INTERNATIONALER MATHEMATIKERKONGRESS ZÜRICH 1932
CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS ZURICH 1932

UN THÉORÈME GÉNÉRAL D'INVERSION DES PROCÉDÉS DE SOMMABILITÉ

Par J. KARAMATA, Beograd

Les théorèmes d'inversion, c'est-à-dire les théorèmes de nature taubérienne, furent établis, pour bien des procédés particuliers de sommabilité, dans les importants travaux de MM. Hardy, Littlewood, Landau, Schmidt, Wiener et d'autres. Tels sont par exemple les théorèmes suivants :

De $$e^{-r}\sum_{v=0}^{\infty} s_v \frac{1}{v!} r^v \to s, \; r \to \infty, \quad \text{(som. — B)}$$

resp. $$\sum_{v=0}^{\infty} u_v r^v \to s, \; r \to 1, \quad \text{(som. — A)}$$

resp. $$\sum_{v=0}^{\infty} u_v v^{-\sigma} \to s, \; \sigma \to 0, \quad \text{(som. — D)}$$

il resulte $$s_n = \sum_{v=0}^{n} u_v \to s, \; n \to \infty,$$

toutes les fois que la suite u_v satisfait à la condition

$$\liminf_{n=\infty} \sum_{n=\infty}^{n'} u_v \geqq -w(\varepsilon) \to 0 \quad \textit{avec } \varepsilon, \tag{I}$$

pour tout n' tel que $n \leqq n' \leqq N(\varepsilon)$, la longueur de l'intervalle $\{n, N(\varepsilon)\}$ étant, suivant les procédés, donnée par :

$$\text{B}: \quad N(\varepsilon) = n + \varepsilon\sqrt{n}, \qquad \text{A}: \quad N(\varepsilon) = n + \varepsilon n, \qquad \text{D}: \quad N(\varepsilon) = n^{1+\varepsilon}.$$

C'est donc l'intervalle $\{n, N(\varepsilon)\}$ qui importe ; étant complètement déterminé par le p. d. s., il mesure en quelque sorte (suivant sa longueur asymptotique) la portée (l'efficacité intérieure) des différents p. d. s. Je le nommerai *intervalle de convergence.*

Mon but est de montrer qu'on peut déterminer l'intervalle de convergence pour une classe relativement large de p. d. s. La forme de ces procédés, la meilleure indiquée en vue de cette étude est celle qu'a étudiée M. O. Perron (Math. Zeit. 6, p. 286), c'est-à-dire $\sum_{v=0}^{\infty} u_v \varphi_v(r)$, où

$$\varphi_0(r) = 1 \geqq \varphi_v(r) \geqq \varphi_{v+1}(r) \text{ et } \varphi_v(r) \to 1, \; r \to \infty, \; v = 1, 2, \ldots \tag{II}$$

Ces p. d. s. étant trop généraux, ont doit les restreindre en les assujettissant à satisfaire en outre aux conditions suivantes :

de $$\sum_{v=0}^{\infty} u_v\, \varphi_v(r) \to s,\ r \to \infty, \tag{III}$$

il doit résulter $\sum_{v=0}^{\infty} u_v \,|\varphi_v(r)|^k \to s,\ r \to \infty$ *pour tout* $k = 2, 3, \ldots$ **(IV)**

Je dirai d'un p. d. s. qu'il est *régulier*, si outre les conditions (II) il satisfait aux conditions (IV) pour toute suite vérifiante (III).

Théorème. — L'intervalle de convergence des procédés réguliers de sommabilité est l'intervalle que peut parcourir l'indice v pour que l'inégalité

$$x^{1+\varepsilon} \leqq \varphi_v(r) \leqq x, \quad 0 < x < 1, \tag{V}$$

soit satisfaite.

C'est-à-dire en désignant par n le plus petit des v satisfaisant à (V), on obtient le plus grand $N(\varepsilon)$ comme fonction de n et ε, ces deux nombres définissant l'intervalle de convergence $|n, N(\varepsilon)|$ du procédé régulier à noyau $\varphi_v(r)$.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant (que j'ai établi dans les Studia Mathematica T. *3*, p. 68 (1931) :

Si $\alpha_r(x)$, $0 \leqq x \leqq 1$, *satisfait aux conditions suivantes :*

$$\alpha_r(1) = 0,\ r \geqq 0;\ \int_0^1 t^k\, d\,|\alpha_r(t)| \to \int_0^1 t^k\, d\,|\alpha(t)|,\ r \to \infty,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

et $\lim_{r=\infty}\ \inf\ \min_{x^{1+\varepsilon} \leq t \leq x} |\alpha_r(x) - \alpha_r(t)| \geqq \overline{w}(\varepsilon) \to 0$ *avec,* $0 < x < 1$, *alors* $\alpha_r(x) \to \alpha(x)$, $r \to \infty$, *en tout point de continuité* x *de* $\alpha(x)$.

On le vérifie facilement en prenant pour $\alpha_r(x)$ la fonction de sauts :

$$\alpha_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 1 \\ \sum_{v=0}^{n} u_v & \text{pour } \varphi_{n+1}(r) \leqq x < \varphi_n(r),\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ce résultat nous permet d'établir des théorèmes d'inversion pour une classe assez générale de p. d. s. La difficulté essentielle est de voir si un procédé est *régulier*. Pour les procédés A et D mentionnés ce fait est évident, il est de même démontré pour le procédé typique de Riesz, mais déjà les procédés à noyau de la forme $\varphi(v/r)$ présentent de sérieuses difficultés comme il est à prévoir des travaux de M. N. Wiener.

Par contre, en ce qui concerne la mesure de l'efficacité des p. d. s., c'est toujours la longueur de l'intervalle $\{ n, N(\varepsilon) \}$, définie par (V), qui peut servir de mesure, même dans le cas où le procédé n'est pas régulier (les conditions (IV) se rapportant plutôt aux problèmes d'unicité).