PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

UNIVERZITETA U SARAJEVU

MUSTAFA KULENOVIĆ

PRILOZI TEORIJI OSCILACIJA OBIČNIH I PARCIJALNIH DIFERENCIJALNIH NEJEDNAČINA DRUGOG REDA

-Doktorska disertacija-

SARAJEVO,1980.

Želim da izrazim zahvalnost Profesoru Ibrahimu Aganoviću za pokazani interes tokom izrade i uloženi trud prilikom pažljivog pregleda ove disertacije.
Takođe izražavam zahvalnost Profesoru Vasilios-u A. Staikos-u, Profesoru Yiannis-u G. Sficas-u i Dr. Myron-u K. Grammatikopoulos-u za mnogobrojne korisne informacije, savjete i sugestije koje su mi pružali za vrijeme i nakon mog boravka u Odsjeku za Matematiku Univerziteta u Ioannina-i, i tako u velikoj mjeri doprinijeli realizaciji ove disertacije.

SADRŽAJ

GLAVA 1.

U V O D

1.1. U ovoj disertaciji će se razmatrati teorija oscilacija diferencijalne nejednačine sa otklonjenim argumentom:

$$(P) \quad y(t)\left[(a(t)b(y(t))y'(t))' + p(t)f(y(\tau(t)))\right] \leqslant 0 \quad , \quad t \geqslant t_0$$

kao i odgovarajuće obične diferencijalne nejednačine:

$$(OP) \quad y(t)\left[(a(t)b(y(t))y'(t))' + p(t)f(y(t))\right] \leqslant 0 \quad , \quad t \geqslant t_0.$$

Činjenicu da je funkcija φ definisana na nekom skupu A i da pripada nekoj klasi funkcija $\mathcal{P}$ označavaćemo sa:

$$\varphi \in \mathcal{P}\left[A\right]$$

a ako je rang funkcije φ skup B onda ćemo pisati:

$$\varphi \in \mathcal{P}\left[A, B\right].$$

Tokom čitave disertacije pretpostavljaćemo da vrijedi:

$a \in C\left[[t_0, \infty), (0, \infty)\right]$, $b \in C\left[R, (0, \infty)\right]$, $p \in C\left[[t_0, \infty), R\right]$,
$f \in C^1\left[R, R\right]$ i

$$\lim_{t \to \infty} \tau(t) = \infty.$$

<u>Definicija.</u> Za otklonjeni argument $\tau(t)$ kažemo da je retardirani (zakašnjeli) ako je

$$\tau(t) \leqslant t \quad , \quad t \geqslant t_0$$

a da je advansirani ako je

$$\tau(t) \geqslant t \quad , \quad t \geqslant t_0.$$

1.2. Definicija. Za realnu funkciju φ definisanu na $[t_o, \infty)$ kažemo da eventualno ima neku osobinu ako postoji $t_1 \geqslant t_o$ tako da funkcija φ ima ovu ovu osobinu na $[t_1, \infty)$.

Za funkciju $\varphi \in C[[t_o, \infty), R]$ kažemo da je oscilatorna ako postoji niz realnih brojeva $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, takav da vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$$

i $$\varphi(t_n)=o \qquad , \quad n=1,2, \dots .$$

U suprotnom slučaju kažemo da je funkcija neoscilatorna.

Za funkciju $\varphi \in C^2[[t_\varphi, \infty), R]$ kažemo da je rješenje diferencijalne nejednačine (P) odnosno (OP) ako ona zadovoljava tu nejednačinu za $t \geqslant t_\varphi$.

U daljem izlaganju pod pojmom rješenja podrazumjevaćemo eventualno netrivijalno rješenje u upravo definisanom smislu, koje se može produžiti na interval $[t_\varphi, \infty)$. Problemima produženja rješenja, koji su obrađeni u [12], [33] se ovdje nećemo baviti.

Za diferencijalnu nejednačinu (P) odnosno (OP) kažemo da je oscilatorna ako su sva njena rješenja oscilatorna. U suprotnom slučaju kažemo da je diferencijalna nejednačina (P) neoscilatorna.

Za diferencijalnu nejednačinu (P) odnosno (OP) kažemo da ima osobinu (A), ako su sva njena rješenja oscilatorna ili monotono teže nuli.

Za diferencijalnu nejednačinu (P) kažemo da ima osobinu (B), ako sva njena rješenja imaju oscilatorne izvode ili monotono teže nuli.

1.3. Teorija oscilacija odgovarajućih običnih diferencijalnih jednačina:

$(\widetilde{OP})$ $\quad (a(t)b(y(t))y'(t))' + p(t)f(y(t))=o$

datira od klasičnog Sturm-ovog teorema upoređivanja [69], 1836 g. i nastavlja se dalje preko Kneser-ovih [34] i Fite-ovih [16] rezultata do fundamentalnih rezultata Hille-a [24], Wintner-a [76], Hartman-a [20], Leighton-a [47], Moore-a [54], Atkinson-a [2], koji se mogu smatrati početkom sistematskog izučavanja oscilacionih problema. U poslednjih 30 godina izuzetno veliki broj matematičara se bavio ovim problemima i kao plod ovih napora dobiveno je i objavljeno mnogo rezultata od kojih se najznačajniji nalaze u knjigama Hartman-a [21], Swanson-a [70].

Prvi poznati oscilacioni rezultat za diferencijalne jednačine sa otklonjenim argumentom:

$$(\tilde{P}) \qquad (a(t)b(y(t))y'(t))' + p(t)f(y(\tau(t))) = 0$$

je dao Fite [17], 1921 godine, ali se ova teorija sistematski izučava tek u poslednjih 30 godina, s tim što je intenzitet u poslednjih deset osjetno pojačan. Kao rezultat ovih istraživanja dobiveno je mnogo rezultata za jednačinu $(\tilde{P})$ kao i odgovarajuću jednačinu n-tog reda od kojih se neki nalaze u monografijama El'sgol'ts-a [12], Shevelo-a [65], a najznačajniji će se pojaviti u monografiji Staikos-a [38]. U ovim tim rezultatima je pretpostavljeno da je funkcija p eventualno nenegativna, dok u slučaju kad p eventualno mijenja znak ne postoji nijedan oscilacioni rezultat. Općenitiji aspekt teorije oscilacija jednačina $(\tilde{P})$ i $(\widetilde{OP})$ je teorija oscilacija odgovarajućih nejednačina (P) i (OP), jer su jednačine, sa gledišta teorije oscilacija, specijalan slučaj odgovarajućih nejednačina.

Prvi oscilacioni rezultat za nejednačinu (OP) su dali Ryder i Wend [64], 1970 godine a za nejednačinu (P) Kartsatos i Onose [30], 1973 godine. Do 1976 godine ova teorija nije privlačila veću pažnju matematičara, pa zato postoji veoma malo oscilacionih rezultata u tom periodu, koje su dali Koplatadze [36], Naito [56] i Tsai-Sheng Liu [48]. Nakon fundamentalnih rezultata Noussair-a i Swanson-a [58], kojim je dokazano da se teorija oscilacija eliptičkih parcijalnih diferencijalnih nejednačina i jednačina drugog reda svodi na teoriju oscilacija nejednačina oblika (OP), gdje je b(u)=1, ova teorija se intenzivno razvija i to uglavnom u slučaju kad je koeficijent p stalnog znaka. Općeniti slučaj, kad je p promjenljivog znaka, je mnogo komplikovaniji, pa zato i manje izučavan. Najveći dio ove disertacije je upravo posvećen oscilacionim problemima u ovom općenitom slučaju.

Novi podsticaj za razvoj ove teorije daju i nedavni fundamentalni rezultati Etgen-a i Pawlowski-og [14] 1977 godine i Etgen-a i Lewis-a [15] 1980 godine, koji pokazuju da se teorija oscilacija apstraktnih diferencijalnih jednačina svodi na teoriju oscilacija jednačine ($\widetilde{\text{OP}}$).

Prema tome sve poznate teorije oscilacija se svode na teoriju oscilacija nejednačine (OP), koja je specijalan slučaj nejednačine (P), što pokazuje značaj razvijanja jedne ovakve teorije. Sada ćemo ukratko navesti osnovne probleme kojima ćemo se baviti u pojedinim dijelovima ove disertacije.

1.4. U drugom dijelu biće navedene neke poznate činjenice potrebne za dalje izlaganje.

1.5. U trećem dijelu biće pokazano da se oscilacioni problemi nekih parcijalnih diferencijalnih jednačina i nejednačina drugog reda svode na probleme oscilacija nejednačine (OP). Prvi rezultat takve vrste dokazali su Noussair i Swanson [58]

1976 godine koristeći metode sfernih sredina. Sličnom metodom su Allegretto [1], Naito i Yoshida [57] i Yoshida [78] došli do potpuno istog zaključka za veoma opšte klase eliptičkih i hiperboličkih jednačina i nejednačina drugog reda, dok za paraboličke jednačine takvi rezultati nisu poznati, pa je rezultat dobiven u trećem dijelu disertacije vjerovatno prvi oscilacioni rezultat tipa "Noussair-Swanson"-a za tu vrstu jednačina i nejednačina.

Osim toga u ovom dijelu je naveden i analogon klasičnog Sturm--ovog teorema uporedjivanja za slučaj apstraktnih diferencijalnih jednačina, kojeg su dali Etgen i Pawlowski [14] kao i analogon Hille-Wintner-ovog teorema za iste jednačine koji su dali Etgen i Lewis [15]. Osnivač teorije oscilacija apstraktnih diferencijalnih jednačina je E. Hille [25, dio 4,6 i 9]. Od početnih rezultata Hille-a ova teorija se razvijala veoma intenzivno, a posebno teorija oscilacija matričnih diferencijalnih jednačina, kao njena najvažnija primjena. Medutim, kao što je to pokazano u [14] gotovo svi poznati rezultati te teorije slijede iz dva gore navedena rezultata, koji pokazuju da se teorija oscilacija apstraktnih diferencijalnih jednačina svodi na teoriju oscilacija jednačine oblika $(\widetilde{OP})$.

1.6. U četvrtom dijelu biće izvedena veoma detaljna analiza najvažnijih oscilacionih integralnih kriterija i objašnjen uticaj otklona argumenta na oscilacione osobine rješenja.

Prvi poznati integralni oscilacioni kriterij je dao Fite [16] za jednačinu oblika $(\widetilde{OP})$, gdje je $a(t)=1$, $b(u)=1$ i $f(u)=u$ i on se kratko može prikazati sa:

$$p \geqslant o \quad i \quad \int^{\infty} p(s)ds = \infty \longrightarrow (\widetilde{OP}) \quad \text{je oscilatorna.}$$

Wintner [76] i Leighton [47] su kasnije poboljšali taj rezultat uzimajući da je $a(t)>o$ i odbacujući pretpostavku o znaku funkcije p, pa je tako nastao klasični Fite-Leighton-Wintner-ov oscilacioni kriterij:

$$a>o\ ,\quad \int^{\infty}\frac{ds}{a(s)}=\int^{\infty}p(s)ds=\infty \quad\Longrightarrow (\widetilde{OP}) \text{ je oscilatorna.}$$

Bhatia [3] je dokazao da ovaj kriterij vrijedi i za veoma općenite nelinearne diferencijalne jednačine, a Kamenev [26] je ovaj rezultat prenio i na jednu od klasa strogo nelinearnih jednačina za koju vrijedi

$$\int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty}\frac{du}{f(u)}<\infty\ ,\qquad \varepsilon>o.$$

U ovom dijelu ćemo pokazati da postoji čitava klasa srodnih oscilacionih integralnih kriterija ovog tipa i to kako za diferencijalne nejednačine oblika (P) tako i za nejednačine oblika (OP), a zatim ćemo pokazati da su u slučaju $p\geqslant o$, optimalni (u izvjesnom smislu) kriteriji ovog tipa potrebni i dovoljni uslovi za oscilaciju. Iz ovih rezultata će se onda dobiti dovoljni uslovi da diferencijalne nejednačine (P) i (OP) imaju isto asimptotsko ponašanje što je odgovor na pitanje koje je postavio Shevelo [65, str.126-127]. Atkinson [2] je prvi uveo integralni uslov

$$p\geqslant o \quad \text{i} \quad \int^{\infty}tp(t)dt=\infty$$

pokazujući da je to potreban i dovoljan uslov za oscilaciju jednačine $(\widetilde{OP})$ gdje je $a(t)=1$, $b(u)=1$, $f(u)=u^{2n+1}$, $n=1,2,\dots$. Ovaj uslov je neznatno poboljšao Waltman [73] dokazujući da se u Atkinson-ovom rezultatu uslov $f(u)=u^{2n+1}$ može zamijeniti uslovom:

$$u\neq o \Rightarrow uf(u)>o,\quad f'(u)\geqslant o \quad \text{i} \quad \liminf_{u\to\infty}\frac{|f(u)|}{|u|^m}>o,\ m>1\ .$$

Mnogi autori su kasnije pokušavali da ove rezultate prošire na šire klase funkcija f i na slučaj kad je p promjenljivog znaka i kao najuspješnije od tih pokušaja navodimo rezultate Kameneva [26] i Staikos-a i Sficas-a [66], koji su pokazali da vrijedi:

$$\int^{\infty} \frac{dt}{a(t)} = \infty \ , \ \int^{\infty} \Big(\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)}\Big)p(t)dt = \infty \ , \int_{\pm 1}^{\pm\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty \longrightarrow (\widetilde{OP}) \text{ je}$$

oscilatorna.

U ovom dijelu ćemo pokazati da postoji čitava klasa "Atkinsonovih" integralnih kriterija i za nejednačinu (P) i za nejednačinu (OP), pri čemu su, u slučaju $p \geqslant o$, optimalni (u izvjesnom smislu) kriteriji ovog tipa potrebni i dovoljni uslovi za oscilaciju.

U četvrtom dijelu disertacije ćemo se baviti još i izučavanjem uticaja otklona argumenta na oscilatorno i asimptotsko ponašanje rješenja nejednačine (P) i (OP). U slučaju kad je $p \geqslant o$ postoji veliki broj ovakvih rezultata, čak i za jednačine n-tog reda npr. [37], [38], [65] i dr. dok u slučaju kad p nije konstantnog znaka postoje svega dva poznata rezultata [71] i [30]. U ovom dijelu rada biće predstavljen čitav niz rezultata ovog tipa sa veoma važnim primjerima, koji će dati potpunu sliku o kompliciranosti situacije i teškoći dobivanja oscilacionih rezultata u ovom slučaju. Grubo govoreći biće dokazano da najpoznatiji integralni oscilacioni kriteriji koji vrijede za slučaj $p \geqslant o$ ili $\tau(t)=t$, u slučaju općenite nejednačine (P) impliciraju samo oscilatornost izvoda. U ovom dijelu će biti takođe izvedeni i dovoljni uslovi za osobinu (A), koji su, vjerovatno, najoštriji poznati uslovi te vrste.

1.7. Osnovna pretpostavka u petom dijelu biće

$$\int_s^\infty p(t)dt \in [0,\infty), \quad s \geq t_0 .$$

Prvi oscilacioni rezultat ovog tipa dao je Hille [24], koji je posmatrao diferencijalnu jednačinu $(\widetilde{OP})$, gdje je $a(t)=1$, $b(u)=1$ i $f(u)=u$ i dokazao da ako vrijedi $p \geq 0$ tada je:

$$t\int_t^\infty p(s)ds \leq \frac{1}{4} \qquad \Longrightarrow (\widetilde{OP}) \text{ je neoscilatorna}$$

$$t\int_t^\infty p(s)ds \geq \frac{1}{4}+\varepsilon \ , \ \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow (\widetilde{OP}) \text{ je oscilatorna}$$

što je uopćenje poznatog rezultata Kneser-a [34]:

$$t^2 p(t) \leq \frac{1}{4} \qquad \Longrightarrow (\widetilde{OP}) \text{ je neoscilatorna}$$

$$t^2 p(t) \geq \frac{1}{4}+\varepsilon \ , \ \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow (\widetilde{OP}) \text{ je oscilatorna.}$$

Neki od Hille-ovih rezultata su poboljšali Wintner [77] i Moore [54]. Pretpostavljajući da je $p \geq 0$ Wintner [77] je dokazao da vrijedi:

$$\left(\int_t^\infty p(s)ds\right)^2 \leq \frac{p(t)}{4} \qquad \Longrightarrow (\widetilde{OP}) \text{ je neoscilatorna}$$

ne videći pri tome da vrijedi:

$$\left(\int_t^\infty p(s)ds\right)^2 \geq \left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)p(t) \quad , \ \varepsilon > 0 \Longrightarrow (\widetilde{OP}) \text{ je oscilatorna.}$$

Ove rezultate je dalje uopćio Opial [63] koji je pokazao da vrijedi:

$$\int_t^\infty \left(\int_s^\infty p(u)du\right)^2 ds \leq \frac{1}{4}\int_t^\infty p(s)ds \qquad \Longrightarrow (\widetilde{OP}) \text{ je neoscilatorna}$$

$$\int_t^\infty \left(\int_s^\infty p(u)du\right)^2 ds \geq \left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)\int_t^\infty p(s)ds \quad \Longrightarrow (\widetilde{OP}) \text{ je oscilatorna}$$

a zatim Willett [75].

U ovom dijelu rada upravo navedeni rezultati Opial-a i Willett-a će biti uopćeni i prošireni na široku klasu nelinearnih

diferencijalnih nejednačina (OP). Takođe će i neki rezultati Hille [24] biti pojačani, a kao najvrijedniji rezultat ovog dijela i jedan od najznačajnijih rezultata u disertaciji uopće, biće dokazan veoma općenit teorem upoređivanja diferencijalnih nejednačina, koji u specijalnom slučaju daje proširenje klasičnog Hille-Wintner-ovog teorema upoređivanja [6].
U ovom dijelu, takođe će se posmatrati uticaj otklona argumenta na oscilatorno i asimptotsko ponašanje rješenja i dokazaće se rezultat analogan onima u četvrtom dijelu.

1.8. U šestom dijelu biće dokazan veoma općenit rezultat koji daje korisne oscilacione kriterije izražene u terminima teorije sumabilnosti.
Prvi poznati oscilacioni rezultat ove vrste je dao Wintner [75] za diferencijalnu jednačinu $(\widetilde{OP})$, gdje je $a(t)=1$, $b(u)=1$ i $f(u)=u$. Označavajući kratko

$$P(t)=\int_{t_0}^{t} p(s)ds \qquad ,$$

Wintner-ov rezultat se može prikazati kao:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} P(s)ds=\infty \qquad \Longrightarrow \qquad (\widetilde{OP}) \text{ je oscilatorna.}$$

Hartman [2o] je dao sličan rezultat za istu jednačinu dokazu--jući da:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} P(s)ds > \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} P(s)ds > -\infty \Longrightarrow (\widetilde{OP}) \text{ je oscila-}$$

torna.
Ovi rezultati su nastali kao prirodna uopćenja ranije pomenutog Fite-Leighton-Wintner-ovog kriterija, koja se mogu primijeniti i u slučajevima kada je:

$$\int^{\infty} p(t)dt < \infty .$$

Ovi rezultati su dalje na prirodan način uopćeni na višestruko iterirane sredine integrala $\int_{t_0}^{t} p(s)ds$ dajući tako korisne sumabilne kriterije oscilacije. U linearnom slučaju su ta uopćenja dali Macki i Wong [50], Coles [8], Willett [74], [75] i Coles i Willett [10] dok je proširenje na strogo nelinearni slučaj dao Kamenev [27], čiji je rezultat proširio na odgovarajuću nejednačinu (OP) Grammatikopoulos [18].
Sve navedene linearne rezultate je uopćio Hartman [22] 1977 godine, posmatrajući izvjesne integralne operatore zavisne od jezgra i namećući tom jezgru neke od poznatih uslova regularnosti.
U ovom dijelu biće djelomično korišten Hartman-ov metod za dobivanje sumabilnih kriterija oscilacije u slučaju nelinearne diferencijalne nejednačine (OP). Također će biti izveden jednostavan ali koristan oscilatorni kriterij izražen preko izvjesnog uopćenog Cesaro-vog metoda sumabilnosti n-tog reda.
Ovaj dio disertacije zasnovan je na rezultatima dobivenim u [42].

1.9. U sedmom dijelu biće pokazani neki od mogućih puteva uopćenja rezultata dobivenih u prethodnim dijelovima disertacije. Jedan od tih puteva je modifikacija metoda upoređivanja Staikos-a i Sficas-a [66]. Pomoću ovog metoda se rezultati o oscilacionom i asimptotskom ponašanju rješenja sa jednostavnijih oblika nejednačina (P) i (OP) prenose na složenije oblike tih istih nejednačina.
Drugi dio prezentiranih puteva je proširenje klasičnog Sturm-ovog teorema upoređivanja na slučaj diferencijalnih nejednačina sa otklonjenim argumentom i predstavlja prvi takav poznati rezultat. Taj rezultat omogućuje upoređivanja, u odnosu na oscilatornost, diferencijalnih nejednačina sa otklonjenim

argumentom sa običnim diferencijalnim nejednačinama.
Treći od navedenih puteva pokazuje kako se neki od dobivenih rezultata za diferencijabilne otklone argumenta mogu na izvjestan način proširiti na slučaj kad otklonjeni argument nije diferencijabilna funkcija.

1.10.Kao što je pomenuto u [65 , str.38-39] mnogi industrijski i tehnički problemi kao i problemi koji se sreću u teoriji difuzionih procesa, teoriji elektromagnetnih polja, neurofiziologiji i nekim drugim oblastima se svode na teoriju oscilacija običnih diferencijalnih jednačina i diferencijalnih jednačina sa otklonjenim argumentom.

GLAVA 2.

PRELIMINARNI REZULTATI

U ovom dijelu će biti navedene neke poznate činjenice koje će se koristiti u daljem izlaganju.

2.1. Transformacije. Za funkciju b, koja u primjenama igra važnu ulogu [35], može se pretpostaviti da je jednaka 1, jer se smjenom:

$$(2.1)\quad h(x)=\int_0^x b(u)du$$

nejednačina (OP) svodi na oblik:

$$(2.2)\quad y(t)\left[(a(t)y'(t))'+p(t)\tilde{f}(y(t))\right]\leqslant 0 \qquad , \; t\geqslant t_0$$

gdje je $\tilde{f}(u)=f(h^{-1}(u))$, i postoji 1-1 preslikavanje neoscilatornih rješenja nejednačina (OP) i (2.2).

Dalje, primjenjujući Kummer-ovu transformaciju [74]:

$$(2.3)\quad t_1=\Phi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{a(s)\chi(s)} \qquad , \qquad y(t)=\chi(t)z(t_1)$$

gdje je $\Phi\in C^1\left[[t_0,\infty),(0,\infty)\right]$, $\chi\in C^2\left[[t_0,\infty),R\setminus\{0\}\right]$

možemo nejednačinu (2.2) svesti na oblik:

$$(2.4)\quad z(t_1)\left[z''(t_1)+\tilde{p}(t_1)\tilde{f}(\chi(t)z(t_1))\right]\leqslant 0$$

gdje je:

$$(2.5)\quad \tilde{p}(t_1)=\left[(a(t)\chi'(t))'+p(t)\chi(t)\right]\chi^3(t)a(t),$$

što pokazuje da se u nejednačini (OP) može pretpostaviti da je i $a(t)=1$.

Međutim, zbog izvjesnih uslova regularnosti koje moraju zadovoljavati transformacije (2.1) i (2.3) mi ćemo ispitivati nejednačinu (OP) u njenom najopćijem obliku. Napomenimo na kraju da u slučaju kad je:

$$\int^{\infty} \frac{dt}{a(t)} = \infty$$

transformaciju (2.3) koristimo u obliku

$$(2.6) \qquad t_1 = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} \quad , \qquad y(t) = z(t_1)$$

dok u slučaju kad je

$$\int^{\infty} \frac{dt}{a(t)} < \infty$$

(2.3) koristimo u obliku:

$$(2.7) \qquad t_1 = \frac{1}{\int_t^{\infty} \frac{ds}{a(s)}} \quad , \qquad y(t) = \frac{z(t_1)}{t_1} \quad .$$

2.2. Notacija. Restrikcija funkcije θ koja je definisana na skupu A, na skup $B \subseteq A$ će se označavati sa $\theta|A$.
Za funkciju θ definisanu na $[\alpha, \infty)$ će se često koristiti oznaka $\int^{\infty} \theta(u)du$ koja će pokazivati da donja granica integrala može biti proizvoljan broj iz $[\alpha, \infty)$.
Pri dokazivanju rezultata o diferencijalnoj nejednačini oblika (P) često će se upotrebljavati izraz $y > o$ za $t \geq \underline{t}$ ili $y' > o$ za $t \geq \underline{t}$, koji će označavati da je:

$$y(t) > o \quad , \quad y(\tau(t)) > o \qquad , \qquad t \geq \underline{t}$$

odnosno

$$y'(t) > o \quad , \quad y'(\tau(t)) > o \qquad , \qquad t \geq \underline{t} \ .$$

Potpuno isto značenje će imati i izrazi $y < o$ za $t \geq \underset{\sim}{t}$ odnosno $y' < o$ za $t \geq \underset{\sim}{t}$.

2.3. Navedimo sada neke osnovne pojmove teorije apstraktnih diferencijalnih jednačina.

Neka je $\mathcal{H}$ realan Hilbert-ov prostor sa unutrašnjim proizvodom $(\cdot,\cdot)$ i uobičajenom normom $\|\cdot\|=\sqrt{(\cdot,\cdot)}$ i neka je $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ B^*-algebra linearnih ograničenih operatora iz $\mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$ snabdjevena uniformnom operatorskom normom:

$$\|A\| = \sup_{\|h\|=1} \|Ah\|.$$

Neka je dalje $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ skup autoadjungiranih operatora a $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}$ skup pozitivno definitnih operatora.

Posmatrajmo apstraktnu diferencijalnu jednačinu oblika:

$$(2.8) \qquad (P(t)Y(t))' + Q(t)Y(t) = o \qquad , \quad t \geqslant t_o$$

gdje je $P,Q \in C\left[[t_o, \infty), \mathcal{S}\right]$ i $P \in \mathcal{S}_1$.

Izvodi koji se pojavljuju u (2.8) se definišu u strogom smislu kao npr. u Hille [25; dio 6 i 9], gdje se mogu naći i rezultati o postojanju i jedinstvenosti rješenja jednačine (2.8). Neposredno se provjerava da svako rješenje Y zadovoljava relaciju:

$$(2.9) \qquad Y^*(t)\left[P(t)Y'(t)\right] - \left[P(t)Y'(t)\right]^* Y(t) = C$$

gdje je $C \in \mathcal{B}$ konstanta, a * označava adjungirani operator. Rješenje Y se naziva konjugiranim ako je $C=o$ u relaciji (2.9). Za rješenje Y kažemo da je nesingularno u tački $t \geqslant t_o$ ako vrijedi:

$$Y(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \text{ je sirjekcija}$$

$$(Y(t))^{-1} \in \mathcal{B} \quad ,$$

a da je singularno ako bar jedan od ovih uslova ne vrijedi. Hayden i Howard [23] su pokazali neophodnost ispunjenja ovih uslova, za uvođenje pojma oscilatornosti.

Za rješenje Y kažemo da je netrivijalno ako postoji bar jedan $t \geq t_o$ tako da je $Y(t)$ nesingularno.

Za rješenje Y kažemo da je oscilatorno ako je konjugirano, netrivijalno i ako za $\forall t \geq t_o$ postoji $\tilde{t} \geq t$ tako da je $Y(\tilde{t})$ singularno. Za rješenje Y kažemo da je neoscilatorno ako nije oscilatorno. Jednačinu (2.9) nazivamo oscilatornom ako su sva njena rješenja oscilatorna.

Najpoznatija realizacija ove teorije je teorija oscilacija matričnih diferencijalnih jednačina, koja se dobiva u specija--lnom slučaju kad je $\mathcal{H}=R^n$. U tom slučaju je $\mathcal{B}$ skup kvadra--tnih matrica formata $n \times n$ i može se pokazati da je singula-rnost u nekoj tački $t \geq t_o$ ekvivalentna sa $\det\left[Y(t)\right]=o$ a da je oscilatornost rješenja Y ekvivalentna sa oscilatornošću funkcije $\det\left[Y(t)\right]$.

Za linearni funkcional g na B^*-algebri $\mathcal{B}$ kažemo da je pozitivan ako je $g(A^*A) \geq o$ za $\forall A \in \mathcal{B}$. Lako se pokazuje da vrijedi $\|g\|=g(I)$. Lako se pokazuje da je funkcional g_α, $\alpha \in \mathcal{H}$, $\alpha \neq o$ definisan sa:

$$g_\alpha(A)=(A\alpha,\alpha) \qquad , \qquad A \in \mathcal{B}$$

pozitivan i da vrijedi: $\|g_\alpha\|=g_\alpha(I)=\|\alpha\|^2$.

2.4. <u>Lema</u>. (Carroll [7, Lema 4.3]). Neka je $\alpha \in L^1(\tau_o,T)$, $\alpha(t) \geq o$, $u \in L^\infty(\tau_o,T)$ i pretpostavimo da je β apsolutno neprekidna na $\left[\tau_o,T\right]$. Ako je

$$u(t) \leq \beta(t)+\int_{\tau_o}^{t}\alpha(\zeta)u(\zeta)d\zeta \qquad , \qquad t \geq \tau_o$$

tada je

$$u(t) \leq \beta(\tau_o)\exp\int_{\tau_o}^{t} a(\zeta)d\zeta+\int_{\tau_o}^{t}\beta'(s)\exp\left(\int_{\tau_o}^{t} a(\zeta)d\zeta\right)ds \quad , \quad t \geq \tau_o.$$

Ovaj rezultat je poznat pod imenom Lema Gronwall-Bellman-a i mi ćemo ga koristitu u specijalnom slučaju $\beta(t)=c$(konstanta).

2.5. <u>Teorem</u>. (Monk [53, str.65]) Neka je $(X, \leqslant)$ parcijalno uređen skup, i pretpostavimo da svako $B \subseteq X$ ima supremum. Pretpo-stavimo da je $F: X \to X$ monotono preslikavanje tj. preslikavanje za koje $x \leqslant y$ implicira $F_x \leqslant F_y$. Tada postoji $x \in X$ za koje vrijedi $Fx = x$.

Ovaj rezultat je dao Knëser.

2.6. <u>Teorem</u>. (Butler [5, Teorem 2.2]. Pretpostavimo da za diferencijalnu jednačinu $(\widetilde{OP})$, gdje je $a(t)=1$ i $b(u)=1$, vrijede uslovi:

$$P(t)=\int_t^{\infty} p(s)ds \quad \text{postoji i} \quad \liminf_{T \to \infty} \int_t^T P(s)ds > -\infty \text{ za sve } t$$

$$\int_t^{\infty} \left(\int_s^{\infty} P^2-(\sigma)d\sigma\right)ds < \infty$$

$$(2.1o) \quad \int_t^{\infty} \left(P(s)+\int_s^{\infty} P^2(\sigma)d\sigma\right)ds < \infty$$

postoji netrivijalan kompaktan interval I na kojem je $uf(u) > o$ za $u \neq o$ i $f'(u)$ za $\forall u \in I$ postoji, nenegativan je i ograničen. Tada je jednačina $(\widetilde{OP})$ neoscilatorna.

2.7. Navedimo sada definicije nekih metoda integralne sumabilnosti [19, str.11o]. Neka je c funkcija definisana na intervalu $[\beta, \infty)$, koja je ograničena na svakom konačnom podintervalu iz $[\beta, \infty)$.

Stavimo:

$$H^o(t)=C(t)=\int_{\beta}^{t} c(s)ds \quad , \quad H^n(t)=\frac{1}{t}\int_{\beta}^{t} H^{n-1}(s)ds \quad , \quad n=1,2,\ldots$$

i

$$C_o(t)=C(t) \quad , \quad C_n(t)=\int_{\beta}^{t} C_{n-1}(s)ds \quad , \quad n=1,2,\ldots .$$

Ako vrijedi:

$$\lim_{t \to \infty} H^n(t)=K$$

kažemo da je integral $\int^t c(s)ds$ sumabilan, $n=o,1,\ldots$, Hölder-ovim metodom n-tog reda (H,n) ka K i to označavamo sa:

$$C(t) \longrightarrow K(H,n) \qquad \text{ili} \qquad \int c(s)ds = K(H,n), \qquad n=o,1,2,\ldots .$$

Ako je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n!}{t^n} C_n(t) = K \qquad , \qquad n=o,1,\ldots$$

kažemo da je integral $\int^t c(s)ds$ sumabilan Cesáro-vim metodom n-tog reda ka K i to označavamo sa:

$$C(t) \longrightarrow K(C,n) \quad \text{ili} \quad \int c(s)ds = K(C,n), \qquad n=o,1,\ldots .$$

2.8. Slijedeći rezultat je adaptacija Leme Marušiak-a [52].

Lema. Neka su $y(t)$ i $y\ (t)$ apsulutno neprekidne funkcije, stalnog znaka na $[t_o, \infty)$ i neka je

$$y(t) \neq o \ , \quad [a(t)y'(t)]' \leqslant o \quad , \qquad t \geqslant t_o$$

gdje je

$$a\ C^1\big[[t_o, \infty), (o, \infty)\big] \quad , \qquad \int^{\infty} \frac{ds}{a(s)} = \infty .$$

Tada eventualno vrijedi:

$$y(t)y'(t) > o \ ,$$

i

$$|y(t)| \geqslant (t-t_o)|y'(t)| .$$

GLAVA 3.

M O T I V A C I J A

3.1. U ovom dijelu pokazaćemo kako se problem oscilacije parcijalnih diferencijalnih nejednačina (pa prema tome i jednačina) svodi na problem oscilacije običnih diferencijalnih nejednačina.

Posmatrajmo diferencijalni operator $L.[u]$ definisan sa:

(EP) $\quad L_E[u]=D_{11}u+D_{22}u+C_E(x,y,u)$

ili

(HP) $\quad L_H[u]=D_{12}u+C_H(x,y,u)$

ili

(PP) $\quad L_p[u]=D_{11}u+C_p(x,y,u)$

gdje $(x,y)\in Q_\mu=\{(x,y)\in R^2 : x,y>0,\ \mu<x+y<\infty\}$, $\mu\geqslant 0$.

Pretpostavimo da je $C.(x,y,u)\in C[Q_\mu\times R,R]$ i da je domen $D_{L.}(Q_\mu)$ operatora $L.$ dat sa

$$D_{L.}(Q_\mu)=\{u\,|\,u:C^2(Q_\mu)\cap C^1(Q_\mu)\to R\}.$$

Za proizvoljno $r>0$ označimo sa $Q(r)$ i ℓ_r slijedeće skupove:

$$Q(r)=Q_\mu\cap\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2>r^2\}$$

i

$$\ell_r=\{(x,y)\in R^2 : x,y>0 \text{ i } x+y=r\}.$$

Mjeru na ℓ_r označimo sa s.

<u>Definicija</u>. Funkcija $u\in D_{L.}(Q_\mu)$ se naziva oscilatornom u Q_μ, ako u ima nulu u $Q(r)$ za svako $r>0$; inače se naziva neoscilatornom.

Neka je $u\in D_{L.}(Q_\mu)$ prizvoljna funkcija. Stavimo

$$f(r)=\frac{1}{r}\int_{\ell_r}u(x,y)ds=\frac{s(\ell_1)}{s(\ell_r)}\int_{\ell_r}u(x,y)ds\ , \qquad r\geqslant\mu. \tag{3.1}$$

Lema. Pretpostavimo da je f data relacijom(3.1) , pri čemu je u $\overset{\circ}{D}_{L}\in(Q_\mu)$ proizvoljna funkcija. Tada vrijede slijedeći identiteti:

$$(3.2_E)\qquad \frac{2}{r}\,\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{df}{dr}\Big)=\int_{\ell_r} D_{11}u\,ds+\int_{\ell_r} D_{22}u\,ds+D_1u(o,r)+D_1u(r,o)+D_2u(o,r)+D_2u(r,o)\quad ,\qquad r>\mu$$

$$(3.2_H)\qquad \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{df}{dr}\Big)=\int_{\ell_r} D_{12}u\,ds+D_1u(r,o)+D_2u(o,r)\quad ,\qquad r>\mu$$

i

$$(3.2_P)\qquad \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{df}{dr}\Big)=\int_{\ell_r} D_{11}u\,ds+D_1u(o,r)+D_2u(o,r)=$$
$$=\int_{\ell_r} D_{22}u\,ds+D_1u(r,o)+D_2u(r,o)\quad ,\qquad r>\mu$$

Dokaz. Pretpostavimo u daljem da je $r>\mu$. Lako se provjerava da vrijede sljedeće relacije

$$(3.3)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\big[u(x,r-x)\big]=D_1u(x,r-x)-\frac{\partial}{\partial r}\big[u(x,r-x)\big]$$

i

$$(3.4)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\big[u(r-y,y)\big]=D_2u(r-y,y)-\frac{\partial}{\partial r}\big[u(r-y,y)\big] .$$

Integrirajući relacije (3.3) i (3.4) od o do r dobivamo respe--ktivno

$$(3.3')\qquad \int_o^r D_1u(x,r-x)dx=u(r,o)-u(o,r)+\frac{d}{dr}\int_o^r u(x,r-x)dx-u(r,o)=$$
$$=\frac{d}{dr}(rf(r))-u(o,r)$$

i

$$(3.4')\qquad \int_o^r D_2u(r-y,y)dy=u(o,r)-u(r,o)+\frac{d}{dr}\int_o^r u(r-y,y)dy-u(o,r)=$$
$$=\frac{d}{dr}(rf(r))-u(r,o) .$$

Prema tome vrijede slijedeće relacije

$$(3.5)\qquad \frac{d}{dr}(rf(r))=\frac{d}{dr}\int_{\ell_r} u(x,y)ds=\int_{\ell_r} D_1u\,ds+u(o,r)$$

i

$$(3.6)\qquad \frac{d}{dr}(rf(r))=\frac{d}{dr}\int_{\ell_r} u(x,y)ds=\int_{\ell_r} D_2u\,ds+u(r,o) .$$

Koristeći relaciju (3.5) dva puta dobivamo

$$\frac{d^2}{dr^2}(rf(r))=\frac{d}{dr}\Big(\int_{\ell_r} D_1 u ds+u(o,r)\Big)=\int_{\ell_r} D_{11}u ds+D_1 u(o,r)+D_2 u(o,r)$$

tj.

(3.7) $\quad \dfrac{d^2}{dr^2}(rf(r))=\displaystyle\int_{\ell_r} D_{11}u ds+D_1 u(o,r)+D_2 u(o,r).$

Koristeći relaciju (3.6) dva puta dobivamo

(3.8) $\quad \dfrac{d^2}{dr^2}(rf(r))=\displaystyle\int_{\ell_r} D_{22}u ds+D_1 u(r,o)+D_2 u(r,o)$.

Primjenjujući uzastopno relacije (3.5) i (3.6) dobivamo

(3.9) $\quad \dfrac{d^2}{dr^2}(rf(r))=\displaystyle\int_{\ell_r} D_{12}u ds+D_1 u(r,o)+D_2 u(o,r)$.

Uzimajući u obzir identitet

$$\frac{d^2}{dr^2}(rf(r))=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{df}{dr}\Big) \quad , \qquad r>\mu$$

sabiranjem relacija (3.7) i (3.8) dobivamo (3.2_E). Relacija (3.9) neposredno implicira (3.2_H), dok relacije (3.7) i (3.8) daju (3.2_P), čime je dokaz Leme završen.

Uvedimo oznake: $B_x=\{(x,o)\in R^2 : x>\mu\}$, $B_y=\{(o,y)\in R^2 : y>\mu\}$ i $B=B_x\cup B_y$.

<u>Teorem</u>. Pretpostavimo da vrijede sljedeći uslovi:

(PC_1) $\quad \eta\neq o \Rightarrow \eta\big[C_\bullet(x,y,\eta)-q_\bullet(x+y)\,\Phi_\bullet(\eta)\big]\geqslant o$ za sve $(x,y)\in Q_\mu$

gdje je $q_\bullet\in C\big[[\mu,\infty),[o,\infty)\big]$ i $\Phi_\bullet$ je neprekidna funkcija, konveksna na $[o,\infty)$ i konkavna na $(-\infty,o)$ sa osobinom:

$\eta\neq o\Rightarrow \eta\Phi_\bullet(\eta)>o$.

(PC_2) $\quad u\in D_{L_\bullet}(Q_\mu)$ je neoscilatorna funkcija takva da na Q_μ vrijedi

(3.1o) $\quad uL_\bullet[u]\leqslant o$

i

$$(3.11_E)\qquad u\left[D_1u(o,r)+D_1u(r,o)+D_2u(o,r)+D_2u(r,o)\right]\leqslant o \qquad \text{na } B$$

ili

$$(3.11_H)\qquad u\left[D_1u(r,o)+D_2u(o,r)\right]\leqslant o \qquad \text{na } B$$

ili

$$(3.11_P)\qquad u\left[D_1u(o,r)+D_2u(o,r)\right]\leqslant o \qquad \text{na } B.$$

Tada funkcija $f(r)$ definisana sa (1) zadovoljava običnu diferencijalnu nejednačinu

$$(3.12_E)\qquad f(r)\left(2\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right)+r^2q_E(r)\Phi_E(f(r))\right)\leqslant o, \qquad r>\mu$$

ili

$$(3.12_H)\qquad f(r)\left(\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right)+r^2q_H(r)\Phi_H(f(r))\right)\leqslant o, \qquad r>\mu$$

ili

$$(3.12_P)\qquad f(r)\left(\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right)+r^2q_P(r)\Phi_P(f(r))\right)\leqslant o, \qquad r>\mu .$$

<u>Dokaz</u>. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $u\in D_{L.}(Q_\mu)$ pozitivno rješenje nejednačine (3.1o.). Neka je $r>\mu$. Tada na osnovu relacije (3.1o.) i uslova (PC_1) dobivamo

$$\int_{\ell_r}(L.[u]-C.(x,y,u))ds\leqslant-\int_{\ell_r}C.(x,y,u)ds\leqslant$$
$$\leqslant-\int_{\ell_r}q.(x+y)\Phi.(u)ds=-q.(r)\int_o^r\Phi.(u(r-y),y))dy.$$

Primjenjujući u relaciji (3.1) Jensen-ovu nejednakost dobivamo

$$\Phi.(f(r))\leqslant\frac{1}{r}\int_{\ell_r}\Phi.(u(x,y))ds=\frac{1}{r}\int_o^r\Phi.(u(r-y,y))dy$$

što zbog poslednje nejednakosti implicira

$$\int_{\ell_r}(L.[u]-C.(x,y,u))ds\leqslant-rq.(r)\Phi.(f(r)).$$

Koristeći relacije (3.2.) imamo

$$(3.13_E)\qquad \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right)\leqslant-rq_E(r)\Phi_E(f(r))+D_1u(o,r)+D_1u(r,o)+$$
$$+D_2u(o,r)+D_2u(r,o)$$

ili

$$(3.13_H)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right)\leqslant -rq_H(r)\Phi_H(f(r))+D_1u(r,o)+D_2u(o,r)$$

ili

$$(3.13_P)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right)\leqslant -rq_P(r)\Phi_P(f(r))+D_1u(o,r)+D_2u(o,r).$$

Množeći ove relacije sa $r>o$ i koristeći uslove (3.11.) dobivamo nejednačine (3.12.).

Napomena . Uslovi (3.11.) mogu biti zamijenjeni sa manje opštim, ali za primjenu pogodnijim uslovima oblika:

$$(3.14)\qquad D_1u+\lambda_1(x)u=o \qquad \text{na } B_x$$

$$(3.15)\qquad D_1u+\lambda_2(y)u=o \qquad \text{na } B_y$$

$$(3.16)\qquad D_2u+\lambda_3(x)u=o \qquad \text{na } B_x$$

$$(3.17)\qquad D_2u+\lambda_4(y)u=o \qquad \text{na } B_y$$

gdje je $\lambda_i(x)\in C\left[B_x,[o,\infty)\right]$ $(i=1,3)$ i $\lambda_j(y)\in C\left[B_y,[o,\infty)\right]$ $(j=2,4)$. Zaista, (3.11_E) slijedi iz (3.14)-(3.17), (3.11_H) iz (3.14) i (3.17), dok je (3.11_P) implicirano sa (3.15) i (3.16).

3.2.Teorem. Prepostavimo da za parcijalne diferencijalne nejednačine (3.1o.) vrijede odgovarajući početni ili rubni uslovi (3.11.) i uslov (PC_1).Tada, oscilatornost običnih diferencijalnih nejednačina (3.12.) implicira oscilatornost svih rješenja početnih ili rubnih problema (3.1o.)-(3.11.) na Q_μ.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tvrdnji Teorema da postoji rješenje u problema (3.1o.)-(3.11.) koje je neoscilatorno na skupu $Q(r)$, $r>o$.Pretpostavimo da je na tom skupu rješenje u pozitivno.Uzmimo $r>\bar{r}$, pa je za takve r funkcija f(r) definisana sa (3.1) pozitivno, pa prema tome neoscilatorno rješenje nejednačine (3.12.), što je u suprotnosti sa pretpostavkom Teorema.

Ako je funkcija u negativna na skupu Q(r) sličnim zaključivanjem možemo doći do kontradikkcije.

Napomena. Uslov (PC_1) slijedi iz slijedećeg uslova kojeg su uveli Noussair i Swanson [58] :

(C_1') $\quad C.(x,y,\eta) \geq q.(x+y)\Phi.(\eta)$ za sve $(x,y,\eta)\in Q_\mu x(o,\infty)$.

gdje je

$$C.(x,y-\eta)=-C.(x,y,\eta) \qquad \text{za sve } (x,y,\eta)\in Q_\mu x(o,\infty).$$

U ovom slučaju možemo pretpostaviti da je $f(r)>o$, $r>\mu$ pa nejednačine (3.12.) postaju:

$$\delta.\frac{d}{dr}(r^2\frac{df}{dr})+r^2q.(r)\Phi.(f(r))<o \quad , \qquad r>\mu$$

gdje je $\delta_E=2$, a $\delta_H=\delta_P=1$.

3.3. Primjedba. Rezultat sličan onom u 3.2. prvi su dobili Noussair i Swanson [58] za Schrödinger-ovu jednačinu i nejednačinu posmatranu u vanjskoj oblasti centralne sfere u R^n, $n\geq 1$. Naito i Yoshida [57] su istaraživanje Noussair-a i Swanson-a proširili na neograničene oblasti u R^n-konuse i cilindre. Obične diferencijalne nejednačine, koje su pri tom dobili imaju sljedeći oblik:

(3.18) $$f(r)\left[\frac{d}{dr}(r^{n-1}\frac{df}{dr})+r^{n-1}p(r)\,\Phi(f(r))\right]\leq o \quad , \qquad r>\mu>o$$

u slučaju konusa i vanjske oblasti sfere i

(3.19) $$f(r)\left[\frac{d^2f}{dr^2}+p(r)\,\Phi(f(r))\right]\leq o \quad , \qquad r>\mu>o$$

u slučaju cilindra.

Yoshida [78] je dobio rezultat ovog oblika za hiperboličku diferencijalnu jednačinu i on je sadržan u Teoremu 3.2..

Parabolički slučaj sadržan u Teoremu 3.2. predstavlja prvi oscilatorni rezultat tipa "Noussair-Swanson-a" za paraboličke diferencijalne jednačine i nejednačine.

3.4. Teorija oscilacija apstraktnih diferencijalnih jednačina oblika (2.18) datih u 2.3. se, kao što su pokazali Etgen i Pawlowski [14] i Etgen i Lewis [15] svojim fundamentalnim radovima, svodi na teoriju oscilacija običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, koje su svakako samo specijalan slučaj diferencijalnih nejednačina koje ćemo posmatrati u ovoj disertaciji. Teorem koji ćemo sada navesti je Teorem 3.1. dat u radu [14] i predstavlja analog klasičnog Sturm-ovog teorema upoređivanja.

<u>Teorem</u>. Pretpostavimo da je diferencijalna jednačina

(M) $(p(x)y')' + q(x)y = o$

oscilatorna. Ako postoji pozitivan funkcional g na Banahovoj algebri $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ tako da vrijedi

(3.2o) $g(Q - q(x)I) \geqslant o$

(3.21) $g(p(x)I - p) \geqslant o$

na $[c, \infty)$, $c \geqslant o$, tada je diferencijalna jednačina (2.8) oscilatorna.

3.5. Rezultat koji ćemo sada navesti je Teorem 3.2. iz gore pomenutog rada Etgena i Pawlowskog [14].

<u>Teorem</u>. Ako postoji pozitivan funkcional g na Banahovoj algebri $\mathcal{B}$ takav da je skalarna jednačina

(3.22) $(g[P(x)]Y')' + g[Q(x)]Y = o$

oscilatorna, tada je i diferencijalna jednačina (2.8) oscilatorna.

3.6. Rezultat koji ćemo sada navesti je Teorem dat u radu Etgen-a i Lewis-a [15] i predstavlja analog klasičnog Hille--Wintner-ovog [6] teorema upoređivanja.

Teorem. Pretpostavimo da postoji realan nenegativan broj α takav da na $[\alpha, \infty)$ vrijede slijedeći uslovi:

(3.23) $p(x)I-P(x) \geqslant o$

(3.24) postoji pozitivna konstanta k takva da je $kI-P(x) \geqslant o$

(3.25) postoji $g \in \mathcal{G}, g \neq o$, takav da integral $\int_x^\infty g[Q(t)]dt$ konvergira bar uslovno

(3.26) integral $\int_x^\infty q(t)dt$ konvergira bar uslovno

(3.27) $\int_x^\infty g[Q(t)]dt \geqslant g(I)\left|\int_x^\infty q(t)dt\right|$.

Ako je jednačina (2.8) neoscilatorna, tada je jednačina (M) neoscilatorna. Ekvivalentno, ako je jednačina (M) oscilatorna tada je jednačina (2.8) oscilatorna.

Primjedba. Upravo navedeni oscilacioni rezultati o apstraktnim diferencijalnim jednačinama imaju, ne samo veliku teorijsku važnost, već takođe i široko polje primjene. Naime, kao što je pokazano u [14] i [15] svi poznati oscilacioni rezultati za matrične diferencijalne jednačine slijede neposredno iz Teorema 3.4., 3.5. i 3.6. za odgovarajuće izbore pozitivnog funkcionala g, i iz nekih klasičnih oscilacionih rezultata za običnu diferencijalnu jednačinu (M).

3.7. Rezultati navedeni u 3.1-3.6. pokazuju da se sve poznate oscilacione teorije-teorija parcijalnih i teorija apstraktnih diferencijalnih jednačina, svode na teoriju oscilacija običnih diferencijalnih nejednačina oblika (OP), koja će u daljem izlaganju biti razvijena. Da bi se dobiveni rezultati mogli primjenjivati na obje gore pomenute teorije posmatraćemo slučaj kad je koeficijent p promjenljivog znaka na intervalu $[t_0, \infty)$.

GLAVA 4.

U T I C A J   O T K L O N A   A R G U M E N T A

U ovom dijelu rada pokazaćemo kako otklonjeni argument $\tau(t)$ utiče na oscilatorna svojstva diferencijalne nejednačine (P).

4.1. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede slijedeći uslovi:

(i) $uf(u) > 0$ i $f'(u) \geq 0$ za $u \neq 0$

(ii) $\tau'(t) \geq 0$ za $t \geq t_0$

(iii) postoji funkcija $g \in C^2\left[[t_0, \infty), (0, \infty)\right]$ takva da vrijedi

$g'(t) \leq 0$ i $(a(t)g'(t))' \geq 0$ za $t \geq t_0$

(C_1) $\int^{\infty} g(s)p(s)ds = \infty$

(C_2) $\int^{\infty} \frac{1}{g(t)a(t)} \int_{t_0}^{t} g(s)p(s)dsdt = \infty.$

Tada diferencijalna nejednačina (P) ima osobinu $(\overset{o}{B})$.

Dokaz. Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (P).
Ako je y oscilatorna funkcija zaključak teorema je očigledan.
Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija. Tada je y konstantnog znaka eventualno i vrijedi:

$$\frac{(a(t)b(y(t))y'(t))'}{f(y(\tau(t)))} \leq -p(t) \quad \text{za velike } t. \tag{4.1}$$

Pretpostavimo da tvrdnja Teorema nije tačna. Tada vrijedi $y(t)y'(t) > 0$ eventualno ili $y(t)y'(t) < 0$ eventualno. U prvom slučaju posmatrajmo funkciju

$$W(t) = \frac{a(t)b(y(t))y'(t)}{f(y(\tau(t)))}g(t) \quad \text{za velike } t. \tag{4.2}$$

Diferencirajući (4.2) i koristeći (4.1) dobivamo eventualno

(4.3) $$W'(t) \leqslant -g(t)p(t) - \frac{a(t)b(y(t))y'(t)y'(\tau(t))\tau'(t)f'(y(\tau(t)))}{f^2(y(\tau(t)))}g(t) + \frac{a(t)b(y(t))y'(t)}{f(y(\tau(t)))}g'(t)$$

ili eventualno

(4.5) $$W(t) \leqslant W(t_o) - \int_{t_o}^{t} g(s)p(s)ds + \int_{t_o}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))}g'(s)ds - \int_{t_o}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)y'(\tau(s))\tau'(s)f'(y(\tau(s)))}{f^2(y(\tau(s)))}g(s)ds .$$

Koristeći uslove teorema i pretpostavku da je eventualno $yy' > o$ dobivamo iz (4.5) neposredno

$$W(t) < o$$

za dovoljno velike t, što je kontradikcija.

Pretpostavimo sada da je eventualno (tj. za $t \geqslant t_1$) $y(t)y'(t) < o$ i posmatrajmo slučaj kada je $y > o$; slučaj $y < o$ eventualno se razmatra na sličan način.

U ovom slučaju dakle vrijedi:

$$\lim y(t) = c \in [o, \infty).$$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji Teorema da je $c > o$. Diferencirajući funkciju

(4.6) $$U(t) = a(t)b(y(t))y'(t)g(t) \quad , \ t \geqslant t_1$$

i koristeći (4.1) dobivamo

$$U'(t) \leqslant -g(t)p(t)f(y(\tau(t))) + a(t)b(y(t))y'(t)g'(t), \quad t \geqslant t_1.$$

Integrirajući od t_1 do $t \geqslant t_1$ dobivamo

$$U(t) \leqslant U(t_1) + \int_{t_1}^{t} a(s)b(y(s))y'(s)g'(s)ds - \int_{t_1}^{t} g(s)p(s)f(y(\tau(s)))ds$$

što nakon parcijalne integracije drugog integrala daje

$$(4.7)\qquad U(t)\leqslant U(t_1)+\int_{t_1}^{t}a(s)b(y(s))y'(s)g'(s)ds+$$
$$+\int_{t_1}^{t}f'(y(\tau(s)))y'(\tau(s))\tau'(s)\int_{t_1}^{t}g(u)p(u)duds-$$
$$-f(y(\tau(t)))\int_{t_1}^{t}g(s)p(s)ds.$$

Primjenjujući na prvi integral d~~e~~sne strane drugi Bonnet-ov teorem srednje vrijednosti dobivamo:

$$\int_{t_1}^{t}a(s)b(y(s))y'(s)g'(s)ds=a(t_1)g'(t_1)\int_{t_1}^{\tilde t}b(y(s))y'(s)ds=$$
$$=a(t_1)g'(t_1)\int_{y(t_1)}^{y(\tilde t)}b(u)du\leqslant a(t_1)g'(t_1)\int_{y(t_1)}^{c}b(u)du<\infty\qquad,$$

za neko $\tilde t\in[t_1,t]$. Dakle, prvi integral u relaciji (4.7) je ograničen i zbog pretpostavke da je $c>o$ lako dobivamo iz (4.7)

$$U(t)\leqslant-\frac{f(c)}{2}\int_{t_1}^{t}g(s)p(s)ds\qquad\text{za dovoljno velike } t$$

i dalje

$$\int_{t_1}^{t}b(y(s))y'(s)ds\leqslant-\frac{f(c)}{2}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{g(s)a(s)}\int_{t_1}^{s}g(u)p(u)duds\qquad\text{za}$$

dovoljno velike t.

Koristeći uslov (C_2) dobivamo

$$\int_{y(t_1)}^{c}b(u)du=\lim_{t\to\infty}\int_{y(t_1)}^{y(t)}b(u)du=-\infty$$

što je očigledno kontradikcija.

Dakle, c=o i

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=o$$

pri čemu je konveregencija monotona.

Slijedeća dva primjera pokazuju da tvrdnja ovog Teorema ne može biti pojačana.

<u>Primjer</u>. Diferencijalna nejednačina

$$y(t)\left[(t^2y'(t))'+\frac{\ln(t\pm1)(\ln t-1)}{\ln^2 t}y(t\pm1)\right]\leqslant o\ ,\quad t>1+e$$

ima neoscilatorno rješenje $y=\frac{1}{\ln t}$ koje monotono teži nuli kad $t\to\infty$. U ovom slučaju uslovi Teorema 4.1. vrijede za funkciju $g(t)=\frac{1}{t}$.

4.2. Primjer. Diferencijalna nejednačina

$$y(t)\left[y''(t)+\frac{\cos t}{m-\cos t}y(t\pm\pi)\right]\leq 0, \qquad m>1$$

ima neoscilatorno rješenje $y=m+\cos t$, koje ima oscilatoran izvod. U ovom slučaju uslovi Teorema 4.1. vrijede za $g(t)=1$.

Primjedba. Primjer 4.1. i 4.2. pokazuju da se tvrdnja Teorema 4.1. nemože pojačati čak i u slučaju da se uslov (C_2) zamijeni strožijim uslovom

$$(C_3) \qquad \int^{\infty}\frac{dt}{g(t)a(t)}=\infty.$$

Napomenimo da uslov (C_3) nije općenito strožiji od uslova (C_2), nego je strožiji uz pretostavku da vrijedi uslov (C_1).

Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi (i)-(iii), (C_1) i (C_2). Ako je

$$\tau(t)\leq t, \qquad t\geq t_0$$

i

$$(C_4) \qquad \int_0^{\pm\varepsilon}\frac{b(u)}{f(u)}\,du<\infty, \qquad \varepsilon>0$$

tada je izvod bilo kog rješenja nejednačine (P) oscilatoran.

Dokaz. Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (P). Ako je y oscilatorna funkcija zaključak teorema je očigledan. Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija. Tada je samo jedan od slijedeća tri slučaja moguć:

a.) y' oscilira

b.) $y(t)y'(t)>0$ eventualno (za $t\geq t_2$)

c.) $y(t)\cdot y'(t) < 0$ eventualno (za $t \geq t_2$) .

U slučaju da vrijedi b.), na potpuno isti način kao u dokazu Teorema 4.1. dolazimo do kontradikcije.

Pretpostavimo da vrijedi slučaj c.). Uvodeći funkciju $W(t)$ relacijom (4.2) dobivamo relaciju (4.5). Primjenjujući na drugi integral u toj relaciji drugi Bonnet-ov teorem i koristeći uslov $\tau(t) \leq t$ i (C_4) dobivamo:

$$\int_{t_2}^{t} a(s)g'(s)\frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))}\,ds \leq \int_{t_2}^{t} a(s)g'(s)\frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(s))}ds =$$

$$= a(t_2)g'(t_2)\int_{t_2}^{\tilde{t}}\frac{b(y(s))y'(s)ds}{f(y(s))} = a(t_2)g'(t_2)\int_{y(t_2)}^{y(\tilde{t})}\frac{b(u)}{f(u)}du \leq$$

$$\leq a(t_2)g'(t_2)\int_{y(t_2)}^{0}\frac{b(u)}{f(u)}\,du < \infty$$

gdje je $\tilde{t} \in [t_2, t]$.

Dakle, drugi integral na desnoj strani relacije (4.5) je ograničen, što zbog (C_1) implicira

$$W(t) \leq -\frac{1}{2}\int_{t_2}^{t} g(s)p(s)\,ds \quad \text{za dovoljno velike } t$$

i odavde za dovoljno velike t

$$\frac{b(y(t))y'(t)}{f(y(\tau(t)))} \leq -\frac{1}{2}\,\frac{1}{g(t)a(t)}\int_{t_2}^{t} g(s)p(s)\,ds \; .$$

Kako je $\tau(t) \leq t$ dobivamo za dovoljno velike t

$$\frac{b(y(t))y'(t)}{f(y(t))} \leq -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{g(t)a(t)}\int_{t_2}^{t} g(s)p(s)\,ds$$

odakle, integrirajući od t_2 do $t \geq t_2$ i prelazeći na granični proces $t \to \infty$ imamo

$$\int_{y(t_2)}^{0}\frac{b(u)}{f(u)}\,du = -\infty$$

što je u kontradikciji sa uslovom (C_4) .

Prema tome vrijedi slučaj a.) , čime je dokaz teorema završen.

Slijedeći primjer pokazuje da se tvrdnja ovog teorema ne može proširiti na slučaj advansiranog argumenta.

4.3. Primjer. Sublinearna diferencijalna nejednačina

$$y(t)\left[(t^3\, y'(t))' + t^{pm}(y(t^p))^m\right] \leq 0 \qquad , \quad t > 1$$

gdje je $m = \frac{1}{2k+1}$, $p \geq \frac{1}{m} = 2k+1$, $k \geq 1$

ima rješenje $y(t) = \frac{1}{t}$ čiji je izvod neoscilatoran.
Svi uslovi Teorema 4.2. su zadovoljeni uzimajući kao funkciju
g upravo $g(t) = \frac{1}{t^2}$.

Ovaj primjer pokazuje takođe da za diferencijalnu nejednačinu (P) sa advansiranim argumentom tvrdnja Teorema 4.2. ne vrijedi čak i u slučaju da je uslov (C_2) zamijenjen strožijim uslovom (C_3).

4.4. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi (i)-(iii),(C_1) i (C_3) gdje je $g(t)=1$. Tada je izvod bilo kog rješenja y nejednačine (P) oscilatoran.

Dokaz. Na potpuno isti način kao u dokazu Teorema4.2. dobivamo da vrijede tri slučaja a.), b.) i c.).
Slučaj b.) se na isti način kao dokazu Teorema 4.2. svodi na kontradikciju.
Pretpostavimo zato da vrijedi slučaj c.) i neka je eventualno $y > 0$ tj. za $t \geq t_3$. Relacija (4.7) sada postaje :

$$U(t) \leq U(t_3) + \int_{t_3}^{t} f'(y(\tau(s)))y'(\tau(s))\,\tau'(s)\int_{t_3}^{t} p(u)du ds - \\ - f(y(\tau(t)))\int_{t_3}^{t} p(s)ds \ .$$

Koristeći pretpostavke iz ove relacije dobivamo:

$$U(t) \leq U(t_3) < 0 \qquad , \quad t \geq t_3' \geq t_3$$

što implicira:

$$b(y(t))y'(t) \leq \frac{U(t_3)}{a(t)} \qquad , \quad t \geq t_3'$$

odakle nakon integracije od t_3' do t dobivamo:

$$\int_{y(t_3')}^{y(t)} b(u)du \leqslant U(t_3)\int_{t_3'}^{t}\frac{ds}{a(s)} \quad , \; t \geqslant t_3' \; .$$

Prelazeći na granični proces kad $t\to\infty$ dobivamo očiglednu kontradikciju.

Posljedica. Teorem 4.3. je uopćenje rezultata Travis-a (71, Teorem 1.) i rezultata Kartsatos-a i Onose-a (3o, Teorem 3.) na slučaj općenite diferencijalne nejednačine. Rezultat Travis-a se dobiva u specijalnom slučaju kada je $a(t)=1, b(u)=1, f(u)=u$ i kada umjesto nejednačine (P) posmatramo odgovarajuću jednačinu dok se rezultat Kartsatosa i Onose-a dobiva u slučaju kada je $a(t)=1$ i $b(u)=1$.

Primjedba. Primjer 4.2. pokazuje da i u slučaju advansiranog i u slučaju retardiranog argumenta zaključak Teorema 4.3. ne može biti pojačan.

Uporedujući ovaj rezultat sa Bhatia-ovim rezultatom (3, Teorem 1.) dolazimo do zaključka da otklon argumenta bitno utiče na oscilatorna svojstva jednačine $(\tilde{P})$ tako što se u zaključku teorema termin " bilo koje rješenje oscilira " zamjenjuje terminom " izvod bilo kog rješenja oscilira ". Ovakva vrsta uticaja otklona argumenta se javlja i u mnogim drugim veoma važnim situacijama kao što ćemo uskoro vidjeti.

4.5. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi (i), (ii), (C_1) i (C_2) gdje je

(iv) $g\in C^2\left[[t_o,\infty),(o,\infty)\right]$ takva da je $g'(t)\geqslant o$ i

$(a(t)g'(t)) \leqslant o$ za $t\geqslant t_o$.

Ako vrijedi $\tau(t)\geqslant t$, $t\geqslant t_o$ i

(C_5) $\displaystyle\int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty}\frac{b(u)}{f(u)}\,du<\infty$, $\varepsilon>o$,

tada diferencijalna nejednačina (P) ima osobinu (B).

Dokaz. Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (P). Ako je y oscilatorna funkcija zaključak Teorema je očigledan. Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija. Tada su, kao i u dokazu Teorema 4.2., moguća tri slučaja a), b) i c). Slučaj c.) se posmatra na sličan način kao odgovarajući slučaj Teorema 4.1..

Pretpostavimo da vrijedi slučaj b.). Označimo sa $t_4 \geq t_o$ realan broj takav da je

$$y(t)y'(t) > o \qquad , \qquad t \geq t_4 .$$

Diferencirajući funkciju $W(t)$ definisanu relacijom (4.2) dobivamo (4.5) što implicira:

$$W(t) \leq W(t_4) - \int_{t_4}^{t} g(s)p(s)ds + \int_{t_4}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))} g'(s)ds \quad , \quad t \geq t_4 . \tag{4.8}$$

Primjenjujući na drugi integral u ovoj relaciji drugi Bonnet-ov teorem i koristeći uslove $\tau(t) \geq t$ i (C_5) dobivamo:

$$\int_{t_4}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))} g'(s)ds \leq \int_{t_4}^{t} a(s)g'(s) \frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(s))} ds =$$

$$= a(t_4)g'(t_4) \int_{y(t_4)}^{y(\xi)} \frac{b(u)}{f(u)} du \leq a(t_4)g'(t_4) \int_{y(t_4)}^{\pm\infty} \frac{b(u)}{f(u)} du < \infty \quad .$$

Prelazeći u relaciji (4.8) na granični proces $t \to \infty$ i koristeći upravo dokazanu ograničenost integrala i uslov (C_1) dobivamo:

$$\lim_{t\to\infty} W(t) = -\infty$$

što je očigledna kontradikcija.

4.6. Slijedeći teorem pokazuje da zamjena uslova (C_2) uslovom (C_3) bitno utiče na asimptotsko ponašanje rješenja nejednačine (P).

Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede svi uslovi Teorema 4.5. s tim što je uslov (C_2) zamijenjen uslovom (C_3). Tada je izvod bilo kog rješenja $y(t)$ diferencijalne nejednačine (P) oscilatoran.

Dokaz. Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (P). Ako je y oscilatorna funkcija zaključak Teorema je očigledan. Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija. Tada su, kao i u dokazu Teorama 4.2., moguća tri slučaja a.), b.) i c.).
Slučaj b.) se na isti način, kao odgovarajući slučaj Teorema 4.5., svodi na kontradikciju.
Pretpostavimo da vrijedi slučaj c.). Označimo sa $t_5 \geq t_0$ realan broj takav da vrijedi

$$y(t)y'(t) < o \qquad , \qquad t \geq t_5$$

i pretpostavimo da je $y(t) > o$, $t \geq t_5$. Diferencirajući funkciju $U(t)$ definisanu relacijom (4.6) dobivamo (4.7) što implicira

$$U(t) \leq U(t_5) < o \qquad \text{za dovoljno velike } t$$

i dalje

$$\int_{y(t_5)}^{y(t)} b(u)du \leq U(t_5) \int_{t_5}^{t} \frac{ds}{g(s)a(s)} \qquad \text{za dovoljno velike } t.$$

Prelazeći u ovoj relaciji na granični proces $t \to \infty$ i koristeći uslov (C_3) dobivamo očiglednu kontradikciju. U slučaju da je $y(t) < o$, $t \geq t_5$ sličnim rezonovanjem bi došli do istog zaključka. Prema tome jedini mogući slučaj je slučaj a.).
Slijedeći primjer pokazuje da se tvrdnja Teorema 4.5. i 4.6. ne može proširiti na slučaj retardiranog argumenta.

Primjer. Superlinearna diferencijalna nejednačina

$$y(t)\left[y''(t) + (1-\alpha)t^{\alpha-\alpha ns-2}(y(t^n))^s\right] \leq o, \qquad t > o$$

gdje je: $\alpha \in (o,1)$, $s=2m+1$, $m \in N$ i $n \in (o,\frac{1}{s}]$ ima neograničeno neoscilatorno rješenje $y(t)=t^{\alpha}$. Svi uslovi Teorema 4.5. i 4.6. izuzev uslova $\tau(t)\geqslant t$, su zadovoljeni uzimajući kao funkciju g upravo $g(t)=t$.

4.7. Primjer. Sublinearna diferencijalna nejednačina

$$y(t)\left[y''(t)+\frac{\cos t}{(m-\cos t)^{\beta}}\,(y(t-\pi))^{\beta}\right]\leqslant 0 \quad , \qquad t>0$$

gdje je $\beta\in(0,1)$ i $m>1$ ima neoscilatorno rješenja

$$y(t)=m+\cos t \quad , \qquad t>0$$

čiji je izvod oscilatoran. U ovom slučaju svi uslovi Teorema 4.2. su zadovoljeni uzimajući kao funkciju g upravo $g(t)=1$.

4.8. Slijedeći primjer je istog tipa kao Primjer 4.7. u slučaju Teorema 4.6.

Primjer. Superlinearna diferencijalna nejednačina

$$y(t)\left[y''(t)+\frac{\cos t}{(m-\cos t)^{\gamma}}\,(y(t+\pi))^{\gamma}\right]\leqslant 0 \qquad , \quad t>0$$

gdje je $\gamma>1$ i $m>1$ ima neoscilatorno rješenje

$$y(t)=m+\cos t \qquad , \qquad t>0$$

čiji je izvod oscilatoran. U ovom slučaju svi uslovi Teorema 4.6. su zadovoljeni uzimajući kao funkciju g upravo $g(t)=1$.

4.9. Lema. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijedi uslov (i) i

(C_6) $\qquad p(t)\geqslant 0 \qquad$ za $\; t\geqslant t_0$.

Tada, bilo koje neoscilatorno rješenje $y(t)$ diferencijalne nejednačine (P) ima neoscilatoran izvod.

Dokaz. Neka je y proizvoljno neoscilatorno rješenje nejednačine (P), i neka je $\tilde{t}_5\geqslant t_0$ realan broj takav da je $y(t)$ konstantnog znaka za $t\geqslant\tilde{t}_5$. Zbog uslova (i) vrijedi:

$$y(t)\left[(a(t)b(y(t))y'(t))'\right]\leqslant o, \qquad t\geqslant \tilde{t}_5$$

što zbog uslova datih u 1.1. i 1.2, implicira da je funkcija $y'(t)$ eventualno konstantnog znaka, pa prema tome neoscilatorna. Koristeći upravo dokazanu lemu daćemo niz rezultata analognih Teoremu 4.1., 4.2., 4.4.-4.6. uz dodatni uslov (C_6) i na taj način pokazati koliko je uslov (C_6) bitan u teoriji oscilacija diferencijalnih jednačina i nejednačina. Napomenimo da ispunjenje tog uslova omogućuje razvijanje teorije oscilacija diferencijalnih jednačina i nejednačina višeg reda kao što je to dijelom pokazano u monografijama Shevelo-a [65], i Staikos-a [68].

4.10. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi Teorema 4.1. i (C_6). Tada diferencijalna nejednačina (P) ima osobinu (A).

Dokaz. Slijedi neposredno iz Teorema 4.1. i Leme 4.9.. Primjer 4.1. pokazuje da se zaključak ovog Teorema ne može pojačati tako da umjesto "nejednačina (P) ima osobinu (A)" stoji "nejednačina (P) je oscilatorna".

4.11. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi Teorem 4.2. i (C_6). Tada je diferencijalna nejednačina (P) oscilatorna.

Dokaz. Slijedi neposredno iz Teorema 4.2. i Leme 4.9..

Primjedba. Uslov $(a(t)g'(t))'\geqslant o,\ t\geqslant t_o$ u Teoremu 4.2. i 4.11. može biti zamijenjen uslovom

$$(C_7) \qquad \int^{\infty}\left|(a(t)g'(t))'\right| dt<\infty .$$

Naime, uslov $(a(t)g'(t))'\geqslant o$ je korišten za primjenu Bonnet-ovog teorema prilikom dokazivanja ograničenosti integrala

$$\int_{t_2}^{t} a(s)g'(s)\,\frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))}ds .$$

Uslov (C_7) takođe implicira ograničenost ovog integrala. Zaista, koristeći parcijalnu integraciju dobivamo

$$\int_{t_2}^{t} a(s)g'(s)\,\frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))}ds \leqslant \int_{t_2}^{t} a(s)g'(s)\,\frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(s))}ds=$$

$$=a(t)g'(t)\int_{y(t_2)}^{y(t)}\frac{b(u)}{f(u)}du-\int_{t_2}^{t}(a(s)g'(s))'\int_{y(t_2)}^{y(t)}\frac{b(u)}{f(u)}duds$$

što je na osnovu uslova (C_4) i (C_7) ograničena funkcija.

Posljedica. U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i kada umjesto nejednačine (P) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\tilde{P})$ Teorem 4.11. daje uopćenje Teorema 2. Kusano-a i Onose-a [44]. Pri tome, uslov (C_3) zahtijevan u Teoremu Kusano-a i Onose-a je zamijenjen slabijim uslovom (C_2).

U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i kada umjesto nejednačine (P) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\tilde{P})$ Teorem 4.11. zajedno sa Primjedbom 4.11. daje uopćenje Teorema 2. Odarič-a i Odarič-a [59], jer je uslov (C_3) zahtijevan u Teoremu Odarič-a i Odarič-a zamijenjen slabijim uslovom (C_2).

4.12. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi Teorema 4.4. i (C_6). Tada je diferencijalna nejednačina (P) oscilatorna.

Dokaz. Slijedi neposredno iz Teorema 4.4. i Leme 4.9.

Primjedba. Teorem 4.12. predstavlja analogon klasičnog Fite-Leighton-Wintner-ovog rezultata u slučaju diferencijalne nejednačine (P) sa otklonjenim argumentom i uz uslov (C_6).

4.13. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi Teorema 4.5. i (C_6). Tada diferencijalna nejednačina (P) ima osobinu (A).

Dokaz. Slijedi neposredno iz Teorema 4.5. i Leme 4.9..

4.14. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi Teorema 4.6. i (C_6). Tada je diferencijalna nejednačina (P) oscilatorna.

Dokaz. Slijedi neposredno iz Teorema 4.6. i Leme 4.9..

Primjedba. Teorem 4.14. predstavlja analogon klasičnog rezultata Atkinson-a [2] u slučaju diferencijalne nejednačine (P) sa advansiranim argumentom i uz uslov (C_6).
Slično kao u Primjedbi 4.11. može se dokazati da se uslov $(a(t)g'(t))' \leq 0$, $t \geq t_0$ u Teoremu 4.5. i 4.6. pa prema tome i u Teoremu 4.13. i 4.14. može zamijeniti uslovom (C_7). Slijedeći primjer pokazuje da uslov (C_2) bitno utiče na oscilatornost diferencijalne nejednačine (P) i da je taj uslov veoma oštar za obezbjeđivanje osobine (A).

Primjer. Superlinearna diferencijalna nejednačina

$$y(t)\left[(a(t)y'(t))' + \frac{t^3(\ln t - 2)}{(t-\ln t)^3}\, y^3(t)\right] \leq 0 \quad , \quad t > e^2$$

gdje je $a(t)=t^2$ ima neoscilatorno rješenje $y(t)= \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t}$, $t > e^2$, za koje vrijedi monotono

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=0 \ .$$

Svi uslovi Teorema 4.13. su zadovoljeni uzimajući kao funkciju g upravo $g(t)=\int_{e^2}^{t} \frac{ds}{a(s)}$. U ovom slučaju uslov (C_3) nije zadovoljen, što pokazuje da je on veoma oštar za obezbjeđivanje oscilatornosti nejednačine (P).

4.15. Kao što smo dokazali, Teorem 4.11. vrijedi u slučaju retardiranog argumenta, dok Teoremi 4.13. i 4.14. vrijede u slučaju advansiranog argumenta. Sada ćemo dati slične rezultate u komplementarnim situacijama tj. dokazaćemo rezultate slične Teoremu 4.11. ali u slučaju advansiranog argumenta i rezultate analogne Teoremu 4.13. i 4.14. u slučaju retardiranog argumenta.

Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi (i)-(iii), (C_6), $\tau(t) \geq t$ i

(C_1') $\int^{\infty} g(\tau(t))p(t)\,dt = \infty$

(C_2') $\int^{\infty} \frac{1}{g(\tau(t))a(t)} \cdot \int_{t_0}^{t} g(\tau(s))p(s)\,ds\,dt = \infty$.

Tada diferencijalna nejednačina (P) ima osobinu (A).

Dokaz. Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (P). Ako je y oscilatorna funkcija zaključak teorema je očigledan. Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija. Prema Lemi 4.9. moguća su tada dva slučaja b.) i c.) iz dokaza Teorema 4.2.. Pretpostavimo da je eventualno $y > 0$.

U slučaju b.) neka je $t_6 \geq t_0$ realan broj takav da vrijedi

$$y(t)y'(t) > 0 \quad , \ t \geq t_6 \ .$$

Diferencirajući funkciju

$$(4.9) \qquad V(t) = \frac{a(t)b(y(t))y'(t)}{f(y(t))}\, g(\tau(t)) \quad , \ t \geq t_6$$

i koristeći relaciju (4.1) i uslove teorema dobivamo:

$$V'(t) \leq -g(\tau(t))p(t)\frac{f(y(\tau(t)))}{f(y(t))} - \frac{a(t)b(y(t))y'^2(t)}{f^2(y(t))} f'(y(t))g(\tau(t)) +$$
$$+ \frac{a(t)b(y(t))y'(t)\tau'(t)}{f(y(t))}\, g'(\tau(t)) \leq$$
$$\leq -g(\tau(t))p(t)\frac{f(y(\tau(t)))}{f(y(t))} \leq -g(\tau(t))p(t).$$

Integrirajući ovu relaciju od t_6 do $t \geq t_6$ dobivamo

$$V(t) \leq V(t_6) - \int_{t_6}^{t} g(\tau(s))p(s)ds \ .$$

Prelazeći u ovoj relaciji na granični proces $t\to\infty$ i koristeći uslov (C_1') dobivamo da vrijedi eventualno:

$$V<0$$

što je očigledna kontradikcija.

U slučaju c.) neka je $t_7\geqslant t_0$ realan broj takav da vrijedi

$$y(t)y'(t)<0 \quad , \; t\geqslant t_7$$

i neka je $c\in(0,\infty)$ takav da je

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=c \; .$$

Diferencirajući funkciju

$$(4.10) \quad \tilde{U}(t)= a(t)b(y(t))y'(t)g(\tau(t))$$

i koristeći relaciju (4.1) dobivamo:

$$\tilde{U}'(t)\leqslant -g(\tau(t))p(t)f(y(\tau(t)))+a(t)b(y(t))y'(t)g'(\tau(t))\tau'(t).$$

Integrirajući ovu relaciju od t_7 do $t\geqslant t_7$ dobivamo:

$$\tilde{U}(t)\leqslant \tilde{U}(t_7)-\int_{t_7}^{t} g(\tau(s))p(s)f(y(\tau(s)))ds+$$
$$+\int_{t_7}^{t} a(s)b(y(s))y'(s)g'(\tau(s))\tau'(s)ds$$

što nakon parcijalne integracije daje:

$$(4.11) \quad \tilde{U}(t)\leqslant \tilde{U}(t_7)+\int_{t_7}^{t} a(s)b(y(s))y'(s)g'(\tau(s))\tau'(s)ds+$$
$$+\int_{t_7}^{t} f'(y(\tau(s)))y'(\tau(s))\tau'(s)\int_{t_7}^{s} g(\tau(u))p(u)duds -$$
$$-f(y(\tau(t)))\int_{t_7}^{t} g(\tau(u))p(u)du.$$

Zbog uslova $\tau(t)\geqslant t$ i činjenice da je $a(t)b(y(t))y'(t)$ nerastuća funkcija za $t\geqslant t_7$, dobivamo:

$$(4.12) \quad a(\tau(t))b(y(\tau(t)))y'(\tau(t))\leqslant a(t)b(y(t))y'(t).$$

Koristeći relaciju (4.12), uslove teorema i drugi Bonnet-ov teorem dobivamo:

$$\int_{t_7}^{t} a(s)b(y(s))y'(s)g'(\tau(s))\tau'(s)ds \leqslant$$

$$\leq \int_{t_7}^{t} a(\tau(s))b(y(\tau(s)))y'(\tau(s))g'(\tau(s))\tau'(s)ds =$$

$$= a(\tau(t_7))g'(\tau(t_7))\int_{y(\tau(t_7))}^{y(\tau(\tilde{t}))} b(u)du \leq a(\tau(t_7))g'(\tau(t_7))\int_{y(\tau(t_7))}^{c} b(u)du < \infty$$

gdje je $\tau(\tilde{t}) \in [\tau(t_7), \tau(t)]$.

Koristeći uslov (C_1') neposredno dobivamo iz relacije (4.11) da vrijedi eventualno:

$$\tilde{U}(t) \leq -\frac{f(c)}{2}\int_{t_7}^{t} g(\tau(u))p(u)du$$

što implicira:

$$\int_{y(t_7)}^{y(t)} b(u)du \leq -\frac{f(c)}{2}\int_{t_7}^{t}\frac{1}{g(\tau(s))a(s)}\int_{t_7}^{s} g(\tau(u)p(u)duds\ .$$

Prelazeći u ovoj relaciji na granični proces $t \to \infty$ i koristeći uslov (C_2') dobivamo:

$$\int_{y(t_7)}^{c} b(u)du = -\infty$$

što je očigledna kontradikcija.

Dakle, $c=0$.

U slučaju kada je eventualno $y < 0$ sličnim rezonovanjem dolazimo do istog zaključka.

4.16. <u>Teorem</u>. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi Teorema 4.15. s tim što je uslov (C_2') zamijenjen uslovom

$$(C_3') \qquad \int^{\infty} \frac{dt}{g(\tau(t))a(t)} = \infty$$

i da osim toga vrijedi uslov (C_4). Tada je diferencijalna nejednačina (P) oscilatorna.

<u>Dokaz</u>. Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (P). Ako je y oscilatorna funkcija zaključak Teorema je očigledan. Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija .Prema Lemi 4.9. moguća su tada dva slučaja b.) i c.) iz dokaza Teorema 4.2. Pretpostavimo da je eventualno $y > 0$.

Slučaj b.) se posmatra na sličan način kao odgovarajući slučaj Teorema 4.15..

Pretpostavimo da vrijedi slučaj c.) i neka je $t_8 \geq t_0$ realan broj takav da vrijedi $y(t)y'(t) < 0$, $t \geq t_8$. i neka je $c \in [0, \infty)$ takav da je

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = c.$$

Diferencirajući funkciju

$$(4.13) \qquad \widetilde{V}(t) = \frac{a(t)b(y(t))y'(t)}{f(y(\tau(t)))}\, g(\tau(t)) \qquad , \qquad t \geq t_8$$

i koristeći relaciju (4.12) dobivamo:

$$\widetilde{V}'(t) \leq -g(\tau(t))p(t) - \widetilde{V}(t)\,\frac{y'(\tau(t))\tau'(t)f'(y(\tau(t)))}{f(y(\tau(t)))} +$$

$$+ \frac{a(t)b(y(t))y'(t)}{f(y(\tau(t)))}g'(\tau(t))\tau'(t) \leq -g(\tau(t))p(t) -$$

$$- \frac{\widetilde{V}(t)}{f(y(\tau(t)))}\,\frac{d}{dt}\left[f(y(\tau(t)))\right] + \frac{a(\tau(t))b(y(\tau(t)))y'(\tau(t))}{f(y(\tau(t)))}\,.$$

$$\cdot \tau'(t)g'(\tau(t)).$$

Integrirajući od t_8 do $t \geq t_8$ dobivamo:

$$(4.14) \quad \widetilde{V}(t) \leq \widetilde{V}(t_8) - \int_{t_8}^{t} g(\tau(s))p(s)ds + \int_{t_8}^{t} \widetilde{V}(s)\left[-\frac{df(y(\tau(s)))}{f(y(\tau(s)))}\right] +$$

$$+ \int_{t_8}^{t} \frac{a(\tau(s))b(y(\tau(s)))y'(\tau(s))}{f(y(\tau(s)))}\,\tau'(s)g'(\tau(s))ds\,.$$

Primjenjujući na treći integral poslednje relacije drugi Bonnet-ov teorem i koristeći uslov (C_4) dobivamo:

$$\int_{t_8}^{t} \frac{a(\tau(s))b(y(\tau(s)))y'(\tau(s))}{f(y(\tau(s)))}\,\tau'(s)g'(\tau(s))ds =$$

$$= a(\tau(t_8))g'(\tau(t_8)) \int_{y(\tau(t_8))}^{y(\xi)} \frac{b(u)}{f(u)}du \leq$$

$$\leq a(\tau(t_8))g'(\tau(t_8)) \int_{y(\tau(t_8))}^{c} \frac{b(u)}{f(u)}\, du < \infty$$

gdje je $\zeta \in [\tau(t_8), \tau(t)]$.

Koristeći ograničenost gornjeg integrala iz uslova (C_1') dobivamo da vrijedi:

$$\tilde{V}(t) \leqslant -1 + \int_{t_8}^{t} \tilde{V}(s)\left[-\frac{df(y(\tau(s)))}{f(y(\tau(s)))}\right]$$

za $t \geqslant t_8' \geqslant t_8$. Koristeći Lemu 2.4. dobivamo:

$$\tilde{V}(t) \leqslant -\exp\left(-\int_{t_8}^{t} \frac{df(y(\tau(s)))}{f(y(\tau(s)))}\right) \qquad , \qquad t \geqslant t_8'$$

što daje:

$$\tilde{V}(t) \leqslant -\frac{f(y(\tau(t_8)))}{f(y(\tau(t)))} \qquad , \qquad t \geqslant t_8'$$

tj. $\quad a(t)b(y(t))y'(t)g(\tau(t)) \leqslant -f(y(\tau(t_8))) \qquad t \geqslant t_8'$.

Integrirajući posljednju relaciju od t_8' do $t \geqslant t_8'$ dobivamo:

$$\int_{t_8'}^{t} b(y(s))y'(s)ds \leqslant -f(y(\tau(t_8))) \int_{t_8'}^{t} \frac{ds}{g(\tau(s))a(s)} \quad .$$

Prelazeći u ovoj relaciji na granični proces $t \to \infty$ i koristeći uslov (C_3') dobivamo da vrijedi:

$$\int_{y(t_8')}^{c} b(u)du = -\infty$$

što je očigledna kontradikcija.

U slučaju kada je eventualno $y < 0$ sličnim rezonovanjem dolazimo do istog zaključka.

4.17. Slijedeća dva teorema će se odnositi na slučaj kada umjesto uslova (iii) vrijedi uslov (iv).

<u>Teorem</u>. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi (i), (ii), (iv), (C_5), (C_6), $\tau(t) \leqslant t$, (C_1') i (C_2'). Tada diferencijalna nejednačina (P) ima osobinu (A).

<u>Dokaz</u>. Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (P). Ako je y oscilatorna funkcija zaključak teorema je očigledan.

Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija. Prema Lemi 4.9. moguća su tada dva slučaja b.) i c.) iz dokaza Teorema 4.2.. Pretpostavimo da je eventualno $y > 0$. Zbog $\tau(t) \leq t$, i činjenice da je $a(t)b(y(t))y'(t)$ nerastuća funkcija za $t \geq t_9$, dobivamo:

$$(4.15) \qquad a(t)b(y(t))y'(t) \leq a(\tau(t))b(y(\tau(t)))y'(\tau(t)) \; .$$

Pretpostavimo da vrijedi slučaj b.) i neka je $t_9 \geq t_0$ realan broj takav da vrijedi

$$y(t)y'(t) > 0 \qquad , \qquad t \geq t_9 .$$

Diferencirajući funkciju $\widetilde{V}(t)$ definisanu relacijom (4.13) i koristeći pretpostavke dobivamo:

$$\widetilde{V}'(t) \leq -g(\tau(t))p(t) + \frac{a(t)b(y(t))y'(t)}{f(y(\tau(t)))}\tau'(t)g'(\tau(t)) \quad ,$$

$t \geq t_9$.

Integrirajući poslednju relaciju od t_9 do $t \geq t_9$ dobivamo:

$$(4.16) \quad \widetilde{V}(t) \leq \widetilde{V}(t_9) - \int_{t_9}^{t} g(\tau(s))p(s)ds + \int_{t_9}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))}\tau'(s)g'(\tau(s))ds \; .$$

Koristeći relaciju (4.15), uslove teorema i drugi Bonnet-ov teorem dobivamo za drugi integral u posljednjoj relaciji:

$$\int_{t_9}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))}\tau'(s)g'(\tau(s))ds \leq$$

$$\leq \int_{t_9}^{t} \frac{a(\tau(s))b(y(\tau(s)))y'(\tau(s))}{f(y(\tau(s)))}\tau'(s)g'(\tau(s))ds =$$

$$= a(\tau(t_9))g'(\tau(t_9)) \int_{y(\tau(t_9))}^{y(\eta)} \frac{b(u)}{f(u)}du \leq$$

$$\leq a(\tau(t_9))g'(\tau(t_9)) \int_{y(\tau(t_9))}^{\infty} \frac{b(u)}{f(u)}du$$

gdje je $\eta \in \left[\tau(t_9), \tau(t)\right]$.

Na osnovu uslova (C_1') i upravo dokazane ograničenosti integrala dobivamo iz relacije (4.16) eventualno:

$$\tilde{V} < o$$

što je očigledna kontradikcija.

Pretpostavimo da vrijedi slučaj c.) i neka je $t_{1o} \geqslant t_o$ realan broj takav da vrijedi $y(t)y'(t) < o \quad , \quad t \geqslant t_{1o}$ i neka je $c \in [o, \infty)$ takav da vrijedi $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = c$. Pretpostavimo da je $c > o$.

Diferencirajući funkciju $\tilde{U}(t)$ definisanu relacijom (4.1o) a zatim je integrirajući parcijalno dobivamo relaciju (4.11) gdje umjesto t_7 treba staviti t_{1o}. Koristeći sada uslov (C_1') i činjenicu da je $c > o$ dobivamo da vrijedi eventualno:

$$\tilde{U}(t) \leqslant - \frac{f(c)}{2} \int_{t_{1o}}^{t} g(\tau(u))p(u)du \ .$$

Ova činjenica se dovodi do kontradikcije na potpuno isti način kao u dokazu Teorema 4.15..

Dakle, c=o.

U slučaju kada je eventualno $y < o$ sličnim rezonovanjem dolazimo do istog zaključka.

4.18. <u>Teorem</u>. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi Teorema 4.17. s tim što je uslov (C_2') zamijenjen uslovom (C_3'). Tada je diferencijalna nejednačina (P) oscilatorna.

<u>Dokaz</u>. Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (P). Ako je y oscilatorna funkcija zaključak teorema je očigledan. Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija. Prema Lemi 4.9. moguća su tada dva slučaja b.) i c.) iz dokaza Teorema 4.2.. Pretpostavimo da je eventualno $y > o$. Slučaj b.) se posmatra na potpuno isti način kao odgovarajući slučaj Teorema 4.17..

Pretpostavimo da vrijedi slučaj c.). Koristeći funkciju $\tilde{U}(t)$ definisanu relacijom (4.1o) i provodeći isti postupak kao u odgovarajućem dijelu dokaza Teorema 4.15. dobivamo relaciju (4.11) iz koje neposredno slijedi:

$$\tilde{U}(t) \leqslant \tilde{U}(t_7) < 0 \quad , \qquad t \geqslant t_7 \, .$$

Integrirajući ovu relaciju od t_7 do $t \geqslant t_7$ dobivamo:

$$\int_{t_7}^{t} b(y(s))y'(s)ds \leqslant \tilde{U}(t_7) \int_{t_7}^{t} \frac{ds}{g(\tau(s))a(s)} \, .$$

Prelazeći u ovoj relaciji na granični proces $t \to \infty$ i koristeći uslov (C_3') dobivamo:

$$\int_{y(t_7)}^{c} b(u)du = -\infty \quad ,$$

gdje je $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = c < \infty$, što je očigledna kontradikcija.

Primjedba. Uslov $(a(t)g'(t))' \leqslant 0$, $t \geqslant t_0$ u Teoremu 4.17. i 4.18. može biti zamijenjen uslovom (C_7). Naime, uslov $(a(t)g'(t))' \leqslant 0$ $t \geqslant t_0$ je u tim teoremima korišten jedino pri dokazivanju ograničenosti integrala (u slučaju b.))

$$\int_{t_9}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))} \tau'(s)g'(\tau(s))ds$$

što se takođe može dokazati korištenjem uslova (C_7). Zaista, koristeći najprije uslov (4.15) a zatim parcijalnu integraciju dobivamo:

$$\int_{t_9}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))} \tau'(s)g'(\tau(s))ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_9}^{t} a(\tau(s))g'(\tau(s)) \frac{b(y(\tau(s)))y'(\tau(s))\tau'(s)}{f(y(\tau(s)))} ds =$$

$$= a(\tau(t))g'(\tau(t)) \int_{y(\tau(t_9))}^{y(\tau(t))} \frac{b(u)}{f(u)} du - \int_{\tau(t_9)}^{\tau(t)} (a(\eta)g'(\eta))' \int_{y(\eta, t_9)}^{y(\eta(t))} \frac{b(u)}{f(u)} du d\eta < \infty$$

što je zbog (C_5) i (C_7) ograničena funkcija.

Posljedica. U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i kada umjesto nejednačine (P) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\tilde{P})$ Teorem 4.18. zajedno sa Primjedbom 4.18. daje Teorem 1. Odarič-a i Odarič-a [59].

4.19. Primjedba. Slično kao u Primjedbi 4.18. može se dokazati da se uslov $(a(t)g'(t))' \geqslant 0$, $t \geqslant t_0$ u Teoremu 4.15. i 4.16. može zamijeniti uslovom (C_7).
Napomenimo da Primjer 4.14. pokazuje da zamjena uslova (C_2') neznatno strožijim uslovom (C_3') bitno mijenja asimptotsko ponašanje rješenja nejednačine (P). Taj uslov je vjerovatno najoštriji poznati uslov koji dijeli osobinu (A) od oscilatornosti u slučaju diferencijalnih jednačina i nejednačina sa otklonjenim argumentom.

4.2o. Sada ćemo izučavati kakvu promjenu u asimptotskom ponašanju rješenja diferencijalne nejednačine (P) izaziva uslov $\tau(t)=t$ tj. proučavaćemo vezu izmedju asimptotskog ponašanja funkcionalno-diferencijalne nejednačine (P) i njoj odgovarajuće obične diferencijalne nejednačine (OP). Pri tome centralnu ulogu imaće slijedeća lema.

Lema. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi (i), (C_1) i

α.) (iii) i (C_4)

ili

β.) (iv) i (C_5).

Tada bilo koje neoscilatorno rješenje $y(t)$ diferencijalne nejednačine (OP) ima neoscilatoran izvod.

Dokaz. Neka je y neoscilatorno rješenje diferencijalne nejednačine (OP) čiji je izvod $y'(t)$ oscilatorna funkcija i neka je $d \geqslant t_0$ realan broj takav da vrijedi $|y(t)| > 0$ za $t \geqslant d$.

Označimo sa $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ rastući niz nula funkcije $y'(t)$ za koji vrijedi $t_1 \geqslant d$ i

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty .$$

Uvodeći funkciju $W(t)$ relacijom (4.2) pri čemu je $\tau(t)=t$ dobivamo relaciju (4.3) sa $\tau(t)=t$ tj.

$$(4.3') \qquad W'(t) \leqslant -g(t)p(t) - \frac{a(t)b(y(t))(y'(t))^2 f'(y(t))}{f^2(y(t))} g(t) + \frac{a(t)b(y(t))y'(t)}{f(y(t))} g'(t)$$

odakle odmah dobivamo:

$$W'(t) \leqslant -g(t)p(t) + \frac{a(t)b(y(t))y'(t)}{f(y(t))} g'(t) \qquad , t \geqslant t_1 .$$

Integrirajući ovu nejednakost od t_n do t_{n+1} dobivamo:

$$W(t_{n+1}) - W(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s)p(s)ds \leqslant \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(s))} g'(s)ds, n \geqslant 1.$$

Sumirajući ove relacije za $n \geqslant 1$ i koristeći činjenicu da je

$$W(t_n)=0 \ , \ n=1,2,\ldots$$

dobivamo iz posljednje relacije:

$$(4.17) \qquad \int_{t_1}^{\infty} g(s)p(s)ds \leqslant \int_{t_1}^{\infty} a(s)g'(s) \frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(s))} ds .$$

Na osnovu uslova (C_1) dobivamo:

$$(4.18) \qquad \int_{t_1}^{\infty} a(s)g'(s) \frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(s))} ds = \infty .$$

S druge strane u slučaju α.) i β.) na osnovu drugog Bonnet-ovog toerema i uslova (C_4) i (C_5) za $t \geqslant t_1$ dobivamo:

$$\int_{t_1}^{t} a(s)g'(s) \frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(s))} ds = a(t_1)g'(t_1) \int_{t_1}^{t_1'} \frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(s))} ds =$$

$$= a(t_1)g'(t_1) \int_{y(t_1)}^{y(t_1')} \frac{b(u)}{f(u)} du$$

gdje je $t_1' \in [t_1, t]$, što je u kontradikciji sa relacijom (4.18). Dakle, y' je neoscilatorna funkcija.

Primjedba. Slično kao u Primjedbi 4.18. i 4.19. može se dokazati da tvrdnja upravo dokazane leme vrijedi ako se umjesto uslova α.) i β.) pretpostavi slijedeći uslov:

γ.) postoji funkcija $g \in C^2\left[[t_0, \infty), (0, \infty)\right]$ takva da vrijede uslovi (C_4), (C_5) i (C_7).

4.21. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede svi uslovi Teorema 4.1., gdje je stavljeno $\tau(t)=t$ i (C_4). Tada diferencijalna nejednačina (OP) ima osobinu (A).

Dokaz. Slijedi neposredno iz Teorema 4.1. i Leme 4.20..

4.22. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede svi uslovi Teorema 4.2., gdje je stavljeno $\tau(t)=t$. Tada je diferencijalna nejednačina (OP) oscilatorna.

Dokaz. Slijedi neposredno iz Teorema 4.2. i Leme 4.20..

Posljedica. U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ Teorem 4.22. zajedno sa Primjedbom 4.20. daje uopćenje rezultata Kamenev-a [26] .

U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i $a(t)=1$, Teorem 4.22. daje uopćenje Teorema 1. Coles-a [11]. Napomenimo da u slučaju kad je $a(t)=1$ uslov (C_2) je automatski zadovoljen, jer je tada $g(t) > 0$ i $g'(t) \leq 0$ za $t \geq t_0$, što znači da je taj uslov suvišan u ovom rezultatu Coles-a.

U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i $g(t)=1$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ Teorem 4.22. daje proširenje klasičnog oscilacionog rezultata Fite-Leighton-Wintner-a [70, str. 70] sa slučaja linearne na slučaj strogo nelinearne diferencijalne jednačine.

U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i $g(t)=\left(\int_t^\infty \frac{ds}{a(s)}\right)^m, m>1$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu ($\widetilde{OP}$) Teorem 4.22. daje proširenje klasičnog rezultata Moore-a [7o,str.74] sa slučaja linearne na slučaj strogo nelinearne diferencijalne jednačine.

4.23. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede svi uslovi Teorema 4.4.. Tada je diferencijalna nejednačina (OP) oscilatorna, čim je $\tau(t)=t$.

Dokaz. Na osnovu Teorema 4.4. svako rješenje diferencijalne nejednačine (OP) ima oscilatoran izvod. Pretpostavimo da diferencijalna nejednačina (OP) ima neoscilatorno rješenje y. Na potpuno isti način kao u dokazu Leme 4.2o. dolazimo do relacije (4.17), koja zbog činjenice da je $g(t)=1$ postaje:

$$(4.17') \qquad \int_{t_1}^{\infty} p(s)ds \leq 0 \,,$$

što je u kontradikciji sa uslovom (C_1).

Posljedica. U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu ($\widetilde{OP}$) Teorem 4.23. postaje Teorem 1. Bhatia-e[3].

U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$, $f(u)=u$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu ($\widetilde{OP}$), Teorem 4.23. se svodi na klasični rezultat Fite-Leighton-Wintner-a [7o,str.7o]. Ovo pokazuje da se primjena ovog klasičnog rezultata može proširiti na veoma široku klasu nelinearnih diferencijalnih jednačina i nejednačina.

4.24. Teorem. Pretpostavimo da za nejednačinu (OP) vrijede svi uslovi Teorema 4.5. gdje je stavljeno $\tau(t)=t$. Tada nejednačina (OP) ima osobinu (A).

Dokaz. Slijedi neposredno iz Teorema 4.5. i Leme 4.2o..

4.25. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede svi uslovi Teorema 4.6. gdje je stavljeno $\tau(t)=t$. Tada je diferencijalna nejednačina (OP) oscilatorna.

Dokaz. Slijedi neposredno iz Teorema 4.6. i Leme 4.2o..

Posljedica. U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$, $a(t)=1$, $f(u)=u^{2n+1}$, $n=1,2,\ldots$ i $g(t)=t$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$. Teorem 4.25. postaje klasični rezultat Atkinson-a [2] .

U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i $g(t)=\left(1+\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{a(s)}\right)^n$, $n<1$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ Teorem 4.25. daje proširenje klasičnog rezultata Moore-a [7o. str 73] sa slučaja linearne na slučaj strogo nelinearne diferencijalne jednačine.

U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$, $a(t)=1$, $f(u)=|u|^n \mathrm{sgn}\, u$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ Teorem 4.25. postaje Teorem 1. Kiguradze-a [33].

U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$, $a(t)=1$ i $g(t)=t$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$, Teorem 4.25. daje pojačanje Teorema 1. Legatos-a i Kartsatos-a [46] , Teorema 1-3. Bobisud-a [4] i Teorema 1-3. i 5. Onose-a [6o].Svi ovi rezultati su dokazani ili uz neke suvišne uslove ili su tvrdnje tih teorema tipa "jednačina $(\widetilde{OP})$ ima osobinu (A)".

U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ Teorem 4.25. zajedno sa Primjedbom4.2o. daje rezultat Kamenev-a [26].

U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$, $a(t)=1$ i $g(t)=t$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu

Teorem 4.25. postaje Teorem 2.1. Travis-a [72].
U specijalnom slučaju kad je $g(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{a(s)}$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ Teorem 4.25. daje pojačanje Teorema 2. Staikos-a i Sficas-a [66], koji je dokazan uz dodatni uslov (C_4).
U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i $g(t)=t$ Teorem 4.25. daje Teorem 2. Kartsatos-a i Onose-a [30].
U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$, $g(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{a(s)}$ Teorem 4.25. postaje Teorem 4. Moussair-a i Swanson-a [58].
U specijalnom slučaju kad je $g(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{a(s)}$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ Teorem 4.25. daje Teorem 5. Mahfoud-a i Rankin-a [51].

Primjedba. Primjer 4.14. pokazuje da zamjena uslova (C_4) neznatno strožijim uslovom (C_5) bitno mijenja asimptotsko ponašanje rješenja nejednačine (OP). Ti uslovi su vjerovatno najoštriji poznati uslovi koji dijele osobinu (A) od oscilatornosti u slučaju običnih diferencijalnih jednačina i nejednačina.

4.26. Posljedica. Neposredno se dokazuje da uslov

$$(4.19)\qquad \int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty} b(u)du<\infty\,,\qquad \varepsilon>0$$

implicira uslov (C_5) pod pretpostavkom da vrijedi (i). Prema tome u formulaciji Teorema 4.25. uslov (C_5) možemo zamijeniti uslovom (4.19). Ako u tako dobivenom rezultatu uzmemo $g(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{a(s)}$ i umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ dobivamo Teorem 4. Mahfoud-a i Rankin-a [51].
Slijedeći primjer pokazuje da i funkcija $b(u)$ može uticati na oscilatorno ponašanje rješenja nejednačine (OP).

Primjer. Diferencijalna nejednačina

$$y(t)\left[(b(y(t))y'(t))' + \frac{1}{t^2 \ln t}\, y(t)\right] \leqslant 0, \qquad t > 1$$

gdje funkcija b zadovoljava uslov (4.19) je, na osnovu Posljedice 4.26. pri čemu je $g(t)=t$, $t>1$, oscilatorna. Međutim u slučaju kad je $b(u)=1$ ova jednačina ima neoscilatorno rješenje $y=\ln t$.

4.27. Sada ćemo pokazati da i u nekim linearnim situacijama zamjena uslova (C_2) uslovom (C_3) dovodi do promjene u oscilatornom ponašanju rješenja nejednačine (OP), opisane u Primjedbi 4.25..

Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi (i), (C_1), (C_2),

(v) $\quad f'(u) \geqslant \mu > 0 \quad , \quad u \neq 0$.

(vi) $\quad$ postoji funkcija $g \in C^1[[t_0, \infty),(0,\infty)]$ takva da vrijedi $g'(t) \leqslant 0$, $t \geqslant t_0$

ili

(vii) $\quad$ postoji funkcija $g \in C^1[[t_0, \infty),(0,\infty)]$ takva da vrijedi $g'(t) \geqslant 0$, $t \geqslant t_0$

i

(C_8) $\quad \int^{\infty} \frac{a(t)b(y(t))(g'(t))^2}{g(t)}dt < \infty$

za svaku neoscilatornu funkciju $u \in C^1[[t_0, \infty)]$.

Tada diferencijalna nejednačina (OP) ima osobinu (A).

Dokaz. Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (OP). Ako je y oscilatorna funkcija zaključak teorema je očigledan. Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija i neka je $t_{12} \geqslant t_0$ realan broj takav da je y stalnog znaka za $t \geqslant t_{12}$. Uvodeći funkciju W relacijom (4.2) pri čemu je $\tau(t)=t$, dobivamo relaciju (4.3′) i nakon integracije od t_{12} do $t \geq t_{12}$ dobivamo relaciju (4.5) sa $\tau(t)=t$ tj.

$$(4.5') \qquad W(t) \leq W(t_{12}) - \int_{t_{12}}^{t} g(s)p(s)ds + \int_{t_{12}}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(s))} g'(s)ds - \int_{t_{12}}^{t} \frac{a(s)b(y(s))(y'(s))^2 f'(y(s))}{f^2(y(s))} g(s)ds$$

Primjenjujući na drugi integral desne strane Cauchy-Schwarz-ovu nejednakost i uslov (C_8) dobivamo:

$$\left| \int_{t_{12}}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(s))} g'(s)ds \right| \leq \left| \int_{t_{12}}^{t} \frac{a(s)b(y(s))(g'(s))^2}{g(s)} ds \right|^{\frac{1}{2}} \left| \int_{t_{12}}^{t} \frac{a(s)b(y(s))(y'(s))^2}{f^2(y(s))} g(s)ds \right|^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq L \left| \int_{t_{12}}^{t} \frac{a(s)b(y(s))(y'(s))^2}{f^2(y(s))} g(s)\, ds \right|^{\frac{1}{2}} , \quad t \geq t_{12}$$

gdje je $L \in [0, \infty)$. Koristeći (v) i ovu nejednakost dobivamo:

$$(4.20) \qquad W(t) \leq W(t_{12}) - \int_{t_{12}}^{t} g(s)p(s)ds - \mu \int_{t_{12}}^{t} \frac{a(s)b(y(s))(y'(s))^2}{f^2(y(s))} g(s)ds + L\left(\int_{t_{12}}^{t} \frac{a(s)b(y(s))(y'(s))^2}{f^2(y(s))} g(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} = W(t_{12}) - \int_{t_{12}}^{t} g(s)p(s)ds + \left[\int_{t_{12}}^{t} \frac{a(s)b(y(s))(y'(s))^2}{f^2(y(s))} g(s)\, ds \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[L - \mu \left(\int_{t_{12}}^{t} \frac{a(s)b(y(s))(y'(s))^2}{f^2(y(s))} g(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Koristeći uslove (C_1) i (C_8) dobivamo:

$$\lim_{t \to \infty} W(t) = -\infty$$

što implicira

$$y(t)y'(t) < 0 \quad , \quad t \geq t'_{12} \geq t_{12}$$

i zato postoji realan broj c takav da je:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = c \, .$$

Pretpostavimo da je $c > 0$. Koristeći uslove (C_1) i (C_8) iz relacije (4.20) dobivamo da je eventualno:

$$W(t) \leq -\frac{1}{2} \int_{t'_{12}}^{t} g(s)p(s)ds$$

što odmah implicira:

$$\int_{y(t_{12}')}^{y(t)} \frac{b(u)}{f(u)}\,du \leq -\frac{1}{2}\int_{t_{12}'}^{t} \frac{1}{g(s)a(s)} \int_{t_{12}'}^{s} g(u)p(u)\,du\,ds$$

Prelazeći u ovoj relaciji na granični proces $t \to \infty$ dobivamo očiglednu kontradikciju.

Dakle, $c=0$.

<u>Primjer</u>. Diferencijalna nejednačina

$$y(t)\left[(t^3 y'(t))' + t y(t)\right] \leq 0 \quad , \qquad t > 0$$

ima neoscilatorno rješenje $y(t)=\frac{1}{t}$ koje monotono teži nuli kad $t \to \infty$. U ovom slučaju uslovi Teorema 4.27. vrijede za funkciju $g(t)=c>0$, $t>0$.

4.28. <u>Teorem</u>. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi Teorema 4.27. s tim što je uslov (C_2) zamijenjen uslovom (C_3). Tada, u slučaju da vrijedi uslov (vi) diferencijalna nejednačina (OP) ima osobinu (A), dok u slučaju kad vrijedi uslov (vii) diferencijalna nejednačina (OP) je oscilatorna.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da vrijedi slučaj (vii). Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (OP). Ako je y oscilatorna funkcija zaključak teorema je očigledan. Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija. Zaključujući kao u dokazu Teorema 4.27. dobivamo da je eventualno $yy'<0$, što na osnovu uslova (C_1) i (vii) iz relacije (4.5′) implicira eventualno:

$$W(t) \leq -1 + \int_{t_{12}}^{t} W(s)\left[-\frac{df(y(s))}{f(y(s))}\right].$$

Dalje, primjenjujući Lemu 2.4. i postupajući na potpuno isti način kao u odgovarajućem slučaju dokaza Teorema 4.1. dolazimo do kontradikcije.

Posljedica. U specijalnom slučaju kad je $b'(u)=1$, $f(u)=1$ i $g(t)=(1+\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{a(s)})^n$, $n<1$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ Teorem 4.28. postaje klasični rezultat Moore-a [7o, str.73].
U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ Teorem 4.28. postaje Teorem 2. Kusano-a, Onose-a i Tobe-a [45].

4.29. Sada ćemo ukratko sumirati rezultate dobivene u dosadašnjem izlaganju ovog dijela rada.
Skup uslova (iii), (C_1) i (C_2) nazovimo uopćenim Fite-Leighton--Wintner-ovim uslovima-kratko GFLW, a skup uslova (iii), (C_1) i (C_3) nazovimo Fite-Leighton-Wintner-ovim uslovima-kratko FLW. Nazovimo dalje skup uslova (iv), (C_1) i (C_2) uopćenim Atkinson--ovim uslovima-kratko GA, a skup uslova (iv), (C_1) i (C_3) nazovimo Atkinson-ovim uslovima-kratko A. Skup uslova (iii), (C_1) i (C_2) označimo kratko sa MGFLW (modificirani uopćeni Fite-Leighton--Wintner-ovi uslovi), a (iii), (C_1) i (C_3) sa MFLW, (iv), (C_1) i (C_2) sa MGA i (iv), (C_1) i (C_3) sa MA.
Na osnovu dobivenih razmatranja možemo zaključiti slijedeće:

$$\left.\begin{array}{l} GFLW + (C_4) + \tau(t) \leq t \\ A + (C_5) + \tau(t) \geq t \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{nejednačina ima oscilatorne izvode}$$

$$\left.\begin{array}{l} GFLW + (C_4) + \tau(t) \leq t + (C_6) \\ A + (C_5) + \tau(t) \geq t + (C_6) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{nejednačina ima oscilatorna rješenja}$$

$$\left.\begin{array}{l} GFLW + (C_4) + \tau(t) = t \\ A + (C_5) + \tau(t) = t \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{nejednačina ima oscilatorna rješenja}$$

$$\text{Dakle, oscilatornost izvoda} \begin{cases} \xrightarrow{(C_6)} \text{oscilatornost rješenja} \\ \xrightarrow[\tau(t)=t]{} \text{oscilatornost rješenja.} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{MFLW} + (C_4) + \tau(t) \geq t + (C_6) \\ \\ \text{MA} + (C_5) + \tau(t) \leq t + (C_6) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{nejednačina ima} \\ \text{oscilatorna rješenja.} \end{array}$$

Što se tiče osobine (A), kao što smo vidjeli, njena pojava je izazvana zamjenom uslova (C_3) uslovom (C_2) i to samo u slučaju uslova "Atkinson-ovog" tipa, pa vrijedi:

$$\text{GA} + (C_5) + \tau(t) \geq t \Longrightarrow \text{nejednačina ima osobinu (B)}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{GA} + (C_5) + \tau(t) \geq t + (C_6) \\ \text{GA} + (C_5) + \tau(t) = t \\ \text{MGA} + (C_5) + \tau(t) \leq t + (C_5) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{nejednačina ima} \\ \text{osobinu (A).} \end{array}$$

$$\text{Dakle, osobina (A)} \xrightarrow{(C_3)} \text{oscilatornost.}$$

U slučaju uslova Fite-Leighton-Wintner-ovog tipa imamo slijedeću situaciju:

$$\text{GFLW} \Longrightarrow \text{nejednačina ima osobinu (B)}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{GFLW} + (C_6) \\ \text{MGFLW} + \tau(t) \geq t + (C_6) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{nejednačina ima osobi-} \\ \text{nu (A)} \end{array}$$

što pokazuje da osobina (A) prelazi u oscilatornost uvođenjem novih uslova (C_4) i $\tau(t) \leq t$, odnosno zamjenom uslova (C_2) uslovom (C_3) i uvođenjem uslova (C_4).

Dakle,

$$\text{osobina (A)} \xrightarrow{(C_4) + \tau(t) \leq t} \text{oscilatornost}$$

ili

$$\text{osobina (A)} \xrightarrow{(C_3) + (C_4)} \text{oscilatornost.}$$

4.3o. <u>Optimalni izbor funkcije g.</u> U slučaju kad funkcija g zadovoljava uslove Atkinson-ovog tipa iz uslova (iv) lako dobivamo da tada vrijedi:

$$g(t) \leq \beta\left(1+\int_{t_o}^{t} \frac{ds}{g(s)}\right) \quad , \beta>o \text{ konstanta}$$

pa kako je u tom slučaju funkcija g neopadajuća, optimalan izbor funkcije g u odnosu na uslov (C_1), u slučaju da vrijedi (C_5), je upravo:

$$(4.21) \quad \begin{array}{ll} g(t)=\displaystyle\int_{t_o}^{t}\frac{ds}{a(s)} & \text{ako je } \displaystyle\int^{\infty}\frac{ds}{a(s)}=\infty \\ g(t)=1 & \text{ako je } \displaystyle\int^{\infty}\frac{ds}{a(s)}<\infty . \end{array}$$

U slučaju kad funkcija g zadovoljava uslove Fite-Leighton-Wintner-ovog tipa iz uslova (iii) lako dobivamo da vrijedi za $t \geq T$:

$$g(T) \leq g(t) + \gamma\int_{T}^{t}\frac{ds}{a(s)} \quad , \gamma>o \text{ konstanta},$$

što znači da je optimalan izbor funkcije g u odnosu na uslov (C_1), u slučaju da vrijedi (C_5), upravo:

$$(4.22) \quad \begin{array}{ll} g(t)=1 & \text{ako je } \displaystyle\int^{\infty}\frac{ds}{a(s)}=\infty \\ g(t)=\displaystyle\int_{t}^{\infty}\frac{ds}{a(s)} & \text{ako je } \displaystyle\int^{\infty}\frac{ds}{a(s)}<\infty . \end{array}$$

Primijetimo da u slučaju kad je $g'(t)=o$ uzimamo $g(t)=1$ i u tom se slučaju FLW-uslovi poistovjećuju sa A-uslovima.

4.31. <u>Teorem.</u> Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP), gdje je $b(u)=1$, vrijede uslovi (i), (C_5), (C_6) i

$$\int^{\infty}\frac{dt}{a(t)}=\infty .$$

Tada je diferencijalna nejednačina (OP) oscilatorna ako i samo ako vrijedi:

$$(4.23) \quad \int^{\infty}\left(\int_{t_o}^{t}\frac{ds}{a(s)}\right)p(t)dt=\infty .$$

<u>Dokaz.</u> Dokaz dovoljnog dijela teorema slijedi neposredno iz Teorema 4.25. uzimajući da je funkcija g data relacijom (4.21)

pretpostavimo da uslov (4.23) nije ispunjen. Tada postoji $\omega \geqslant t_o$ tako da vrijedi:

$$(4.24) \qquad f(1)\int_{\omega}^{\infty}\Big(\int_{t_o}^{t}\frac{ds}{a(s)}\Big)p(t)dt < \frac{1}{2} .$$

Označimo sa X skup monotono neopadajućih funkcija definisanih na $[\omega, \infty)$ za koje vrijedi:

$$\frac{1}{2} \leqslant x(t) \leqslant 1 \quad , \quad t \geqslant \omega, \ x \in X.$$

Definišimo na skupu X preslikavanje $\mathcal{F}$ sa:

$$(\mathcal{F}x)(t) = \frac{1}{2} + \int_{t_o}^{t}\frac{ds}{a(s)}\int_{t}^{\infty}p(s)f(x(s))ds + \int_{\omega}^{t}\Big(\int_{t_o}^{s}\frac{du}{a(u)}\Big)p(s)f(x(s))ds,$$
$$t \geqslant \omega, \ x \in X.$$

Očito je $\mathcal{F}x$ monotono neopadajuća funkcija i

$$(\mathcal{F}x)(t) \geqslant \frac{1}{2} \qquad , t \geqslant \omega .$$

Dalje koristeći (4.24) dobivamo za $t \geqslant \omega$:

$$(\mathcal{F}x)(t) \leqslant \frac{1}{2} + f(1)\int_{t}^{\infty}\Big(\int_{t_o}^{s}\frac{du}{a(u)}\Big)p(s)ds + f(1)\int_{\omega}^{t}\Big(\int_{t_o}^{s}\frac{du}{a(u)}\Big)p(s)ds =$$
$$= \frac{1}{2} + f(1)\int_{\omega}^{\infty}\Big(\int_{t_o}^{s}\frac{du}{a(u)}\Big)p(s)ds \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

što znači da je $\mathcal{F}(X) \subseteq X$.

Definišući poredak u skupu X na prirodan način:

$$x_1 \leqslant x_2 \Longleftrightarrow (\forall t \geqslant \omega) x_1(t) \leqslant x_2(t) ,$$

lako se provjerava da je preslikavanje $\mathcal{F}$ monotono tj. da vrijedi

$$x_1 \leqslant x_2 \Longleftrightarrow \mathcal{F}x_1 \leqslant \mathcal{F}x_2 .$$

Kako je osim toga za svako $B \subseteq X$, $\sup B \in X$ na osnovu Teorema 2.5. zaključujemo da postoji funkcija $z \in X$ takva da vrijedi:

$$\mathcal{F}z = z$$

na $[\omega, \infty)$, što znači da diferencijalna jednačina:

$$(a(t)y'(t))' + p(t)f(y(t)) = o \quad , t \geqslant \omega$$

pa prema tome i nejednačina (OP), gdje je $b(u)=1$, ima neoscilatorno rješenje $z(t)$.

Posljedica. U specijalnom slučaju kad je $a(t)=1$, $f(u)=u^{2n+1}$, $n=1,2,\dots$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$, Teorem 4.31. postaje klasični rezultat Atkinson-a [2].

U specijalnom slučaju kad je $a(t)=1$; kada funkcija f zadovoljava uslov

$$\liminf_{|x|\to\infty} \frac{|f(x)|}{|x|^p} > 0 \quad , \ p>1$$

i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widehat{OP})$, Teorem 4.31. postaje teorem Waltman-a [73].

Primjedba. Teorem 4.31. je potpuno različitim metodom dokazan od strane Naito-a i Yoshida-e [57, Teorem 2.2].

4.32. Kao što funkcija g data relacijom (4.21) ima poseban značaj u slučaju uslova A-tipa, tako i funkcija

$$g(t)=\int_t^\infty \frac{ds}{a(s)} \tag{4.25}$$

u slučaju uslova FLW-tipa ima centralnu ulogu, jer za tako izabranu funkciju g uslovi FLW-tipa postaju potrebni i dovoljni uslovi za oscilaciju.

Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P), gdje je $b(u)=1$, vrijede uslovi (i), (ii), (C_4), (C_6), $\tau(t)\leq t$ i

$$(U_0) \qquad \int^\infty \frac{dt}{a(t)} < \infty .$$

Tada je diferencijalna nejednačina (P) oscilatorna ako i samo ako je:

$$\int^\infty \Big(\int_t^\infty \frac{ds}{a(s)}\Big)p(t)dt = \infty . \tag{4.26}$$

Dokaz. Dokaz dovoljnog dijela teorema slijedi neposredno iz Teorema 4.11. uzimajući da je funkcija g data relacijom (4.25). Pretpostavimo sada da uslov (4.26) nije ispunjen. Tada postoji $\omega\geq t_0$

tako da vrijedi:

$$(4.27)\qquad f(1)\int_{\omega}^{\infty}\Big(\int_{t}^{\infty}\frac{ds}{a(s)}\Big)p(t)dt < \frac{1}{2}\ .$$

Označimo sa X skup monotono nerastućih funkcija x definisanih na $[\omega, \infty)$ za koje vrijedi:

$$\frac{1}{2} \leqslant x(t) \leqslant 1 \quad , \quad t \geqslant \omega,\ x \in X.$$

Definišimo na skupu X preslikavanje $\mathcal{F}$ sa:

$$(\mathcal{F}x)(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_{t}^{\infty}\frac{ds}{a(s)}\int_{\omega_1}^{t}p(s)f(x(\tau(s)))ds + \int_{t}^{\infty}\Big(\int_{s}^{\infty}\frac{du}{a(u)}\Big)p(s)f(x(\tau(s)))ds, \\ \qquad\qquad t \geqslant \omega_1 \\ x(t) \qquad\qquad t \in [\omega, \omega_1) \end{cases}$$

gdje je $\omega_1 \geqslant \omega$ realan broj za koji vrijedi:

$$t \geqslant \omega_1 \Longrightarrow \tau(t) \geqslant \omega\ .$$

Koristeći uslov (4.27) dobivamo:

$$(\mathcal{F}x)(t) \leqslant \frac{1}{2} + f(1)\int_{t}^{\infty}\frac{ds}{a(s)}\int_{\omega_1}^{t}p(s)ds + f(1)\int_{t}^{\infty}\Big(\int_{s}^{\infty}\frac{du}{a(u)}\Big)p(s)ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} + f(1)\Big[\int_{\omega_1}^{t}\Big(\int_{s}^{\infty}\frac{du}{a(u)}\Big)p(s)ds + \int_{t}^{\infty}\Big(\int_{s}^{\infty}\frac{du}{a(u)}\Big)p(s)ds\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} + f(1)\int_{\omega}^{\infty}\Big(\int_{s}^{\infty}\frac{du}{a(u)}\Big)p(s)ds \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ .$$

Definišući poredak u skupu X na isti način kao u dokazu Teorema 4.31. lako dokazujemo da su ispunjeni svi uslovi Teorema 2.5. pa zato postoji funkcija $w \in X$ takva da vrijedi:

$$\mathcal{F}w = w$$

na $[\omega_1, \infty)$ što znači da diferencijalna jednačina $(\tilde{P})$, gdje je $b(u)=1$, pa prema tome i odgovarajuća nejednačina (P), ima neoscilatorno rješenje $w(t)$.

4.33. Sada ćemo dati nekoliko karakterizacija oscilatornog i asimptotskog ponašanja rješenja nejednačine (P) i (OP), koji se dobivaju za optimalni izbor funkcije $g(t)=1$. Pri tome će centralnu ulogu igrati slijedeća lema.

Lema. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi (i),(C_6),$\tau(t)\leqslant t$ i

$$(4.28)\qquad \int^{\infty}\frac{1}{a(t)}\int_{t_o}^{t}p(s)dsdt<\infty\ .$$

Tada diferencijalna nejednačina (P) ima rješenje z za koje vrijedi:

$$\lim_{t\to\infty}\inf|z(t)|>o\ .$$

Dokaz. Na osnovu (4.28) zaključujemo da postoji $\omega\geqslant t_o$, tako da vrijedi:

$$f(1)\int_{\omega}^{\infty}\frac{1}{a(t)}\int_{t_o}^{t}p(s)dsdt<\frac{1}{2}\quad .$$

Označimo sa X skup monotono nerastućih funkcija x definisanih na $[\omega,\infty)$, za koje vrijedi:

$$\frac{1}{2}\leqslant x(t)\leqslant 1\quad ,\quad t\geqslant\omega,\ x\in X\ .$$

Definišimo na skupu X preslikavanje $\mathcal{F}$ sa:

$$(\mathcal{F}x)(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\int_{t}^{\infty}\frac{1}{a(s)}\int_{t_o}^{s}p(u)f(x(\tau(u)))duds & ,\ t\geqslant\omega_1\\ x(t) & ,\ t\in[\omega,\omega_1)\end{cases}$$

gdje je $\omega_1\geqslant\omega$ realan broj za koji vrijedi:

$$t\geqslant\omega_1\implies\tau(t)\geqslant\omega\ .$$

Očito je funkcija $\mathcal{F}x$ nerastuća i

$$(\mathcal{F}x)(t)\geqslant\frac{1}{2}\quad ,\quad t\geqslant\omega\ ,\ x\in X\ ,$$

što zajedno sa:

$$(\mathcal{F}x)(t)\leqslant\frac{1}{2}+f(1)\int_{t}^{\infty}\frac{1}{a(s)}\int_{t_o}^{s}p(u)duds\ \leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

implicira $\mathcal{F}(X)\subseteq X$.

Definišući uređenje u skupu X na isti način kao u dokazu Teorema 4.31. neposredno provjeravamo da su ispunjeni svi uslovi Teorema 2.5. pa zato postoji funkcija $z\in X$ za koju vrijedi:

$$Az=z$$

na $[\omega_1, \infty)$, što pokazuje da diferencijalna jednačina $(\tilde{P})$ sa $b(u)=1$, pa tim prije i odgovarajuća nejednačina (P) ima rješenje sa traženom osobinom.

Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi (i), (ii), (C_4), (C_6), $\tau(t)\leq t$ i

$$\int^{\infty} p(t)dt=\infty. \tag{4.29}$$

Tada je diferencijalna nejednačina (P) oscilatorna ako i samo ako je:

$$\int^{\infty} \frac{1}{a(t)} \int_{t_0}^{t} p(s)dsdt=\infty. \tag{4.30}$$

Dokaz. Dokaz dovoljnog dijela slijedi iz Teorema 4.11. uzimajući $g(t)=1$.

Dokaz potrebnog dijela slijedi neposredno iz Leme 4.33..

4.34. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi (i), (ii), (C_6), $\tau(t)\leq t$ i (4.29). Tada diferencijalna nejednačina (P) ima osobinu (A) ako i samo ako vrijedi (4.30).

Dokaz. Dokaz dovoljnog dijela slijedi iz Teorema 4.10. uzimajući $g(t)=1$.

Dokaz potrebnog dijela slijedi neposredno iz Leme 4.33..

4.35. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi (i), (v), (C_6) i (4.29). Tada (OP) ima osobinu (A) ako i samo ako vrijedi (4.30).

Dokaz. Dokaz dovoljnog dijela slijedi iz Teorema 4.27. uzimajući $g(t)=1$.

Dokaz potrebnog dijela slijedi neposredno iz Leme 4.33..

4.36. Očuvanje asimptotskog ponašanja. Rezultati dokazani u 4.32.-4.34. se mogu prikazati na ekvivalentan način, dajući tako detaljan odgovor na pitanje koje je u svojoj monografiji postavio Shevelo [65. str.126-127]. Naime, pošto potrebni i dovoljni uslovi za asimptotsko i oscilatorno ponašanje nejednačine (P) u Teoremima 4.32.-4.34. ne zavise od otklona argumenta τ, onda su oni istovremeno potrebni i dovoljni uslovi za odgovarajuće ponašanje nejednačine (OP). Prema tome iz Teorema 4.32.-4.34. respektivno dobivamo:

Teorem 4.32'. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P), gdje je $b(u)=1$, vrijede uslovi (i), (ii), (C_4), (C_5), $\tau(t)\leqslant t$ i (U_o).
Tada vrijedi:

(P) je oscilatorna $\Longleftrightarrow$ (OP) je oscilatorna.

Teorem 4.33'. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi (i), (ii), (C_4), (C_5), (4.29) i $\tau(t)\leqslant t$.
Tada vrijedi:

(P) je oscilatorna $\Longleftrightarrow$ (OP) je oscilatorna.

Teorem 4.34'. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi (i), (ii), (C_6), (4.29) i $\tau(t)\leqslant t$.
Tada vrijedi:

(P) ima osobinu (A) $\Longleftrightarrow$ (OP) ima osobinu (A).

Napomena. U sedmom dijelu disertacije će biti dokazan još jedan rezultat o očuvanju oscilatornog ponašanja rješenja nejednačine (N) pod uticajem otklona argumenta τ, koji će se razlikovati od upravo dokazanih rezultata u pogledu uslova koji ispunjava otklon τ.

GLAVA 5.

S L U Č A J $\quad 0 \leqslant \int_t^{\infty} p < \infty$

U ovom dijelu rada osnovni uslov za koji ćemo pretpostaviti da vrijedi je:

$$(U_1) \qquad I(t)=\int_t^{\infty} p(s)ds \in [o, \infty) \qquad , \qquad t \geqslant t_o$$

pri čemu I(t) nije eventualno jednako o.

5.1. Naši rezultati će biti zasnovani na slijedećim dvjema lemama.

Napomena. Na osnivu Leme 1.2. [13] uslov (U_1) implicira da je

$$\int_T^t p(s)ds \geqslant o \qquad \text{za svako} \quad t \geqslant T \geqslant t_o,$$

gdje je T dovoljno veliki broj.

Lema. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi (i), (ii), (U_1) i

$$(U_2) \qquad \int^{\infty} \frac{ds}{a(s)} = \infty .$$

Tada, izvod bilo kog rješenja y(t) diferencijalne nejednačine (P) je oscilatoran ili eventualno vrijedi:

$$yy' > o.$$

U drugom slučaju za funkciju

$$\widetilde{R}(t) = \frac{a(t)b(y(t))y'(t)}{f(y(\tau(t)))} \qquad \text{za velike } t$$

vrijedi:

$$(5.1) \qquad \lim_{t\to\infty} \int_{t_o}^{t} \frac{\widetilde{R}(s)\tau'(s)y'(\tau(s))f'(y(\tau(s)))}{f\,(y(\tau(s)))}\, ds \; < \infty$$

i eventualno:

$$(5.2)\qquad \tilde{R}(t) \geqslant I(t) + \int_t^{\infty} \tilde{R}(s)\frac{\tau'(s)y'(\tau(s))f'(y(\tau(s)))}{f(y(\tau(s)))}ds\ .$$

<u>Dokaz.</u> Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (P). Ako je y oscilatorna funkcija zaključak teorema je očigledan. Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija. Pretpostavimo da tvrdnja leme nije tačna, pa je eventualno $yy'<0$, tj.

$$y(t)y'(t)<0\qquad ,\qquad t\geqslant t_1\geqslant t_0\ .$$

Neka je $T_1=\max\{t_1,T\}$, gdje je T realan broj koji se pojavljuje u Napomeni 5.1.. Integrirajući diferencijalnu nejednačinu (P) od T_1 do $t\geqslant T_1$, a zatim koristeći parcijalnu integraciju dobivenog integrala dobivamo:

$$y(t)\Big[a(t)b(y(t))y'(t) - \int_{T_1}^{t}\tau'(s)y'(\tau(s))f'(y(\tau(s)))\int_{T_1}^{s}p(u)du\,ds + f(y(\tau(t)))\int_{T_1}^{t}p(s)ds - K\Big] \leqslant 0$$

gdje je stavljeno $K=a(T_1)b(y(T_1))y'(T_1)$. Koristeći uslove (i), (ii) i činjenicu da je $y(t)y'(t)<0$ dobivamo:

$$y(t)\big[a(t)b(y(t))y'(t) - K\big]\leqslant 0\quad ,\qquad t\geqslant T_1$$

što nakon integracije od T_1 do $t\geqslant T_1$ daje:

$$\int_{T_1}^{t} b(y(s))y'(s)ds \begin{cases} \leqslant K\displaystyle\int_{T_1}^{t}\frac{ds}{a(s)} & \text{za } y>0\ ,\quad t\geqslant T_1 \\ \geqslant K\displaystyle\int_{T_1}^{t}\frac{ds}{a(s)} & \text{za } y<0\ ,\quad t\geqslant T_1\ . \end{cases}$$

Prelazeći u ovim relacijama na granični proces $t\to\infty$ i koristeći uslov (U_2) dobivamo

$$\left|\int_{y(T_1)}^{c} b(u)du\right| = \infty$$

gdje je c realan broj takav da je $\lim_{t\to\infty} y(t)=c$, što je očigledna kontradikcija.

Prema tome, vrijedi eventualno $yy'>0$ tj. postoji realan broj $t_2 \geqslant t_0$ takav da je:

$$y(t)y'(t)>0 \qquad , \qquad t\geqslant t_2 .$$

Diferencirajući funkciju $\widetilde{R}(t)$ i koristeći relaciju (4.1) dobivamo:

$$(5.3) \qquad \widetilde{R}'(t)+\frac{a(t)b(y(t))y'(t)y'(\tau(t))\tau'(t)f'(y(\tau(t)))}{f^2(y(\tau(t)))}+p(t)\leqslant 0,$$

$t\geqslant t_2$

što nakon integracije od $t\geqslant t_2$ daje:

$$(5.4) \qquad \widetilde{R}(t)+\int_{t_2}^{t}\frac{a(s)b(y(s))y'(s)y'(\tau(s))\tau'(s)f'(y(\tau(s)))}{f^2(y(\tau(s)))}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{R}(t_2)-\int_{t_2}^{t}p(s)ds.$$

Koristeći uslov (U_1) i činjenicu da je $\widetilde{R}(t)>0$, $t\geqslant t_2$ i prelazeći na granični proces $t\to\infty$ dobivamo relaciju (5.1).

Prelazeći u relaciji (5.4) na granični proces $t\to\infty$ i koristeći činjenicu da je $\widetilde{R}(t)>0$, $t\geqslant t_2$ dobivamo relaciju (5.2).

5.2. Lema. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi Leme 5.1. i (C_5). Tada, bilo koje rješenje diferencijalne nejednačine (P) je oscilatorno ili eventualno vrijedi $yy'>0$ i u drugom slučaju za funkciju $\widetilde{R}(t)$ definisanu u Lemi 5.1. vrijede relacije (5.1) i (5.2).

Dokaz. Slijedi neposredno iz Leme 5.1. i Leme 4.9..

5.3. Lema. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi (i), (U_1), (U_2) i $f'(u)>0$ za $u\neq 0$.

Tada, bilo koje rješenje $y(t)$ diferencijalne nejednačine (OP) je oscilatorno ili eventualno vrijedi $yy' > o$ i u drugom slučaju za funkciju

$$R(t) = \frac{a(t)b(y(t))y'(t)}{f(y(t))}$$

vrijedi eventualno relacija:

$$(5.2') \qquad R(t) \geq I(t) + \int_t^\infty R^2(s)\frac{f'(y(s))}{a(s)b(y(s))}\,ds.$$

Dokaz. Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (OP). Ako je y oscilatorna funkcija zaključak teorema je očigledan. Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija i neka je $T \geq t_o$ realan broj takav da je $|y(t)| > o$ za $t \geq T$. Na osnovu Leme 5.1. zaključujemo da je eventualno $yy' > o$ ili je y' oscilatorna funkcija. U drugom slučaju označimo sa $\{t_n\}_{n=1}$ strogo rastući niz nula funkcije y' takav da je $t_1 \geq T$ i $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Stavljajući u relaciji (5.3) $\tau(t)=t$ i integrirajući je od t_n do t_{n+1} $(n=1,2, \ldots)$ dobivamo:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(s)ds \leq -\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{a(s)b(y(s))(y'(s))^2}{f^2(y(s))} f'(y(s))ds < \infty \qquad ,$$

$n=1,2, \ldots$.

Sumirajući ove relacije po n dobivamo:

$$\int_{t_n}^{\infty} p(s)ds < o \;, \qquad n=1,2,\ldots$$

tj. $\qquad I(t_n) < o \;, \qquad n=1,2,\ldots$

što je u kontradikciji sa uslovom (U_1).

Dakle, eventualno vrijedi $yy' > o$. Stavljajući sada u relaciji (5.2) $\tau(t)=t$ dobivamo (5.2').

5.4. <u>Uslovi sumabilnosti</u>. Sada ćemo uvesti neke uslove sumabilnosti koje ćemo koristiti za dobivanje veoma opštih dovoljnih uslova za oscilaciju diferencijalnih nejednačina (P) i (OP).

Posmatrajmo opšti integralni operator $P \mapsto KP$ definisan sa:

$$(5.5) \qquad (KP)(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)P(s)ds$$

gdje je $K(t,s)$ jezgro operatora. U ovom i slijedećem dijelu disertacije pretpostavljaćemo da je jezgro $K(t,s)$ neprekidna i nenegativna funkcija definisana na skupu:

$$\mathcal{D} = \{(s,t): t_0 \leq s \leq t,\ t_0 < t < \infty\}$$

tj. $K(t,s) \in C[\mathcal{D}, [0,\infty)]$.

Za jezgro $K(t,s)$ ili operator K reći ćemo da zadovoljava uslov:

(S_1) ako za svako $P \in C[[t_0,\infty),[0,\infty)]$ sa $\liminf_{t\to\infty} P(t) = 0$ vrijedi $\lim_{t\to\infty}(KP)(t) < \infty$

(S_2) ako za svako $P \in (C \cap L^1)[[t_0,\infty),\ [0,\infty)]$ vrijedi $\lim_{t\to\infty}(KP)(t) < \infty$

(S_3) ako za svako $P \in C[[t_0,\infty),[0,\infty)]$ sa $\frac{1}{q(t)}\int_{t_0}^{t} P(s)ds \to k,\ t\to\infty$ vrijedi $\lim_{t\to\infty}(KP)(t) < \infty$.

Primijetimo da je uslov (S_2) veoma pogodan za primjene i da je ispunjen čim je jezgro $K(t,s)$ ograničeno po svojim promjenljivim na domenu $\mathcal{D}$.

5.5. <u>Teorem</u>. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi (i),(ii), (C_5), (U_1), $\tau(t) \geq t$ za $t \geq t_0$ i

(U_3) $\qquad \lim_{t\to\infty}(KI)(t) = \infty$.

Tada je izvod bilo kog rješenja $y(t)$ diferencijalne nejednačine (P) oscilatoran ako je ispunjena bilo koja od slijedeće tri kombinacije uslova:

(a) (S_1) i (U_2)

ili

(b) (S_2) i $a' \leqslant o$ eventualno

ili

(c) (S_3) , (U_2) i $a' \geqslant o$ eventualno.

Dokaz. Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (P). Ako je y oscilatorna funkcija tvrdnja teorema je očigledna. Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija i da tvrdnja teorema nije tačna. Na osnovu Leme 5.1. zaključujemo da je tada eventualno $yy' > o$ što na osnovu uslova (i), (ii) i relacije (5.2) implicira eventualno:

$$\tilde{R}(t) \geqslant I(t).$$

Zbog toga je:

$$\lim_{t\to\infty}(K\tilde{R})(t) \geqslant \lim_{t\to\infty}(KI)(t)$$

što na osnovu uslova (U_3) implicira:

$$\lim_{t\to\infty}(K\tilde{R})(t) = \infty .$$

Pretpostavimo najprije da vrijede uslovi (a). Tada je zbog uslova (S_1), $\liminf_{t\to\infty}\tilde{R}(t) > o$ što znači da vrijedi eventualno

$$\tilde{R} \geqslant A > o$$

tj.

$$\tilde{R}(t) \geqslant A > o \qquad , \qquad t \geqslant t_3 \geqslant t_o .$$

Koristeći uslov $\tau(t) \geqslant t$ i integrirajući poslednju relaciju dobivamo:

$$\int_{t_3}^{t} \frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(s))}ds \geqslant \int_{t_3}^{t}\frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))}ds \geqslant A\int_{t_3}^{t}\frac{ds}{a(s)}$$

što zbog uslova (U_2) daje:

$$(5.6) \qquad \int_{t_3}^{\infty} \frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(s))}ds = \infty .$$

S druge strane koristeći uslov (C_5) dobivamo:

$$\int_{t_3}^{t} \frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(s))}ds = \int_{y(t_3)}^{y(t)} \frac{b(u)}{f(u)} du \leqslant \int_{y(t_3)}^{\pm\infty} \frac{b(u)}{f(u)} du < \infty$$

što je u kontradikciji sa (5.6).

Pretpostavimo sada da vrijede uslovi (b). Zbog uslova (S_2) dobivamo odmah

$$(5.7) \qquad \int_{t_o}^{\infty} \widetilde{R}(s)ds = \infty .$$

S druge strane koristeći $\tau(t) \geqslant t$, drugi Bonnet-ov teorem i uslov (C_5) dobivamo:

$$\int_{t_o}^{t} \widetilde{R}(s)ds = \int_{t_o}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))}ds \leqslant \int_{t_o}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(s))}ds =$$

$$= a(t_o)\int_{y(t_o)}^{y(\tilde{t})} \frac{b(u)}{f(u)} du \leqslant a(t_o)\int_{y(t_o)}^{\pm\infty} \frac{b(u)}{f(u)} du < \infty$$

gdje je $\tilde{t} \in [t_o, t]$, što je u kontradikciji sa (5.7).

Pretpostavimo na kraju da vrijede uslovi (c). Zbog uslova (S_3) dobivamo odmah

$$(5.8) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{a(t)} \int_{t_o}^{t} \widetilde{R}(s)ds = \infty .$$

S druge strane koristeći $\tau(t) \geqslant t$, drugi Bonnet-ov teorem i uslov (C_5) dobivamo:

$$\frac{1}{a(t)}\int_{t_o}^{t} \widetilde{R}(s)ds = \frac{1}{a(t)}\int_{t_o}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(\tau(s)))}ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a(t)}\int_{t_o}^{t} \frac{a(s)b(y(s))y'(s)}{f(y(s))}ds = \int_{\tilde{t}}^{t} \frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(s))}ds =$$

$$= \int_{y(\tilde{t})}^{y(t)} \frac{b(u)}{f(u)}du \leqslant \int_{y(\tilde{t})}^{\pm\infty} \frac{b(u)}{f(u)}du < \infty$$

gdje je $\tilde{t} \in [t_o, t]$ što je u kontradikciji sa (5.8).

5.6. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) vrijede uslovi Teorema 5.5. i (C_5). Tada je diferencijalna nejednačina (P) oscilatorna.

Dokaz. Slijedi neposredno iz Teorema 5.5. i Leme 5.2..

5.7. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi (i), (C_5), (U_1), (U_3) i

(viii) $\quad f'(u) > o \quad$ za $\quad u \neq o$.

Tada je diferencijalna nejednačina (OP) os-cilatorna ako je ispunjena bilo koja od tri kombinacije uslova (a) ili (b) ili (c).

Dokaz. Neka je y proizvoljno rješenje nejednačine (OP). Ako je y oscilatorna funkcija, tvrdnja teorema je očigledna. Pretpostavimo zato da je y neoscilatorna funkcija i da tvrdnja teorema nije tačna. Na osnovu Leme 5.3. zaključujemo da je tada eventualno $yy' > o$ i da vrijedi eventualno relacija (5.2') što odmah implicira eventualno:

$$R(t) \geqslant I(t) .$$

Dalji tok dokaza je sličan dokazu Teorema 5.5..

Posljedica. U specijalnom slučaju kad je $b(u)=1$ i $K(t,s)=1$, Teorem 5.7. postaje prvi dio Teorema 1. Kartsatos-a i Onose-a [30].

Primjedba. Teoremi 5.5-5.7. pokazuju da i u slučaju kad vrijedi uslov (U_1) otklon argumenta τ i uslov (C_6) na isti način utiču na oscilatorno ponašanje rješenja diferencijalne nejednačine (P).

5.8. Primjedba. Neka je $n \geqslant 1$ i neka su date funkcije $f_1,\dots,f_n \in C\left[[t_o,\infty),(o,\infty)\right]$. Posmatrajmo slijedeće jezgro:

$$K(t,s) = \frac{f_1(s)}{n(t)} \int_{s \leqslant s_2 \leqslant \dots \leqslant s_n \leqslant t} \cdot \cdot \cdot \int f_2(s_2) \dots f(s_n) ds_2 \dots ds_n$$

gdje je:

$$n(t) = \int_{t_o \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \dots \leqslant s_n \leqslant t} \cdot \cdot \cdot \int f_1(s_1) \dots f_n(s_n) ds_1 \dots ds_n .$$

Uzimajući da funkcije f_i zadovoljavaju podesne uslove možemo dobiti korisne i interesantne dovoljne uslove za oscilatornost diferencijalnih nejednačina (P) i (OP) izražene preko poznatih metoda sumabilnosti uvedenih u 2.7..

Posljedica. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P) (respektivno (OP)) vrijede uslovi (i), (ii), (C_5), (U_1), $\tau(t) \geqslant t$ i $a'(t) \leqslant o$ za $t \geqslant t_o$ (respektivno (i), (C_5), (U_1) i $a'(t) \leqslant o$ za $t \geqslant t_o$). Ako za neki prirodni broj $n \geqslant o$ vrijedi:

$$(5.8) \qquad \int I(t) = \int\int_t^\infty p(s)ds = \infty \qquad (C,n)$$

tada, izvod bilo kog rješenja $y(t)$ diferencijalne nejednačine (P) (respektivno, bilo koje rješenje $y(t)$ diferencijalne nejednačine (OP)) je oscilatorna funkcija.

Dokaz. Slijedi neposredno iz Primjedbe 5.8. i Teorema 5.5. (respektivno Teorema 5.7.) uzimajući da je

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n = 1 .$$

Napomena. Tvrdnja Posljedice 5.8. vrijedi ako se uslov (5.8) zamijeni uslovom oblika

$$(5.9) \qquad \int I(t) = \int\int_t^\infty p(s)ds = \infty \qquad (H,n)$$

što slijedi neposredno iz Primjedbe 5.8. i Teorema 5.5. (respektivno Teorema 5.7.) uzimajući da je

$$f_1=1 \quad i \quad f_2=f_3=\dots=f_n=\frac{1}{t}.$$

5.9. Uslov. U daljem izlaganju ovog dijela disertacije uslov:

(U_4) $f'(u(t))\geqslant \mu a(t)b(u(t))$ za svaku neoscilatornu funkciju $u(t)$, $t\geqslant t_o$, gdje je $\mu>o$

biće veoma važan uslov za dobivanje daljih oscilatornih rezultata. U najviše proučavanom slučaju $a(t)=1$ i $b(u)=1$ on je impliciran dobro poznatim uslovom (v), koji vrijedi npr. u linearnom slučaju. Prema tome svi rezultati koje ćemo u daljem dobiti vrijede i u linearnom slučaju i predstavljaju proširenja i/ili uopćenja nekih klasičnih linearnih oscilatornih rezultata.

5.1o. Lema. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi (i), (U_1), (U_2) i (U_4). Tada, ako je ta nejednačina neoscilatorna, niz funkcija $\{w_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ definisan sa:

$$w_1(t)=I(t)$$

$$w_{k+1}(t)=I(t)+\mu\int_t^{\infty}I(s)w_k(s)ds \quad , \qquad t\geqslant t_o, \quad k=1,2,\dots$$

ima slijedeće osobine:

1.) $w_k(t)\in C^1\left[[t_o,\infty),(o,\infty)\right]$

2.) $w_k(t)\leqslant w_{k+1}(t)$, $t\geqslant \bar{t}\geqslant t_o$, $k=1,2,\dots$

3.) $\lim\limits_{k\to\infty} w_k(t)=w_o(t)$ na svakom kompaktnom podintervalu od $[t_o,\infty)$

4.) $w_o(t)=I(t)+\mu\int_t^{\infty}I(s)w_o(s)ds$, $t\geqslant\bar{t}\geqslant t_o$.

Dokaz. Neka je y proizvoljno neoscilatorno rješenje. Na osnovu Leme 5.3. zaključujemo da vrijedi eventualno relacija (5.2').

... je $t_4 \geq t_0$ realan broj takav da ta relacija vrijedi za $t \geq t_4$.
Na osnovu uslova (U_4) relacija (5.2') postaje:

$$(5.2'') \qquad R(t) \geq I(t)+\mu\int_t^{\infty} R^2(s)ds \;, \qquad t \geq t_4$$

što odmah implicira:

$$R(t) \geq I(t) \;, \qquad t \geq t_4$$

$$(5.10) \qquad \int_t^{\infty} I(s)R(s)ds \leq \int_t^{\infty} R^2(s)ds \;, \qquad t \geq t_4$$

a koristeći (5.2''):

$$(5.11) \qquad R(t) \geq I(t)+\mu\int_t^{\infty} I(s)R(s)ds \;, \qquad t \geq t_4 .$$

Dakle, $R(t) \geq w_1(t)$, i $R(t) \geq w_2(t)$, $t \geq t_4$. Na osnovu uslova (U_1) dobivamo $w_1(t) \leq w_2(t)$. Neposrednom primjenom indukcije lako se provjerava da niz $\{w_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ zadovoljava uslove 1.) i 2.) leme, i da je $w_k(t) \leq R(t)$ $k=1,2,\ldots$ $t \geq t_4$. Prema tome niz funkcija $\{w_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ je uniformno ograničen na svakom kompaktnom podskupu intervala $[t_0, \infty)$.
Uzmimo proizvoljno $\delta > 0$ i tačke t_1, t_2 takve da je $|t_1 - t_2| < \delta$. Tada postoji $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ takav da vrijedi :

$$\left| w_{k+1}(t_2) - w_{k+1}(t_1) \right| \leq \left| I(t_2) - I(t_1) \right| + \int_{t_1}^{t_2} I(s) w_k(s) ds \leq$$
$$\left| \int_{t_1}^{t_2} p(s)ds \right| + \left| \int_{t_1}^{t_2} I(s)R(s)ds \right|$$

što znači da je $\{w_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ niz podjednako neprekidnih funkcija. Koristeći Arzela-Ascoli-jev Teorem i činjenicu da je niz $\{w_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ monoton, dobivamo da vrijedi:

$$\lim_{t \to \infty} w_k(t) = w_0(t)$$

uniformno na svakom kompaktnom podskupu intervala $[t_0, \infty)$.
Kako je $w_k(t) \leq R(t)$ dobivamo $w_0(t) \leq R(t)$, a zbog dokazane osobine

2.) i uslova (U_1) imamo:

$$I(t)w_k(t) \leqslant I(t)w_{k+1}(t)$$

što na osnovu Teorema monotone konvergencije daje:

$$\int_t^{\infty} I(s)w_o(s)ds = \lim_{k\to\infty}\int_t^{\infty} I(s)w_k(s)ds \quad , \ t \geqslant t_4 \ .$$

Prelazeći sada na granični proces $k\to\infty$ u relaciji:

$$w_{k+1}(t)=I(t)+\mu\int_t^{\infty} I(s)w_k(s)ds$$

dobivamo traženu relaciju 4.).

Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi (i), (U_1), (U_2), (U_4) i

(5.12) $$\int^{\infty} p(s)\exp(\mu\int_{t_o}^{s} I(u)du)ds = \infty$$

ili

(5.13) $$\int^{\infty} (I(s))^2\exp(\mu\int_{t_o}^{s} I(u)du)ds = \infty \ .$$

Tada je diferencijalna nejednačina (OP) oscilatorna.

Dokaz.
Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije tačna i neka je y neoscilatorno rješenje nejednačine (OP). Tada na osnovu Leme 5.lo. vrijedi relacija 4.) čijim diferenciranjem dobivamo linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda:

$$w_o'(t) + \mu I(t)w_o(t) + p(t)=o \ .$$

Rješenje ove jednačine je dato sa:

$$w_o(t)=\exp(-\mu\int_{t_o}^{s} I(s)ds)\left[w_o(\bar{t})-\int_{\bar{t}}^{t} p(s)\exp(\mu\int_{\bar{t}}^{s} I(u)du)ds\right] \ .$$

Odavde odmah dobivamo:

$$\int_{\bar{t}}^{\infty} p(s)\exp(\mu\int_{\bar{t}}^{s} I(u)du)ds \leqslant w_o(\bar{t})$$

što je u kontradikciji sa uslovom (5.12).

Na sličan način diferencirajući funkciju

$$z(t) = \int_t^{\infty} I(s)w_o(s)ds$$

dobivamo relaciju:

$$\int_{\bar{t}}^{\infty}(I(s))^2\exp\left(\mu\int_{\bar{t}}^{s}I(u)du\right)ds<\infty$$

koje je u kontradikciji sa uslovom (5.13).

5.11. Teorem. Pretpostavimo da sa diferencijalnu nejednačinu (CP) vrijedi uslov (C_5) i uslovi Teorema 5.1o. pri čemu su (5.12) i (5.13) zamijenjeni respektivno sa:

(5.12′) $\quad\displaystyle\int^{\infty}p(s)\exp\left(\mu\int_{t_0}^{s}up(u)du\right)ds=\infty$

(5.13′) $\quad\displaystyle\int^{\infty}(I(s))^2\exp\left(\mu\int_{t_0}^{s}up(u)du\right)ds=\infty$.

Tada je diferencijalna nejednačina (CP) oscilatorna.

Dokaz. Pokažimo da uslovi (5.12′) i (5.13′) impliciraju uslove (5.12) i (5.13) respektivno. Zaista, koristeći parcijalnu integraciju dobivamo:

$$\int_{\bar{t}}^{t}I(s)ds=tI(t)-\bar{t}I(\bar{t})+\int_{\bar{t}}^{t}sp(s)ds\geqslant\int_{\bar{t}}^{t}sp(s)ds-\bar{t}I(\bar{t})$$

što daje:

$$\exp\left(\mu\int_{\bar{t}}^{t}I(s)ds\right)\geqslant\exp(-\mu\bar{t}I(\bar{t}))\exp\left(\mu\int_{\bar{t}}^{t}sp(s)ds\right)$$

odakle lako dobivamo željeni zaključak.

Posljedica. U specijalnom slučaju kad je $a(t)=1, b(u)=1$ i kada vrijedi uslov (C_5) i uslovi Leme 5.1o. dobivamo:

(5.14) $\quad\displaystyle\limsup_{t\to\infty}tw_k(t)\leqslant\frac{1}{\mu}\quad,\ k=1,2,\dots$.

Dokaz. Neka je y proizvoljno neoscilatorno rješenje. Na osnovu Leme 2.8. zaključujemo da eventualno vrijedi $y'y''<0$ i $yy''<0$. Neka je $t_5\geqslant t_0$ realan broj takav da vrijedi:

$$y(t)y''(t)<0\ ,\quad y'(t)y''(t)<0\ ,\quad t\geqslant t_5\ .$$

Tada je:

$$\frac{f(y(t))}{ty'(t)}=\frac{f(y(t_5))+\int_{t_5}^{t}f'(y(s))y'(s)ds}{ty'(t)}>\mu\frac{(t-t_5)}{t}\qquad,\ t\geqslant t_5$$

što daje:
$$\frac{ty'(t)}{f(y(t))}=tR(t)\leqslant\frac{t}{\mu(t-t_5)}\qquad,\ t\geqslant t_5\ .$$

Dakle,

$$\limsup_{t\to\infty}tR(t)\leqslant\frac{1}{\mu}$$

što zbog $w_1(t) \leqslant I(t)$ odmah implicira (5.14).

<u>Primjedba</u>. U linearnom slučaju $f(u)=u$, možemo uzeti $\mu=1$ i Posljedica 5.11., kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$, daje rezultat Lovelady-a [42]. U tom slučaju uslov (5.14) za $k=1$ takođe daje klasični neoscilacioni rezultat Hille-a [24] :

$$\limsup_{t\to\infty} t\int_t^\infty p(s)ds \leqslant 1$$

dok za $k=2,3,\ldots$ daje pojačanje tog rezultata:

npr. $$\limsup_{t\to\infty} t\Big(\int_t^\infty p(s)ds + \int_t^\infty \Big(\int_s^\infty p(u)du\Big)^2 ds\Big) \leqslant 1 \quad , \quad k=2 .$$

U ovom linearnom slučaju (za $a(t)=1$) dovoljan uslov za oscilatornost nejednačine (OP) je $\int^\infty p = \infty$. Slijedeći primjer pokazuje da (5.12) ima širu primjenu od tog uslova, tj. da postoje situacije u kojima (5.12) može biti primjenjen dok (4.29) ne daje rezultat.

<u>Primjer.</u> Diferencijalna nejednačina

$$y(t)\Big[y''(t) + \frac{A}{t^2}y(t)\Big] \leqslant 0 \quad , \quad t \geqslant 1, \ A \geqslant 1,$$

je oscilatorna jer je

$$\int_1^\infty p(s)\exp\Big(\int_1^s I(u)du\Big)ds = \int_1^\infty \frac{A}{s^2}s^A ds < \infty$$

dok uslov (4.29) nije zadovoljen.

5.12. <u>Iterirani integrali</u>. Definišimo niz funkcija $\{\widetilde{I}_k(t)\}_{k=0}^\infty$ sa:

$$\widetilde{I}_0(t) = 0 \qquad , t \geqslant t_0$$

$$\widetilde{I}_k(t) = \int_t^\infty (I(s) + \mu\widetilde{I}_{k-1}(s))^2 ds \quad , t \geqslant t_0, \ k=1,2,\ldots .$$

<u>Teorem</u>. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi (i), (U_1), (U_2), (U_4) i za neko $k=1,2,\ldots$

(5.15) $$\widetilde{I}_k(\alpha) = \infty \qquad , \ \alpha \geqslant t_0 .$$

Tada je diferencijalna nejednačina (OP) oscilatorna.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije tačna. Neka je y neoscilatorno rješenje nejednačine (OP). Tada, na osnovu Leme 5.10.

zaključujemo da funkcija $R(t)$ ispunjava (5.11) što zajedno sa $R(t)\geqslant I(t)$ implicira eventualno:

$$R(t)\geqslant I(t)+\mu\int_t^{\infty} I^2(s)ds = I(t)+\mu\widetilde{I}_1(t) \ .$$

Koristeći (5.2'') i ovu relaciju odmah dobivamo:

$$R(t)\geqslant I(t)+\mu\int_t^{\infty}(I(s)+\mu\widetilde{I}_1(s))^2ds=I(t)+\mu\widetilde{I}_2(t).$$

Nastavljajući ovaj proces dobivamo za dovoljno velike t:

$$(5.16) \qquad R(t)\geqslant I(t)+\mu\widetilde{I}_k(t) \qquad , \qquad k=1,2,\ldots$$

što za dovoljno velike t, daje:

$$\int_t^{\infty} R^2(s)ds\geqslant \widetilde{I}_k(t) \qquad , \qquad k=1,2,\ldots$$

i zbog $\int_t^{\infty} R^2(s)ds<\infty$

$$\widetilde{I}_k(t)<\infty \qquad , \qquad k=1,2,\ldots \quad \text{za velike } t$$

što je u kontradikciji sa (5.15).

Slijedeći primjer pokazuje da se Teorem 5.12. može primijeniti u situacijama u kojima mnogi poznati oscilacioni kriteriji ne daju rezultate.

<u>Primjer</u>. Diferencijalna nejednačina

$$y(t)\left[y''(t)+\frac{m(\alpha+\beta\sin t)-t\beta\cos t}{t^{m+1}}f(y(t))\right]\leqslant 0, \qquad t>0$$

gdje je $\alpha>\beta>0$, $m\in(0,\infty)$ i funkcija f zadovoljava uslove Teorema 5.12., je oscilatorna za $m\in(0,1)$.

Zaista,

$$I(t)=\int_t^{\infty}p(s)ds=\frac{\alpha+\beta\sin t}{t^m}\geqslant 0 \qquad , \qquad t>0$$

i

$$\widetilde{I}_1(t)=\int_t^{\infty}(I(s))^2ds=\int_t^{\infty}\frac{(\alpha+\beta\sin s)^2}{s^{2m}}ds\geqslant$$

$$\geqslant(\alpha-\beta)^2\int_t^{\infty}\frac{ds}{s^{2m}} = \begin{cases}\infty & , \ m\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{(\alpha-\beta)^2}{2m-1}t^{1-2m} & , \ m>\frac{1}{2}\end{cases} .$$

Na sličan način se dokazuje:

$$\tilde{I}_1(t) \leq \frac{(\alpha+\beta)^2}{2m-1} t^{1-2m}, \qquad m > \frac{1}{2}$$

što znači da je $\tilde{I}_1(t) = \infty$ za $m \leq \frac{1}{2}$ i $\tilde{I}_1(t) < \infty$ za $m > \frac{1}{2}$,

pa na osnovu Teorema 5.12. zaključujemo da je posmatrana nejednačina oscilatorna za $m \in (o, \frac{1}{2}]$.

Ako je $m > \frac{1}{2}$ tada lako dobivamo:

$$\mu \frac{(\alpha-\beta)^2}{2m-1} t^{1-2m} \leq I(t) + \mu\tilde{I}_1(t) \leq I(t) + \mu\frac{(\alpha+\beta)^2}{2m-1} t^{1-2m}$$

pa je zato

$$\tilde{I}_2(t) \leq 2\left[\int_t^\infty (I(s))^2 ds + \frac{\mu(\alpha+\beta)^2}{(2m-1)^2 (4m-3)} t^{3-4m}\right], \quad m > \frac{3}{4}$$

$$\tilde{I}_2(t) = \int_t^\infty (I(s) + \tilde{I}_1(s))^2 ds = \infty, \quad m \leq \frac{3}{4}.$$

Na osnovu Teorema 5.12. zaključujemo da je posmatrana nejednačina oscilatorna ako je $m \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. Nastavljajući ovaj postupak dobivamo niz intervala $L_k = (\frac{2^k-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}]$ sa slijedećim osobinama:

ako je $m \in L_k$ $(k=o,1,\ldots)$ onda je $\tilde{I}_p(t) < \infty$ $(p=1,2,\ldots,k)$, i $\tilde{I}_{k+1}(t) = \infty$.

Na osnovu Teorema 5.12. zaključujemo da je posmatrana nejednačina oscilatorna čim je $m \in L_k$ za neko $k=o,1,\ldots$, odnosno čim je $m \in \bigcup_{k=o}^{\infty} L_k = (o,1)$.

<u>Posljedica</u>. U specijalnom slučaju kad je $a(t)=1$, $b(u)=1$, kada je uslov (U_4) zamijenjen uslovom (v) i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ Teorem 5.12.

postaje Teorem 1. Kamenev-a [28].

5.13. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi (i),(U_1),(U_2),(U_4) i da je funkcija a(t) ograničena. Tada ako vrijedi za neko k=1,2,...

(U_5) $\int^{\infty}(I(s)+\mu\tilde{I}_k(s))ds = \infty$

diferencijalna nejednačina (OP) je oscilatorna, čim vrijedi (C_5).

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije tačna. Neka je y neoscilatorno rješenje nejednačine (OP). Tada na isti način kao u dokazu Teorema 5.12. zaključujemo da vrijedi relacija (5.16) što na osnovu uslova (U_5) implicira:

(5.17) $\int^{\infty} R(s)ds = \infty$.

S druge strane koristeći činjenicu da je $R(s)\geq o$, ograničenost funkcije a(t) i uslov (C_5) dobivamo:

$$\int^{t} R(s)ds=\int^{t} a(s)\frac{b(y(s))y'(s)}{f(y(s))}ds \leq C\int^{y(t)}\frac{b(u)}{f(u)}du \leq C\int^{\pm\infty}\frac{b(u)}{f(u)}du$$

gdje je $C>o$ konstanta takva da vrijedi $a(t)\leq C, t\geq t_o$, što je u kontradikciji sa (5.17).

Primjer. Diferencijalna nejednačina posmatrana u Primjeru 5.12. može se takođe ispitivati i korištenjem oscilacionog kriterija datog u Teoremu 5.13.. Naime, kao što smo već vidjeli u Primjeru 5.12. vrijedi:

$$\tilde{I}_1(t)\begin{cases} =\infty & m\in(o,\frac{1}{2}] \\ <\infty & m>\frac{1}{2} \end{cases} .$$

Koristeći ovu činjenicu dobivamo, na sličan način, kao u Primjeru 5.12.

$$\int_t^{\infty}(I(s)+\mu\tilde{I}_1(s))ds \begin{cases} =\infty & , m\ (\frac{1}{2},1] \\ <\infty & , m>1 \end{cases} .$$

Primjenjujući sada Teorem 5.13. zaključujemo da je posmatrana nejednačina oscilatorna čim je:

$$m\in(o,\tfrac{1}{2}]\cup(\tfrac{1}{2},1] = (o,1] .$$

Posljedica. U specijalnom slučaju kad je $a(t)=1, b(u)=1$, kada je uslov (U_4) zamijenjen uslovom (v) i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ Teorem 5.13. postaje Teorem 2. Kamenev-a [28] .

5.14. Karakterizacija. Uslov (U_5) ima posebno značenje u slučaju kad je $k=1$, jer tada postaje potreban i dovoljan uslov za oscilaciju nejednačine (OP).

Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi $a(t)=1, b(u)=1$, (i), (v), (U_1), (U_2) i (C_5). Tada je diferencijalna nejednačina (OP) oscilatorna ako i samo ako uslov (U_5) vrijedi za $k=1$.

Dokaz. Slijedi neposredno iz Teorema 5.13. i Teorema 2.6., ako se uzme u obzir da je (2.1o) ekvivalentan sa uslovom:

$$\int^{\infty}(I(s) + \mu\int_s^{\infty}(I(u))^2du)ds < \infty \quad , \mu>0.$$

Primjedba. Koristeći transformaciju 2.1., možemo otkloniti restrikcije $a(t)=1$ i $b(u)=1$ u Teoremu 5.14.. U tom slučaju uslov (U_5) za $k=1$ postaje:

$$(U_5') \qquad \int^{\infty}\frac{I^{\wedge}(s) + \mu\int_s^{\infty}(I^{\wedge}(u))^2)du}{a(s)}ds = \infty$$

gdje je $I^{\wedge}(s) = \int_s^{\infty} a(u)p(u)du$.

Pošto je rezultat Butler-a (Teorem 2.6.) jedini poznati potreban i dovoljan uslov za oscilaciju jednačine $(\widetilde{OP})$, u slučaju kad je funkcija p promjenljivog znaka, to je i Teorem 5.14. jedini poznati potreban i dovoljan uslov za oscilaciju odgovarajuće nejednačine (OP) sa koeficijentom p promjenljivog znaka.

5.15. Pretpostavljajući da uslov (U_1) vrijedi uvedimo slijedeći niz integrala $\{I_n(t)\}_{n=o}^{\infty}$ bez obzira da li su konačni ili ne:

$$I_o(t) = I(t) = \int_t^{\infty} p(s)ds \qquad\qquad Q_{I_{-1}}(s,t)=1$$

$$I_1(t) = \int_t^{\infty}(I_o(s))^2 Q_{I_o}(s,t)ds \qquad\qquad Q_{I_o}(s,t)=exp(2\int_t^s I(u)du$$

$$I_n(t) = \int_t^{\infty} (I_{n-1}(s))^2 Q_{I_{n-1}}(s,t)ds$$

$$Q_{I_{n-1}}(s,t) = \exp(2\int_t^s (I_o(u) + I_1(u) + \dots + I_{n-1}(u))du) .$$

Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu

(OPL) $\quad y(t)\left[y''(t) + p(t)y(t)\right] \leq o \quad , \quad t \geq t_o$

vrijede uslovi (U_1) i za neko $k=1,2,\dots$

(U_6) $\quad \int^{\infty} I_{k-1}(t)dt < \infty$ i $\int_t^{\infty}(I_{k-1}(s))^2 Q_{I_{k-2}}(s,t)ds \leq \frac{1}{4} I_{k-1}(t) \quad , \quad t \geq t_o .$

Tada je nejednačina (OPL) neoscilatorna.

Dokaz. Posmatrajmo integralnu jednačinu:

(5.18) $\quad x(t) = I_{k-1}(t) + \int_t^{\infty} x^2(s) Q_{I_{k-2}}(s,t)ds \quad , t \geq t_o, \ k=2,3,\dots .$

Neka je X skup svih nerastućih funkcija definisanih na $[t_o, \infty)$ sa osobinom:

$$I_{k-1}(t) \leq x(t) \leq 2I_{k-1}(t) \quad , x \in X \ , \ t \geq t_o .$$

Uređenje u skupu X uvedimo na uobičajen način:

$$x_1 \leq x_2 \Longleftrightarrow (\forall t \geq t_o) \ x_1(t) \leq x_2(t).$$

Definišimo na X preslikavanje $\mathcal{F}$ sa:

$$(\mathcal{F}x)(t) = I_{k-1}(t) + \int_t^{\infty} x^2(s) Q_{I_{k-2}}(s,t)ds \quad , \ t \geq t_o .$$

Lako se pokazuje da su svi uslovi Teorema 2.5. zadovoljeni pa zato upravo definisano preslikavanje ima fiksnu tačku y, što znači da i integralna jednačina (5.18) ima rješenje.

Posmatrajmo funkciju

$$u(t) = y(t) + \sum_{n=o}^{k-2} I_n(t) \quad , \ t \geq t_o$$

i dokažimo da vrijedi:

(5.19) $\quad u'(t) + u^2(t) + p(t) = o \ , \ t \geq t_o .$

Neposredno se provjerava da vrijedi:

(5.2o) $\quad I_k'(t) = -(I_{k-1}(t))^2 - 2I_k(t) \sum_{n=o}^{k-1} I_n(t) .$

Koristeći relaciju (5.2o) dobivamo za $t \geq t_o$:

$$u'(t) + u^2(t) + p(t) = y'(t) + \sum_{n=0}^{k-2} I_n'(t) + u^2(t) + p(t) =$$

$$= -y^2(t) - (I_{k-2}(t))^2 - 2y(t)\sum_{n=0}^{k-2} I_n(t) - p(t) - (I(t))^2 -$$

$$- 2I(t)I_1(t) - (I_1(t))^2 - 2I_2(t)(I(t) + I_1(t)) - \dots -$$

$$- \dots - (I_{k-3}(t))^2 - 2I_{k-2}(t)\sum_{n=0}^{k-3} I_n(t) + u^2(t) + p(t) =$$

$$= (u(t) - y(t))(u(t) + y(t)) - 2y(t)\sum_{n=0}^{k-2} I_n(t) - \Big(\sum_{n=0}^{k-2} I_n(t)\Big)^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{k-2} I_n(t)\Big(2y(t) + \sum_{n=0}^{k-2} I_n(t)\Big) - 2y(t)\sum_{n=0}^{k-2} I_n(t) - \Big(\sum_{n=0}^{k-2} I_n(t)\Big)^2 = 0.$$

Dakle, relacija (5.19) vrijedi. Uvodeći funkciju z sa:

$$z(t) = \exp\Big(\int_0^t u(s)ds\Big)$$

neposredno provjeravamo da vrijedi:

$$z''(t) + p(t)z(t) = 0 \quad , \; t \geqslant t_0,$$

što znači da z zadovoljava i nejednačinu (OPL).

<u>Primjedba</u>. Teorem 5.15. je dokazan za $k=2,3,\dots$ jer, kao što je pokazano u [75] rezultat koji se dobija za $k=1$ je specijalan slučaj onoga za $k=2$. Može se lako pokazati da je i općenito rezultat koji se dobija za bilo koje k specijalan slučaj onoga za $k+1$.

<u>Posljedica</u>. U specijalnom slučaju kada je $k=1$ i kada umjesto nejednačine (OPL) posmatramo odgovarajuću jednačinu Teorem 5.15. sa Primjedbom 5.15. postaje Teorem 2. Opial-a [63], dok u slučaju kada je $k=2$ dobivamo Teorem 1.1. Willett-a [75].

<u>Napomena</u>. Teorem 5.15. se može proširiti na klasu nelinearnih diferencijalnih nejednačina oblika (OP) uz dodatni uslov (U_2) i uz zamjenu uslova (U_4) uslovom:

(U_4') $\quad f'(u(t))$ [illegible] $a(t)b(u(t))$ $\quad$ za svaku neoscilatornu funkciju $u(t)$, $t \geqslant t_0$.

5.16. <u>Teorem</u>. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OPL) vrijede uslovi (i), (U_1) i za neko $k=1,2,\dots$

$$(5.20)\quad \int_{t}^{\infty}(I_{k-1}(s))^2 Q_{I_{k-2}}(s,t)ds \geq (\tfrac{1}{4}+\varepsilon)I_{k-1}(t) \quad , t \geq t_o$$

gdje je $\varepsilon > o$ konstanta. Tada je diferencijalna nejednačina (OPL) oscilatorna.

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije tačna. Neka je y neoscilatorno rješenje nejednačine (OPL). Na osnovu Leme 5.3. zaključujemo da vrijedi relacija (5.2''). Uvedimo funkciju Z(s) relacijom

$$Z(s) = \int_{s}^{\infty} R^2(u)du \quad , s \geq t_o$$

i dokažimo da za funkciju W definisanu relacijom (5.22) niže vrij

$$(5.21)\quad W(t) \geq I_{k-1}(t) + \int_{t}^{\infty} W^2(s)Q_{I_{k-2}}(s,t)ds$$

za ono k za koje vrijedi uslov (U_7).

Dokaz ćemo izvesti metodom matematičke indukcije. Za k=1 tvrdnja neposredno slijedi iz relacije (5.2''). Pretpostavimo da relacija (5.21) vrijedi za za neko $k > 1$, i dokažimo da vrijedi za slijedeći prirodni broj k+1.

Diferenciranjem po t funkcije

$$(5.22)\quad W(t) = \int_{t}^{\infty} Z^2(s)Q_{I_{k-2}}(s,t)ds \qquad , t \geq t_o$$

dobivamo:

$$W'(t) = -2W(t)\sum_{n=o}^{k-2} I_n(t) - Z^2(t) \leq 2W(t)\sum_{n=o}^{k-2} I_n(t) - (W(t)+I_{k-1}(t))^2 =$$

$$= -W^2(t) - I_{k-1}^2(t) - 2W(t)\sum_{n=o}^{k-1} I_n(t)$$

i odavde:

$$W'(t) + 2W(t)\sum_{n=o}^{k-1} I_n(t) \leq -W^2(t) - I_{k-1}^2(t)$$

što nakon množenja sa $Q_{I_{k-1}}(t,T)$ daje:

$$\frac{d}{dt}(W(t)Q_{I_{k-1}}(t,T)) \leq -W^2(t)Q_{I_{k-1}}(t,T) - I_{k-1}^2(t)Q_{I_{k-1}}(t,T) .$$

Integrirajući ovu relaciju od T do $\bar{t} > T$ dobivamo:

$$W(\bar{t})Q_{I_{k-1}}(\bar{t},T) - W(T) \leqslant -\int_T^{\bar{t}} W^2(t)Q_{I_{k-1}}(t,T)dt - \int_T^{\bar{t}} I_{k-1}^2(t)Q_{I_{k-1}}(t,T)dt$$

što odmah daje:

$$W(T) \geqslant W(\bar{t})Q_{I_{k-1}}(\bar{t},T) + \int_T^{\bar{t}} W^2(t)Q_{I_{k-1}}(t,T)dt +$$
$$+\int_T^{\bar{t}} I_{k-1}(t)Q_{I_{k-1}}(t,T)dt \geqslant I_k(T) + \int_T^{\bar{t}} W^2(t)Q_{I_{k-1}}(t,T)dt .$$

Prelazeći u posljednjoj relaciji na granični proces $\bar{t} \to \infty$ dobivamo:

$$W(T) \geqslant I_k(t) + \int_T^{\infty} W^2(t)Q_{I_{k-1}}(t,T)dt$$

što znači da (5.21) vrijedi i za prirodni broj k+1.

Iz relacije (5.21) neposredno slijedi:

$$W(t) \geqslant I_{k-1}(t) \qquad \text{eventualno.}$$

Koristeći ovu relaciju i uslov (U_7) dobivamo iz (5.21) da vrijedi eventualno:

$$W(t) \geqslant I_{k-1}(t) + \int_t^{\infty} W^2(s)Q_{I_{k-2}}(s,t)ds \geqslant I_{k-1}(t) +$$
$$+\int_t^{\infty} I_{k-1}^2(s)Q_{I_{k-2}}(s,t)ds \geqslant I_{k-1}(t) + (\tfrac{1}{4}+\varepsilon)I_{k-1}(t) = (\tfrac{5}{4}+\varepsilon)I_{k-1}(t).$$

Nastavljajući ovaj postupak dalje dobivamo rastući niz brojeva $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$ za koji vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} i_n = \infty \qquad \text{i} \qquad W(t) \geqslant i_n I_{k-1}(t) \quad \text{eventualno}$$

što je očigledna kontradikcija.

<u>Primjedba</u>. Iz dokaza Teorema 5.16. očito slijedi da ako za neko $k=1,2,\dots$ $I_k(t)=\infty$ i ako su zadovoljeni uslovi (i) i (U_1), diferencijalna nejednačina (OPL) je oscilatorna.

<u>Posljedica</u>. Teorem 5.16. se u slučaju k=1 svodi na klasični rezultat Opial-a [63, Teorem 1], a za k=2 na klasični rezultat Willett-a [75, Teorem 1.2.] .

<u>Napomena</u>. Teorem 5.16. se može proširiti na klasu nelinearnih

diferencijalnih nejednačina oblika (OP) uz dodatne uslove $(U_2),(U_4)$ i uz zamjenu uslova (U_7) uslovom:

$$(U_7') \quad \int_t^{\infty}(I_{k-1}(s))^2 Q_{I_{k-2}}(s,t)ds \geq \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)I_{k-1}(t) \quad , \quad t\geq t_o$$

pri čemu jezgra $Q_{I_n}(s,t)$ sada imaju oblik:

$$Q_{I_n}(s,t) = \exp(2\mu\sum_{j=o}^{n} I_j(u)du) \ .$$

5.17. Hille-Wintner-ov teorem upoređivanja. Posmatrajmo uz (OPL) i nejednačinu:

$$(OPM) \quad y(t)\left[y''(t)+q(t)y(t)\right]\leq o \quad , \ t\geq t_o$$

gdje je $q\in C\left[[t_o,\infty)\right]$. Označimo sa $\{J_n(t)\}_{n=o}^{\infty}$ niz iteriranih integrala, uvedenih u 5.15., formiranih u odnosu na funkciju q.

Teorem. Pretpostavimo da za neko k=1,2,... vrijedi:

$$(U_8) \quad I_{k-1}(t)\geq J_{k-1}(t) \ \text{ i } \sum_{p=o}^{k-1} I_p(t)\geq\sum_{p=o}^{k-1}J_p(t) \quad , \quad t\geq t_o \ .$$

Tada ako je diferencijalna nejednačina (OPM) oscilatorna, oscilatorna je i nejednačina (OPL).

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije tačna. Neka je y neoscilatorno rješenje nejednačine (OPL). Prema dokazu Teorema 5.16. za funkciju W uvedenu u tom dokazu vrijedi relacija (5.21). Uvođenjem funkcije W relacijom (5.22), diferenciranjem po t i korištenjem uslova (U_8) dobivamo:

$$W'(t)\leq -W^2(t) - I_{k-1}^2(t)-2W(t)\sum_{p=o}^{k-1}I_p(t)\leq -W^2(t) - J_{k-1}^2(t) - $$
$$-2W(t)\sum_{p=o}^{k-1}J_p(t) \quad , \ t\geq t_o \ .$$

Postupajući kao u dokazu Teorema 5.16. odavde dobivamo da vrijedi eventualno:

$$(5.23) \quad W(t)\geq J_k(t) + \int_t^{\infty}W^2(s)Q_{J_{k-1}}(s,t)ds \quad ,t\geq T\geq t_o \ .$$

Označimo sa X skup monotono nerastućih funkcija x definisanih na $[T,\infty)$, za koje vrijedi:

$$J_k(t) \leqslant x(t) \leqslant W(t) \quad , \ t \geqslant T, \ x \in X.$$

Definišući na X preslikavanje $\mathscr{G}$ sa:

$$(\mathscr{G}x)(t) = J_k(t) + \int_t^{\infty} x^2(s) Q_{J_{k-1}}(s,t)ds \quad , \ t \geqslant T,$$

lako se provjerava, korištenjem relacije (5.23), da vrijedi $\mathscr{G}(X) \subseteq X$. Definišući uređenje u skupu X na isti način kao u dokazu Teorema 4.31. neposredno provjeravamo da su ispunjeni svi uslovi Teorema 2.5. pa zato postoji funkcija $U \in X$ za koju na $[T, \infty)$ vrijedi:

$$\mathscr{G}U = U .$$

Uvodeći funkciju

$$V(t) = U(t) + \sum_{p=0}^{k-1} J_p(t) \quad , \ t \geqslant T$$

na potpuno isti način kao u dokazu Teorema 5.15. zaključujemo da vrijedi:

$$V'(t) + V^2(t) + q(t) = 0 \quad , \ t \geqslant T ,$$

odakle neposredno dobivamo da neoscilatorna funkcija

$$y(t) = \exp\left(\int_0^t V(s)ds\right) \quad , \ t \geqslant T$$

zadovoljava jednačinu

$$y''(t) + q(t)y(t) = 0 \quad , \ t \geqslant T$$

pa tim prije i nejednačinu (OPM), što je kontradikcija.

Posljedica. U specijalnom slučaju kad je k=1 i kada umjesto nejednačina (OPL) i (OPM) posmatramo odgovarajuće jednačine, Teorem 5.17. postaje klasični Hille-Wintner-ov teorem upoređivanja [6] .

Glava 6.

K R I T E R I J I   S U M A B I L N O S T I

U ovom dijelu disertacije dobićemo veoma općenite dovoljne uslove za oscilaciju diferencijalne nejednačine (OP), koji će vrijediti bez obzira na znak i konačanost integrala $I(t)$ i koji će biti izraženi preko sumabilnosti integralnog operatora uvedenog u 5.4.,

6.1. Uslovi. Uvedimo sada uslove sumabilnosti koje ćemo koristiti za dobivanje oscilacionih kriterija za diferencijalnu nejednačinu (OP).

Za jezgro $K(t,s)$ ili operator K definisan relacijom (5.5) kažemo da zadovoljava uslov:

(S_4) ako za svako $P\in C\big[[t_0,\infty)\big]$ koje je ograničeno vrijedi $\lim\limits_{t\to\infty}(KP)(t)=C\in(-\infty,\infty)$

(S_5) ako za svako $P\in C\big[[t_0,\infty)\big]$ sa $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=\infty$ vrijedi $\lim\limits_{t\to\infty}(KP)(t)=\infty$.

(S_6) ako za svako $P\in(C\cap L^2)\big[[t_0,\infty)\big]$ vrijedi $\lim\limits_{t\to\infty}(KP)(t)=C_f\in(-\infty,\infty)$.

Uvedimo sada jedan veoma važan iako pomalo neprirodan uslov koji će u daljem igrati centralnu ulogu u tehničkim problemima koji će se pojavljivati. Ovaj uslov je dao Hartman [22].

(R_1) Postoje funkcije $k\in C\big[[t_0,\infty),(0,\infty)\big]$, $m\in C\big[[t_0,\infty),[0,\infty)\big]$, $K_0\in C\big[\mathcal{D},[0,\infty)\big]$ i konstanta $\gamma\in[0,2]$, takvi da funkcija ρ definisana sa $\rho(t,s)=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_s^t K(t,u)k(t)dt$ ima osobinu $\rho\in C\big[\mathcal{D},[0,\infty)\big]$ i

$$(6.1)\qquad \rho(t,s)\geqslant m(t)k^2(t)(K(t,s))^{\gamma}K_o(t,s)\int_{t_o}^{t}\frac{(K(t,u))^{2-\gamma}}{K_o(t,u)}du$$

$(t,s)\in\mathcal{D}$, gdje je $\frac{K^{2-\gamma}}{K_o}\in C(\mathcal{D})$, i da osim toga

vrijedi:

$$(6.2)\qquad \int_{t_o}^{\infty}m(s)ds=\infty \quad \text{ili} \quad \limsup_{t\to\infty} k(t)\int_{t}^{\infty}m(u)du>o.$$

Primjedba. Koristeći Fubini-jev teorem i definiciju ρ dobivamo da vrijedi:

$$\frac{d}{dt}\left[k(t)\int_{\alpha}^{t}K(t,s)\int_{\alpha}^{s}H(u)duds\right]=\int_{\alpha}^{t}\rho(t,s)H(s)ds \quad ,\alpha\in[t_o,t]$$

za svaku funkciju H definisanu na $[t_o,\infty)$, za koju integrali u gornjoj relaciji postoje. Koristeći (6.1) iz posljednje relacije dobivamo:

$$(6.3)\qquad \frac{d}{dt}\left[k(t)\int_{\alpha}^{t}K(t,s)\int_{\alpha}^{s}H(u)duds\right]\geqslant m(t)k^2(t)\int_{t_o}^{t}\frac{(K(t,u))^{2-\gamma}}{K_o(t,u)}du\,\cdot$$

$$\cdot\int_{\alpha}^{t}(K(t,s))^{\gamma}K_o(t,s)H(s)ds\ .$$

U specijalnom slučaju kada je $K_o=\rho$ u oblasti $\mathcal{D}$ relacija (6.1) postaje:

$$(6.1\ )\qquad m(t)\leqslant\frac{1}{k^2(t)(K(t,s))^{\gamma}\int_{t_o}^{t}\frac{(K(t,u))^{2-\gamma}}{\rho(t,u)}du}\ .$$

Ovaj specijalan slučaj uslova (R_1) je važan za primjene.

6.2. Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi (i), (U_4), (R_1), (S_4), (S_5), (S_6) i

$$(R_2)\qquad \infty=\limsup_{t\to\infty}(KP)(t)\geqslant\liminf_{t\to\infty}(KP)(t)>-\infty$$

gdje je $P(t)=\int_{t_0}^{t} p(s)ds$.

Tada je diferencijalna nejednačina (OP) oscilatorna.

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije tačna. Neka je y neoscilatorno rješenje nejednačine (OP). Uvodeći funkciju $R(t)$ kao u dokazu Leme 5.3., diferencirajući je i koristeći uslov (U_4) dobivamo:

$$R'(t) \leq -p(t) - \mu R^2(t)$$

što nakon inegracije od $\alpha \geq t_0$ do $t \geq \alpha$ daje

$$(6.4) \qquad R(t)+\mu\int_{\alpha}^{t} R^2(s)ds \leq R(\alpha) - \int_{\alpha}^{t} p(s)ds \quad , \quad t \geq \alpha .$$

Množeći poslednju relaciju sa $K(t,s)$ i integrirajući je od α do $t \geq \alpha$ dobivamo:

$$\int_{\alpha}^{t} K(t,s)R(s)ds+\mu\int_{\alpha}^{t} K(t,s)\int_{\alpha}^{s} R^2(u)duds \leq R(\alpha)\int_{\alpha}^{t} K(t,s)ds - \int_{\alpha}^{t} K(t,s)\int_{\alpha}^{s} p(u)duds \quad , \quad t \geq \alpha .$$

Na osnovu uslova (S_4) i (R_2) odavde odmah zaključujemo da postoji konstanta $M < \infty$ takva da je:

$$(6.5) \qquad \int_{\alpha}^{t} K(t,s)R(s)ds+\mu\int_{\alpha}^{t} K(t,s)\int_{\alpha}^{s} R^2(u)duds \leq M \quad , \quad t > \alpha .$$

Dokažimo da vrijedi:

$$(6.6) \qquad \lim_{t\to\infty}\int_{\alpha}^{t} K(t,s)\int_{\alpha}^{s} R^2(u)duds < \infty .$$

Ako ova relacija ne bi bila tačna iz (6.5) bi slijedilo:

$$(6.7) \qquad \int_{\alpha}^{t} K(t,s)R(s)ds+\frac{\mu}{2} S(t) \leq 0 \qquad \text{eventualno}$$

gdje smo uveli oznaku:

$$S(t) = \int_{\alpha}^{t} K(t,s)\int_{\alpha}^{s} R^2(u)duds \quad , \quad t \geq s \geq \alpha .$$

Pošto je $S(t) \geq 0$ iz (6.7) dobivamo da eventualno vrijedi

$$R \leq 0.$$

Koristeći Cauchy-Schwarz-ovu nejednakost iz relacije (6.7) dobivamo za $\gamma\in[0,2]$ da eventualno vrijedi:

$$\mu^2 S^2(t)\leq 4\Big(\int_\alpha^t K(t,s)R(s)ds\Big)^2\leq$$

$$\leq 4\int_\alpha^t \frac{(K(t,u))^{2-\gamma}}{K_0(t,u)}\,du\int_\alpha^t (K(t,u))^\gamma K_0(t,u)R^2(u)du\leq$$

$$\leq 4\int_{t_0}^t \frac{(K(t,u))^{2-\gamma}}{K_0(t,u)}\,du\int_\alpha^t (K(t,u))^\gamma K_0(t,u)R^2(u)du\ .$$

Množeći ovu relaciju sa $m(t)k^2(t)$ i koristeći (6.3) sa $H(s)=R^2(s)$ dobivamo da eventualno vrijedi:

$$\mu^2 m(t)\big[k(t)S(t)\big]^2\leq 4\big[k(t)S(t)\big]'\ .$$

Integrirajući ovu relaciju od t do podesnog $s\geq t$ dobivamo:

$$\frac{4}{S(t)}\geq\mu^2 k(t)\int_t^s m(u)du$$

što na osnovu uslova (R_1) (precizno, relacije (6.2)) daje:

$$\lim_{t\to\infty} S(t)<\infty$$

što je očigledna kontradikcija.

Dakle relacija (6.6) vrijedi.

Pošto $\lim\limits_{t\to\infty}\int^t R^2(u)du$ sigurno postoji kao konačan ili beskonačan broj to iz relacije (6.6), na osnovu uslova (S_5) zaključujemo da vrijedi:

$$\int^\infty R^2(u)du<\infty$$

što zbog uslova (S_6) implicira da je:

(6.8) $\lim\limits_{t\to\infty}(KR)(t)=C_1\in(-\infty,\infty).$

Iz relacije (6.4) neposredno slijedi:

$$R(t)+\int_{\alpha}^{t}p(s)ds\leqslant R(\alpha) \quad , \quad t\geqslant\alpha.$$

Množeći ovu relaciju sa $K(t,s)$, integrirajući je zatim od α do $t\geqslant\alpha$ i koristeći uslov (S_4) dobivamo da eventualno vrijedi:

$$\int_{\alpha}^{t}K(t,s)R(s)ds+\int_{\alpha}^{t}K(t,s)\int_{\alpha}^{s}p(u)duds\leqslant R(\alpha)\int_{\alpha}^{t}K(t,s)ds\leqslant M_1$$

$t\geqslant s\geqslant\alpha$, $M_1>o$ konstanta.

Koristeći uslov (R_2) iz ove relacije zaključujemo da je:

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\alpha}^{t}K(t,s)R(s)ds=-\infty$$

što je u kontradikciji sa (6.8).

Primjedba. Da bi uslovi (S_4) i (S_6) bili konzistentni najpodesnije je pretpostaviti da je $C=C_1=o$ u tim uslovima .Naime, u slučaju da je neka neprekidna funkcija P ograničena i kvadratno integrabilna uslov (S_4) bi implicirao:

$$\lim_{t\to\infty}(KP)(t)=C\in(-\infty,\infty)$$

dok bi iz (S_6) slijedilo:

$$\lim_{t\to\infty}(KP)(t)=C_1\in(-\infty,\infty)$$

pa je za konzistenciju tih uslova dovoljno uzeti $C=C_1$ za sve funkcije P sa ovakvom osobinom. Međutim, sa stanovišta primjene slučaj $C=C_1=o$ je najznačajniji pa ćemo zato u daljem izlaganju to i pretpostavljati.

U tom slučaju lako je dokazati da je uslov (S_4) ekvivalentan sa slijedeća dva uslova:

(6.9) $\quad \int_{t_o}^{t}K(t,s)dt=O(1) \qquad (t\to\infty)$

(6.1o) $\quad \int_{t_o}^{T}K(t,s)ds=o(1) \qquad (t\to\infty)$ za fiksirano $T\in(t_o,\infty)$.

Uslov (6.1o) slijedi iz uslova:

(6.1o') $\qquad K(t,s)=o(1) \qquad (t\to\infty) \qquad$ uniformno za $o\leqslant s\leqslant T$

koji je podesniji za primjene.

U slučaju da vrijedi uslov (S_4), uslov (S_5) slijedi iz uslova:

(6.11) $\qquad \int_{t_o}^{t} K(t,s)ds \geqslant M > o \qquad$ eventualno, $\quad M$ konstanta

koji je podesniji za primjene, dok je uslov (S_6) ekvivalentan sa uslovom:

(6.12) $\qquad \int_{s}^{t}(K(t,u))^2du=O(1) \qquad (s\to\infty) \qquad$ uniformno za $t\geqslant s$.

6.3. <u>Primjedba</u>. Posmatrajmo jezgro $K(t,s)$ uvedeno u Primjedbi 5.8., koje zavisi od n $(n\geqslant 1)$ funkcija $f_1,\ldots,f_n\in C[[t_o,\infty),[o,\infty)]$

Zbog jednostavnosti uzmimo da je $t_o=o$.

Uzimajući

$$k(t)=\int_{o\leqslant s_1\leqslant\ldots\leqslant s_n\leqslant t}\cdots\int f_1(s_1)\ldots f_n(s_n)ds_1\ldots ds_n ,$$

lako provjeravamo da vrijedi:

$$\rho(t,s)=f_n(t)\int_{s\leqslant s_1\leqslant\ldots\leqslant s_{n-1}\leqslant t}\cdots\int f_1(s_1)\ldots f_{n-1}(s_{n-1})ds_1\ldots ds_{n-1}$$

i

$$\int_o^t K(t,s)ds=1$$

što znači da su, na osnovu Primjedbe 6.2., uslovi (S_5) i (6.9) ispunjeni. Uslov (6.1o') sada postaje:

(6.13) $\quad f_1(s)\int_{s\leqslant s_2\leqslant\ldots\leqslant s_n\leqslant t}\cdots\int f_2(s_2)\ldots f_n(s_n)ds_2\ldots ds_n =$

$=o(k(t))\ , \quad t\to\infty \quad$ uniformno za $o\leqslant s\leqslant T$.

Ovaj uslov je neprikladan za primjene, ali se može lako dokazati višestrukom primjenom L'Hopital's-ovog pravila, da je impliciran uslovom:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{0\leq s_1\leq \dots \leq s_m\leq t} \dots \int f_1(s_1) \dots f_m(s_m)ds_1 \dots ds_m = \infty,$$

$m=1, \dots ,n.$

Uslov (S_6) odnosno (6.12) postaje:

(6.14) $$\int_s^t (f_1(u) \int_{u\leq s_2\leq \dots \leq s_n\leq t} \dots \int f_2(s_2) \dots f_n(s_n)ds_2 \dots ds_n)^2 du =$$

$$=O(k^2(t)) \ (t\to\infty) \quad \text{uniformno za } t\geq s.$$

<u>Posljedica</u>. U specijalnom slučaju kad jezgro $K(t,s)$ ima oblik dat u Primjedbi 6.3, kad funkcija $m(t)$ zadovoljava relaciju (6.1') sa $\gamma=0$ tj. kad vrijedi:

(6.15) $$m(t)\leq \frac{1}{k^2(t)\int_0^t \frac{(K(t,u))^2}{\rho(t,u)}du}$$

i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu $(\widetilde{OP})$ Teorem 6.2. daje uopćenje Teorema 1. Coles-a i Willett-a [10] a vjerovatno i pojačanje. Naime, u slučaju $n=2$ uslov (6.15) postaje:

$$m(t)\leq \frac{f_2(t)}{\int_0^t \frac{f_1^2(s)(\int_s^t f_2(u)du)^2}{\int_s^t f_1(u)du} ds}.$$

Uzimajući znak jednakosti u ovoj relaciji lako se dokazuje korištenjem Cauchy-Schwarz-ove nejednakosti da vrijedi:

$$m(t)\geq \frac{f_2(t)}{\int_0^t f_1^2(s)(\int_s^t \frac{f_2^2(u)}{f_1(u)}du)ds} = \overline{m}(t) .$$

Kako je funkcija $\overline{m}(t)$ upravo funkcija koja figuriše u odgovarajućem uslovu Coles-a i Willett-a [10] to već za $n=2$ dobivamo uopćenje gore pomenutog rezultata Coles-a i Willett-a.

U specijalnom slučaju kad je $n=1$ označavajući f_1 sa Φ dobivamo iz upravo provedenih razmatranja da vrijedi:

$$K(t,s)=\frac{\Phi(s)}{\int_0^t \Phi(s)ds}$$

$$\rho(t,s)=\Phi(s)$$

$$m(t)\leqslant\frac{\Phi(t)}{\int_0^t \Phi^2(s)ds}\ .$$

Uzimajući u poslednjoj relaciji znak = uslovi (6.2) postaju:

$$(6.16)\qquad \int^{\infty}\frac{\Phi(t)}{\int_0^t \Phi^2(s)ds}\,dt=\infty \quad \text{ili} \quad \limsup_{t\to\infty}\left(\int_0^t\Phi(s)ds\int_t^{\infty}\frac{\Phi(s)}{\int_0^s\Phi^2(u)du}\,ds\right)>0,$$

dok uslov (6.12) postaje:

$$\int_s^t \Phi^2(u)du=O\left(\left(\int_0^t\Phi(u)du\right)^2\right)\qquad (s\to\infty)\quad \text{uniformno za } t\geqslant s.$$

U specijalnom slučaju kad je $a(t)=1$, $b(u)=1$, $f(u)=u$, $n=1$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu ($\widehat{OP}$) Teorem 6.2. zajedno sa Primjedbom 2. [8] daje uopćenje Teorema 1. Coles-a [8] kao i jednog rezultata Willett-a [74].

6.4. <u>Posljedica</u>. U specijalnom slučaju kad je $f_1=1$ i $f_2=f_3=\ldots=f_n=\frac{1}{t}$ u Primjedbi 6.3. dobivamo da kad vrijedi:

$$(6.17)\qquad \int p(u)du=\infty\ (H,n)$$

i kada su za nejednačinu (OP) ispunjeni uslovi (i) i (U_4), diferencijalna nejednačina (OP) je oscilatorna.

U ovom rezultatu uslov (6.17) se može zamijeniti uslovom:

$$(6.18)\qquad \int p(u)du=\infty\ (C,n)$$

jer Cesàro-n sumabilnost ka ∞ implicira Hölder-n sumabilnost ka ∞.

U slučaju Cesàro-n sumabilnosti možemo dokazati i nešto jači rezultat za $n \geq 2$.

Teorem. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (OP) vrijede uslovi (i), (U_4) i (6.18), gdje je $n \geq 2$, u kome je lim zamijenjen sa lim sup. Tada je diferencijalna nejednačina (OP) oscilatorna.

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije tačna. Neka je y neoscilatorno rješenje nejednačine (OP). Uvodeći funkciju R(t) kao u dokazu Teorema 6.2. dobivamo relaciju (6.4). Integrirajući n puta tu relaciju od α do $t \geq \alpha$ dobivamo:

$$n\int_{\alpha}^{t}(t-s)^{n-1} R(s)ds+\mu\int_{\alpha}^{t}(t-s)^{n} R^{2}(s)ds \leq$$
$$\leq R(\alpha)(t-\alpha)^{n} - \int_{\alpha}^{t}(t-s)^{n}p(s)ds$$

odakle nakon jednostavnih transformacija dobivamo:

$$\Big(\mu^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{n}{2}} R(s)+ \frac{n(t-s)^{\frac{n-2}{2}}}{2\mu^{\frac{1}{2}}}\Big)^{2} \leq$$
$$\leq R(\alpha)(t-\alpha)^{n}+ \frac{n^{2}(t-\alpha)^{n-1}}{4\mu(n-1)} - \int_{\alpha}^{t}(t-s)^{n} p(s)ds$$

što implicira:

$$\int_{\alpha}^{t}(t-s)^{n} p(s)ds \leq R(\alpha)(t-\alpha)^{n} + \frac{n^{2}(t-\alpha)^{n-1}}{4\mu(n-1)} .$$

Dijeleći ovu relaciju sa t^n i prelazeći zatim na granični proces $\limsup_{t\to\infty}$ dobivamo:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n}}\int_{\alpha}^{t}(t-s)^{n} p(s)ds < \infty$$

što je u kontradikciji sa uslovom (6.18)-ustvari njegovom adaptacijom formulisanom u izjavi teorema.

6.5. Posljedica. U specijalnom slučaju kad je $a(t)=1$, $b(u)=1$, $f(u)=u$, $\mu=1$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu ($\widetilde{OP}$) Teorem 6.4. postaje klasičan rezultat Hartman-a [20] i Wintner-a [76]. Napomenimo da se ovaj rezultat ne može primijeniti u slučaju n=1, što je pokazao Hartman [20].

Primjedba. Svi dosada dobiveni rezultati su motivisani upravo pomenutim rezultatima Hartman-a i Wintner-a, koji je prikazan preko (C,1) sumabilnosti integrala $P(t)=\int^{t} p(s)ds$. Kao što smo vidjeli ovaj rezultat se može uopćiti kako na (H,n) sumabilnost funkcije P(t), tako i na (C,n) sumabilnost funkcije P(t) nešto općenitijeg oblika od uobičajene (C,n) sumabilnosti. Ovo je posljedica činjenice da je (C,1)=(H,1) i da je, kao što smo već napomenuli, rezultat Hartman-a i Wintner-a izražen preko (C,1) sumabilnosti.

6.6. Primjena. Posmatrajmo matričnu diferencijalnu jednačinu:

$$Y''(t) + A(t)Y(t) = 0 \tag{6.19}$$

i pretpostavimo da postoji dijagonalni element $a_{ii}(t)$ matrice A(t) koji je (H,n) sumabilan ka ∞. Tada je matrična diferencijalna jednačina (6.19) oscilatorna.

Dokaz. Pridružimo matričnoj diferencijalnoj jednačini (6.19) običnu diferencijalnu jednačinu:

$$y''(t) + a_{ii}(t)y(t) = 0 \tag{6.19'}$$

i definišimo funkcional g_{e_i} sa:

$$g_{e_i}(A) = (Ae_i, e_i) = e_i^T A e_i$$

za svaku n×n matricu A, gdje je

$$e_i = (o, \dots o, \overset{i}{1}, o, \dots, o)^T.$$

Dakle, funkcional g_{e_i} pridružuje svakoj matrici njen ii-ti element. Neposrednom provjerom se pokazuje da je ovaj funkcional linearan i pozitivan. Dalje, očito je da vrijedi:

$$g_{e_i}(I - I) = o$$

$$g_{e_i}(A - a_{ii}I) = o \ .$$

Kako je diferencijalna jednačina (6.19′), na osnovu Posljedice 6.4. oscilatorna to su ispunjeni svi uslovi Teorema 3.4. pa je zato matrična diferencijalna jednačina (6.19) oscilatorna.

Primjedba. Teorem 6.2. se lako može uopćiti na slučaj kad umjesto funkcije P(t) u uslovu (R_2) figuriše funkcija

$$P_g(t) = \int_{t_o}^{t} g(u)p(u)du$$

koja zavisi od funkcije $g \in C^1\left[[t_o, \infty), (o, \infty)\right]$ sa osobinom (iii), pri čemu se uz ostale pretpostavke Teorema 6.2. mora još pretpostaviti i uslov (C_4).

U ovom slučaju relacija (6.1) u uslovu (R_1) treba biti zamijenjena relacijom:

$$\varrho(t,s) \geq m(t)k^2(t)(K(t,s))^{\gamma} K_o(t,s)\int_{t_o}^{t} \frac{(K(t,u))^{2-\gamma}}{K_o(t,u)} g(u)du \ ,$$

$(t,s) \in \mathfrak{D}$ za svaku funkciju g sa navedenim osobinama.

GLAVA VII

M O G U Ć A   P R O Š I R E N J A   R E Z U L T A T A

U ovom dijelu disertacije pokazaćemo neke od mogućih putova proširenja i uopćenja rezultata datih u četvrtom, petom i šestom dijelu.

7.1. Posmatrajmo diferencijalnu nejednačinu oblika:

(PO) $\quad y(t)\left[(a(t)b(y(t))y'(t))' + Q(t)F(y(t), y<\pi(t)>, y'<\sigma'(t)>\right] \le o,$

$t \ge t_o$ gdje je $Q \in C[t_o, \infty)$, $F \in C\left[R \times R^m \times R^n\right]$ sa osobinom:

$uF(u,v,z) > o$ za $u \ne o$

i

$\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_m(t))$ sa $\lim\limits_{t\to\infty}\pi_i(t) = \infty$ $(i=1,\dots,m)$

$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t))$ sa $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma_i(t) = \infty$ $(i=1,\dots,n)$

$\Psi<\theta(t)> = (\Psi(\theta_1(t)), \dots, \Psi(\theta_q(t)))$, $\quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$.

Svi rezultati četvrtog dijela rada izuzev potrebnih uslova, zatim svi rezultati dati u 5.1-5.8. kao i svi rezultati šestog dijela se mogu proširiti i na nejednačine (PO). Zbog ilustracije pokazaćemo to na primjeru Teorema 4.25. i 5.5..

<u>Teorem</u>. Pretpostavimo da diferencijalna nejednačina (PO) i funkcija f zadovoljavaju uslove (i), (iv), (C_5), (C_5) i

(7.1) $\quad \int^{\infty} g(t)\left[KQ^+(t) - Q^-(t)\right]dt = \infty \qquad K \in (o,1]$

gdje je $Q^+(t) = \max\{Q(t), o\}$, $\quad Q^-(t) = \max\{-Q(t), o\}$ $\quad$ i

(F_1) $\quad \mathcal{F}$ je klasa funkcija definisanih i diferencijabilnih eventualno, sa osobinom da za svaku neoscilatornu funkciju $z \in \mathcal{F}$ postoje pozitivne konstante L,M (koje zavise od z) tako da eventualno vrijedi:

$$(7.2) \qquad L \leqslant \frac{F(z(t))z\langle\pi(t)\rangle, z'\langle\sigma(t)\rangle)}{f(z(t))} \leqslant M \ .$$

Tada je svako rješenje y diferencijalne nejednačine (PO) koje pripada klasi funkcija $\mathcal{F}$ oscilatorno.

Dokaz. Dokaz koristi tehniku Staikos-a i Sficas-a [66]. Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije tačna. Neka je y neoscilatorno rješenje nejednačine (PO) koje pripada klasi funkcija $\mathcal{F}$. Tada je y neoscilatorno rješenje nejednačine (OP) pri čemu koeficijent p ima oblik:

$$p(t)=Q(t)\ \frac{F(y(t), y\langle\pi(t)\rangle\ , y'\langle\sigma(t)\rangle\ )}{f(y(t))}, \quad t \geqslant t_1 \geqslant t_o.$$

Na osnovu uslova (F_1) i preciznije relacije (6.2) dobivamo:

$$p(t)=Q(t)\ \frac{F(y(t), y\langle\pi(t)\rangle\ , y'\langle\sigma(t)\rangle\ )}{f(y(t))}=$$

$$=Q^+(t)\ \frac{F(y(t), y\langle\pi(t)\rangle\ , y'\langle\sigma(t)\rangle\ )}{f(y(t))}\ -$$

$$-\ Q^-(t)\ \frac{F(y(t), y\langle\pi(t)\rangle\ , y'\langle\sigma(t)\rangle)}{f(y(t))} \geqslant LQ^+(t)-MQ^-(t)=$$

$$=M(KQ^+(t)-Q^-(t)) \qquad \text{gdje je } K=\frac{L}{M}>o.$$

Ovo pokazuje da uslov (6.1) implicira uslov (C_1) za svaku funkciju g koja zadovoljava (iv). Prema tome zadovoljeni su svi uslovi Teorema 4.25. pa je rješenje y oscilatorno, što je kontradikcija.

Primjedba. Zamjenjujući u Teoremu 7.1. uslov (F_1) uslovom:

(F_2) $\mathcal{F}'$ je klasa funkcija definisanih i diferencijabilnih eventualno sa osobinom da za svaku funkciju $z \in \mathcal{F}'$ koja zadovoljava:

$$\liminf_{t\to\infty} |z(t)| > o$$

postoje pozitivne konstante L, M (koje zavise od z) tako da eventualno vrijedi relacija (6.2)

tvrdnja tog teorema prelazi u:

za svako rješenje $y \in \mathcal{F}'$ vrijedi $\liminf\limits_{t\to\infty} |y(t)| = o$.

Posljedica. U specijalnom slučaju kad je $g(t) = \int_{t_o}^{t} \frac{ds}{a(s)}$, $\pi_i(t) = \sigma_i(t) = t$ i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu ($\widetilde{OP}$) Teorem 7.1. daje pojačanje Teorema 4. i 5. Staikos-a i Sficas-a [66].

U specijalnom slučaju kad je $a(t)=1$, $b(u)=1$, $g(t)=t$, $\pi_i(t)=\sigma_i(t)=t$, kada je $\mathcal{F}'$ klasa svih ograničenih i diferencijabilnih funkcija i kada umjesto nejednačine (OP) posmatramo odgovarajuću jednačinu ($\widetilde{OP}$) Primjedba 7.1. postaje Teorem 1. Kartsatos-a [29].

7.2. Teorem. Pretpostavimo da diferencijalna nejednačina (PO) i funkcije f i τ zadovoljavaju uslove (i),(ii)

(C_5) $\tau(t) \geq t$, $t \geq t_o$

(7.3) $$\lim_{t\to\infty} \int_{t_o}^{t} K(t,s) \int_{s}^{\infty} (CQ^+(u) - Q^-(u))duds = \infty, \quad C \in (o,1]$$

(7.4) $$\int^{\infty} (C_1 Q^+(t) - Q^-(t))dt < \infty, \quad C_1 \geq 1$$

(F_3) $\mathcal{F}''$ je klasa funkcija definisanih i diferencijabilnih eventualno sa osobinom da za svaku funkciju $z \in \mathcal{F}''$ sa neoscilatornim izvodom postoje pozitivne konstante L_1, M_1 (koje zavise od z) tako da eventualno vrijedi:

$$L_1 \leqslant \frac{F(z(t), z<\pi(t)>, z'<\sigma(t)>)}{f(z(\tau(t)))} \leqslant M_1 .$$

Tada je izvod svakog rješenja y(t) diferencijalne nejednačine (PO) iz klase $\mathcal{F}''$ oscilatorna funkcija ako je ispunjena bilo koja od tri kombinacije uslova (a) ili (b) ili (c).

Dokaz. Na sličan način kao u dokazu Teorema 7.1. dokazujemo da za svako rješenje y(t) iz klase $\mathcal{F}''$ koje ima neoscilatoran izvod vrijedi:

$$\overline{p}(t) \geqslant M_1\left(\frac{L_1}{M_1} Q^+(t) - Q^-(t)\right)$$

i

$$\overline{p}(t) \leqslant L_1\left(\frac{M_1}{L_1} Q^+(t) - Q^-(t)\right)$$

gdje smo stavili:

$$\overline{p}(t) = \frac{Q(t)F(y(t), y<\pi(t)>, y'<\sigma(t)>)}{f(y(\tau(t)))} .$$

Ovo znači da uslovi (7.3) i (7.4) impliciraju uslove (U_3) i (U_1) respektivno pa tvrdnja ovog teorema neposredno slijedi iz Teorema 5.5..

Primjedba. Teoremi 7.1. i 7.2. pokazuju da je, s obzirom na oscilatornost i asimptotsko ponašanje rješenja, moguće uporedivanje diferencijalnih nejednačina s otklonjenim argumentom sa običnim diferencijalnim nejednačinama, kao i diferencijalnih nejednačina sa otklonjenim argumentom međusobno. Kako za obične diferencijalne nejednačine postoje oscilacioni rezultati čak i u slučaju kad je koeficijent p promjenljivog znaka, rezultati tipa Teorema 7.1. (gdje se vrši upoređivanje diferencijalne nejednačine sa otklonjenim argumentom sa običnom diferencijalnom nejednačinom) su prvi poznati oscilacioni rezultati za diferencijalne nejednačine oblika (P) ili (PO) gdje je koeficijent p odnosno Q funkcija promjenljivog znaka. Međutim, zbog teškoća u nalaženju za primjenu podesnih klasa funkcija koje zadovoljavaju uslov (F_1) ili (F_2), ovi rezultati imaju za sada samo teoretsku vrijednost.

7.3. Sada ćemo dokazati jedan oscilacioni rezultat koji se dobiva upoređivanjem koeficijenata dvaju nejednačina sa otklonjenim argumentima, i koji u jednom specijalnom slučaju postaje Teorem upoređivanja Sturm-ovog tipa za nejednačine sa otklonjenim argumentom.
Kao što je istaknuto u [7o, dio 1] ovakvi teoremi upoređivanja su od bitne važnosti u teoriji oscilacija i prvi eksplicitni oscilacioni rezultati su dobiveni iz takvih teorema. Rezultat koji ćemo izvesti važiće u slučaju kad je b(u)=1 i na neke uopćenite oblike diferencijalnih nejednačina. Zbog praktičnih razloga oznake će biti nešto drugačije nego u ostalim dijelovima disertacije. Posmatrajmo diferencijalne nejednačine:

$$(P_V) \quad y(t)\left[(R(t)y'(t))' + Q(t,y\langle\sigma(t)\rangle)\right] \leq 0 \quad , \quad t \geq t_0$$

i

$$(P_m) \quad y(t)\left[(r(t)y'(t))' + q(t,y\langle\pi(t)\rangle)\right] \leq 0 \quad , \quad t \geq t_0$$

gdje funkcije r i R zadovoljavaju uslov:

$$r, R \in C\left[[t_0, \infty), (0, \infty)\right]$$

dok funkcije $\pi(t)$ i $\sigma(t)$ zadovoljavaju:

$$y\langle\sigma(t)\rangle = (y(\sigma_1(t)),\dots,y(\sigma_n(t))) \;, \qquad \sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$$

$$y\langle\pi(t)\rangle = (y(\pi_1(t)),\dots,y(\pi_n(t))) \;, \qquad \pi=(\pi_1,\dots,\pi_n)$$

$$\lim_{t\to\infty}\sigma(t)=\infty \iff \lim_{t\to\infty}\sigma_i(t)=\infty \;, \qquad i=1,\dots,n$$

$$\lim_{t\to\infty}\pi(t)=\infty \iff \lim_{t\to\infty}\pi_i(t)=\infty \;, \qquad i=1,\dots,n.$$

Za realne funkcije G i g pretpostavljamo da su definisane i neprekidne na skupu $[t_o,\infty)\times(R^n_+\cup R^n_-)$ gdje je $R_+=(o,\infty)$ i $R_-=(-\infty,o)$. Rastući karakter realnih funkcija definisanih na podskupovima prostora R^n razmatraćemo u odnosu na uobičajeni poredak u R^n definisan sa:

$$y\leqslant z \iff (\forall j=1,\dots,n) \quad y_j\leqslant z_j.$$

<u>Teorem</u>. Pretpostavimo da diferencijalne nejednačine (P_v) i (P_m) zadovoljavaju uslove:

(K_1) $$\int^{\infty}\frac{dt}{R(t)}=\infty$$

(K_2) $$r(t)\geqslant R(t) \;, \qquad t\geqslant t_o$$

(K_3) $$\sigma(t)\geqslant\pi(t) \;, \qquad t\geqslant t_o$$

i

(K_4) $$(G-g)\Big|[t_o,\infty)\times R^n_+\geqslant o \quad \text{i} \quad (G-g)\Big|[t_o,\infty)\times R^n_-\leqslant o$$

gdje je funkcija $g\Big|[t_o,\infty)\times R^n_+$ nenegativna i $g\Big|[t_o,\infty)\times R^n_-$ nepozitivna, i u oba slučaja je neopadajuća.

Tada, ako je diferencijalna nejednačina (P_m) oscilatorna onda je i nejednačina (P_v) oscilatorna.

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije tačna. Neka je y neoscilatorno rješenje nejednačine (P_v). Pretpostavimo da je eventualno $y > 0$ tj.

$$y(t) > 0 \quad , \quad t \geq t_2 \geq t_0 .$$

Pošto uslov (K_1) vrijedi na osnovu Leme 2.8. zaključujemo da je $y' > 0$ eventualno tj.

$$y'(t) > 0 \quad , \quad t \geq t_3 \geq t_2 \geq t_0 .$$

Uzmimo $T \geq t_3$ takvo da vrijedi:

$$t \geq T \Longrightarrow \sigma(t) \geq t_3 \Longleftrightarrow (\forall j=1,\dots,n)\ \sigma_j(t) \geq t_3 \quad \text{i}$$

$$\tau(t) \geq t_3 \Longleftrightarrow (\forall j=1,\dots,n)\ \tau_j(t) \geq t_3 .$$

Na osnovu uslova (K_3) i (K_4) odavde odmah dobivamo:

$$G(t, y\langle\sigma(t)\rangle) \geq g(t, y\langle\tau(t)\rangle) \quad , \quad t \geq T$$

što implicira:

$$(R(t)y'(t))' + g(t, y\langle\tau(t)\rangle) \leq 0 \quad , \quad t \geq T.$$

Integrišući ovu relaciju od s do $\eta \geq s$ dobivamo:

$$R(\eta)y'(\eta) - R(s)y'(s) + \int_s^\eta g(\zeta, y\langle\tau(\zeta)\rangle)\,d\zeta \leq 0 \quad , \quad s \geq T$$

što implicira:

$$R(s)y'(s) \geq \int_s^\eta g(\zeta, y\langle\tau(\zeta)\rangle)\,d\zeta \qquad s \geq T.$$

Prelazeći u ovoj relaciji na granični proces $\eta \to \infty$ i koristeći činjenicu da je $(R(s)y'(s))' \leq 0$ za $s \geq T$ i uslov (K_2) dobivamo:

$$y'(s) \geq \frac{1}{R(s)} \int_s^\infty g(\zeta, y\langle\tau(\zeta)\rangle)\,d\zeta \geq \frac{1}{r(s)} \int_s^\infty g(\zeta, y\langle\tau(\zeta)\rangle)\,d\zeta$$

odakle, nakon integracije od T do $t \geq T$ dobivamo:

$$(7.5)\qquad y(t)\geq y(T)+\int_T^t \frac{1}{r(s)}\int_s^\infty g(\zeta, y\langle\pi(\zeta)\rangle)\,d\zeta\,ds\ .$$

Označimo sa X skup monotono neopadajućih funkcija x za koje vrijedi:

$$y(t_3)\leq x(t)\leq y(t)\qquad,\qquad t\geq t_3\ ,\ \text{za svako}\ \ x\in X\ .$$

Definišimo sada preslikavanje $\mathcal{G}$ na skupu X na slijedeći način:

$$(\mathcal{G}x)(t)=\begin{cases} y(t) & t\in[t_3,T)\\ y(T)+\int_T^t \frac{1}{r(s)}\int_s^\infty g(\zeta, x\langle\pi(\zeta)\rangle)\,d\zeta\,ds\ , & t\in[T,\infty)\end{cases}$$

za svaku funkciju $x\in X$. Na osnovu relacije (7.5) zaključujemo da je $\mathcal{G}(X)\subseteq X$. Definišući poredak u skupu X na prirodan način:

$$x_1\leq x_2 \iff (\forall t\geq t_3)\quad x_1(t)\leq x_2(t)$$

lako se provjerava da je preslikavanje $\mathcal{G}$ monotono tj. da vrijedi:

$$x_1\leq x_2 \implies \mathcal{G}x_1\leq \mathcal{G}x_2\ .$$

Prema tome ispunjeni su svi uslovi Teorema 2.5., pa na osnovu tog teorema zaključujemo da postoji funkcija $z\in X$ takva da vrijedi:

$$\mathcal{G}z=z$$

što znači da diferencijalna jednačina:

$$(r(t)x'(t))'+g(t,x\langle\pi(t)\rangle)=o\qquad,\qquad t\geq T$$

pa prema tome i diferencijalna nejednačina (P_m) ima neoscilatorno rješenje $z(t)\geq y(T)>o$, što je kontradikcija.

<u>Primjedba</u>. Uslov (K_1) koji se ne pojavljuje u klasičnom Sturm-ovom teoremu je prouzrokovan otklonom argumenta i pojavljuje se u svim poznatim rezultatima upoređivanja diferencijalnih jednačina sa otklonjenim argumentom [31], [61], [32], [62] i [67]. Druga restrikcija koja se pojavljuje u Teoremu 7.3. u odnosu na

klasičan Sturm-ov rezultat je zahtijev o znaku funkcije g, što je neizbježno prouzrokovano prisustvom otklonjenog argumenta i diskusijom provedenom u 4.29..

Slijedeći primjer pokazuje da se uslov (K_1) ne može otkloniti.

Primjer. Diferencijalna nejednačina

$$y(t)\left[(t^3y'(t))' + t^{pm}\,(y(t^p))^m\right] \leqslant 0 \qquad , \qquad t>1$$

gdje je $m=\frac{1}{2k+1}$, $p \geqslant \frac{1}{m} = 2k+1$, $k=1,2,\ldots$

je, na osnovu Teorema 4.22. oscilatorna, uzimajući za funkciju g upravo $g(t)=\frac{1}{t^2}$, dok diferencijalna nejednačina

$$y(t)\left[(t^3y'(t))' + t^{pm}\,(y(t))^m\right] \leqslant 0 \, , \qquad t>1$$

ima neoscilatorno rješenje $y(t)=\frac{1}{t}$.

Svi uslovi Teorema 7.3. su zadovoljeni izuzev uslova (K_1).

7.4. Karakterizacija oscilatornosti. Sada ćemo pokazati dvije korisne primjene Teorema 7.3. za dobivanje nekih oscilacionih rezultata za diferencijalne nejednačine sa otklonjenim argumentom.

Teorem. Pretpostavimo da diferencijalna nejednačina (P) gdje je $a(t)=1$ i $b(u)=1$, zadovoljava uslove $\tau(t) \leqslant t$, (i), (C_5), (C_6) i

$$(7.6) \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{\tau(t)}{t} \geqslant \ell > 0.$$

Tada je diferencijalna nejednačina (P) oscilatorna ako i samo ako vrijedi:

$$(7.7) \qquad \int^{\infty} tp(t)dt = \infty.$$

Dokaz. Dokaz dovoljnog dijela teorema slijedi neposredno iz Teorema 4.18. uzimajući $g(t)=t$ i koristeći uslov (7.6), koji implicira da je uslov (7.7) ekvivalentan sa uslovom:

(7.7') $\int^{\infty}\tau(t)p(t)dt=\infty.$

Pretpostavimo sada da uslov (7.7) nije ispunjen i posmatrajmo nejednačine:

(7.8) $y(t)\left[y''(t)+p(t)f(y(\tau(t)))\right]\leqslant 0 \quad , \quad t\geqslant t_0$

(7.9) $y(t)\left[y''(t)+p(t)f(y(t))\right]\leqslant 0 \quad , \quad t\geqslant t_0 .$

Na osnovu Teorema 4.31. (gdje je uzeto a(t)=1) zaključujemo da je nejednačina (7.9) neoscilatorna, što na osnovu $\tau(t)\leqslant t$ i Teorema 7.3. implicira da je i nejednačina (7.8) neoscilatorna.

Primjedba. Pošto potrebni i dovoljni uslov (7.7) ne zavisi od otklona argumenta τ , sličnim rezonovanjem kao u 4.36. dolazimo do slijedećeg rezultata o očuvanju oscilatornog ponašanja nejednačine (P) pod uticajem otklona argumenta τ.

Teorem 7.4. Pretpostavimo da za diferencijalnu nejednačinu (P), gdje je a(t)=1 i b(u)=1, vrijede uslovi (i), (C_5), (C_6), (7.6) i $\tau(t)\leqslant t$. Tada vrijedi:

(P) je oscilatorna $\Longleftrightarrow$ (OP) je oscilatorna.

Posljedica. Teorem 7.4. je uopćenje i pojačanje rezultata Shevelo-a [65; Teorem 6.3] koji je dokazan uz dodatni uslov da je $\frac{f(u)}{u}$ neopadajuća funkcija za $u\in(0,1]$. Shevelo-ov rezultat je dokazan u [65] potpuno različitim metodom i taj dokaz ne pokazuje suštinu uslova (7.6), koji igra centralnu ulogu u čitavoj monografiji Shevelo-a. Dokaz Teorema 7.4. pokazuje da je suština uslova (7.6) u tome što njegovo ispunjenje omogućuje uporedivanje jednačina i nejednačina sa otklonjenim argumentom sa običnim jednačinama i nejednačinama u smislu Teorema 7.3..

<u>Primjer</u>. "Euler-ova" diferencijalna nejednačina sa otklonjenim argumentom

$$y(t)\left[y''(t) + \frac{\nu^2}{t^2}y(ct)\right] \leqslant 0 \quad , \quad t > 0$$

je, na osnovu Teorema 7.3. oscilatorna ako vrijedi: $c \geqslant 1$ i $\nu^2 > \frac{1}{4}$, a neoscilatorna ako je: $c \in (0,1]$ i $\nu^2 \leqslant \frac{1}{4}$.

7.5. Na kraju primjetimo da se mnogi od rezultata datih u ovoj disertaciji mogu, uz neznatne i očite tehničke izmjene u dokazima, proširiti na nešto općije oblike nejednačina:

$$y(t)\left[(a(t)b(y(t))y'(t))' + \Phi(t, y(t), y\langle\pi(t)\rangle)\right] \leqslant 0 \quad , \quad t \geqslant t_0$$

gdje π ima isto značenje kao i u 7.1., a Φ ima isti znak kao drugi argument i zadovoljava uslov:

$$\text{(7.10)} \qquad \liminf_{|u|\to\infty} \frac{|\Phi(t,u,v)|}{|f(u)|} \geqslant \beta\,\Phi(t,c,\langle c\rangle) \quad , \quad t \geqslant \tilde{t} \geqslant t_0$$

gdje su c i β pozitvne konstante a $\langle c\rangle = (c,c,\dots,c)$.
Proširenje ovakve vrste su npr. dali Nababan i Noussair [55, Teorem 3. i 4.], koji su dokazali neke specijalne slučajeve rezultata datih u Glavi 4 .
Značajnija proširenja nekih od dobivenih oscilacionih rezultata se mogu postići odbacujući pretostavku o diferencijabilnosti funkcije $\tau(t)$. U tom slučaju se na osnovu Leme 2.8. može lako pokazati da eventualno vrijedi:

$$y\langle\pi(t)\rangle \geqslant \gamma\frac{\tau(t)}{t}y(t) \quad , \quad \gamma \in (0,1)$$

pa se u tom slučaju uslov (7.10) zamjenjuje uslovom:

$$\text{(7.11)} \qquad \liminf_{|u|\to\infty} \frac{\Phi(t,|u|,\langle\delta\frac{\tau(t)}{t}|u|\rangle)}{f(|u|)} \geqslant \beta\,\Phi(t,c,\langle\delta\frac{\tau(t)}{t}c\rangle) \quad , \quad \delta > 0$$

pri čemu funkcija f zadovoljava izvjesne uslove.
Proširenja ove vrste su npr. dali Nababan i Noussair [55, Teorem 6. i 7.] , čiji su rezultati specijalni slučajevi nekih rezultata dokazanih u Glavi 4. i 7. .

L I T E R A T U R A

1 W.Allegretto, Oscillation criteria for semilinear equations in general domains, Canad. Math. Bull.19(1976),137-144.

2 F.V.Atkinson, On second order non-linear oscillations, Pacific J. Math. 1955,643-647.

3 N.P.Bhatia, Some oscillation theorems for second order differential equations,J. Math. Anal. Appl.15(1966),442-446.

4 L.E.Bobisud, Oscillation of nonlinear second order equations, Proc. Amer. Math. Soc. 23(1969),5o1-5o5.

5 G.J.Butler, On the oscillatory behavior of a second order nonlinear differential equation., Ann. Mat. Pura Appl.(4) 1o5(1975),73-92.

6 G.J.Butler, Hille-Wintner type comparison theorems for second-order ordinary differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 76(1979),51-59.

7 R.W.Carroll, Abstract methods in partial differential equations, Harper & Row, New York,1969.

8 W.J.Coles, An oscillation criterion for second order linear differential equations, Proc. Amer. Math. Soc.19(1968), 755-759.

9 W.J.Coles, A simple proof of a well-known oscillation theorem, Proc. Amer. Math. Soc.19(1968),5o7.

1o W.J.Coles, A nonlinear oscillation theorem, Int. Conf. on differential equations(Proc. Univ. Southern Cal., Los Ang., 1974),193-2o2,Academic Press, N. York,1975.

11 W.J.Coles and D.Willett, Summability criteria for oscillation of second order linear differential equations, Ann. Mat. Pura Appl.(4)79(1968),391-398.

12 L.E.Elśgol'ts,Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments, Holden-Day, San Francisko California, London, Amsterdam, 1966.

13 L.Erbe, Oscillation theorems for second order linear diff - rential equations, Pacific J. Math. 35(1970), 337 -343.

14 G.J.Etgen and J.F.Pawlowski, A comparison theorem and oscillation criteria for second order differential systems, Pacific J. Math., 72(1977), [illegible].

15 G.J.Etgen and R.T.Lewis, [illegible] theorem for second order differen[illegible] Math. J. 30(1980), 98-107.

16 W.B.Fite, Concerning the ze[illegible] of certain differential equations, Trans. [illegible] Math. Soc. [illegible], 341-352.

17 W.B.Fite, Properties of the s[illegible] certain [illegible]al differential equations, Tr[illegible] Soc. [illegible], 311-319.

18 A.K.Grammatikopoulos, Oscillat[illegible] for [illegible] ordinary differential [illegible] ting coefficients (u [illegible]

19 G.H.Hardy, Divergent series, [illegible].

20 P.Hartman, On non-oscillatory [illegible] of second order, Amer. J. [illegible].

21 P.Hartman, Ordinary differential [illegible], Wiley, New York, 1964.

22 P.Hartman, On nonoscillat[illegible] differential equations of second order, Proc. Am. Math. Soc. 64(1977), [illegible].

23 T.L.Hayden and H.C.Howar[illegible] of differential equations in Banach spaces, [illegible] 383-394.

24 E.Hille, Nonoscillation th[illegible] 64(1948), 234-252.

25 E.Hille, Lectures on Ordinary [illegible] equations, Reading Massachusetts, 196[illegible].

26 I.V.Kamenev, On the [illegible] solutions of [illegible] near second order [illegible] of [illegible], Differencial'nye Uravnenija [illegible]-1721.

27 I.V.Kamenev, Oscillation criteria for the solutions of ordinary differential equations of second order related to averaging, Differencial'nye Uravnenija 1o(1974), 246-252.

28 I.V.Kamenev, On the question of oscillation of solutions of a differential equation with a "integral" small coefficient, Differencial'nye Uravnenija 13(1978), 2141-2148.

29 A.G.Kartsatos, Properties of bounded solutions of nonlinear equations of second order, Proc. Amer. Math. Soc. 19(1968), 1o57-1o59.

3o A.G.Kartsatos and H. Onose, Remarks on oscillation of second order differential equations, Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ., Math.,5(1973), 23-31.

31 A.G.Kartsatos, On n-th order differential inequalities, J. Math. Anal. Appl. 52(1975),1-9.

32 A.G.Kartsatos and H.Onose, A comparison theorem for functional differential equations, Bull. Austral. Math. Soc. 14 (1976), 343-347.

33 I.T.Kiguradze, A note on the oscillation of solutions of the equation $u''(t)+a(t)|u|^{n}\mathrm{sgn}\,u=o$, Časopis Pest. Mat. 92(1967), 343-35o.

34 A.Kneser, Untersuchungen über die reelen nullstellen der integrale linearer differentialgleichungen,Math. Ann. 42 (1893), 4o9-435.

35 V.Komkov, Continuability and estimates of solutions of $(a(t)\Psi(x)x\ ) +c(t)f(x)=o$, An. Pol. Math. 2(1974),125-137.

36 R.G.Koplatadze, On the oscillation of solutions of n-th order differential inequalities with deviating argument, Ukrain. Math. Ž., 28(1976), 232-236.

37 M.Kulenović, Oscillatory and nonoscillatory behavior of solutions of certain nonlinear differential equation of n-th order, Radovi ANU BiH (u štampi).

38 M.Kulenović, Classification of solutions of n-th order perturbed differential equations (pojaviće se).

39 M. Kulenović, On certain second order non-linear differential inequalities, Radovi ANU BiH (u štampi).

4o M. Kulenović and M.K. Grammatikopoulos, On the asymptotic behavior of second order differntial inequalities with alternating coefficients, (pojaviće se).

41 M. Kulenović, Oscillation theorems for nonlinear second order differential inequalities, (pojaviće se).

42 M. Kulenović, Summability methods in second order nonlinear oscillations, (pojaviće se).

43 M. Kulenović, On oscillation of nonlinear partial differential inequalities, (pojaviće se).

44 T. Kusano and H. Onose, Oscillations theorems for second order differential equations with retarded argument, Proc. Japan. Acad. 5o(1974), 342-346.

45 T. Kusano, H. Onose and H.Tobe, On the oscillation of second order nonlinear ordinary differential equations, Hiroshima Math. J. 4(1974), 491-499.

46 G.G. Legatos and A.G. Kartsatos, Further results on the oscillation of solutions of second order equations, Math. Japon. 14(1968), 67-73.

47 W. Leighton, On self-adjoint differential equations of second order, J. London Math. Soc. 27(1952), 37-47.

48 Liu Tsai-Sheng, Classification of solutions of higher-order differential equations and inequalities with deviating arguments, J. Differential Equations 21(1976), 417-43o.

49 D.L. Lovelady, Nonoscillation in linear second order ordinary differential equations, Hiroshima Math. J. 5(1975), 135-139.

5o J.W. Macki and J.S.W. Wong, Oscillation theorems for linear second order differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 2o(1969), 67-72.

51 W.E. Mahfoud and S.M. Rankin, Some properties of solutions of $(r(t)\Psi(x)x')' + a(t)f(x)=o$, SIAM J. Math. Anal. 1o(1979), 49-54.

52 P. Marušiak, On oscillation of solutions of n-th order differential equations with retarded argument, Differencial'nye Uravnenija, 14(1978), 1186-1191.

53 J. D. Monk, Introduction to set theory, Mc Graw-Hill (1969).

54 R. A. Moore, The behavior of solutions of a linear differential equation of second order, Pacific J. Math. 5(1955),124-145.

55 S. Nababan and E.S. Noussair, Oscillation criteria for second order nonlinear delay inequalities, Bull. Austral. Math. Soc. 14(1976), 331-341.

56 M. Naito, Oscillation of differential inequalities with retarded arguments, Hiroshima Math. J. 5(1975), 187-192.

57 M. Naito and N. Yoshida, Oscillation theorems for semilinear elliptic differential operators, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 82(1978), 135-151.

58 E.S. Noussair and C.A. Swanson, Oscillation theory for semilinear Schrödinger equations and inequalities, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 75(1976), 67-81.

59 A.N. Odarič and O.N. Odarič, On oscillatory properties of second order nonlinear differential equations with retarded arguments, Methods for the qualitative study of differential equations with deviating argument,83-95, Izdanie Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kiev 1978.

60 H. Onose, Oscillation theorems for nonlinear second order differential equations, Proc. Amer. Math. Soc.26(1970),461-464.

61 H. Onose, A comparison theorem and the forced oscillation, Bull. Austral. Math. Soc. 13(1975),13-19.

62 H. Onose, A comparison theorem for delay differential equations, Utilitas Math. 10(1976), 185-191.

63 Z. Opial, Sur les integrales oscillantes de l'equation differentielle $u'' + f(t)u = 0$,Ann. Polon. Math.4(1958), 308-313.

64 G.H. Ryder and D.V. Wend, Oscillation of solutions of certain ordinary differential equations of n-th order, Proc. Amer. Math. Soc. 25(1970), 463-469.

65 V.N. Shevelo, Oscillation of solutions of differential equations with deviating argument, Naukova Dumka, Kiev, 1978.

66 V.A. Staikos and Y.G. Sficas, Oscillation for forced second order non-linear differential equations, Atti. Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.(8) 55(1973), 25-3o.

67 V.A. Staikos and C.G. Philos, Basic comparison results for the oscillatory and asymptotic behavior of differential equations with deviating arguments, (pojaviće se).

68 V.A. Staikos, Differential equations with deviating arguments-Oscillation theory, (neobjavljena monografija).

69 C. Sturm, Sur les equations differentielles lineaires du second ordre, J. Math. Pures Appl. 1(1836), 1o6-186.

7o C.A. Swanson, Comparison and oscillation theory of linear differential equations, Academic Press, New York, 1968.

71 C.C. Travis, Oscillation theorems for second-order differential equations with functional arguments, Proc. Amer. Math. Soc. 31(1972), 199-2o2.

72 C.C. Travis, A note on second order nonlinear oscillation, Math. Japon. 18(1973).

73 P. Waltman, Oscillations of solutions of a nonlinear equation, SIAM Rev. 5(1963), 128-13o.

74 D. Willett, Classification of second order linear differential equations with respect to oscillation, Advances in Math. 3 (1969), 594-623.

75 D. Willett, On the oscillatory behavior of the solutions of second order linear differential equations, Ann. Polon. Math. 21(1969), 175-194.

76 A. Wintner, A criterion of oscillatory stability, Quart. Appl. Math. 7(1949), 115-117.

77 A. Wintner, On the nonexistence of conjugate points, Amer. J. Math. 73(1951), 368-38o.

78 N. Yoshida, An oscillation theorem for characteristic initial value problems for nonlinear hyperbolic equations, Proc. Amer. Math. Soc. 76(1979), 95-1oo.