

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

L. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

L. BIEBERBACH W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR H. WEYL

Sonderabdruck aus Band 33, Heft 2.

J. Karamata

Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze.



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1931

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTFÜHRUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 55,

L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,

E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,

L. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

33. Band.

Inhalt:

2. Heft.

	Seite
Brauer, A., Über den kleinsten quadratischen Nichtrest	161
Gronwall, T. H., Über den Konvergenzbereich der Potenzreihenentwicklung einer harmonischen Funktion von n Veränderlichen	177
Mammana, G., Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari	186
Haack, W., Affine Differentialgeometrie der parabolischen Strahlensysteme . . .	232
Wigert, S., Eine Bemerkung über ganze Funktionen	271
Franz, W., Untersuchungen zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz	275
Karamata, J., Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze . .	294
Maruhn, K., Ein Beitrag zur mathematischen Theorie der Gestalt der Himmelskörper	300

Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze.

Von

J. Karamata in Belgrad.

Die Herren Hardy und Littlewood¹⁾ haben folgende zwei Sätze bewiesen:

Satz A. *Es sei*

$$(1) \quad a_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$f(r) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v r^v \text{ konvergent für } r < 1$$

und

$$(2) \quad \varphi(x) = ax^\sigma (\lg x)^{\alpha_1} (\lg \lg x)^{\alpha_2} \dots (\lg_k x)^{\alpha_k}, \quad \sigma > 0;$$

aus

$$f(r) \sim \varphi\left(\frac{1}{1-r}\right) \text{ für } r \rightarrow 1$$

folgt dann

$$\sum_{v=1}^n a_v \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \varphi(n) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Satz B. *Es sei*

$$a_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty, \quad \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

$$f(s) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{-\lambda_v s} \text{ konvergent für } s > 0$$

und

$$\varphi(x) = ax^\sigma, \quad \sigma > 0;$$

aus

$$f(s) \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \text{ für } s \rightarrow 0$$

¹⁾ Hardy-Littlewood, Tauberian Theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, Proc. of the London Math. Soc. (2), **13** (1914), S. 174-191 (S. 180); Some theorems concerning Dirichlet's series, Messenger of Math. **43** (1914), S. 134-147.

folgt dann

$$\sum_{v=1}^n a_v \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \varphi(\lambda_n) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Was den Satz A betrifft, so wurde dieser von Herrn R. Schmidt²⁾ weitgehend verallgemeinert, indem er erstens die Bedingung (1) durch eine allgemeinere ersetzt, zweitens die Funktion $\varphi(x)$, durch die, in seiner Arbeit so genannten gestrahlten Funktionen (Folgen) ersetzt, welche (2) als Spezialfall enthalten. Im Falle $a_n \geq 0$ habe ich den Satz von Herrn R. Schmidt (im Referat des ersten Kongreß der Rumänischen Mathematiker, Cluj, April 1929, noch nicht erschienen) in einfacherer Form bewiesen. Die dabei vorkommenden Funktionen $\varphi(x)$ habe ich „regulär wachsende Funktionen“ genannt, diese stimmen für $\sigma > 0$ mit der von Herrn Schmidt eingeführten gestrahlten Funktionen überein, für $\sigma = 0$ aber enthalten sie die gestrahlten Funktionen, was ich an einer anderen Stelle³⁾ eingehend behandelte.

Der Satz B wurde andererseits von Herrn O. Szász⁴⁾ verallgemeinert, indem er die Bedingung $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 1$ wegließ und statt Dirichletscher Reihen

Integrale von der Form $\int_0^{\infty} A(x) e^{-sx} dx$, wo $A(x)$ nicht abnimmt, betrachtete (die schon die Herren Landau⁵⁾ und Doetsch⁶⁾ in speziellen Fällen betrachteten⁷⁾). Die Funktion $\varphi(x)$ behält aber die spezielle Form ax^σ .

In dieser Arbeit behalte ich die Annahme $a_n \geq 0$ bei, verallgemeinere aber die beiden oben angeführten Sätze, indem ich den einer allgemeineren Funktion $\varphi(x)$ entsprechenden Integralsatz beweise. Anstatt Integrale obiger Form betrachte ich Stieltjessche Integrale der Form $\int_0^{\infty} e^{-sx} d\{A(x)\}$ mit

²⁾ R. Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, Math. Zeitschr. **22** (1925), S. 89-152 (S. 151).

³⁾ J. Karamata, Sur le mode de croissance régulière des fonctions, Mathematica (Cluj, Roumanic) **4** (1930), S. 38-53.

⁴⁾ O. Szász, Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberischen Art, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. (1929), S. 325-340 (S. 326).

⁵⁾ E. Landau, Monatsh. f. Math. u. Phys. 1907, S. 8-23.

⁶⁾ Doetsch, Math. Annalen **82** (1920), S. 68-82.

⁷⁾ Ebenfalls haben die Herren Hardy und Littlewood in der Note: Notes on the theory of series (XI): In Tauberian theorems, Proc. of the Lond. math. Soc. (2) **30** (1929), S. 23-37 (Theorem 1) den analogen Satz für Integrale von der Form

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad f(t) \geq 0,$$

bewiesen; diese Integrale wie auch diejenigen, die Herr Szász betrachtet, sind aber in dem Stieltjesschen Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d[A(t)], \quad A(t) \text{ nicht abnehmend,}$$

enthalten.

der nicht abnehmenden Funktion $A(x)$, da diese die Dirichletschen Reihen direkt als Spezialfall enthalten; denn es ist

$$\int_0^\infty e^{-sx} d\{A(x)\} = \sum_{v=1}^\infty a_v e^{-\lambda_v s},$$

wenn

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq \lambda_1, \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n & \text{für } \lambda_n < x \leq \lambda_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

gesetzt wird.

Die Funktion $\varphi(x)$ setze ich als „regulär wachsend“ voraus. Diesen Begriff habe ich in meiner unter ³⁾ zitierten Arbeit eingeführt, weshalb ich hier nur die Definition und die Haupteigenschaft ohne Beweis angebe.

Die stetige und positive Funktion $\varphi(x)$, welche mit x ins Unendliche wächst (welcher Fall uns hier nur interessiert), wird *regulär wachsend* genannt, wenn

$$(3) \quad \frac{1}{x \varphi(x)} \int_0^x \varphi(t) dt \rightarrow \frac{1}{\sigma+1}, \quad \sigma \geq 0 \text{ für } x \rightarrow \infty,$$

und dann wird

$$(4) \quad \varphi(x) = x^\sigma L(x),$$

wo $L(x)$ eine *langsam wachsende, abfallende oder oszillierende* Funktion genannt wird und folgende Eigenschaft hat:

$$(5) \quad L(xr)/L(r) \rightarrow 1 \text{ bei } r \rightarrow \infty \text{ für jedes } x > 0.$$

Umgekehrt folgt (3) aus (4) und (5).

Die erwähnte Verallgemeinerung lautet:

Satz 1. *Es sei $A(x)$ nicht abnehmend, $\varphi(x)$ regulär wachsend,*

$$\varphi(x) = x^\sigma L(x) \rightarrow \infty, \text{ wenn } x \rightarrow \infty, \sigma \geq 0,$$

sei ferner das Integral

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\} \text{ für } s > 0 \text{ konvergent;}$$

aus

$$f(s) \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \text{ für } s \rightarrow 0$$

folgt dann

$$A(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \varphi(x) \text{ für } x \rightarrow \infty.$$

Diesen Satz folgere ich aus dem folgenden

Hauptsatz. *Sei*

$$(6) \quad \varphi(x) = x^\sigma L(x) \rightarrow \infty, \text{ wenn } x \rightarrow \infty, \sigma \geq 0,$$

$$(5) \quad L(xr)/L(r) \rightarrow 1 \text{ bei } r \rightarrow \infty \text{ für jedes } x > 0;$$

³⁾ Im Falle, wo $L(x)$ nicht abnimmt, genügt schon, wie Herr Landau (Bull. Acad. Belgique 1911, S. 443) gezeigt hat, daß $L(2r)/L(r) \rightarrow 1$ bei $r \rightarrow \infty$.

sei ferner das Integral

$$\int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\} \text{ für } s > 0 \text{ konvergent}$$

und

$$(7) \quad \int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\} = O\left\{\varphi\left(\frac{1}{s}\right)\right\}.$$

Aus

$$(8) \quad \int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \text{ bei } s \rightarrow 0$$

folgt dann

$$\int_0^\infty e^{-st} g(e^{-st}) d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_0^\infty e^{-t} g(e^{-t}) d\{t^\sigma\} \text{ bei } s \rightarrow 0$$

für jede im Intervalle $(0, 1)$ stetige Funktion $g(x)$. (Für $\sigma = 0$ hat man unter t^σ diejenige Funktion zu verstehen, die $= 0$ für $t = 0$, sonst $= 1$ ist.)

Beweis. Setzt man in (8) $(k+1)s$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) statt s , so folgt wegen (5) und (6)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} e^{-kst} d\{A(t)\} &\sim \varphi\left(\frac{1}{(k+1)s}\right) \sim \frac{1}{(k+1)^\sigma} \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\sigma-1)} \int_0^\infty e^{-t} e^{-kt} d\{t^\sigma\}, \end{aligned}$$

also ist

$$\int_0^\infty e^{-st} P(e^{-st}) d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_0^\infty e^{-t} P(e^{-t}) d\{t^\sigma\},$$

wo $P(x)$ ein beliebiges Polynom ist. Da jede stetige Funktion durch Polynome gleichmäßig approximiert werden kann, ist wegen (7) der Hauptsatz bewiesen.

Um aus dem Hauptsatze den Satz 1 zu erschließen, setze ich zuerst

$$e^{-t} g(e^{-t}) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1+\varepsilon-t}{\varepsilon} & \text{für } 1 \leq t \leq 1+\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \\ 0 & \text{für } 1+\varepsilon \leq t. \end{cases}$$

Dann folgt, wenn man $1/s = x$ setzt,

$$(9) \quad \begin{aligned} A(x) + \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x(1+\varepsilon)} (1+\varepsilon-st) d\{A(t)\} \\ \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \varphi(x) + \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \varphi(x) \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} (1+\varepsilon-t) d\{t^\sigma\}. \end{aligned}$$

Setzt man weiter

$$e^{-t} g(e^{-t}) = g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 - \varepsilon, \\ \frac{t - 1 + \varepsilon}{\varepsilon} & \text{für } 1 - \varepsilon \leq t \leq 1, \\ \frac{1 + \varepsilon - t}{\varepsilon} & \text{für } 1 \leq t \leq 1 + \varepsilon, \\ 0 & \text{für } 1 + \varepsilon \leq t, \end{cases}$$

so ist, da $A(x)$ nicht abnimmt,

$$0 < \frac{1}{\varphi(x)} \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x(1+\varepsilon)} (1 - \varepsilon - st) d\{A(t)\}$$

$$\frac{1}{\varphi(x)} \int_{x(1-\varepsilon)}^{x(1+\varepsilon)} g_\varepsilon(st) d\{A(t)\} \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} g_\varepsilon(t) d\{t^\sigma\} = \frac{1}{\Gamma(\sigma+2)} \cdot \frac{(1+\varepsilon)^{\sigma+1} - (1-\varepsilon)^{\sigma+1}}{\varepsilon} \rightarrow 2$$

woraus nach (9) Satz 1 folgt.

Bemerkung. Nach Satz 1 ist leicht zu ersehen, daß folgender Satz gilt:

Satz 2. Sei $A(x)$ eine nicht abnehmende Funktion derart, daß

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} d\{A(t)\} = \varphi(x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow \infty$$

eine regulär wachsende Funktion ist⁹⁾, ferner sei $a(x)$ eine stetige und einseitig beschränkte Funktion; aus

$$\int_0^\infty e^{-st} a(t) d\{A(t)\} \sim a \int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\}, \quad s \rightarrow 0,$$

folgt dann

$$\int_0^x a(t) d\{A(t)\} \sim a A(x).$$

Ist

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq \lambda_1, \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n & \text{für } \lambda_n < x \leq \lambda_{n+1}, \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

dann folgt aus diesem Satz ein Resultat, welches ich im Referat des ersten Kongresses der slawischen Mathematiker, Warschau 1929, bewiesen habe und welches lautet:

⁹⁾ Damit $\varphi(x)$ eine regulär wachsende Funktion sei, ist nach Satz 1 notwendig und hinreichend, daß es $A(x)$ ist, also wegen (3), daß

$$\frac{1}{x \cdot A(x)} \int_0^x A(t) dt$$

einen Grenzwert für $x = \infty$ besitzt.

$A(x)$ erfülle die Bedingungen des Satzes 2.¹⁰⁾ Aus

$$\frac{\sum_{v=1}^\infty a_v p_v e^{-\lambda_v s}}{\sum_{v=1}^\infty p_v e^{-\lambda_v s}} \rightarrow a \text{ bei } s \rightarrow 0$$

und

$$a_n > O(1)$$

folgt dann

$$\frac{\sum_{v=1}^n a_v p_v}{\sum_{v=1}^n p_v} \rightarrow a \text{ bei } n \rightarrow \infty$$

(wo $a(\lambda_n) = a_n$ gesetzt ist).

¹⁰⁾ D. h., wegen ⁹⁾, daß der Ausdruck

$$\frac{\sum_{v=1}^n p_v \frac{\lambda_v}{x}}{\sum_{v=1}^n p_v}, \quad \lambda_n < x \leq \lambda_{n+1},$$

einen Grenzwert besitzt, wenn $x \rightarrow \infty$.

(Eingegangen am 25. Juni 1930.)

Handbuch der Astrophysik

Herausgegeben von

Professor Dr. **G. Eberhard**
Potsdam

Professor Dr. **A. Kohlschütter**
Bonn

Professor Dr. **H. Ludendorff**
Potsdam

Soeben erschien *Band III, 2. Hälfte:*

Grundlagen der Astrophysik III

Mit 131 Abbildungen. VIII, 358 Seiten. 1930. RM 58.80; geb. RM 62.—

Inhaltsübersicht: **Gesetzmäßigkeiten in den Serienspektren.** Von Prof. Dr. W. Grotrian, Potsdam: Die Spektren von Atomen und Ionen mit einem einzigen Elektron. Das Spektrum des Wasserstoffatoms. Das Spektrum des ionisierten Heliumatoms. Die Spektren von Atomen und Ionen mit einem Valenzelektron. Die Spektren von Atomen und Ionen mit zwei Valenzelektronen, mit drei Valenzelektronen. Die Zuordnung der wahren Hauptquantenzahlen „n“ zu den Termen. Die Größe und Frequenzdifferenz der Terme. — **Theorie der Multiplettspektren.** Von Prof. Dr. O. Laporte, Ann Arbor, Mich.: Qualitative Struktur. Quantitative Termformeln. Zeemaneffekt. Intensitäten und Auswahlregeln. Serien in Komplexspektren. Betrachtung der einzelnen Perioden und ihrer Spektren. Literatur über Termordnung in Spektren. — **Bandenspektren.** Von Dr. K. Wurm, Potsdam: Bandensystem und Bandenstruktur. Elektronenterme. Intensitäten. Isotopieeffekt. Spektroskopische Bestimmung der Dissoziationsarbeit von Molekülen. — **Theory of Pulsating Stars.** By Prof. E. A. Milne, Oxford: General Theory. Pulsation Theory. Stability Investigations. Sachverzeichnis.

Band III, 1. Hälfte.

Mit 44 Abbildungen. X, 473 Seiten. 1930. RM 74.—; geb. RM 77.—

Inhaltsübersicht: Wärmestrahlung. Von Professor Dr. W. Westphal, Berlin. — Thermodynamics of the Stars. By Professor E. A. Milne, Oxford. — Die Ionisation in den Atmosphären der Himmelskörper. Von Professor Dr. A. Panekoeck, Amsterdam. — The Principles of Quantum Theory. By Professor S. Rosseland, Oslo. Das Handbuch wird 6 Bände umfassen, von denen Band II, 1. Teil, III, 1. Teil, IV und VI fertig vorliegen. Jeder Band ist einzeln käuflich, jedoch verpflichtet die Abnahme eines Teiles eines Bandes zum Kauf des ganzen Bandes.

Astrophysik auf atomtheoretischer Grundlage

Von

Professor Dr. **Svein Rosseland**, Oslo

„Struktur der Materie“ Band XI

Mit 25 Abbildungen. VI, 252 Seiten. 1931. RM 19.80; gebunden RM 21.20

Inhaltsübersicht: I. Astrophysikalische Beobachtungstatsachen. — II. Physikalische Grundlagen zum Problem des Sterninnern. — III. Hydrodynamik der Sterne. — IV. Energetik der Entwicklungsgeschichte. — V. Physik der Sternatmosphäre. — VI. Problem der Gasnebel. — Namen- und Sachverzeichnis.

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen

mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Gemeinsam mit **W. Blaschke**, Hamburg, **M. Born**, Göttingen, **C. Runge**†, Göttingen

herausgegeben von

R. Courant, Göttingen†

Band I:

Die neuesten Bände:

Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Von **Wilhelm Blaschke**, Prof. der Mathematik an der Universität Hamburg. I. **Elementare Differentialgeometrie**. Dritte, erweiterte Auflage. Bearbeitet und herausgegeben von Gerhard Thomsen, Prof. der Mathematik an der Universität Rostock. Mit 35 Textfiguren. X, 311 Seiten. 1930. RM 18.—; geb. RM 19.60

Band VI:

Theorie der Differentialgleichungen. Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen. Von **Ludwig Bieberbach**, o. ö. Prof. der Mathematik an der Friedrich Wilhelms-Universität in Berlin, Mitgl. der Preuß. Akademie der Wissenschaften. Dritte, neubearbeitete Auflage. Mit 22 Abbildungen. XIII, 399 Seiten. 1930. RM 21.—; geb. RM 22.80

Band XII:

Methoden der mathematischen Physik. Von Professor **R. Courant**, Göttingen, und Professor **D. Hilbert**, Göttingen. Erster Band. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 26 Abbildungen. XIV, 469 Seiten. 1931. RM 29.20; gebunden RM 30.80

Band XXI:

Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Von **A. Schoenflies** †. Zweite Auflage. Bearbeitet und durch 6 Anhänge ergänzt von **M. Dehn**, Professor an der Universität Frankfurt a. M. Mit 96 Abbildungen. X, 414 Seiten. 1931. RM 25.—; gebunden RM 26.60

Band XXIX:

Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Von **Wilhelm Blaschke**, Prof. der Mathematik an der Universität Hamburg. III. **Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln**. Bearbeitet von Gerhard Thomsen, Privatdozent der Mathematik an der Universität Hamburg. Mit 68 Textfiguren. X, 474 Seiten. 1929. RM 26.—; gebunden RM 27.60

Band XXXI:

Foundations of Potential Theory. By **Oliver Dimon Kellogg**, Prof. of Mathematics in Harvard University Cambridge, Massachusetts, U. S. A. Mit 30 Figuren. IX, 384 Seiten. 1929. RM 19.60; gebunden RM 21.40

Band XXXII:

Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie. Von **Kurt Reidemeister**, o. ö. Professor der Mathematik an der Albertus-Universität in Königsberg. Mit 37 Textfiguren. X, 147 Seiten. 1930. RM 11.—; geb. RM 12.60

Band XXXIII:

Moderne Algebra. Von Dr. **B. L. van der Waerden**, o. Prof. an der Universität Groningen. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Erster Teil. VIII, 243 Seiten. 1930. RM 15.60; geb. RM 17.20