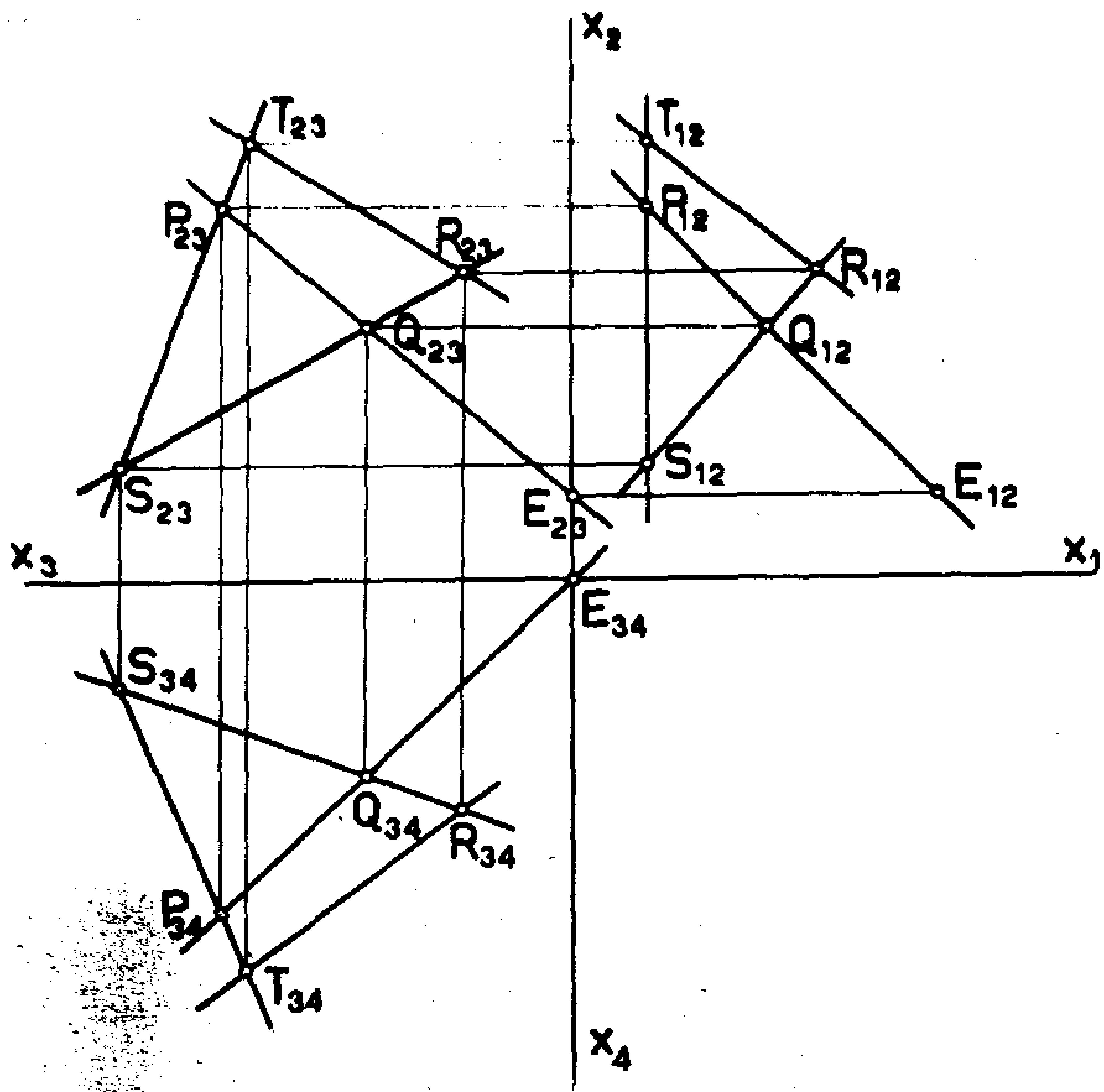
Upravna projekcija prave na ravan u prostoru E_n je prava. Položaj prave u prostoru E_n odredjen je pomoću upravnih projekcija prave na $(n-1)$ projekcijskih ravni. Prava može biti pretstavljena i projekcijama svojih dveju tačaka. Isto tako, svaki prostor $\sum_m$, $m < n$, može biti pretstavljen projekcijama $(m+1)$ tačaka prostora koje ne pripadaju istom $(m-1)$-dimenzionom potprostoru.

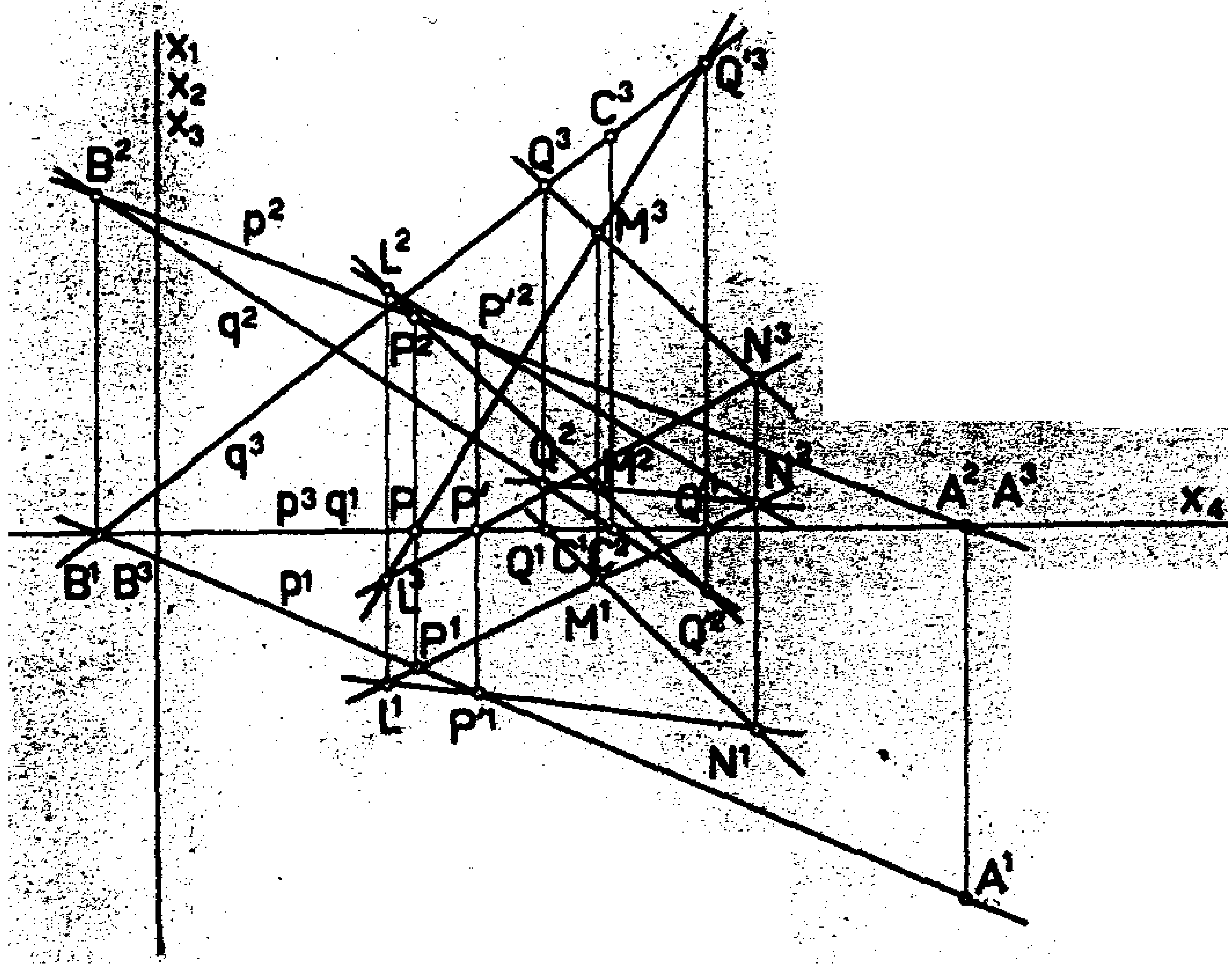
Ovako proširenu metodu na prostore E_n, $n > 4$, upotrebljavaćemo u rešavanju problema u prostoru E_n.

2. Odredjivanje tragova ravni u prostoru E_4

Pošto je glavni problem ovoga rada odredjivanje tragova prostora, izložićemo prvo poznate metode kojima su odredjivani tragovi ravni u prostoru E_4 za oba pomenuta načina upravnog projektovanja.

U prostoru E_4 dve ravni imaju jednu zajedničku tačku ako nisu paralelne i ako se ne nalaze u istom trodimenzionom potprostoru prostora E_4. Prema tome, ravan opšteg položaja ima sa projekcijskom ravni samo jednu zajedničku tačku. Ta se tačka, ana-


x2
T23
T12
P23
R2
R23
R12
Q23
Q12
S23
S12
E23
E12
x3
x1
E34
S34
Q34
R34
P34
T34
x4


x1
x2
x3
B2
p2
q2
q3
L2
P2
P'2
Q3
C3
Q'3
M3
N3
Q2
M2
N2
A2 A3
x4
p3 q1
P
P'
Q1 C1 C2
B1 B3
p1
L3
P1
M1
Q'2
L1
P'1
N1
A1

logo nacrtnoj geometriji prostora E_3 , naziva tragom ravni. U prostoru E_4 ravan ima tri traga, sa svakom od projekcijskih ravni po jednu zajedničku tačku.

Ma kakva ravan prostora E_4 može se pretstaviti projekcijama svojih triju tačaka. To mogu biti ma koje tri tačke ravni koje ne pripadaju istoj pravoj ili baš one tri tačke koje data ravan ima zajedničke, po jednu sa svakom od projekcijskih ravni, tj. tragovi ravni. Na sl.3 pretstavljena je ravan α projekcijama tragova E, F, G na ravni x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, a na sl.4 pretstavljena je ravan β projekcijama tragova A, B, C na ravni x_1x_4 , x_2x_4, x_3x_4 .

Kada je ravan data projekcijama ma kojih triju njenih tačaka može se zahtevati da se odrede tragovi ravni, analogo zadatku u prostoru E_3 .

Na sl.5 date su projekcije ma kojih triju tačaka R, S, T neke ravni μ na ravni projekcija x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4 . Da bi se odredio trag ravni μ u ravni x_1x_2 , treba odrediti onu tačku E ravni koja je u ravni x_1x_2 , tj. tačku čija se projekcija E_{34} poklapa sa tačkom O , presekom osa. Neka je $P_{34}Q_{34}$ projekcija proizvoljne prave PQ ravni RST koja prolazi kroz O (tačke P i Q mogu biti na stranama ST i RS trougla RST) . Tačka prave $P_{34}Q_{34}$ koja se poklapa sa O je E_{34} . Pošto se odrede ostale projekcije $P_{23}Q_{23}$ i $P_{12}Q_{12}$ prave PQ , dobijaju se na njima ostale projekcije E_{23} i E_{12} tačke E . Slično se mogu odrediti projekcije tragova F i G . (Na ovaj način rešen je zadatak u M.G. od Schoutea (10)) .

Tragovi ravni mogu se odrediti i na sledeći način. Odredi se prvo prava p po kojoj data ravan λ seče jedan od trodimenzionih potprostora, napr. , $x_1x_2x_4$, a zatim presečna prava q sa još jednim od ostalih potprostora, napr. , $x_2x_3x_4$. Prodori pravih p i q kroz projekcijske ravni jesu tragovi ravni V , jer su prave p i q prave u ravni V .

Ovako je rešen zadatak u sl.6 gde su date projekcije ravni V projekcijama njenih tačaka L, M, N na ravni x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4 . (Zadatak se može na isti način rešiti i pomoću prvog načina projektovanja.) Prava p , presek date ravni V i potprostora $x_1x_2x_4$, odredjena je pomoću tačaka P i P' čije se projekcije P^3 i P'^3 nalaze na osi x_4 , a odredjene su u preseku pravih L^3M^3 i L^3N^3 sa osom x_4 . Prava q , presek ravni V sa potprostorom $x_2x_3x_4$, odredjena je pomoću tačaka Q i Q' čije su projekcije Q^1 i Q'^1 presečne tačke ose x_4 sa pravim N^1M^1 i L^1M^1 . Prodorne tačke A i B prave p kroz ravni x_1x_4 i x_2x_4 i prodorne tačke B i C prave q kroz ravni x_2x_4 i x_3x_4 jesu tragovi ravni V . (Na ovaj način rešen je zadatak u J.Maurin, G.d. á q.d. (4)) .

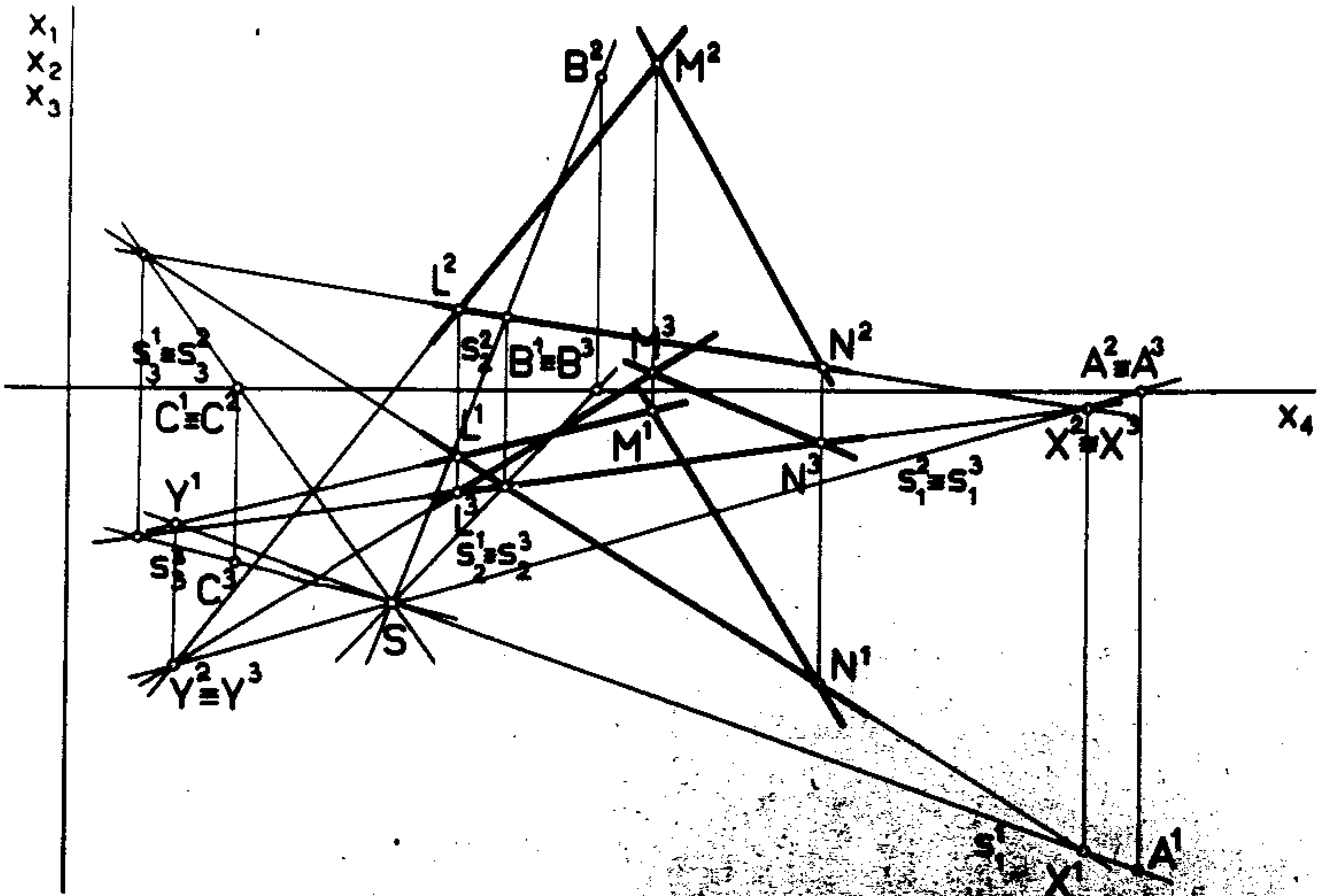
3. Odredjivanje tragova (n-2)-dimenzionog prostora u prostoru E_n primenom afinog srodstva

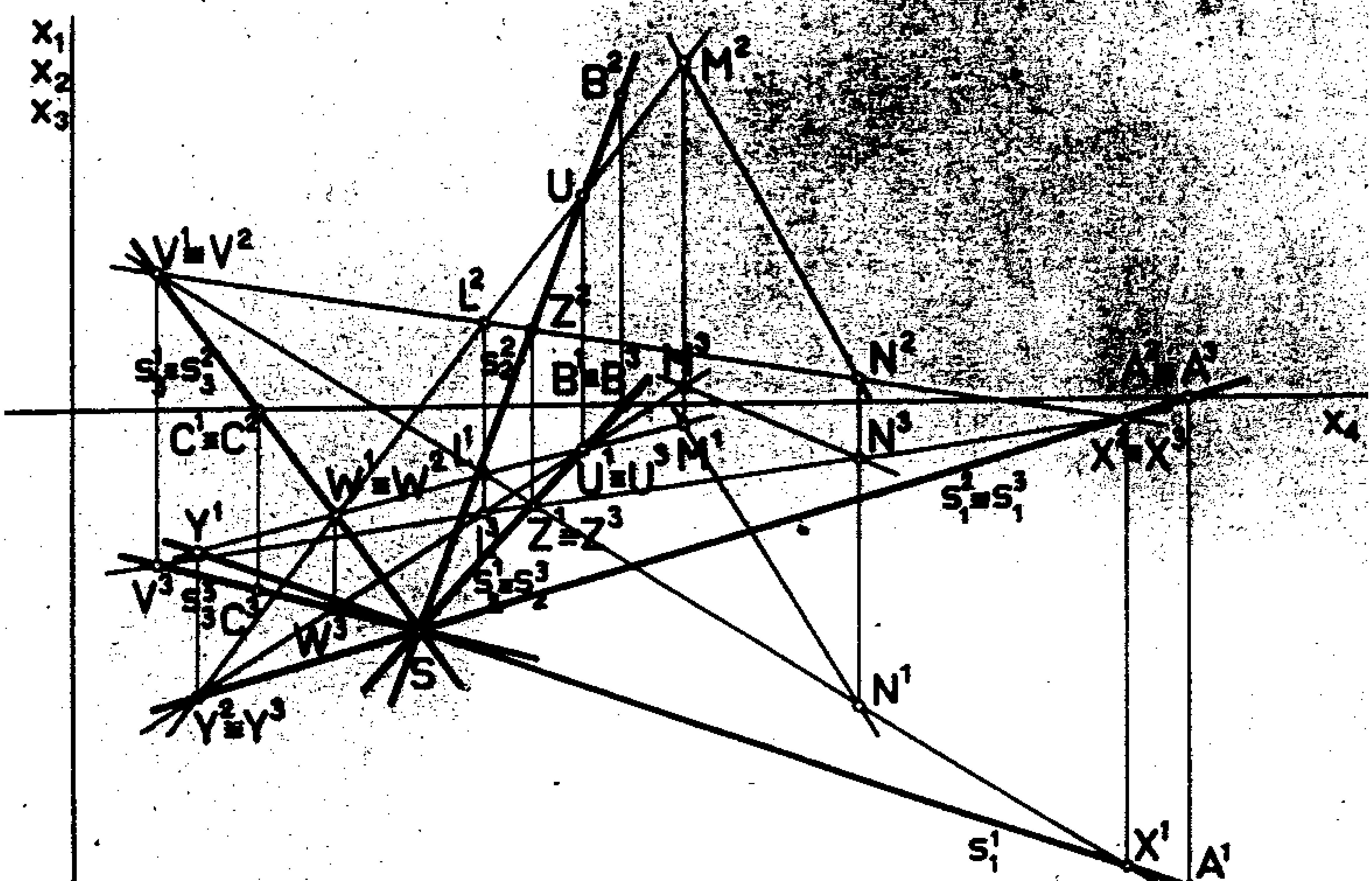
Uvedimo prvo definiciju traga (n-2)-dimenzionog prostora $\Sigma_{(n-2)}$ u n-dimenzionom prostoru E_n .

U prostoru E_n jedan (n-2)-dimenzioni prostor ima sa jednom ravni jednu zajedničku tačku ako sa njom nije paralelan ili se sa njom ne nalazi u istom (n-1)-dimenzionom potprostoru. Prema tome, možemo dati sledeću definiciju:

Definicija 1. Tragom prostora $\Sigma_{(n-2)}$ u prostoru E_n nazivaćemo zajedničku tačku tog prostora i projekcijske ravni.

Pošto se u konstrukciji tragova prostora $\Sigma_{(n-2)}$ ko-


x_1 x_2 x_3
x_4
B^2
M^2
L^2
s_2^2
$B^1 \equiv B^3$
M^3
N^2
$A^2 \equiv A^3$
$s_3^1 \equiv s_3^2$
$C^1 \equiv C^2$
L^1
M^1
N^3
$s_1^2 \equiv s_1^3$
$X^2 \equiv X^3$
Y^1
L^3
$s_2^1 \equiv s_2^3$
s_3^3
C^3
S
N^1
$Y^2 \equiv Y^3$
s_1^1
X^1
A^1


x_1 x_2 x_3
x_4
B^2
M^2
U^2
$V^1 \equiv V^2$
L^2
Z^2
s_2^2
$B^1 \equiv B^3$
M^3
N^2
$A^2 \equiv A^3$
$s_3^1 \equiv s_3^2$
$C^1 \equiv C^2$
L^1
$U^1 \equiv U^3$
M^1
N^3
$X^2 \equiv X^3$
$W^1 \equiv W^2$
$s_1^2 \equiv s_1^3$
Y^1
L^3
$Z^1 \equiv Z^3$
V^3
s_3^3
C^3
W^3
$s_2^1 \equiv s_2^3$
S
N^1
$Y^2 \equiv Y^3$
s_1^1
X^1
A^1

riste tragovi prostora Σ_2 i Σ_1, izložićemo prvo konstrukciju tragova prostora Σ_2 u E_4, tj. tragova ravni u četvorodimenzionom prostoru. Za razliku od poznatih, navedenih konstrukcija tragova ravni, Maurinov način projektovanja daje nam mogućnost da se u izvodjenju konstrukcije poslužimo perspektivno afinim srodstvom projekcija

Tragovi prostora Σ_2 u E_4

Teorema I. Projekcije tragova ravni Σ_2 u prostoru E_4, kad je ravan data projekcijama proizvoljnog trougla, jesu tačke u kojima ose afinosti projekcija tog trougla seku osu x_4.

Dokaz. Neka su $L^1M^1N^1$, $L^2M^2N^2$ i $L^3M^3N^3$ projekcije ravni Σ_2 date projekcijama tačaka L, M, N (sl.7). Trouglovi $L^2M^2N^2$ i $L^3M^3N^3$ su perspektivno afini (odgovarajuća temena nalaze se na paralelnim pravim L^2L^3, M^2M^3, N^2N^3) i imaju osu afinosti. Ona je odredjena presečnim tačkama Y i X pravih L^2M^2 i L^3M^3, L^2N^2 i L^3N^3. Osa afinosti je, dakle, prava ravni LMN na kojoj se, u ravni crtanja, poklapaju projekcije tačaka ravni LMN na ravni x_2x_4, x_3x_4. Presečne tačke odredjuju projekciju s_1^2 prave s_1 koja se poklapa sa projekcijom s_1^3. Osa afinosti s_1^2 u preseku sa osom x_4 odredjuje projekcije A^2, dakle i A^3 tačke A ravni Σ_2. Ordinalama se odredi i projekcija s_1^1 prave s_1 i na njoj se dobija i treća projekcija A^1 tačke A. Tačka A ravni Σ_2 ima dve projekcije A^2 i A^3 na osi x_4, prema tome, ona je u ravni x_1x_4. Prema definiciji, tačka A je trag ravni Σ_2 u ravni x_1x_4.

Pošto se na osi afinosti poklapaju projekcije prave s_1 ravni Σ_2 na ravni x_2x_4 i x_3x_4, prava s_1 nalazi se u prostoru x_1x_4m, gde je m simetrala ugla x_2x_3. Prostor x_1x_4m

može se smatrati simetralnim prostorom poklapanja za prostore $x_1x_2x_4$ i $x_1x_3x_4$ (ili samo prostorom poklapanja ili koincidencije) jer ima osobinu da se projekcije svih objekata sadržanih u njemu na projekcijske ravni x_2x_4 i x_3x_4 poklapaju u ravni crtanja. Prava s_1 pretstavlja, dakle, presek ravni Σ_2 sa prostorom poklapanja x_1x_4m.

Na sličan način može se odrediti osa afinosti trouglova $L^1M^1N^1$ i $L^3M^3N^3$, tj. projekcija s_2^1, odnosno s_2^3, prave s_2 po kojoj ravan Σ_2 seče prostor poklapanja za prostore $x_1x_2x_4$ i $x_2x_3x_4$. Projekcije s_2^1 i s_2^3 se poklapaju i presek prave s_2^1 sa osom x_4 daje projekciju B^1, dakle i B^3 traga B ravni Σ_2 u ravni x_3x_4. Ordinalama se odredjuje projekcija s_2^2 i na njoj B^2.

Osa afinosti trouglova $L^1M^1N^1$ i $L^2M^2N^2$, prava s_3^1, odnosno s_3^2, je projekcija presečne prave s_3 ravni Σ_2 i prostora poklapanja za prostore $x_1x_3x_4$ i $x_2x_3x_4$. Njen presek sa osom x_4 odredjuje projekciju C^1, dakle i C^2. Tačka C je, prema tome, trag ravni Σ_2 u ravni x_3x_4. Na projekciji s_3^3 odredjuje se i projekcija C^3.

Tragovi neke ravni mogu se odrediti na ovaj način samo kod projektovanja proizvoljne ravni na ravni x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4. U tom se načinu projektovanja dve projekcije jedne iste tačke poklapaju na osi x_4 ako se tačka nalazi u jednoj od projekcijskih ravni. Napr., ako je tačka C u ravni x_3x_4 projekcije C^1 i C^2 poklapaju se na osi x_4. U slučaju projektovanja na ravni x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, projekcije jednoga traga ravni su tri razne tačke. Napr., na sl.3, projekcije E_{12}, E_{23}, E_{34} su projekcije traga E u ravni x_1x_2.

Zadatak je rešen za slučaj kada ravan ima opšti položaj prema projekcijskim ravnima, tj. ima tragove u svim projekcijskim ravnima.

Pre nego što navedemo neke specijalne položaje ravni i njihovih tragova prema projekcijskim ravnima, istaknimo jednu osobinu položaja osa afinosti i svih projekcija pravih po kojima data ravan seče prostore poklapanja.

Iz projektivne geometrije je poznato da se ose afinosti tri perspektivno afina trougla sa istim središtem afinosti seku u jednoj tački. Dokažimo da kroz ovu tačku prolaze i ostale projekcije pravih kojima se po dve projekcije poklapaju na osama afinosti.

<u>Teorema II</u> . Ravan Σ_2 u prostoru E_4 seče potprostore poklapanja po pravim čije sve projekcije prolaze kroz jednu tačku u ravni crtanja, tačku S .

<u>Dokaz</u> . Neka je ravan Σ_2 data projekcijama trougla LMN (sl.8) . Neka je osa afinosti trouglova $L^2M^2N^2$ i $L^3M^3N^3$ odredjena tačkama X i Y u kojima se seku prave L^2N^2 i L^3N^3, M^2L^2 i M^3L^3 . Na njoj se poklapaju projekcije s_1^2 i s_1^3 prave s_1 , dakle i projekcije tačaka X^2 i X^3 , Y^2 i Y^3 . Projekcija s_1^1 odredjena je projekcijama X^1 i Y^1 dobijenih ordinalama na pravim L^1N^1 i M^1L^1 .

Osa afinosti trouglova $L^1M^1N^1$ i $L^3M^3N^3$ odredjena je tačkama Z i U u kojima se seku prave L^1N^1 i L^3N^3 , M^1L^1 i M^3L^3 . Na njoj se poklapaju projekcije s_2^1 i s_2^3 prave s_2, dakle i Z^1 i Z^3 , U^1 i U^3 . Neka je S tačka u kojoj se seku ose afinosti XY , ZU , UW , datih trouglova $L^1M^1N^1$, $L^2M^2N^2$, $L^3M^3N^3$. U perspektivno afinoj korespondenciji sa osom ZU pravoj X^3Y^3 odgovara prava X^1Y^1 . Ove se dve odgovarajuće prave moraju seći u jednoj tački ose afinosti. Kako prava X^3Y^3 seče osu ZU u tački S , i prava X^1Y^1 mora prolaziti kroz tačku S.

Na isti način možemo pokazati da projekcije ostalih dveju osa ZU i VW prolaze kroz tačku S .

Ovu teoremu možemo dokazati i na drugi način, koristeći se prostorima poklapanja i presecima date ravni i prostora poklapanja.

U prostoru E_4 trodimenzioni potprostori poklapanja $x_1x_4m_1$ i $x_2x_4m_2$ imaju zajedničku ravan. Pošto je ova ravan u prostoru $x_1x_4m_1$, moraju se u ravni crtanja poklopiti projekcije M^2 i M^3 tačke M ove ravni, a kako je tačka M i u prostoru $x_2x_4m_2$, moraju se poklopiti i projekcije M^1 i M^3 . Dakle, sve tri projekcije M^1 , M^2 i M^3 tačke M padaju u jednu tačku u ravni crtanja. Zajednička ravan prostora $x_1x_4m_1$ i $x_2x_4m_2$ pripada i trećem prostoru poklapanja, prostoru $x_3x_4m_3$, jer se i projekcije M^1 i M^2 svake tačke M ove ravni poklapaju u ravni crtanja. Dakle, sva tri prostora poklapanja imaju zajedničku ravan koja ima osobinu da se sve projekcije tačaka ove ravni poklapaju u ravni crtanja.

Data ravan Σ_2 ima sa svakim od potprostora poklapanja po jednu zajedničku pravu, a sa ravni po kojoj se seku prostori poklapanja ima zajedničku tačku. Presečne prave date ravni i prostora poklapanja prolaze kroz ovu tačku. Obeležimo je sa S . Kako je tačka S u ravni po kojoj se seku prostori poklapanja, sve projekcije ove tačke poklapaju se u ravni crtanja. Kroz ovu tačku prolaze i sve projekcije presečnih pravih date ravni i prostora poklapanja.

Prema položaju osa afinosti i tačke S u odnosu na osu x_4 možemo razlikovati neke specijalne položaje tragova ravni:

a) Ose afinosti imaju u ravni crtanja proizvoljan, kos položaj prema osi x_4 . Presečna tačka S ima takodje proizvoljan položaj, ona je konačna tačka ravni i nije na osi x_4 . Tragovi ravni su tada tri razne tačke u konačnom, ravan ima proizvoljan kos položaj prema projekcijskim ravnima.

b) Ose afinosti imaju u ravni crtanja kos položaj prema osi x_4 . Presečna tačka je konačna tačka S ose x_4 . Kako se, prema teoremi II , prave X^1Y^1 , X^2Y^2 , X^3Y^3 seku u tački S , a ona je na osi x_4 , projekcije A^1 , A^2 i A^3 traga A u ravni x_1x_4 poklapaju se na osi x_4 . Trag A je, dakle, na osi x_4 . Kako je tada A i u ostalim projekcijskim ravnima x_2x_4 i x_3x_4, u tački A , odnosno S , poklapaju se svi tragovi ravni. Za ovaj položaj tragova ravni, ravan ima proizvoljan kos položaj prema projekcijskim ravnima.

c) Ose afinosti su medju sobom paralelne i seku osu x_4, tačka S je beskonačno daleka tačka ravni crtanja i nije na pravoj x_4 . Tragovi ravni su tri razne tačke u konačnom, ravan ima proizvoljan kos položaj prema projekcijskim ravnima.

d) Ose afinosti seku se u tački S koja ima proizvoljan položaj u ravni crtanja, a jedna od osa afinosti(napr., osa XY) paralelna je osi x_4 . Tada je trag u jednoj od projekcijskih ravni u beskonačnosti, ravan je poluparalelna toj projekcijskoj ravni (ravni x_1x_4) .

e) Ako su dve ose afinosti paralelne osi x_4 , presečna tačka S je beskonačno daleka tačka ose x_4 , pa i treća osa mora biti paralelna osi x_4 . Sva tri traga ravni se tada poklapaju u beskonačno dalekoj tački ose x_4 , ravan je paralelna osi x_4 .

Navedimo još slučajeve kada jedna od osa postaje beskonačno daleka prava ravni crtanja. Ako je jedna od osa beskonačno daleka prava, tada ostale dve ose moraju biti paralelne, jer se sa prvom seku u tački S , a ona je beskonačno daleka tačka. Ostale dve ose su ili paralelne osi x_4 ili je seku.

f) Ako su dve ose paralelne sa x_4 a treća (napr. $s_1^2=s_1^3$) je beskonačno daleka prava, tada se tragovi koje odredjuju prve dve ose poklapaju u beskonačno dalekoj tački ose x_4, a treći trag odredjen beskonačno dalekom pravom je neka beskonačno daleka tačka jedne od projekcijskih ravni (ravni x_1x_4). Data ravan tada ima sa beskonačno dalekom pravom ove projekcijske ravni dve zajedničke tačke: na osi x_4 i u projekcijskoj ravni, dakle, beskonačno daleka prava date ravni i projekcijske ravni (ravni x_1x_4) poklapaju se. Prema tome, data ravan je paralelna toj projekcijskoj ravni (ravni x_1x_4).

g) Ako su dve ose paralelne medju sobom i seku osu x_4 u različitim tačkama, a treća osa je beskonačno daleka prava, tada ravan ima u dvema projekcijskim ravnima konačne tačke za tragove, a samo u trećoj (napr. x_1x_4) trag je beskonačno daleka tačka te ravni. Data ravan je tada poluparalelna toj projekcijskoj ravni (ravni x_1x_4).

Tragovi prostora $\Sigma_{(n-2)}$ u E_n

Izloženi način odredjivanja tragova ravni može se uopštiti i primeniti na odredjivanje tragova prostora $\Sigma_{(n-2)}$ u prostoru E_n.

Teorema III. Tragovi jednodimenzionih potprostora sadržanih u datom prostoru $\Sigma_{(n-2)}$, koji su preseci datog prostora $\Sigma_{(n-2)}$ i potprostora poklapanja u odnosu na projekcijske ravni x_ix_n, $i=1,2,\dots,n-1$, jesu tragovi i datog prostora $\Sigma_{(n-2)}$ u prostoru E_n.

Dokaz. Neka je jedan $(n-2)$-dimenzioni prostor $\Sigma_{(n-2)}$ dat projekcijama na kojih $(n-1)$ tačaka $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$.

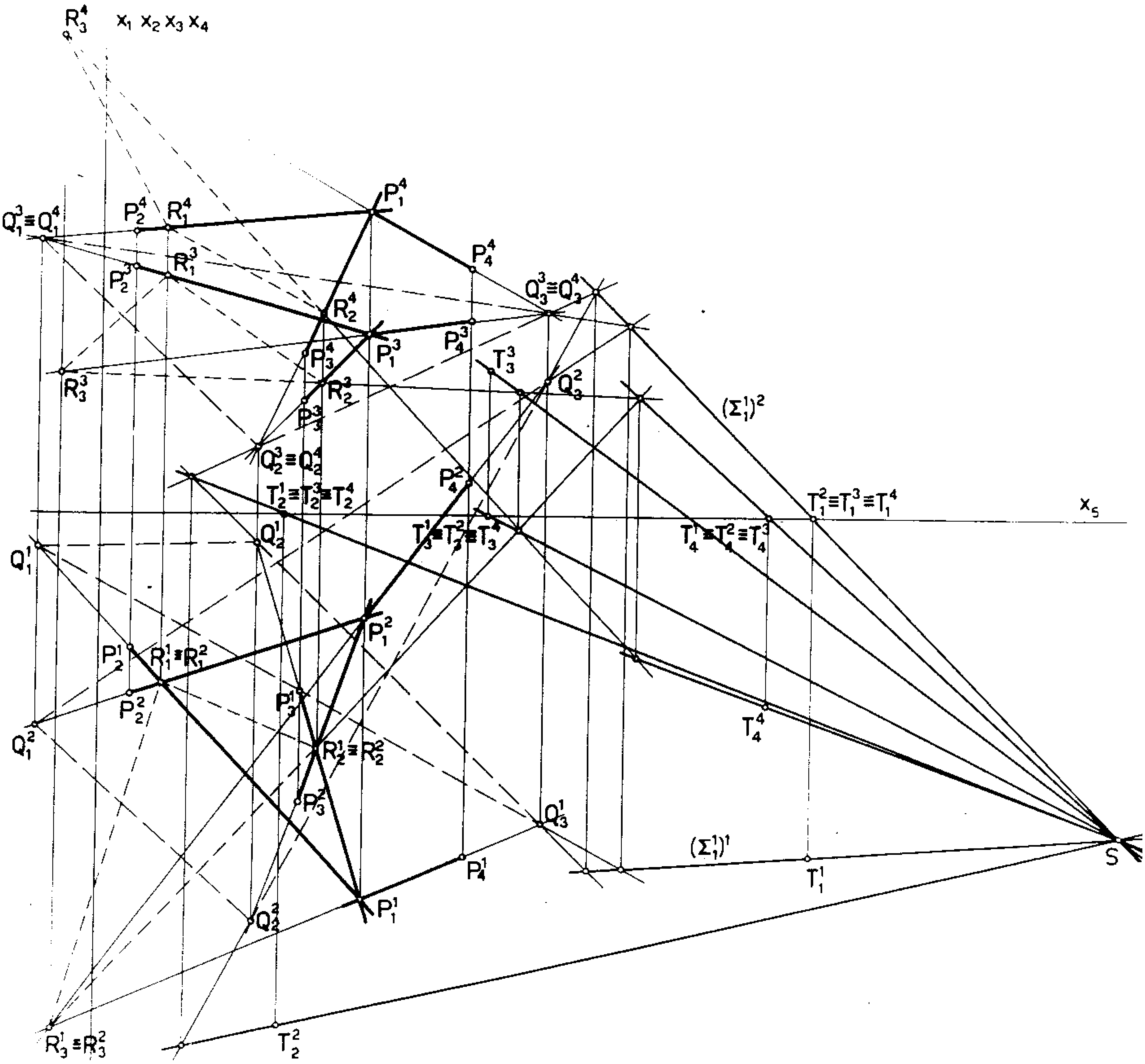
U prostoru E_n dati prostor $\Sigma_{(n-2)}$ seče prostor poklapanja $E^1_{(n-1)}$ za prostore $x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n$ i $x_1x_2\ldots x_{n-3}x_{n-1}x_n$ koji je odredjen osama $x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}, x_n$ i simetralom m_1 ugla $x_{n-2}x_{n-1}$, po prostoru $\Sigma^1_{(n-3)}$. Projekcije prostora $\Sigma^1_{(n-3)}$ kao potprostora prostora $E^1_{(n-1)}$, na ravni $x_{n-2}x_n$ i $x_{n-1}x_n$ poklapaju se u ravni crtanja. Prema tome, poklapaju se projekcije Q_1^{n-2} i Q_1^{n-1}, Q_2^{n-2} i Q_2^{n-1}, ..., Q_{n-2}^{n-2} i Q_{n-2}^{n-1} tačaka Q_1, Q_2, ..., Q_{n-2} koje odredjuju prostor $\Sigma^1_{(n-3)}$. Zato se one mogu odrediti u preseku pravih $P_1^{n-2}P_2^{n-2}$ i $P_1^{n-1}P_2^{n-1}$, $P_1^{n-2}P_3^{n-2}$ i $P_1^{n-1}P_3^{n-1}$, ..., $P_1^{n-2}P_{n-1}^{n-2}$ i $P_1^{n-1}P_{n-1}^{n-1}$. Kako je prostor $\Sigma^1_{(n-3)}$ sadržan u prostoru $\Sigma_{(n-2)}$, njegovi tragovi u ravnima x_1x_n, x_2x_n, ..., $x_{n-3}x_n$ su i tragovi prostora $\Sigma_{(n-2)}$. Da bi se odredili i tragovi prostora $\Sigma_{(n-2)}$ u ravnima $x_{n-2}x_n$ i $x_{n-1}x_n$ treba, na sličan način, odrediti presek datog prostora $\Sigma_{(n-2)}$ sa još jednim od prostorapoklapanja za koji se projekcije na ravni $x_{n-2}x_n$ i $x_{n-1}x_n$ u ravni crtanja ne poklapaju. Napr., sa prostorom poklapanja $E^2_{(n-1)}$, tj. $m_2x_3x_4\ldots x_n$, za prostore $x_2x_3\ldots x_n$ i $x_1x_3x_4\ldots x_n$, gde je m_2 simetrala ugla x_1x_2. Neka je to prostor $\Sigma^2_{(n-3)}$. Tragovi prostora $\Sigma^2_{(n-3)}$ u ravni $x_{n-2}x_n$ i $x_{n-1}x_n$ jesu i tragovi prostora $\Sigma_{(n-2)}$.

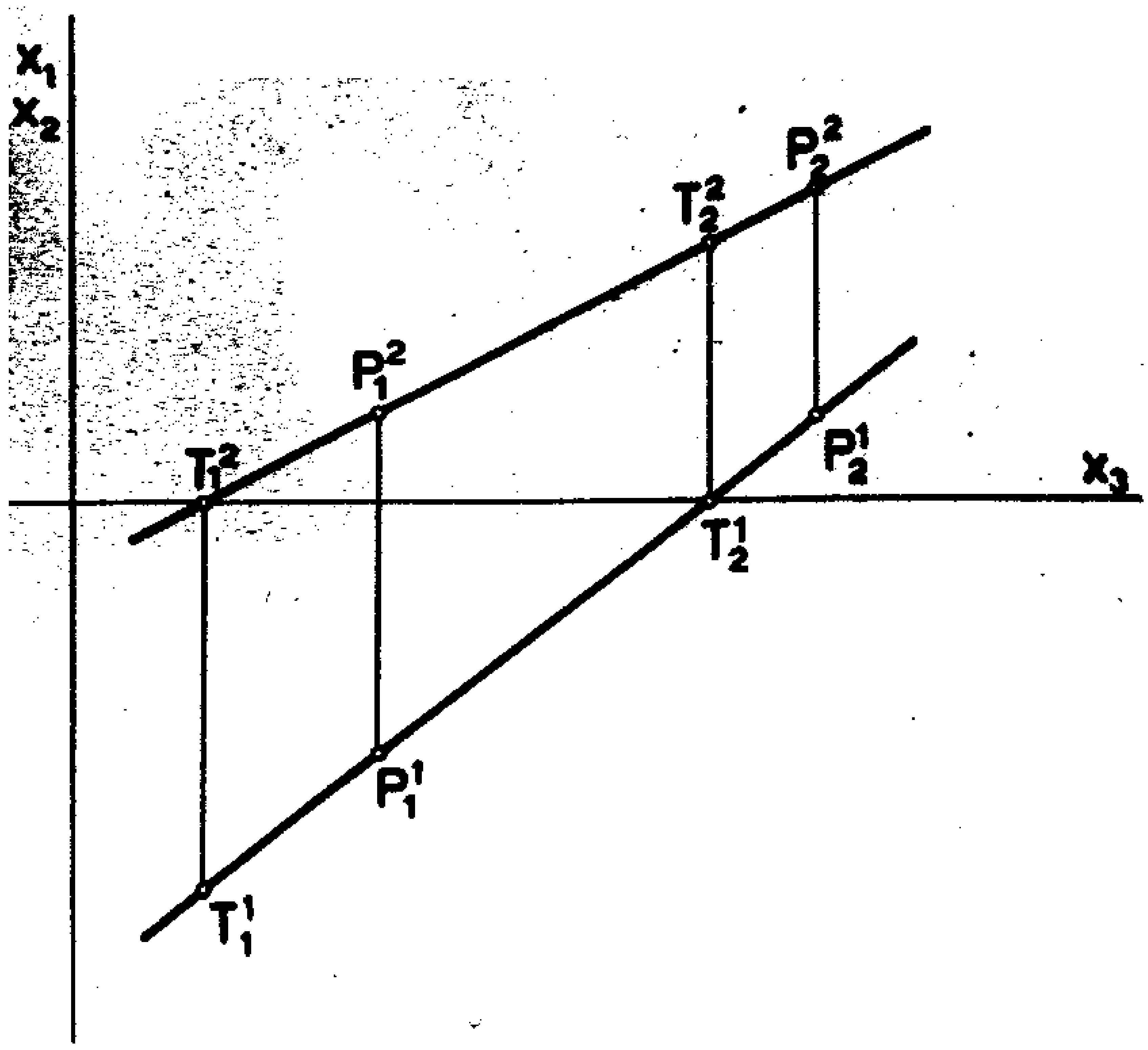
Za odredjivanje tragova u ravnima x_1x_n, x_2x_n, ..., $x_{n-3}x_n$, prostora $\Sigma^1_{(n-3)}$ koji je sadržan u prostoru $E^1_{(n-1)}$, postupak se ponavlja. Odredjuju se prostori $\Sigma^1_{(n-4)}$ i $\Sigma^2_{(n-4)}$, po kojima prostor $\Sigma^1_{(n-3)}$ seče potprostore poklapanja $E^1_{(n-2)}$ i $E^2_{(n-2)}$ za $(n-2)$-dimenzione potprostore prostora $E^1_{(n-1)}$. Potprostori poklapanja $E^1_{(n-2)}$ i $E^2_{(n-2)}$ biraju se tako da se projekcija prostora $\Sigma^1_{(n-4)}$ na ravan $x_{n-3}x_n$ u ravni crtanja poklopi sa projekcijama na ravni $x_{n-2}x_n$ i $x_{n-1}x_n$, a da se projekcija prostora $\Sigma^2_{(n-4)}$ na ravan $x_{n-4}x_n$ u ravni crtanja poklopi sa projekcijama na ravni $x_{n-2}x_n$ i $x_{n-1}x_n$. Time se postiže da se pomoću prostora $\Sigma^1_{(n-4)}$ dobiju tragovi prostora $\Sigma_{(n-2)}$ u ravnima x_1x_n, x_2x_n, ..., $x_{n-4}x_n$, a pomoću prostora $\Sigma^2_{(n-4)}$ trag u ravni $x_{n-3}x_n$.

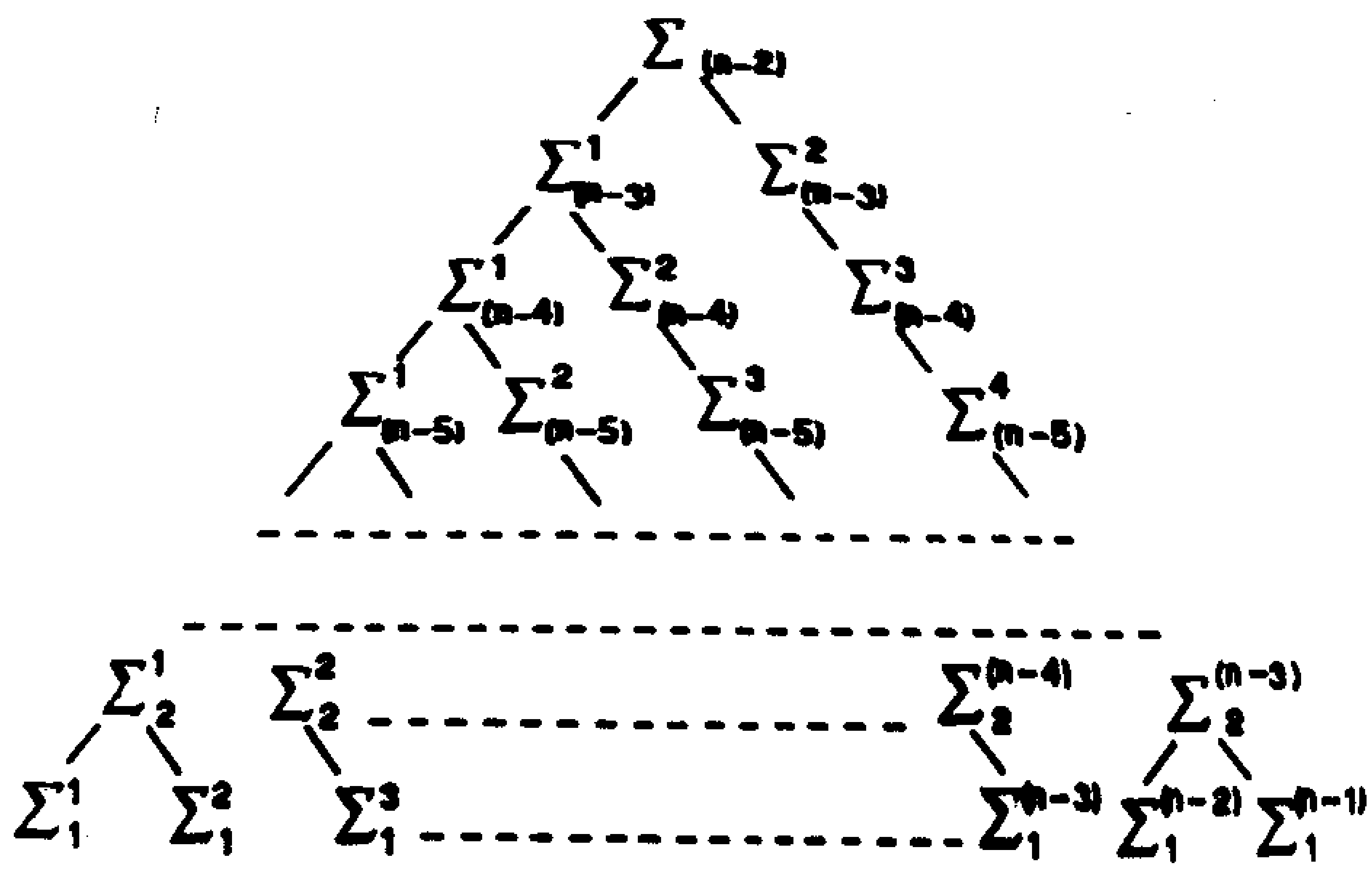
Za odredjivanje tragova u ravni $x_{n-2}x_n$ i $x_{n-1}x_n$ postupak se nastavlja na taj način što se odredi prostor $\Sigma^3_{(n-4)}$, presek prostora $\Sigma^2_{(n-3)}$ sa potprostorom poklapanja $E^3_{(n-2)}$ prostora $E^2_{(n-1)}$, za koji se projekcija na ravan x_3x_n u ravni crtanja poklapa sa projekcijama na ravni x_1x_n i x_2x_n.

Na navedeni način odredjuju se prostori manjeg broja dimenzija dok se ne dobiju ravni Σ^1_2, Σ^2_2, ..., Σ^{n-3}_2 sadržane u datom prostoru $\Sigma_{(n-2)}$. Prema teoremi I, tragove ovih ravni odredjujemo pomoću osa afinosti projekcija trouglova kojima su ove ravni pretstavljene, tj. pomoću pravih koje su preseci ravni sa odgovarajućim prostorima poklapanja. Obeležimo prave sa Σ^1_1, Σ^2_1, ..., Σ^{n-1}_1. Projekcije prave Σ^1_1 su u ravni crtanja dve prave. Jedna od njih je projekcija na ravan x_1x_n, $(\Sigma^1_1)^1$, a na drugoj pravoj poklapaju se sve ostale projekcije $(\Sigma^1_1)^2$, $(\Sigma^1_1)^3$, ..., $(\Sigma^1_1)^{n-1}$, prave Σ^1_1. Trag ove prave u ravni x_1x_n, tačka T_1, ima projekciju T^1_1 na pravoj $(\Sigma^1_1)^1$, a ostale projekcije se poklapaju na osi x_n. Kako je prava Σ^1_1 u prostoru $\Sigma_{(n-2)}$, i kako se projekcije T^2_1, T^3_1, ..., T^{n-1}_1 tačke T poklapaju na osi x_n, tačka T_1 je trag prostora $\Sigma_{(n-2)}$ u ravni x_1x_n.

Postupak kojim su odredjeni tragovi prostora $\Sigma_{(n-2)}$ u prostoru E_n, možemo pretstaviti šemom :


R_3^4 x_1 x_2 x_3 x_4
$Q_1^3 \equiv Q_1^4$
P_2^4
R_1^4
P_1^4
P_4^4
P_2^3
R_1^3
$Q_3^3 \equiv Q_3^4$
R_2^4
P_1^3
P_4^3
P_3^4
T_3^3
R_3^3
R_2^3
Q_3^2
P_3^3
$(\Sigma_1^1)^2$
$Q_2^3 \equiv Q_2^4$
P_4^2
$T_2^1 \equiv T_2^3 \equiv T_2^4$
$T_1^2 \equiv T_1^3 \equiv T_1^4$
x_5
Q_2^1
$T_3^1 \equiv T_3^2 \equiv T_3^4$
$T_4^1 \equiv T_4^2 \equiv T_4^3$
Q_1^1
P_1^2
P_2^1
$R_1^1 \equiv R_1^2$
P_3^1
P_2^2
T_4^4
Q_1^2
$R_2^1 \equiv R_2^2$
P_3^2
Q_3^1
$(\Sigma_1^1)^1$
S
P_4^1
T_1^1
P_1^1
Q_2^2
$R_3^1 \equiv R_3^2$
T_2^2


x_1
x_2
P_2^2
T_2^2
P_1^2
P_2^1
T_1^2
x_3
T_2^1
P_1^1
T_1^1



Prema gornjem postupku je na sl.9 izvedena konstrukcija odredjivanja tragova prostora kada je $n=5$.

U prostoru E_5 dat je trodimenzioni prostor Σ_3 projekcijama tačaka P_1, P_2, P_3, P_4 na projekcijskim ravnima x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5 (sl.9). Treba odrediti tragove prostora Σ_3 u ovim projekcijskim ravnima.

Prostor Σ_3 seče prostor poklapanja $x_1x_2x_5m_1$ prostora $x_1x_2x_4x_5$ i $x_1x_2x_3x_5$ po ravni Σ_2^1. Pošto je Σ_2^1 objekat u prostoru poklapanja $x_1x_2x_5m_1$, projekcije tačaka ravni Σ_2^1 u ravni x_3x_5 i x_4x_5 poklapaju se u ravni crtanja. Projekcije triju tačaka Q_1, Q_2, Q_3 ove ravni možemo, prema tome, dobiti u preseku pravih $P_1^3P_2^3$ i $P_1^4P_2^4$, $P_1^3P_3^3$ i $P_1^4P_3^4$, $P_1^3P_4^3$ i $P_1^4P_4^4$. Dakle, projekcije Q_1^3 i Q_1^4, Q_2^3 i Q_2^4, Q_3^3 i Q_3^4 tačaka Q_1, Q_2, Q_3 se poklapaju. Ostale projekcije odredjuju se ordinalama na odgovarajućim pravim.

Ravan Σ_2^1 sadržana je u datom trodimenzionom prostoru Σ_3 i zato su tragovi ravni Σ_2^1 tragovi i prostora Σ_3. Ravan Σ_2^1 sadržana je i u četvorodimenzionom prostoru $x_1x_2x_5m_1$, pa se tragovi ravni Σ_2^1 u projekcijskim ravnima x_1x_5 i x_2x_5 odredjuju prema teoremi I. Neka su to tragovi T_1 i T_2 prostora Σ_3.

Slično se može odrediti presek prostora Σ_3 sa prostorom poklapanja $x_3x_4x_5m_2$ potprostora $x_2x_3x_4x_5$ i $x_1x_3x_4x_5$, koji je odredjen pravim x_3, x_4, x_5 i pravom m_2, simetralom ugla x_1x_2. Presek je ravan Σ_2^2. Projekcije ravni Σ_2^2 na ravni x_1x_5 i x_2x_5, kao objekta u prostoru poklapanja, poklapaju se u ravni crtanja. Projekcije tačaka R_1, R_2, R_3 ravni Σ_2^2 odredjuju se u preseku pravih $P_1^1P_2^1$ i $P_1^2P_2^2$, $P_1^1P_3^1$ i $P_1^2P_3^2$, $P_1^1P_4^1$ i $P_1^2P_4^2$. Projekcije R_1^1 i R_1^2, R_2^1 i R_2^2, R_3^1 i R_3^2 poklapaju se, a ostale projekcije ovih tačaka nalaze se na ostalim projekcijama odgovarajućih pravih. Tragovi ravni Σ_2^2, T_3 u ravni x_3x_5, i T_4 u ravni x_4x_5, su tragovi prostora Σ_3 i odredjuju se prema teoremi I.

Pomenimo da je teoremom III, za $n=4$, obuhvaćena teorema I, a za $n=3$, obuhvaćen i poznat način odredjivanja tragova prave u prostoru E_3.

Neka je u prostoru E_3 data prava, prostor Σ_1, projekcijama tačaka P_1 i P_2 na ravnima x_1x_3 i x_2x_3 (sl.10). Trag prave u ravni x_1x_3 je tačka T_1 čija je projekcija T_1^2 na osi x_3, a trag u ravni x_2x_3 je tačka T_2 sa projekcijom T_2^1 na osi x_3.

Prema tome, teoremu III možemo smatrati direktnim uopštenjem odredjivanja tragova prave u prostoru E_3 za prostor E_n.

U ovom odeljku odredjivali smo tragove prostora pod pretpostavkom da oni prema projekcijskim ravnima imaju proizvoljan kos položaj prema projekcijskim ravnima, da postoje tragovi u svim projekcijskim ravnima.

možemo razlikovati neke specijalne položaje prostora prema projekcijskim ravnima.

Tragove prostora $\Sigma_{(n-2)}$ odredjivali smo pomoću pravih sadržanih u ovom prostoru i odredjenih u preseku sa prostorima poklapanja. Istaknimo zato jednu osobinu koja se odnosi na položaj projekcija ovih pravih u ravni crtanja.

<u>Teorema IV</u>. Prostor $\Sigma_{(n-2)}$ u prostoru E_n seče pet prostore poklapanja za projekcijske ravni $x_i x_n$, $i=1,2,\dots,n-1$, po pravim čije sve projekcije prolaze kroz jednu tačku u ravni crtanja, tačku S.

<u>Dokaz</u>. U prostoru E_n jedan $(n-1)$-dimenzioni potprostor poklapanja ima osobinu da se po dve projekcije tačaka tog prostora poklapaju u ravni crtanja. Napr., za tačku M potprostora $E^1_{(n-1)}$ $(x_1x_2\dots x_{n-3}x_nm_1)$ poklapaju se projekcije M^{n-1} i M^{n-2}, ili, za tačku L potprostora $E^2_{(n-1)}$ $(x_1x_2\dots x_{n-4}x_{n-1}x_nm_2)$ poklapaju se projekcije L^{n-3} i L^{n-2}.

Dva $(n-1)$-dimenziona prostora imaju u prostoru E_n zajednički $(n-2)$-dimenzioni prostor. Dakle, i $(n-1)$-dimenzioni prostori poklapanja seku se, dva po dva, po $(n-2)$-dimenzionim potprostorima. Neka je $E^1_{(n-2)}$ presek prostora $E^1_{(n-1)}$ i $E^2_{(n-1)}$. Pošto je ovaj prostor sadržan u prostoru $E^1_{(n-1)}$, projekcije N^{n-1} i N^{n-2} jedne njegove tačke N poklapaju se u ravni crtanja; kako je on sadržan i u prostoru $E^2_{(n-1)}$, poklapaju se i projekcije N^{n-3} i N^{n-2} ove tačke N. Dakle, sve tri projekcije N^{n-1}, N^{n-2} i N^{n-3} tačke N $(n-2)$-dimenzionog prostora poklapanja $E^1_{(n-2)}$ poklapaju se u ravni crtanja.

Dalje možemo odrediti presečne $(n-3)$-dimenzione potprostore $(n-2)$-dimenzionih prostora poklapanja čije tačke imaju osobinu da im se po četiri projekcije poklapaju u ravni crtanja. Ako taj postupak nastavimo, dobijamo najzad da se po dva trodimenziona potprostora poklapanja seku po dvodimanzionim potprostorima poklapanja. Kako se u dvodimenzionom prostoru poklapanja poklapaju svih (n-1) projekcija jedne tačke tog prostora, taj dvodimenzioni prostor poklapanja sadržan je u svim prethodnim prostorima poklapanja.

U prostoru E_n jedan dati (n-2)-dimenzioni prostor $\Sigma_{(n-2)}$ ima sa ovim dvodimenzionim prostorom poklapanja jednu zajedničku tačku. Dakle, u ravni crtanja, prostor $\Sigma_{(n-2)}$ ima jednu tačku čije se sve projekcije poklapaju u ravni crtanja.

Prilikom odredjivanja tragova prostora, odredjivali smo prave po kojima dati prostor $\Sigma_{(n-2)}$ seče trodimenzione prostore poklapanja za čije se tačke (n-2) projekcije poklapaju u ravni crtanja. Svaka od ovih pravih ima sa dvodimenzionim prostorom poklapanja jednu zajedničku tačku. Kako su sve ove prave u prostoru $\Sigma_{(n-2)}$, a on sa dvodimenzionim prostorom poklapanja ima samo jednu zajedničku tačku, tačku S, kroz tačku S prolaze sve ove prave. U ravni crtanja tada sve projekcije ovih pravih prolaze kroz jednu tačku, tačku S, u kojoj se poklapaju sve projekcije zajedničke tačke prostora $\Sigma_{(n-2)}$ i dvodimenzionog prostora poklapanja. Na sl.9 konstruisana je tačka S za n=5 .

Prema položaju tačke S i projekcijama pravih kroz S, čijim presekom sa osom x_{n+1} odredjujemo projekcije targova u ravni crtanja, možemo razlikovati neke specijalne položaje prostora prema projekcijskim ravnima. Položaj tačke S i projekcija pravih Σ_1^i kojima odredjujemo te tragove prostora u ravni crtanja, isti je u slučaju prostora $\Sigma_{(n-2)}$ kao i u slučaju odredjivanja tragova ravni. Prema navedenim položajima tačke S i projekcija pravih Σ_1^i, možemo razlikovati neke položaje prostora: paralelan ili poluparalelan prema projekcijskoj ravni, paralelan sa osom x_n, kos položaj prema projekcijskim ravnima.

4. Odredjivanje tragova (n-1)-dimenzionog prostora u prostoru E_n

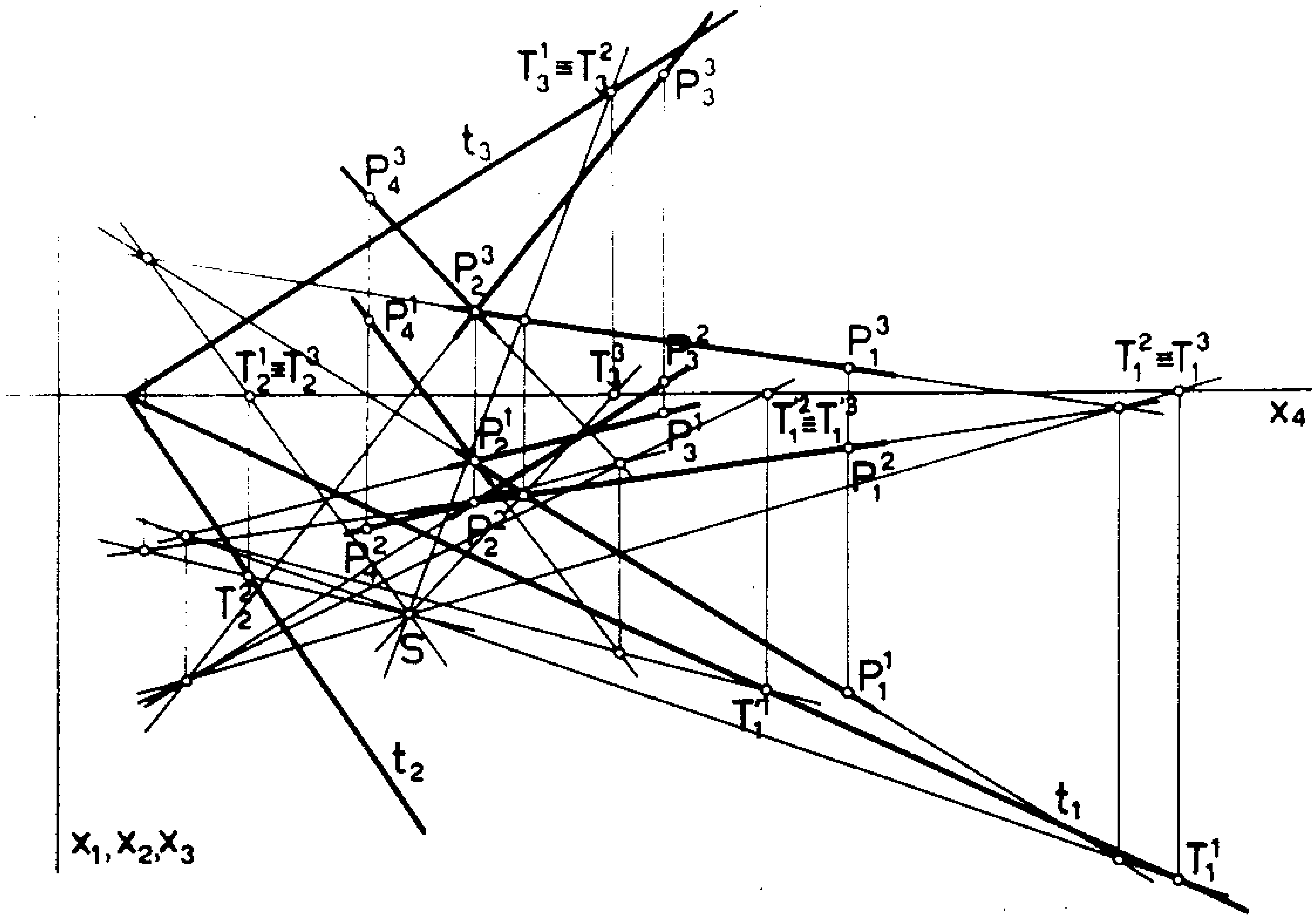
U prethodnom izlaganju smo tragom nazivali zajedničku tačku prostora i projekcijske ravni. U prostoru E_n jedan (n-1)-dimenzioni prostor ima sa jednom projekcijskom ravni, u opštem slučaju, zajedničku pravu. Analogo tragu ravni u prostoru E_3 možemo dati još jednu definiciju traga prostora:

Definicija 2. Tragom prostora $\Sigma_{(n-1)}$ u prostoru E_n zvaćemo zajedničku pravu ovog prostora i projekcijske ravni.

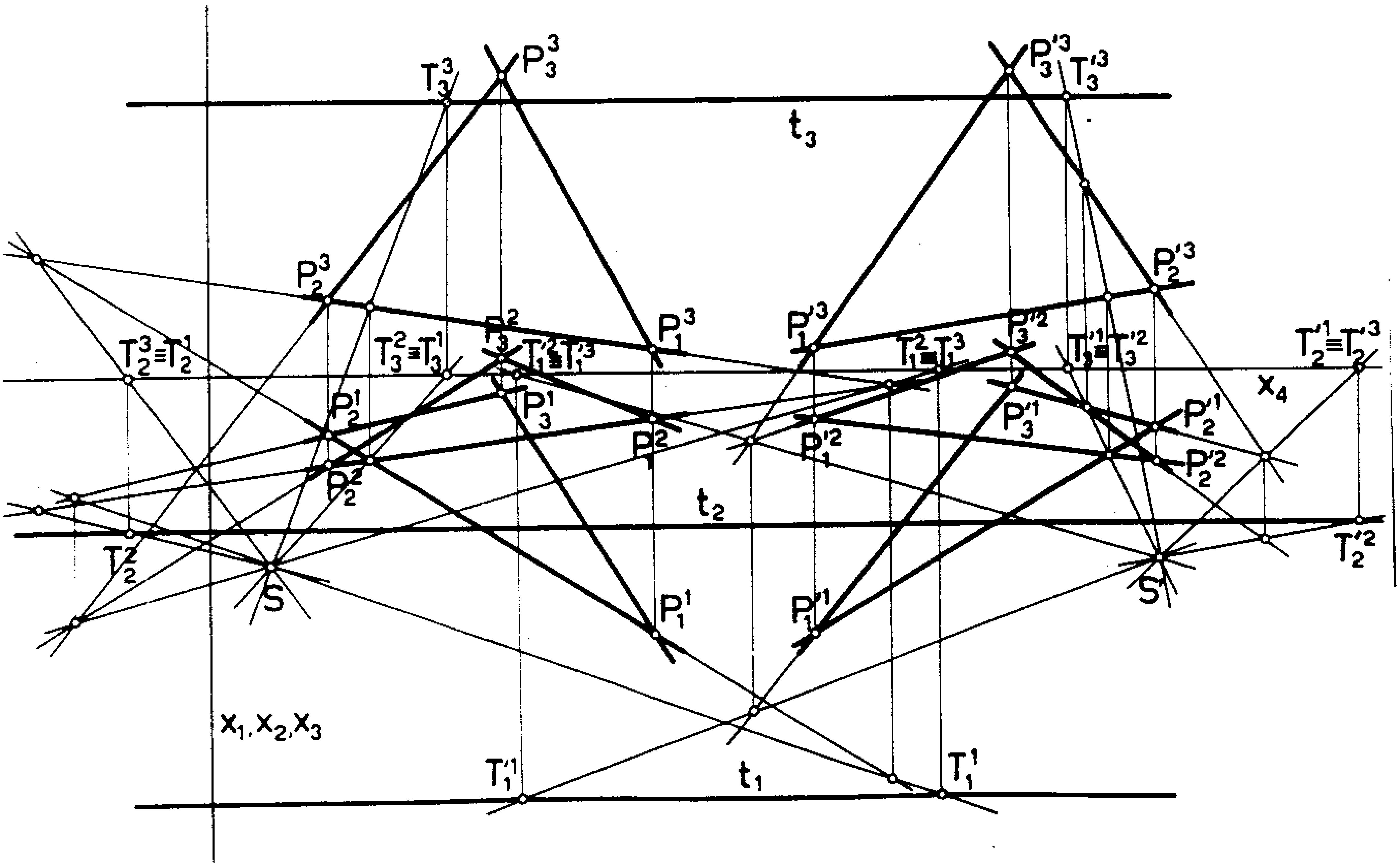
Za odredjivanje tragova prostora $\Sigma_{(n-1)}$ možemo se poslužiti osobinom: ako prostor $\Sigma_{(n-1)}$ sadrži neki prostor $\Sigma_{(n-2)}$ tada njegovi tragovi sadrže tragove prostora $\Sigma_{(n-2)}$.

Ako je u prostoru E_n dat prostor $\Sigma_{(n-1)}$ projekcijama ma kojih n tačaka $P_1, P_2, \dots, P_n$ koje ne pripadaju istom (n-2)-dimenzionom prostoru, tada tragove prostora $\Sigma_{(n-1)}$ možemo odrediti pomoću tragova dva potprostora $\Sigma^1_{(n-2)}$ i $\Sigma^2_{(n-2)}$ sadržanih u prostoru $\Sigma_{(n-1)}$. Neka je prostor $\Sigma^1_{(n-2)}$ odredjen tačkama $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, a prostor $\Sigma^2_{(n-2)}$ tačkama $P_2, P_3, \dots, P_n$. U jednoj od projekcijskih ravni svaki od ovih prostora ima, u opštem slučaju, po jednu tačku za trag. Odredjujemo ih na način izložen u teoremi III. Ove dve tačke odredjuju trag prostora $\Sigma_{(n-1)}$ u ovoj projekcijskoj ravni.

Kada prostor ima opšti položaj prema projekcijskim ravnima, trag prostora $\Sigma_{(n-1)}$ u jednoj od projekcijskih ravni seče osu x_n. Kako je ova tačka zajednička tačka datog prostora $\Sigma_{(n-1)}$ i ostalih projekcijskih ravni, dovoljno je u ostalim projekcijskim ravnima odrediti tragove samo jednog od (n-2)-dimenzionih potprostora. Oni sa tačkom na osi x_n odredjuju tragove prostora $\Sigma_{(n-1)}$



T13≡T32
P33
t3
P43
P23
P41
T21≡T23
T13
P32
P13
T12≡T13
x4
P21
P31
P12
P42
P22
T22
S
T11
P11
t2
t1
T11
x1, x2, x3



T33
P33
t3
P'33
T'33
P23
P'23
T23≡T21
T32≡T31
P32
P13
P'13
P'32
x4
P21
P31
P12
P'12
P'31
P'21
P'22
P22
t2
T22
T'22
S
S'
P11
P'11
x1, x2, x3
T'11
t1
T11

u ostalim projekcijskim ravnima.

Na sl.11 konstruisani su tragovi $(n-1)$-dimenzionog prostora za $n=4$. Prostor Σ_3 dat je tačkama P_1, P_2, P_3, P_4. Odredjeni su prvo svi tragovi T_1, T_2, T_3 prostora $\Sigma_2^1\ (P_1P_2P_3)$, a zatim je odredjen trag T_1' prostora $\Sigma_2^2\ (P_2P_3P_4)$ u ravni x_1x_4. Tačke T_1 i T_1' odredjuju trag t_1 prostora Σ_3 u ravni x_1x_4. Kako trag t_1, u opštem slučaju, seče osu x_4, tragovi t_2 i t_3 datog prostora u ravni x_2x_4 i x_3x_4 odredjeni su ovom tačkom i tragovima T_2 i T_3.

Ukoliko je jedan od tragova paralelan osi x_n, paralelni su i svi ostali tragovi. Prostor $\Sigma_{(n-1)}$ je tada paralelan osi x_n. Ako je neki od njih u beskonačnosti, tada je prostor paralelan i nekim projekcijskim ravnima.

U vezi sa položajem tragova $(n-2)$-dimenzionih potprostora prema tragovima $(n-1)$-dimenzionog prostora u kome su oni sadržani, dokažimo sledeću teoremu:

<u>Teorema V</u>. Ako su u prostoru E_n data dva prostora $\Sigma^1_{(n-2)}$ i $\Sigma^2_{(n-2)}$, svaki od njih sa $(n-1)$ tačaka od kojih dve po dve imaju jednake sve istoimene koordinate osim koordinata x_n, tada se ta dva prostora nalaze u istom prostoru $\Sigma_{(n-1)}$ paralelnom osi x_n. Tragovi $(n-2)$-dimenzionih prostora imaju u istim projekcijskim ravnima jednake sve istoimene koordinate izuzev koordinata x_n koje su različite, oni leže na pravim paralelnim osi x_n, tj. tragovima prostora $\Sigma_{(n-1)}$.

<u>Dokaz</u>. Neka je prostor $\Sigma^1_{(n-2)}$ dat tačkama P_1, P_2, ..., P_{n-1}, a prostor $\Sigma^2_{(n-2)}$ tačkama P_1', P_2', ..., P_{n-1}'. Kako su jednake sve istoimene koordinate tačaka P_i i P_i', izuzev koordinata x_n, tačke P_1 i P_1', P_2 i P_2', ..., P_{n-1} i P_{n-1}' nalaze se na pravim paralelnim osi x_n. Prostor $\Sigma^1_{(n-2)}$ i jedna

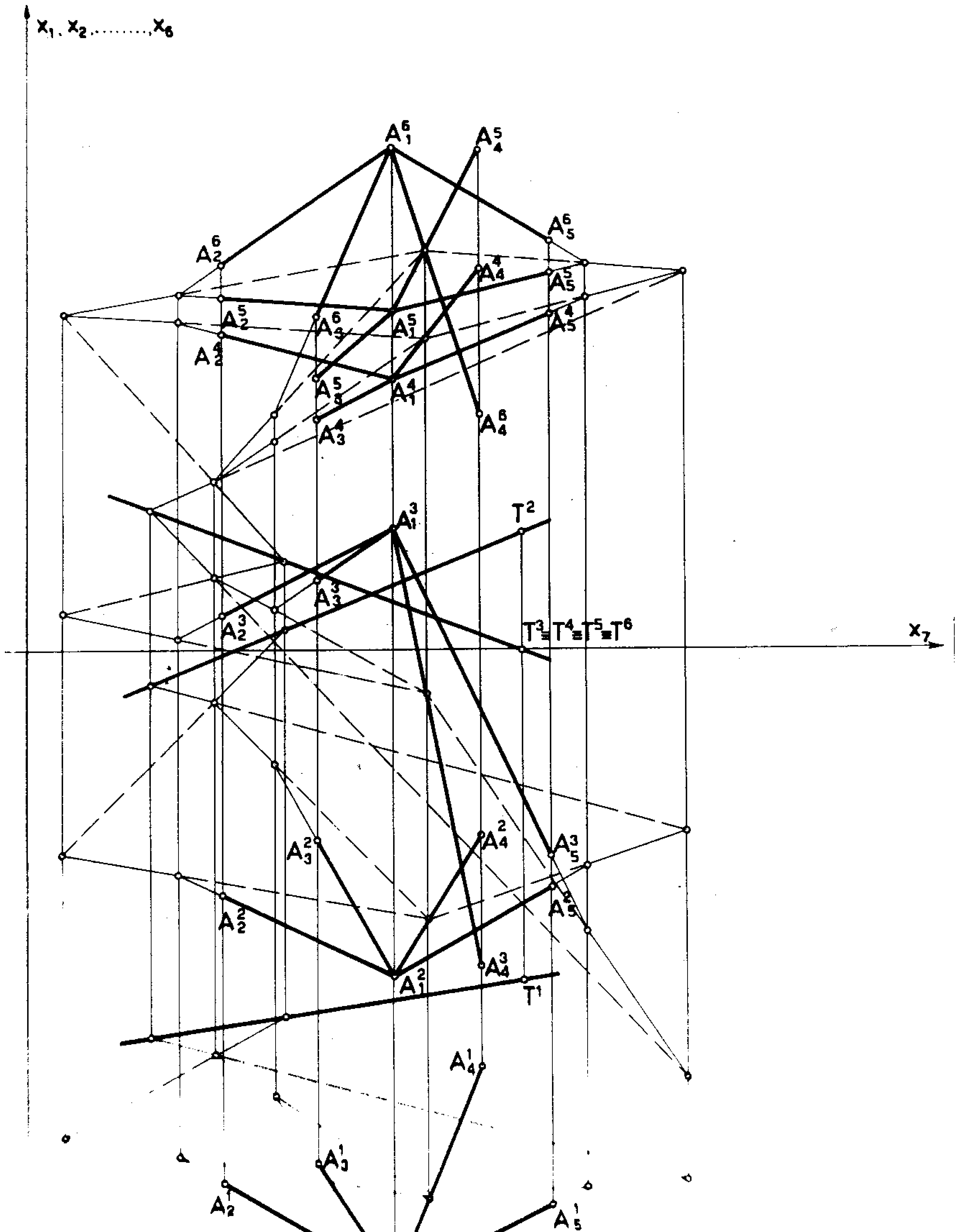
prava P_1P_1' paralelna osi x_n odredjuju prostor $\Sigma_{(n-1)}$. U njemu su sadržane i sve ostale prave P_iP_i' , $i=2,3,\ldots,n-1$, paralelne osi x_n . Kako su osa x_n i prava P_1P_1' paralelne, prostor $\Sigma_{(n-1)}$ paralelan je osi x_n . Tragovi ovog prostora u projekcijskim ravnima su tada paralelni osi x_n .

Kako su prave P_iP_i' sadržane u ovom prostoru $\Sigma_{(n-1)}$, sadržan je u njemu i prostor $\Sigma^2_{(n-2)}$. Tragovi oba prostora $\Sigma^1_{(n-2)}$ i $\Sigma^2_{(n-2)}$ su tada na tragovima prostora $\Sigma_{(n-1)}$. Prema tome, tragovi ovih prostora u istim projekcijskim ravnima imaju jednake sve istoimene koordinate, izuzev koordinata x_n .

Na sl.1. konstruisani su tragovi $(n-1)$-dimenzionog prostora paralelnog osi x_n , za $n=4$. Data su dva prostora Σ^1_2 i Σ^2_2 tačkama P_1, P_2, P_3 i P_1', P_2', P_3' . Istoimene projekcije tačaka P_i i P_i' leže na pravim paralelnim osi x_4 . Prvo su odredjeni tragovi T_1, T_2, T_3 prostora Σ^1_2 , a zatim trag T_1' prostora Σ^2_2 u ravni x_1x_4 . Kao što je dokazano, trag t_1 prostora Σ_3 u kome leže prostori Σ^1_2 i Σ^2_2 odredjen je tačkama T_1 i T_1' i paralelan je osi x_4 . Ostali tragovi, t_2 i t_3 , ovog prostora paralelni su osi x_4 i prolaze kroz tragove T_2 i T_3 . Na njima su i tragovi T_2' i T_3' prostora Σ^2_2 .

5. Odredjivanje presečne tačke prostora Σ_m i potprostora $E_{(n-m)}$ u prostoru E_n

U prostoru E_n jedan m-dimenzioni prostor Σ_m ima jednu zajedničku tačku sa svakim $(n-m)$-dimenzionim potprostorom $E_{(n-m)}$ prostora E_n ako nisu oba u istom $(n-1)$-dimenzionom prostoru. Tačka T potprostora $E_{(n-m)}$ u prostoru E_n ima m projekcija na osi x_n koje se poklapaju u jednoj tački, a ostalih $(n-m-1)$ projekcija su različite tačke na jednoj ordinali u ravni



$x_1, x_2, \ldots, x_6$
x_7
A_1^6
A_4^5
A_5^6
A_2^6
A_4^4
A_5^5
A_2^5
A_3^6
A_1^5
A_5^4
A_2^4
A_3^5
A_1^4
A_4^6
A_3^4
A_1^3
T^2
A_3^3
A_2^3
$T^3 \equiv T^4 \equiv T^5 \equiv T^6$
A_3^2
A_4^2
A_5^3
A_2^2
A_5^2
A_4^3
A_1^2
T^1
A_4^1
A_3^1
A_2^1
A_5^1
A_1^1

crtanja. Kako se m projekcija jedne tačke prostora E_{n-m} poklapaju na osi x_n, možemo presečnu tačku datog prostora Σ_m i prostora $E_{(n-m)}$ odrediti koristeći se prostorima poklapanja, slično načinu kojim smo odredjivali tragove prostora $\Sigma_{(n-2)}$ u prostoru E_n.

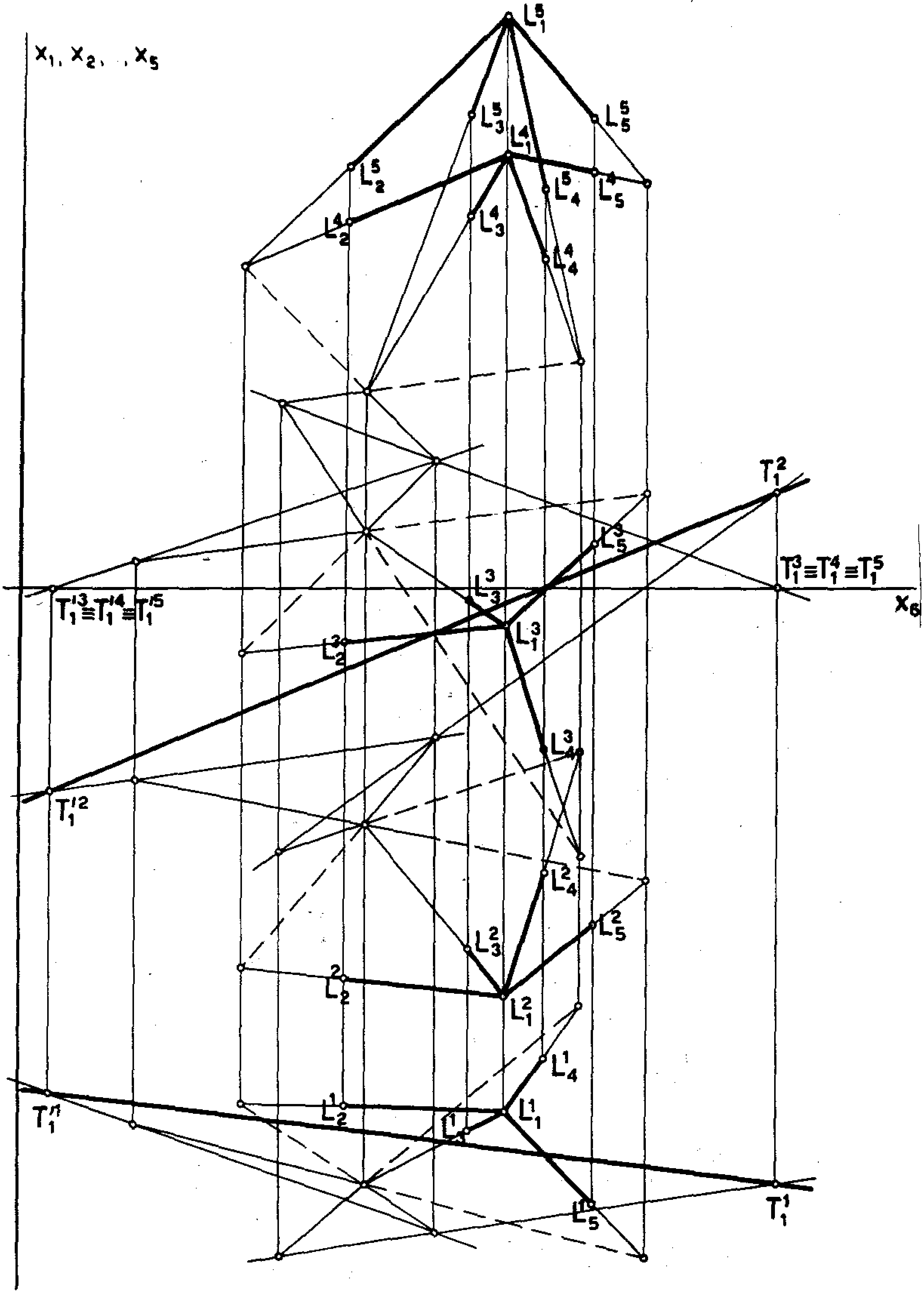
Neka je u prostoru E_n prostor Σ_m dat projekcijama $(m+1)$ tačaka $L_1, L_2, \dots, L_{m+1}$ koje ne pripadaju istom $(m-1)$-dimenzionom prostoru. Odredimo presečnu tačku prostora Σ_m i potprostora $E_{(n-m)}$ koji je odredjen osama $x_1, x_2, \dots, x_{n-m-1}, x_n$.

U prostoru E_n je prostor poklapanja $E^1_{(n-1)}$ za prostore $x_1x_2\dots x_{n-2}x_n$ i $x_1x_2\dots x_{n-3}x_{n-1}x_n$ odredjen osama $x_1, x_2, \dots$ $\dots, x_{n-3}, x_n, m$, gde je m simetrala ugla $x_{n-2}x_{n-1}$. Presek datog prostora Σ_m i prostora $E^1_{(n-1)}$ je prostor $\Sigma_{(m-1)}$. Pošto je prostor $\Sigma_{(m-1)}$ sadržan u prostoru poklapanja $E^1_{(n-1)}$, njegove projekcije na ravni $x_{n-1}x_n$ i $x_{n-2}x_n$ poklapaju se u ravni crtanja poklapaju se projekcije M_1^{n-1} i M_1^{n-2}, M_2^{n-1} i M_2^{n-2}, $\dots$, M_m^{n-1} i M_m^{n-2} tačaka $M_1, M_2, \dots, M_m$ koje odredjuju prostor $\Sigma_{(m-1)}$. Ove se tačke dobijaju u preseku pravih $L_1^{n-1}L_2^{n-1}$ i $L_1^{n-2}L_2^{n-2}$, $L_1^{n-1}L_3^{n-1}$ i $L_1^{n-2}L_3^{n-2}$, $\dots$, $L_1^{n-1}L_{m+1}^{n-1}$ i $L_1^{n-2}L_{m+1}^{n-2}$.

Pošto je prostor $\Sigma_{(m-1)}$ sadržan u prostoru Σ_m, presečna tačka prostora $\Sigma_{(m-1)}$ sa prostorom $E^1_{(n-m)}$ je i presečna tačka prostora Σ_m sa prostorom $E^1_{(n-m)}$.

Da bismo odredili ovu tačku, ponavljamo postupak i odredjujemo presek prostora $\Sigma_{(m-1)}$ i potprostora poklapanja $E^1_{(n-2)}$ koji biramo tako da se u ravni crtanja projekcije prostora $\Sigma_{(m-1)}$ na ravan $x_{n-3}x_n$ poklapaju sa projekcijama na ravni $x_{n-2}x_n$ i $x_{n-1}x_n$, itd.

Ovim postupkom dobijamo prostore manjeg broja dimenzija $\Sigma_{(m-1)}, \Sigma_{(m-2)}, \dots, \Sigma_2, \Sigma_1$ sadržanih u datom prosto-



$x_1, x_2, \ldots, x_5$
L_1^5
L_3^5
L_5^5
L_1^4
L_2^5
L_4^5
L_5^4
L_2^4
L_3^4
L_4^4
T_1^2
L_5^3
$T_1^3 \equiv T_1^4 \equiv T_1^5$
L_3^3
$T_1^{\prime 3} \equiv T_1^{\prime 4} \equiv T_1^{\prime 5}$
x_6
L_2^3
L_1^3
L_4^3
$T_1^{\prime 2}$
L_4^2
L_5^2
L_3^2
L_2^2
L_1^2
L_4^1
$T_1^{\prime 1}$
L_2^1
L_1^1
L_3^1
L_5^1
T_1^1

ru Σ_m. Projekcije prave Σ_1 na ravni $x_{n-1}x_n$, $x_{n-2}x_n$, ..., $x_{n-m}x_n$ poklapaju se na jednoj pravoj, a ostajih $(n-m-1)$ projekcija su različite prave. Prava na kojoj se poklapa m projekcija seče osu x_n u tački T čije se projekcije T^{n-1}, T^{n-2}, ..., T^{n-m} poklapaju u ovoj tački, a ostale projekcije tačke T dobijaju se ordinalom na ostalim projekcijama prave Σ_1. Prema položaju svojih projekcija tačka T je u potprostoru $E^1_{(n-m)}(x_1x_2...x_m)$ a kako je ona i na pravoj Σ_1 sadržanoj u prostoru Σ_m, ona je presečna tačka prostora Σ_m i $E^1_{(n-m)}$.

Potprostori $\Sigma_{(m-1)}$, $\Sigma_{(m-2)}$, ..., Σ_2, Σ_1 prostora Σ_m pretstavljaju jednu granu šeme date u teoremi III, kojom je pretstavljen postupak odredjivanja tragova prostora $\Sigma_{(n-2)}$ u prostoru E_n.

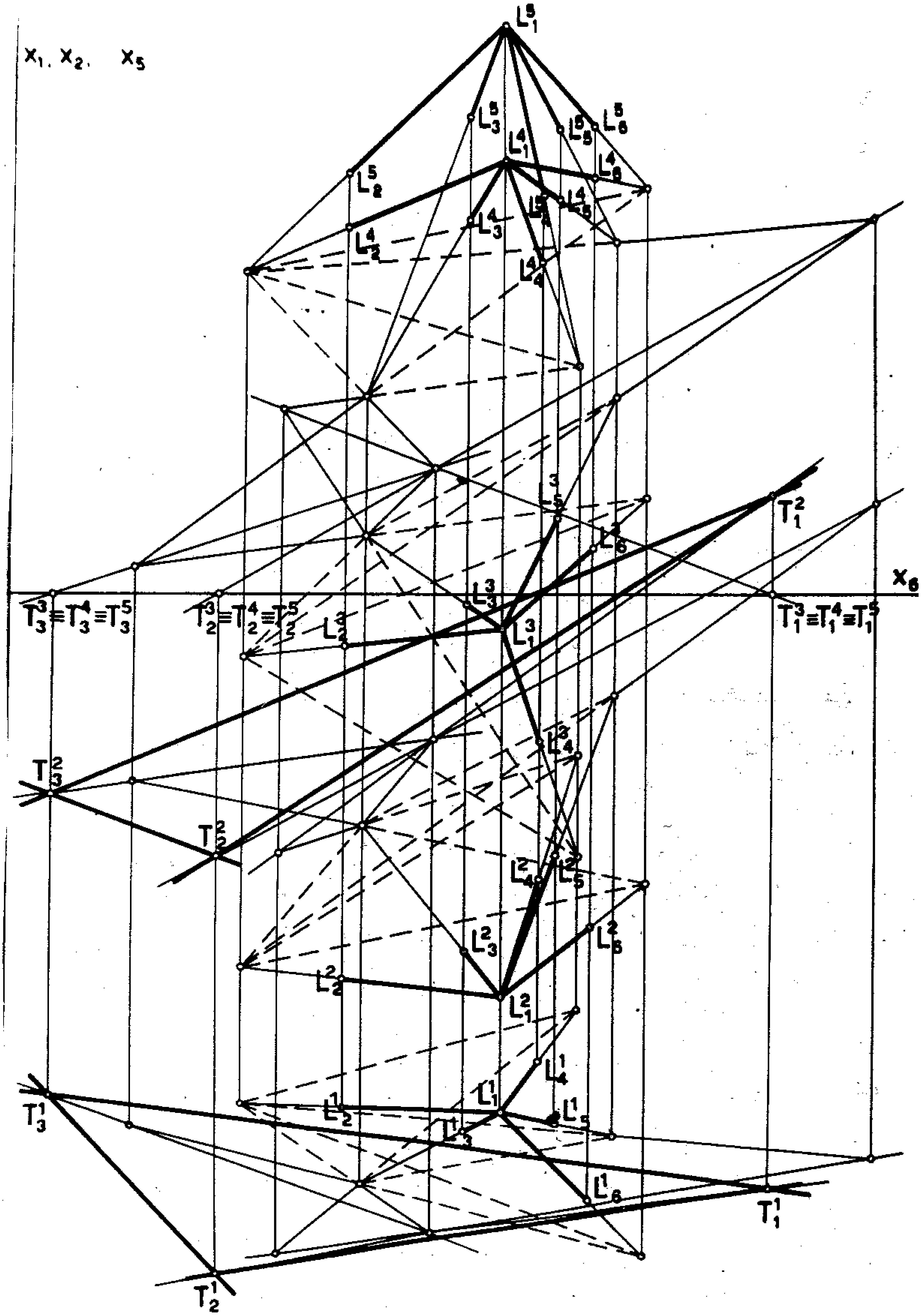
Na sl. 13 odredjena je presečna tačka T prostora Σ_4 sa potprostorom $E_3(x_1x_2x_7)$ u prostoru E_7.

6. Odredjivanje presečne prave prostora Σ_m i potprostora E_{n-m+1} u prostoru E_n

U prostoru E_n jedan m-dimenzioni prostor Σ_m i jedan $(n-m+1)$-dimenzioni potprostor $E_{(n-m+1)}$ imaju, u opštem slučaju zajedničku pravu. Ova prava, kao prava potprostora $E_{(n-m+1)}$, ima $(m-1)$ projekcija na osi x_n, a ostalih $(n-m)$ projekcija su različite prave u ravni crtanja.

Presečnu pravu Σ_1 možemo odrediti pomoću dveju tačaka T_1 i T_1' po kojima dva potprostora $\Sigma^1_{(m-1)}$ i $\Sigma^2_{(m-1)}$ prostora Σ_m seku uočeni prostor $E_{(n-m+1)}$. Postupak za odredjivanje ovih tačaka dat je u I.5.

Na sl.14 odredjena je presečna prava t prostora Σ_4 $(L_1L_2L_3L_4L_5)$ sa prostorom $E_3(x_1x_2x_6)$ u prostoru E_6.



$x_1, x_2, \; x_5$
L_1^5
L_3^5
L_5^5
L_6^5
L_1^4
L_6^4
L_2^5
L_5^4
L_3^4
L_2^4
L_4^4
L_5^3
L_6^3
T_1^2
x_6
L_3^3
$T_3^3 \equiv T_3^4 \equiv T_3^5$
$T_2^3 \equiv T_2^4 \equiv T_2^5$
L_2^3
L_1^3
$T_1^3 \equiv T_1^4 \equiv T_1^5$
L_4^3
T_3^2
T_2^2
L_4^2
L_5^2
L_3^2
L_6^2
L_2^2
L_1^2
L_4^1
L_1^1
L_2^1
L_5^1
L_3^1
T_3^1
L_6^1
T_1^1
T_2^1

Analogo osobini izložanoj u teoremi V, može se dokazati da dva prostora $\Sigma^1_{(m-1)}$ i $\Sigma^2_{(m-1)}$, koji su dati svaki sa po m tačaka od kojih dve po dve imaju jednake sve istoimene koordinate osim koordinata x_n, jesu potprostori jednog istog prostora Σ_m koji je paralelan osi x_n. Kako je tada presečna prava Σ_1 prostora Σ_m i jednog od potprostora $E_{(n-m+1)}$ paralelna osi x_n, a kako su na toj pravoj presečne tačke prostora $\Sigma^1_{(m-1)}$ i $\Sigma^2_{(m-1)}$ sa prostorom $E_{(n-m+1)}$, ovedve tačke imaju jednake sve istoimene koordinate, izuzev koordinata x_n.

Na sl.1, pretstavljeni su prostori Σ^1_3 $(L_1L_2L_3L_4)$ i Σ^2_3 $(L_1'L_2'L_3'L_4')$ u prostoru Σ_4 paralelnom osi x_6 prostora E_6. Presečna prava prostora Σ_4 i potprostora $E_3(x_1x_2x_6)$ prostora E_6, paralelna osi x_6, odredjena je pomoću presečnih tačaka prostora Σ^1_3 i Σ^2_3 sa prostorom $E_3(x_1x_2x_6)$.

7. Upravno projektovanje u prostoru E_n na projekcijske prostore E_k, $n > k > 2$. Trag prostora Σ_m.

Analogo upravnom projektovanju u prostoru E_n; u kome su projekcijski prostori ravni x_ix_n, $i=1,2,\dots,n-1$, sa zajedničkom pravom x_n, možemo u prostoru E_n za projekcijske prostore izabrati k-dimenzione potprostore, $n > k > 2$, koji svi imaju zajednički (k-1)-dimenzioni potprostor. Uočimo jedan k-dimenzioni potprostor odredjen osama $x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots, x_{n-1}, x_n$. Osim ovog prostora, u prostoru E_n ima još (n-k) k-dimenzionih potprostora kojima je zajednički (k-1)-dimenzioni potprostor odredjen osama $x_{n-k+2}, x_{n-k+3}, \dots, x_{n-1}, x_n$, a u svakom od njih se nalazi još jedna od osa $x_1, x_2, \dots, x_{n-k}$. Dakle, u prostoru E_n objekat je odredjen takodje i sa svojih (n-k+1) upravnih projekcija na ovim k-dimenzionim projekcijskim prostorima.

Da bismo objekat pretstavili u ravni, mogu se , u svakom od ovih projekcijskih potprostora, odrediti projekcije na njegovim potprostorima manjeg broja dimenzija, ili odmah na projekcijskim ravnima. U projekcijskim prostorima možemo projekcijske ravni birati na razne načine. Izaberimo ih u svakom od projekcijskih potprostora tako da imaju zajedničku osu x_n . Projekcije objekata u ravni slike imaju tada isti položaj kao u prethodno izloženom načinu projektovanja u E_n na projekcijske ravni sa zajedničkom osom x_n.

Uvedimo drugu oznaku, tj. obeležimo broj dimenzija k projekcijskog prostora sa $n-z$. Promenljiva z može uzimati vrednosti $1 \leq z \leq n-2$. Za $z=n-2$ obuhvaćeno je projektovanje na projekcijske ravni, a za $z < n-2$ projekcije se odredjuju na projekcijske prostore dimenzija većih od 2 . Broj takvih prostora je, kao što smo videli, jednak $n-k+1$, ili, $z+1$.

Za projekcijske prostore u prostoru E_n mogu se odabrati i prostori različitih dimenzija. Ako smatramo da je svaki od njih potprostor prostora E_n i da je jedan od njih l-dimenzioni i odredjen osama $x_1, x_2, \ldots, x_l$ koje zajedno sa ostalima odredjuju prostor E_n , tada ovi projekcijski prostori moraju zadovoljavati uslov da svaki od njih sadrži bar jednu od osa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koja nije sadržana ni u jednom od ostalih projekcijskih prostora i da je n zbir tih, nezavisnih, osa svih projekcijskih prostora. Ako je svaki od njih odredjen samo osama koje nisu ni u jednom od ostalih projekcijskih prostora, tada je i zbir dimenzija ovih prostora n . U protivnom, on je veći od n .

Kako projekcijski prostor može imati dimenzije $n-z$, gde je $1 \leq z \leq n-2$, možemo dati opštu definiciju traga prostora kojom su obuhvaćene i prve dve definicije tragova.

<u>Definicija 3.</u> Trag m-dimenzionog prostora Σ_m u pro-

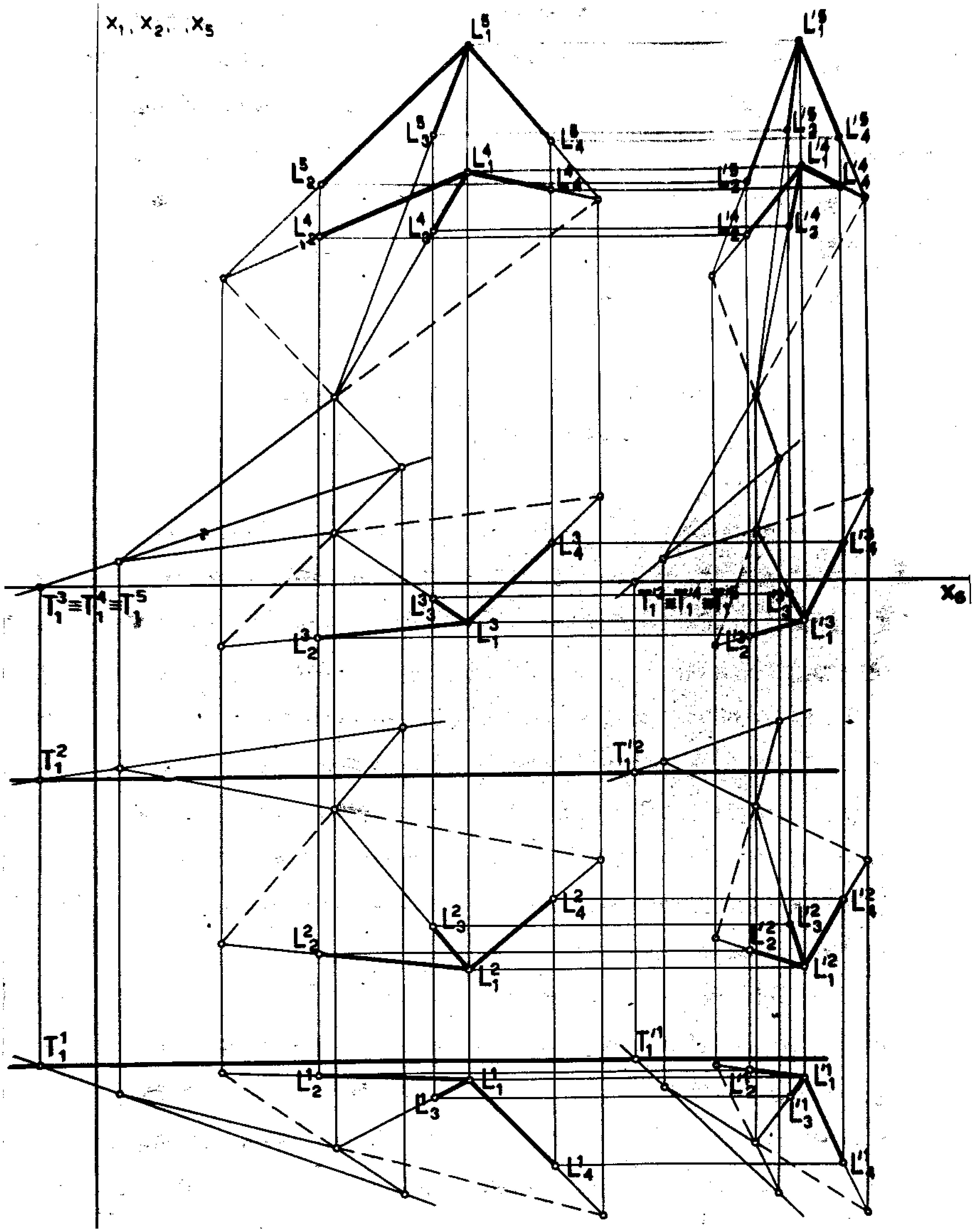
storu E_n je zajednički potprostor datog prostora Σ_m i projekcijskog prostora E_{n-z}, gde je $1 \leq z \leq n-2$.

Broj tragova prostora jednak je broju projekcijskih prostora, a broj dimenzija traga jednak je, u opštem slučaju, $\{[m+(n-z)] - n\} = m-z$. Da bi prostor Σ_m imao trag, mora biti $z < m$.

Ako projekcijske potprostore E_{n-z} izaberemo sa zajedničkom osom x_n i u svakom od ovih potprostora odredimo projekcije na projekcijske ravni sa zajedničkom osom x_n, dobićemo u ravni slike projekcije objekta na ravni $x_i x_n$, $i=1,2,\dots,n-1$. Za odredjivanje tragova prostora Σ_m u jednom od projekcijskih prostora E_{n-z}, poslužićemo se postupkom kojim smo odredjivali presečnu tačku ili pravu prostora Σ_m i potprostora $E_{(n-m)}$ ili $E_{(n-m+1)}$ u prostoru E_n, kao u I.5 i I.6.

Neka je sa $(m+1)$ tačaka dat prostor Σ_m u prostoru E_n, u kome su projekcijski prostori $(n-z)$-dimenzioni potprostori $E^i_{(n-z)}$, $i=1,2,\dots,z+1$. Trag prostora Σ_m u jednom od projekcijskih prostora E_{n-z} je jedan $(m-z)$-dimenzioni prostor. Da bi trag postojao, mora biti $z \leq m$. Taj prostor-trag odredjen je sa $(m-z+1)$ tačaka koje nisu sve u istom $(m-z-1)$-dimenzionom prostoru. Ove tačke odredićemo na taj način što ćemo u prostoru Σ_m izabrati $(m-z+1)$ potprostora koji su z-dimenzioni i od kojih svaki u uočenom projekcijskom prostoru E_{n-z} ima za trag tačku. Skup ovih tačaka-tragova odredjuje prostor-trag prostora Σ_m. Kako je prostor-trag u projekcijskom prostoru E_{n-z}, svaka tačka prostora-traga ima na osi x_n z projekcija koje se poklapaju u jednoj tački ose x_n, a ostalih $(n-z-1)$ projekcija tačke su, u opštem slučaju, različite tačke na istoj ordinali.

U odeljku I.5 presečna tačka prostora Σ_m i $E_{(n-m)}$ je, prema definiciji 3, trag prostora Σ_m, kada je prostor $E_{(n-m)}$ jedan od projekcijskih prostora u prostoru E_n (sl.13).



x1, x2, , x5
x6
T
L

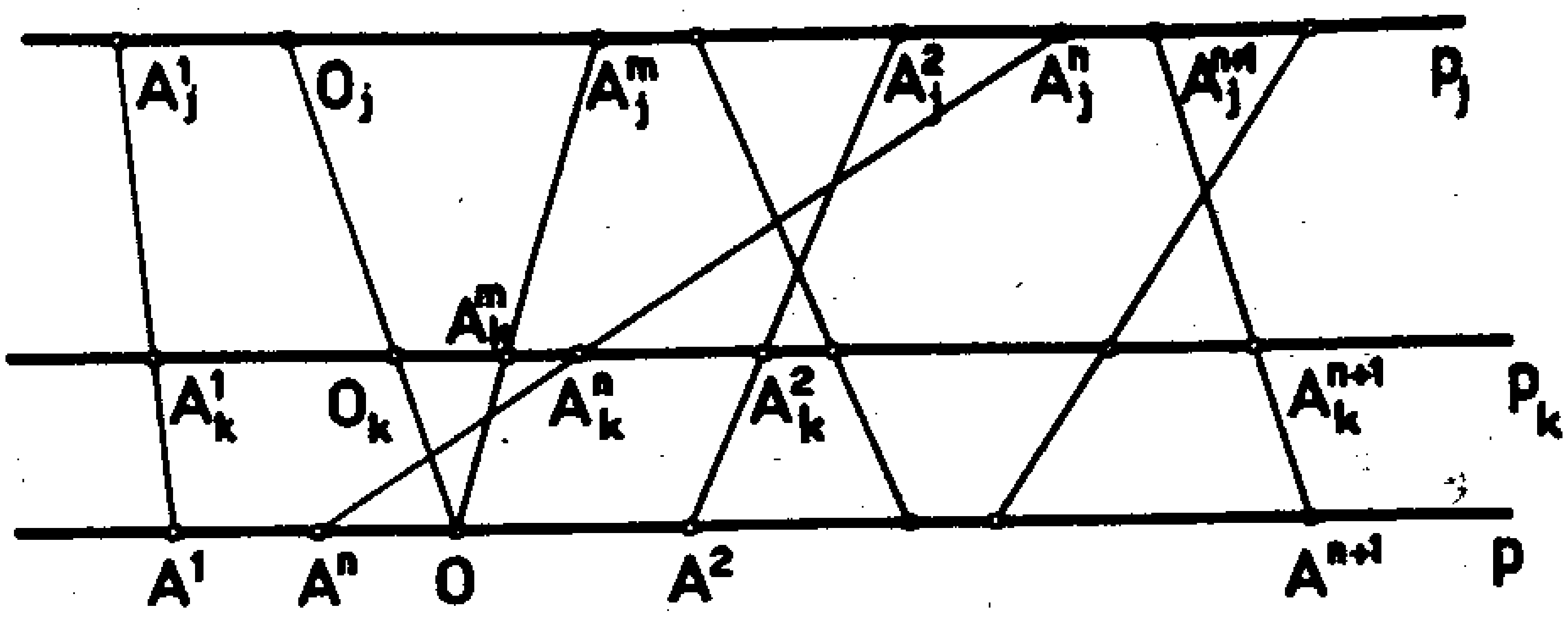
Takodje je u I.6 presečna prava prostora Σ_m u $E_{(n-m+1)}$, prema definiciji 3, trag prostora Σ_m, kada je prostor $E_{(n-m+1)}$ jedan od projekcijskih prostora u prostoru E_n (sl.14).

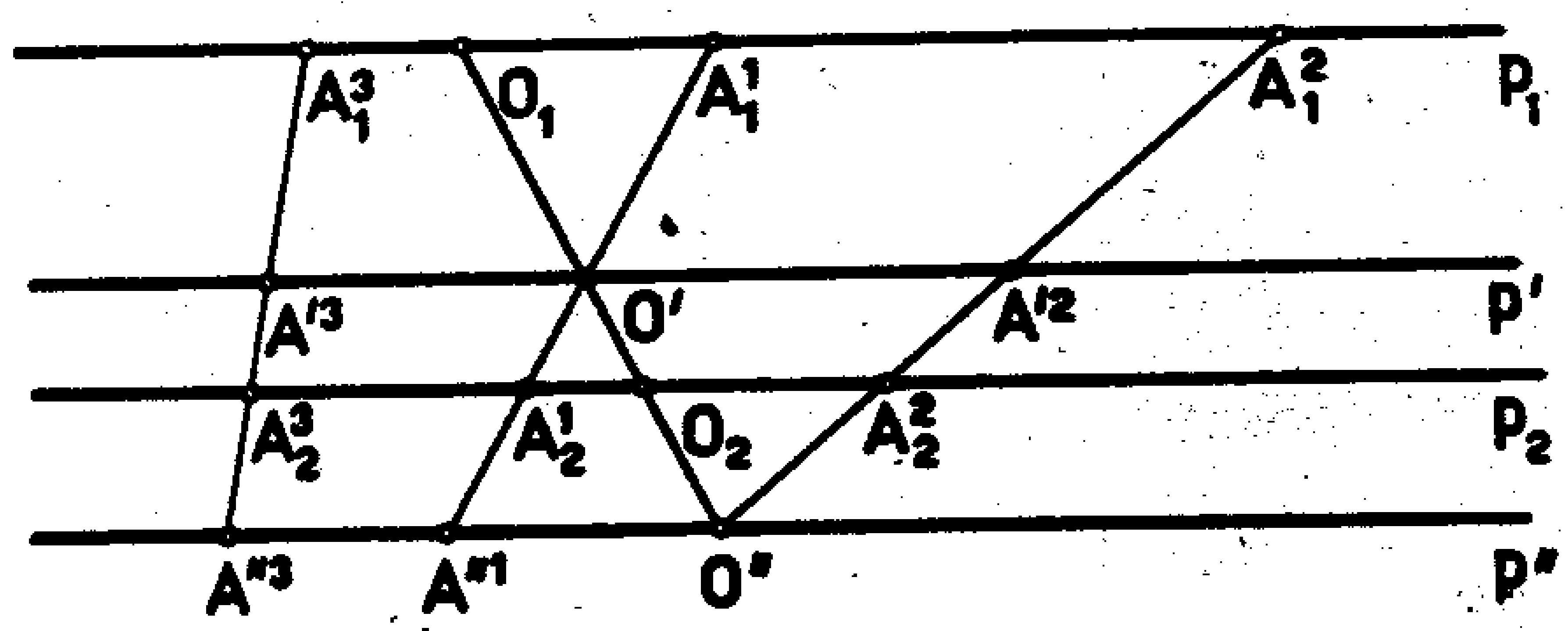
Najzad, u sl.16 odredjen je prostor-trag $\Sigma_2(T_1T_2T_3)$ prostora $\Sigma_5(L_1L_2L_3L_4L_5)$ kada je $E_3(x_1x_2x_6)$ jedan od projekcijskih prostora u prostoru E_6. Prostor-trag Σ_2 odredjen je tačkama-tragovima T_1, T_2, T_3 triju potprostora $\Sigma_3^1(L_1L_2L_3L_4)$, $\Sigma_3^2(L_1L_2L_3L_5)$ i $\Sigma_3^3(L_1L_2L_3L_6)$ prostora Σ_5.

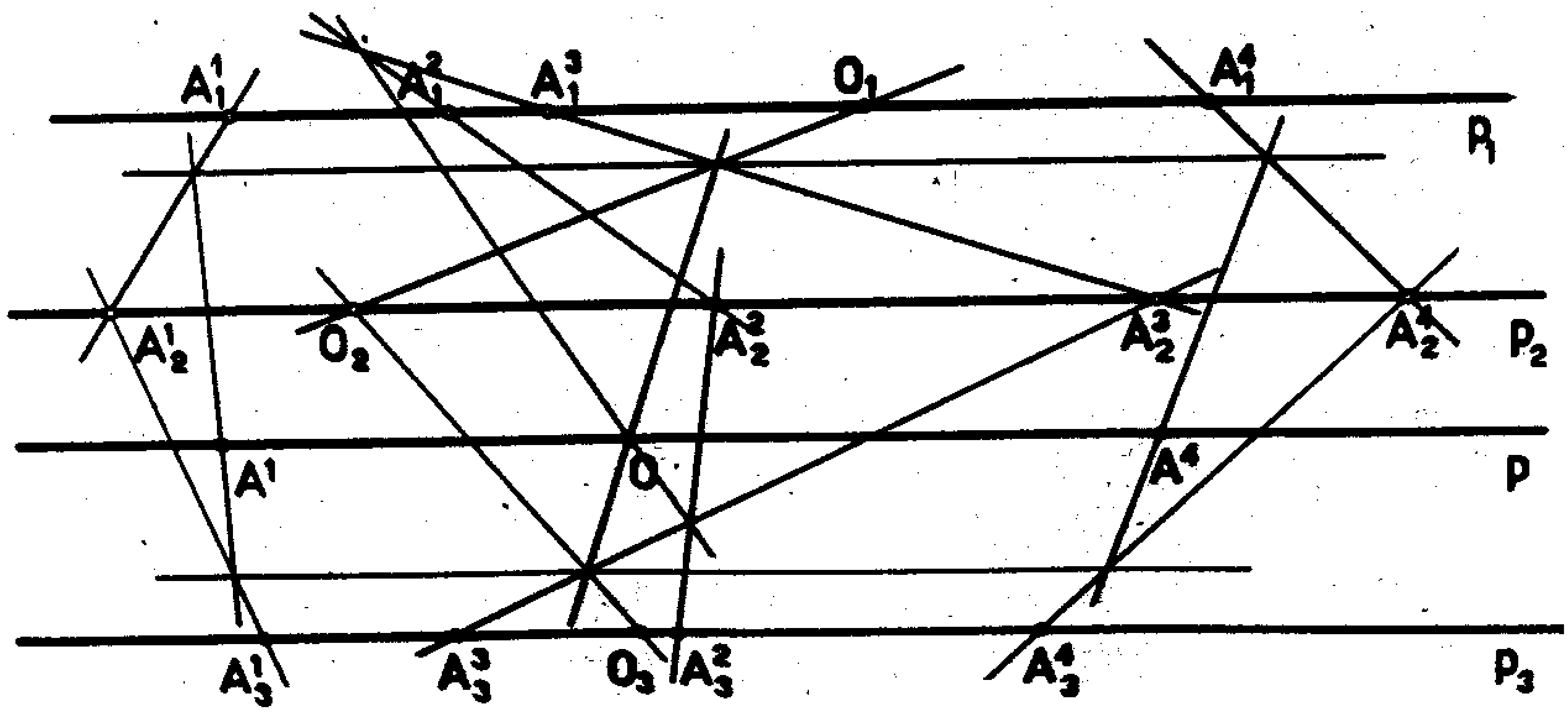
8. Primena na grafičko rešavanje sistema linearnih jednačina

U enciklopediji matematičkih nauka (I.2, str. 1006) (6) u odeljku Grafičko računanje od R. Mehmkea izloženo je više grafičkih metoda rešavanja sistema linearnih jednačina. Na više mesta u ovom odeljku istaknuta je korist od višedimenzione nacrtne geometrije, jer ona omogućuje proširenje nekih grafičkih metoda rešavanja sistema i na sisteme u kojima je $n > 3$. Kod nekih metoda proširenje je postignuto upotrebom aksonometrijske metode višedimenzionih prostora, a za neke od izloženih metoda data je samo napomena da bi se uopštenje rešavanja sistema i za $n > 3$ dobilo upotrebom višedimenzione nacrtne geometrije.

Zadržimo se na jednoj od izloženih grafičkih metoda rešavanja sistema linearnih jednačina koju je dao Van den Berg (Amst. Akad. Versl. en Meded. (3)4 (1887), p.204) a koju je pojednostavnio R. Mehmke (Matem. Sbornik 16 (1892) p.324). Uzimajući u obzir nacrtnu geometriju višedimenzionih prostora, napred izloženu metodu upravnog projektovanja i metodu odredjivanja tragova prostora, moći ćemo ovoj metodi dati odredjeno prostorno pretstavljanje, što će nam zatim omogućiti i izvesno uprošćenje metode.


A_j^1
O_j
A_j^m
A_j^2
A_j^n
A_j^{n+1}
p_j
A_k^m
A_k^1
O_k
A_k^n
A_k^2
A_k^{n+1}
p_k
A^1
A^n
O
A^2
A^{n+1}
p


A_1^3
O_1
A_1^1
A_1^2
p_1
A'^3
O'
A'^2
p'
A_2^3
A_2^1
O_2
A_2^2
p_2
A''^3
A''^1
O''
p''


A_1^1
A_1^2
A_1^3
O_1
A_1^4
p_1
A_2^1
O_2
A_2^2
A_2^3
A_2^4
p_2
A^1
O
A^4
p
A_3^1
A_3^3
O_3
A_3^2
A_3^4
p_3

Metoda Van den Berga i R. Mehmkea

Grafičko rešavanje sistema linearnih jednačina ovom metodom izloženo u Enciklopediji matematičkih nauka (6) sastoji se u sledećem.

Neka je dat sistem jednačina $a_j^i t_i = a_j^{n+1}$, $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$. Svaka od jednačina pretstavlja se na jednoj od n paralelnih pravih proizvoljnih medjusobnih rastojanja. Jedna se jednačina pretstavlja na pravoj tako što se, počev od proizvoljne prenose duži koje su jednake koeficientima jednačine, tačke na pravoj, pri odredjenom izboru jedinice, vodeći računa o predznaku. One odredjuju na pravoj niz tačaka. Napr., na pravoj p_j duži $O_jA_j^1$, $O_jA_j^2$, ..., $O_jA_j^n$, $O_jA_j^{n+1}$ jednake koeficientima j-te jednačine a_j^1, a_j^2, ..., a_j^n, a_j^{n+1} odredjuju niz tačaka A_j^1, A_j^2, ..., A_j^n, A_j^{n+1}.

Do rešenja sistema dolazi se postepenom eliminacijom koja se vrši na sledeći način (sl. 17). Neka su p_j i p_k prave na kojima koeficienti j-te i k-te jednačine odredjuju nizove tačaka A_j^1, A_j^2, ..., A_j^n, A_j^{n+1} i A_k^1, A_k^2, ..., A_k^n, A_k^{n+1}. Ako iz ovih jednačina treba eliminisati promenljivu t_m, tada se odredi presečna tačka O pravih O_jO_k i $A_j^mA_k^m$, gde su tačke A_j^m i A_k^m odredjene koeficientima ovih dveju jednačina uz promenljivu t_m. Koeficienti jednačine dobijene eliminacijom promenljive t_m odredjuju se na pravoj p kroz O paralelnoj pravim p_j, p_k. Preseci prave p sa pravim $A_j^1A_k^1$, $A_j^2A_k^2$, ..., $A_j^{m-1}A_k^{m-1}$, $A_j^{m+1}A_k^{m+1}$, ..., $A_j^nA_k^n$, $A_j^{n+1}A_k^{n+1}$ odredjuju niz tačaka A^1, A^2, ..., A^{m-1}, A^{m+1}, ..., A^n, A^{n+1}, odnosno duži OA^1, OA^2, ..., OA^n, OA^{n+1} kojima su jednaki koeficienti nove jednačine iz koje je eliminisana promenljiva t_m. Postupnom eliminacijom promenljivih, prema uobičajenom postupku algebre, dobijamo najzad n jednačina od kojih svaka sadrži po jednu nepoznatu. Svaka od njih pretstavljena je na jednoj od paralelnih pravih, npr., p' konstruisanoj kroz tačku O', na kojoj su odredjene tačke A'^{1} i A'^{n+1}. Duži $O'A'^{1}$ i $O'A'^{n+1}$ odredjuju koeficiente jednačine $a'^{1}t_1 = a'^{n+1}$ iz koje se dobija nepoznata $t_1 = \frac{O'A'^{n+1}}{O'A'^{1}}$.

Ova grafička metoda zasniva se na tome što niz duži OA^1, OA^2, ..., OA^{m-1}, OA^{m+1}, ..., A^n, A^{n+1} na nosiocu p odredjuje linearnu kombinaciju koeficienata i-te i k-te jednačine. Ovako kako je izložana, ona već sadrži pojednostavnjenje koje je dao R. Mehmke, dok je Van den Berg novo dobijeni niz tačaka projektovao centralno na jedan od nosilaca prvobitnih nizova i na taj način mu je trebalo dvaput više linija.

U Enciklopediji matematičkih nauka izradjen je primer rešavanja sistema jednačina za $n=2$ (sl.18), a zatim, pisac ovog odeljka R. Mehmke, u napomeni, uočava izvesno prostorno tumačenje metode na primeru sistema u kome je $n=3$, kojim postiže jednovremenu eliminacuju dveju promenljivih. Nosioce nizova, paralelne prave p_1, p_2, p_3, smatra trima pravim u prostoru. tada po tri tačke odredjuju ravni: $O_1O_2O_3$, $A_1^1A_2^1A_3^1$, ... itd. Jednačina iz koje su istovremeno eliminisane promenljive t_2 i t_3 dobija se ako se odredi tačka O u kojoj se seku ravni $O_1O_2O_3$, $A_1^2A_2^2A_3^2$ i $A_1^3A_2^3A_3^3$, kroz ovu tačku postavi prava p paralelna nosiocima p_1, p_2, p_3 i na njoj odrede tačke prodora kroz ravni $A_1^1A_2^1A_3^1$ i $A_1^4A_2^4A_3^4$ tačke A^1 i A^4 (sl.19). Tada je $t_1 = \frac{OA^4}{OA^1}$.

Ovako izložena, ova se metoda može smatrati metodom nacrtne geometrije za rešavanje sistema linearnih jednačina. Pisac ukazuje, dalje u napomeni, da se korišćenjem nacrtne geometrije višedimenzionih prostora može vršiti i jednovremena eliminacija više od dveju nepoznatih u sistemima sa većim brojem jednačina, odnosno nepoznatih.

Jedna interpretacija metode Van den Berga i R. Mehmkea u višedimenzionim prostorima

U pomenutom načinu pretstavljanja koeficienata jednačina na paralelnim pravim, na svakoj pravoj p_j je početna tačka O_j birana proizvoljno. Ako, medjutim, sve početne tačke O_j, $j=1,2,\ldots,n$, izaberemo na jednoj pravoj koja je normalna na paralelnim pravim - nosiocima nizova - tada, prema izloženom načinu upravnog projektovanja na ravni $x_i x_n$, $i=1,2,\ldots,n-1$, u prostoru E_n (I.1), možemo dati novo prostorno tumačenje ove grafičke metode.

Ako je dat sistem od n jednačina sa n nepoznatih, tada pravu na kojoj su tačke O_j možemo shvatiti kao osu x_{n+2}, a jednu od pravih normalnih na x_{n+2} kao pravu na kojoj se poklapaju oboreni položaji osa $x_1, x_2, \ldots$ и x_{n+1}, u ravni crtanja. Niz tačaka odredjen koeficientima jedne jednačine na jednoj od paralelnih pravih p_j pretstavlja tada upravne projekcije jedne tačke. Tačku A_1^i smatraćemo projekcijom tačke A_1 na ravan $x_i x_{n+2}$, $i=1,2,\ldots,n+1$. Dakle, svaki koeficienat jednačine prenosi se u pravcu jedne od osa $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Kako u jednačini sa n nepoznatih ima $(n+1)$ koeficienata, tačka A_1 ima $(n+1)$ projekcija i nalazi se, prema tome, u $(n+2)$-dimenzionom prostoru $E_{(n+2)}$. Pošto u sistemu ima n jednačina, a svakoj jednačini odgovaraju projekcije jedne tačke, sistemu odgovara n tačaka koje, u opštem slučaju, odredjuju jedan $(n-1)$-dimenzioni prostor $\Sigma_{(n-1)}$ u prostoru E_{n+2}.

Prema izloženoj grafičkoj metodi kojom je vršena istovremena eliminacija više promenljivih za slučaj $n=3$, u ovom opštem slučaju, $n>3$, treba za svaku promenljivu odrediti po jednu pravu paralelnu nosiocima nizova odredjenih datim jednačinama. Za promenljivu t_1, napr., ona treba da prolazi kroz jednu tačku O'

koja je zajednička tvorevinama $O_1O_2 \ldots O_n$, $A_1^2A_2^2 \ldots A_n^2$, $A_1^3A_2^3 \ldots A_n^3$, ... , $A_1^nA_2^n \ldots A_n^n$, tj. projekcijama prostora $\Sigma_{(n-1)}$ i osom x_{n+2} . U preseku te prave sa ostalim dvema tvorevinama $A_1^1A_2^1 \ldots A_n^1$ i $A_1^{n+1}A_2^{n+1} \ldots A_n^{n+1}$ dobijaju se dve tačke A'^1 i A'^{n+1} koje sa tačkom O' odredjuju koeficiente a'^1 i a'^{n+1} jednačine dobijene eliminacijom $a'^1t_1 = a^{n+1}$ iz koje se tada dobija promenljiva $t_1 = \frac{O'A'^{n+1}}{O'A'^1}$. Na sličan se način postupa za odredjivanje svake promenljive.

Odrediti na navedeni način tačku O' , odgovarajući nosilac i na njemu tačke A'^1 i A'^{n+1} , u navedenoj interpretaciji znači da treba odrediti onu tačku A' prostora $\Sigma_{(n-1)}$ čije se projekcije na ravni x_ix_{n+2} , $i=2,3,\ldots,n$, tačke A'^2 , A'^3, ..., A'^n , poklapaju u ravni crtanja na osi x_{n+2} u tački O' , a ostale dve projekcije A'^1 i A'^{n+1} na ravni x_1x_{n+2} i $x_{n+1}x_{n+2}$ su dve različite tačke na ordinali kroz O' . Posmatrano u prostoru E_{n+2} tačka A' tada pretstavlja, prema I.5 , presečnu tačku prostora $\Sigma_{(n-1)}$ i potprostora $E_3^1(x_1x_{n+1}x_{n+2})$ u E_{n+2} . Ovu tačku možemo, dakle, odrediti na način naveden u I.5 .

Slično, za odredjivanje ostalih promenljivih trabe odrediti presečne tačke prostora $\Sigma_{(n-1)}$ sa potprostorima $E_3^i(x_ix_{n+1}x_{n+2})$, $i=2,3,\ldots,n$.

Prostor $\Sigma_{(n-1)}$ odredjen je projekcijama n tačaka A_j, $j=1,2,\ldots,n$, od kojih svaka pretstavlja jednu jednačinu, tj. koeficienti a_j^1 , a_j^2 , ..., a_j^{n+1} jedne jednačine jesu koordinate x_1, x_2, ... , x_{n+1} jedne tačke A_j . Ovih (n+1) koordinata odredjuju (n+1) projekcija tačke A_j , dakle, tačka A_j je u (n+2)-dimenzionom prostoru E_{n+2} . Medjutim, koordinata x_{n+2} nije data jednačinom. Zato je i moguće da se projekcije tačaka uzimaju na paralelnim pravim sa proizvoljnim rastojanjima, dakle, nezavisno od koordinate x_{n+2} . Kako se tada za razne položaje tačaka dobijaju različiti prostori, prema tome i različite presečne tačke, postavlja se pitanje di li se dobijaju uvek iste vrednosti nepoznatih jednoga sistema za razna medjusobna rastojanja ovih paralelnih pravih.

Neka su $L_1, L_2, \dots, L_n$ tačke jednog skupa tačaka čije su projekcije odredjene datim sistemom jednačina, a $L_1', L_2', \dots, L_n'$ tačke drugog skupa tačaka čije su projekcije odredjene istim sistemom jednačina. Drugi se skup razlikuje od prvog po tome što su paralelne prave na kojima su projekcije tačaka ovog skupa na različitim rastojanjima od pravih na kojima su projekcije tačak prvog skupa. Ova dva skupa tačaka tada pretstavljaju dva (n-1)-dimenziona prostora $\Sigma^1_{(n-1)}$ i $\Sigma^2_{(n-1)}$ u prostoru $E_{(n+2)}$. Kako po dve tačke ovih skupova pretstavljaju istu jednačinu sistema, one imaju jednake sve istoimene koordinate, osim koordinata x_{n+2}. Ova se dva prostora tada, prema teoremi V (I.4), nalaze u istom n-dimenzionom prostoru Σ_n paralelnom osi x_{n+2}. Presečne tačke prostora $\Sigma^1_{(n-1)}$ i $\Sigma^2_{(n-1)}$ sa istim potprostorom $E^i_3(x_i x_{n+1} x_{n+2})$, i=1, 2,...,n, nalaze se na jednoj pravoj Σ^i_1 paralelnoj osi x_{n+2}, preseku prostora Σ_n sa ovim potprostorom, i prema tome, imaju jednake sve istoimene koordinate, osim koordinata x_{n+2}. Kako rešenja sistema zavise samo od koordinata koje su jednake, jednake su i vrednosti nepoznatih odredjenih za oba slučaja. Dakle, vrednosti promenljivih ne zavise od rastojanja paralelnih pravih na kojima su projekcije tačaka odredjenih koeficientima jednačina.

Tragovi prostora $\Sigma_{(n-1)}$ u E_{n+1} kao rešenja sistema n linearnih jednačina

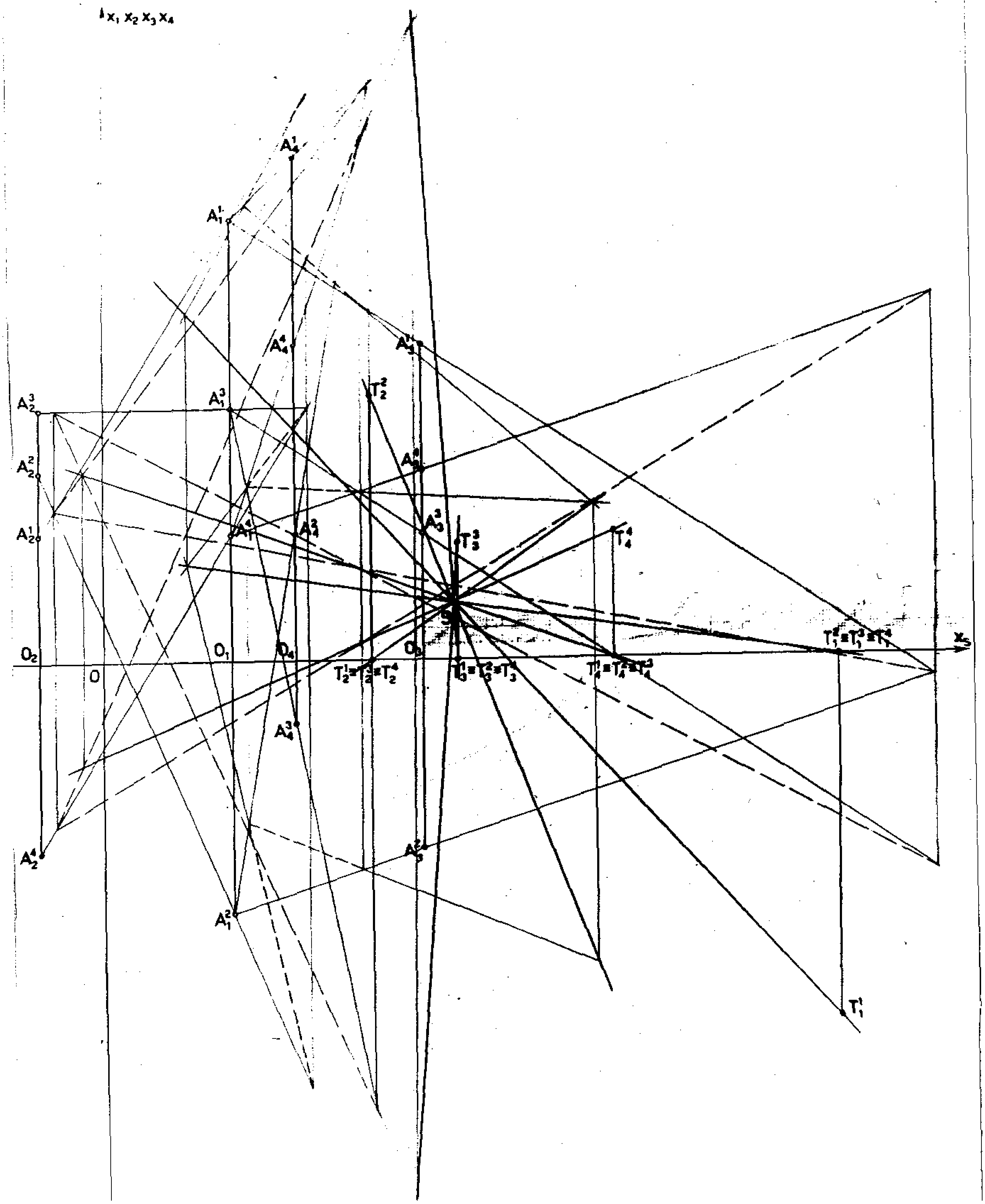
Pošto smo pokazali nezavisnost rešenja sistema jednačina od položaja prostora $\Sigma_{(n-1)}$ u prostoru Σ_n, odnosno nezavisnost od koordinata x_{n+2} tačaka kojima je prostor $\Sigma_{(n-1)}$ pretstavljen možemo izabrati onaj prostor $\Sigma_{(n-1)}$ u kome su koordinate x_{n+2} tačaka kojima je on odredjen, jednake nuli. Tada je prostor $\Sigma_{(n-1)}$ u ~~potprostoru~~ $E_{n+1}(x_1x_2...x_{n+1})$ prostora E_{n+2}, tj. prostor $\Sigma_{(n-1)}$ je presek prostora E_{n+1} sa prostorom Σ_n.

Odredjivanje jadne nepoznate svodila se na odredjivanje presečne tačke prostora $\Sigma_{(n-1)}$ sa jednim od trodimenzionih potprostora $E_3^i(x_ix_{n+1}x_{n+2})$, $i=1,2,...,n$, u E_{n+2}, tj. na odredjivanje jedne tačke na presečnoj pravoj Σ_1^i prostora Σ_n sa ovim trodimenzionim prostorom. Za slučaj kada je prostor $\Sigma_{(n-1)}$ u prostoru $E_{(n+1)}$ ova presečna tačka je ona tačka prave Σ_1^i za koju je $x_{n+2}=0$. Dakle, ona se nalazi u ravni $E_2^i(x_ix_{n+1})$, $i=1,2,...,n$. Prema tome, odredjivanju nepoznatih u prostoru $E_{(n+1)}$ odgovara odredjivanje tačaka-tragova datog prostora $\Sigma_{(n-1)}$ u projekcijskim ravnima x_ix_{n+1}, $i=1,2,...,n$. Postupak za odredjivanje ovih tragova dat je u I.3.

U prostoru $E_{(n+1)}$ prostor $\Sigma_{(n-1)}$ odredjen je projekcijama n tačaka datih koeficientima jednačina. Kako koeficienata jedne jednačine ima $(n+1)$, date su sve koordinate jedne tačke u prostoru E_{n+1}. Projekcije tačaka u ravni crtanja nalaziće se na paralelnim pravim, upravnim na osu x_{n+1}, ali njihova rastojanja nisu proizvoljna, već im je položaj potpuno odredjen koordinatama x_{n+1}.

Na ovaj način dali smo grafičkoj metodi za rešavanje sistema linearnih jednačina odredjeno prostorno tumačenje. Koristeći ~~odredjenu~~ metodu upravnog projektovanja u višedimenzionim prostorima, uspostavili smo obostrano jednoznačnu korespondenciju izmedju tačke višedimenzionog prostora i jedne jednačine sistema, kao i izmedju $(n-1)$-dimenzionog prostora $\Sigma_{(n-1)}$ u prostoru $E_{(n+1)}$ i potpunog sistema n linearnih jednačina sa n nepoznatih.

Ekvivalentan sistem jednačina datom sistemu, u kome svaka jednačina sadrži samo po jednu nepoznatu, a iz kojih se odmah



$x_1\, x_2\, x_3\, x_4$
A_4^1
A_1^1
A_4^4
A_3^1
T_2^2
A_2^3
A_1^3
A_2^2
A_3^4
A_3^3
T_3^3
T_4^4
A_2^1
A_1^4
A_4^2
O_2
O
O_1
O_4
O_3
$T_1^2 \equiv T_1^3 \equiv T_1^4$
x_5
$T_2^1 \equiv T_2^3 \equiv T_2^4$
$T_3^1 \equiv T_3^2 \equiv T_3^4$
$T_4^1 \equiv T_4^2 \equiv T_4^3$
A_4^3
A_2^4
A_3^2
A_1^2
T_1^1

dobijaju vrednosti nepoznatih, pretstavljen je tragovima prostora $\Sigma_{(n-1)}$.

Na ovaj način je kosstrukcija uprošćena utoliko što, umesto $(n+1)$ projekcija prostora $\Sigma_{(n-1)}$ u prostoru E_{n+2}, dozvoljeno je n projekcija u prostoru $E_{(n+1)}$ za izvodjenje grafičke konstrukcije. Uprošćenje je i u tome što je broj pravih, koje u konstrukciji treba upotrebiti, smanjen i izborom tačaka O_1, $O_2, \ldots, O_n$, na jednoj pravoj. U grafičkoj metodi smanjenje broja linija koje se u konstrukciji koriste, povećava preciznost metode i tačnost dobijenih rezultata.

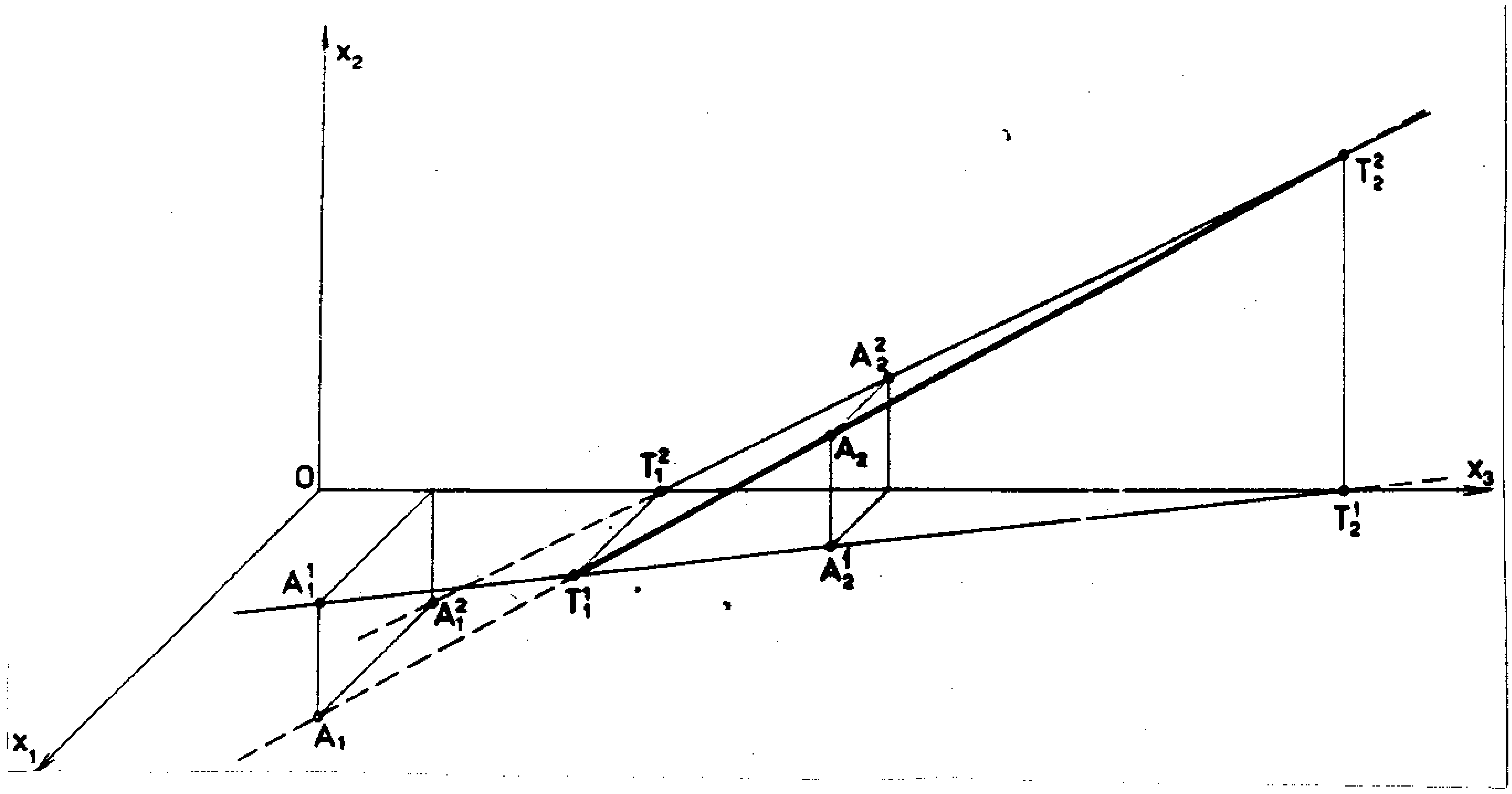
Primenimo izloženu metodu odredjivanja tragova prostora $\Sigma_{(n-1)}$ u E_{n+1} (i.3) na rešavanje sistema n linearnih jednačina sa n nepoznatih kada je $n=4$, a jednačine sistema su:

$$\begin{aligned} 7x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 &= 3 \end{aligned}$$

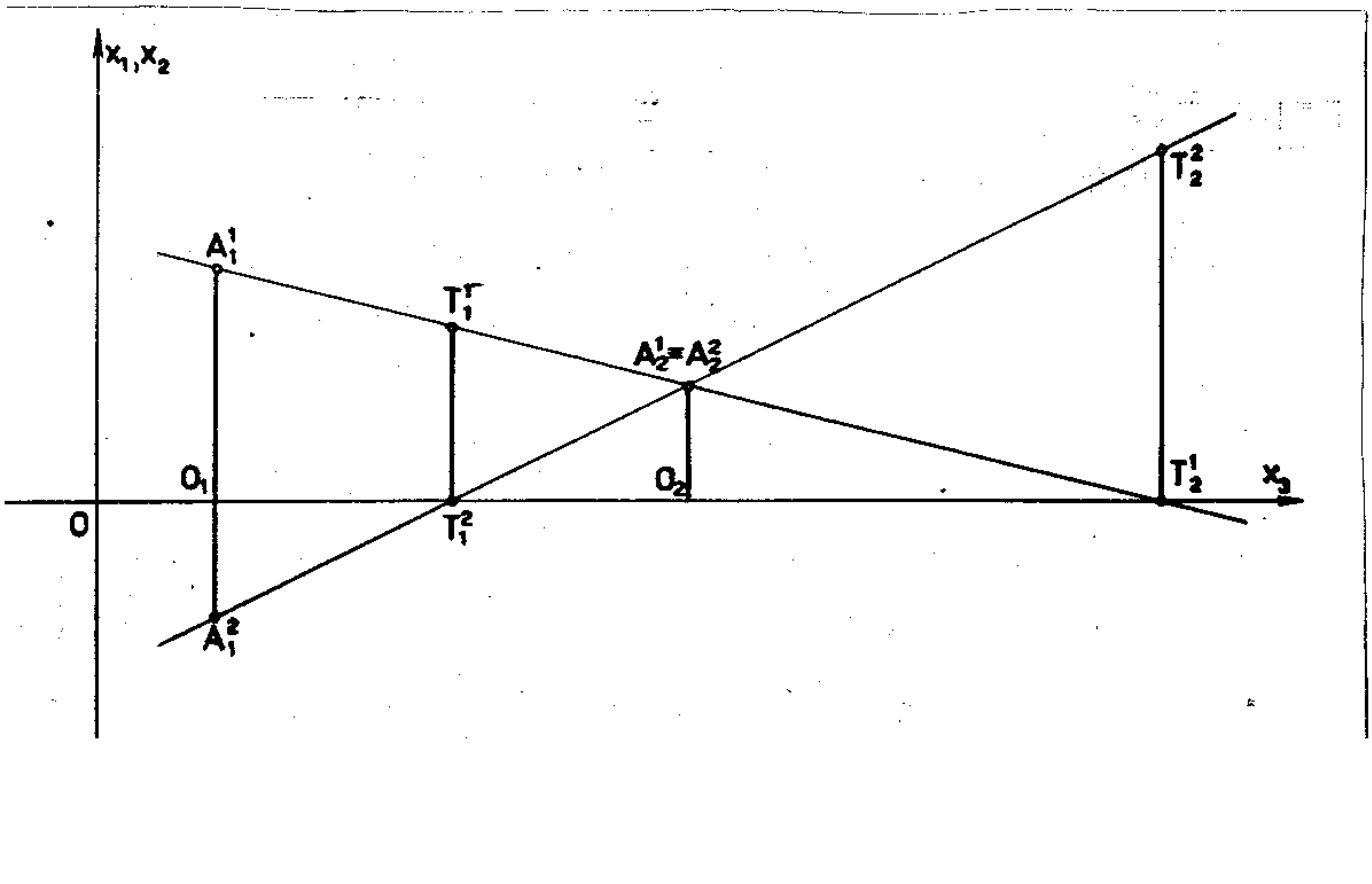
Koeficienti ovih jednačina odredjuju projekcije tačaka A_1, A_2, A_3 i A_4 kojima je dat jedan trodimenzioni prostor Σ_3 u prostoru E_5 (sl.20). Tragovi-tačke T_1, T_2, T_3, T_4 prostora Σ_3 u projekcijskim ravnima x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5 odredjeni su prema teoremi III (I.3). Koordinate ovih tačaka odredjuju sistem jednačina ekvivalentan datom sistemu:

$$\begin{aligned} 5.75\, x_1 &= 11.5 \\ 4.2\, x_2 &= 4.2 \\ 1.85\, x_3 &= 5.55 \\ 2\, x_4 &= 8 \end{aligned}$$

u kome svaka jednačina ima samo jednu nepoznatu čiju vrednost dobijamo kao razmeru koeficienata : $x_1 = \frac{11.5}{5.75} = 2$, $x_2 = \frac{4.2}{4.2} = 1$,



x_2
T_2^2
A_2^2
T_1^2
A_2
0
x_3
T_2^1
A_2^1
A_1^1
A_1^2
T_1^1
x_1
A_1



x_1, x_2
T_2^2
A_1^1
T_1^1
$A_2^1 = A_2^2$
O_1
O_2
T_2^1
x_3
0
T_1^2
A_1^2

$x_3 = \frac{5,55}{1,85} = 3$ i $x_4 = \frac{8}{2} = 4$.

Koeficienti i rešenja sistema u izabranom primeru su celi brojevi, no nikakve teškoće ne zadaje ni rešavanje sistema ako koeficienti nisu celi brojevi.

Na sl. 21 rešen je još jedan primer, sistem od dve jednačine sa dve nepoznate:

$$2\,x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 5\ .$$

Ovim dvema jednačinama odredjena je prava A_1A_2 u prostoru E_3 , a rešenja sistema odredjena su tragovima T_1 i T_2 u projekcijskim ravnima x_1x_3 i x_2x_3 , odnosno sistemom $1,5\,x_1 = 3$ i $3\,x_2 = 9$, odakle dobijamo $x_1 = \frac{3}{1,5} = 2$ i $x_2 = \frac{9}{3} = 3$.

Pre no što se pristupi rešavanju sistema linearnih jednačina, tj. odredjivanju nepoznatih, postavlja se pitanje egzistencije rešenja.

Pokazaćemo kako se ovo ispitivanje može izvršiti za grafičku metodu koju smo sveli na odredjivanje tragova prostora. Rešenja sistema zavise od položaja prostora koji pretstavlja dati sistem jednačina, tj. od položaja njegovih tragova.

U I.3 izložen je postupak odredjivanja tragova prostora i uočeno je da položaj tragova zavisi od položaja tačke S u kojoj se seku projekcije pravih $\Sigma\frac{i}{1}$, i=1,2,...,n , po kojima dati prostor seče prostore poklapanja i od projekcija ovih pravih. Za sve slučajeve u kojima mogu da se odrede svi tragovi prostora i kada su to konačne tačke ravni crtanja, moguće je odrediti sve nepoznate i sistem ima rešenja. Potreban uslov za ovu mogućnost je, kao što smo videli, da je tačka S konačna ili beskonačno daleka tačka ravni crtanja, ali da nije na osi x_{n+1} .

Da bismo ispitali kakav je položaj tačke S , dovoljno je odrediti sve projekcije jedne od pravih Σ_1^1 , jer se u tački S seku sve projekcije svih ovih pravih. U šemi, mreži prostora kojom je pretstavljeno odredjivanje tragova prostora (I.3) , za odredjivanje tačke S treba, prema tome, odrediti samo jednu granu mreže, potprostore od kojih se svaki sledeći nalazi u svim pret hodnim, napr.: $\Sigma_{(n-1)}$, $\Sigma^1_{(n-2)}$, $\Sigma^1_{(n-3)}$,...., Σ^1_2 , Σ^1_1 .

LITERATURA

1. L. Eckhart: Konstruktive Abbildungsverfahren, Eine Einführung in die neueren Methoden der darstellenden Geometrie, Wien 1926.
2. L. Hoffmann: Konstruktive Lösung der Massaufgaben im vierdimensionalen euklidischen Raum, Sitzungberichte - Akademie der Wissenschaften in Wien, Abteilung IIa, Bd.130, Heft 1 und 2 .
3. G. Loria: Sur quelques problèmes élémentaires de la Géométrie descriptive à 3 et 4 dimensions, Archiv der Math. und Phys. , II Bd. (2) , Leipzig und Berlin, 1902 .
4. J. Maurin: Géométrie descriptive à quatre dimensions, premier livre, Paris 1948 .
5. R. Mehmke: Über die darstellende Geometrie der Räume von vier und mehr Dimensionen, mit Anwendungen auf die graphische Lösung von Systemen numerischer Gleichungen und auf Chemie, Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen, II Serie, VI Bd., I Heft 1904, Stuttgart.
6. R. Mehmke: Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, I 2, Graphisches Rechnen, & 39 Systeme linearer Gleichungen.
7. R. Mehmke: Izvlečenie iz pisma profesora Memke k profesoru Nekrasovu, Matematičeskij sbornik, Tom XVI, V.1 , Moskva 1891 .
8. E. Müller: Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie, Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XVI, Leipzig 1905 .
9. Z.I. Prjenišnikova: Obobščenie proekcii E.S. Fjodorova, Metodi našertatelnoj geometrii i jejo priloženija, Moskva 1955 .
10. P.H. Schoute: Mehrdimensionale Geometrie, I Teil, Leipzig 1902.